Pesquisa Operacional

Professor Msc. Aparecido Vilela Junior
aparecido.vilela@unicesumar.edu.br

Dualidade

O problema Dual

Certas vezes estamos interessados em encontrar uma estimativa da solução ótima em vez de encontrá-la, utilizando o método Simplex. Isto pode ser obtido através da procura de valores limites inferiores (para maximização) ou superiores (para minimização).

Dualidade

- Redução da quantidade de cálculos executada pelo modelo simplex
- Modelo inicial, chamado de primal ,pode ser substituído por outro modelo chamado de dual.
- A solução do dual é mais rápida.
- Conhecida a solução do Dual, conheceremos em conseqüência a solução do primal.

Modelo de PL Primal

- A função objetivo é de maximização
- As restrições são do tipo <=
- As variáveis são não negativas

Modelo Dual

- Ao modelo anterior associa-se um outro modelo chamado de dual, construído da seguinte forma:
  - 1) Variáveis de decisão do dual: cada restrição do primal corresponderá a uma variável yi
  - 2) Objetivo : A função objetivo será de minimização. Cada uma de suas parcelas será o produto da variável Yi pelo termos da direita da restrição correspondente
  - 3)restrições : cada variável de decisão do primal gera uma restrição do dual
    - Termos da esquerda: cada termo é o produto da variável Yi pelo coeficiente respectivo da variável de decisão primal.
    - Sinal : >=
    - Termo da direita: é o coeficiente da variável primal na função objetivo.
- 4) As variáveis Yi são todas não negativas.

Exemplo

Primal : Max Z = 2x1 + 3x2 + X3

Variáveis duais

SA : 3x1 + 4x2 + 2x3 <= 10 ---- y1

2x1 + 6x2 + x3 <= 20 ---- y2

x1 - x2 - x3 <= 30 ---- y3

DUAL : Mín. D = 10y1 + 20y2 +30y3

SA: 3y1 +2y2 + y3 >=2 (coeficiente da FO de x1)

4y21 +6y2 –y3 >=3 (coeficiente da FO de x2)

2y1 + y2 - y3 >= 1 (coeficiente da FO de x3)

primal: modelo de Minimização

- A) função objetivo de minimização
- B) restrições do tipo >=
- C) variáveis não negativas

- Modelo DUAL:

- A) Função objetivo de Maximização
- B) restrições do tipo <=
- C) variáveis todas não negativas

Exemplo: O dual do exemplo anterior será o prim

- Mín. $Z = 10 x1 + 20x2 + 30 x3$

SA : : $3x1 + 4x2 + x3 >= 2$ ---- y1

$4x1 + 6x2 - x3 >= 3$ ---- y2

$2x1 + x2 - x3 >=1$ ---- y3

- Dual

DUAL : Max. $D = 2y1 + 3y2 +1y3$

SA: $3y1 +4y2 + 2y3 <=10$ (coeficiente da FO de x1)

$4y1 +6y2 +y3 <=20$ (coeficiente da FO de x2)

$1y1 - y2 - y3 <= 30$ (coeficiente da FO de x3)

O dual, obtido a partir de um dual, retorna ao modelo primal

O problema Dual

De modo geral, podemos dizer que a todo problema de maximização de programação linear na forma padrão corresponde um problema de minimização denominado Problema Dual

PRIMAL

Max Z = 5x1 + 2x2

Sujeito a:

x1 ≤ 3

x2 ≤ 4

x1 + 2x2 ≤ 9

x1≥ 0 e x2 ≥ 0

DUAL

Min 3y1 +4y2 + 9y3

S.a:

y1 + y3 ≥ 5

y2 + 2y3 ≥ 2

y1, y2 , y3 ≥ 0

O problema Dual

De uma forma geral:

Primal	Dual
Max $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Min $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$s.a: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i$	$s.a: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$
$x_j \geq 0$	$y_i \geq 0$
$(i = 1,2,\ldots,m)$	$(i = 1,2,\ldots,m)$
$(j = 1,2,\ldots,n)$	$(j = 1,2,\ldots,n)$

O problema Dual

Existe uma série de relações entre o Primal e o Dual, entre as quais podemos citar:

- Os termos constantes da restrições do Dual são os coeficientes das variáveis da função objetivo do Primal;
- Os coeficientes das variáveis da função objetivo do Dual são os termos constantes das restrições do Primal;
- As restrições do Dual são do tipo maior ou igual, ao passo que as do Primal são do tipo menor ou igual (na forma padrão);
- O número de variáveis do Dual é igual ao número de restrições do Primal;
- O número de restrições do Dual é igual ao número de variáveis do Primal
- A matriz dos coeficientes do Dual é a transposta da matriz dos coeficientes do Primal

O problema Dual

Existem algumas razões parra o estudo dos problemas duais. A primeira e mais importante são as interpretações econômicas que podemos obter dos valores das varáveis do Dual na solução ótima, tais como variações marginais. A segunda está ligada ao número de restrições. Computacionalmente falando é, algumas vezes, mais eficiente resolver o problema Dual.

Primal e Matriz de Coeficientes

- Primal:
- Max Z = 5x1 + 2x2 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$
- s.a.
- X1 <= 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$
- X2 <= 4 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$
- X1 + 2x2 <= 9 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$
- X1, X2 >= 0

Dual e Matriz de Coeficientes

- Dual
- Min D = 3y1 + 4y2 + 9y3   [3   4 9]
- sa.
- y1 + y3 >= 5;   [1 0 1]   [5]
- y2 + 2y3 >= 2   [0 1 2]   [2]

Primal Minimização

- Considere um problema de minimização:
- Min Z = 5x1 + 2x2
- sa
- x1 <= 3;
- x2 <= 4;
- x1 + 2x2 >= 9;

- Nesse caso devemos realizar a preparação do problema antes de aplicar as regras anteriores.

Observações

Observações:

1. A função objetivo do dual é de minimização, e a do primal é de maximização;
2. O elementos do vetor $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ (rhs) do primal formam a função objetivo do dual;
3. Os elementos do vetor $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ do primal é o vetor rhs do dual;
4. As restrições do dual são do tipo $\geq$, e do primal são do tipo $\leq$;
5. O número de variáveis do dual é igual ao número de restrições do primal;
6. O número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal;
7. A matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do dual.

Teorema I

Propriedade 1: "O dual do dual é o primal."

Primal:

$$
\begin{array}{lll}
\max & 2x_1 & +3x_2 \\
s.a & -x_1 & +2x_2 \leq 4 \\
 & x_1 & +x_2 \leq 6 \\
 & x_1, & x_1 \geq 0
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{lll}
\min & 4y_1 & +6y_2 \\
s.a & -y_1 & +y_2 \geq 2 \\
 & 2y_1 & +y_2 \geq 3 \\
 & y_1, & y_1 \geq 0
\end{array}
$$

Teorema II

Propriedade 2: "Se a restrição k do primal é igualdade, então a variável y_k do dual é sem restrição de sinal."

Primal:

$$\begin{array}{llll} \max & 2x_1 & +3x_2 \\ s.a & -x_1 & +2x_2 \le 4 \\ & x_1 & +x_2 = 6 \\ & x_1, & x_2 \ge 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{llll} \min & 4y_1 & +6y_2 \\ s.a & -y_1 & +y_2 \ge 2 \\ & 2y_1 & +y_2 \ge 3 \\ & & y_1 \ge 0; \quad y_2 \text{ livre} \end{array}$$

Teorema III

Propriedade 3: "Se a restrição k do primal é maior ou igual, então a variável y_k do dual é não positiva."

$$
\text{Primal:}\quad
\begin{array}{llll}
\max & 2x_1 & +3x_2 & \\
s.a & -x_1 & +2x_2 \leq 4 & \\
 & x_1 & -3x_2 \geq 9 & \\
 & x_1 & +x_2 \leq 6 & \\
 & x_1, & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\text{Dual:}\quad
\begin{array}{llll}
\min & 4y_1 & +9y_2 & 6y_3 \\
s.a & -y_1 & +y_2 & +y_3 \geq 2 \\
 & 2y_1 & -3y_2 & y_2 \geq 3 \\
 & y_1, & y_3 \geq 0 & y_2 \leq 0
\end{array}
$$

Teorema IV

Propriedade 4: "Se a variável x_p do primal é sem restrição de sinal, então a restrição p do dual é uma igualdade."

Primal:

$$\begin{array}{llll} \max & 2x_1 & +3x_2 & \\ s.a & -x_1 & +2x_2 \le 4 & \\ & x_1 & +x_2 \le 6 & \\ & & x_1 \ge 0;\ x_2 \text{ livre} & \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{llll} \min & 4y_1 & +6y_2 & \\ s.a & -y_1 & +y_2 \ge 2 & \\ & 2y_1 & +y_2 = 3 & \\ & y_1, & y_2 \ge 0 & \end{array}$$

Teorema V

Propriedade 5: "Se a variável x_p do primal é não-positiva, então a restrição p do dual é menor ou igual."

Resumo

Resumo das propriedades

Primal (max) $\rightarrow$	Dual (min)
restrição k é $\leq$	$y_k \geq 0$
restrição k é $=$	y_k livre
restrição k é $\geq$	$y_k \leq 0$
$x_p \geq 0$	restrição p é $\geq$
x_p é livre	restrição p é $=$
$x_p \leq 0$	restrição p é $\leq$
Dual (max) $\leftarrow$	Primal (min)

Exercícios

$$
\begin{aligned}
\max\ Z &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\
s.a \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \le 7 \\
& 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 \ge -6 \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\
& x_1,\ x_4 \text{ livre} \\
& x_2 \le 0 \\
& x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Resposta

$$
\begin{aligned}
\min\ D &= 7y_1 - 6y_2 + 5y_3 \\
s.a \quad & y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 1 \\
& 3y_1 - y_2 + 2y_3 \le 2 \\
& 5y_1 - 4y_2 + 2y_3 \ge -3 \\
& y_1 - 3y_2 + 4y_3 = -4 \\
& y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \text{ livre}
\end{aligned}
$$

Referências

- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**: modelagem em Excel. São Paulo: Campus, 2006.