Pré-Cálculo

10 de janeiro de 2022

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Noção de Conjunto

Um conjunto é uma coleção qualquer de objetos formado por elementos. Um objeto **a** qualquer pode ser elemento de determinado conjunto A ou não.

Quando **a** pertençe a A escrevemos:

$$a \in A$$

Quando **a** não pertençe a A escrevemos:

$$a \notin A$$

1.2 Conjuntos Númericos

1.2.1 Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$

O conjunto dos números naturais, simbolizado por $\mathbb{N}$ é o seguinte conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,...\}$$

Observações:

- Quando $0 \notin \mathbb{N}$ escrevemos $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,...\}$$

1.2.2 Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números inteiros, simbolizado por $\mathbb{Z}$ é o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{...\,;\,-4\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,...\}$$

1.2.3 Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$

O conjunto dos números racionais, simbolizado por $\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações $\dfrac{a}{b}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

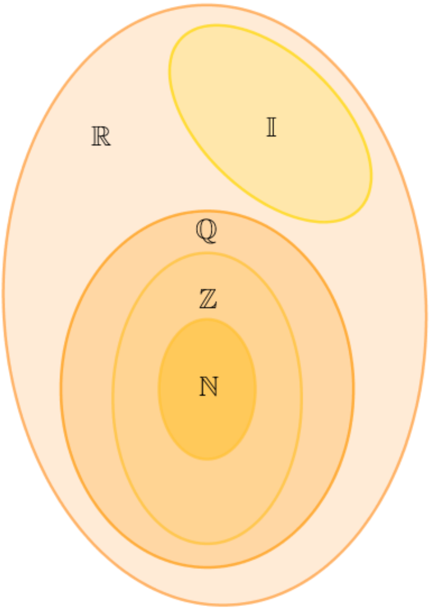
$$\mathbb{Q} = \{...\,;\,-2\,;\,-1\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\,;\,\frac{3}{2}\,;\,2\,;\,...\}$$

1.2.4 Conjunto dos Números Irracionais $\mathbb{I}$

O conjunto dos números irracionais, simbolizado por $\mathbb{I}$ é o conjunto dos números cuja representação com infinitas casas decimais não é periódica. Exemplo: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π

1.2.5 Conjunto dos Números Reais $\mathbb{R}$

O conjunto dos números reais, simbolizado por $\mathbb{R}$ é o conjunto formado por todos os números com representação decimal, decimais exatas e periódicas e as decimais não exatas e não periódicas.



1.3 Intervalos Reais

Dados dois números reais, a e b, com $a < b$, temos:

Intervalo aberto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} |\, a < x < b\}$$

Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\, a \leq x \leq b\}$$

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} |\, a \leq x < b\}$$

Intervalo fechado à direita e aberto à esquerda

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\, a < x \leq b\}$$

Semirreta esquerda, fechada, de origem b

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} |\, x \leq b\}$$

Semirreta esquerda, aberta, de origem b

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} | \, x < b\}$$

Semirreta direita, fechada, de origem a

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq a\}$$

Semirreta direita, aberta, de origem a

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | \, x > a\}$$

Reta real

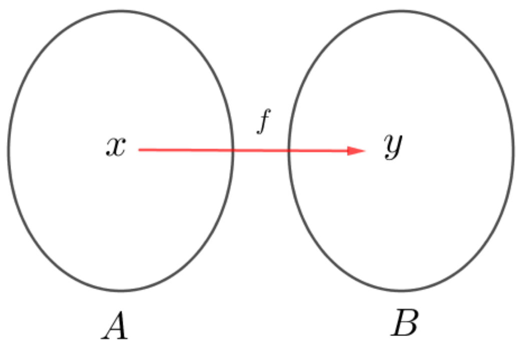
$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Capítulo 2

Funções

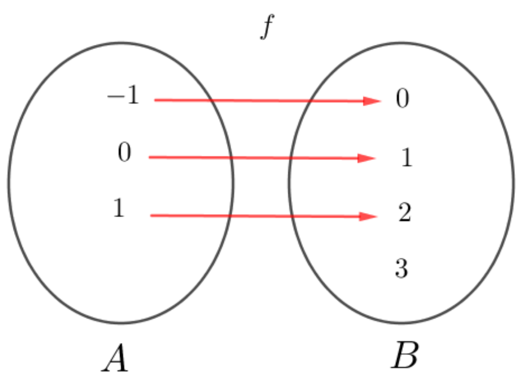
2.1 Definição de Função

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função de A em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$



Exemplos:

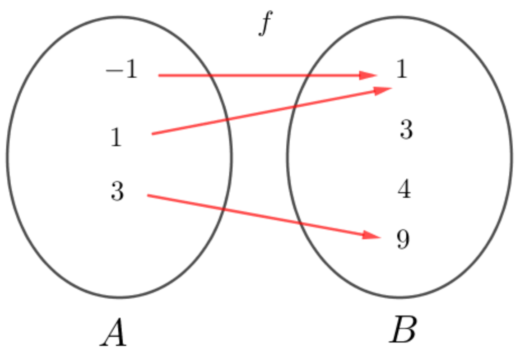
1. Dados os conjuntos $A = \{-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\}$ e $B = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$, seja a relação f de A em B expressa por $y = x + 1$, com $x \in A$ e $y \in B$.



- $x = -1 \Rightarrow y = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0) \in f$
- $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1) \in f$
- $x = 1 \Rightarrow y = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2) \in f$
- Todos os elementos de A estão associados a elementos de B.
- A cada elemento de A está associado um único elemento de B.

Neste caso, a relação f de A em B expressa por $y = x + 1$ é uma função de A em B.

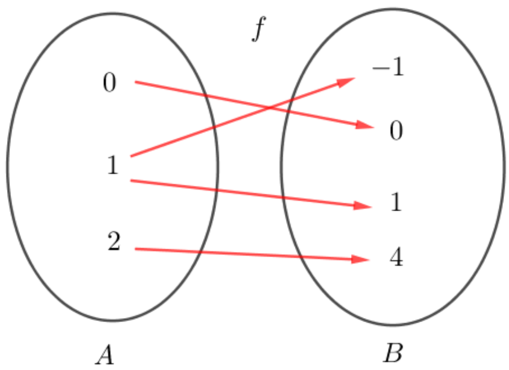
2. Dados os conjuntos $A = \{-1\,;\,1\,;\,3\}$ e $B = \{1\,;\,3\,;\,4\,;\,9\}$, seja a relação f de A em B expressa por $y = x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.



- $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 = 1 \Rightarrow (-1, 1) \in f$
- $x = 1 \Rightarrow y = (1)^2 = 1 \Rightarrow (1, 1) \in f$
- $x = 3 \Rightarrow y = (3)^2 = 9 \Rightarrow (3, 9) \in f$
- Todos os elementos de A estão associados a elementos de B.
- A cada elemento de A está associado um único elemento de B.

Neste caso, a relação f de A em B expressa por $y = x^2$ é uma função de A em B.

3. Dados os conjuntos $A = \{0\,;\,1\,;\,2\}$ e $B = \{-1\,;\,0\,;\,1\,;\,4\}$, seja a relação f de A em B expressa por $y^2 = x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

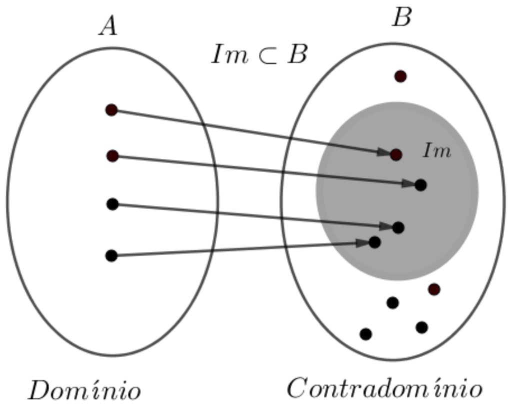


- $x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 = 0 \Rightarrow (0,0) \in f$
- $x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 = \pm 1 \Rightarrow (1,1)\,\mathrm{e}\,(1,-1) \in f$
- $x = 4 \Rightarrow y^2 = 4 = 2 \Rightarrow (4,2) \in f$
- Todos os elementos de A estão associados a elementos de B.
- A cada elemento de A **não** está associado **um único** elemento de B.

Neste caso, a relação f de A em B expressa por $y^2 = x$ **não** é uma função de A em B.

2.2 Domínio, Contradomínio e Imagem de uma Função

Toda função possui um domínio(digamos que são valores de partida) e uma imagem (valores de chegada).



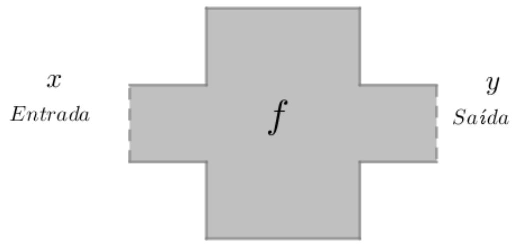
- O domínio de uma função é o conjunto dos elementos de onde as setas partem.
- A imagem de uma função é o conjunto dos elementos em que as setas chegam.
- O contradomínio de uma função é o conjunto dos elementos possiveis em que as setas podem chegar.

Observações:

- O conjunto imagem está contido no contradomínio
- As vezes é possivel que o conjunto imagem seja igual ao contradomínio $Im = B$.

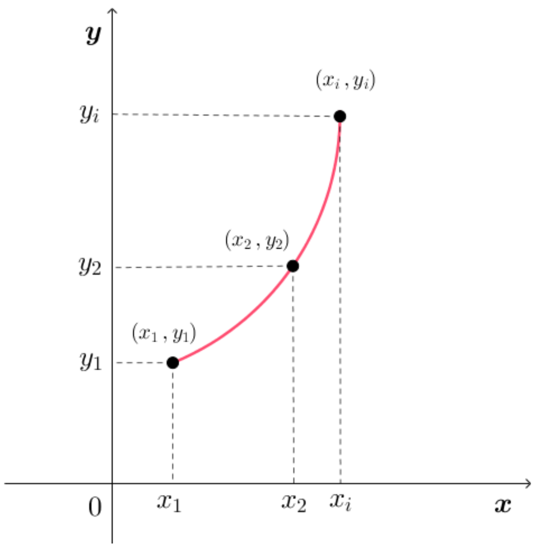
2.2.1 Pensando em função

Podemos pensar em uma função como uma máquina. Com x sendo os valores que entram (domínio) e y sendo os valores de saída (imagem) processados pela máquina.



2.3 Gráfico de uma função

O gráfico de uma função é o conjunto de pares ordenados (x, y)



Capítulo 3

Algebra

3.1 Potênciação

3.1.1 Potência de Expoente Natural

Definição 1 *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Potência de base $\boldsymbol{a}$ e expoente $\boldsymbol{n}$ é igual a:*

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a}^{n}$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

Propriedades:
Se a e $b \in \mathbb{R}$ e n e $m \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
4. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

- $(-5)^0 = 1$
- $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
- $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 9 \cdot 8 = 72$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{9}{8}$
- $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

3.1.2 Potência de Expoente Inteiro

Definição 2 *Seja $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}$. Potência de base* $\boldsymbol{a}$ *e expoente* $\boldsymbol{n}$ *é igual a:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriedades:
Se a e $b \in \mathbb{R}^*$ e n e $m \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

1. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $a^m a^n = a^{m+n}$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos:

- $(2)^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$
- $\dfrac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

3.1.3 Potência de Expoente Racional

Definição 3 *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}(p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}_+^*)$. Potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ é igual a:*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Propriedades:
Se a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

1. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$
2. $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$
3. $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$
5. $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

Exemplos:

- $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2^1 = 2$

- $\dfrac{3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{3}{5}-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}}$

- $(5 \cdot 4)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{5}$

- $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{4^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

- $(6^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} = 6^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}} = 6^{\frac{12}{6}} = 6^2 = 36$

3.1.4 Potência de Expoente Irracional

Definição 4 *Seja $a \in \mathbb{R}$ e n um número irracional. Potência de base a e expoente n é a^n.*

Observações:

- Se $a = 0$ e n é irracional e positivo, então:

$$0^n = 0$$

- Se $a < 0$ e n é irracional e positivo, então a^n não tem significado. Exemplos: $(-3)^{\sqrt{3}}$,$(-\sqrt{3})^{\sqrt{5}}$ e $(-9)^{\pi}$.

- Se $n < 0$ então 0^n não tem significado.

- Para as potências de expoente Irracional são válidas as propriedades anteriores.

3.1.5 Potência de Expoente Real

Definição 5 *Seja $a \in \mathbb{R}^*_+$ e $n \in \mathbb{R}$. Potência de base a e expoente n é a^n.*

Propriedades:
Se a e $b \in \mathbb{R}^*_+$ e n e $m \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

3.1.6 Radiciação

Dados $a \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, chama-se raiz n-ésima aritmética de a o número real e não negativo b, tal que:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Propriedades: Se a e $b \in \mathbb{R}_+$, n e $p \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$ então valem as seguintes propriedades:

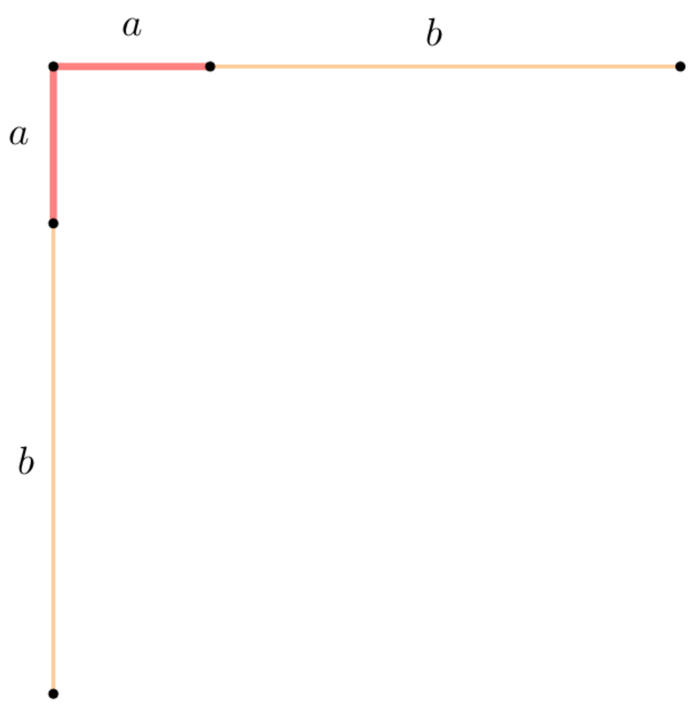
1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \;\; b > 0$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
5. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p \cdot n]{a^m}$

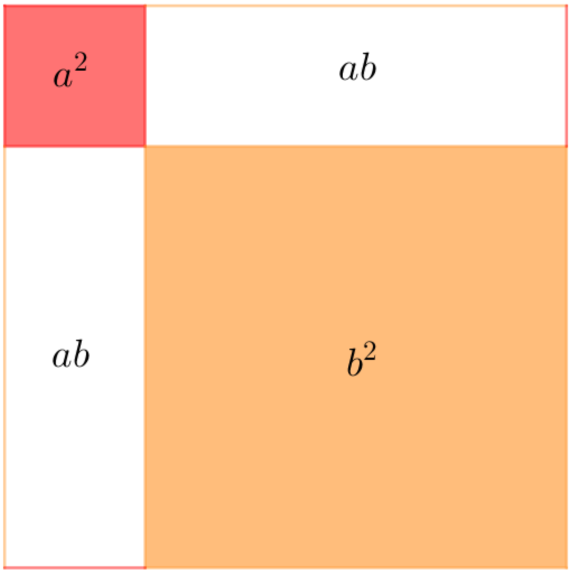
3.2 Produtos Notáveis

3.2.1 Quadrado da Soma Entre Dois Termos

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$





3.2.2 Quadrado da Diferença Entre dois Termos

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

3.2.3 Diferença de Quadrados

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$

$$a^2 - b^2$$

3.2.4 Cubo da Soma Entre Dois Termos

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a \cdot a^2 + 2a \cdot a \cdot b + a \cdot b^2 + b \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot b + b \cdot b^2$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

3.2.5 Cubo da Diferença Entre Dois Termos

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) = aa^2 - a2ab + a \cdot b^2 - b \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot b - b \cdot b^2$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

3.3 Técnicas de Fatoração

3.3.1 Termo em Evidência

$$2x^2 + 2xy = 2x(x+y)$$

3.3.2 Agrupamento

$$ax + 5a + 5x + 25$$
$$a(x+5) + 5(x+5)$$
$$(x+5)(a+5)$$

3.3.3 Quadrado perfeito

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = (x+4)^2$$

3.3.4 Diferença de Quadrados

$$x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$$

3.3.5 Soma de Dois Cubos

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

3.3.6 Diferença de Dois Cubos

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

3.3.7 Fatorações Sucessivas

$$3x^2 - 75 = 3x^2 - 3 \cdot 25 = 3(x^2 - 25) = 3(x^2 - 5^2) = 3(x+5)(x-5)$$

Capítulo 4

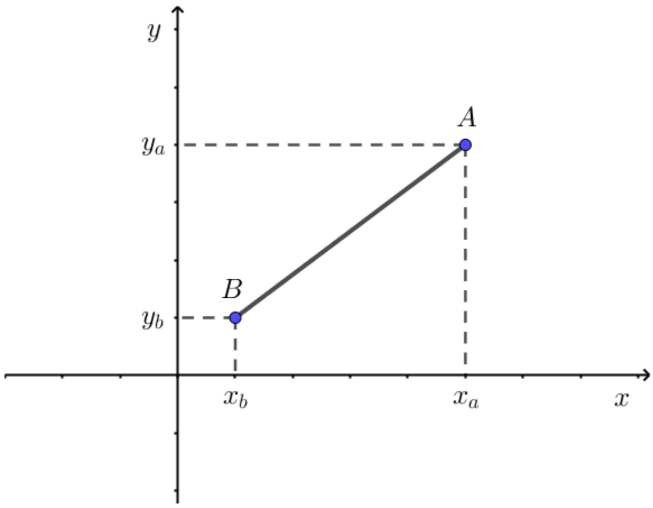
Geometria Analitica

4.1 Noções Iniciais

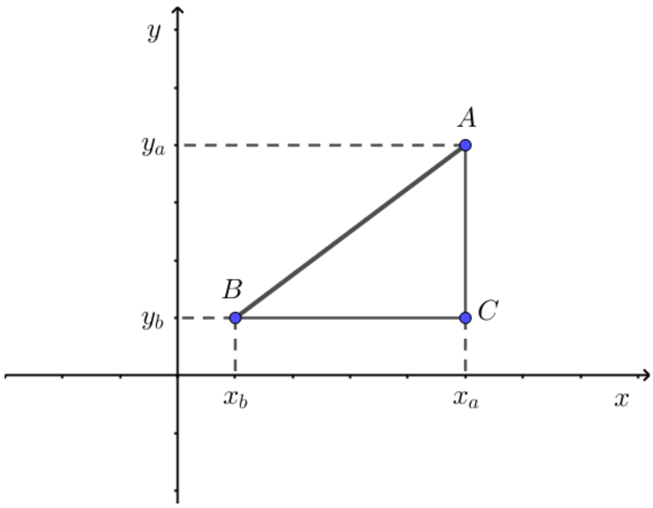
4.1.1 Distância Entre Dois Pontos

Dados dois pontos $A(x_a\,,y_a)$ e $B(x_b\,,y_b)$ a distância entre A e B é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$



Demonstração 1 *Vamos demonstrar a formula da distância entre dois pontos. Considere o triângulo ABC na imagem abaixo:*



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC temos:

$$d_{AB}^2 = d_{BC}^2 + d_{AC}^2$$

Do triângulo ABC temos que $d_{BC} = (x_a - x_b)$ e $d_{AC} = (y_a - y_b)$ então:

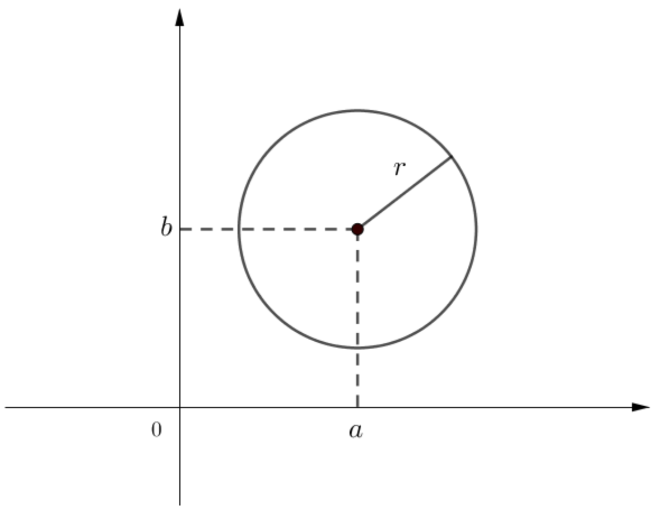
$$d_{AB}^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

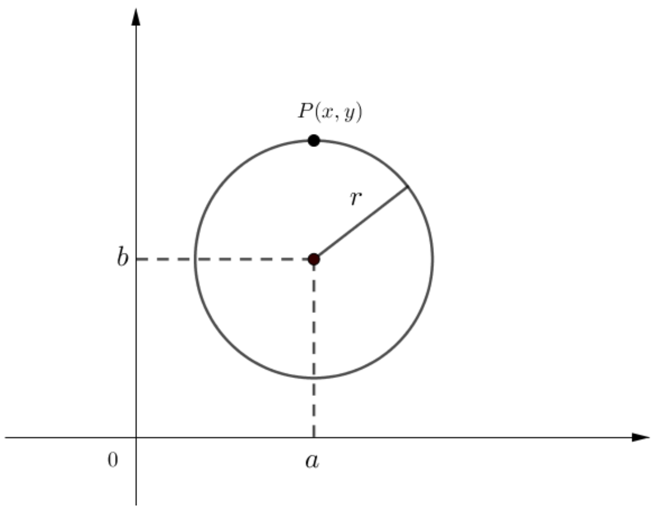
4.1.2 Circunferência

Uma circunferência é o conjunto de pontos no plano que estão a uma certa distância r de um ponto dado (a, b). Um ponto (x, y) pertence a circunferência de centro (a, b) e raio r se e somente se satisfaz a equação:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



Demonstração 2 *Vamos demonstrar a equação da circunferência. Considere a seguinte imagem abaixo:*



Usando a definição de circunferência, temos que um ponto $P(x, y)$ pertence a circunferência se e somente se a distância dele até o centro $C(a, b)$ é igual a r. Escrevendo essa relação, temos:

$$d_{PC} = r$$

Usando a equação da distância entre dois pontos e substituindo na equação acima, temos:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

elevando ao quadrado os dois lados da equação acima, temos:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

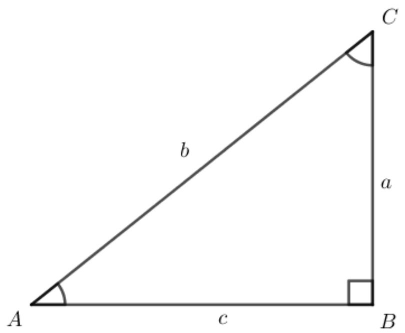
Capítulo 5

Trigonometria

5.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

5.1.1 Triângulo Retângulo

Um Triângulo é dito retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.



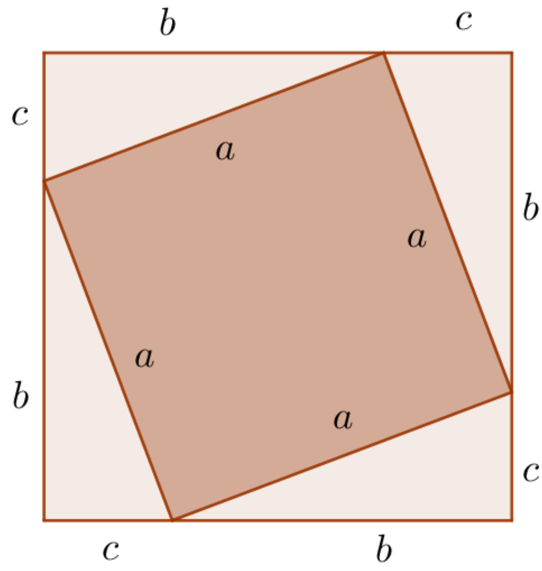
5.1.2 Teorema de Pitágoras

Teorema 1 *O quadrado da Hipotenusa é igual à soma do quadrado dos catetos.*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração 3 *Vamos demonstrar o teorema de Pitágoras.*

Considere o quadrado de lado a inscrito no quadrado de lado $b + c$.



A partir da figura acima percebe-se que a área do quadrado a é igual a área do quadrado $b+c$ menos a área dos 4 triângulos de lados b e c. Escrevendo essa relação, temos:

$$a^2 = (b+c)^2 - 4\left(\frac{bc}{2}\right)$$

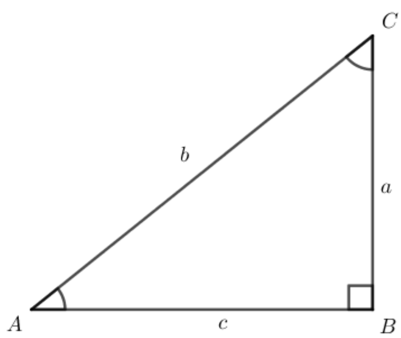
$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Observação: $\left(\frac{bc}{2}\right)$ é a área do triângulo retângulo de catetos b e c.

5.1.3 Seno, Cosseno e Tangente

Considere o triângulo retângulo abaixo:



Seno

O seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{b}$$

Cosseno

O cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa

$$\cos \hat{A} = \frac{c}{b}$$

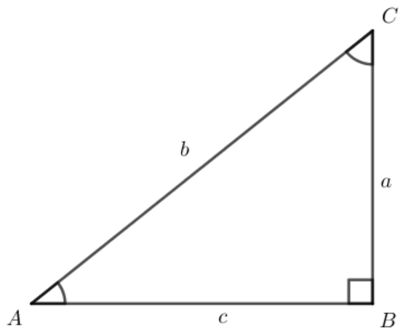
Tangente

A tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente.

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{c}$$

5.1.4 Relação Fundamental da Trigonometria

considere o seguinte triângulo retângulo:



Demonstração 4 *Vamos demonstrar a relação fundamental da Trigonometria.*

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \operatorname{sen} \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b \cos \hat{A}$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos $b^2 = a^2 + c^2$. Substituindo os valores:

$$b^2 = (b \operatorname{sen} \hat{A})^2 + (b \cos \hat{A})^2$$

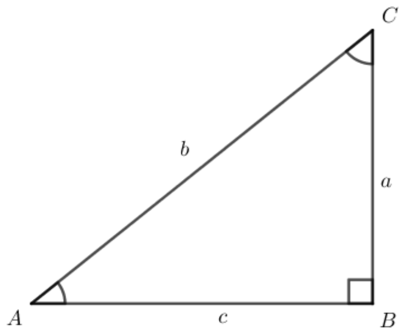
$$b^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \hat{A} + b^2 \cos^2 \hat{A}$$

Dividindo de ambos os lados da equação por b^2 temos:

$$\operatorname{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$$

5.1.5 Ângulos Complementares

considere o Triângulo retângulo abaixo:



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \hat{B} = 90° \\ \hat{A} + \hat{C} = 90° \end{cases}$$

Dizemos que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são complementares, pois a soma dos dois é igual à 90°. Com isso decorre as seguintes relações:

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} \hat{A} = \cos \hat{C}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{b}$$

$$\boxed{\cos \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{C}}$$