D S T Q Q S S • Prove que os alfabetos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{nand\}$, $\{nor\}$ são ~~[illegible]~~ completos.

- $\{\neg, \vee\}$ completa

• $\neg P = \neg P$

• $P \vee Q = P \vee Q$

• $P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q)$ dupla negativa
$\neg(\neg P \vee \neg Q)$ lei de morgan

• $P \rightarrow Q = (\neg P \vee Q)$ propriedade de Substituição

• $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ propriedade de substituição
$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ propriedade de substituição
$\neg\neg(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ dupla negativa
$\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$ lei de morgan.

- $\{\neg, \wedge\}$ completa

. $\neg P = \neg P$

. $P \wedge Q = P \wedge Q$

. $P \vee Q = \neg\neg(P \vee Q)$
$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$.

• $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$ Substituição
$\neg\neg(\neg P \vee Q)$ dupla negativa
$\neg(P \wedge \neg Q)$ lei de morgan

• $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$\neg P \vee Q \wedge \neg Q \vee P$ Substituição
$\neg\neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg\neg(\neg Q \vee P)$ dupla neg
$\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$ lei de morgan

D S T Q Q S S

__/__/__

{nand} completa

- $\neg P = (P \text{ nand } P)$
- $P \vee Q = (P \text{ nand } P) \text{ nand } (Q \text{ nand } Q)$
- $P \wedge Q = (P \text{ nand } Q) \text{ nand } (P \text{ nand } Q)$

$\neg\neg(P \text{ nand } (Q \text{ nand } Q) \wedge Q \text{ nand } (P \text{ nand } P)$

$P \to Q = \neg P \vee Q$

$\neg\neg(\neg P \vee Q)$

$\neg(P \wedge \neg Q)$

$P \text{ nand } (Q \text{ nand } Q)$

$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P) =$

$\neg P \vee Q \wedge \neg Q \vee P$

$P \text{ nand } (Q \text{ nand } Q) \wedge Q \text{ nand } (P \text{ nand } P)$

- {nor}

- $\neg P = (P \text{ nor } P)$
- $P \wedge Q = (P \text{ nor } P) \text{ nor } (Q \text{ nor } Q)$
- $P \vee Q = (P \text{ nor } Q) \text{ nor } (P \text{ nor } Q)$

		$\neg(P \vee P)$
P	$\neg P$	P nor P
T	F	F
F	T	T

- $P \to Q = \neg P \vee Q$

$\neg\neg(\neg P \vee Q)$

$((P \text{ nor } P) \text{ nor } Q) \text{ nor } ((P \text{ nor } P) \text{ nor } Q)$

$\neg\neg(\neg P \vee Q)$

- $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

$\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$

$((P \text{ nor } P) \text{ nor } Q) \text{ nor } ((Q \text{ nor } Q) \text{ nor } P)$

D S T Q Q S S ___/___/___

continuação...

[(P nand (Q nand Q)) nand (Q nand (P nand P))] nand (P nand (Q nand Q)) nand
(Q nand [P nand P)))

$((P \text{ nand } (Q \text{ nand } Q)) \text{ nand } (Q \text{ nand } (P \text{ nand } P))) \text{ nand } ((P \text{ nand } (Q \text{ nand } Q)) \text{ nand } (Q \text{ nand } (P \text{ nand } P)))$

• Dado uma fórmula E, obter uma fórmula G equivalente a E, $\{\neg, \vee\}$

$E = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S) =$

$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \vee (\neg R \vee S)$ propriedade de substituição

$((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$ substituição

$\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$ dupla negativa

$\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$ lei de morgan

$\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$ reescrevendo a fórmula

$= G$

• Dado uma fórmula H obter uma fórmula G, usando apenas nand

$H = P \wedge (R \rightarrow S)$

$P \wedge (\neg R \vee S)$ substituição

$P \wedge (\neg\neg(\neg R \vee S))$ dupla negação

$P \wedge (\neg(R \wedge \neg S))$ lei de morgan

$\neg\neg(P \wedge (\neg(R \wedge \neg S)))$ dupla negativa

$G = (P \text{ nand } (R \text{ nand } (S \text{ nand } S))) \text{ nand } (P \text{ nand } (R \text{ nand } (S \text{ nand } S)))$

D S T Q Q S S

___/___/___

• Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras

- $(\neg P)$ pode ser expresso equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\lor$ e P. independentemente de quantas formas ou vezes escrever $P \lor P$ ele sempre será o próprio P. então a afirmação é falsa.

- $(P \lor Q)$ pode ser expresso equivalentemente usando apenas o conectivo $\to$, P e Q. Verdadeira pois $((Q \to P) \to P)$ é equivalente $P \lor Q$ descoberto pela tabela verdade e equivalências clássicas.

Obtendo a FND e FNC de $\neg(P \land Q) \to R$

obtendo FND

$\{I[P]=T, I[Q]=T, I[R]=T\}$

$P \land Q \land R$

$\{I[P]=T, I[Q]=T, I[R]=F\}$

$P \land Q \land \neg R$

$\{I[P]=T, I[Q]=F, I[R]=T\}$

$P \land \neg Q \land R$

$\{I[P]=F, I[Q]=T, I[R]=T\}$

$\neg P \land Q \land R$

$\{I[P]=F, I[Q]=F, I[R]=T\}$

$\neg P \land \neg Q \land R$

$(P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land \neg R) \lor (P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) = FND$

D S T Q Q S S   / /

FNC obtendo

$\{I[P]=F, I[Q]=T, I[R]=F\}$

$P \lor \neg Q \lor R$

$\{I[P]=T, I[Q]=F, I[R]=F\}$

$\neg P \lor Q \lor R$

$\{I[P]=F, I[Q]=F, I[R]=F\}$

$P \lor Q \lor R$

$(P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R) \land (P \lor Q \lor R) = FNC$

Dado a fórmula

$H = ((P \to Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \land \neg P)$

- Construa a fórmula equivalente usando $\{\neg, \lor\}$

$((P \to Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \land \neg P)$

$((\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \to R) \land (R \to \neg Q))) \leftrightarrow (\neg\neg(\neg R \land \neg P))$ Substituição e dupla negativa

$((\neg P \lor Q) \land ((Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg Q))) \leftrightarrow (\neg(R \lor P))$ Substituição e lei de morgan

$((\neg P \lor Q) \land (\neg\neg((Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg Q)))) \leftrightarrow (\neg(R \lor P))$ dupla negativa

$((\neg P \lor Q) \land (\neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q)))) \leftrightarrow (\neg(R \lor P))$ lei de morgan

$(\neg\neg((\neg P \lor Q) \land (\neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))))) \leftrightarrow (\neg(R \lor P))$ dupla negativa

$(\neg(\neg(\neg P \lor Q)) \lor \neg(\neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))))) \leftrightarrow (\neg(R \lor P))$ lei de morgan

$(\neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor (\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q)))) \leftrightarrow (\neg(R \lor P))$ reescrevendo a fórmula

$((\neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor (\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q)))) \to (\neg(R \lor P))) \land ((\neg(R \lor P) \to (\neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor$
$(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q)))))$ Substituição

$((\neg(\neg P \lor Q) \lor (\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))) \lor (\neg(R \lor P))) \land ((R \lor P) \lor (\neg(\neg(\neg P \lor Q)$
$\lor (\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q)))))$ Substituição

SÃO DOMINGOS

___/___/___

$\neg((\neg(\neg P \lor Q) \lor (\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))) \lor (\neg(R \lor P))) \lor (\neg((R \lor P) \lor (\neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor$
$(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))))))$ dupla negação e lei de morgan

- Ache as fórmulas equivalentes em FND e FNC

$H = ((P \rightarrow Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \land \neg P)$

P	Q	R	¬P	¬Q	¬R	P→Q	¬Q↔R	∧	¬R∧¬P	H	
T	T	T	F	F	F	T	F	F	F	T	1
T	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F	
T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	T	2
T	F	F	F	T	T	F	F	F	F	T	3
F	T	T	T	F	F	T	F	F	F	T	4
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T	5
F	F	T	T	T	F	T	T	T	F	F	
F	F	F	T	T	T	T	F	F	T	F	

$FND = (P \land Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R)$

linha 1 $I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = T$

$(P \land Q \land R)$

$I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = T$

$(P \land \neg Q \land R)$

$I[P] = T, I[Q] = F, I[Q] = F$

$(P \land \neg Q \land \neg R)$

$I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = T$

$(\neg P \land Q \land R)$

$I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = F$

$(\neg P \land Q \land \neg R)$

$FNC = (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q \vee R)$

$I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = F$

$(\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = T$

$(P \vee Q \vee \neg R)$

$I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = F$

$(P \vee Q \vee R)$

• considere as fórmulas e determine FND's e FNC's

$H = (P \to Q) \leftrightarrow (R \wedge P)$

$G = (P \leftrightarrow Q) \to (P \vee Q)$

$H_\vee$

P	Q	R	$P \to Q$	$R \wedge P$	H	
T	T	T	T	T	T	7
T	T	F	T	F	F	1
T	F	T	F	T	F	2
T	F	F	F	F	T	8
F	T	T	T	F	F	3
F	T	F	T	F	F	4
F	F	T	T	F	F	5
F	F	F	T	F	F	6

FNC do H $= (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

1- $I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = F$

$(\neg P \vee \neg Q \vee R)$

2- $I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = T$

$(\neg P \vee Q \vee \neg R)$

3- $I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = T$

$(P \vee \neg Q \vee \neg R)$

4- $I[P] = F, I[Q] = T, I[R] = F$

$(P \vee \neg Q \vee R)$

5- $I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = T$

$(P \vee Q \vee \neg R)$

6- $I[P] = F, I[Q] = F, I[R] = F$

$(P \vee Q \vee R)$

FND do H $= (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

7- $I[P] = T, I[Q] = T, I[R] = T$

$(P \wedge Q \wedge R)$

8- $I[P] = T, I[Q] = F, I[R] = F$

$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

D S T Q Q S S

___/___/___

PND de $G = (P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q)$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \lor Q$	G
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

$I[P] = T$, $I[Q] = T$

$(P \land Q)$

$I[P] = T$, $I[Q] = F$

$(P \land \neg Q)$

$I[P] = F$, $I[Q] = T$

$(\neg P \land Q)$

FNC de $G = (P \lor Q)$

1. Refaça as provas de indução vistas em sala de aula.
provar por indução que $2^n > n^2$ para $n \geq 5$

~~passo base ou passo de~~ ~~iniciação~~ iniciação

$2^5 > 5^2 = 32 > 25$ V

passo 2 ou passo da indução

se $2^k > k^2$ então $2^{(k+1)} > (k+1)^2$

manipulação algébrica

$2^k > k^2 =$

$2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$

$2^k \cdot 2 > k^2 + k^2$

$2^k \cdot 2 > k^2 + 2k + 1$ V

$2^{k+1} > (k+1)^2 = 2^k + 2^1 > k^2 + 2 \cdot k + 1$

transitividade

$k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$

dadas duas funções $\beta(E)$ e $\alpha(E)$ em que beta retorna a quantidade de parenteses e $\alpha(E)$ a quantidade de conectivos, e E é uma formula qualquer da logica proposicional. prove por indução que "$\beta(E) = 2 \cdot \alpha(E)$"

D S T Q Q S S

passo base:

$\beta(E) = 0$

$\alpha(E) = 0$

$\beta(E) = 2 \cdot \alpha(E) = 0$

ou seja $2 \cdot 0 = 0$

passo da indução:

considerando a hipotese:

$\beta(H) = 2\alpha(H)$ e

$\beta(G) = 2 \cdot \alpha(G)$

supondo que $k = \beta(H) = 2\alpha(H)$ e $k+1 = \beta((\neg H)) = 2 \cdot \alpha((\neg H))$ provando que $k+1$ é verdadeiro então completamos o passo.

usando $\beta(H) = 2\alpha(H)$

$\beta((\neg H)) = \beta(H) + 2$

$2 \cdot \alpha((\neg H)) = 2(\alpha(H) + 1) = 2\alpha(H) + 2$

sendo $\beta((\neg H)) = \beta(H) + 2$ então

$\beta((\neg H)) = 2 \cdot \alpha(H) + 2$ por transitividade

C.Q.D

2. Demonstre por indução matemática que:

$\forall n, (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n+1)/2.$

~~passo base~~ passo base: $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

passo da indução: $p(n) = (1+2+3+\dots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$

$$p(n+1) = (\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{p(n)}+(n+1)) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$P(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)}{1} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

mmc $\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$

colocando (n+1) em evidência $\frac{(n+1).(n+2)}{2}$ C.Q.D

3. Supondo a função $\theta(E)$ que retorna a quantidade de parênteses, provar por indução que "$\theta(E) = n$" e n é um número par ou seja $n = 2K$ (inteiro) e E é uma fórmula aleatória da lógica proporcional.

passo base: $\theta(E) = 0$

$2k$ = par

passo da indução: $\theta(E) = 2K = n$

$$\theta((\neg E)) = \theta(E)+2 = 2k+2 = 2.(\underbrace{K+1}_{K \text{ inteiro}}) = 2K \text{ CQ.D}$$

• utilizando um sistema axiomático e apenas modus ponens, prove

1- $(P \vee \neg P)$

D S T Q Q S S — / /

• A partir das Hipóteses abaixo e utilizando apenas o Modus Ponens (MP) como regra de inferência, prove P (faça por prova por absurdo)

$$\beta = \{\neg S \to P, R \vee \neg P, \neg S\}$$

$Q_1 = \neg S \to P$

$Q_2 = R \vee \neg P$

$Q_3 = \neg S$ absurdo

$Q_4 = \neg P \to S$ propriedade da contrapositiva

$Q_5 = \neg P$ como consequência lógica

$Q_6 = S$ absurdo — aplicando MP em Q5 e Q4 obtemos a consequência lógica S

• prove que $A \to B, B \to C, A \vdash C$

aplicando MP em $A, A \to B$ temos B como consequência lógica.

$Q_4 = B$

aplicando MP em $Q_4, B \to C$ temos C como consequência lógica. C.Q.D

• Prove o teorema:

P = "Hoje é domingo" Q = "Manuel está feliz" R = "Manuel é amoroso"

S = "Maria está feliz"

teorema: "Maria está feliz"

$Q_1 = \neg P \vee Q$
$Q_2 = Q \to R$
$Q_3 = S \vee \neg R$
$Q_4 = P$
$Q_5 = \neg R \vee S$ comutatividade
$Q_6 = R \to S$ Substituição
$Q_7 = P \to Q$ Substituição
$Q_8 = Q$ MP de Q_4 e Q_7
$Q_9 = R$ MP de Q_8 e Q_2
$Q_{10} = S$ MP de Q_9 e Q_6
C.Q.D S = "Marta está feliz"

• Verifique a validade do argumento abaixo:

P = "chover hoje" Q = "hoje nós não teremos churrasco" R = "teremos churrasco amanhã".

$$B = \{P \to Q, Q \to R, P \to R\}$$

• 11. Mostre que as hipóteses levam à conclusão:

P = "Enviar um email" Q = "terminar de escrever o programa".
R = "dormir cedo" S = "acordar revigorado"

$$B = \{P \to Q, \neg P \to R, R \to S\} \vdash (\neg Q \to S)$$