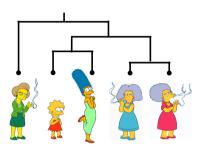
Clusterização ou Análise de Agrupamento de Dados

Stanley R. M. Oliveira



Resumo da Aula

- □ Clusterização ou análise de agrupamentos:
 - Conceitos básicos e aplicações.
- □ Tipos de dados em clusterização.
- Avaliando a qualidade de clusters gerados.
- □ Similaridade entre objetos.
- Métodos de Clusterização:
 - Particionamento, Hierárquico, EM, Baseados em densidade, etc.
- Medidas para avaliação de clusters:
 - Internas (Coesão e Separação).
- Exemplos de geração de Clusters no Weka.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

2

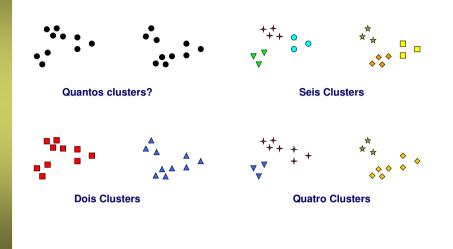
O que é análise de agrupamentos?

- □ Cluster: uma coleção de objetos 📴
 - Similares aos objetos do mesmo cluster
 - Dissimilares aos objetos de outros clusters
- □ Clusterização
 - Agrupamento de conjuntos de dados em clusters.
- □ Clusterização é uma classificação não supervisionada: sem atributo-meta ou variável resposta (Y).

O que não é Clusterização?

- □ Classificação supervisionada
 - Possui atributo-meta com informação (classes).
- □ Segmentação Simples
 - Divisão de estudantes em diferentes grupos, registrados em ordem alfabética, pelo último nome.
- ☐ Resultados de uma Consulta SQL em BD
 - O agrupamento é o resultado de uma especificação externa.
- □ Particionamento de um Grafo
 - Os agrupamentos podem ter sinergia ou relevância, mas as áreas não são idênticas.

A noção de um cluster pode ser ambígua



Aplicações gerais de clusterização

- □ Reconhecimento de padrões.
- □ Análise de dados espaciais:
 - Criação de mapas temáticos em SIG por meio de agrupamento de características espaciais
- □ Agrupamento de **pacientes** c/ mesmos sintomas
- □ Marketing e business: **segmentação** de mercado
- Web:
 - Classificação de documentos.
 - Análise de Weblog para descobrir grupos de padrões de acessos similares.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

6

Outros exemplos de aplicações

- Marketing: identifica grupos distintos de clientes ⇒ útil para desenvolver programas de marketing.
- □ Uso da terra: Identifica áreas usadas com o mesmo propósito em um DB com observações da terra.
- □ Seguro: Identifica grupos de clientes que fazem comunicação de sinistro com alta frequência.
- Agrometeorologia: Identificação de áreas pluviometricamente homogêneas.

O que é uma boa clusterização?

- □ Uma boa clusterização sempre produz clusters com:
 - Alta similaridade nas classes (grupos).
 - Baixa similaridade entre as classes (grupos).
- □ A qualidade dos resultados depende do(a):
 - Medida de similaridade usada.



- Método e sua implementação.
- □ A qualidade do método de clusterização é também medida pela sua habilidade de descobrir alguns ou todos os padrões escondidos.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

Tipos de dados em clusterização

■ Matriz de dados

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1f} & \cdots & x_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{if} & \cdots & x_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nf} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

■ Matriz de distâncias

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ d(2,1) & 0 & & & \\ d(3,1) & d(3,2) & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ d(n,1) & d(n,2) & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

Tipos de dados em clusterização ...

- Variáveis numéricas:
 - Podem ser reais ou inteiras.
 - **Ex**: temperatura, latitude, longitude, altura, peso, etc.
- Variáveis binárias:
 - Possuem somente dois estados: 0 ou 1.
- Variáveis nominais:
 - Generalização de variáveis binárias.
 - **Ex**: Cores (azul, amarelo, verde, vermelho, etc).
- □ Variáveis composta de vários tipos (mistura).

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

Normalização de variáveis numéricas

□ Normalização ⇒ variáveis com mesmo peso. 📃



Min-Max para um atributo f:

$$s_{if} = \frac{x_{if} - \min_{f}}{\max_{f} - \min_{f}} \times (novoMax_{f} - novoMin_{f}) + novoMin_{f}$$

onde min_f e max_f são os valores mínimos e máximos de f.

Z-score para um atributo f: média igual a zero e variância igual a 1.



$$z_{if} = \frac{x_{if} - m_f}{\sigma_f}$$

onde m_f e σ_f representam a média e o desvio padrão de f.

Exercício 1

- **Usando o software Weka:**
 - 1. Selecionar o dataset "iris";
 - 2. Normalizar atributos usando Min-max;
 - 3. Normalizar atributos usando **Z-score**:
 - 4. Selecionar o dataset "segment-challenge" e aplicar Min-Max e Z-score para normalizar os seus atributos.

Avaliando a qualidade de clusters

- □ A similaridade entre dois objetos i e j é expressa em termos de distância: d(i, j).
- □ Para cada tipo de variável, existe uma função para cálculo de distância.
- Existe uma função de "qualidade" que mede a eficácia de um cluster.
- □ **Pesos** podem ser associados a **diferentes variáveis** dependendo da aplicação.
- □ É difícil definir **similaridade** ou eficácia de um cluster ?
 - A resposta é tipicamente subjetiva.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

13

O que é similaridade?



AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

14

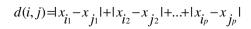
Similaridade entre variáveis numéricas

- Distâncias são geralmente usadas para medir a similaridade ou dissimilaridade entre objetos.
- Exemplos incluem: a distância de Minkowski:

$$d(i,j) = \sqrt[q]{(|x_{i1} - x_{j1}|^q + |x_{i2} - x_{j2}|^q + ... + |x_{ip} - x_{jp}|^q)}$$

onde $i=(x_{i1},\,x_{i2},\,...,\,x_{ip})$ e $j=(x_{j1},\,x_{j2},\,...,\,x_{jp})$ são dois objetos **p**-dimensional e **q** é um inteiro positivo

 \square Quando q = 1, $d \in a$ distância de Manhattan





Similaridade entre variáveis numéricas

□ Quando q = 2, d é a distância **Euclidiana**:

$$d(i,j) = \sqrt{(|x_{i1} - x_{j1}|^2 + |x_{i2} - x_{j2}|^2 + ... + |x_{ip} - x_{jp}|^2)}$$

■ Propriedades:

- $d(i,j) \geq 0$
- d(i,i) = 0
- d(i,j) = d(j,i)
- $\ \ \, \square \ \, d(i,j) \leq d(i,k) + d(k,j)$

Qual é a distância **Euclidiana** e de **Manhattan** entre os pontos: A(7,5) e B(4,3) ?

Exercício 2

- 1. Dados os pontos P(-1, 3, -2); Q(-4, 5, -2); R(4, -1, 0); S(7, 0, 1), pede-se:
- a) O centroide dos pontos P, Q, R, S.
- b) As distâncias Euclidiana e de Manhattan entre os pontos PQ, RS e QS.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

4.

Similaridade entre variáveis binárias

□ Tabela de contingência para variáveis binárias:

		Objeto j			
			0		
	1	a	b	a+b	
Objeto i	0	c	d	c+d	
Objeto i	sum	a+c	b+d	p	

□ Similaridade invariante - variável simétrica (ex: sexo):

$$d(i, j) = \frac{b+c}{a+b+c+d}$$

□ Coeficiente de Jaccard - variável assimétrica:

$$d(i, j) = \frac{b+c}{a+b+c}$$

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

18

Similaridade entre variáveis binárias

□ Exemplo:

Nome	Sexo	Febre	Tosse	Test-1	Test-2	Test-3	Test-4
Jack	M	Y	N	P	N	N	N
Mary	F	Y	N	P	N	P	N
Jim	M	Y	P	N	N	N	N

- Sexo é um atributo simétrico.
- $d(i, j) = \frac{b+c}{a+b+c}$
- Os demais atributos são assimétricos.
- Suponha que os valores Y e P representam 1, e o valor N representa 0

		Objeto j			
		1	0	sum	
	1	a	b	a+b	
Objeto i		c		c+d	
	sum	a+c	b+d	p	

$$d (Jack , Mary) = \frac{0+1}{2+0+1} = 0.33$$
$$d (Jack , Jim) = \frac{1+1}{1+1+1} = 0.67$$

d (Jim, Mary) = ?

Similaridade para variáveis nominais

- □ Uma generalização da variável binária é que ela pode ter mais de 2 estados (Ex: vermelho, amarelo, azul, verde).
- Método 1: "Simple matching"
 - m: número de "matches", p: número total de variáveis

$$d(i,j) = \frac{p - m}{p}$$

- Método 2: uso de um grande número de variáveis binárias
 - Cria-se uma variável binária para cada um dos M estados nominais.

Similaridade para variáveis mistas

- □ Um dataset pode conter vários tipos de variáveis:
 - Binária simétrica, binária assimétrica, nominal, ordinal e escala de razão.
- □ Pode-se usar uma fórmula ponderada para combinar seus efeitos:

$$d(i, j) = \frac{\sum_{f=1}^{p} \delta_{ij}^{(f)} d_{ij}^{(f)}}{\sum_{f=1}^{p} \delta_{ij}^{(f)}}$$

■ Se f é binária ou nominal:

 $d_{ii}^{(f)} = 0$ Se $x_{if} = x_{if}$, ou $d_{ii}^{(f)} = 1$ caso contrário.

- Se f é intervalar: usar a distância normalizada.
- Se f é ordinal ou escala de razão:

□ Computar os posicionamentos (**ranks**) r_{if} e tratar z_{if} como intervalares:

$$Z_{if} = \frac{r_{if} - 1}{M_{f} - 1}$$

 $r_{if} \in \{1, ..., M_f\}$

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

21

Métodos de clusterização

- □ Particionamento: Constrói várias partições e as avalia usando algum critério.
- □ **Hierárquico**: Cria uma decomposição hierárquica dos objetos usando algum critério.
- □ Baseado em densidade: Fundamenta-se em funções de conectividade e de densidade.
- □ Outros métodos: Ver capítulos 10 e 11 do livro:
 - Data Mining: Concepts and Techniques
 - **Autores**: Jiawei Han, Micheline Kamber e Jian Pei.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

22

Métodos baseados em particionamento

- □ Particionamento: Segmenta um banco de dados D de n objetos em um conjunto de k clusters.
- □ **Objetivo**: Encontrar uma partição de *k clusters* que otimiza o critério de particionamento escolhido.
- Função Objetivo: minimizar a soma dos quadrados das distâncias, tal que:

$$E = \sum_{i=1}^{k} \sum_{p \in C_i} (p - m_i)^2$$

- Onde:
 - E é a soma dos quadrados dos erros para todos os objetos no dataset:
 - p é o ponto no espaço representando um dado objeto;
 - \mathbf{m}_{i} é o centroide do cluster $\mathbf{C}i$.

Métodos baseados em particionamento

- □ Dado um valor de k, encontrar k clusters que otimiza um critério de particionamento escolhido:
 - Ótimo Global: exaustivamente enumera todas as partições;
 - Principais heurísticas: algoritmos *k-means* e *k-medoids*.
 - k-means (MacQueen'67): Cada cluster é representado pelo centro (centroide) do cluster.
 - k-medoids ou PAM (Partition Around Medoids) (Kaufman & Rousseeuw'87): Cada cluster é representado por um dos objetos no cluster.

O Algoritmo K-means

Input: k, D

Output: K centroides e os objetos de cada cluster

Passo 1:Selecionar arbitrariamente *k* objetos como os clusters iniciais.

Passo 2: Calcular os centroides dos *k* clusters da posição atual.

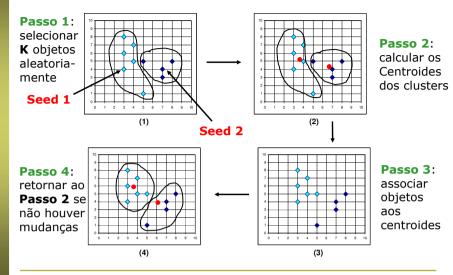
Passo 3: Associar cada objeto ao cluster (centroide) mais perto (maior similaridade).

Passo 4: Retornar ao Passo 2 e parar quando não houver mais mudanças significativas entre os objetos.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

21

K-means: exemplo para K = 2



AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

26

K-means: pontos positivos

- □ Relativamente eficiente (escalável).
- □ Complexidade: *O*(*tkn*), onde
 - *n* é o número de objetos;
 - k é o número de clusters;
 - *t* é o número de iterações;
 - Normalmente: k, t << n.
- □ Frequentemente termina em um ótimo local.
- □ O **ótimo global** pode ser achado usando técnicas, tais como **algoritmos genéticos**.

K-means: pontos negativos

- □ Versão original ⇒ ineficiente para atributos nominais. Versão atual não tem mais essa restrição.
- □ Necessidade de especificar k, o número de clusters, a priori.
- □ Ineficiente para lidar com ruídos ou outliers. =
- Inadequado para descobrir clusters com formato nãoconvexo.
- Sensível a outliers, pois todos os pontos (objetos) são agrupados – impacta centroides dos clusters.

Escolhendo o número de Clusters

- Método do Cotovelo: baseado na observação que aumentando o número de clusters pode ajudar a reduzir a soma da variância dentro de cada cluster.
- □ O critério de parada se dá quando não há mudança significativa na variância calculada:



AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

29

Variações do Método K-means

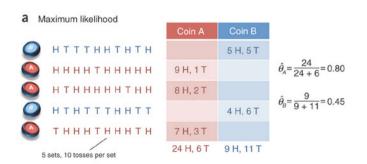
- □ Algumas versões do K-means diferem em:
 - Seleção dos pontos iniciais.
 - Cálculo da similaridade entre os pontos.
 - Estratégias para calcular os centroides dos clusters.
- EM (Expectation-Maximization) estende o paradigma usado no K-means.
- □ Para atributos nominais: K-modes (Huang'98)
 - Substitui as médias dos clusters por modas.
 - Usa medidas de similaridade para atributos nominais.
 - Usa um método baseado em frequências para atualizar as modas dos clusters.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

30

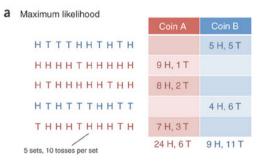
Bases para o algoritmo EM

□ Problema: suponha duas moedas A e B com probabilidades de sucesso diferentes. Foram realizadas cinco rodadas de um experimento, onde as moedas eram lançadas 10 vezes. Como estimar a probabilidade de sucesso para as duas moedas?



Bases para o algoritmo EM...

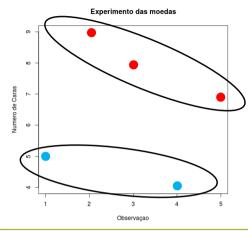
□ E se você não soubesse de que moeda vieram os lançamentos?



□ Qual seria a solução neste caso?

Bases para o algoritmo EM...

□ Solução (k-means): agrupar de acordo com o número de caras.

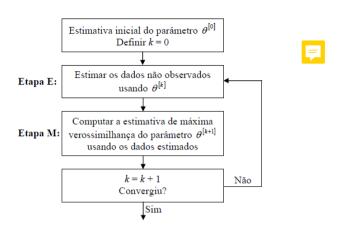


Coin A	Coin B		
	5 H, 5 T		
9 H, 1 T			
8 H, 2 T			
	4 H, 6 T		
7 H, 3 T			
24 H, 6 T	9 H, 11 T		

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

33

Fluxograma do Algoritmo EM



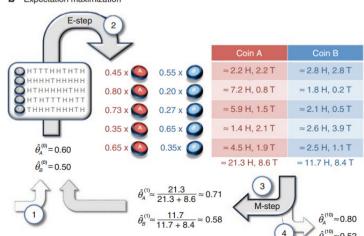
AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

34

Bases para o algoritmo EM...

□ Solução (EM):

b Expectation maximization



O Algoritmo EM no Weka

- EM atribui uma distribuição de probabilidade a cada instância (observação), que indica a probabilidade de pertencer a cada um dos clusters.
- EM pode decidir quantos clusters criar por validação cruzada, ou você pode especificar a priori quantos clusters gerar.
- □ Algoritmo converge rapidamente, mas pode não atingir um ótimo global.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

36

O Algoritmo EM no Weka ...

- □ A validação cruzada é realizada para determinar o número de clusters é feita nas seguintes etapas:
- 1. O número de clusters é definido como 1.
- 2. O conjunto de treinamento é dividido aleatoriamente em 10 partições.
- **3. EM** é processado 10 vezes usando as 10 partições da maneira usual de **VC**.
- O Log da verossimilhança é calculado e a média dos 10 resultados é obtida.
- Se a probabilidade de Log aumentar, o número de clusters é aumentado em 1 e o programa continua na etapa 2.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

37

Exercício 3

Usando o software Weka:

- 1. Selecionar um dataset com variáveis numéricas.
- 2. Normalizar atributos (Z-score).
- 3. Explorar o algoritmo k-means:
 - a) Qual é o número de clusters pré-definido pelo algoritmo?
 - b) Mude a semente (**seed**) para o k-means e observe o comportamento do algoritmo.
- 4. Selecionar um dataset com variáveis nominais e repetir os exercícios 1, 2 e 3.
- 5. Como os algoritmos **EM** e **k-means** poderiam ser usados **conjuntamente**.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

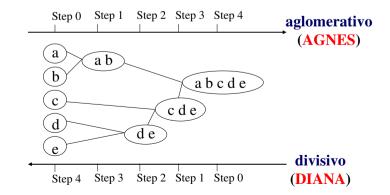
38

Métodos Hierárquicos

- MÉTODOS "DIVISIVOS" → Todos Objetos → Um "Grande Cluster".
- Este "Grande Cluster" é dividido em dois ou mais "Clusters" menores.
 - Até que cada Cluster tenha somente registros semelhantes.
 - A cada passo, alguma medida de valor do conjunto de Cluster é realizada até chegar ao melhor conjunto de Clusters.
- MÉTODOS "AGLOMERATIVOS" → Cada objeto é um "Cluster"
 - A cada passo, combina-se Clusters com alguma característica comum até que se chegue a um "Grande Cluster".

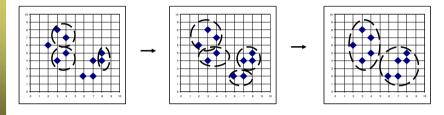
Métodos Hierárquicos ...

■ Usa a matriz de distâncias como critério de segmentação. Esse método não exige o número de clusters *k* como *input*, mas precisa de uma condição para terminar.



AGNES (Agglomerative Nesting)

- □ Referência: Livro [Kaufmann & Rousseeuw (1990)]
- □ Implementado em pacotes de análise estatísticas (Ex: Splus).
- Usa o método "Single-Link" e matriz de dissimilaridade (distâncias).
- □ Faz o "merge" dos nós que têm a menor dissimilaridade.
- Clusters são formados usando-se a estratégia bottom-up.
- □ Eventualmente todos os nós pertencem ao mesmo cluster.

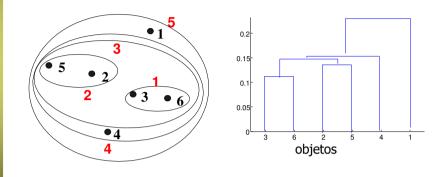


AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

4

AGNES (Agglomerative Nesting) ...

AGLOMERATIVO

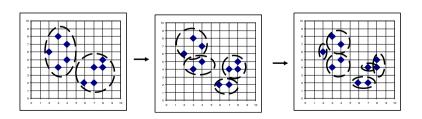


AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

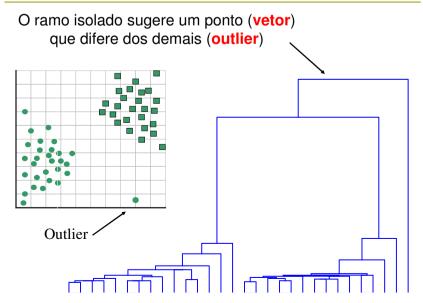
42

DIANA (Divisive Analysis)

- □ Referência: Livro [Kaufmann and Rousseeuw (1990)]
- □ Implementado em pacotes de análise estatísticos (Ex: Splus).
- □ Procedimento: o inverso de AGNES.
- Eventualmente cada nó forma um cluster.



Dendrogramas → Detecção de Outliers



Mais sobre métodos hierárquicos

□ Pontos Fracos:

- Os algoritmos não são escaláveis.
- Complexidade: $O(n^2)$, onde n é o número de objetos.
- Uma vez que os clusters são formados, eles não podem ser mudados (não existe "undo").

□ Pontos Fortes:

- Pode ser integrado com métodos não hierárquicos.
- BIRCH (1996): usa "CF-tree" com sumários dos objetos e ajusta a qualidade dos sub-clusters.
- CURE (1998): produz clusters (com diferentes formas e tamanhos) de alta qualidade na existência de outliers
- CHAMELEON (1999): utiliza modelagem dinâmica.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

4

Método baseado em densidade

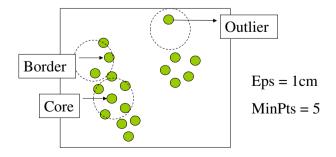
- □ DBSCAN é um algoritmo baseado em densidade.
 - Densidade = número de pontos dentro de um raio específico (Eps)
 - Um "core point" tem um número mínimo de pontos especificados pelo usuário (MinPts) dentro do raio (Eps).
 - Um "border point" fica localizado na vizinhança de um "core point".
 - Um "noise point" é qualquer ponto que não se classifica como "core point" nem como "border point".

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

46

DBSCAN - Ideia Geral

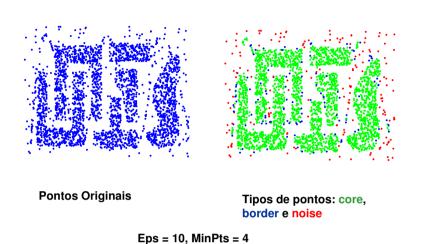
- □ Ideia: Um cluster é definido como um conjunto máximo de pontos densamente conectados.
- □ Encontra clusters com formatos (shape) arbitrários em bancos de dados espaciais, contendo ruídos (outliers).



O Algoritmo DBSCAN

- □ Arbitrariamente, **seleciona** um ponto **p**.
- Identifica todos os pontos densamente conectados a p com relação aos parâmetros Eps e MinPts.
- □ Se **p** é um "**core point**", um cluster é formado.
- Se p é um "border point" e não há pontos densamente conectados a p, DBSCAN visita o próximo ponto do conjunto de dados.
- □ Continua o processo até que todos os pontos do conjunto de dados tenham sido analisados.

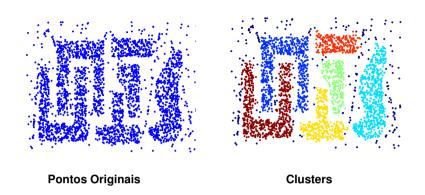
DBSCAN: Core, Border e Noise Points



AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

49

Quando DBSCAN funciona bem?



- · Na presença de ruídos (Noise)
- Na geração de clusters com diferentes formatos e tamanhos.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

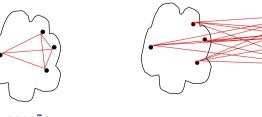
50

Validação de Clusters

- □ Em classificação supervisionada, existe uma grande variedade de medidas para avaliar quão bom um modelo é: Acurácia, precisão, cobertura, kappa etc.
- □ Para **análise de clusters**, como avaliar a **qualidade** dos clusters gerados?
- Em geral, os clusters são avaliados por especialistas de forma subjetiva.
- Então, por que precisamos avaliar clusters?
 - Para evitar encontrar padrões com ruídos.
 - Para comparar algoritmos de clusterização.
 - Para comparar clusters gerados por mais de um algoritmo.

Medidas Internas: Coesão e Separação

- □ Um grafo de proximidade também pode ser usado para coesão e separação.
 - Coesão é a soma dos pesos de todos os links dentro de um cluster.
 - Separação é a soma de todos os pesos entre os nós de um cluster e nós fora do cluster.



coesão

separação

Medidas Internas: Coesão e Separação

- □ Coesão: Mede a proximidade dos objetos de um cluster.
 - Exemplo: Soma do Erro Quadrático (SEQ).
- □ Separação: Mede como um cluster é distinto ou bem separado dos outros.
- Exemplo: Erro Quadrático
 - Coesão é medida pela SEQ interna (dentro de um cluster).

$$WSS = \sum_{i} \sum_{x \in C_i} (x - m_i)^2$$

■ Separação é medida pela soma de quadrados entre clusters.

$$BSS = \sum_{i} |C_{i}| (m - m_{i})^{2}$$

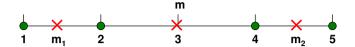
• Onde $|C_i|$ é o tamanho (cardinalidade) do cluster i.

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

-

Medidas Internas: Coesão e Separação

- Exemplo: SEQ
 - Coesão (WSS) + Separação (BSS) = CONSTANTE.



K=1 cluster:
$$WSS = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 10$$

$$BSS = 4 \times (3-3)^2 = 0$$

$$Total = 10 + 0 = 10$$
 $WSS = \sum_{i} \sum_{x \in C_i} (x - C_i)^{-1}$

K=2 clusters:
$$WSS = (1-1.5)^2 + (2-1.5)^2 + (4-4.5)^2 + (5-4.5)^2 = 1$$

$$BSS = 2 \times (3-1.5)^2 + 2 \times (4.5-3)^2 = 9$$

$$Total = 1 + 9 = 10$$
 $BSS = \sum_{i} |C_{i}| (m - m_{i})^{2}$

AP-539: Métodos e Técnicas de Aprendizado Estatístico

EΛ

Exercício 4

- Usando o software Weka:
 - 1. Selecionar o dataset "cpu".
 - 2. Normalizar atributos (Z-score).
 - 3. Execute o algoritmo **DBScan** sem ajustar os parâmetros. Qual foi o resultado encontrado?
 - Explorar os parâmetros epsilon e mimPoints do algoritmo DBScan. Analisar os resultados encontrados.
 - 5. Indique uma vantagem do algoritmo **DBScan** em relação ao **k-means**.

Sugestões de Leitura

- □ Jiawei Han, Micheline Kamber, Jian Pei. **Data mining:** concepts and techniques. 3rd ed., 2012.
 - Capítulo 10 (Cluster Analysis: Basic Concepts & Methods)
 - Capítulo 11 (Advanced Cluster Analysis).
 - Capítulo 12 (Outlier Detection).
- □ Ian H. Witten, Frank Eibe, Mark A. Hall. Data mining: practical machine learning tools and techniques. 3rd ed., 2011.
 - Secão 4.8 (Clustering)
 - Seção 6.8 (Clustering).