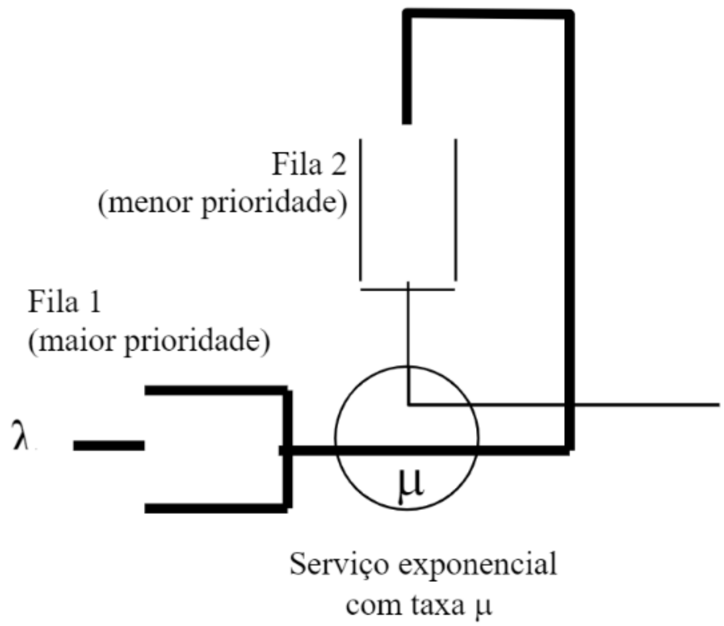
Solução analítica do Trabalho de Simulação



Nos foi passado no enunciado do trabalho de simulação que $\mu = 1(s^{-1})$ e que tanto $\overline{X_1} = \overline{X_2} = \overline{X} = \frac{1}{\mu} = 1 \text{ segundo.}$

E nosso simulador deverá achar com IC 95% e 5% de precisão os valores de
$E[T_1], E[W_1], V(W_1), E[N_1], E[Nq_1], E[T_2], E[W_2], V(W_2), E[N_2], E[Nq_2]$.

para diferentes valores de ρ.

E de forma analítica:

$E[W_1] = \text{tempo médio na fila de espera 1}$, como ela é dita como uma M/M/1 FCFS, sabendo que $\overline{X_r} = \overline{X}$ na M/M/1 por falta de memória.

$E[W_1] = \frac{\rho_1 \overline{X_{r_1}}}{1-\rho_1} = \frac{\rho_1 \overline{X_1}}{1-\rho_1}$, $\rho_1 < 1$

Porque o cliente típico na fila 1 apenas espera se encontrar alguém da fila 1 sendo atendido, no caso de encontrar alguém da fila 2 lá, ele interrompe.

E é fácil concluir também que

$E[T_1] = E[W_1] + E[X_1]$

Agora para pensar em $E[W_2]$, imaginemos como está o sistema no instante que o cliente típico chega na fila 2 , e imaginemos que ninguém mais chega. Na fila 2 se encontram as $E[N_{q_2}]$ pessoas na fila de espera 2 que estavam lá aguardando todas da fila 1 terminar seu serviço somadas com as $E[N_{s_1}] = \rho_1$ pessoas que estavam sendo atendidas e tivemos que esperar concluir o serviço na fila 1, mais as $E[N_{q_1}]$ pessoas que foram atendidas na nossa frente e também geraram nosso tempo de espera na fila 1 , e ai sim lá estamos nós.

Mas enquanto estávamos no sistema da fila 1 ($E[T_1]$) chegaram $\lambda E[T_1]$ pessoas na fila 1, e elas vão ser atendidas antes de nós na fila 1 e depois iram para trás de nós na fila 2.

Então $E[W_{02}] = (E[N_{q_2}] + \rho_1 + E[N_{q_1}])E[X_2] + \lambda E[T_1]E[X_1]$

Só para melhorar os termos, sabemos que $\overline{X_1} = \overline{X_2} = \overline{X} = \frac{1}{\mu} = 1 \text{ segundo}$ então..

$$E[W_{02}] = (E[N_{q_2}] + \rho_1 + E[N_{q_1}])E[X_1] + \lambda E[T_1]E[X_1]$$

$$E[W_{02}] = E[N_{q_2}]E[X_1] + E[W_1] + \rho_1 E[T_1]$$

Mas pessoas chegam, e as do tipo 1 expandem nosso tempo de espera… então:

$$E[W_2] = \frac{E[N_{q_2}]E[X_1] + E[W_1] + \rho_1 E[T_1]}{1-\rho_1}$$

$$E[W_2] = \frac{\rho_2 E[W_2] + E[W_1] + \rho_1 E[T_1]}{1-\rho_1}$$

$$E[W_2] = \frac{E[W_1] + \rho_1 E[T_1]}{1-\rho_1-\rho_2} \ , \ \rho_1 + \rho_2 = \rho < 1$$

E disso tiramos também que

$$E[T_2] = E[W_2] + E[X_2]$$

E também para as outras medidas temos por Little que:

$$E[N_1] = \lambda E[T_1]$$

$$E[N_2] = \lambda E[T_2]$$

$$E[N_{q_1}] = \lambda E[W_1]$$

$$E[N_{q_2}] = \lambda E[W_2]$$

Mas se $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ e $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ e $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\mu_1 = \mu_2$ então $\rho_1 = \rho_2$ e na verdade então $\rho_1 = \rho_2 = \frac{\rho}{2}$.

E fiz um pequeno código que nos dá a resposta como deve ser para cada valor de ρ .

```
rhos = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9]
X1_MEAN = 1         # Avg. processing time in minutes of queu 1
X2_MEAN = 1         # Avg. processing time in minutes of queu 2
```

Defini nossos valores já dados, e a partir dele vou construir funções que usando esses valores nos retornem algo…

```
W1_MEANs = [(rhos[i]/2 * X1_MEAN)/(1-rhos[i]/2) for i in range(len(rhos))]       # Avg. interarrival time in minutes of queu 1

T1_MEANs = [X1_MEAN + W1_MEANs[i] for i in range(len(W1_MEANs))]       # Avg. time in queu 1

W2_MEANs = [(W1_MEANs[i] + (rhos[i]/2) * T1_MEANs[i])/(1-rhos[i]) for i in range(len(rhos))]       # Avg. interarrival time in minutes of q

T2_MEANs = [X2_MEAN + W2_MEANs[i] for i in range(len(W2_MEANs))]       # Avg. time in queu 2
```

E utilizando os resultados acima eu posso por Little calcular os nossas métricas de número de pessoas em cada uma das 4 partes do processo. Mas não temos lambda…

Mentira ! Temos sim, porque $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ mas nosso μ é 1 então $\rho = \lambda$.

Então usando list comprehension do python:

```
N1 = [T1_MEANs[i]*rhos[i] for i in range(len(rhos))] # número de clientes na fila de espera 1

N2 = [T2_MEANs[i]*rhos[i] for i in range(len(rhos))] # número de clientes na fila de espera 2

Nq1 = [W1_MEANs[i]*rhos[i] for i in range(len(rhos))] # número de clientes na fila de espera 1
```

```
Nq2 = [W2_MEANs[i]*rhos[i] for i in range(len(rhos))] # número de clientes na fila de espera 2
```

E ai eu fiz um print bem simples para mostrar todos os valores analíticos de cada valor de rho:

```
for i in range(len(rhos)):
    print("Para rho = ", rhos[i], " temos que o tempo que se passa no sistema da fila 1 é: ", T1_MEANs[i], " segundos e o tempo que se pass
    print("E o tempo de espera na fila 1 é: ", W1_MEANs[i], " segundos e o tempo de espera na fila 2 é: ", W2_MEANs[i], " segundos. \n")
    print("O número de clientes no sistema da fila 1 é: ", N1[i], " e o número de clientes no sistema da fila 2 é: ", N2[i], " . \n")
    print("O número de clientes na fila de espera da fila 1 é: ", Nq1[i], " e o número de clientes na fila de espera da fila 2 é: ", Nq2[i]
    print("E o tempo passado no sistema inteiro é : ", T1_MEANs[i] + T2_MEANs[i], " segundos. \n")
```

e um exemplo de saída é a seguinte:

```
PS C:\Users\mathe\OneDrive\Desktop\Trabalho de simulação - AD> & C:/Users/mathe/anaconda3/python.exe "c:/Users/mathe/OneDrive/Desktop/Trabalho de simulação - AD/main.py"
Para rho =  0.2  temos que o tempo que se passa no sistema da fila 1 é:  1.1111111111111112  segundos e o tempo que se passa no sistema da fila 2 é:  1.2777777777777777  segundos.

E o tempo de espera na fila 1 é:  0.11111111111111112  segundos e o tempo de espera na fila 2 é:  0.2777777777777778  segundos.

O número de clientes no sistema da fila 1 é:  0.22222222222222224  e o número de clientes no sistema da fila 2 é:  0.2555555555555554  .

O número de clientes na fila de espera da fila 1 é:  0.022222222222222227  e o número de clientes na fila de espera da fila 2 é:  0.0555555555555556  .

E o tempo passado no sistema inteiro é :  2.388888888888889  segundos.
```

Isso vai ser arrumado mais para frente, eu estou deixando os valores com várias casas decimais justamente para poder ver o nível de erro comparado com as respostas futuras simuladas.