Pesquisa Operacional

Prof. Msc. Aparecido Vilela Junior
aparecido.vilela@unicesumar.edu.br

Revisão - PL

- Certa empresa fabrica dois produtos P1 e P2. O lucro unitário do produto P1 é de R$ 1.000 e o lucro unitário de P2 é de R$ 1.800. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais de P1 e 30 unidades de anuais de P2.
- Qual é o plano de produção para que a empresa maximize o seu lucro nesses itens?
- Construa o modelo de programação linear para esse caso.

Revisão- PL

- Certa empresa fabrica dois produtos P1 e P2. O lucro unitário do produto P1 é de R$ 1.000 e o lucro unitário de P2 é de R$ 1.800.

- Quais são as variáveis ?
  - x_1 quantidade a produzir de P1
  - x_2 quantidade a produzir de P2

- Qual a função Objetivo:
  - Max. Lucro = $1.000x_1 + 1.800x_2$

Revisão - PL

- Quais as restrições encontradas ?
- A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo anual de produção disponível para isso é de 1.200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais de P1 e 30 unidades de anuais de P2.
  - $20x_1 + 30x_2 \leq 1.200$
  - $x_1 \leq 40$
  - $x_2 \leq 30$
  - $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Exercício 01

- Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa “A” com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa “B” com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de uma semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo, 5 minutos para sua propaganda e que na há verba para mais de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar para obter o número máximo de telespectadores ? Construa o modelo do sistema.

Resolução

- Resposta:
  - $x_1 \rightarrow$ frequência semanal do programa A
  - $x_2 \rightarrow$ frequência semanal do programa B

  - Max. $T = 30.000x_1 + 10.000x_2$
  - s.a
    - $1x_1 + 1x_2 \geq 5$
    - $20x_1 + 10x_2 \leq 80$
    - $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Ferramentas p/ Resolução

Excel - Solver

EXCEL - SOLVER

- O Solver faz parte de um conjunto de programas algumas vezes chamado de ferramentas de análise hipotética
- Com o Solver você pode localizar um valor ideal para uma fórmula em uma célula (destino)
- Trabalha com um grupo de células relacionadas direta ou indiretamente com a fórmula na célula de destino.

EXCEL - SOLVER

- Ajusta os valores nas células variáveis que você especificar - células ajustáveis.
- Aplicar restrições para restringir os valores que o Solver poderá usar no modelo.
- As restrições podem se referir a outras células que afetem a fórmula da célula de destino
- No nosso curso usaremos o SOLVER para resolver Problemas de Programação Linear

EXCEL - SOLVER

- Existem dois modos de se formular um problema em programação linear: o modo tradicional, onde se usa o método gráfico (até duas variáveis) e o método Simplex (3 ou mais variáveis), ou o método computacional, onde existem programas prontos para resolver problemas de LP (como por ex. o programa "LINDO") ou então, utilizando as planilhas eletrônicas como EXCEL, LOTUS 1-2-3 ou Quattro Pró.

- O objetivo do presente texto é fornecer um roteiro para a resolução de um problema típico de LP utilizando o software EXCEL.

EXCEL - SOLVER

- **Dados de Entrada**: são os dados fornecidos no problema, isto é, os dados da função objetivo e os dados das equações de restrição (maior igual ou menor igual, incluindo as condições de não-negatividade). Esses dados devem aparecer em algum lugar na planilha..

- **Células variáveis**: Ao invés de usarmos nomes de variáveis como x1 ou y1, utilizamos um conjunto de células pré-definidas que fazem o papel das variáveis de decisão. Os valores nessas células podem ser mudados a fim de otimizar a função objetivo.

EXCEL - SOLVER

- **Célula destino**: essa célula irá acumular o valor calculado da função objetivo. A ferramenta SOLVER sistematicamente varia os valores das células variáveis a fim de otimizar o valor da célula destino.

- **Restrições ou vínculos**: no EXCEL, as restrições não aparecem diretamente na planilha. Ao invés disso, iremos especificar as desigualdades diretamente num quadro de diálogo da ferramenta SOLVER. Deve-se entrar todas as desigualdades, inclusive os vínculos de não-negatividade

EXCEL - SOLVER

- Em geral, a solução completa do problema envolve dois estágios:

- **1)** é a entrada de todos os dados fornecidos no problema, os valores iniciais das células variáveis (que adotaremos como sendo 1) e as fórmulas que relacionam essas células com os dados de entrada e cujo resultado é armazenado na célula destino.
- **2)** Ferramenta SOLVER no do Excel, que irá pedir a localização das células variáveis e da célula destino, bem como uma lista de todas as restrições envolvidas no problema, que são escritas em termos de endereços de células. Ao final é só pedir para que o SOLVER ache a solução otimizada

Resolvendo Problemas

Usando Solver do Excel

- Considere o Problema

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z = 3x_1 + 2x_2 \\
&st \\
&x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
&2x_1 + x_2 \leq 8 \\
&- x_1 + x_2 \leq 1 \\
&x_2 \leq 2 \\
&x_1 ; x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Usando Solver do Excel

Entrando os Parâmetros do Modelo

$$Max \ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$st$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

	A	B	C	D	E
1	Função	Coef. da Variável			
2	Objetivo	X1	X2		
3		3	2		
4	Variaveis				
5	Z=				
6					
7	Restrições	Coef. da Variável			Constantes
8	Nº	X1	X2		
9	1	1	2		6
10	2	2	1		8
11	3	-1	1		1
12	4	0	1		2
13					

Usando Solver do Excel

Definindo a Célula do Valor Ótimo

B5 = =(B3*B4)+(C3*C4)

	A	B	C	D	E
1	Função	Coef. da Variavel			
2	Objetivo	X1	X2		
3		3	2		
4	Variaveis				
5	Z=	0			
6					
7	Restrições	Coef. da Variável			Constantes
8	Nº	X1	X2		
9	1	1	2		6
10	2	2	1		8
11	3	-1	1		1
12	4	0	1		2

Usando Solver do Excel

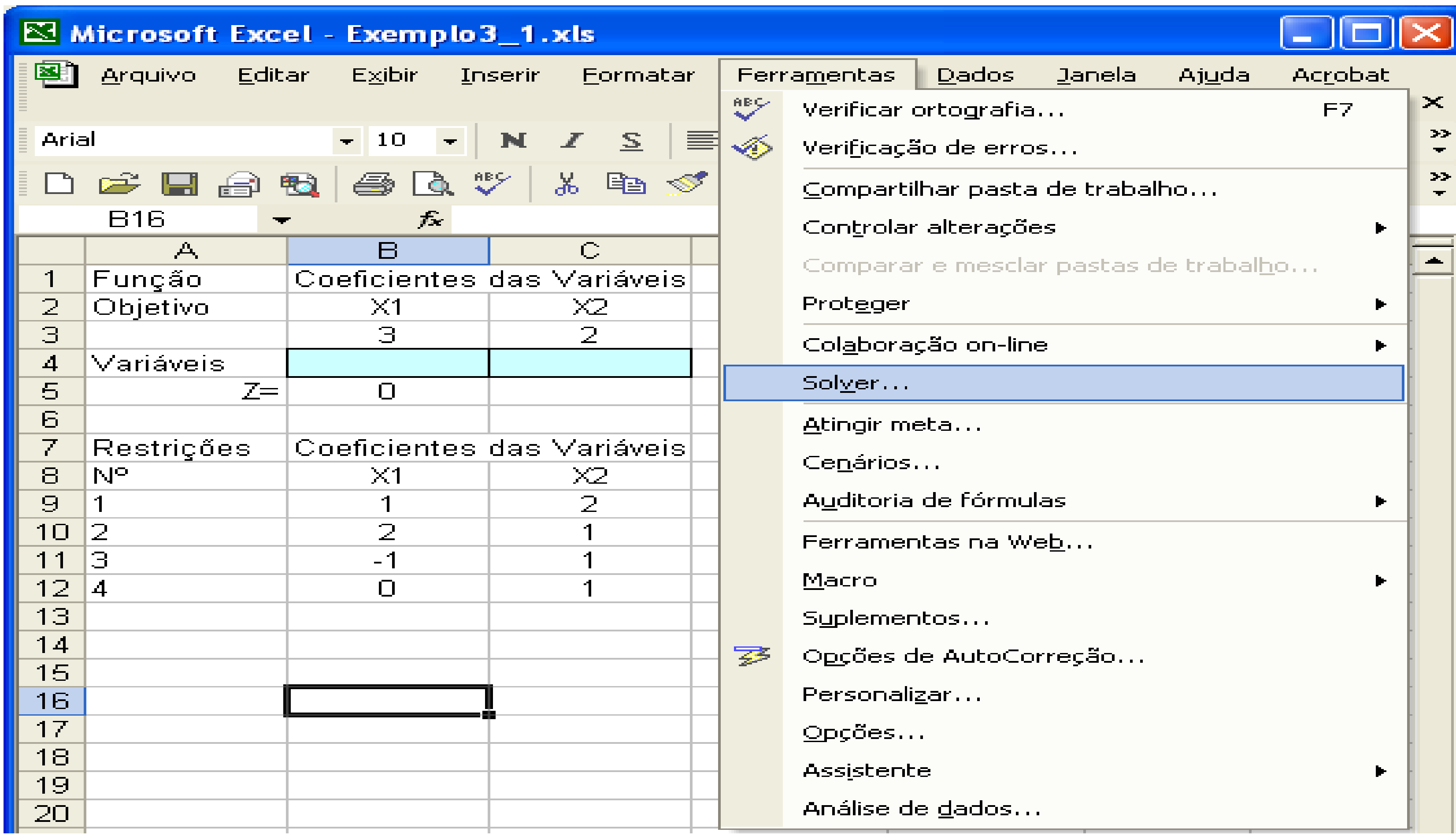
Definindo as variáveis de Folga ou Excesso

D9 = =B9*B4+C9*C4

	A	B	C	D	E
1	Função	Coef. da Variável			
2	Objetivo	X1	X2		
3		3	2		
4	Variaveis				
5	Z=	0			
6					
7	Restrições	Coef. da Variável			Constantes
8	Nº	X1	X2		
9	1	1	2	0	6
10	2	2	1	0	8
11	3	-1	1	0	1
12	4	0	1	0	2
13					

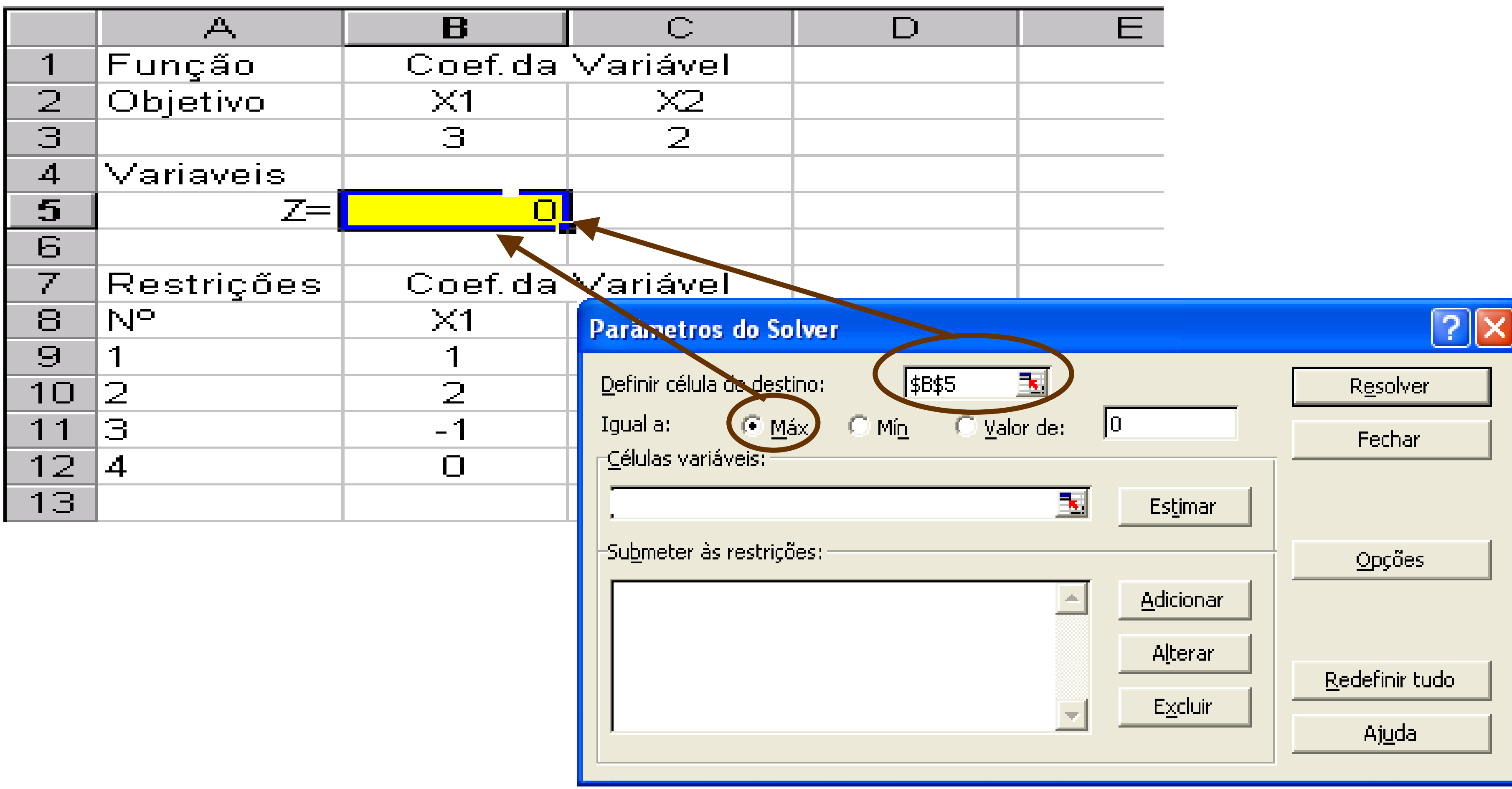
Usando Solver do Excel

Iniciando o Solver



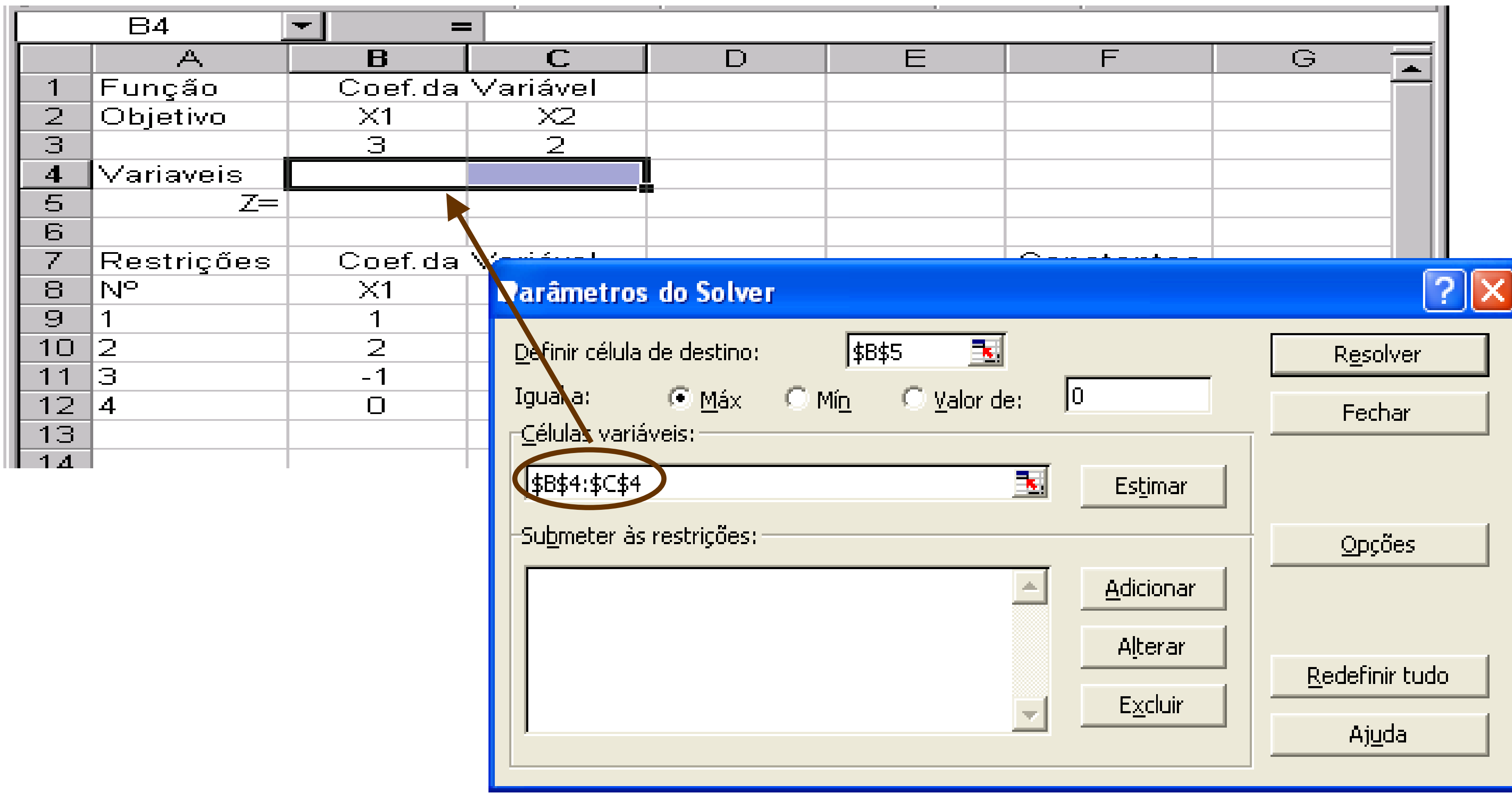
Usando Solver do Excel

Definindo a Célula Ótima (Z)



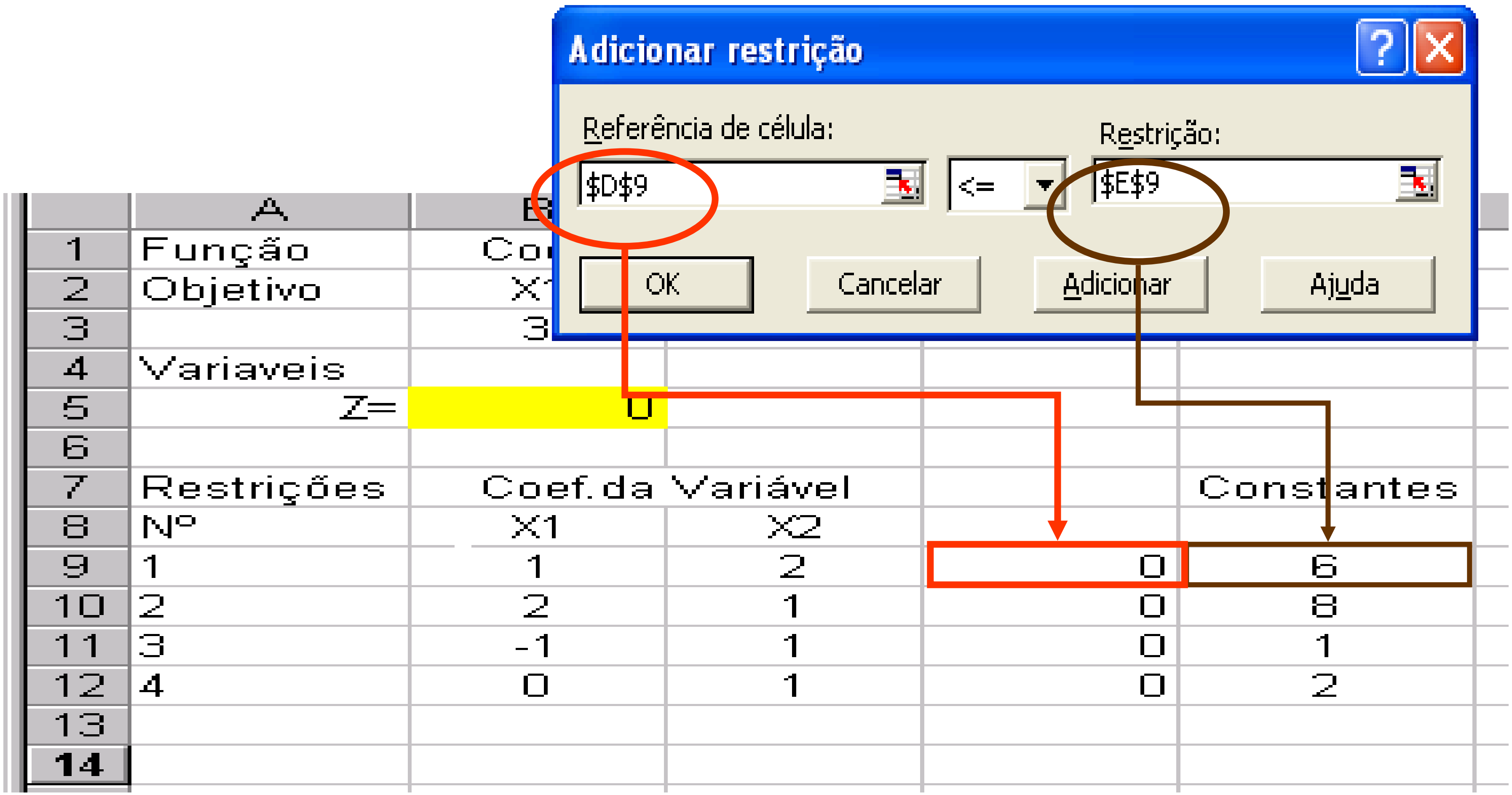
Usando Solver do Excel

Definindo as Células Variáveis



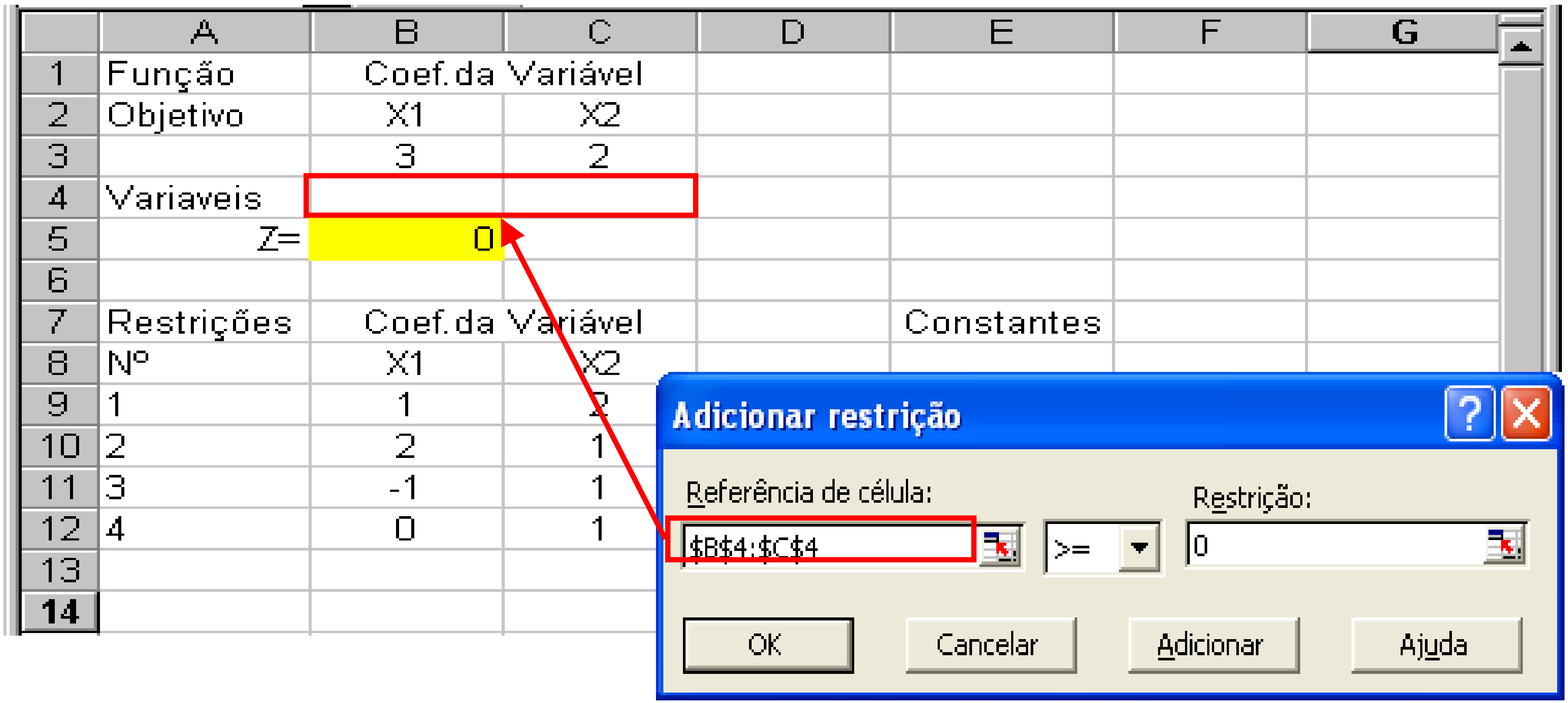
Usando Solver do Excel

Definindo as Restrições



Usando Solver do Excel

Definindo Condições de Não Negatividade

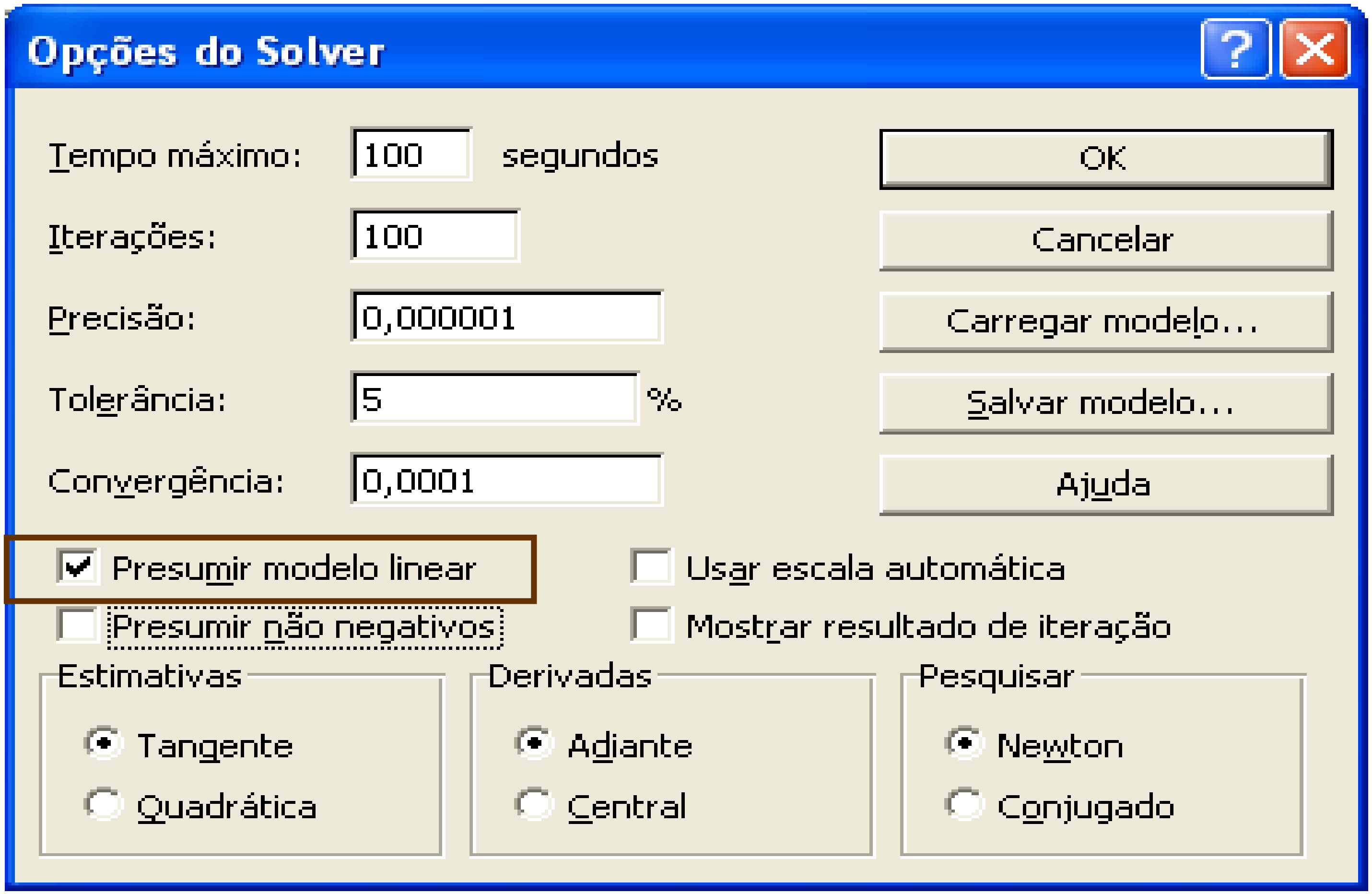


Usando Solver do Excel

Condições de Não Negatividade

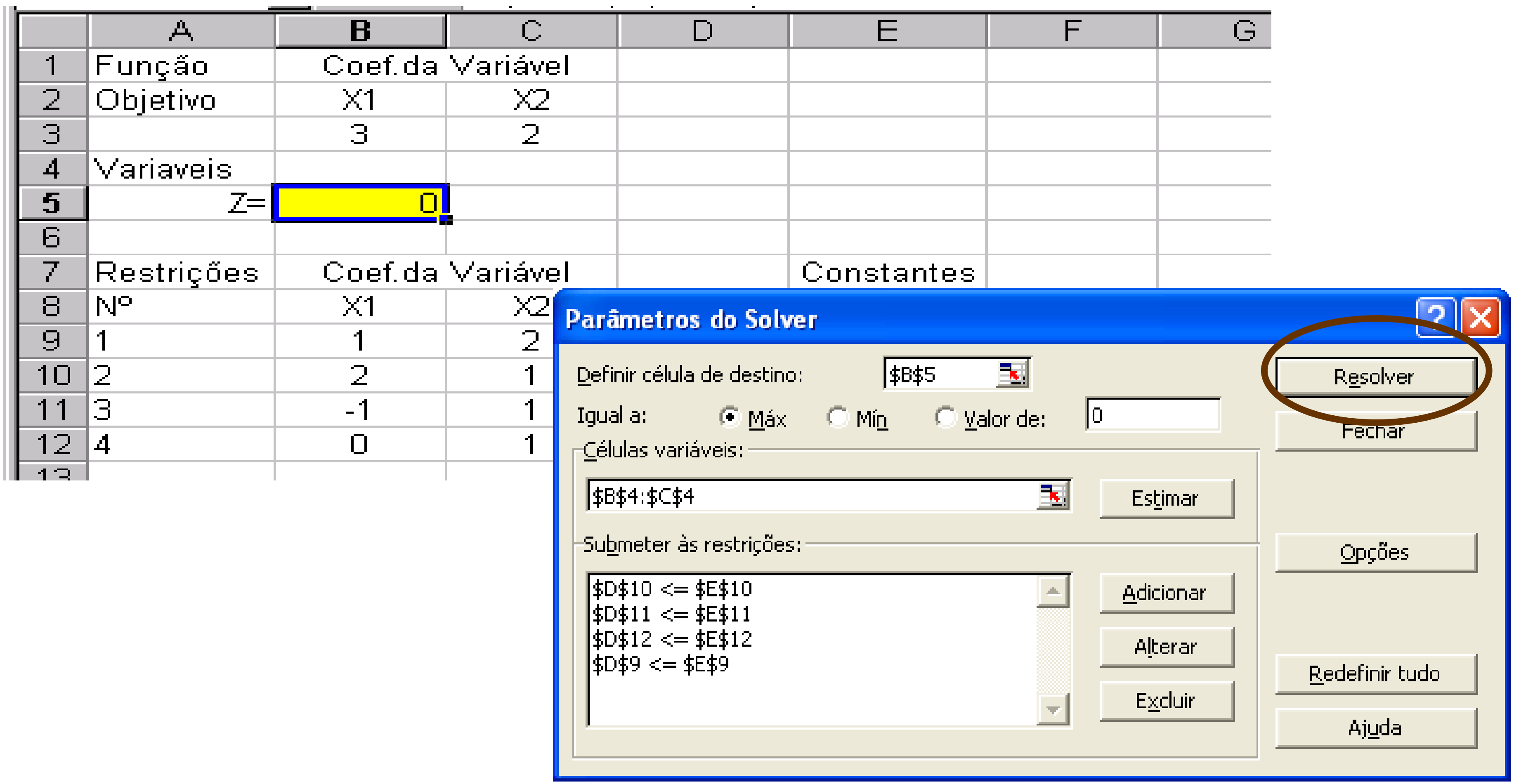
Usando Solver do Excel

Definindo o Problema de Programação Linear

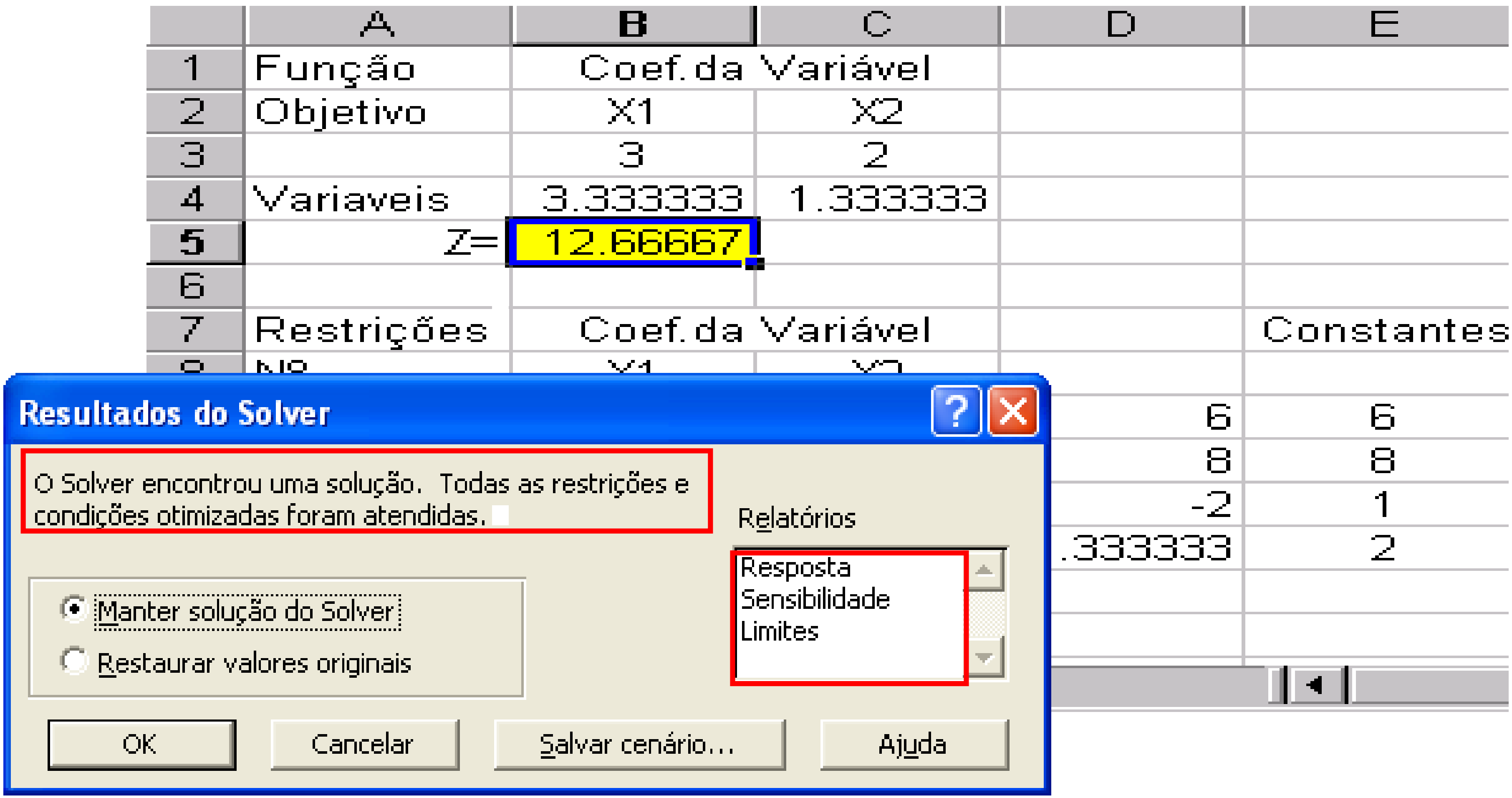


Usando Solver do Excel

Obtendo a Solução



Verificando a Resposta



Exercício 01

- Uma empresa fabrica dois produtos, *A* e *B*. O volume de vendas de *A* é de, no mínimo, 80% do total de vendas de ambos (*A* e *B*). Contudo, a empresa não pode vender mais do que 100 unidades de *A* por dia.
- Ambos os produtos usam uma matéria prima cuja disponibilidade máxima diária é de 240 kg.
- As taxas de utilização da matéria prima são 2 kg por unidade de *A* e 4 kg por unidade de *B*.
- Os lucros unitários para *A* e *B* são R$ 20,00 e R$ 50,00, respectivamente.
- Determine o mix de produtos ótimo para a empresa.

Solução

Função objetivo: $\mathbf{Max\ z = 20x_1 + 50x_2}$

PA: $\mathbf{x_1 \geq 0}$

PB: $\mathbf{x_2 \geq 0}$

Disponibilidade de M1: $\mathbf{2x_1 + 4x_2 <= 240}$

Demanda: $x_1 \geq 0{,}8(x_1 + x_2)$

Demanda: $\mathbf{x_1 \leq 100}$

Solução ótima: $(x_1, x_2) = (80, 20)$, z = R$ 2.600,00

Exercício 02

- Em uma fazenda deseja-se fazer 10.000 kilos de ração com o menor custo possível. De acordo com as recomendações do veterinário dos animais da fazenda, a mesma deve conter:
- 15% de proteína
- Um mínimo de 8% de fibra
- No mínimo 1100 calorias por kilo de ração e no máximo 2250 calorias por kilo. Para se fazer a ração, estão disponiveis 4 ingredientes cujas características técnico-econômicas estão mostradas abaixo: (Dados em %, exceto calorias e custo).
- A ração deve ser feita contendo no mínimo 20% de milho e no máximo 12% de soja. Formule um modelo de P. Linear para o problema:

	Proteína	Fibra	Caloria/Kg	Custo/Kg
Cevada	6,9	6	1760	30
Aveia	8,5	11	1700	48
Soja	9	11	1056	44
Milho	27,1	14	1400	56

Resolução

- X_i -> Kilos do ingrediente i a serem usados na ração (i = 1 (cevada), i= 2 (Aveia), i=3(Soja), i=4 (Milho)).
- Min $Z = 30x_1 + 48x_2 + 44 x_3 + 56x_4$
- s a

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10000$ (Quantidade de ração)

$0{,}069x_1 + 0{,}085x_2 + 0{,}09 x_3 + 0{,}271x_4 = 0{,}15 \times 10000$ (Proteína)

$0{,}06x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}11x_3 + 0{,}14x_4 >= 0{,}08 \times 10000$ (Fibras)

$1760x_1 + 1700x_2 + 1056x_3 + 1400x_4 >= 1100 \times 10000$ (Calorias)

$1760x_1 + 1700x_2 + 1056x_3 + 1400x_4 <= 2250 \times 10000$ (Calorias)

$X_4 >= 0{,}20 \times 10000$ (Milho)

$X_3 <= 0{,}12 \times 10000$ (Soja)

$X_i >= 0$

Exercício 03

- Uma companhia deseja obter uma nova liga metálica com 30% de chumbo, 20%de zinco e 50% de estanho a partir de alguns minérios tendo as seguintes propriedades:

	MINÉRIOS				
Propriedades	1	2	3	4	5
% – Chumbo	30	10	50	10	50
% – Zinco	60	20	20	10	10
% – Estanho	10	70	30	80	40
Custo ($/kg)	8,5	6	8,9	5,7	8,8

- O objetivo é determinar as proporções destes minérios que deveriam ser misturados para produzir a nova liga com o menor custo possível.
- Formule este problema como um modelo de P.Linear

Resolução 03

$x_i \Rightarrow$ fração de 1 kilo do minério i usada na produção de 1 kilo da nova liga.

(MIN) $Z = 8,5x_1 + 6x_2 + 8,9x_3 + 5,7x_4 + 8,8x_5$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$0,3x_1 + 0,1x_2 + 0,5x_3 + 0,1x_4 + 0,5x_5 = 0,3$$
$$0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,1x_4 + 0,1x_5 = 0,2$$
$$0,1x_1 + 0,7x_2 + 0,3x_3 + 0,8x_4 + 0,4x_5 = 0,5$$
$$x_i \geq 0$$

Observe que a 1ª restrição é redundante pois é a soma das outras 3.

Exercício 04

Uma fábrica descontinuou a produção de um produto que não estava dando lucro. Isto criou uma considerável capacidade de produção ociosa. A gerência está considerando em usar esta capacidade ociosa em um ou mais, de 3 produtos, os quais chamaremos de produtos 1, 2 e 3. A capacidade disponível das máquinas que poderiam limitar a saída está dada na tabela abaixo:

Tipo de Máquina	Tempo disponível (em máquinas–hora por semana)
A	500
B	350
C	150

O número de máquinas-hora necessárias para cada produto é:

Tipo de Máquina	Produto 1	Produto 2	Produto 3
A	9	3	5
B	5	4	0
C	3	0	2

O Departamento de Vendas indicou que o potencial de vendas para os produtos 1 e 2 excedem a taxa máxima de produção e que o potencial de vendas para o produto 3 é de 20 unidades por semana. O lucro unitário seria de \$30, \$12 e \$15 respectivamente para os produtos 1, 2 e 3. Quanto se deve fabricar dos produtos 1, 2 e 3 de maneira que o lucro seja máximo.
Formule o problema como um modelo de P.Linear.

Resolução 04

$$(\text{MAX})\ Z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

$$\begin{aligned} &\text{s.a} \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 500 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 350 \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 150 \\ x_3 &\leq 20 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercício 05

Uma família de fazendeiros possui 100 acres de terra e tem $30.000 em fundos disponíveis para investimento. Seus membros podem produzir um total de 3.500 homens-hora de trabalho durante os meses de inverno e 4.000 homens-horas durante o verão. Se todos estes homens-horas não são necessários, os membros mais jovens da família podem ir trabalhar em uma fazenda da vizinhança por $4,00 por hora durante o inverno e $4,50 por hora durante o verão. A família obtém renda com 3 colheitas e 2 tipos de criação de animais: vacas leiteiras e galinhas (para obter ovos). Nenhum investimento é necessário para as colheitas mas no entanto cada vaca necessita de um investimento de $900 e cada galinha de $7. Cada vaca necessita de 1,5 acre de terra, 100 homens-hora de trabalho no inverno e outros 50 homens-hora no verão. Cada vaca produzirá uma renda líquida anual de $800 para a família. Por sua vez cada galinha não necessita de área, requer 0,6 homens-hora durante o inverno e 0,3 homens-hora no verão. Cada galinha produzirá uma renda líquida de $5 (anual). O galinheiro pode acomodar um máximo de 3.000 galinhas e o tamanho dos currais limita o rebanho para um máximo de 32 vacas. As necessidades em homens-hora e a renda líquida anual, por acre plantado, em cada uma das 3 colheitas estão mostradas abaixo:

	Soja	**Milho**	**Feijão**
Homens–hora no inverno	20	35	10
Homens–hora no verão	50	75	40
Renda anual líquida ($)	375	550	250

A família deseja maximizar sua renda anual.

Resolução 05

$x_i\,(i = 1, 2, 3) \Rightarrow$ acres plantados com soja, milho e feijão, respectivamente.
$x_i\,(i = 4, 5) \Rightarrow$ nº de vacas e galinhas, respectivamente.
$x_i\,(i = 6, 7) \Rightarrow$ excesso de homens-hora no inverno e verão, respectivamente.

$$(\text{MAX})\ Z = 375x_1 + 550x_2 + 250x_3 + 800x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 4,5x_7$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 + 1,5x_4 \leq 100$$
$$900x_4 + 7x_5 \leq 30000$$
$$20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100x_4 + 0,6x_5 + x_6 = 3500$$
$$50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 0,3x_5 + x_7 = 4000$$
$$x_4 \leq 32$$
$$x_5 \leq 3000$$
$$x_i \geq 0$$