

Pesquisa Operacional

Professor Msc. Aparecido Vilela Junior
aparecido.vilela@unicesumar.edu.br

Problema de Transporte

Problema de Transporte

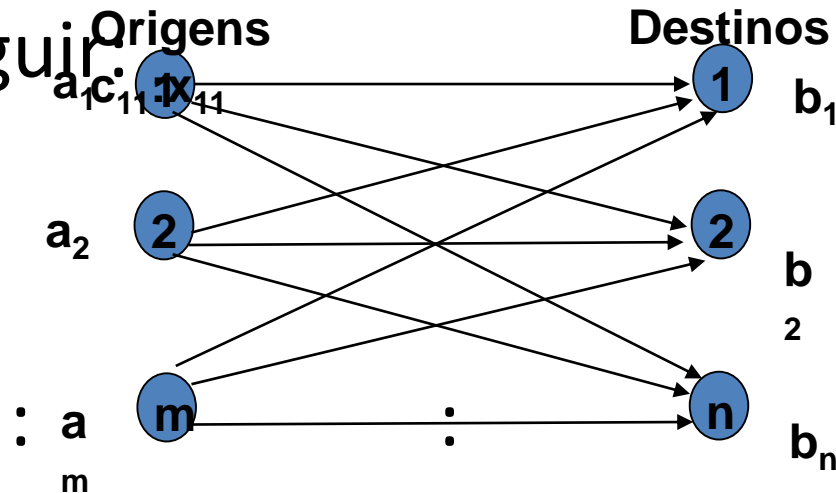
- O problema de transporte é uma classe especial de problema de programação linear que trata do envio de uma mercadoria de origens (por exemplo, fábricas) para destinos (por exemplo, depósitos).
- O objetivo é determinar a programação de expedição que minimize o custo total de expedição e, ao mesmo tempo, satisfaça os limites de fornecimento e demanda.

Problema de Transporte

A aplicação do problema de transporte pode ser estendida a outras áreas de operações, entre elas controle de estoque, programação de empregos e designação de pessoal.

Definição do problema

- O problema geral é representado pela rede na figura a seguir:



Há m origens e n destinos, cada um representado por um nó. Os arcos representam as rotas que ligam as origens aos

Problema de Transporte

- O custo de transporte por unidade c_{ij}
- A quantidade enviada, x_{ij}

A quantidade de suprimento na origem i é a_i e a quantidade de demanda no destino j é b_j . O objetivo do problema é determinar as incógnitas x_{ij} que minimizarão o custo total de transporte e, ao mesmo tempo, satisfarão todas as restrições de suprimento e demanda.

Problema de Transporte

Esta classe de problemas recebeu este nome porque seu método de resolução, denominado Método de Transporte, foi inicialmente utilizado para determinar o menor custo de transporte entre diversas fábricas de um produto e diversos centros consumidores.

Problema de Transporte

O Método de Transporte resolve esta classe de problemas de programação linear de uma maneira mais eficiente que o Simplex tradicional.

Porém o Método de Transporte foi especialmente utilizado antes da era da microcomputação, ou seja, nos primórdios da Pesquisa Operacional, para aperfeiçoar cálculos feitos a mão.

Problema de Transporte

Com o advento dos computadores pessoais, cada vez mais rápidos e com maior capacidade de processamento, diversos sistemas automatizados de resolução de Problemas de programação Linear têm sido lançados, os quais tornam dispensável a aplicação do Método de Transporte em sua forma original.

No entanto, a maneira como o problema pode ser equacionado permanece a mesma.

Problema de Transporte

O Problema de Transporte básico é aquele em que queremos determinar, dentre as diversas maneiras de distribuição de um produto, a que resultará no menor custo de transporte entre as fábricas e os centros de distribuição.

Por se tratar de um problema de programação linear, devemos fazer a hipótese de que o custo unitário de transporte de cada fábrica para cada destino é constante, independentemente da quantidade transportada.

Problema de Transporte

Matematicamente, queremos a minimização do custo total de transporte, a qual é dada por:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Min $Z =$

Problema de Transporte

- As restrições deste tipo de problema são: as fábricas não podem produzir mais do que suas capacidades instaladas e os centros consumidores não desejam receber volumes acima de suas demandas.
- Existem duas maneiras para que estas restrições seja implementadas.

Problema de Transporte

1. Na primeira, o montante ofertado (somatório das capacidades das fábricas) deve ser igualado ao total demandado (somatório das demandas dos centros consumidores). Para operacionalizar estas restrições de igualdade, as seguintes regras devem ser seguidas:

Problema de Transporte

- No caso de Oferta maior que a Demanda devemos introduzir um destino fantasma (dummy) que tenha os custos de transporte unitários de todas as fábricas para este destino iguais a zero. A demanda deste centro consumidor deve ser igual à diferença entre o total ofertado e o total demandado;
- No caso de Demanda maior que Oferta devemos introduzir uma fonte de oferta fantasma (dummy) que tenha os custos de transporte unitários para todos os destinos iguais a zero e uma capacidade igual à diferença entre o total demandado e o total ofertado.

Problema de Transporte

Inserindo uma demanda ou uma oferta fantasma, garantimos que todas as restrições do problema serão dadas por igualdades.

Em outras palavras, o total fabricado será virtualmente igual à demanda dos centros consumidores e vice-versa.

Matematicamente, estas restrições serão representadas pelas equações a seguir:

Problema de Transporte

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = f_i \quad (\text{para } i = 1, 2, \dots, m) \text{ restrições das capacidades das fábricas}$$

O somatório das quantidades enviadas de cada fábrica para os n destinos deve ser igual ao total ofertado por aquela fábrica (f_i)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ restrições dos centros consumidores}$$

O somatório das quantidades recebidas por centro consumidor das m fábricas deve ser igual ao total demandado por aquele destino (d_j).

Problema de Transporte

Somando-se todos os lados de todas as restrições, teremos:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m f_i \qquad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n d_j$$

e

Problema de Transporte

Como os lados esquerdos das duas equações acima representam o somatório dos custos de todos os itens transportados das fábricas para os destinos, podemos concluir que os lados direitos das equações também devem ser iguais, isto é:

$$\sum_{i=1}^m f_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

Esta última igualdade é condição necessária e suficiente para que qualquer problema de transporte tenha solução ótima quando modelado utilizando variáveis dummy.

Problema de Transporte

2. A segunda forma de se implementar as restrições varia com o total demandado pelos centros consumidores.

O procedimento é o seguinte:

No caso da oferta total ser maior do que a demanda total, nem todas as fábricas produzirão em plena capacidade, porém os centros consumidores irão receber as quantidades que desejam.

Problema de Transporte

Matematicamente, isto pode ser representado por:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq f_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \text{ restrições das fábricas}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ restrições dos centros consumidores}$$

Problema de Transporte

No caso da demanda total ser maior do que a oferta total, nem todos os centros consumidores não receberão toda a quantidade que desejam, porém as fábricas irão produzir tudo o que puderem, ou seja, irão trabalhar em plena capacidade.

Problema de Transporte

- Matematicamente,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = f_i$$

(i = 1, 2, ..., m) restrições das fábricas

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq d_j$$

(j = 1, 2, ..., n) restrições dos centros consumidores

Problema de Transporte

- Conforme vimos, a inserção de variáveis do tipo dummy não é obrigatória, porém facilitam a interpretação do resultado da otimização. Quando existe um desequilíbrio entre oferta e demanda, podemos ter as seguintes ações e interpretações para as variáveis dummy:

Capacidade > Demanda	Demanda > capacidade
Ação: busca de novos centros consumidores	Ação: criação de nova fábrica
Interpretação: capacidade ociosa das fábricas	Interpretação: demanda não atendida

Problema de Transporte

Caso LCL Bicicletas

- A LCL Bicicletas possui 3 fábricas localizadas no Rio, São Paulo e Belo Horizonte. A produção deve ser entregue em Recife, Salvador e Manaus. Considerando os custos de transporte unitários, as capacidades de produção das fábricas e as demandas dos centros consumidores que estão especificados na tabela a seguir, determine quanto deve ser produzido e entregue por cada fábrica em cada centro consumidor de forma a minimizar os custos de transporte.

	Centro Consumidor			
Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	Capacidade
Rio	25	20	30	2000
São Paulo	30	25	25	1500
B.Horizonte	20	15	23	1500
Demanda	2000	2000	1000	

Problema de Transporte:

Modelo Tradicional

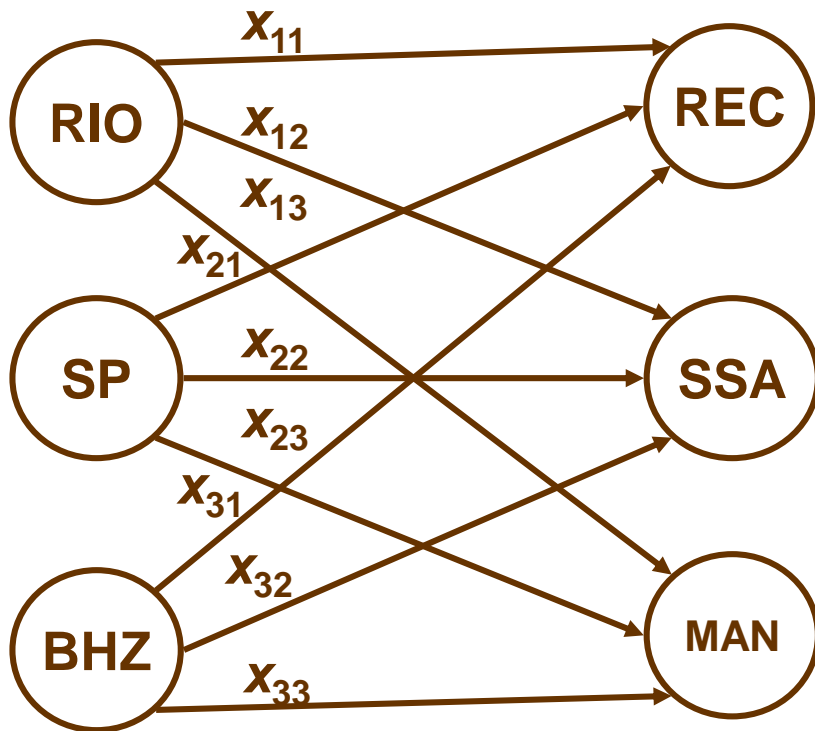
- Existem 9 variáveis para expressar a quantidade transportada em cada uma das possíveis vias.
 - x_{ij} = Quantidade transportada da fábrica i para o centro consumidor j .

$$i = \begin{cases} 1 - \text{Rio} \\ 2 - \text{São Paulo} \\ 3 - \text{Belo Horizonte} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1 - \text{Recife} \\ 2 - \text{Salvador} \\ 3 - \text{Manaus} \end{cases}$$

Problema de Transporte:

Variáveis de Decisão



	Centro Consumidor		
Fábrica	REC	SSA	MAN
Rio	x_{11}	x_{12}	x_{13}
SP	x_{21}	x_{22}	x_{23}
BH	x_{31}	x_{32}	x_{33}

Problema de Transporte:

Modelo Tradicional

$$\begin{aligned} \text{Min } & 25x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 30x_{21} + 25x_{22} + 25x_{23} \\ & + 20x_{31} + 15x_{32} + 23x_{33} \end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{array}{l|l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2000 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1500 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 2000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1500 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1000 \\ x_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

Problemas de Transporte:

Propriedades

- Soluções Inteiras:
 - Para problemas de transporte onde os valores das ofertas, o_i e demandas d_j , sejam números **inteiros**, todos os valores das variáveis das soluções básicas viáveis, incluindo a solução ótima, também serão inteiros.

Problemas de Transporte:

Propriedades

- A condição necessária e suficiente para um problema de transporte com n fábricas e m centros consumidores tenha solução é dada por:

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{j=1}^m d_j$$

Total da Capacidade = Total da demanda

Problema de Transporte

Oferta Diferente da Demanda

- A regra das variáveis fantasma (*Dummy*):
 - No caso de **Oferta \geq Demanda** devemos introduzir um **destino fantasma**;
 - No caso de **Demanda \geq Oferta** devemos introduzir uma **oferta fantasma**;
- Todos os custos relacionados às variáveis fantasma serão nulos;
- A oferta ou a demanda fantasma será dada pela diferença entre o total ofertado e total demandado.

Problema de Transporte

Caso LCL Bicicletas

- Modificando a oferta de São Paulo de 1500 para 3000

	Centro Consumidor			Capacidade
Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	(oferta)
Rio	25	20	30	2000
São Paulo	30	25	25	3000
B.Horizonte	20	15	23	1500
Demanda	2000	2000	1000	

- Demanda total menor que a Oferta total!**

Problema de Transporte

Caso LCL Bicicletas

- Cria-se um consumidor *Dummy*:

	Centro Consumidor				
Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	<i>Dummy</i>	Capacidade
Rio	25	20	30	0	2000
São Paulo	30	25	25	0	3000
B.Horizonte	20	15	23	0	1500
Demanda	2000	2000	1000	1500	

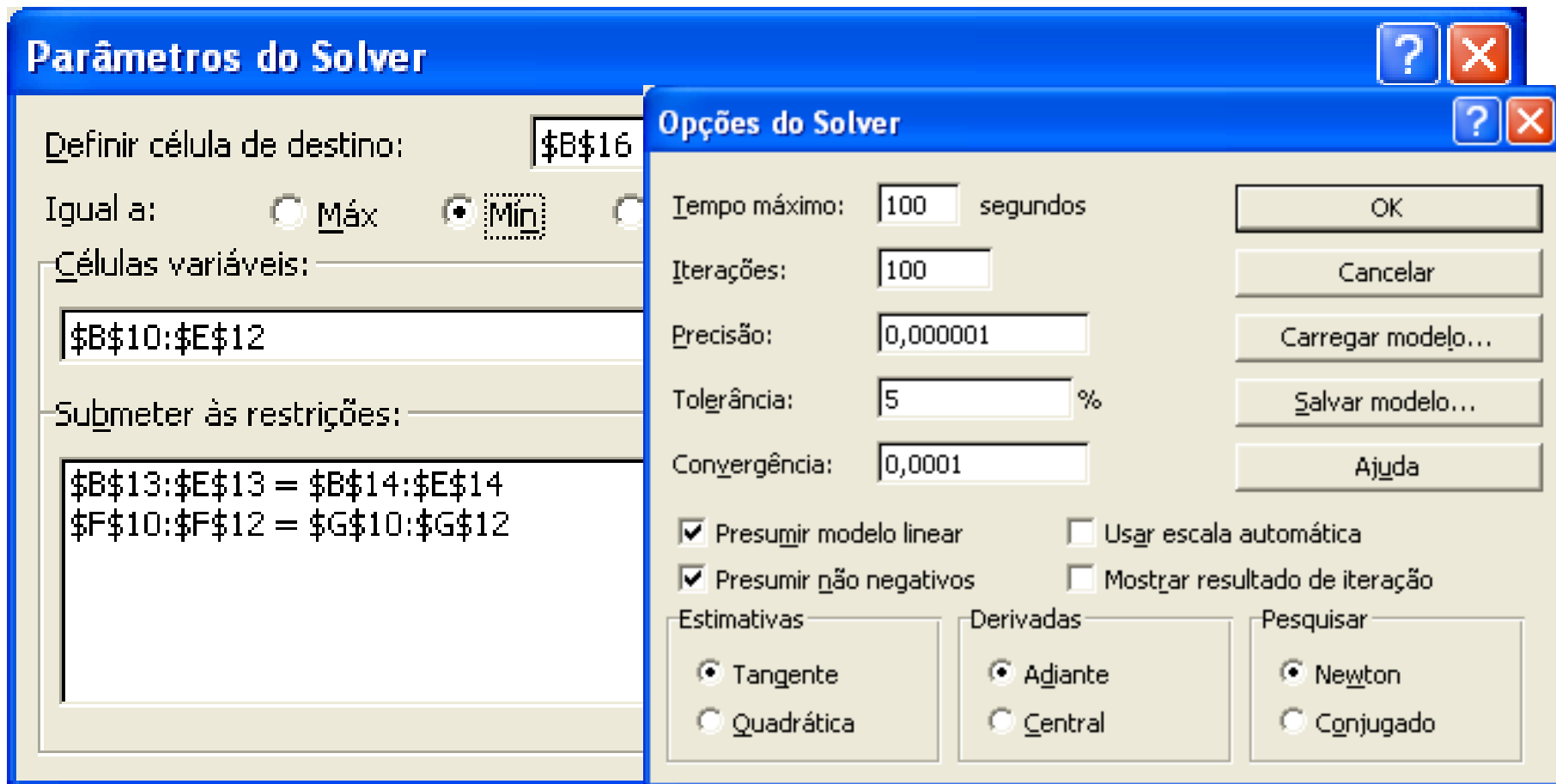
Caso LCL Bicicletas

Resolvendo no Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte					
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
3	Fábrica						
4	Rio de Janeiro	25	20	30	0		
5	São Paulo	30	25	25	0		
6	Belo Horizonte	20	15	23	0		
7							
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas				Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
10	Rio de Janeiro	0	0	0	0	0	2000
11	São Paulo	0	0	0	0	0	3000
12	Belo Horizonte	0	0	0	0	0	1500
13	Entregue	0	0	0	0		
14	Demanda	2000	2000	1000	1500		
15							
16	Custo Total	0					

Caso LCL Bicicletas

Parâmetros e Opções do



Parâmetros do Solver

Definir célula de destino:

Igual a: ☐ Máx ☒ Mín ☐

Células variáveis:

Submeter às restrições:

Opções do Solver

Tempo máximo: segundos

Iterações:

Precisão:

Tolerância: %

Convergência:

☒ Presumir modelo linear ☐ Usar escala automática

☒ Presumir não negativos ☐ Mostrar resultado de iteração

Estimativas: ☒ Tangente ☐ Quadrática

Derivadas: ☒ Adjante ☐ Central

Pesquisar: ☒ Newton ☐ Conjugado

OK Cancelar Carregar modelo... Salvar modelo... Ajuda

Caso LCL Bicicletas

Resolvendo no Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte					
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
3	Fábrica						
4	Rio de Janeiro	25	20	30	0		
5	São Paulo	30	25	25	0		
6	Belo Horizonte	20	15	23	0		
7							
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas				Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus	Dummy		
10	Rio de Janeiro	0	2000	0	0	2000	2000
11	São Paulo	500	0	1000	1500	3000	3000
12	Belo Horizonte	1500	0	0	0	1500	1500
13	Entregue	2000	2000	1000	1500		
14	Demanda	2000	2000	1000	1500		
15							
16	Custo Total	110000					

Problemas de Transporte

Solução Alternativa

- As Variáveis *Dummy* não são obrigatórias, apenas facilitam a interpretação do resultado da otimização.
- ♦ Capacidade > Demanda:
 - Criação de consumidor *dummy*
 - Interpretação: capacidade ociosa
 - Alternativa: restrições de oferta com sinal \leq
- ♦ Demanda > Capacidade:
 - Criação de fábrica *dummy*
 - Interpretação: demanda não atendida;
 - Alternativa: restrições de demanda com sinal \leq

Caso LCL Bicicletas

Modelo sem Fantasma no Excel

- Todas as fórmulas são idênticas...

	A	B	C	D	E	F
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte				
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus		
3	Fábrica					
4	Rio de Janeiro	25	20	30		
5	São Paulo	30	25	25		
6	Belo Horizonte	20	15	23		
7						
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas			Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus		
10	Rio de Janeiro	0	0	0	0	2000
11	São Paulo	0	0	0	0	3000
12	Belo Horizonte	0	0	0	0	1500
13	Entregue	0	0	0		
14	Demanda	2000	2000	1000		
15						
16	Custo Total	0				

Com dummy Sem dummy Rede

Caso LCL Bicicletas

Modelo sem Fantasma no Excel

Parâmetros do Solver

Definir célula de destino:

Igual a: ☐ Máx ☒ Min ☐

Células variáveis:

Submeter às restrições:

Opções do Solver

Tempo máximo: segundos

Iterações:

Precisão:

Tolerância: %

Convergência:

☒ Presumir modelo linear ☐ Usar escala automática

☒ Presumir não negativos ☐ Mostrar resultado de iteração

Estimativas: ☒ Tangente ☐ Quadrática

Derivadas: ☒ Adjante ☐ Central

Pesquisar: ☒ Newton ☐ Conjugado

OK Cancelar Carregar modelo... Salvar modelo... Ajuda

As restrições de oferta estão com sinal ≤

Caso LCL Bicicletas

Modelo sem Fantasma no

	A	B	C	D	E	F
1	LCL Bicicletas	Custos de Transporte				
2	Centro Consumidor	Recife	Salvador	Manaus		
3	Fábrica					
4	Rio de Janeiro	25	20	30		
5	São Paulo	30	25	25		
6	Belo Horizonte	20	15	23		
7						
8	Centro Consumidor	Quantidades Transportadas			Fabricado	Capacidade
9	Fábrica	Recife	Salvador	Manaus		
10	Rio de Janeiro	1500	500	0	2000	2000
11	São Paulo	500	0	1000	1500	3000
12	Belo Horizonte	0	1500	0	1500	1500
13	Entregue	2000	2000	1000		
14	Demanda	2000	2000	1000		
15						
16	Custo Total	110000				

Com dummy / Sem dummy / Rede /