



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachgebiet Flugsysteme und Regelungstechnik

Skriptum zur Vorlesung

Flugmechanik I
Flugleistungen

von

Prof. Dr.-Ing. U. Klingauf

WS 2019 / 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Grundlagen	5
2.1 Begriffe und Definitionen	5
2.1.1 Abkürzungen und Nomenklatur	5
2.1.2 Kräfte und Momente am Flugzeug	11
2.1.3 Steuergrößen und deren Bedienelemente	13
2.1.4 Flugzeuggeometrie	14
2.2 Atmosphäre	17
2.2.1 Aufbau der Atmosphäre	17
2.2.2 Physik der Atmosphäre	20
2.2.3 ICAO-Standardatmosphäre	22
2.2.4 Erfassung von Luftdaten	26
2.2.4.1 Höhenmessung	26
2.2.4.2 Geschwindigkeitsmessung	27
2.2.4.3 Temperaturmessung	31
2.2.4.4 Messung weiterer Größen	32
2.3 Beschreibung der flugmechanischen Achsensysteme	35
2.3.1 Geodätisches Koordinatensystem	35
2.3.2 Flugzeugfestes (körperfestes) Koordinatensystem	36
2.3.3 Aerodynamisches Koordinatensystem	36
2.3.4 Experimentelles Koordinatensystem	37
2.3.5 Bahnachsensystem	38
2.3.6 Auswahl des Koordinatensystems	39
2.4 Transformation der flugmechanischen Koordinatensysteme	39
2.4.1 Transformation geodätisch zu flugzeugfest	40
2.4.2 Transformation geodätisch zu bahnfest	43
2.4.3 Transformation geodätisch zu aerodynamisch	45
2.4.4 Transformation flugzeugfest zu aerodynamisch	47
3 Modelle der Flugmechanik	49
3.1 Aerodynamische Kräfte	49
3.1.1 Auftriebsmodell	50
3.1.2 Auftrieb	52
3.1.2.1 Auftriebsbeiwert und Auftriebsanstieg	52
3.1.2.2 Maximaler Auftriebsbeiwert	53

3.1.3	Widerstand	55
3.1.3.1	Übersicht zum Widerstand	56
3.1.3.2	Physik zur Widerstandsentstehung am Flugzeug	56
3.1.3.3	Parasitärer Widerstand	61
3.1.3.4	Steuerwiderstand	61
3.1.4	Flugzeugpolare	61
3.1.5	Aerodynamische Definition der Gleitzahl	65
3.1.6	Übersicht zu wichtigen Größen der beiden Polarenansätze	66
3.2	Antriebskräfte	68
3.2.1	Allgemeines zu den Antriebskräften	68
3.2.1.1	Definition von Schub und Verbrauch	68
3.2.1.2	Stand- und Schwebeschub	69
3.2.2	Luftschraubenantriebe	72
3.2.2.1	Allgemeines	72
3.2.2.2	Ermittlung von Vortriebsschub und Kraftstoffverbrauch	73
3.2.3	Strahlantriebe	75
3.2.3.1	Allgemeines zu Strahlantrieben	75
3.2.3.2	Ermittlung von Schub und Kraftstoffverbrauch	79
3.2.4	Raketenantriebssysteme	80
3.2.5	Modellierung des Schubes	81
3.3	Bewegungsgleichungen (3 FG Modell)	84
3.3.1	Aufstellen der Bewegungsgleichungen	84
3.3.1.1	Aerodynamische Kräfte	87
3.3.1.2	Antriebskräfte	87
3.3.1.3	Gewichtskräfte	88
3.3.1.4	Kinematische Zusammenhänge	89
3.3.2	Symmetrischer Flug (Flug in vertikaler Ebene)	91
3.3.3	Horizontaler Kurvenflug (Flug in horizontaler Ebene)	93
4	Bewegungen in der Flugzeugsymmetrieebene	95
4.1	Gleitflug	95
4.1.1	Gleitzahl	97
4.1.2	Geschwindigkeiten	98
4.1.3	Minimale Gleitzahl	99
4.1.4	Maximale Bahngeschwindigkeit (Punkt „2“)	100
4.1.5	Minimale Sinkgeschwindigkeit (Punkt „3“)	100
4.1.6	Die Geschwindigkeitspolaren	102
4.2	Horizontalflug	105
4.2.1	Definitionen und Grundbeziehungen	105
4.2.2	Auftriebsgleichung	106
4.2.3	Widerstandsgleichung	108
4.2.4	Einfluss der Schubcharakteristik	109
4.2.5	Flugbedingung für minimalen Schubbedarf	111

4.2.6	Maximale Flughöhen in Abhängigkeit vom Schub	114
4.3	Steigflug	117
4.3.1	Definitionen und Grundbeziehungen	117
4.3.2	Steigwinkel und Steiggeschwindigkeit	118
4.3.3	Ermittlung der Maximalwerte	121
4.3.4	Darstellung im Geschwindigkeitspolaren-Diagramm	124
4.3.5	Einfluss der Höhe	126
5	Bewegungen in der Horizontalebene - Kurvenflug	131
5.1	Allgemeine Zusammenhänge zum horizontalen Kurvenflug	131
5.2	Optimaler Kurvenflug bei gegebenem Lastvielfachen	132
5.3	Optimaler Kurvenflug bei gegebenem Radius	135
5.4	Energiebetrachtung	136
6	Höhen-Machzahl-Diagramm	141
6.1	Einführung	141
6.2	Flugbereichsgrenzen	141
6.3	Flugmechanische Deutung des Flugbereichs	145
6.3.1	Der Drosselgrad	145
6.3.2	Das Steigvermögen	146
6.3.3	Das wirtschaftliche Steigvermögen	147
6.3.4	Beschleunigungsvermögen	147
6.3.5	Kurvenflugvermögen	148
6.3.5.1	Abfangen	149
6.3.6	Die spezifische Reichweite	151
7	Flugabschnitte	153
7.1	Allgemeines	153
7.2	Streckenflug	154
7.2.1	Definitionen und Grundbeziehungen	154
7.2.2	Wahl der Flugzustände	156
7.2.3	Flugzeiten und Flugstrecken	157
7.2.3.1	Flugzustand I	157
7.2.3.2	Flugzustand II	166
7.2.4	Vergleichende Betrachtungen	171
7.2.5	Wirtschaftlicher Streckenflug	176
7.2.6	Verfahren zur praktischen Durchführung von Streckenflügen	178
7.3	Instationärer Streckenflug	182
7.3.1	Allgemeines zum instationären Streckenflug	182
7.3.2	Beschleunigungsweg	182
7.3.3	Beschleunigungszeit	184
7.3.4	Verzögerungsflug	185
7.3.5	Praxisbeispiel Beschleunigungs- und Verzögerungsflug	187

7.4	Allgemeiner Steigflug	190
7.4.1	Definition der Energiehöhe	190
7.4.2	Numerische Berechnungen von Steigbahnen in der Vertikalebene . .	191
7.4.3	Näherungsverfahren	192
7.4.4	Steigverfahren für Unterschallflugzeuge	195
7.4.5	Steigverfahren für Überschallflugzeuge	199
7.4.6	Steigflüge mit konstanter Energiehöhe	202
7.5	Start und Landung	206
7.5.1	Einführung	206
7.5.1.1	Definition der Geschwindigkeiten	206
7.5.2	Abflug	208
7.5.2.1	Die Abflugphase	208
7.5.2.2	Rollvorgang für Bugradflugzeuge (Bugradabheben)	209
7.5.2.3	Rollstrecke	212
7.5.2.4	Triebwerksausfall beim Rollen	215
7.5.2.5	Übergang in den Steigflug bis zur Hindernishöhe	217
7.5.2.6	Abflugstrecke	222
7.5.2.7	Erforderlichen Abflugbahnlängen nach EASA CS	223
7.5.3	Landung	225
7.5.3.1	Anflug	225
7.5.3.2	Endanflug	227
7.5.3.3	Aufsetzen	227
7.5.3.4	Aufsetzstrecke	227
7.5.3.5	Landerollstrecke	230
7.5.3.6	Landestrecke	233

1 Einleitung

Die Flugmechanik beschreibt das Verhalten von Körpern, die sich in der Atmosphäre mit Hilfe aerodynamischer Kräfte bewegen. Im Gegensatz zur Aerodynamik beschreibt die Flugmechanik nicht die physikalischen Abläufe an einzelnen Flugzeugkomponenten, sondern das Verhalten des Gesamtsystems Flugzeug. Die Vorlesung Flugmechanik besteht aus zwei Teilen. Flugmechanik I behandelt die *Flugleistungen*, Flugmechanik II das dynamische Verhalten und die *Flugeigenschaften* von Flugzeugen. Das Bild 1.1 gibt einen Überblick zu den Inhalten der beiden Vorlesungen.

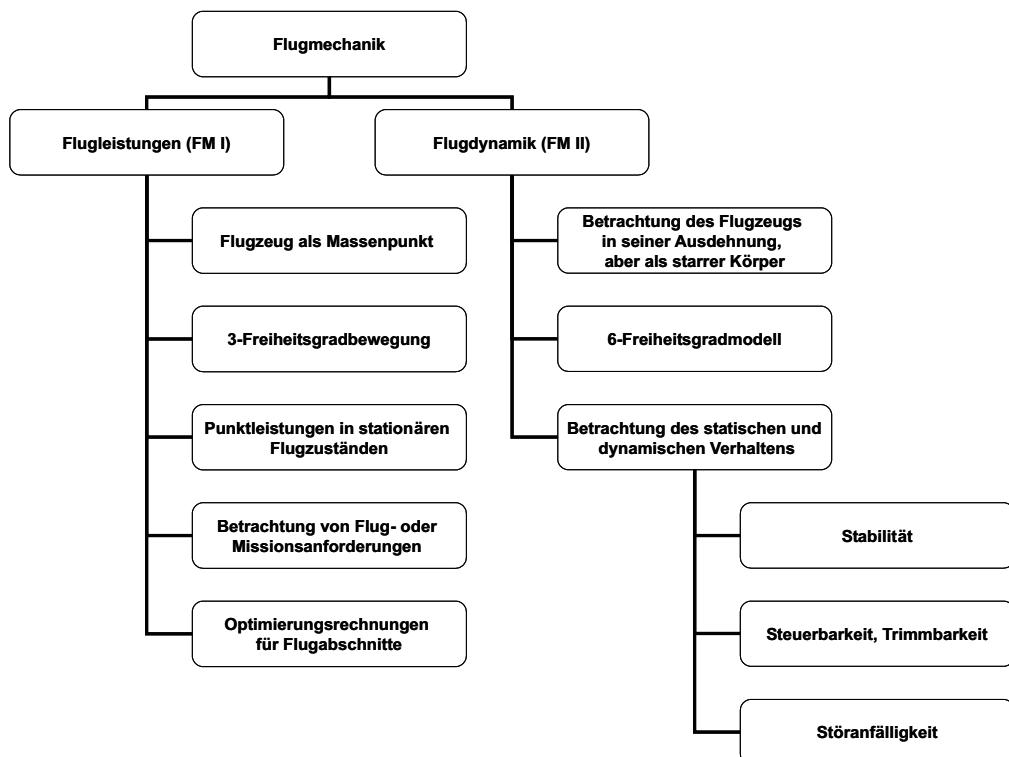


Abbildung 1.1: Übersicht zur Flugmechanik

Zur Beschreibung der Flugleistungen genügt es, das Flugzeug als Massenpunkt zu betrachten (3 translatorische Freiheitsgrade im Raum). In der Regel werden Punktleistungen bei einem ausgewählten, stationären Flugzustand betrachtet. Flugzustände sind z.B.: Gleitflug, Horizontalflug, Steigflug oder Kurvenflug. Als stationär werden die Flugzustände bezeichnet, wenn sich während des Betrachtungszeitraums keine der Zustandsgrößen ändert. Auf Basis dieser

Betrachtungen können dann die Flugleistungen in verschiedenen Flugabschnitten bestimmt werden. Diese sind für eine typische Transportmission: Start, Steigflug, Reiseflug, Sinkflug und Landung. Bei mehrmotorigen Flugzeugen werden außerdem die Flugleistungen bei einem Triebwerksausfall berechnet. Die Hauptaufgabe besteht darin, Kenngrößen zu bestimmen, zu bewerten und zu optimieren. Typische Kenngrößen für Flugleistungen sind:

- Reichweite
- Reisegeschwindigkeit
- Gipfelhöhe
- Steiggeschwindigkeit
- Start- und Landestrecke
- Nutzlast
- Treibstoffverbrauch
- Lastvielfaches
- etc.

Zur Beschreibung der Flugeigenschaften und des dynamischen Verhaltens (Flugdynamik) wird das Flugzeug in der Regel als starrer Körper betrachtet. Bei der Bewegung im Raum ergeben sich damit sechs Freiheitsgrade (3 translatorische, 3 rotatorische). Zur Vereinfachung wird häufig eine Aufteilung in Längs- und Seitenbewegung mit jeweils 3 Freiheitsgraden vorgenommen. Die Beschreibung erfolgt mit Hilfe von Bewegungsgleichungen, die aus einem System von gekoppelten Differentialgleichungen bestehen. Die Flugeigenschaften werden mit Kenngrößen wie:

- Eigenverhalten
- Stabilität
- Steuerverhalten
- Störverhalten
- Steuerkräfte
- etc.

beschrieben. Die Flugdynamik schließt die Teilgebiete Flugsimulation, Flugsteuerung und Flugregelung ein. In der Flugsimulation werden die Bewegungsgleichungen dazu genutzt, die Flugzeugbewegungen zu simulieren. Sie kann sowohl zum Zweck des Trainings (Flugsimulator) als auch zur Flugzeugauslegung eingesetzt werden. So lassen sich auf Basis der flugmechanischen Berechnungen die Flugeigenschaften einer Konstruktion im voraus beurteilen und optimieren.

Ein Ziel der Flugsteuerung ist die Optimierung der Interaktion zwischen Pilot und Flugzeug. Damit soll sichergestellt werden, dass der Pilot in der Lage ist, im Zusammenspiel mit dem

Flugzeug eine Flugmission erfolgreich durchzuführen. Das bedeutet, dass das Flugverhalten (und damit die Flugeigenschaften) an den Piloten und dessen Leistungsvermögen angepasst werden muss. Als Grundlage zur Gestaltung des Flugverhaltens eines Flugzeugs dienen Erfahrungen aus Flugversuchen und Simulationen. Diese fließen unter anderem in die Zulassungsbestimmungen eines Flugzeugmusters ein und drücken sich in sog. Flugeigenschaftsfordernungen bzw. -richtlinien (z.B. EASA CS 23/25, MIL-STD-1790 bzw. MIL-F-8785) aus.

In der relativ jungen Disziplin der Flugregelung werden die dynamischen Eigenschaften des Flugzeugs mit den Mitteln der Regelungstechnik so modifiziert, dass unter anderem eine Verbesserung der Flugeigenschaften (Stabilität, Steuer- und Störverhalten) erreicht werden kann. In der Vorlesung Flugmechanik II wird ein kurzer Überblick über dieses Gebiet gegeben.

2 Grundlagen

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich mit grundlegenden Begriffen und Definitionen zur Flugmechanik. Erläutert werden die Physik der Atmosphäre, die Erfassung und Messung der Luftdaten und die flugmechanischen Achsensysteme inklusive deren Transformationen.

2.1 Begriffe und Definitionen

2.1.1 Abkürzungen und Nomenklatur

Die Tabelle 2.1 und Tabelle 2.2 enthalten Definitionen zur Nomenklatur und Indizierung flugmechanischer Größen. Diese entsprechen im Wesentlichen der in *DIN 9300 Flugmechanik* verwendeten Nomenklatur, zusätzliche Bezeichnungen werden an dieser Stelle eingeführt.

Tabelle 2.1: Im Skript verwendete Indizes

Indizes	Bedeutung
g	geodätisches Koordinatensystem (aircraft-carried normal earth axis system)
a	aerodynamisches Koordinatensystem (air-path axis system)
e	experimentelles Koordinatensystem (intermediate axis system)
f	flugzeugfestes Koordinatensystem (body axis system)
k	flugbahnfestes Koordinatensystem (flight-path axis system)
0	Bezugszustand bei $H=0$ oder $C_A = 0$ (Bsp.: $C_{W_0} = C_W$ bei $C_A = 0$)
i	beliebiger Bezugszustand
0;1;2;3	Flug im Punkt „0“; „1“; „2“; „3“ Beiwerte sind beispielsweise wie folgt gekennzeichnet: $C_{W,1}$; $C_{A,1}$; $C_{W,3}$
I	Flugzustand I
II	Flugzustand II

Tabelle 2.2: Bezeichnungen und Formelbuchstaben

Zeichen	SI-Einheit	Benennung
A	N	Auftrieb $A = -Z_a^A$
A_{Str}	m^2	Strahlfläche
A_{Pr}	m^2	Propellerfläche
a	m/s	Schallgeschwindigkeit in Luft
b	m	Spannweite
b^*	$\text{kg}/\text{W}\cdot\text{s}$	spezifischer Kraftstoffverbrauch, Kraftstoffmassenstrom bezogen auf Leistung
b_H	m	Höhenleitwerksspannweite
b_{nv}	abhängig von n_V	spez. Kraftstoffverbrauch
C_A	-	Auftriebsbeiwert $C_A = A / (S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2)$
C_f	-	Reibungsbeiwert
C_W	-	Widerstandsbeiwert $C_W = W / (S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2)$
D	-	Drosselgrad
E	J	Energie
F	N	Schubkraft (Schub)
F_0	N	Stand- bzw. Schwebeschub
F_0/A_{Str}	N/m^2	Strahlflächenbelastung
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
H	m	Flughöhe
h	-	wirtschaftliches Steigvermögen
H^*	m	Energiehöhe
H_u	-	Heizwert
I	m/s	spezifischer Impuls (Rakete)
J	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	Impuls am Triebwerk
k	-	Faktor des Auftriebwiderstandsbeiwertes
k_1	-	Faktor zum Auftriebwiderstand $k_1 = -2 k C_{A,0}$
k_2	-	Faktor zum Auftriebwiderstand $k_2 = \frac{S \rho}{2 m g}$
K_B	$\text{€}/\text{kg}$	kraftstoffabhängige Kosten
K_{ges}	€	Gesamtkosten
K_t	$\text{€}/\text{s}$	zeitabhängige Kosten
L	Nm	Moment um die X-Achse: Rollmoment

Fortsetzung Tabelle 2.2: Bezeichnungen und Formelbuchstaben

l_a	m	Flügeltiefe außen
l_{aH}	m	Höhenleitwerkstiefe außen
l_i	m	Flügeltiefe innen
l_{iH}	m	Höhenleitwerkstiefe innen
l_r	m	Rumpflänge
l_{rH}	m	Höhenrudertiefe
l_μ	m	Bezugsflügeltiefe
M	Nm	Moment um die Y-Achse: Nickmoment
m	kg	Flugzeugmasse
Ma, M	-	Machzahl $M = Ma = V/a$
m_B	kg	Kraftstoffmasse
\dot{m}_B	kg/s	Brennstoffmassenstrom
$\frac{m}{S}$	kg/m ²	Flächenbelastung
N	Nm	Moment um die Z-Achse: Giermoment
n	-	Polytropenexponent
		→ Isotropenexponent
n	-	Lastvielfaches
n_V	-	Triebwerksfaktor - Abhängigkeit von Geschwindigkeit
n_ρ	-	Triebwerksfaktor - Abhängigkeit von der Höhe
O	m ²	Oberfläche
P	W	Leistung
p	1 Pa = 1 N/m ²	Druck
p	rad/s	Rollgeschwindigkeit
Q	N	Querkraft $Q = Y_a^A$
q	rad/s	Nickgeschwindigkeit
\bar{q}	1 Pa = 1 N/m ²	Staudruck
R	J/kgK	Gaskonstante
r	rad/s	Giergeschwindigkeit
Re	-	Reynoldszahl
r_K	m	Kurvenradius
S	m ²	Flügelfläche (Bezugsfläche)
s	m	Halbspannweite
s_H	m	Höhenleitwerkshalbspannweite

Fortsetzung Tabelle 2.2: Bezeichnungen und Formelbuchstaben

s_Q	m	Querruderlänge
T	K	Temperatur
U	-	Relative Luftfeuchte
u	m/s	Komponente von \mathbf{V} in X-Richtung
V	m/s	Fluggeschwindigkeit
v	m/s	Komponente von \mathbf{V} in Y-Richtung
V^*	m/s	Bezugsgeschwindigkeit am Punkt 1 (bestes Gleiten)
V_{IAS}	m/s	Indicated Air Speed
V_{Str}	m/s	Strahlgeschwindigkeit
W	N	Widerstand $W = -X_a^A$
w	m/s	Komponente von \mathbf{V} in Z-Richtung
X	N	Kraftkomponente in X-Richtung
Y	N	Kraftkomponente in Y-Richtung
Z	N	Kraftkomponente in Z-Richtung
α	rad	Anstellwinkel
β	rad	Schiebewinkel
β	rad	Blatteinstellwinkel des Propellers
χ	rad	Bahnazimut
χ_a	rad	Flugwindazimut
ε	-	Gleitzahl $\varepsilon = C_W/C_A$
ε_{\min}	-	minimale Gleitzahl (bestes Gleiten)
Φ	rad	Hängewinkel
φ_v	rad	Pfeilwinkel der Vorderkante des Flügels
φ_{25}	rad	Pfeilwinkel der 25% Linie des Flügels
γ	rad	Bahnneigungswinkel, Steigwinkel
γ_a	rad	Flugwindneigungswinkel
η	Ns/m ²	dynamische Viskosität
η	rad	Höhenruderausschlag
η_{ges}	-	Wirkungsgrad
η_K	rad	Klappenausschlag
η_L	-	Wirkungsgrad der Luftschaube
κ	-	Verhältnis der beiden spezifischen Wärmekapazitäten
κ_K	s	Kostenfaktor

Fortsetzung Tabelle 2.2: Bezeichnungen und Formelbuchstaben

Λ	-	Flügelstreckung $\Lambda = \frac{b^2}{S}$
μ	-	Verhältnis von m_a zu m_e
μ_a	rad	Flugwindhängewinkel
μ_B	-	Radreibungskoeffizient beim Bremsen
μ_R	-	Radreibungskoeffizient beim Rollen
ν	rad	V-Winkel des Flügels
ψ	-	Gierwinkel
ρ	kg/m^3	Luftdichte
θ	rad	Nickwinkel
ς	-	Standgütegrad
ξ	rad	Querruderausschlag
ζ	rad	Seitenruderausschlag

2.1.2 Kräfte und Momente am Flugzeug

Bild 2.1 zeigt die am Flugzeug angreifenden Kräfte und Momente, sie werden im flugzeugfesten Koordinatensystem dargestellt. Es handelt sich um ein rechtshändiges Koordinatensystem. Die Vektoren und die Bezeichnungen der Elemente und deren Schreibweise zeigt Tabelle 2.3.

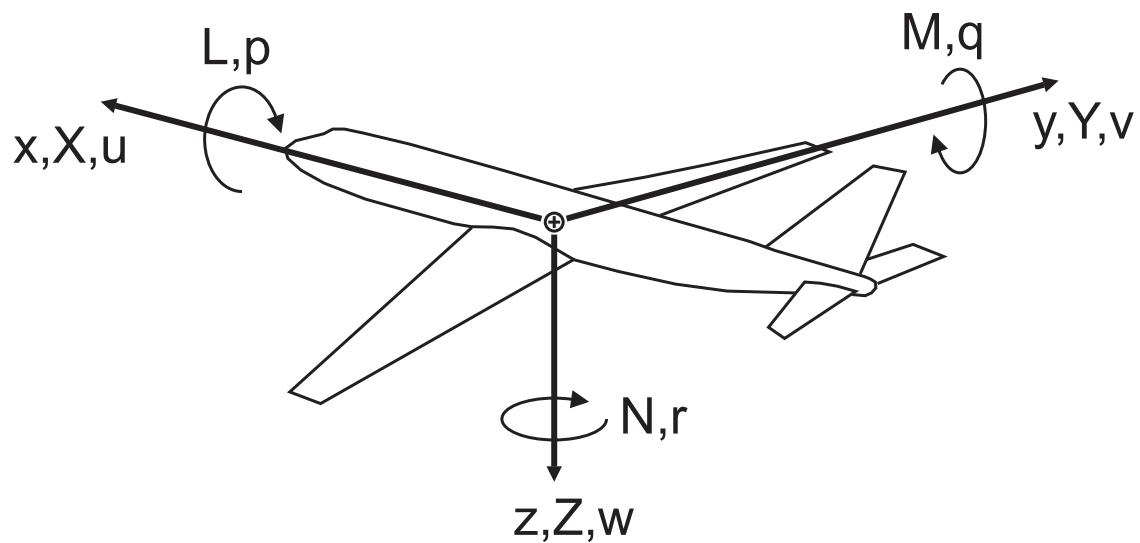


Abbildung 2.1: Bezeichnungen der Kräfte, Momente und Geschwindigkeiten im flugzeugfesten Koordinatensystem

Tabelle 2.3: Schreibweise der verwendeten Vektoren

Vektor	Formelschreibweise	Bezeichnung
Kräfte	$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$	Widerstand ist $-X_a$ Querkraft ist $+Y_a$
Momente	$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$	Auftrieb ist $-Z_a$ Rollmoment Nickmoment Giermoment
Geschwindigkeit	$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$	
Position	$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	Rollen
Winkelgeschwindigkeit	$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$	Nicken Gieren

2.1.3 Steuergrößen und deren Bedienelemente

Die Flugzeugsteuerung erfolgt über Ausschläge von Klappen und Rudern an Flügeln und Leitwerken, die auch als *Steuerflächen* bezeichnet werden. Die *Steuerflächen* erzeugen aerodynamische Kräfte, welche über den jeweiligen Hebelarm (Abstand zum Schwerpunkt) Momente um den Schwerpunkt zur Folge haben. Die aus den Momenten resultierenden Drehbewegungen um den Flugzeugschwerpunkt bzw. um die jeweilige Flugzeugachse x, y, und z, lassen das Flugzeug seine Lage im Raum verändern. Die *Ruderausschläge* werden folgendermaßen benannt:

- ξ : Querruderausschlag
- η : Höhenruderausschlag
- ζ : Seitenruderausschlag

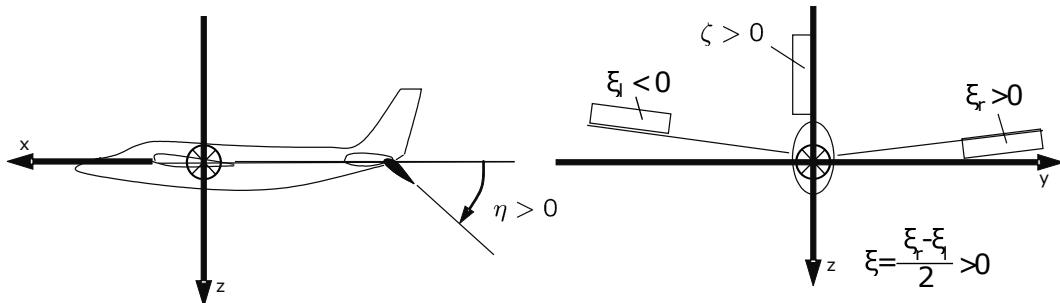


Abbildung 2.2: Ruderausschläge am Flugzeug

Der positive Ruderausschlag ist nach der DIN 9300 definiert durch die positive Drehrichtung um die jeweilige Scharnierachse. Die Orientierung der Scharnierachse richtet sich nach der näherungsweise parallel verlaufenden flugzeugfesten Achse. Bild 2.2 veranschaulicht die Orientierung der Ruderausschläge für ein konventionelles Flugzeug mit Drachenkonfiguration. Danach gilt für die Richtung der Vorzeichen folgendes:

- Ein positiver Steuerknüppelausschlag (Ziehen) führt zu einem negativen Höhenruderausschlag η und dadurch zu einem positiven Nickmoment.
- Ein negativer Steuerknüppelausschlag (nach links) führt zu einem positiven Querruderausschlag ξ (rechtes Ruder nach unten) und dadurch zu einem negativen Rollmoment.
- Ein negativer Pedalwinkel (rechtes Pedal getreten) führt zu einem negativen Seitenruderausschlag ζ und dadurch zu einem positiven Giermoment.

2.1.4 Flugzeuggeometrie

Die Geometrie am Flugzeug ist im flugzeugfesten Koordinatensystem dargestellt, eine detaillierte Beschreibung des Achsenystems gibt Unterabschnitt 2.3.2.

Das Skript verwendet verschiedene geometrische Bezeichnungen, eine Übersicht dazu gibt Bild 2.3. Zur besseren Übersicht werden die Größen aus Bild 2.3 in Tabelle 2.4 noch einmal genau benannt.

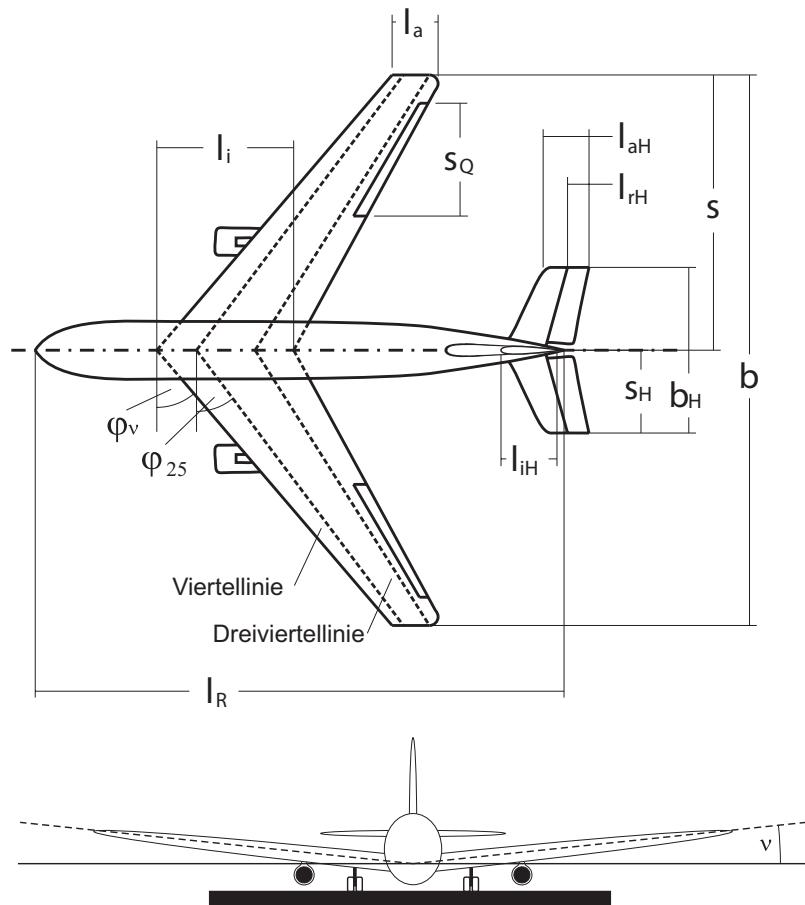


Abbildung 2.3: Flugzeuggeometrie

Tabelle 2.4: Bezeichnungen der Flugzeuggeometrie

Formelbuchstabe	geometrische Bezeichnung
l_a	Flügeltiefe außen
l_i	Flügeltiefe innen
s_Q	Querruderlänge
φ_v	Pfeilwinkel der Vorderkante des Flügels
φ_{25}	Pfeilwinkel der 25% Linie des Flügels
l_R	Rumpflänge
b_H	Höhenleitwerksspannweite
b	Spannweite
s_H	Höhenleitwerkshalbspannweite
s	Halbspannweite
l_{aH}	Höhenleitwerkstiefe außen
l_{iH}	Höhenleitwerkstiefe innen
l_{rH}	Höhenrudertiefe
ν	V-Winkel des Flügels

2.2 Atmosphäre

Alle Fluggeräte bewegen sich in der Atmosphäre. Der vorliegende Abschnitt enthält Erläuterungen zu grundlegenden physikalischen Eigenschaften des Medium *Luft* und den Aufbau der Erdatmosphäre (Standardatmosphäre). Weiterhin werden Methoden zur Erfassung der Luftdaten während eines Fluges vorgestellt.

2.2.1 Aufbau der Atmosphäre

Die physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre werden durch die folgenden Größen definiert:

Luftdichte	ρ
Schallgeschwindigkeit	a
Temperatur	T
Druck	p
Zähigkeit	η
Relative Luftfeuchte	U

Diese Größen sind nicht konstant, sondern mehr oder weniger großen örtlichen und zeitlichen Schwankungen unterworfen, die man zusammenfassend als *Wetter* bezeichnet. Sie sind durch physikalische Gesetzmäßigkeiten miteinander verknüpft (Unterabschnitt 2.2.2) und hängen stark von der Höhe ab. Die vom Wetter herrührenden Schwankungen sind für flugmechanische Berechnungen im Allgemeinen sehr störend. Es ist daher häufig zweckmäßig, statt der für den Einzelfall zutreffenden genauen Werte langfristig gemessene oder als geeignet verabredete Mittelwerte zu verwenden. Bild 2.4 zeigt anhand eines Beispiels, in welchen Grenzen die Temperatur auf der nördlichen Halbkugel schwanken kann.

Bei genauerer Betrachtung der Höhenabhängigkeit derartiger Mittelwerte (Bild 2.5), stellt man fest, dass der im allgemeinen glatte Verlauf in gewissen Höhen Diskontinuitäten aufweist; die Atmosphäre ist geschichtet. Diese Schichtung hängt ursächlich mit den jeweiligen Temperaturgradienten zusammen, die man daher als kennzeichnend für jede Schicht ansehen kann.

Von den vielen Schichten, die heute unterschieden werden (bis zu einer Höhe von 88 km sind bereits 8 Schichten definiert), spielen für die Luftfahrttechnik nur die unteren Schichten eine Rolle. Sieht man von reinen Forschungsflugzeugen ab¹, so reicht es aus, diejenigen Schichten zu kennen, aus denen sich die unteren ca. 30 km der Lufthülle aufbauen. Diese Höhe zu überschreiten wird in absehbarer Zukunft nur in Sonderfällen mit unkonventionellen Flugzeugen gelingen.

¹Die North American X-15 erreichte eine Höhe bis ca. 100 km

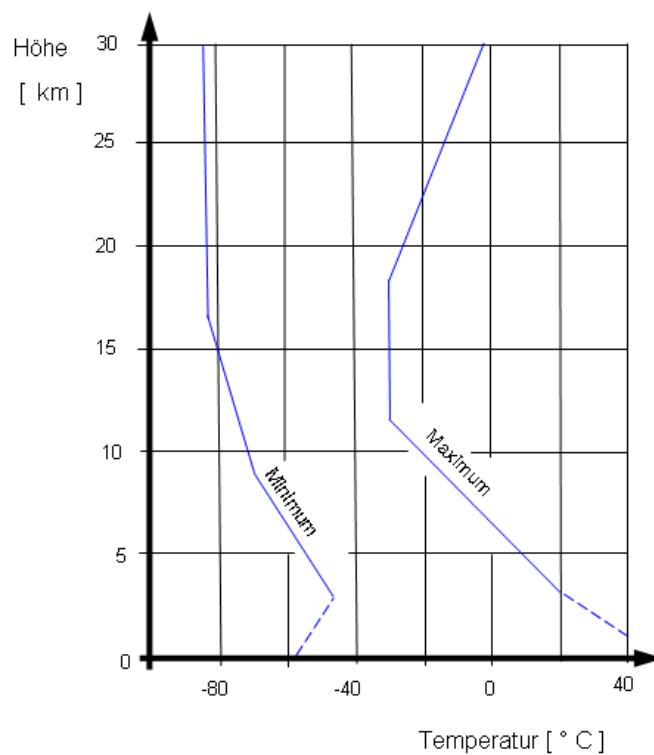


Abbildung 2.4: Maximaler und minimaler Temperaturverlauf auf der nördlichen Halbkugel

Die Grenzen zwischen den einzelnen Luftsichten, bei denen sich der Temperaturgradient ändert, sind variabel. Sie hängen von der Jahres- und der Tageszeit, vom Wetter, von der geographischen Breite, der Bodenbeschaffenheit und vielen anderen Größen ab.

Die unterste Schicht ist die *Troposphäre* (vgl. Bild 2.5). Sie reicht von *Normalnull* bis etwa 11-15 km Höhe. Für theoretische Zwecke und in Tabellen extrapoliert man sie gelegentlich in das Gebiet negativer Höhen (im Normblatt DIN 5450 bis zu 5000 m). In dieser Schicht nimmt die Temperatur pro 100 m Höhenzunahme um etwa 0,5 bis 1 Grad ab. Örtlich kann der Temperaturgradient auch noch größere Werte annehmen. Dann findet ein konvektiver Wärmetransport in vertikaler Richtung statt, entsprechend einem instabilen Zustand der Atmosphäre. Die *Troposphäre* ist die Zone der meisten Wettervorgänge.

Die beiden folgenden Schichten bezeichnet man zusammen als *Stratosphäre*. Sie reichen von der *Tropopause*, der oberen Grenze der *Troposphäre*, bis in etwa 32 km Höhe. Bis zu einer Höhe von ca. 20 km bleibt die Temperatur annähernd konstant, da diese Schicht die Infrarotstrahlung der Erde absorbiert. Von 20 km bis 32 km nimmt die Temperatur wieder zu. Dies wird auf die Absorption von ultraviolettem Sonnenlicht bei gleichzeitiger Bildung von Ozon zurückgeführt. Der Temperaturgradient beträgt ca. 0,1 Grad pro 100 m Höhenzunahme.

Sollen die Flugleistungen eines bestimmten Flugzeugs für einen konkreten Flugmission berechnet werden, müssen die jeweils gültigen Daten der Atmosphäre verwendet werden. Aktuelle und präzise Wetterdaten großflächig zu erhalten ist oft sehr schwierig bzw. überhaupt nicht

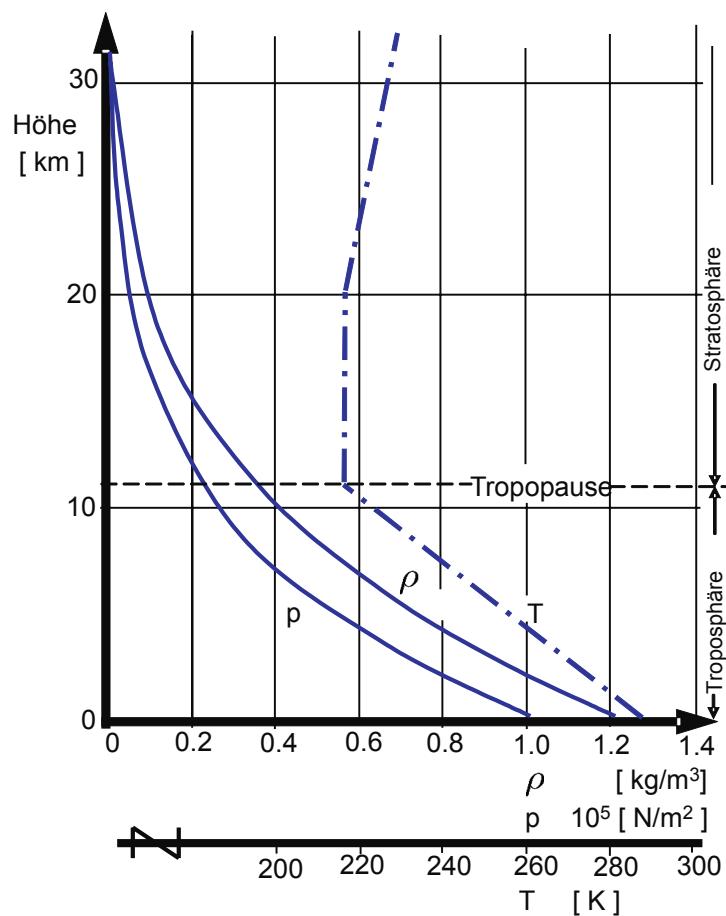


Abbildung 2.5: Temperatur, Luftdruck und Lufdichte der ISA in Abhängigkeit von der Höhe

möglich. Deren Bestimmung ist nicht einfach und dies kann auch nur zu bestimmten Zeiten an ausgewählten Orten geschehen.

Häufig treten Probleme auf, bei denen man den Einfluss der gerade herrschenden Wetterlage bewusst unberücksichtigt lassen möchte, etwa um allgemein gültige Aussagen über ein Flugzeug zu treffen (z.B: über seine Gipfelhöhe, die maximale Steiggeschwindigkeit, die Reichweite usw.), oder um Leistungsdaten verschiedener Flugzeuge miteinander zu vergleichen. Dann benötigt man geeignete gewählte Mittelwerte der Atmosphäre, die jedoch möglichst weltweit verabredet sein sollten. Diesen Zweck erfüllen die *ICAO-Standardatmosphäre* [ISA], die *US-Normalatmosphäre 1962* [USGV] und die *deutsche Normatmosphäre* [DIN5450]. Die erste wird in Unterabschnitt 2.2.3 beschrieben. Zu beachten ist jedoch, dass die Abweichungen der wahren Atmosphäre gegenüber der Standardatmosphäre erheblich sein können.

Der *Wind* kann die Flugleistungen eines Flugzeugs stark beeinflussen. Viele Leistungsdaten, wie z.B. *Reichweite*, *Startstrecke*, *Geschwindigkeit über Grund* usw., sind in einem erdfesten Koordinatensystem definiert. Bei ihrer Abschätzung ist die Bewegung der Luft gegenüber der Erde nicht zu vernachlässigen.

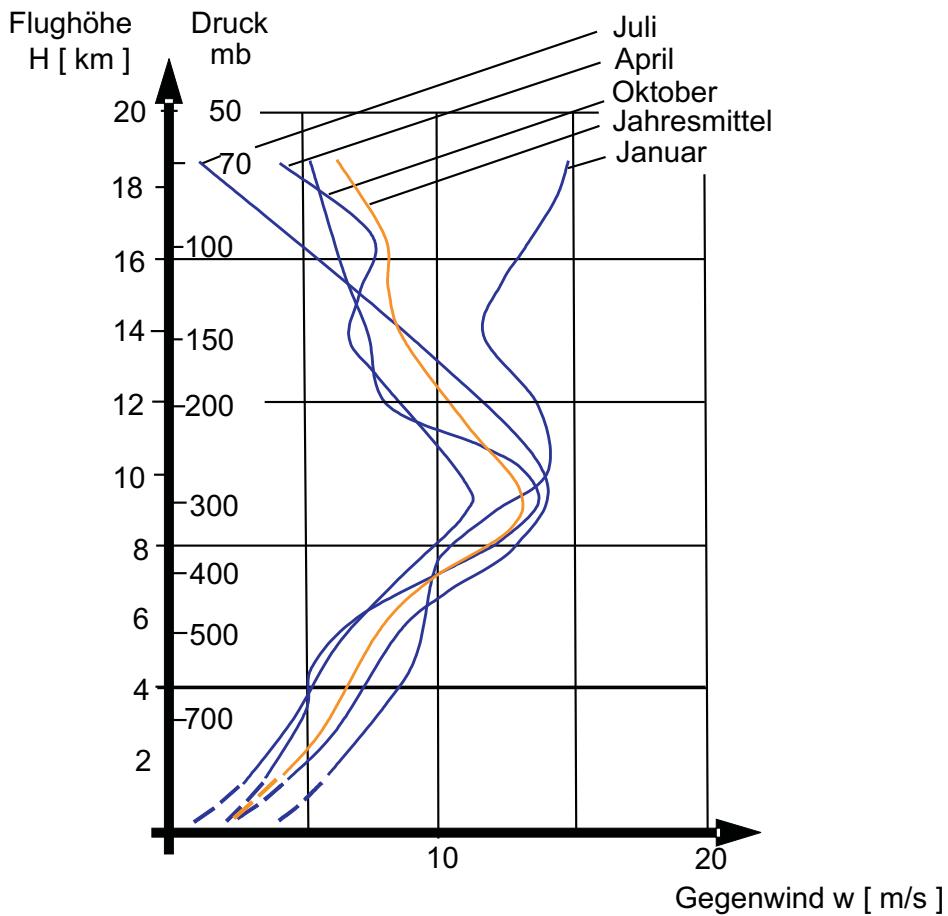


Abbildung 2.6: Mittelwert der Windstärke auf der Nordwesteuropa-Atlantik Ausflugroute

Die Windrichtung und -stärke beeinflussen diese Größen mehr oder weniger positiv oder negativ. Richtung und Stärke des auf den wichtigen Flugstrecken zu erwartenden Windes lassen sich aus langjährigen Beobachtungen im allgemeinen gut vorhersagen. Der Zeitpunkt des Fluges und die Flughöhe sind hier von großer Bedeutung. Bild 2.6 gibt als Beispiel Windstärken in Abhängigkeit von der Höhe auf der Nordwesteuropa-Atlantik-Ausflugroute wieder, wobei für einzelne Monate als auch für Jahr Mittelwerte angegeben sind. In den Betrachtungen dieser Vorlesung wird darauf verzichtet, den Windeinfluss auf die Flugleistungen zu untersuchen, d.h. die Luft wird als ruhend angesehen.

2.2.2 Physik der Atmosphäre

Bei der Herleitung der physikalischen Zusammenhänge, die das Verhalten der Atmosphäre beschreiben, geht man von der Erfahrungstatsache aus, dass sich die Luft wie ein *ideales Gas* verhält, d.h. stets der thermodynamischen Zustandsgleichung

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (2.1)$$

gehorcht. Hierin ist $R = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \frac{J}{kg \cdot K}$ die Gaskonstante der (trockenen) Luft und T die Temperatur in Kelvin. Zur Ermittlung der Abhängigkeit des Luftdrucks p , der Luftdichte ρ und der Temperatur T von der Höhe wird das Gleichgewicht der Kräfte an einem Volumenelement ruhender Luft wie in Bild 2.7 betrachtet.

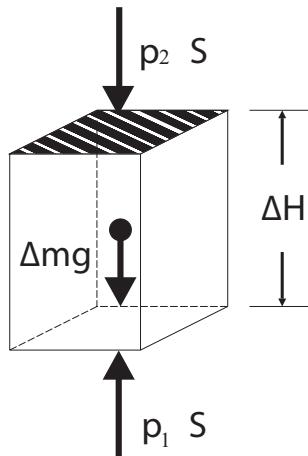


Abbildung 2.7: Kräfte an einem Volumenelement

Es muss dabei gelten mit $\Delta m = \rho S \Delta H$:

$$p_1 S = g \Delta m + p_2 S \quad (2.2)$$

bzw.:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\frac{g}{S} \Delta m = -g \rho \Delta H \quad (2.3)$$

Daher folgt, wenn man auf die Differentiale übergeht,

$$\frac{dp}{\rho} = -g dH \quad \text{bzw.} \quad \frac{dp}{p} = -g \frac{dH}{R T} \quad (2.4)$$

Diese Beziehung nennt man die *hydrostatische Grundgleichung*. Nach den Gesetzen der Thermodynamik idealer Gase gilt für polytrope Zustandsänderungen

$$\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_i}{\rho_i^n} = \text{konst.} \quad (2.5)$$

Dabei kennzeichnet der Index i einen Bezugszustand, z.B. die Höhe 0. In der Atmosphäre gilt für den Polytropenexponent n : $0 < n \leq \kappa$

Aus Gl. 2.4 folgt mit Gl. 2.5:

$$p^{-\frac{1}{n}} dp = -g \cdot \rho_i \cdot p_i^{-\frac{1}{n}} dH. \quad (2.6)$$

Diese Beziehung lässt sich leicht integrieren. Für $n \neq 1$ erhält man:

$$\frac{n}{n-1} \cdot \left(p^{\frac{n-1}{n}} - p_i^{\frac{n-1}{n}} \right) = -g \cdot \rho_i \cdot p_i^{-\frac{1}{n}} \cdot (H - H_i) \quad (2.7)$$

bzw. mit Gl. 2.1 nach einer einfachen Zwischenrechnung

$$p = p_i \left[1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R T_i} \cdot (H - H_i) \right]^{\frac{n}{n-1}} \quad (2.8)$$

Daraus folgt für die Abhängigkeit der Dichte von der Höhe mit Gl. 2.5 entsprechend:

$$\rho = \rho_i \left[1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R T_i} \cdot (H - H_i) \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad (2.9)$$

Die Zustandsgleichung (Gl. 2.1) liefert $\frac{T}{T_i} = \frac{p}{p_i} / \frac{\rho}{\rho_i}$. Unter Verwendung der oben abgeleiteten Beziehungen (Gl. 2.8 und Gl. 2.9) erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen Temperatur und Höhe, entsprechend dem im vorhergehenden Abschnitt geschilderten Aufbau der Atmosphäre:

$$T = T_i - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{R} \cdot (H - H_i) \quad (2.10)$$

Zwischen dem Polytropenexponenten (n) und dem Temperaturgradienten ($\frac{dT}{dH}$) ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$n = \left(1 + \frac{dT}{dH} \cdot \frac{R}{g} \right)^{-1} \quad (2.11)$$

Im Fall der isothermen Zustandsänderung, d.h. für $n = 1$ bzw. $T = T_i$, liefert die Integration der hydrostatischen Grundgleichung:

$$\frac{p}{p_i} = \frac{\rho}{\rho_i} = e^{-\frac{g}{R \cdot T_i} (H - H_i)} \quad (2.12)$$

Die Schallgeschwindigkeit a hängt entsprechend der Beziehung $a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$ nur von der Temperatur ab und ist voraussetzungsgemäß bei isothermen Zustandsänderungen konstant.

2.2.3 ICAO-Standardatmosphäre (International Standard Atmosphere, ISA)

Wie sich aus den Gleichungen 2.8 bis 2.12 entnehmen lässt, sind Druck, Dichte und Temperatur als Funktionen der Höhe eindeutig bestimmbar, wenn der Polytropenexponent n vorgegeben wird. Er lässt sich aus dem Temperaturgradienten dT/dH anhand von Gl. 2.11 berechnen.

Entsprechend dem geschichteten Aufbau der Atmosphäre und in Übereinstimmung mit der Erfahrung definiert sich die ICAO-Standardatmosphäre (ISA) über folgende Werte:

Außerdem legt die Standardatmosphäre folgende Werte am Boden fest:

$$U = 0 \% \quad T_0 = 288,15 \text{ K} = 15 \text{ }^\circ\text{C} \quad p_0 = 101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\rho_0 = 1,2250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tabelle 2.5: Aufbau der Atmosphäre

Schicht	Höhenbereich [m]	Temperaturgradient [$K m^{-1}$]	Polytropenexponent
a	$0 < H < 11000$	-0,0065	1,235
b	$11000 < H < 20000$	0	1,000
c	$20000 < H < 32000$	+0,001	0,972

Tabelle 2.6: Werte für die Luftdaten an den unteren Grenzen der Luftsichten

Schicht	$H_i[m]$	$p_i[N m^{-2}]$	$\rho_i[kg m^{-3}]$	$T_i[K]$
a	0	101325	1,225	288,15
b	11000	22632	0,36392	216,65
c	20000	5474,88	0,088035	216,65
d	32000	868,017	0,013225	228,65

Die Werte für die unteren Grenzen der verschiedenen Luftsichten sind in Tabelle 2.6 dargestellt. Damit lassen sich Druck, Dichte und Temperatur errechnen. Sie sind in der Tabelle 2.7 auf den nächsten zwei Seiten zusammengestellt. Die im Rahmen der Standardatmosphäre hergeleiteten Gleichungen für die Dichte ρ als Funktion der Höhe führen wegen ihrer mathematischen Struktur häufig zu sehr komplizierten Ausdrücken, so dass die analytische Behandlung mancher Problemstellungen unmöglich wird. Daher hat man wiederholt versucht, einfache Näherungsansätze für die Luftpumpe zu finden.

In der untersten Schicht $0 \leq H \leq 11000$ m, die für die Flugleistungsbetrachtung besonders wichtig ist, stimmt folgende Faustformel gut mit der Standardatmosphäre überein:

$$H = 41900 \text{ m} \left(1 - \sqrt[4]{\frac{\rho}{\rho_0}} \right) [\text{m}]. \quad (2.13)$$

Dieser Ansatz entspricht im Aufbau Gl. 2.9, jedoch wurde der Exponent $\frac{1}{n-1}$ auf den Wert 4,00 abgerundet und der Faktor vor $(H - H_i)$ entsprechend angepasst.

Eine Reihenentwicklung ergibt dann eine sehr geringe Höhenabhängigkeit dieses Faktors. Der Zahlenwert in Gl. 2.13 ergibt eine Übereinstimmung mit der exakten Beziehung in einer Höhe von 7740 m. Der maximale Fehler des Näherungsansatzes beträgt im Höhenbereich $0 < H < 11$ km 0,5 %, so dass seine Genauigkeit in diesem Bereich für die meisten Anwendungen ausreichend ist.

Tabelle 2.7: Die Normalatmosphäre (nach NACA Rep. 1235)

Höhe <i>h</i> [km]	Temperatur		Druck <i>p</i> [mb]	Dichte <i>ρ</i> [kg/m ³]	Schallge- schwind. <i>a</i> [m/s]	kin. Zähigkeit <i>ν · 10⁵</i> [m ² /s]	Druck- verhältnis <i>p/p₀</i>	Dichte- verhältnis <i>ρ/ρ₀</i>
	<i>t</i> [°C]	<i>T</i> [°K]						
0	15,00	288,16	1013,25	1,225000	340,429	1,4638	1,0000000	1,000000
0,5	11,75	284,91	954,608	1,167300	338,504	1,5224	0,9421250	0,952870
1,0	8,50	281,66	898,745	1,111600	336,576	1,5841	0,8869920	0,907460
1,5	5,25	278,41	845,560	1,058100	334,620	1,6489	0,8345020	0,863730
2,0	2,00	275,16	794,952	1,006500	332,661	1,7171	0,7845530	0,821620
2,5	-1,25	271,91	746,825	0,956860	330,691	1,7890	0,7370580	0,781110
3,0	-4,50	268,66	701,085	0,909120	328,709	1,8648	0,6919160	0,742140
3,5	-7,75	265,41	657,640	0,863230	326,714	1,9446	0,6490390	0,704670
4,0	-11,00	262,16	616,402	0,819130	324,708	2,0289	0,6083400	0,668670
4,5	-14,25	258,91	577,283	0,776770	322,689	2,1179	0,5697320	0,634100
5,0	-17,50	255,66	540,199	0,736120	320,657	2,2119	0,5331330	0,600910
5,5	-20,75	252,41	505,068	0,697110	318,612	2,3113	0,4984610	0,569060
6,0	-24,00	249,16	471,810	0,659700	316,555	2,4164	0,4656390	0,538520
6,5	-27,25	245,91	440,348	0,623840	314,483	2,5277	0,4345880	0,509260
7,0	-30,50	242,66	410,607	0,589500	312,398	2,6456	0,4052360	0,481220
7,5	-33,75	239,41	382,514	0,556620	310,299	2,7706	0,3775110	0,454380
8,0	-37,00	236,16	355,998	0,525170	308,186	2,9032	0,3513410	0,42810
8,5	-40,25	232,91	330,990	0,495090	306,058	3,0440	0,3266610	0,404150
9,0	-43,50	229,66	307,424	0,466350	303,915	3,1936	0,3034030	0,380690
9,5	-46,75	226,41	285,236	0,438900	301,757	3,3527	0,2815050	0,358280
10,0	-50,00	223,16	264,362	0,412710	299,583	3,5221	0,2609050	0,336900
10,5	-53,25	219,91	244,743	0,387720	297,394	3,7025	0,2415420	0,316510
11,0	-56,50	216,66	226,320	0,363920	295,188	3,8948	0,2233600	0,297070

Fortsetzung Tabelle 2.7: Die Normalatmosphäre (nach NACA Rep. 1235)

11,5	-56,50	216,66	209,161	0,336330	295,188	4,2143	0,2064260	0,274550
12,0	-56,50	216,66	193,304	0,310830	295,188	4,5601	0,1907760	0,253730
12,5	-56,50	216,66	178,648	0,287260	295,188	4,9342	0,1763120	0,234500
13,0	-56,50	216,66	165,104	0,265480	295,188	5,3389	0,1629440	0,216720
13,5	-56,50	216,66	152,586	0,245350	295,188	5,7769	0,1505910	0,200290
14,0	-56,50	216,66	141,018	0,226750	295,188	6,2508	0,1391730	0,185100
14,5	-56,50	216,66	130,326	0,209560	295,188	6,7636	0,1286220	0,171070
15,0	-56,50	216,66	120,445	0,193670	295,188	7,3185	0,118870	0,158100
15,5	-56,50	216,66	111,314	0,178990	295,188	7,9189	0,1098580	0,146110
16,0	-56,50	216,66	102,874	0,165420	295,188	8,5685	0,1015290	0,135030
16,5	-56,50	216,66	95,0748	0,152880	295,188	9,2714	0,0938315	0,124800
17,0	-56,50	216,66	87,8666	0,141290	295,188	10,0320	0,0867175	0,115340
17,5	-56,50	216,66	81,2049	0,130580	295,188	10,8530	0,080143	0,106590
18,0	-56,50	216,66	75,0482	0,120680	295,188	11,7450	0,0740668	0,098510
18,5	-56,50	216,66	69,3583	0,111530	295,188	12,7090	0,0684514	0,091041
19,0	-56,50	216,66	64,0999	0,103070	295,188	13,7520	0,0632617	0,084139
19,5	-56,50	216,66	59,2401	0,095257	295,188	14,8800	0,0584654	0,077760
20,0	-56,50	216,66	54,7487	0,088033	295,188	16,1000	0,0540328	0,071864

2.2.4 Erfassung von Luftdaten

Für den Betrieb eines Flugzeugs, sind um den genauen Flugzustand zu kennen, eine Reihe von Luft- und Flugzeugdaten vor und während des Fluges erforderlich. Ziel ist die Erfassung der Leistungsfähigkeit des Flugzeugs. Dies kann verhindern, dass aerodynamische, flugmechanische oder Festigkeits-Grenzen überschritten werden. Daten wie die Flugzeugposition und das Wetter benötigt man für die Flugführung und -planung.

2.2.4.1 Höhenmessung

Die Kenntnis der Flughöhe ist beim Streckenflug, bei der Zuweisung von Flugflächen, in der Relation zum Gelände, bei der Landung und im Zusammenhang mit Wetterinformationen wichtig. Generell wird die Höhe barometrisch gemessen, beim Landeanflug und Flug in niedriger Höhe über Gelände wird die Höhenmessung mittels Radar hinzugezogen. Auf die Höhenmessung per Radar wird im vorliegenden Abschnitt nicht eingegangen.

Dem Zusammenhang von Höhe und statischem Luftdruck legt man die Standardatmosphäre (ICAO) zugrunde (siehe hierzu auch Unterabschnitt 2.2.3). Dieser Zusammenhang ist die Eichkurve für den barometrischen Höhenmesser. Die aus dem gemessenen Luftdruck ermittelte Höhe wird als geopotentielle *Druckhöhe* H_p (Pressure Altitude) bezeichnet. Der Höhenmesser zeigt dabei in seiner Grundeinstellung nur dann richtig an, wenn auf Meereshöhe ($H = 0 \text{ m}$) ein Luftdruck von $1013,25 \text{ hPa}$, eine Temperatur von 15°C bzw. $288,15 \text{ K}$ herrschen und der Druckverlauf der ISA entspricht. Deshalb lässt sich der Luftdruck bei $H = 0 \text{ m}$ mittels einer Subskala am Höhenmesser einstellen. In der Praxis geht man so vor, dass man auf dem Flugplatz ($H \neq 0 \text{ m}$) solange an der Subskala dreht, bis die bekannte Flugplatzhöhe angezeigt wird. Dadurch verschiebt man die Normkurve nach oben oder unten (vgl. Abb. 2.8). Man spricht nun von der so genannten *QNH-Höhe*. Die QNH-Höhe ist aber auch nur dann die *wahre Höhe*, wenn auch der Temperaturverlauf mit dem der Standardatmosphäre übereinstimmt. Durch Messen der Temperatur lässt sich, unter Verwendung des Normtemperaturverlaufes, nur die Bezugstemperatur T_i bei $H = 0 \text{ m}$, wie sie in Gleichung 2.8 benötigt wird, korrigieren.

Die wahre Flughöhe wird man über die Standardatmosphäre also praktisch nie ermitteln. Dies spielt aber im Verkehr der Flugzeuge untereinander keine Rolle, solange die Höhenmesser aller Flugzeuge auf die gleiche Weise geeicht und von den Piloten eingestellt werden.

Eine weitere Einstellung des Höhenmessers ist die *QFE-Höhe*, bei der die Subskala so eingestellt wird, dass auf dem Flugplatz die Höhe 0 m angezeigt wird. Diese Einstellung ist aber nur bei Flügen in der Nähe des Flugplatzes sinnvoll („Platzrunde“).

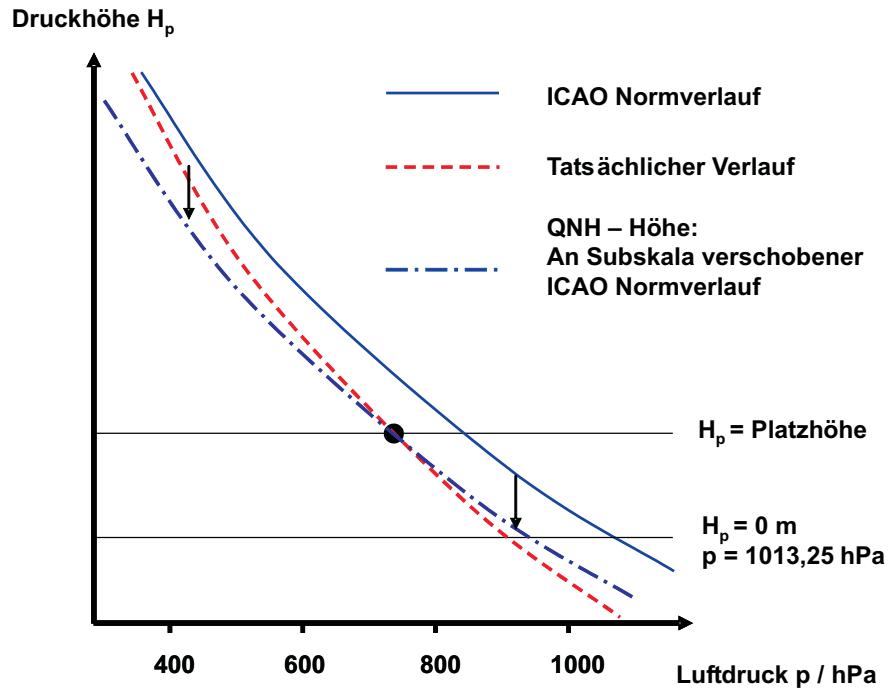


Abbildung 2.8: Wahrer und Normverlauf $H(p)$ und Einstellung der QNH

2.2.4.2 Geschwindigkeitsmessung

Die Messung der Fluggeschwindigkeit relativ zur umgebenden Luftmasse ist von großer Bedeutung. Sie ist nicht zuletzt auch maßgebend für die Berechnung von aerodynamischen, flugmechanischen und Festigkeits-Grenzwerten. Die Ermittlung der Fluggeschwindigkeit basiert auf der Messung des Staudruckes:

$$\bar{q} = \frac{\rho}{2} V^2 \quad (2.14)$$

Misst man den Staudruck \bar{q} und kennt die Dichte ρ , so ergibt sich die Geschwindigkeit zu:

$$V = \sqrt{\frac{2 \bar{q}}{\rho}} \quad (2.15)$$

Zur Messung des Staudruckes wird häufig das Prandtl-Staurohr verwendet (Siehe hierzu Bild 2.9), welches fälschlicherweise oft als Pitot-Rohr bezeichnet wird. Das Prandtl-Staurohr vereint die Funktionen eines Pitot-Rohrs und einer Statik-Sonde. Das Pitot-Rohr liefert den Gesamt- oder Totaldruck, welcher durch die einströmende Luft im Rohr entsteht. Die Statik-Sonde sollte frei von der Anströmung sein und erfasse dadurch den Umgebungsdruck.

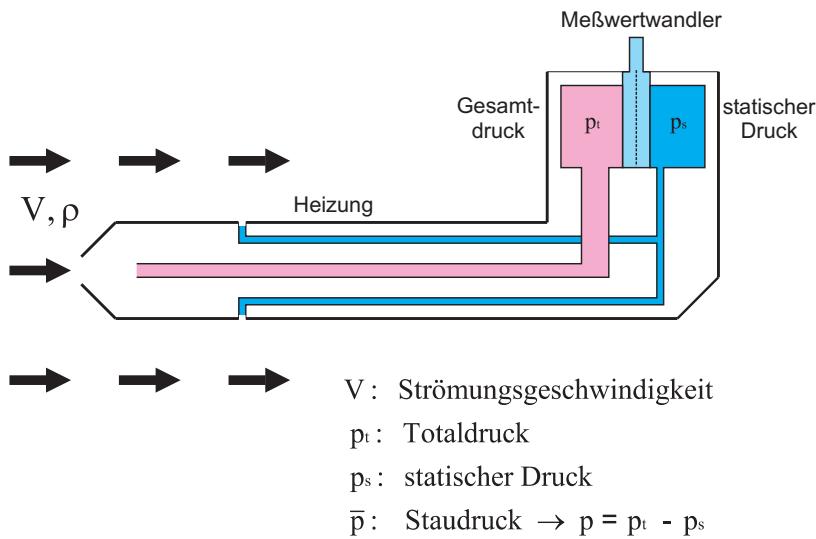


Abbildung 2.9: Messung von Totaldruck und statischem Druck am Prandtl-Staurohr

Der Staudruck \bar{q} ergibt sich aus der Druckdifferenz zwischen Pitotdruck (Gesamt- oder Totaldruck) und des statischen Drucks, der am so genannten Static Port anliegt ($\bar{q} = p_t - p_s$). Der Fahrtmesser zeigt nicht die wahre Geschwindigkeit an, da üblicherweise eine konstante Luftdichte ρ_0 angenommen wird, die gleich der Luftdichte der ICAO-Standardatmosphäre auf Meereshöhe ist. Damit ergibt sich die:

Indicated Airspeed IAS

Die Indicated Airspeed wird direkt im Cockpit angezeigt, sie enthält aber noch folgende Fehler:

- Es wird nicht beachtet, dass mit steigender Höhe die Dichte abnimmt.
- Es wird davon ausgegangen, dass auf Meeressniveau gerade die verwendete Dichte vorliegt.
- Weiterhin ist die Staudruckmessung noch mit dem Sondeneinbaufehler (Position Error) behaftet (vgl. Temperaturmessung) & Druckverluste in den Leitungen (vor allem bei großen Flugzeugen)
- Kompressibilitätseinflüsse auf aktueller Höhe sind nicht berücksichtigt.

Die IAS wird benötigt, um die Betriebsgrenzen eines Verkehrsflugzeugs festzulegen und im Cockpit anzuzeigen. Die meisten Betriebsgrenzen hängen, wie auch die IAS ($V_{IAS} \sim \sqrt{\bar{q}}$), direkt vom Staudruck \bar{q} ab, sie wird nach folgendem Zusammenhang errechnet:

$$V_{IAS} = \sqrt{\frac{2\bar{q}}{\rho_0}} \quad (2.16)$$

Bei kleineren Flugzeugen (z.B. Segelflugzeuge) wird jedoch die TAS zur Festlegung der Betriebsgrenzen verwendet, da das Überschreiten z.B. zum Flattern, welches ein

Effekt der Aeroelastizität ist, führt.

Zur Anzeige im Cockpit erfolgt, je nach Reisegeschwindigkeit, oft eine Korrektur der Kompressibilitätseinflüsse auf Meeresniveau. Die Korrektur der IAS um den *Position Error* ergibt die:

Calibrated Airspeed CAS

Die CAS dient im Allgemeinen nur zur Festlegung von Geschwindigkeitslimits in den Lufttüchtigkeitsvorschriften und zwar im unteren Geschwindigkeitsbereich, d.h. beim *Initial Takeoff, Climb* und *Landing*.

Equivalent Airspeed EAS

Zur Berechnung der EAS wird der Kompressibilitätseinfluss in der aktuellen Höhe korrigiert, allerdings bezieht sie sich nach wie vor auf Meereshöhe (\rightarrow „äquivalent“ einer Geschwindigkeit in $H = 0$ m). Sie ist dadurch ein Maß für den Staudruck. Da der Staudruck die aerodynamische Belastung des Flugzeugs bestimmt, werden Geschwindigkeitslimits, die von der Festigkeit abhängig sind, meist in EAS angegeben.

True Airspeed TAS

Sie berücksichtigt Kompressibilität und Flughöhe und ist somit ein Maß für die wahre Fluggeschwindigkeit V gegenüber der umgebenden Luft. Damit dient sie zur Navigation und der Bestimmung der Ground Speed. Bei der True Airspeed erfolgt die Korrektur der Dichte über eine Messung der aktuellen Lufttemperatur und Luftfeuchte. Mittels der Gasgleichung kann dann die Dichte genauer ermittelt werden. Damit ergibt sich die V_{TAS} prinzipiell aus dem gleichen formelmäßigen Zusammenhang wie die V_{IAS} , nur dass die Dichte dem tatsächlich vorherrschenden Wert entspricht. Es ergibt sich die Formel:

$$V_{TAS} = \sqrt{\frac{2 \bar{q}}{\rho_{TAS}}} = V_{EAS} \cdot \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \quad (2.17)$$

Für Näherungsberechnungen kann man die Werte des Dichtekorrekturfaktors $\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$ für die jeweilige Flughöhe der ICAO-Standardatmosphäre entnehmen. Genauere Ergebnisse erzielt man, indem zusätzlich die Außentemperatur gemessen wird. Damit ergibt sich folgender Korrekturfaktor:

$$\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad (2.18)$$

hierbei sind T_0 und ρ_0 die Werte aus der ICAO-Standardatmosphäre bei Normalnull. T entspricht der gemessenen Temperatur auf aktueller Höhe.

Groundspeed GS

Die GS wird aus der vektoriellen Summe von TAS und der Windgeschwindigkeit gebildet und stellt die Geschwindigkeit des Flugzeuges gegenüber dem Grund dar. Sie ist damit z.B. die Basis für die Berechnung der Bremsstrecken am Boden. Bild 2.10 gibt diesen Zusammenhang wieder. Zu beachten ist dabei, dass sich die Geschwindigkeit

über Grund nur aus den Komponenten der Geschwindigkeiten zusammen setzt, welche parallel zur x_e - y_e -Ebene liegen.



Abbildung 2.10: Zusammenhang zwischen Wind, TAS und GS

Mach Number Ma

Im hohen Geschwindigkeitsbereich wird zur Bestimmung der aerodynamischen Grenzen die Ma -Zahl verwendet, ähnlich der EAS bei kleinen Geschwindigkeiten.

Das Bild 2.11 zeigt den Zusammenhang der in der Praxis verwendeten Geschwindigkeiten. Der einfache Zusammenhang nach Gl. 2.15 folgt aus der Bernoulligleichung für inkompressi-

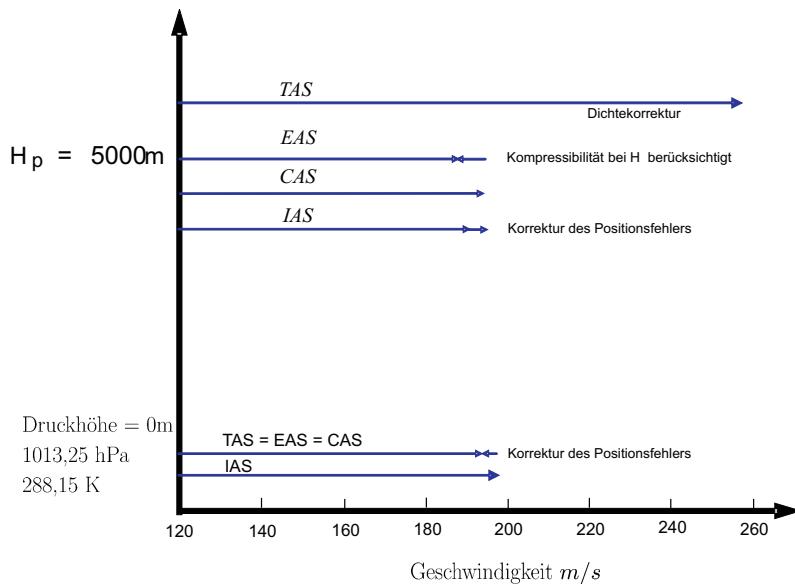


Abbildung 2.11: Bildung der Fluggeschwindigkeiten

ble Strömungen, die entlang einer Stromlinie gilt und im Staupunkt endet. Bei höheren Fluggeschwindigkeiten ($M \gtrsim 0,3$) gilt die Annahme der Inkompressibilität nicht mehr und es muss kompressibel gerechnet werden. Auf der Staupunktstromlinie des Pitotrohrs werden die Luftteilchen bis auf $u = 0$ abgebremst und es kann ein adiabat isentroper Vorgang angenommen werden. Beispielsweise ist in Gl. 2.19 die Bernoulligleichung für solche kompressiblen Strömungen dargestellt:

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (2.19)$$

Hierbei sind u_1 die ungestörte Anströmgeschwindigkeit V , sowie p_1 und ρ_1 der ungestörte statische Druck p_s bzw. die Luftdichte ρ am Ort des Flugzeugs. u_2 ist gleich Null und p_2 ist der Totaldruck im Pitotrohr p_t . Mit der Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa R T} = \sqrt{\kappa p_s / \rho}$ (ideales Gas) ergibt sich:

$$\left(\frac{V}{a}\right)^2 = \frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{q_c}{p_s} + 1\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + 1 \right] \quad (2.20)$$

Beispielsweise ergibt sich für die EAS folgender Zusammenhang:

$$\left(\frac{V_{EAS}}{a_c}\right)^2 = \frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{q_c}{p_n} + 1\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + 1 \right] \quad (2.21)$$

Hierbei ist a_c die Schallgeschwindigkeit am Ort des Flugzeugs, während p_n der für die aktuelle Höhe aus der Standardatmosphäre entnommene Druck darstellt.

In einem modernen *Glascockpit* werden die oben beschriebenen Zusammenhänge von einem *Luftwerterechner (Air Data Computer)* ausgewertet und den Piloten bei Bedarf zur Verfügung gestellt.

2.2.4.3 Temperaturmessung

Die aktuelle Außentemperatur wird zur Berechnung einiger weiterer Größen benötigt. Deshalb ist eine genaue Messung der Temperatur für den Betrieb eines Flugzeugs wichtig. Wie und wo die Temperatur rechnerisch eingeht, zeigt folgende Liste:

- Zur Bestimmung der „wahren“ Höhe ist die Lufttemperatur erforderlich.
- Auch zum Berechnen der wahren Fluggeschwindigkeit (TAS) wird sie benötigt.
- Der Pilot bzw. der *Air Data Computer* benötigt die Umgebungstemperatur, um die Leistungsdaten des Flugzeugs zu errechnen, zum Beispiel zur Ermittlung der benötigten Leistung der Triebwerke beim Start.

Wie auch die Luftdichte und der Luftdruck wird auch der Temperaturverlauf über der Höhe durch die Standardatmosphäre festgelegt. So kann z.B. die Bezugstemperatur (in der Höhe $H = 0$ m) zur Höhenbestimmung von allen Flugzeugen gleich aus der Temperatur in der momentanen Höhe H berechnet werden (vgl. hierzu Gl. 2.10).

Bei der Messung der Temperatur wird zwischen den folgenden Werten unterschieden:

1. Statische **Lufttemperatur**² (SAT, Static Air Temperature):

Die SAT wird für die Korrekturen von Höhe und Geschwindigkeit, aber auch für die optimale Schubeinstellung benötigt. Die Messung der statischen Temperatur T_s ist im Stand einfach, im Fluge misst man allerdings die

²Begriffe nach DIN 9300 Teil 1 und 2

2. **Totaltemperatur²** (TAT, Total Air Temperature):

Die TAT setzt sich aus der Static Air Temperature T_s und der Temperaturerhöhung aus dem Abbremsen der Luftteilchen zusammen. Diese entsteht bei der Umwandlung der kinetischen Energie der Luftteilchen. Setzt man diesen Vorgang adiabat an, so kann man die statische Temperatur aus der Totaltemperatur und der Machzahl mit folgender Formel berechnen.

$$T_s = T_t / \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right) = T_t / (1 + 0,2 Ma^2) \quad (2.22)$$

Anmerkung: Die Norm verwendet sogenannte Eichgrößen T_c und M_c . Der Unterschied zu den in der Formel verwendeten Größen T_s und Ma – den „wahren“ Größen – sind nicht korrigierbare Fehler wie z.B. $\kappa \neq \text{const}$. In der Praxis wird aber $T_s = T_c$ sowie $Ma = M_c$ gesetzt. Ist ein Machmeter vorhanden, so kann man mit obiger Formel die Temperatur korrigieren, es gilt aber auch:

$$T_s = T_t \left(\frac{p}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (2.23)$$

Auch bei der Temperaturmessung kann ein Einbaufehler hinzukommen, so dass die

3. **angezeigte Temperatur** (RAT, Ram Air Temperature oder Indicated Temperature) in der Regel etwas niedriger ist, da durch die Umströmung des Flugzeugrumpfes die Strömung am Sensor nicht exakt auf Null abgebremst wird.

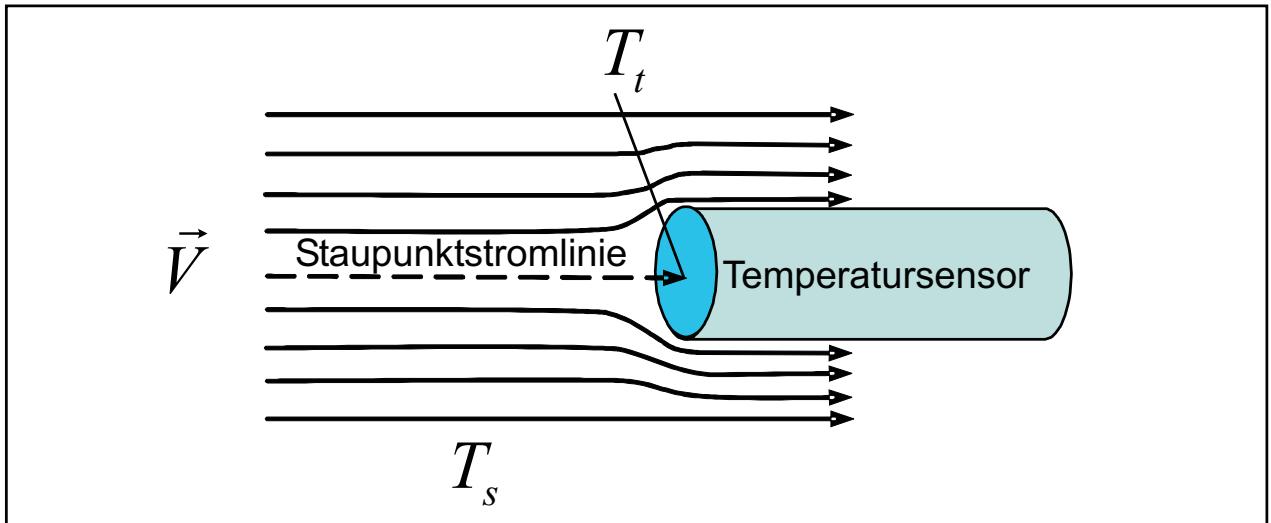


Abbildung 2.12: Strömung am Temperatursensor

2.2.4.4 Messung weiterer Größen

Messung der Steigrate Die Messung der Steigrate übernimmt der Variometer (vertical speed indicator (VSI)). Er zeigt die vertikale Geschwindigkeit des Luftfahrzeugs. Die Steig-

und Sinkraten werden entweder in Fuß pro Minute (ft/min im geregelten Luftverkehr nach ICAO-Regeln) oder in Metern pro Sekunde (m/s in Segelflugzeugen, Hängegleitern, Gleitschirmen und Ballonen) angezeigt. Das Messgerät wertet dabei die Änderung des Luftdrucks mit der Zeit beim Steig- & Sinkflug aus.

Das Instrument kann mechanisch und elektronisch ausgeführt sein. Beide funktionieren nach dem gleichen Prinzip, dass auch schon von den Ballonfahrerpirionieren eingesetzt wurde. Das Instrument besteht aus einer elastischen Metallkammer, welche über einen engen Kanal (Kapillaröffnung) mit der Außenluft verbunden ist. Ändert sich der Außendruck, strömt Luft durch die Kapillare. Je nachdem, ob das Luftfahrzeug steigt (sinkt) strömt Luft aus (in) der (die) Kammer. Um nun den Strom zu messen, ist eine Membran an der Öffnung angebracht. Das Heben und Senken wird gemessen und auf die Anzeige im Cockpit übertragen. Die Messung der Bewegung der Membran erfolgt jeweils mechanisch oder elektronisch [Nelson].

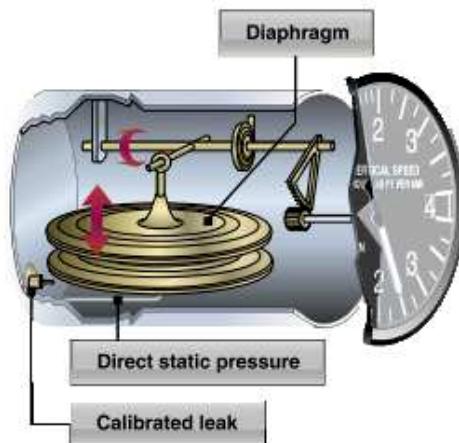


Abbildung 2.13: Prinzip zum Variometer [FAA]

Messung der Machzahl (Machmeter) Bei der Fahrtmessung unterscheidet man wie schon in Unterunterabschnitt 2.2.4.2 vorgestellt zwischen verschiedenen Geschwindigkeiten. Die wichtigsten sind dabei die Geschwindigkeit über Grund (GS) und die Geschwindigkeit relativ zu der umgebenden Luft (TAS, CAS, IAS). Beide sind zur Flugüberwachung während des Flugs von Bedeutung. Hinzu kommt hier noch die Machzahl, die von einem Machmeter gemessen wird. Die Kenntnis der Machzahl ist besonders in großen Flughöhen und bei großen Geschwindigkeiten notwendig. Die Strömungseigenschaften ändern sich mit Annäherung der Fluggeschwindigkeit an die Schallgeschwindigkeit. Der Luftwiderstandsbeiwert steigt an, die Steuerbarkeit wird negativ beeinflusst und es kann zu einem Strömungsabriß am Tragflügel kommen (Buffet) [Mensen]. Die Machzahl kann hierbei nicht direkt gemessen werden, sie wird vom Bordcomputer errechnet. Die Machzahl ist das Verhältnis von Fluggeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit, beide Größen werden aus den Luftdaten des Meßsystems ermittelt. Aus den erfassten Daten wird dann die Machzahl ermittelt und meist im Fahrtmesser integriert angezeigt [Nelson].

2.3 Beschreibung der flugmechanischen Achsensysteme

In der Flugmechanik werden eine Vielzahl von Achsensystemen definiert, die je nach Problemstellung und Flugzustand von unterschiedlicher Zweckmäßigkeit sind. Im Folgenden werden die in dieser Vorlesung verwendeten Achsensysteme kurz vorgestellt. Die Indizierung der Koordinatensysteme erfolgt gemäß der DIN 9300.

2.3.1 Geodäisches Koordinatensystem (aircraft-carried normal earth axis system)

Um die Flugzeuglage im Raum zu beschreiben, verwendet man eine zur Erdoberfläche parallel liegende Horizontalebene, diese ist so ausgerichtet, dass die Senkrechte auf die Ebene durch den Erdmittelpunkt geht. Im Schnittpunkt der Senkrechten mit der Horizontalebene liegt der Flugzeugschwerpunkt. Dieser bildet auch der Ursprung des *geodäischen* bzw. *erdlotfeste* Achsenkreuzes, es besitzt den Index „g“.

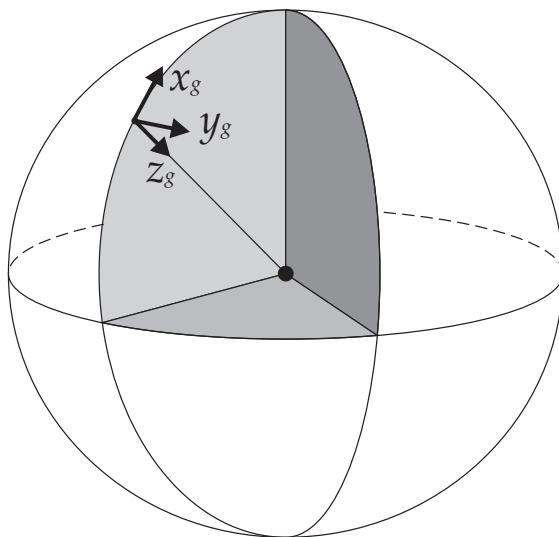


Abbildung 2.14: Geodäisches Koordinatensystem

Die z_g -Achse weist stets in Richtung des Erdmittelpunktes und definiert damit zugleich die Flughöhe, während die Achsen x_g und y_g eine Ebene tangential zur Erdoberfläche aufspannen. Üblicherweise zeigt die x_g -Achse nach Norden. Die Richtung der y_g -Achse ergibt sich dann aus den beiden vorherigen, so dass ein Rechtssystem entsteht. Die y_g -Achse weist nach Osten (*north-east-down system*).

Die Gewichtskraft des Flugzeugs wird üblicherweise im geodätschen Koordinatensystem dargestellt. Die Richtung des Gewichtskraftvektors G_g entspricht damit der Richtung der z_g -Achse und hat folgende Gestalt:

$$G_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

2.3.2 Flugzeugfestes (körperfestes) Koordinatensystem (body axis system)

Ein zweites Achsenkennsystem orientiert sich an der Flugzeuggeometrie und wird daher auch als *flugzeugfestes* Achsenkennsystem bezeichnet. Die internationale Bezeichnung für das Koordinatensystem ist das *body axis system*, die Indizierung erfolgt nach DIN 9300: Index „f“.

Ist am Flugzeug eine Symmetrieebene in der Flugzeulgängsachse definiert, so liegen hier die x_f - und z_f -Achse bzw. die beiden Achsen spannen die Flugzeugsymmetrieebene auf. Die x_f -Achse liegt dabei so, dass sie in Richtung der Flugzeugnase positiv orientiert ist und damit meist entlang der Rotationslinie der Rumpfröhre. Die y_f -Achse zeigt in Richtung der Spannweitenrichtung senkrecht zur (x_f, z_f) -Ebene. Sie ist positiv in Richtung des rechten Flügels orientiert. Den Ursprung des Koordinatensystems bildet auch hier wieder der Flugzeugschwerpunkt. Die dritte Achse z_f bildet eine Normale auf die (x_f, y_f) -Ebene und ergänzt damit das Achsenkennsystem wieder zu einem Rechtssystem.

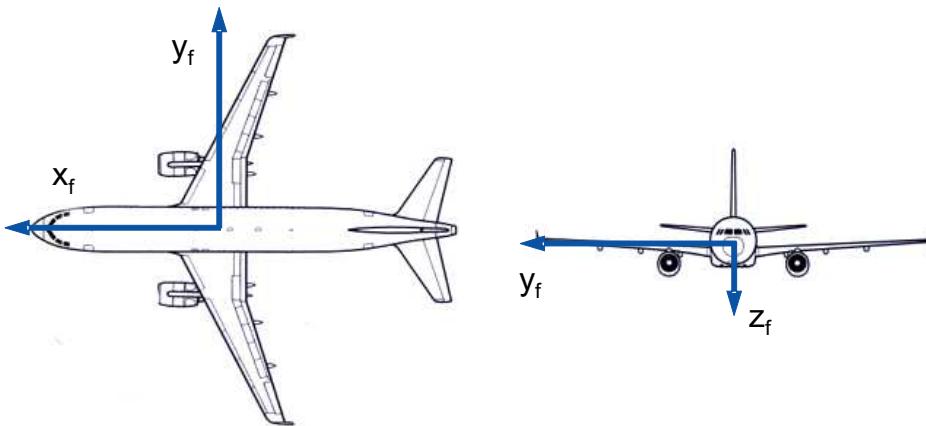


Abbildung 2.15: Flugzeugfestes Koordinatensystem

2.3.3 Aerodynamisches Koordinatensystem (air-path axis system)

Zu Leistungsrechnungen besonders gut geeignet ist das *aerodynamische* Achsenkennsystem (Index „a“), dessen x_a -Achse in Richtung des Fluggeschwindigkeitsvektors V (also in Richtung aus der die Luft anströmt) zeigt. Die z_a -Achse liegt in der Symmetrieebene des Flugzeuges, wäh-

rend die Achse y_a senkrecht zur (x_a, z_a) -Ebene nach rechts, in Flugrichtung gesehen, weist.

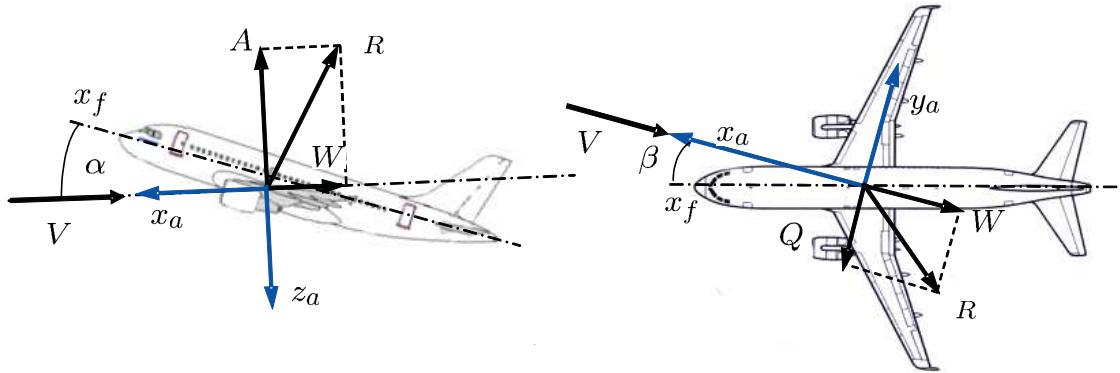


Abbildung 2.16: Aerodynamisches Koordinatensystem

2.3.4 Experimentelles Koordinatensystem (intermediate axis system)

In dem experimentellen Koordinatensystem werden folgenden Achsen einander zugeordnet: $y_e = y_f$ und $z_e = z_a$. Die Richtung von x_e ist durch die Projektion des Fluggeschwindigkeitsvektors \vec{V}_A in die (x_f, z_f) -Ebene festgelegt.

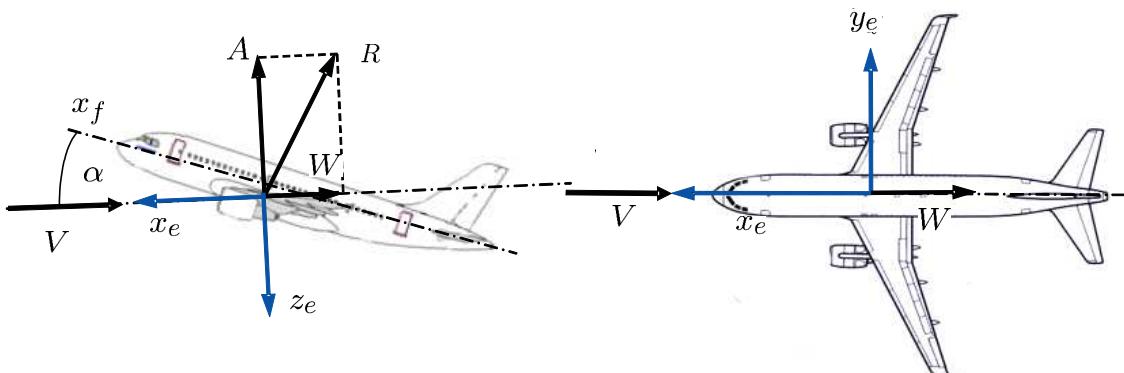


Abbildung 2.17: Experimentelles Koordinatensystem

2.3.5 Bahnachsensystem (flight-path axis system)

In diesem Koordinatensystem fällt die x_k -Achse per Definition mit der Richtung der Bahngeschwindigkeit V_k zusammen und ist damit gleichzeitig die Tangente an die Flugbahn in dem Punkt bzw. Flugzustand, welcher gerade betrachtet wird. Der Schnittwinkel des Bahn Geschwindigkeitsvektors V_k mit der Horizontalebene wird als Bahnneigungswinkel γ bezeichnet. Dieser ist positiv wenn der Flieger sich im Steigflug befindet. Die y_k -Achse liegt in der (x_g, y_g) -Ebene des geodätischen Koordinatensystems. Die z_k -Achse ergibt sich aus der Verdrehung um den Winkel χ .

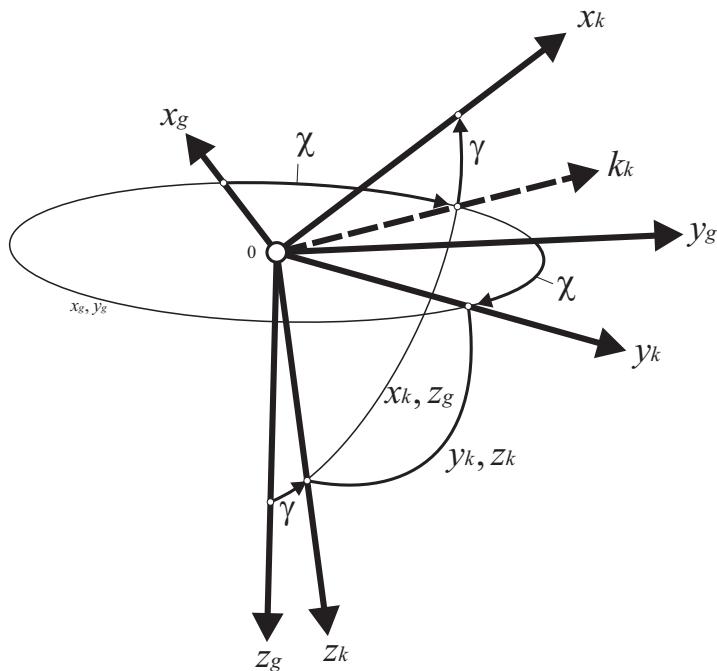


Abbildung 2.18: Bahnkoordinatensystem

2.3.6 Auswahl des Koordinatensystems

Die Beschreibung der am Flugzeug wirkenden Kräfte und Momente wird in dem jeweils zugehörigen Koordinatensystem besonders einfach. Dies gibt die folgende Tabelle 2.8 wieder.

Tabelle 2.8: Kräfte / Momente und bevorzugte Koordinatensysteme

Kraft / Moment	Koordinatensystem	Index
Massenträgheitskraft/-Moment	flugzeugfest	f
Antriebskraft/-moment	flugzeugfest	f
Gewichtskraft	geodätisch	g
Luftkraft/-moment	aerodynamisch	a
Luftkraft/-moment (alternativ)	experimentell	e

Für Untersuchungen in der Flugsimulation hat sich das körperfeste Koordinatensystem aus den folgenden Gründen als besonders geeignet herausgestellt:

- Die Massenträgheitsmomente lassen sich in körperfesten Koordinaten besonders einfach beschreiben, da dann der Trägheitstensor im flugzeugfesten Koordinatensystem trotz der Bewegung des Flugzeugs konstant bleibt und die Symmetrieeigenschaften des Flugzeugs zu einer erheblichen Vereinfachung des Trägheitstensors führen.
- für die Beschreibung der Antriebskräfte und -momente ist das flugzeugfeste Koordinatensystem am günstigsten.
- die Beschreibung der Gewichtskraft gestaltet sich relativ einfach.

2.4 Transformation der flugmechanischen Koordinatensysteme

Um die Bewegungsgleichungen aufstellen zu können, ist es erforderlich die Vektoren und Momente in ein gemeinsames Koordinatensystem zu transformieren. Da der Ursprung aller in diesem Kapitel definierten Koordinatensystemen in dem Flugzeugschwerpunkt liegt, entsteht die Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen aus reinen Rotationen. Affine Transformationen sind nicht notwendig. Hierzu erfolgt eine Multiplikation der Vektoren der Kräfte und Momente mit der jeweiligen Transformationsmatrix.

Beim Aufstellen der Transformationsmatrizen (Rotationsmatritzen) ermittelt man erst die Ro-

tationsachse, sowie die Drehwinkel. Hierbei ist auf die Drehrichtung und damit auf das Vorzeichen zu achten. Grundsätzlich lässt sich jede Drehung auf diese Weise ausdrücken. Dabei gestaltet es sich manchmal schwer die Rotationsachse zu finden. Deshalb werden Drehungen bzw. Transformationen in diesem Skript³ grundsätzlich so ausgeführt, dass bereits definierte Achsen und Winkel verwendet werden. Auf diese Weise ist die Lage der Achsen und Winkel immer bekannt. Ein Nachteil ist dabei, dass eine Verdrehung bei dieser Vorgehensweise durch mehrere einzelne bereits definierte Drehungen (und Zwischensysteme) ausgedrückt werden muss. Dies führt zu teilweise sehr unübersichtlichen Transformationsmatrizen.

Zum Verständnis soll hier das folgende Beispiel beitragen. Es handelt sich um eine Transformation von einem System **a** in das System **d**, über die Zwischensysteme **b** und **c**.

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{T}_{da} \mathbf{V}_a = \mathbf{T}_{dc} \mathbf{T}_{cb} \mathbf{T}_{ba} \mathbf{V}_a \quad (2.24)$$

Damit ergibt sich für die Gesamttransformation:

$$\mathbf{T}_{da} = \mathbf{T}_{dc} \mathbf{T}_{cb} \mathbf{T}_{ba} \quad (2.25)$$

Bei der umgekehrten Transformation ergibt sich entsprechend:

$$\mathbf{T}_{ad} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{T}_{bc} \mathbf{T}_{cd} \quad (2.26)$$

Weiterhin gilt für die Transformation:

$$\det \mathbf{T}_{ij} = 1 \quad (2.27)$$

$$\mathbf{T}_{ij}^T = \mathbf{T}_{ij}^{-1} = \mathbf{T}_{ji} \quad (2.28)$$

Die Rücktransformation kann sehr einfach durch die transponierte Transformationsmatrix beschrieben werden. Voraussetzung ist jedoch, dass die zu transformierenden Größen in einem orthogonalen Rechtssystem beschrieben werden. Dies ist bei den in diesem Skript verwendeten Koordinatensystemen generell der Fall, eine Ausnahme stellt die Transformation des Drehgeschwindigkeitsvektors Ω mit seinen Komponenten p, q, r in der zeitlichen Änderung der Lagewinkel ψ, θ, ϕ dar.

2.4.1 Transformation geodätisch zu flugzeugfest

Die erste hier dargestellte Transformation ist der Zusammenhang zwischen dem *flugzeug-* bzw. *körperfesten* und *geodätischen* System, bei dem die Drehungen durch die am flugzeugfesten System orientierten *Eulerwinkel* ψ, θ und ϕ definiert sind (vgl. Bild 2.19).

³Und generell in der anerkannten Literatur zur Flugmechanik

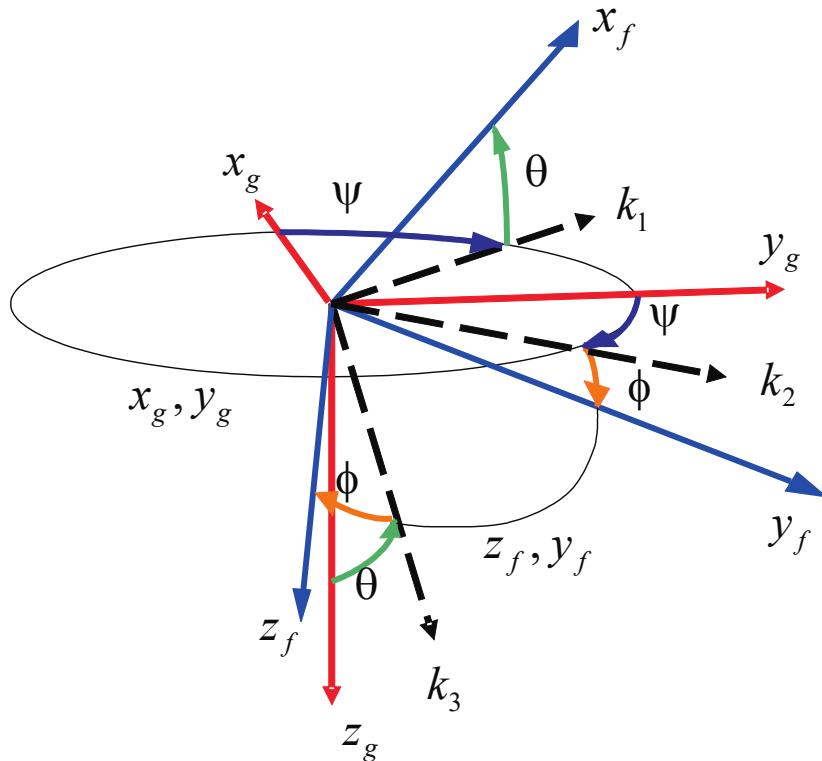


Abbildung 2.19: Transformation geodätisch zu flugzeugfest

Die *Eulerwinkel (eulerian angles)* sind definiert als:

- ψ *Gierwinkel* oder *Azimut* (Heading, Azimuth angle) ($\angle(x_g, k_1)$)
 - Drehachse: z_g
 - Der *Gierwinkel* ist definiert als der Winkel zwischen x_g -Achse und der Knotenachse k_1 . k_1 ist die Projektion der flugzeugfesten x_f -Achse auf die Horizontalebene ((x_g, y_g) -Ebene).
- θ *Nickwinkel* oder *Längsneigung* (Pitch, Inclination angle) ($\angle(k_1, x_f)$)
 - Drehachse: k_2
 - Der *Nickwinkel* ist der Winkel zwischen der Horizontalebene und der x_f -Achse.
- ϕ *Hängewinkel* (Bank angle) ($\angle(k_2, y_f)$)
 - Drehachse: x_f
 - Der *Hängewinkel* ist definiert als der Winkel zwischen der Knotenachse k_2 und der y_f -Achse. k_2 liegt in der Horizontalebene und steht senkrecht auf k_1 .

Die Transformationsmatrizen der einzelnen Drehungen lauten:

1. Drehung:Drehachse z_g ,Drehwinkel ψ

$$\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ z_g \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{T}_{1g} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2. Drehung:Drehachse k_2 ,Drehwinkel θ

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ z_g \end{bmatrix} \xrightarrow{\theta} \begin{bmatrix} x_f \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

3. Drehung:Drehachse x_f ,Drehwinkel ϕ

$$\begin{bmatrix} x_f \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\phi} \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{T}_{f2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Die Transformationsmatrix der Gesamtrotation ergibt sich durch Verkettung der drei Einzelrotationen. Die zuerst durchzuführende Rotation steht zuletzt:

$$\mathbf{T}_{fg} = \mathbf{T}_{f2} \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{1g}. \quad (2.35)$$

Das Ergebnis dieser Matrixmultiplikation ergibt sich zu:

$$\mathbf{T}_{fg} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

In der DIN 9300 ist diese Matrix in Tabellenform wiedergegeben. Für Transformationen vom geodätischen ins flugzeugfeste System ($g \rightarrow f$), kann die Transformationsvorschrift aus Gl. 2.36 direkt verwendet werden.

2.4.2 Transformation geodätisch zu bahnfest

Die Transformation vom geodätischen in das bahnfeste Koordinatensystem spielt in der Flugmechanik eine bedeutende Rolle. Bild 2.20 zeigt noch einmal die für diese Transformation entscheidenden Winkel:

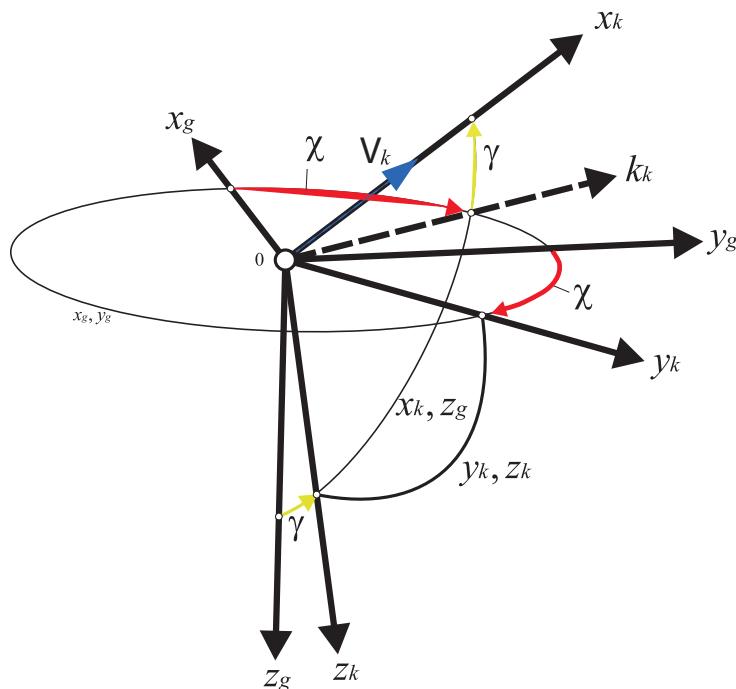


Abbildung 2.20: Bahnkoordinatensystem

χ *Bahnazimut* (Flight-path azimuth angle)($\angle(x_g, k_k)$)

Drehachse: z_g

Der *Bahnazimut* definiert die Drehung um die z_g -Achse. Sie bildet die x_g -Achse auf die k_k -Achse ab.

Anmerkung: In der Navigation heißt der Bahnazimut, der sich auf eine besondere Richtung der x_g -Achse bezieht „Kurs über Grund“. [DIN 9300-2]

γ *Bahnneigungswinkel* oder *Steigwinkel* (Angle of climb, Flight-path inclination angle)($\angle(z_g, z_k)$)

Drehachse: y_k

Der *Bahnneigungswinkel* definiert die Drehung um die y_k -Achse. Sie bildet die z_g -Achse auf die z_k -Achse ab und beschreibt damit den Winkel, mit dem das Flugzeug steigt.

Es werden somit nur zwei Drehungen ausgeführt, bei der die DIN 9300 vorschreibt, dass die Drehung zuerst um den *Bahnazimut* χ und im zweiten Schritt um den *Bahnneigungswinkel* γ erfolgt. Die Transformationsmatrizen der Teildrehungen lauten:

1. Drehung:Drehachse z_g ,Drehwinkel χ

$$\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \xrightarrow{\chi} \begin{bmatrix} k_k \\ y_k \\ z_g \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{T}_{k_k x_k} = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

2. Drehung:Drehachse y_k ,Drehwinkel γ

$$\begin{bmatrix} k_k \\ y_k \\ z_g \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{T}_{z_k z_g} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Aus der Matrixmultiplikation der einzelnen Drehungen ergibt sich die Gesamttransformation zu:

$$\mathbf{T}_{kg} = \mathbf{T}_{k_k x_k} \cdot \mathbf{T}_{z_k z_g}$$

$$\mathbf{T}_{kg} = \begin{bmatrix} \cos\chi \cos\gamma & \cos\gamma \sin\chi & -\sin\gamma \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ \cos\chi \sin\gamma & \sin\chi \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

2.4.3 Transformation geodäisch zu aerodynamisch

Vom *geodäischen* Achsenystem (x_g, y_g, z_g) zum *aerodynamischen* System (x_a, y_a, z_a) gelangt man durch unten angegebenen Rotationen, diese werden in der dargestellten Reihenfolge ausgeführt:

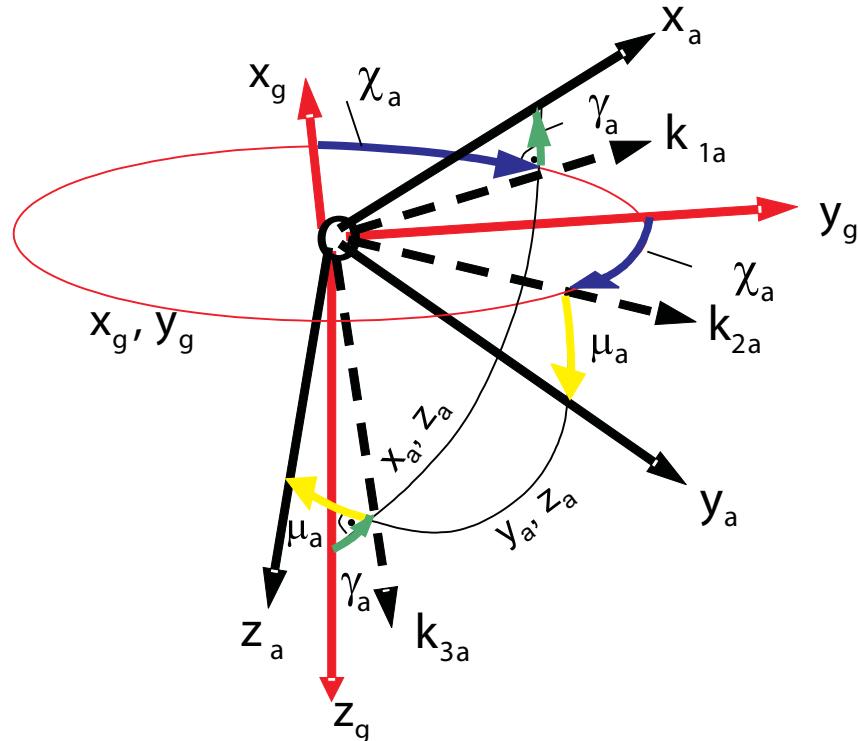


Abbildung 2.21: Transformation geodäisch zu aerodynamisch

χ_a *Flugwindazimut* (air-path azimuth angle, air-path track angle) ($\angle(x_g, k_{1a})$)

Drehachse: z_g

Der *Flugwindazimut* definiert die Drehung um die z_g -Achse. Sie bildet die x_g -Achse auf die Knotenachse k_{1a} ab.

γ_a *Flugwindneigungswinkel* (air-path inclination angle, air-path climb angle) ($\angle(k_{1a}, x_a)$)

Drehachse: k_{2a}

Der *Flugwindneigungswinkel* zeigt aus der Horizontalebene heraus und ist der Winkel zwischen der Knotenachse k_{1a} und der x_a -Achse.

μ_a *Flugwindhangewinkel* (air-path bank angle) ($\angle(k_{2a}, y_a)$)

Drehachse: x_a

Der *Flugwindhangewinkel* definiert die dritte Drehung der Transformation. μ ist der Winkel zwischen der Knotenachse k_{2a} und der y_a -Achse. k_{2a} liegt in der Horizontalebene und steht senkrecht auf k_{1a} .

Bild 2.21 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen den beiden Systemen. Die Transfor-

mation vom *geodätischen* ins *aerodynamische* Achsensystem spielt bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen eine wichtige Rolle. Die gewählte Darstellung erlaubt ein Ablesen in beide Transformationsrichtungen. Die Transformationsmatrizen der Teildrehungen lauten:

1. Drehung: Drehachse z_g , Drehwinkel χ_a

$$\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \xrightarrow{\chi} \begin{bmatrix} k_{1a} \\ k_{2a} \\ z_g \end{bmatrix} \quad (2.42) \qquad \mathbf{T}_{1ag} = \begin{bmatrix} \cos\chi_a & \sin\chi_a & 0 \\ -\sin\chi_a & \cos\chi_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

2. Drehung: Drehachse k_{2a} , Drehwinkel γ_a

$$\begin{bmatrix} k_{1a} \\ k_{2a} \\ z_g \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{bmatrix} x_a \\ k_{2a} \\ k_{3a} \end{bmatrix} \quad (2.44) \qquad \mathbf{T}_{2a1a} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_a & 0 & -\sin\gamma_a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma_a & 0 & \cos\gamma_a \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

3. Drehung: Drehachse x_a , Drehwinkel μ_a

$$\begin{bmatrix} x_a \\ k_{2a} \\ k_{3a} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mu} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad (2.46) \qquad \mathbf{T}_{1a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu_a & \sin\mu_a \\ 0 & -\sin\mu_a & \cos\mu_a \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Hieraus ergibt sich analog zu Unterabschnitt 2.4.1 die Gesamttransformation zu:

$$\mathbf{T}_{ag} = \mathbf{T}_{1_{ag}} \mathbf{T}_{2_{ag}} \mathbf{T}_{1_{ag}}$$

$$\mathbf{T}_{ag} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_a \cos\chi_a & +\cos\gamma_a \sin\chi_a & -\sin\gamma_a \\ \sin\mu_a \sin\gamma_a \cos\chi_a - \cos\mu_a \sin\chi_a & \sin\mu_a \sin\gamma_a \sin\chi_a + \cos\mu_a \cos\chi_a & \sin\mu_a \cos\gamma_a \\ \cos\mu_a \sin\gamma_a \cos\chi_a + \sin\mu_a \sin\chi_a & \cos\mu_a \sin\gamma_a \sin\chi_a - \sin\mu_a \cos\chi_a & \cos\mu_a \cos\gamma_a \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

2.4.4 Transformation flugzeugfest zu aerodynamisch

Das *flugzeugfeste* System ist zum *aerodynamischen* um die Winkel α (*Anstellwinkel*) und β (*Schiebewinkel*) verdreht. Definiert werden die beiden Winkel durch die Anströmung des Flugzeugs, beide sind zur Modellierung der *Luftkräfte* von großer Bedeutung. Der *Schiebewinkel* ist positiv definiert für eine Anströmung von Steuerbord. Ein positiver *Anstellwinkel* ergibt sich bei einer Anströmung von der Flugzeugunterseite.

α *Anstellwinkel* (angle of attack) ($\angle(x_f, x_e)$)

Drehachse: y_f

Der *Anstellwinkel* ist definiert als der Winkel zwischen der x_f -Achse und der (x_a, y_a) -Ebene .

β *Schiebewinkel* (angle of sideslip) ($\angle(x_e, x_a)$)

Drehachse: z_f

Der *Schiebewinkel* ist der Winkel zwischen der x_a -Achse und der (x_f, z_f) -Ebene.

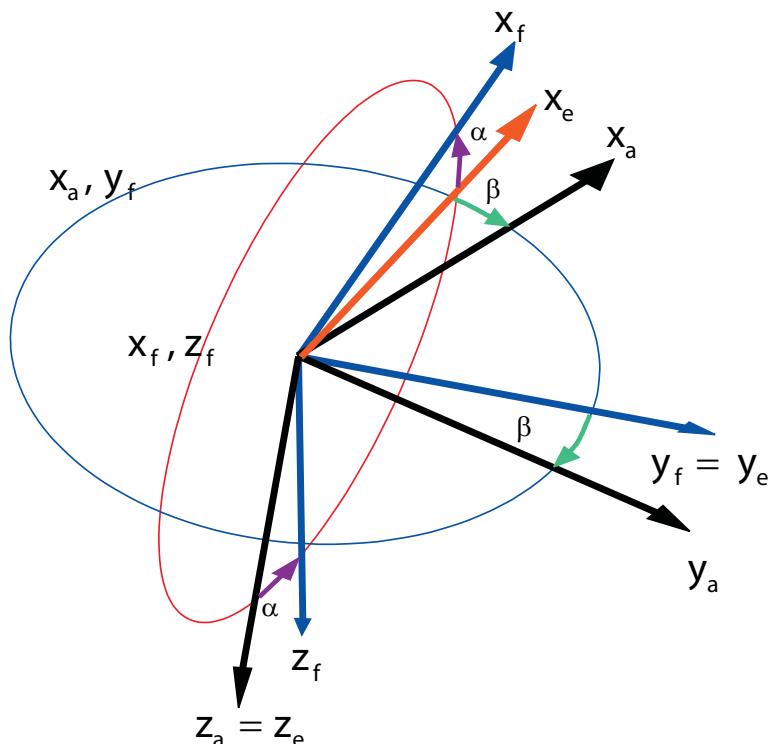


Abbildung 2.22: Transformation flugzeugfest zu aerodynamisch

Die einzelnen Drehungen werden wie folgt dargestellt:

1. Drehung: Drehachse y_f , Drehwinkel $(-\alpha)$

$$\begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\alpha)} \begin{bmatrix} x_e \\ y_f \\ z_a \end{bmatrix} \quad (2.49) \qquad \mathbf{T}_{ef} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2. Drehung: Drehachse z_a , Drehwinkel β

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_f \\ z_a \end{bmatrix} \xrightarrow{\beta} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad (2.51) \qquad \mathbf{T}_{ae} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Die Gesamttransformation ergibt sich durch die Aneinanderreihung der einzelnen Drehungen:

$$\mathbf{T}_{af} = \mathbf{T}_{ae} \cdot \mathbf{T}_{ef} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha \cos\beta \\ -\cos\alpha \sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha \sin\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

3 Modelle der Flugmechanik

Die Bewegung eines Flugzeugs in der Luft wird von der Summe der angreifenden Kräfte und deren resultierender Momente bestimmt. Die beteiligten Kräfte sind Auftrieb, Querkraft, Widerstand, Schub und Gewichtskraft. Die vier erstgenannten werden in der Mechanik auch als äußere Kräfte bezeichnet. Die aerodynamischen Kräfte, Auftrieb, und Widerstand, entstehen durch die Relativbewegung des Flugzeugs durch die es umgebende Luft. Das Antriebssystem des Flugzeugs stellt den Schub zur Verfügung, die Gewichtskraft ergibt sich aus dem Eigengewicht, während aus der geometrischen Verteilung der Flugzeugmasse der Trägheitstensor bzw. die Massenträgheitskräfte (Scheinkräfte) resultieren.

3.1 Aerodynamische Kräfte

Die aerodynamischen Kräfte am Tragflügel bzw. am Flugzeug bilden den Luftkraftvektor. Der Luftkraftvektor setzt sich aus Auftrieb (A), Querkraft (Q) und Widerstand (W) zusammen. Für die *Leistungsbetrachtungen* an einem Flugzeug nehmen wir an, dass der Luftkraftvektor \mathbf{R}^A in der Flugzeugsymmetrieebene liegt. Es wird also schiebefrei geflogen, entsprechend ist $\beta = 0$ und $Q = 0$. Durch den Wegfall der Querkräfte sind Auftrieb und Widerstand nur noch vom Anstellwinkel α abhängig. \mathbf{R}^A wird entsprechend den Gesetzen der Potentialströmung proportional dem Staudruck $\bar{q} = \frac{\rho}{2} \cdot V^2$ sowie einer Bezugsfläche (im allgemeinen die Flügelfläche S) angesetzt, so dass gilt:

$$\mathbf{R}_a^A = \begin{pmatrix} -W \\ Q \\ -A \end{pmatrix} \sim S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2 = S \cdot \bar{q} \quad (3.1)$$

Im allgemeinen ist es üblich, anstelle der Kräfte mit *dimensionslosen Kraftbeiwerten* zu arbeiten, d.h., die Kräfte auf das Produkt $S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2$ zu beziehen. Während dann im Gültigkeitsbereich der Potentialströmung (also für $Ma \rightarrow 0$ & $Re \rightarrow \infty$) die Beiwerte unabhängig von der Geschwindigkeit sind, gilt dies nicht mehr im kompressiblen Strömungsbereich, insbesondere auch nicht in Überschallströmungen. Im allgemeinen sind die Kraftbeiwerte Funktionen der Machzahl & Reynoldszahl. Nach der Potentialtheorie für ebene Strömungen wirkt der resultierende Kraftvektor normal zu Anströmrichtung und ist damit mit dem Auftrieb (A) identisch. Eine Kraftkomponente in Strömungsrichtung, die als Widerstand (W) bezeichnet

wird, kann bei ebenen inkompressiblen Strömungen nur durch Reibungseffekte entstehen. In der wirklichen, d.h. reibungsbehafteten Strömung treten daher stets Auftrieb und Widerstand als Komponenten des resultierenden Kraftvektors auf. Da in der Flugmechanik entsprechend der DIN 9300 die Kräfte in Richtung der positiven Achsenrichtungen positiv gezählt werden (also entgegengesetzt der in der Aerodynamik üblichen Richtung), erhält man folgenden Zusammenhang zwischen den Kraftkomponenten nach flugmechanischen und aerodynamischen Gegebenheiten:

$$A = -Z_a^A \quad (3.2)$$

$$W = -X_a^A \quad (3.3)$$

Diese einfachen Zusammenhänge sind bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen zu beachten.

3.1.1 Auftriebsmodell

Die Aerodynamik beschäftigt sich mit dem Strömungsverhalten von Gasen. Bewegt sich ein Körper durch ein Fluid, so entstehen im umströmenden Medium Störungen. Im Vergleich zur ungestörten Strömung ändert sich die Druckverteilung im Medium. Die Strömungsverhältnisse am Tragflügel werden in Bild 3.1 dargestellt. Durch die Umströmung des Tragflügels entsteht an der Flügeloberseite Unterdruck und an der Unterseite Überdruck. Aus der unsymmetrischen Druckverteilung am gesamten Tragflügel (eigentlich des Gesamtsystems Flugzeug) entstehen nur einzelne Auftriebskomponenten. Werden die Komponenten in z_a -Richtung aufsummiert, ergibt dies dann den vom Tragflügel erzeugten Gesamtauftrieb.

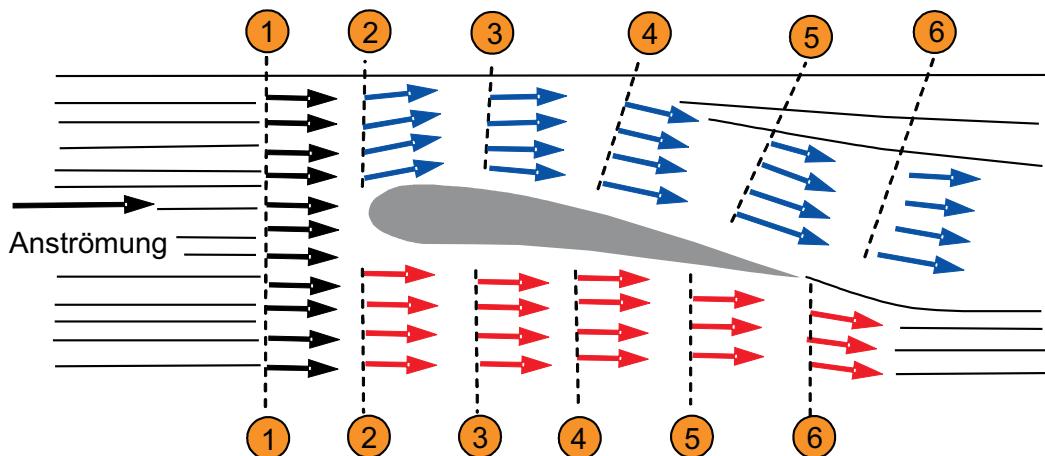


Abbildung 3.1: Umströmung eines Tragflügels

Im Folgenden ist ein Tragflügel mit verschiedenen Anstellwinkeln und den zugehörigen Luftkraftvektoren dargestellt.

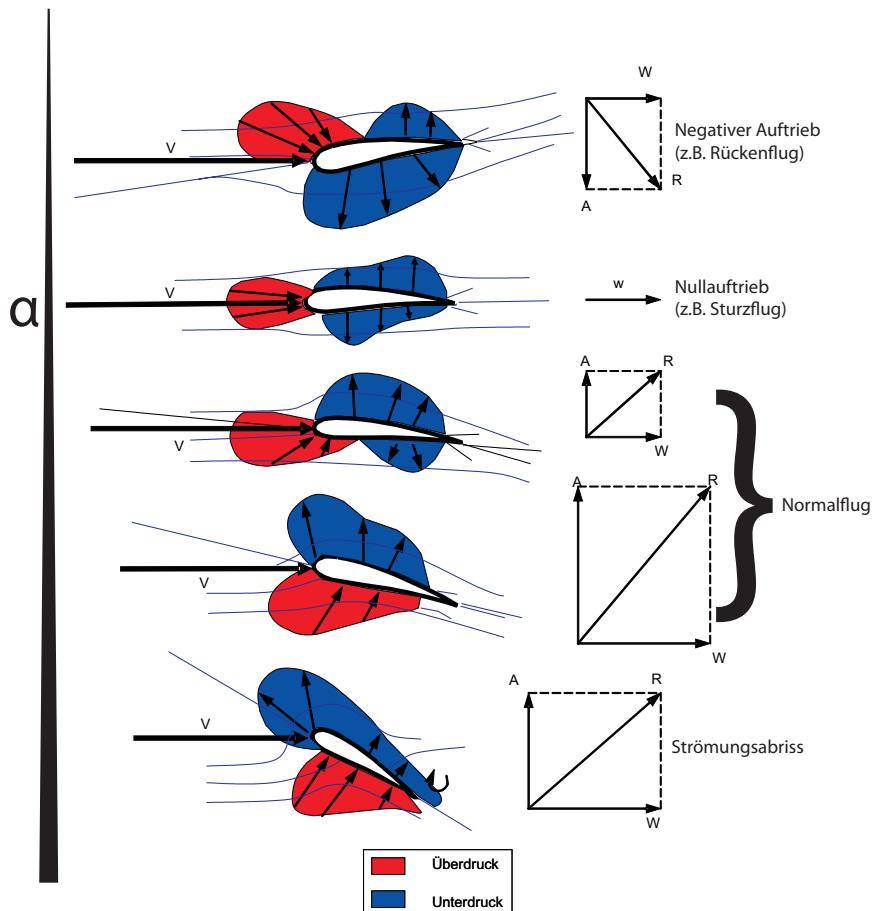


Abbildung 3.2: Luftkraftvektor im aerodynamischen Koordinatensystem

Bild 3.2 zeigt unterschiedliche Auftriebsverteilungen mit unterschiedlichen Anstellwinkel. Die oberste Situation stellt einen negativen Auftrieb dar. Ein solcher Auftrieb ist zum Beispiel beim Rückenflug zu finden. Mit zunehmendem Anstellwinkel verschwindet zunächst der Auftrieb und es existiert nur noch ein Widerstand, was zum Beispiel der Fall bei einem Sturzflug ist. Die dritte und vierte Situation verdeutlichen den Anstieg des Auftriebs im Normalflug durch Erhöhung des Anstellwinkels. Wird α weiter vergrößert, wird der maximale Auftriebsbeiwert $C_{A_{max}}$ erreicht, was zur Folge hat, dass, wie unten in Bild 3.2 gezeigt, die Strömung abreißt.

3.1.2 Auftrieb

3.1.2.1 Auftriebsbeiwert und Auftriebsanstieg

Nach Gl. 3.1 gilt für den Auftrieb:

$$A = C_A \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} V^2 \quad (3.4)$$

$$C_A = \frac{A}{S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2}, \quad (3.5)$$

mit dem Auftriebsbeiwert des Flugzeugs C_A als Proportionalitätsfaktor. Den Gesamtauftriebsbeiwert C_A erhält man, neben den Auftriebsbeiwerten der anderen Flugzeugkomponenten, primär aus der Auftriebsverteilung des Tragflügels $C_A(y)$, d.h den Auftriebswerten C_A an den einzelnen Flügelprofilschnitten mit der Tiefe $l(y)$, aus der folgenden Beziehung:

$$C_A = \frac{1}{S} \int_{-b/2}^{+b/2} C_A(y) \cdot l(y) dy \quad (3.6)$$

Verschiedene Verfahren für die Ermittlung von $C_A(y) \cdot l(y)$ sind in Schlichting-Truckenbrodt beschrieben. Im flugtechnisch interessanten Bereich relativ kleiner Anstellwinkel kann der Auftriebsbeiwert linear proportional dem Anstellwinkel α_{eff} gesetzt werden, $C_{A_{\alpha_{eff}}}$ nimmt einen konstanten Wert an. Damit ergibt sich für den Auftriebsbeiwert folgender einfacher Zusammenhang:

$$C_A = C_{A_{\alpha_{eff}}} \cdot \alpha_{eff} \quad (3.7)$$

Dabei stellt $C_{A_{\alpha_{eff}}}$ den Auftriebsanstieg des Tragflügels dar, der von der Umrissform und Streckung des Flügels sowie der Machzahl abhängt und nach Schlichting-Truckenbrodt ermittelt werden kann. α_{eff} ist der wirksame Anstellwinkel zwischen der Anströmung und der Nullauftriebsrichtung des Tragflügels $\alpha_{C_{A=0}}$.

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_{C_{A=0}} \quad (3.8)$$

Der Nullanstellwinkel eines Tragflügels ist der Anstellwinkel, bei dem kein Auftrieb entsteht. Die Nullauftriebsrichtung des Tragflügels wiederum erhält man durch aufsummieren der einzelnen Profilschnitte $\alpha_{C_{A=0}}$ zu

$$\alpha_{C_{A=0}} = \frac{1}{S} \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \alpha_{C_{A=0}}(y) \cdot l(y) dy \quad (3.9)$$

wobei $\alpha_{C_{A=0}}$ bei positiv gewölbten Profilen oder bei positiven Klappenausschlag wie in Bild 3.3 gezeigt stets negative Werte besitzt. In Bild 3.5 ist der typische Verlauf des Auftriebsbeiwertes abhängig vom Anstellwinkel für den Langsamflug dargestellt. Der Einfluss der Machzahl auf C_{A_α} ist in Bild 3.4 gezeigt.

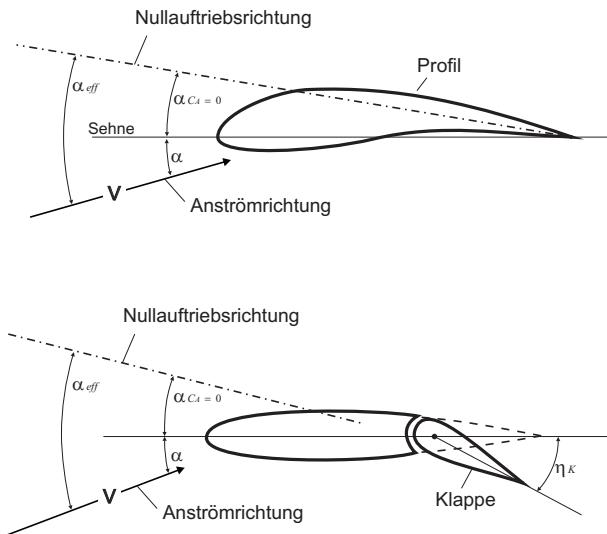


Abbildung 3.3: Nullauftriebsrichtung von Tragflügeln

3.1.2.2 Maximaler Auftriebsbeiwert

Der Gesamtauftrieb erfordert nach Gl. 3.4 bei abnehmender Fluggeschwindigkeit oder zunehmender Flughöhe im stationären Flug eine Vergrößerung des Auftriebsbeiwertes. Die Möglichkeiten zur Erhöhung des Auftriebsbeiwertes sind allerdings begrenzt. Der im normalen Flugbereich gültige lineare Zusammenhang zwischen Auftriebsbeiwert und Anstellwinkel bleibt im Bereich höherer Anstellwinkel nicht mehr erhalten (s. auch Bild 3.5). Vielmehr erreicht der Auftriebsbeiwert C_A einen Maximalwert, welcher als $C_{A_{max}}$ bezeichnet wird. Bei weiterer Erhöhung des Anstellwinkels über $C_{A_{max}}$ hinaus sinkt der Auftriebsbeiwert und damit der zur Verfügung stehende Auftrieb wieder ab. Die Ursache hierfür ist die partielle Ablösung der Strömung am Flügel. Man spricht dann von einem überzogenen Flugzustand.

Der maximale Auftriebsbeiwert $C_{A_{max}}$ ist eine wichtige entwurfsbestimmende Größe. Gute Langsamflugleistungen sind vor allem bei Start und Landung nötig, um möglichst geringe aber erfliegbare Minimalgeschwindigkeit zu erreichen. Ein wichtiger Teil der Luftfahrtforschung besteht deshalb darin, durch so genannte Hochauftriebsmittel möglichst hohe Werte für $C_{A_{max}}$ zu erreichen.

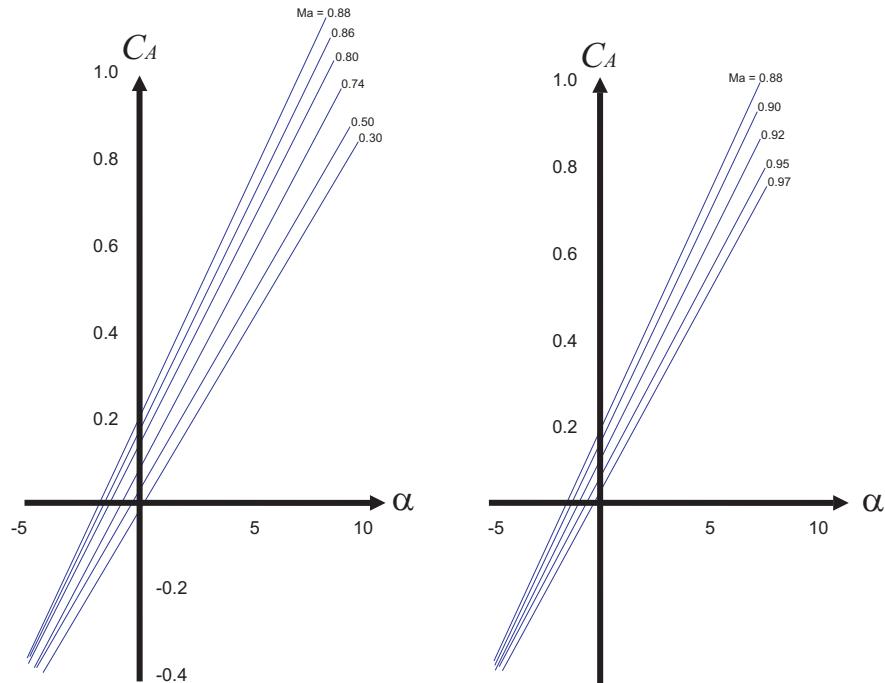


Abbildung 3.4: Auftriebsbeiwert abhängig vom Anstellwinkel bei verschiedenen Machzahlen ($\eta_K = 0$)

Folgende Möglichkeiten zur Steigerung des Wertes von $C_{A_{max}}$ sind bekannt und werden in der Flugtechnik meist in kombinierter Form angewandt. Einige Beispiele für Mittel zur Steigerung des maximalen Auftriebsbeiwertes sind im folgenden aufgeführt [Tropea]. Eine genaue Beschreibung hierzu ist dem Skript zur Vorlesung *Aerodynamik I* zu entnehmen:

- Klappen an der Vorderkante
 - Slats
 - Krueger-Flaps
- Klappen an der Hinterkante
 - Einfache Klappe
 - Einfachspaltklappe (SSF)
 - Doppelspaltklappe (DSF)
- Absaugen oder Einblasen der Grenzschicht
- Coanda Effekt

Alle beschriebenen Möglichkeiten bewirken eine Steigerung des maximalen Auftriebsbeiwertes. In der Modellvorstellung wirken Sie wie eine Erhöhung der *Profilwölbung*, der Anstellwinkel α bleibt hierbei unverändert. Die erreichbaren Werte von $C_{A_{max}}$ hängen ferner noch von den geometrischen Daten des Grundprofils, gegeben durch *Profildicke*, *Wölbung* und *Nasen-*

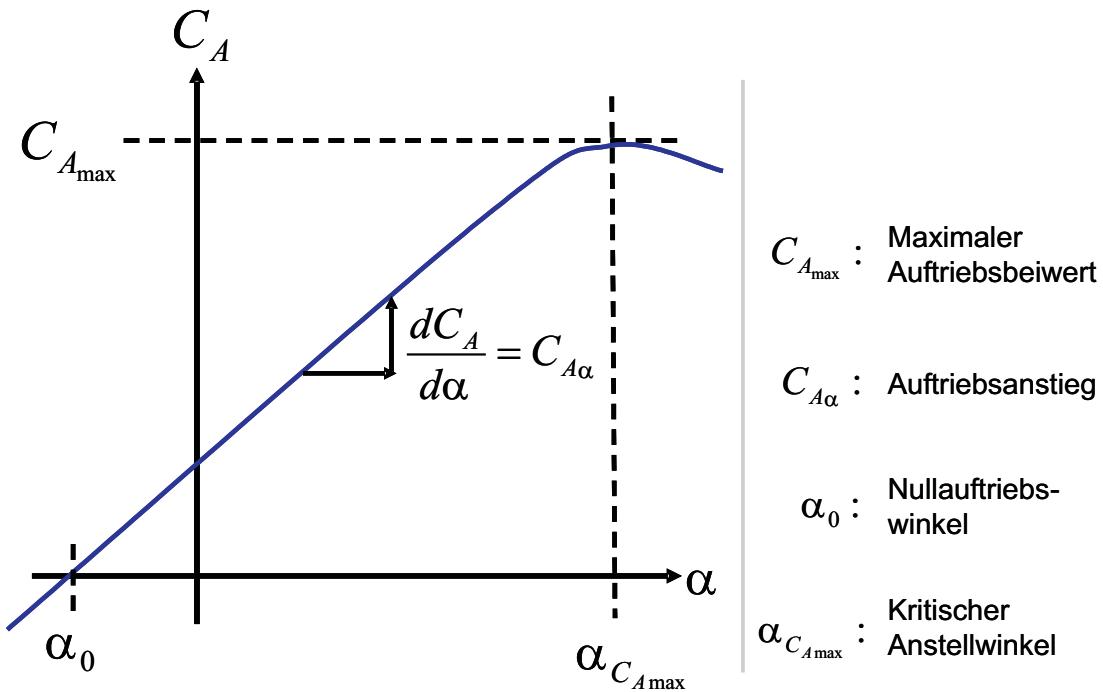


Abbildung 3.5: Auftriebsbeiwert in Abhängigkeit vom Anstellwinkel

radius, ab.

Die Verwendung von *Hochauftriebsmitteln* der beschriebenen Art bewirkt neben der Auftriebssteigerung meist auch ein kopflastiges Moment, dieses muss besonders im Landeanflug durch entsprechende Ausschläge des Höhenruders ausgeglichen werden. Für ein Flugzeug mit Drachenkonfiguration bedeutet dies, dass das Höhenleitwerk Abtrieb erzeugen muss, was natürlich zu einer Verminderung des maximal erzielbaren Auftriebs führt. Die Auftriebsminde rung ist umso größer, je näher das Höhenleitwerk am Haupttragwerk sitzt. Der Maximal auftrieb eines Flugzeugs in einem getrimmten Flugzustand ist daher maßgeblich für Flugleistungsbetrachtungen.

Der maximale Auftriebsbeiwert eines für den Reiseflug konfigurierten Flugzeugs (d.h. ohne Landeklappen) ist eine weitere wichtige Größe zur Flugzeugauslegung. Sie wird vor allem für die Berechnung der Auftriebsgrenze in maximal erreichbarer Flughöhe benötigt. In diesem Zusammenhang ist von Bedeutung, wie sich $C_{A_{\max}}$ bei gegebener Flügelgeometrie abhängig von der Machzahl ändert.

Bild 3.6 zeigt als Beispiel $C_{A_{\max}}(M)$ für einen Pfeilflügel der Streckung $\Lambda = 3$ mit einem 6% dicken Profil.

3.1.3 Widerstand

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels ausgeführt wird der Luftkraftvektor in zwei (bzw. drei) Komponenten aufgespalten, die Kraftkomponente in Strömungsrichtung wird als Widerstand

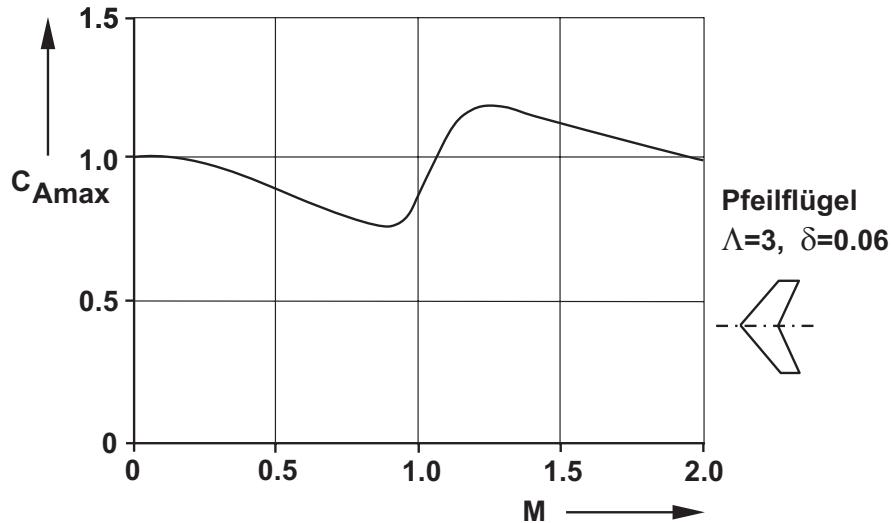


Abbildung 3.6: Maximaler Auftriebsbeiwert eines Pfeilflügels in Abhängigkeit von der Machzahl ($\eta_K = 0$)

bezeichnet. Mit dem Widerstandsbeiwert C_W als Proportionalitätsfaktor ergibt sich äquivalent zum Auftrieb folgende Gleichung:

$$W = C_W \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} V^2 \quad (3.10)$$

$$C_W = \frac{W}{S \cdot \frac{\rho}{2} V^2} \quad (3.11)$$

3.1.3.1 Übersicht zum Widerstand

Der Widerstand des Gesamtflugzeugs setzt sich aus verschiedenen Anteilen zusammen. Die einzelnen Anteile entstehen durch unterschiedliche physikalische Effekte, die in dieser Vorlesung nach folgender Systematik (Tabelle 3.1) eingeteilt werden:

3.1.3.2 Physik zur Widerstandsentstehung am Flugzeug

Wird ein Körper umströmt, so treten senkrecht zu seiner Oberfläche Druckkräfte und parallel zu ihr Scher- bzw. Reibungskräfte auf. Der Gesamtwiderstand setzt sich aus den folgenden Anteilen zusammen:

- *Druckwiderstand*

Der Druckwiderstand ist gleich dem Integral der auf die Körperoberfläche wirkenden Druckkräfte in Strömungsrichtung. Auf der angeströmten Seite des Körpers wird Luft

Tabelle 3.1: Übersicht zu den verschiedenen Widerstandsanteilen

Anteile des Widerstandsbeiwerts C_W	
Unterschall	Überschall / Transsonik
Profilwiderstand:	Wellenwiderstand:
<ul style="list-style-type: none"> • Profilnullwiderstand • Profilauftriebwiderstand 	<ul style="list-style-type: none"> • Bei Nullauftrieb • Bei Auftrieb
Induzierter Widerstand	
Parasitärer Widerstand:	
<ul style="list-style-type: none"> • Druckwiderstand • Reibungswiderstand 	

aufgestaut, dieser Staudruck (p_1) ist im Allgemeinen größer als der statische Druck (p_2) auf der Rückseite des Körpers. Damit ist der Druckwiderstand proportional zur Druckdifferenz ($p_1 - p_2$) und der Stirnfläche des Körpers in Strömungsrichtung. Weiterhin ist er stark von der Machzahl (Ma) abhängig.

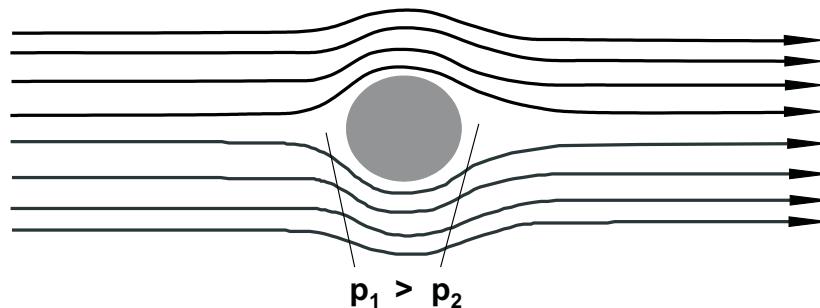


Abbildung 3.7: Druckwiderstand

- *Profilwiderstand*

Zur einfachen mathematischen Modellierung wird der *Profilwiderstand* in zwei Anteile unterteilt, den *Profilnullwiderstand* und den *Profilauftriebwiderstand*. Der *Profilnullwiderstand* ist dabei der Widerstand bei Nullauftrieb. Erzeugt der Flügel Auftrieb, so erhöht sich auch der Widerstand. Wichtig zu erwähnen ist, dass es generell nicht möglich ist den Auftrieb zu erhöhen, ohne auch gleichzeitig den Widerstand zu vergrößern. Den Anteil der Widerstandserhöhung in Folge der Auftriebsvergrößerung nennt man *Profilauftriebwiderstand*.

- Profilnullwiderstand

Der Profilnullwiderstand setzt sich zusammen aus dem Druckwiderstand und dem Reibungswiderstand des Profils. Der Profilwiderstand ist bei kleinem Auftriebsbe-

wert im wesentlichen durch die Reibung bestimmt, sein Wert hängt von der Lage des Umschlagpunktes und damit von der Länge der laminaren und turbulenten Laufstrecke ab. Strömt die Luft an einem Körper entlang, so verändert sich infolge von Schubspannungen innerhalb des Fluids die Strömungsgeschwindigkeit. Es entsteht ein Geschwindigkeitsgefälle innerhalb der *Grenzschicht*. Die Strömungsgeschwindigkeit reduziert sich von der Geschwindigkeit der ungestörten Strömung außerhalb der Grenzschicht bis auf Null direkt an der Oberfläche des umströmten Körpers (Bild 3.8).

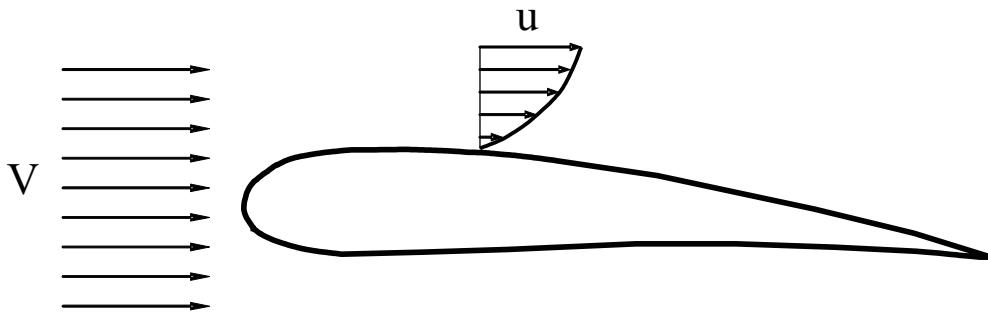


Abbildung 3.8: Profilwiderstand

Der Reibungswiderstand entsteht durch integrale Wirkung der Reibungskräfte an allen Flugzeugteilen. Der Reibwiderstand ist abhängig von der Größe der umströmten Oberfläche, der Oberflächenrauhigkeit (je größer die Rauigkeit, desto größer die Reibung) und etwa umgekehrt proportional zur Reynoldszahl. Die Reynoldszahl Re ist eine dimensionslose Kennzahl welche das Verhältnis von Trägheitskräften zu Viskositätskräften (Reibungskräften) in einem strömenden Medium (Flüssigkeit oder Gas) angibt.

$$Re = \frac{Vl}{\nu} = \frac{a \cdot l}{\nu} Ma \quad (3.12)$$

- Profilauftriebwiderstand

Auch Profile vergrößern ihren Widerstand mit wachsendem Auftrieb. In Übereinstimmung mit Messdaten, kann der Widerstandsbeiwert des Profils ebenfalls proportional dem Quadrat des Auftriebsbeiwertes gesetzt werden (siehe Bild 3.11).

$$C_{wp,a} = k_p \cdot C_a^2 \quad (3.13)$$

Bei gewölbten Profilen ist statt C_A die Differenz des Auftriebsbeiwertes von demjenigen bei minimalem Profilwiderstand $C_{A,p,0}$ zu setzen. Man erhält dann

$$C_{wp,a} = k_p \cdot (C_a - C_{a,p,0})^2. \quad (3.14)$$

Bei Laminarprofilen ist eine solche Darstellung aufgrund der Laminardelle allerdings meist nicht möglich.

Die wesentlichen Einflussgrößen auf den Widerstand haben die Form des Profils, der Turbulenzgrad, die Viskosität der Luft, die Anströmgeschwindigkeit, die Grenzschichtdicke und die Rauhigkeit der Profiloberfläche.

- *Induzierter Widerstand*

Die Auftriebserzeugung am Tragflügel kann durch ein geschlossenes Wirbelsystem modelliert werden. Die freien Wirbel bei Unterschallströmungen entstehen durch den Druckunterschied zwischen Flügel Ober- und Unterseite. Durch den Druckunterschied fließt die Luft an der Flügel spitze in Richtung des Unterdrucks (also in einem zur Flügeloberseite gerichteten Wirbel) ab. Die gebundenen Wirbel am Tragflügel induzieren eine örtliche Anstellwinkeländerung α_i . Folgedessen erhält man eine Verdrehung der Anströmrichtung um den Winkel $\alpha_i = \frac{W}{V_\infty}$ [Schlichting]. Bild 3.9 zeigt das Wirbelsystem eines angestromten Tragflügels.

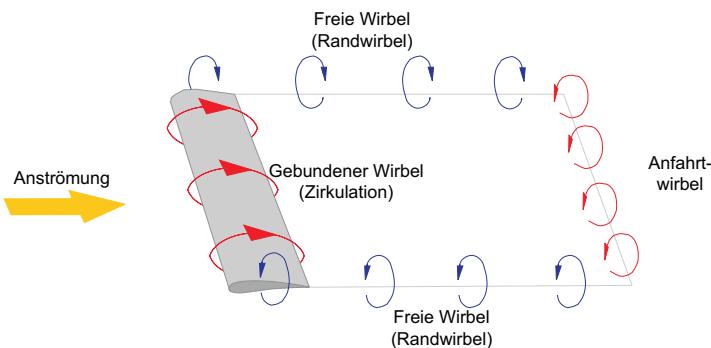


Abbildung 3.9: Wirbel am Tragflügel

Da die Luftkraft in reibungsloser Unterschallströmung grundsätzlich senkrecht auf der Anströmrichtung steht, wird der resultierende Luftkraftvektor \mathbf{R} durch den induzierten Anstellwinkel zusätzlich um α_i wie in Bild 3.10 rückwärts gedreht. Die Komponente von \mathbf{R} in Richtung der ungestörten Anströmrichtung \mathbf{V} wird als induzierter Widerstand bezeichnet.

Da α_i wiederum proportional zu C_A ist, ergibt sich zwischen Auftriebsbeiwert C_A und induziertem Widerstandsbeiwert C_{W_i} ein quadratischer Zusammenhang. Nach der Traglinientheorie wird für einen ungepfeilten Flügel der minimale induzierte Widerstand bei elliptischer Auftriebsverteilung erreicht:

$$C_{W_i} = \frac{C_A^2}{\pi \cdot \Lambda} \quad (3.15)$$

Heute häufig ausgeführte Flügelumrisse ergeben meist Zirkulationsverteilungen, welche nur geringfügig von der elliptischen Form abweichen, so dass die einfache Formel für den induzierten Widerstandsbeiwert Gl. 3.15 auch hier näherungsweise angewandt werden kann.

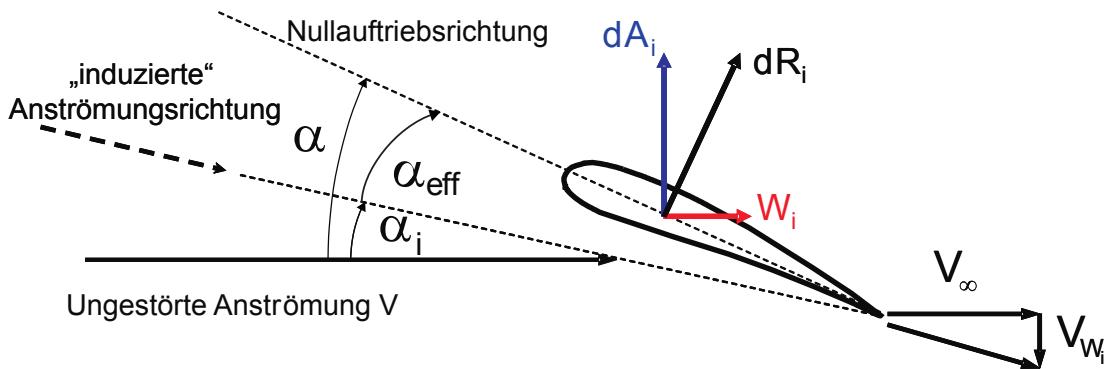


Abbildung 3.10: Induzierter Widerstand am Tragflügel

Wellenwiderstand bei Nullauftrieb

Bei Überschallströmungen erzeugen alle umströmten Körper, auch bei reibungsfreier Strömung einen Widerstand, den man als *Wellenwiderstand* bezeichnet. Er entsteht infolge einer Druckerhöhung auf der Profilhälft mit positiver Steigung und einem verringerten Druck auf der Profilhälft mit negativer Steigung. Da die Druckerhöhung bzw. -minderung zugleich auch proportional dem Neigungswinkel der Kontur ist, erhält man einen dem Quadrat der relativen Profildicke proportionalen Wellenwiderstand.

Auch der Wellenwiderstand von Rumpfkörpern ist proportional dem Quadrat der relativen Dicke $\delta = d_R/l_R$. Diese Gegebenheit hat Auswirkungen auf die Konstruktion von überschallfliegenden Flugzeugen. Zur Widerstandsoptimierung kommen an Überschallflugzeugen dünnere Flügelprofile und schlankere Rumpfformen zum Einsatz [Schlichting].

Auftriebswellenwiderstand

Der Auftriebswellenwiderstand entsteht auf entsprechende Weise wie beim Wellenwiderstand für den Nullauftrieb beschrieben. Hier wird durch die Verdichtung auf der Unterseite und die Verdünnung auf der Oberseite eine normal zum Profil wirkende Kraft erzeugt, deren Komponente in Strömungsrichtung den Auftriebswellenwiderstand darstellt.

Der entsprechende Widerstandsbeiwert ist, wie auch der induzierte Widerstand, proportional dem Quadrat des Auftriebsbeiwertes

$$C_{W_W} = k_W \cdot C_A^2. \quad (3.16)$$

Der Faktor k_W kann für ebene Überschallströmungen durch $k_W = 1/C_{A\alpha}$ dargestellt werden. Bei Flügeln endlicher Spannweite wird der Faktor k_{W_0} je nach Lage der Machlinien zu den Flügelkanten von dem Wert $1/C_{A\alpha}$ abweichen.

3.1.3.3 Parasitärer Widerstand

Die Widerstandsanteile aller an der Auftriebserzeugung weitgehend unbeteiligten Körper wie Rumpf, Gondeln, Fahrwerke und andere Aufbauten fasst man zu einem Gesamtbeiwert, dem *parasitären Widerstand* des Flugzeugs zusammen.

$$C_{W_s} = \frac{\sum(C_{W_{si}} S_i)}{S} \quad (3.17)$$

3.1.3.4 Steuerwiderstand

Jeder Ausschlag eines *Steuerruders* ist mit einer Widerstandserhöhung verbunden, die im Unterschallbereich normalerweise vernachlässigbar klein ist.

Im Überschallbereich kann der Steuerwiderstand sehr groß werden. Insbesondere dann, wenn größere Nickmomente infolge der Neutralpunkttrückwanderung auszusteuern sind. Es tritt damit eine Vergrößerung des Auftriebswellenwiderstands ein, die von der Größe des Neutralpunktabstandes der Flügel- Rumpf- Kombination vom Schwerpunkt Δx_A sowie dem Flächenverhältnis Leitwerk zu Flügel S_H/S abhängt. Eine weitere Einflussgröße ist der Abwindfaktor $\alpha_w/\alpha = 1$, so kann man den Steuerwiderstand allgemein mit folgenden Formeln abschätzen (Siehe Gl. 3.18 und Gl. 3.19). Die genaue Betrachtung ist aber erst in der Flugmechanik II relevant. Die Zusammenhänge seien hier der Vollständigkeit halber erwähnt.

$$\left(\frac{\Delta k}{k_W}\right)_{\frac{\alpha_w}{\alpha} = 1} = \frac{\Delta x_A}{r_H} \left(\frac{\Delta x_A}{r_H} \frac{S}{S_H} - 1 \right) \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\Delta k}{k_W}\right)_{\frac{\alpha_w}{\alpha} = 0} = \left(\frac{\Delta x_A}{r_H} \right)^2 \frac{S}{S_H} \quad (3.19)$$

3.1.4 Flugzeugpolare

Den Gesamtwiderstand eines Flugzeuges erhält man aus der Überlagerung der verschiedenen Widerstandsarten aller Flugzeugbauteile unter Hinzunahme der vom Auftrieb abhängigen Widerstände.

Bei der Ermittlung des gesamten Auftriebwiderstandes ist zu beachten, dass bei gewölbten Flügelprofilen dem minimalen Profilwiderstand $C_{W_{p,0}}$ stets positive Auftriebsbeiwerte des Profils $C_{A_{p,0}}$ zugeordnet sind. Mit den Auftriebwiderständen nach Gl. 3.15 und

Gl. 3.14 erhält man für den Beiwert des Gesamtwiderstandes (vgl. Bild 3.11):

$$C_W = C_{W_s} + C_{W_{p,0}} + k_p \left(C_A - C_{A_{p,0}} \right)^2 + \frac{C_A^2}{\pi \Lambda} \quad (3.20)$$

mit $k = k_p + \frac{1}{\pi \Lambda}$ wird daraus

$$C_W = C_{W_s} + C_{W_{p,0}} + k_p \cdot C_{A_{p,0}}^2 - 2k_p \cdot C_{A_{p,0}} \cdot C_A + k \cdot C_A^2 \quad (3.21)$$

Durch Extremwertbildung erhält man hieraus für den Auftriebsbeiwert des minimalen Widerstandes

$$C_{A,C_{W_{min}}} = C_{A,0} = \frac{k_p}{k} \cdot C_{A_{p,0}} \quad (3.22)$$

Durch Einsetzen in Gl. 3.21 folgt daraus für den Beiwert des minimalen Flugzeugwiderstandes

$$C_{W_{min}} = C_{W,0} = C_{W_s} + C_{W_{p,0}} + \frac{k}{k_p \cdot \pi \cdot \Lambda} \cdot C_{A,0}^2 \quad (3.23)$$

Die Wölbung der Tragflügelprofile beeinflusst die Flugzeugpolare im zweifacher Hinsicht. Es tritt eine Verlagerung des Minimalwiderstandsbeiwertes zu positiven Auftriebsbeiwerten ein und zugleich wird dieser Minimalwiderstand vergrößert. Dieser Effekt ist deutlich im Diagramm der Polaren mit verschiedenen Klappenausschlägen (Bild 3.14) zu erkennen (vgl. auch die schematische Darstellung in Bild 3.11). Bei Untersuchungen der Profilwölbungen auf die Flügelleistung berücksichtigt man hauptsächlich diese beiden Einflüsse. Für den Widerstands-

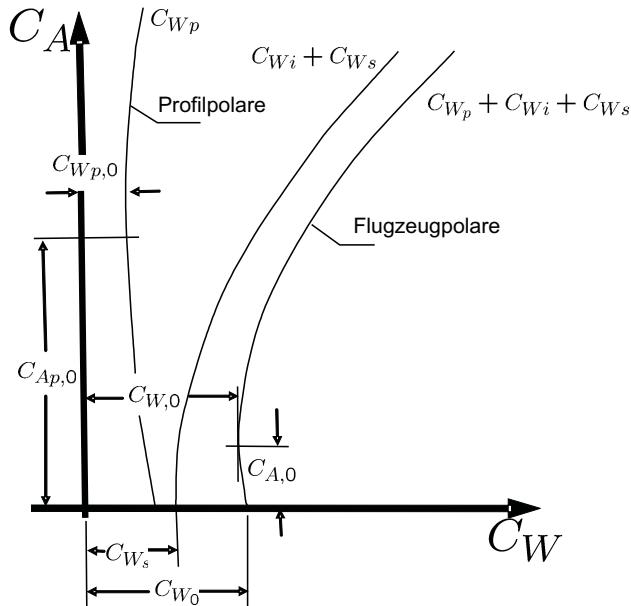


Abbildung 3.11: Flugzeug- und Profilpolare

beiwert bei Nullauftrieb ergibt Gl. 3.21 unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen $C_{A,0}$ und $C_{A_{p,0}}$ nach Gl. 3.22:

$$C_{W,C_{A=0}} = C_{W_0} = C_{W_s} + C_{W_{p,0}} + \frac{k}{k_p} \cdot k \cdot C_{A,0}^2 \quad (3.24)$$

und ist damit von $C_{A,0}$ sowie k und k_p abhängig. Für Mitteldeckeranordnungen mit fast ungewölbten Tragflügelprofilen, wie sie z.B. bei Überschallflugzeugen häufig anzutreffen sind, kann $C_{A,p,0}$ und damit $C_{A,0}$ zu null gesetzt werden. Damit vereinfacht sich die allgemeine Polare nach Gl. 3.21 zu

$$C_W = C_{W_0} + k \cdot C_A^2 \quad (3.25)$$

Diese einfache Form der Polare soll wegen ihrer Symmetrieeigenschaft zukünftig als *symmetrische Polare* bezeichnet werden. Wegen ihres einfachen Aufbaus wird sie näherungsweise auch häufig für Flugzeugkonfigurationen angewendet, für die die obengenannten Voraussetzungen nicht exakt erfüllt sind. Man erhält dadurch einfache und übersichtliche Formeln für die Berechnungen der Flugleistungen, die im Rahmen der erreichbaren Genauigkeit bei der Ermittlung der aerodynamischen Beiwerte im Projektstadium eines Flugzeugentwurfs häufig ausreichen.

Die allgemeinere Form der Polare nach Gl. 3.21, die künftig *parabolische Polare* genannt werden soll, schreibt sich mit C_{W_0} nach Gl. 3.24 und der Abkürzung $k_1 = -2k \cdot C_{A,0}$,

$$C_W = C_{W_0} + k_1 \cdot C_A + k \cdot C_A^2 \quad (3.26)$$

Es ist zu beachten, dass hier C_{W_0} (entsprechend Gl. 3.24) um den Betrag $(k C_{A,0})^2/k_p$ größer

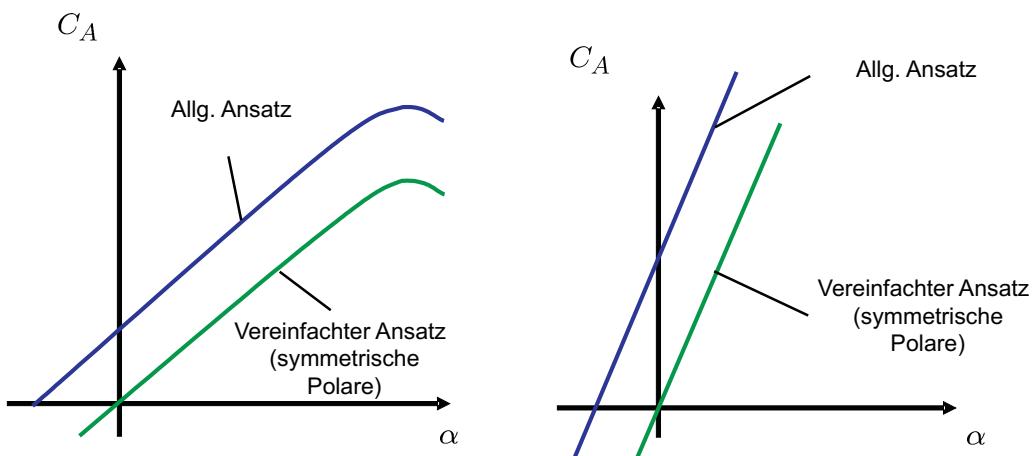


Abbildung 3.12: Vergleich Allgemeiner Ansatz der Polare mit dem vereinfachten Fall

ist als bei der symmetrischen Polare nach Gl. 3.25. Diese Form der parabolischen Polare ist besonders vorteilhaft, wenn die Polarenwerte aus Flugmessungen z.B. nach einer Regressionsanalyse ermittelt werden. Hierbei wird außer den Größen C_{W_0} , k und k_1 meist auch noch der Exponent bestimmt.

Die durch die Gl. 3.26 definierte Polare lässt sich auf einfache Weise in folgende, am Punkt des minimalen Widerstandes mit den Koordinaten C_{W_0} und $C_{A,0}$ orientierte Form schreiben

$$C_W = C_{W,0} + k \cdot (C_A - C_{A,0})^2 \quad (3.27)$$

Beide Polarenformen sind in Bild 3.13 dargestellt. Im Bereich anliegender Strömung, d.h. mit Ausnahme des Bereichs maximalen Auftriebsbeiwertes, wie angedeutet, gelingt es meist,

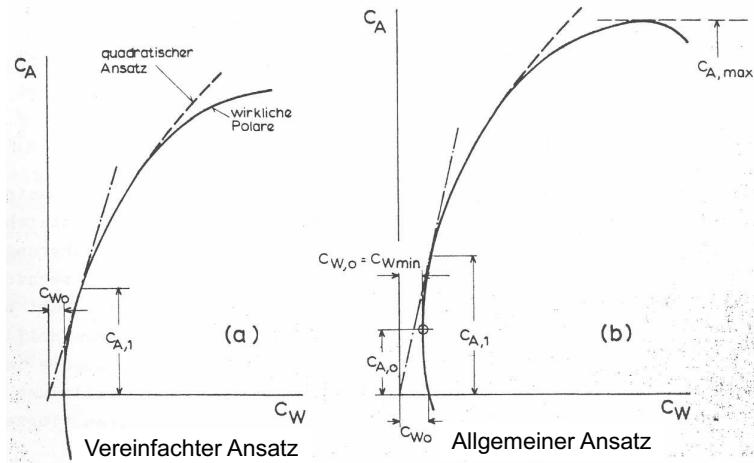


Abbildung 3.13: Vergleich der beiden Polarenansätze

gemessene Kurven $C_W = f(C_A)$ durch einen der beiden Polarenansätze darzustellen. In Sonderfällen kann es gelegentlich notwendig werden, eine bessere Anpassung an Messergebnisse durch Wahl anderer Exponenten, als in den Gl. 3.25 bzw. Gl. 3.26 verwendet, zu erreichen. Allerdings ist dann die analytische Auswertbarkeit der Flugleistungsergebnisse stark eingeschränkt.

Es ist zu beachten, dass bei höheren Fluggeschwindigkeiten $C_{W,0}$, $C_{A,0}$ und k Funktionen der Machzahl sind und überdies von der Stellung der Landeklappen abhängen. In Bild 3.14 ist die Polare für $M = 0$ eines modernen Verkehrsflugzeuges für verschiedene Klappenausschläge: In Bild 3.15 für verschiedene Flugmachzahlen dargestellt. Als Beispiel für ein Überschallverkehrsflugzeug zeigt Bild 3.16 die Werte $C_{W,0}$ und k als Funktion der Machzahl.

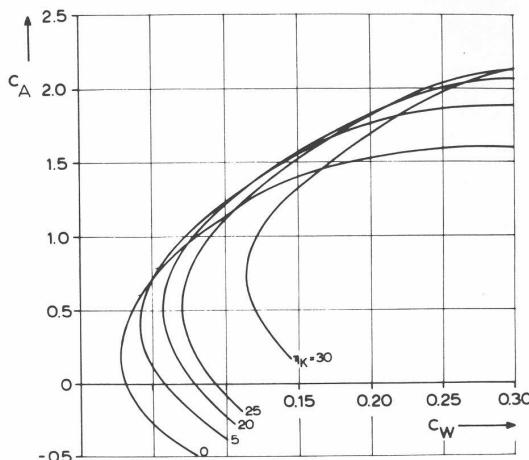


Abbildung 3.14: Polare eines Unterschallverkehrsflugzeugs bei verschiedenen Klappenausschlägen η_K ($Ma \rightarrow 0$)

3.1.5 Aerodynamische Definition der Gleitzahl

Die aerodynamische Güte eines Fluggerätes kann nicht allein aus der Größe des Widerstandsbeiwertes beurteilt werden, wie es z. B. bei Landfahrzeugen üblich ist. Im Flug kommt es vielmehr darauf an, dass der Widerstand bei gegebenem Auftrieb so klein wie möglich ist. Das Verhältnis Widerstand zu Auftrieb, dessen flugmechanische Deutung ausführlich in Kapitel 4 behandelt wird, soll als Gleitzahl bezeichnet werden.

$$\varepsilon = \frac{W}{A} = \frac{C_W}{C_A} \quad (3.28)$$

Da die *Gleitzahl* nach dieser Definition normalerweise Zahlenwerte wesentlich kleiner als eins besitzt, wird gelegentlich auch mit dem Kehrwert gearbeitet in Übereinstimmung mit dem in der englischsprachigen Fachliteratur vielfach verwendeten Begriff *aerodynamic efficiency*.

Wie schon angedeutet, kommt dem Minimalwert der Gleitzahl besondere Bedeutung zu. Auf der Polare wird die *minimale Gleitzahl* durch den Berührungs punkt der Tangente vom Ursprung an die Polare definiert, wie in Bild 3.13 angedeutet ist. Dieser Punkt der Polare soll mit „1“ und die zugehörigen Koordinaten mit $C_{A,1}$ bzw. $C_{W,1}$ gekennzeichnet werden.

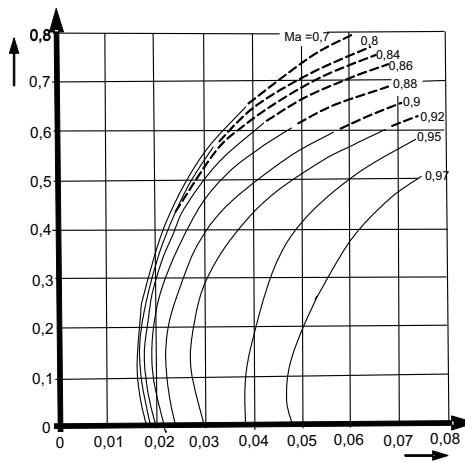


Abbildung 3.15: Polare eines Unterschallverkehrsflugzeugs bei verschiedenen Machzahlen

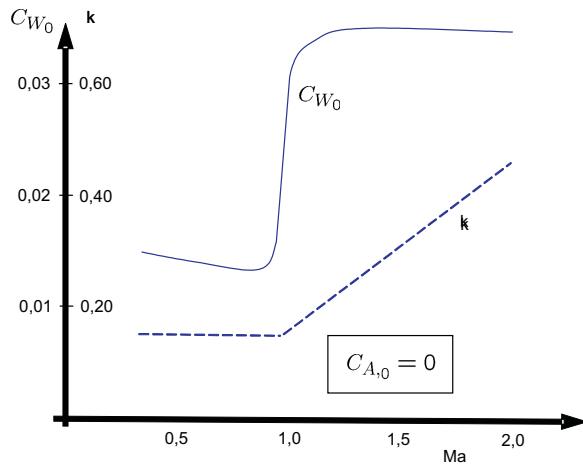


Abbildung 3.16: C_{W_0} und k als Funktion der Machzahl eines Überschallflugzeugs

3.1.6 Übersicht zu wichtigen Größen der beiden Polarenansätze

Für die Polaren nach Gl. 3.25 bzw. Gl. 3.26 seien die wichtigsten Größen in Tabelle 3.2 zusammengestellt. Die gesuchten Werte ergeben sich durch Extremwertbildung unter Verwendung der Polarengleichung: Wie aus den vorangegangenen Ableitungen zu erkennen ist, hat der C_W -Wert bei $C_A = 0$, der beide Polaren mit C_{W_0} bezeichnet wurde, in beiden Fällen unterschiedliche Werte, vgl. z.B. Gl. 3.24.

Für das Verhältnis der beiden Widerstandswerte erhält man nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{C_{W_0}(\text{parabolische Polare})}{C_{W_0}(\text{symmetrische Polare})} = \frac{1}{1 - \frac{k^2 C_{A,0}^2}{k_p \cdot C_{W_0}}} \quad (3.29)$$

Von besonderer Wichtigkeit ist das Verhältnis der minimalen Gleitzahl für eine parabolische

Tabelle 3.2: Übersicht zu Größen aus der Polarengleichung

	allgemeiner Ansatz	vereinfachter Ansatz	
C_W	$C_{W_0} + k_1 \cdot C_A + k \cdot C_A^2$	$C_{W_0} + k \cdot C_A^2$	(a)
C_{W_0}	$C_{W_S} + C_{W_P,0} + \frac{k^2 C_{A,0}^2}{k_p}$	$C_{W_S} + C_{W_P,0}$	(b)
ε	$\frac{C_{W_0}}{C_A} + k_1 + k C_A$	$\frac{C_{W_0}}{C_A} + k C_A$	(c)
$C_{A,1}$	$\sqrt{\frac{C_{W_0}}{k}}$	$\sqrt{\frac{C_{W_0}}{k}}$	(d)
$C_{W,1}$	$2 C_{W_0} \left(1 - \frac{C_{A,0}}{C_{A,1}} \right)$	$2 C_{W_0}$	(e)
ε_{min}	$2 \sqrt{k C_{W_0}} - 2k C_{A,0}$	$2 \sqrt{k C_{W_0}}$	(g)
$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{min}}$	$\frac{\frac{C_{W_0}}{C_A} - 2k C_{A,0} + k C_A}{2 \sqrt{k C_{W_0}} + k C_{A,0}}$	$\frac{C_{A,0}^2 + C_A^2}{2 C_A C_{A,1}}$	(h)
k_1	$-2 \cdot k \cdot C_{A,0}$		(i)
k	$k_p + \frac{1}{\pi \cdot \Lambda}$		(j)

Polare zu derjenigen einer symmetrischen Polare, für das man entsprechend Tabelle 3.2 unter Verwendung der Beziehung Gl. 3.29 erhält

$$\frac{\varepsilon_{min}(\text{parabolische Polare})}{\varepsilon_{min}(\text{symmetrische Polare})} = \frac{1 - \frac{k^2 C_{A,0}}{\sqrt{\frac{C_{W_0}}{k}}}}{\sqrt{1 - \frac{C_{A,0}}{k_p \cdot C_{W_0}}}} \quad (3.30)$$

Diese Funktion ist in Bild 3.17 dargestellt. Man erkennt, dass eine Vergrößerung von $C_{A,0}$ infolge Wölbungserhöhung nur bei sehr kleinen Werten k/k_p , d.h. sehr großen Streckungen eine monotone Verbesserung der minimalen Gleitzahl ergibt. Bei größeren k/k_p -Werten erhält man für die minimale Gleitzahl Optimalwerte. Für diese liefert eine Extremwertbildung aus Gl. 3.30 :

$$\left| \frac{\sqrt{k}}{k_p} \cdot \frac{C_{A,0}}{C_{W_0}} \right|_{\varepsilon_{opt}} = 1 \quad (3.31)$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass zum Zwecke einer Verbesserung der minimalen Gleitzahl die Wölbung um so größer werden kann, je größer die Streckung ist. Diese für inkompressible Polaren dargestellten Zusammenhänge bleiben qualitativ auch im kompressiblen Bereich gültig.

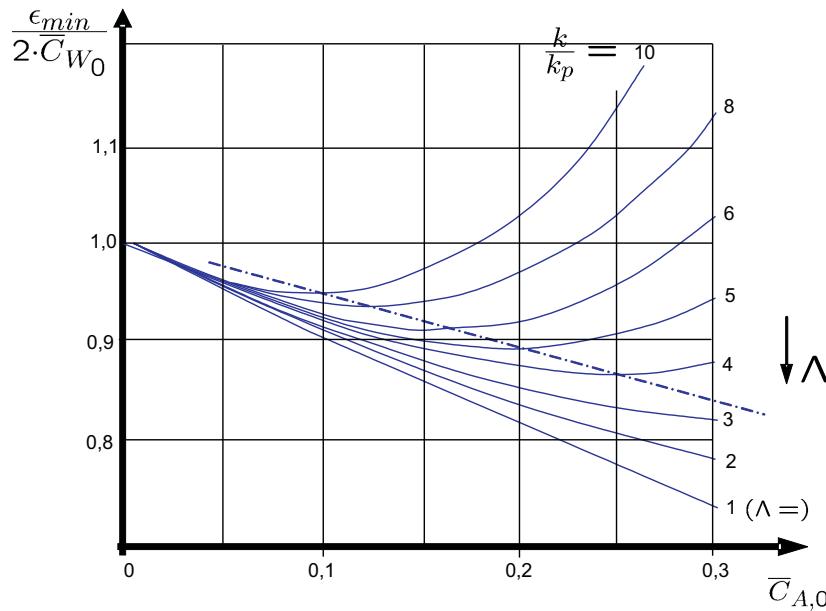


Abbildung 3.17: Einfluss von Wölbung und Streckung auf die minimale Gleitzahl

3.2 Antriebskräfte

3.2.1 Allgemeines zu den Antriebskräften

Die Betrachtungen zur Modellbildung der verschiedenen Triebwerke beschränken sich in der Flugmechanik auf deren Wirkungsweise. Dabei wird jedes Triebwerk als *Black Box* behandelt. Es genügt zu wissen welche Leistung das Triebwerk bei den vorgegebenen Bedingungen (Luftdruck, Geschwindigkeit, Schubeinstellung, usw.) bereit stellt.

3.2.1.1 Definition von Schub und Verbrauch

Jedes Antriebssystem liefert einen Vortriebskraftvektor F , auch *Schub* genannt. Mit Hilfe des Impulssatzes, unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung, erhält man eine für alle Antriebsarten gültige Beziehung für den Schub. Das Bild 3.18 zeigt eine Abbildung zur mathematischen Modellierung eines Triebwerks:

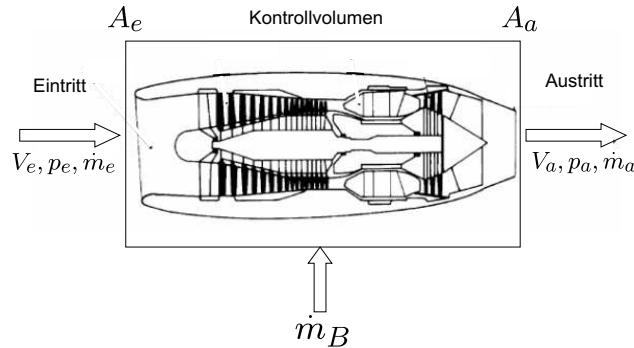


Abbildung 3.18: Vereinfachtes Modell der Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse am Triebwerk

Aus Bild 3.18 ergibt sich für den Schub F :

$$F = \dot{m}_a V_a - \dot{m}_e V_e + A_a p_a - A_e p_e \quad (3.32)$$

mit den Vereinfachungen $V = V_e$ ¹, $A_a = A_e$, $p_e = p_\infty$, $\dot{m}_a = \dot{m} + \dot{m}_B$ ergibt sich aus Gl. 3.32 die Gl. 3.33:

$$F = \dot{m}_a \cdot V_a - \dot{m} \cdot V + A_a (p_a - p) \quad (3.33)$$

Dabei bedeutet \dot{m} die sekündlich durchgesetzte Luftmasse, V die Geschwindigkeit, p den Druck und A die Querschnittsfläche. Die Größen an der Austrittsfläche sind durch Index „a“ gekennzeichnet. Bei Strahltrieben kann näherungsweise $\dot{m}_a = \dot{m}$ gesetzt werden, während dies für Luftschaubenantriebe (ausgenommen PTL) exakt gilt. Das Druckglied verschwindet, wenn der Strahl voll expandiert ist, da dann $p_a = p$ gilt. Zur Kennzeichnung eines solchen Falls sei definiert

$$V_{Str} = V_{ap = pa} \quad (3.34)$$

Unter *Verbrauch* versteht man die sekündlich verbrannte Kraftstoffmasse \dot{m}_B . In der Praxis hat sich durchgesetzt, einen spezifischen Verbrauch b zu definieren. Dieser ergibt sich aus dem Verbrauch \dot{m}_B nach Division durch einen Faktor für die Triebwerksgröße. Diese entspricht z.B. bei Einkreisstrahltriebwerken direkt dem Schub (Siehe hierzu Gl. 3.58).

3.2.1.2 Stand- und Schwebeschub

Sehr einfache Beziehungen erhält man, wenn man die Verhältnisse im Stand, d.h. bei $V = 0$ betrachtet und zugleich annimmt, dass der Strahl beim Austritt aus dem Kontrollvolumen voll expandiert ist. Dann ist nur noch der Austrittsimpuls maßgebend und man erhält unter Verwendung von Gl. 3.33 und Gl. 3.34:

$$F_0 = \dot{m}_a \cdot V_{Str} \quad (3.35)$$

¹Für die Betrachtungen im Kapitel Antriebskräfte wird die Geschwindigkeit nicht vektoriell angenommen

Die hierfür aufgewendete Leistung entspricht der sekündlich dem Strahl zugeführten kinetischen Energie. Unter der Annahme verlustloser Vorgänge erhält man

$$P_{id} = \frac{\dot{m}_a}{2} \cdot V_{Str}^2 \quad (3.36)$$

Da man bei bekannter Querschnittsfläche $A_a = A_{Str}$ des vollexpandierten Strahles für den Massenfluss auch schreiben kann

$$\dot{m}_a = \rho_{Str} \cdot A_{Str} \cdot V_{Str} \quad (3.37)$$

ergibt sich zwischen der Strahlgeschwindigkeit und Strahlflächenbelastung F_0/A_{Str} unter Verwendung von Gl. 3.37 folgende Beziehung

$$V_{Str} = \sqrt{\frac{F_0/A_{Str}}{\rho_{Str}}} \quad (3.38)$$

Ferner erhält man aus Gl. 3.35 und Gl. 3.36 für das Verhältnis des erzeugten Stand- bzw.

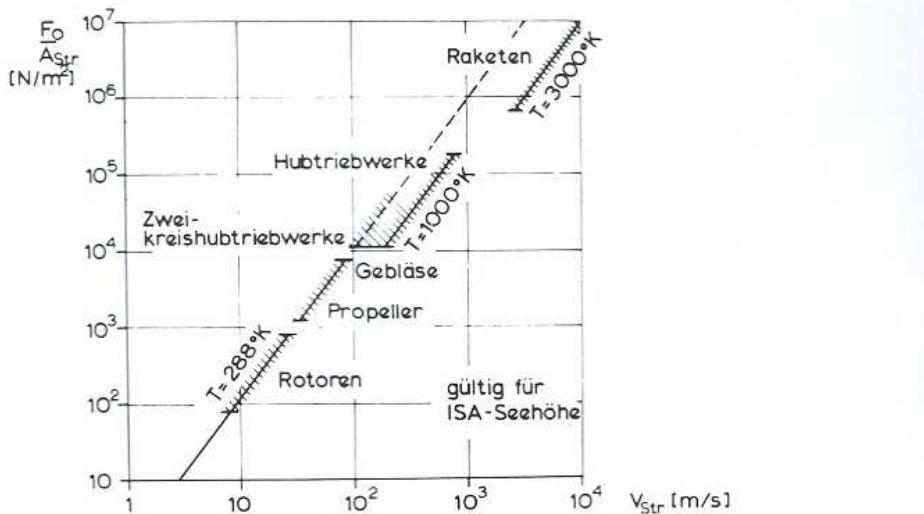


Abbildung 3.19: Einfluss der Strahlflächenbelastung auf die Strahlgeschwindigkeit

Schwebeschubes zu der dafür aufgewendeten idealen Leistung

$$\frac{F_0}{P_{id}} = \frac{2}{V_{Str}} \quad (3.39)$$

Diese einfache Beziehung gilt prinzipiell für alle Antriebsarten. Hieraus ergibt sich, dass der Standschub bei gegebener Leistung um so größer ist, je niedriger die Strahlgeschwindigkeit bzw. die Strahlflächenbelastung wird. Für Senkrechtstartantriebe kennzeichnet Gl. 3.39 zugleich auch die Effektivität der einzelnen Antriebsarten für den Schwebeflug. Dieses ist in Bild 3.20 veranschaulicht. Es sei nun der spezifische Kraftstoffverbrauch für den gleichen Fall $V = 0$ definiert. Bezeichnet man den Heizwert des Kraftstoffes mit H_u und definiert den

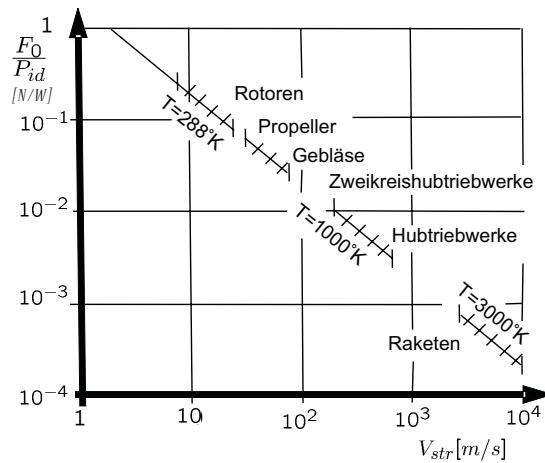


Abbildung 3.20: Einfluss der Strahlgeschwindigkeit auf den erforderlichen Leistungsaufwand

sekündlichen Verbrauch an Kraftstoffmasse mit \dot{m}_B , so erhält man durch Gleichsetzen von mechanischer und thermischer Leistung unter Einführen eines Gesamtwirkungsgrades η_{ges}

$$b_{F_0} = \frac{\dot{m}_B}{F_0} = \frac{V_{Str}}{2 \cdot H_u \cdot \eta_{ges}} \quad (3.40)$$

Dieses Ergebnis unterstreicht den Vorteil kleiner Strahlgeschwindigkeiten für günstige spezifische Stand- bzw. Schwebeflugverbräuche und ist in Bild 3.21, für die verschiedenen Antriebsarten, dargestellt. Nachfolgend wird ein kurzer Überblick über die wichtigen Antriebssysteme

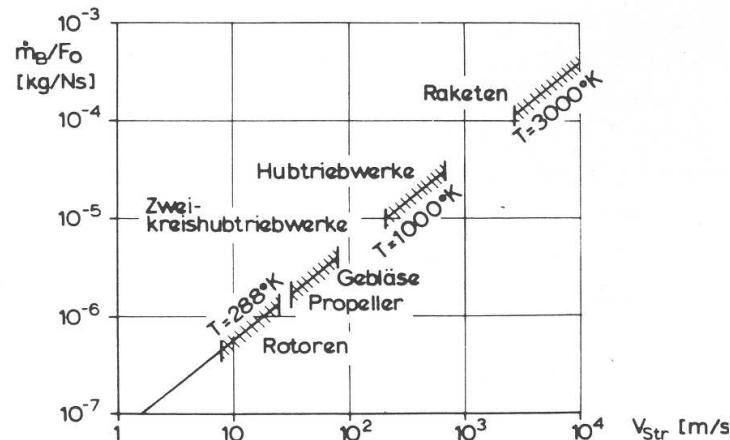


Abbildung 3.21: Einfluss der Strahlgeschwindigkeit auf den Kraftstoffverbrauch

gegeben, soweit sie im Rahmen dieser Vorlesung von Bedeutung sind.

3.2.2 Luftschaubenantriebe

Hierunter versteht man Antriebsarten, bei denen die Leistung eines Antriebsaggregates (Kolbenmotor oder Wellenturbine) über ein Luftschaubensystem in Vortriebsschub umgesetzt wird. Mit Gl. 3.32 beträgt der Schub:

$$F = \dot{m} \cdot (V_{Str} - V) \quad (3.41)$$

Da bei dieser Antriebsart keine Aufheizung des Strahles stattfindet, kann hier stets $\rho_{Str} = \rho$ gesetzt werden.

3.2.2.1 Allgemeines

Die Schubcharakteristik der Luftschaubenantriebe ist im wesentlichen durch die Eigenschaften der Luftschaube gegeben. Bei kleinen Strahlgeschwindigkeiten arbeiten Luftschaubenantriebe mit einem großen Massendurchsatz. Sie fallen deshalb in den Bereich der in Bild 3.20 gekennzeichneten Antriebe mit besonders günstigen Verhältnissen von Schub zu Leistungsaufwand bei kleinen Fluggeschwindigkeiten. Dagegen wird der Wirkungsgrad bei höheren Fluggeschwindigkeiten im Bereich der kritischen Profilmachzahl stark abnehmen. Da die örtliche Profilmachzahl am Luftschaubenprofil stets beträchtlich größer als die Flugmachzahl ist¹, ist der Luftschaubenantrieb grundsätzlich auf geringere und mittlere Reisegeschwindigkeiten (etwa $Ma < 0,7$) beschränkt. Sein besonderer Vorteil ist der schon erwähnte relativ hohe Standschub und die daraus resultierenden guten Flugleistungen im Langsamflugbereich (z.B. bei Start und Landung).

Damit ist zugleich der Verwendungsbereich gekennzeichnet. Für Sport-, Reise- und kleine Geschäftsflugzeuge stellt der Luftschaubenantrieb mit luftgekühlten Kolbenmotoren immer noch die einfachste und wirtschaftlichste Antriebsart dar.

Aber auch für Sonderentwicklungen hoher Leistungsfähigkeit, wie Flugzeuge für den Kurzstreckenverkehr mit extremen Kurzstart- oder Senkrechtstarteigenschaften, können die Vorteile des Luftschaubenantriebs bezüglich des Stand- und Schwebeschubes entwurfsentscheidend sein, so dass er auch zukünftig seine Bedeutung behalten wird. Hierbei verwendet man ausschließlich *Propellerturbinentriebwerke* (PTL), die bei kleinerem Gewicht je Leistungseinheit infolge ihrer schlankeren Bauform wesentlich geringere Einbauwiderstände ergeben als herkömmliche Luftschaubenantriebe.

Bild 3.22 zeigt die Daten für ein Propellertriebwerk. Die hierbei auftretende Leistungserhöhung mit der Fluggeschwindigkeit ist eine Folge des Staueffektes.

¹Bedingt dadurch, dass die resultierende Anströmgeschwindigkeit am Luftschaubenprofil - als maßgeblich wird im allgemeinen ein Profilschnitt in 70% des Radius angenommen - $V_{res} = \sqrt{u_{0,7}^2 + V^2}$ beträgt, erhält man für die effektive Machzahl an der Luftschaube $Ma_{eff} = Ma \cdot \sqrt{1 + (\frac{u_{0,7}}{V})^2}$

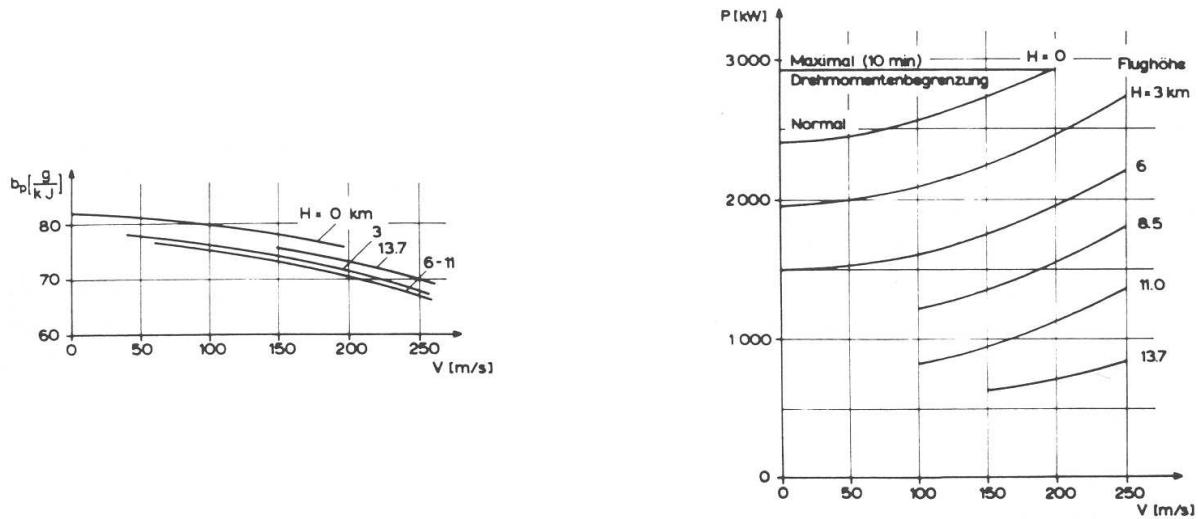


Abbildung 3.22: Spezifischer Verbrauch und Leistung einer Propellerturbine

3.2.2.2 Ermittlung von Vortriebsschub und Kraftstoffverbrauch

Die Berechnung des verfügbaren Vortriebsschubes setzt eine sorgfältige Auslegung der Luftschaube voraus, die für den vorgesehenen Verwendungszweck bezüglich des zweckmäßigen Durchmessers, der Blattzahl und Profilform und -verwindung optimiert werden muss. Maßgeblich hierbei ist u.a. die Geschwindigkeitsspanne, innerhalb welcher der Luftschaubenantrieb arbeiten soll.

Die vom Antriebsaggregat abgegebene *Wellenleistung* wird über die Luftschaube in Schubkraft umgesetzt. Durch Gleichsetzen der Vortriebsleistung $F \cdot V$ und der vom Triebwerk über die Luftschaube abgegebenen Leistung $P \cdot \eta_L$ erhält man

$$F = \frac{P \cdot \eta_L}{V} \quad (3.42)$$

Die wesentliche Aufgabe besteht nun darin, den Propellerwirkungsgrad zu ermitteln, der im allgemeinen für eine ausgewählte Luftschaube vom Hersteller als Funktion des Fortschrittsgrades $\lambda = \frac{V}{u}$ und des Blatteinstellwinkels β gegeben ist. Bild 3.23 zeigt den typischen Verlauf solcher Kurven für eine relativ hohe Flugmachzahl. Um mit zunehmender Fluggeschwindigkeit stets mit höchstmöglichen η_L fliegen zu können, ist der Blatteinstellwinkel entsprechend zu vergrößern. Dieses wird im allgemeinen mit automatisch geregelten Verstelleinrichtungen bewirkt.

Zur Berechnung des Standschubes (bei $V = 0$) ist Gl. 3.42 offenbar nicht geeignet. Diesen erhält man unter Verwendung des Standgütegrades, der das Verhältnis der verlustfreien Leistung nach Gl. 3.36 zu der tatsächlich aufgewendeten Leistung darstellt, d.h. $\varsigma \cdot P_0 = P_{id}$. Aus Gl. 3.38 und Gl. 3.39 erhält man dann

$$\varsigma = \frac{F_0}{2 \cdot P_0} \cdot \sqrt{\frac{F_0/\rho}{A_{Str}}} = \frac{F_0}{P_0} \cdot \sqrt{\frac{F_0}{A_{Str}} \cdot \frac{1}{4 \cdot \rho}} \quad (3.43)$$

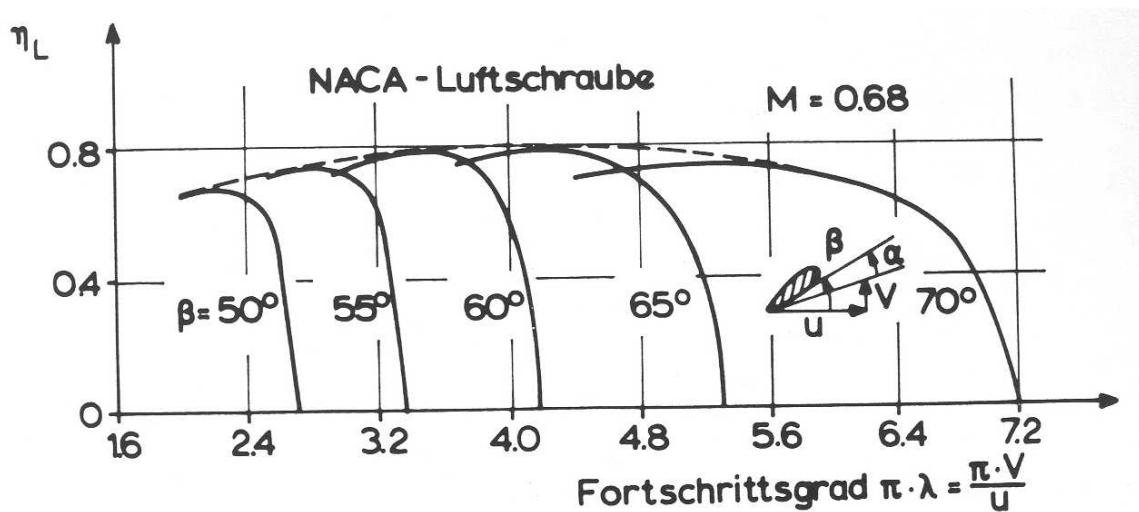


Abbildung 3.23: Luftschaubenwirkungsgrad abhängig vom Fortschrittsgrad und Blatteinstellwinkel

Ist der Standgütegrad bekannt (bei richtiger Auslegung gilt etwa $0,7 < \varsigma < 0,8$), so kann man den Standschub zu

$$F_0 = \sqrt[3]{4 \cdot \rho \cdot A_{Str} (P_0 \cdot \varsigma)^2} \text{ berechnen.} \quad (3.44)$$

Gl. 3.43 und Gl. 3.44 gelten für einen Mantelpropeller. Für einen Propeller, der eine freie Anströmung erfährt, wird nicht die Strahlfläche, sondern die Propellerfläche zur Berechnung herangezogen. Hierbei ändern sich die beiden Gleichungen minimal, wobei auf eine ausführliche Herleitung an dieser Stelle verzichtet werden soll.

$$\varsigma = \frac{F_0}{P_0} \cdot \sqrt{\frac{F_0}{A_{Pr}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \rho}} \quad (3.45)$$

$$F_0 = \sqrt[3]{2 \cdot \rho \cdot A_{Pr} (P_0 \cdot \varsigma)^2} \text{ berechnen.} \quad (3.46)$$

Der spezifische Kraftstoffverbrauch wird bei dieser Antriebsart stets auf die Leistung bezogen, so dass man erhält

$$b^* = \frac{\dot{m}_B}{P} \quad (3.47)$$

Bezogen auf die Vortriebsleistung $F \cdot V = P \cdot \eta_L$ ergibt sich dann ein spezifischer Kraftstoffverbrauch

$$b = \frac{\dot{m}_B}{P \cdot \eta_L} = \frac{b^*}{\eta_L}. \quad (3.48)$$

3.2.3 Strahlantriebe

3.2.3.1 Allgemeines zu Strahlantrieben

Die Forderung des Luftverkehrs nach großen, leistungsstarken Flugzeugen, die zugleich hohe Wirtschaftlichkeit und geringe Lärmentwicklung zeigen sollen, gab auch der Triebwerksentwicklung entscheidende Impulse. Ein Maß für die Güte eines Triebwerks ist das Verhältnis des erzeugten Standschubes zur Triebwerksmasse. Bild 3.24 zeigt eine Zusammenstellung solcher Werte von Triebwerken über dem Zeitraum der letzten 60 Jahre und die zu erwartende Tendenz für die nächste Dekade:

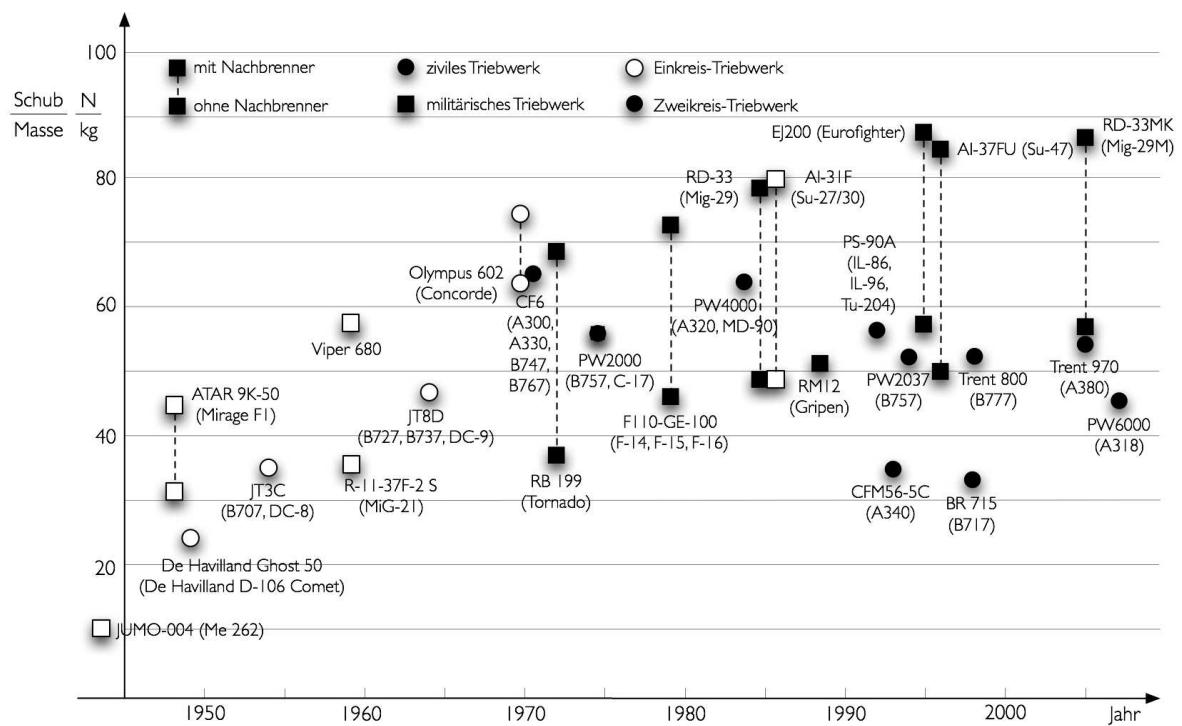


Abbildung 3.24: Entwicklung der Leistungsfähigkeit von Strahltriebwerken

Eine weitere wichtige Größe ist der spezifische Kraftstoffverbrauch, der durch Steigerung des thermischen Wirkungsgrades des Triebwerks infolge Erhöhung der zulässigen Turbineneintrittstemperatur sowie des Kompressordruckverhältnisses verbessert wird. Von besonders großem Einfluss ist die Maßzahl des Nebenstromverhältnisses, das bei ausgeführten modernen Triebwerken bis zu Werten von 13:1 reicht, Bild 3.25

Die Wahl eines hohen Nebenstromverhältnisses bedeutet zugleich eine starke Erhöhung des Massendurchsatzes bei gleichzeitiger Verringerung der mittleren Strahlgeschwindigkeit. Daraus resultiert neben einem wesentlich höheren Standschub auch eine beträchtliche Verminderung des spezifischen Kraftstoffverbrauchs.

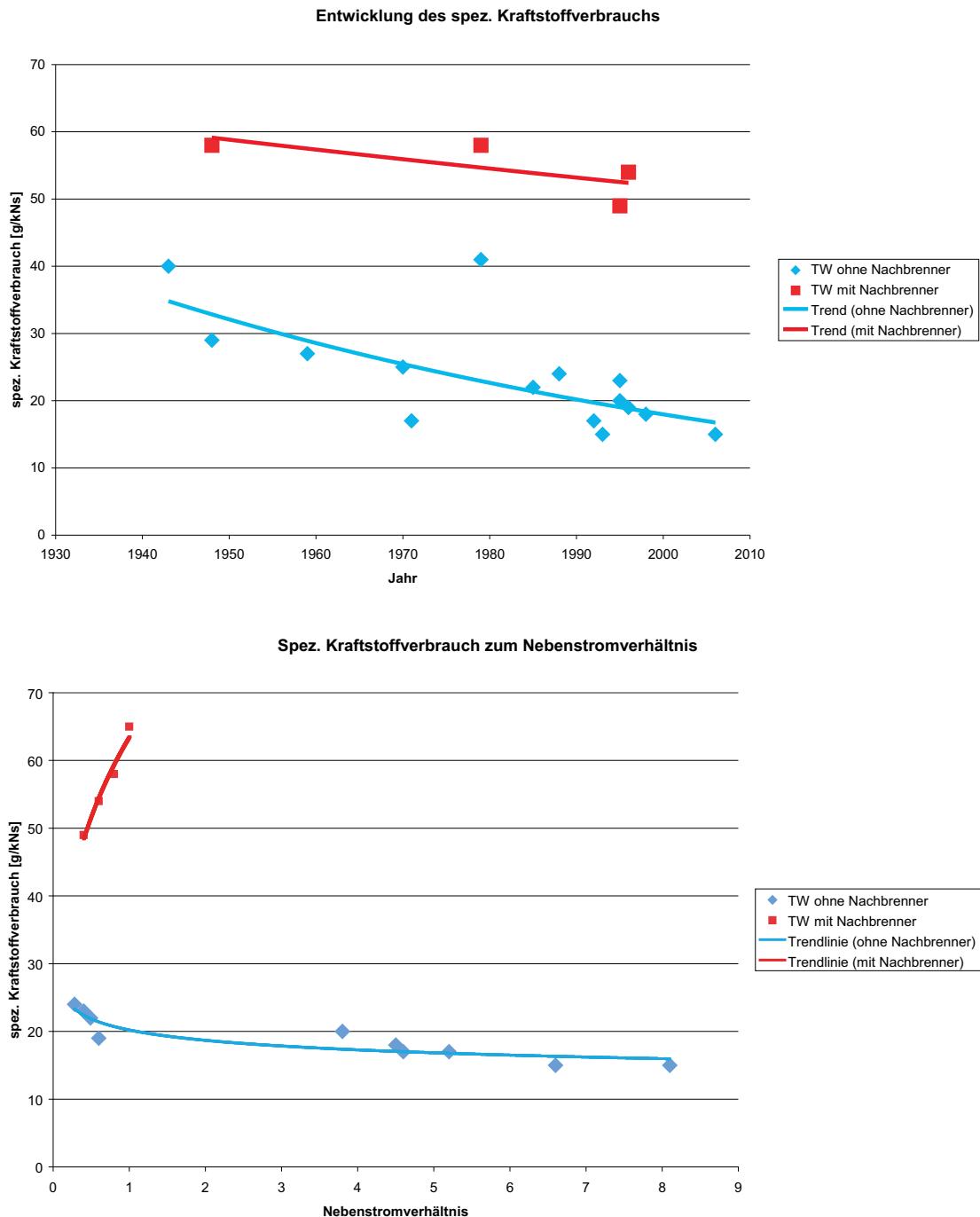


Abbildung 3.25: Beispieldaten zu ausgeführten Strahltriebwerken

rung des Strahlgeräusches. Sehr wesentlich für die Wirtschaftlichkeit sind zugleich die günstigen Teillastverbräuche bei hohen Nebenstromverhältnissen. Tabelle 3.3 enthält Daten zu heutigen Triebwerkstypen.

Tabelle 3.3: Daten ausgeführter Triebwerke

Triebwerk	Hersteller	Erstflug	Typ (BPR)	Schub (kN)	Gewicht (kg)	Schub/Gewicht (N/kg)	spez. Verbrauch (g/kNs)
JUMO-004	Junkers	1943	0	9	859	10	40
ATAR 9K-50	SNECMA	1948	0	71	1590	45	58
			0	49	1590	31	29
De Havilland Ghost 50	De Havilland	1949	0	22	912	24	
Viper 680	Rolls-Royce	1953	0	20	380	53	
R-11-37F-2 S	Turmansky	1959	0	38	1065	36	27
Olympus 602	RR+SNECMA	1970	0	200	2628	76	
			0	169	2628	64	25
CF6	GE	1971	5,2	263	4066	65	17
RB 199	Turbounion (RR+MTU)	1972	1	75	1084	69	
			1	41	1084	38	
F110-GE-100	GE	1979	0,8	127	1767	72	58
			0,8	82	1767	46	41
RM12	Volvo Aero	1988	0,28	54	1055	51	24
PS-90A	Aviadvigatel	1992	4,6	157	2800	56	17
CFM56-5C	CFM (GE+SNECMA)	1993	6,6	139	3921	35	15
PW2037	PW, Fiat Aviazione, MTU	1994	6	170	3250	52	
EJ200	Eurojet Turbo GmbH	1995	0,4	90	1035	87	49
			0,4	60	1035	58	23
PWC 530	Pratt & Whitney	1995	3,8	13	290	45	20
Trent 800	Rolls-Royce	1997	5,8	423	8204	52	
BR 715	Rolls-Royce	1998	4,5	89	2792	32	18
GP7277	Engine Alliance	2005	8,7	340	6033	56	
Trent 970	Rolls-Royce	2006	8,1	340	6437	53	15
PW2000	PW, Fiat Aviazione, MTU	1979	5,4	186	3311	56	
PW4000	IAE (PW, RR, MTU, JAE)	1988	4,5	142	2301	62	
PW6000	PW, Fiat Aviazione, MTU	2007	4,8	106	2290	46	
JT3D	Pratt & Whitney	1958	1,37	80			
JT8D	Pratt & Whitney	1964	1,74	97	2048	47	
JT3C	Pratt & Whitney	1954	0	61	1755	35	
RD-33	Klimov	1985	0,49	50	1025	49	22
			0,49	81	1025	79	
AI-37FU	Saturn-Lyulka	1996	0,6	83	1660	50	19
			0,6	142	1660	86	54
AI-31F	Saturn-Lyulka	1985	0	75	1530	49	
			0	123	1530	80	
RD-33MK	Klimov	2005	0,49	57	1055	54	
			0,49	92	1055	87	

In Bild 3.26 sind Schub und spezifischer Verbrauch eines modernen Nebenstromtriebwerkes abhängig von der Machzahl und der Flughöhe dargestellt. Bild 3.28 auf Seite 83 zeigt im Vergleich hierzu die Werte eines Einkreisüberschalltriebwerkes. Man erkennt besonders im unteren Machzahlbereich die sehr unterschiedliche Schubcharakteristik.

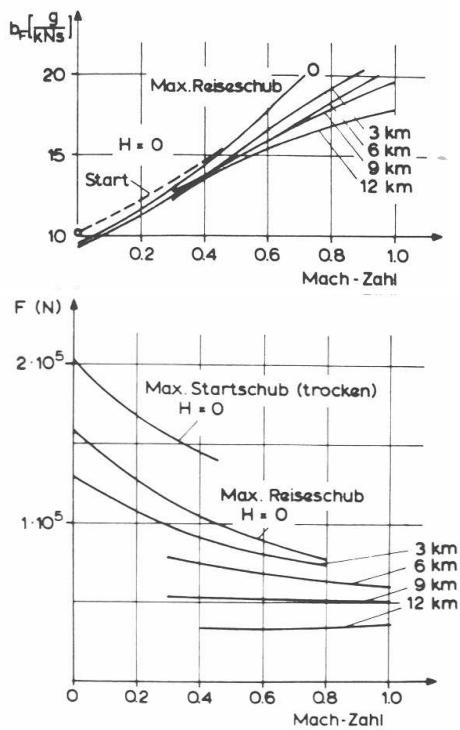


Abbildung 3.26: Schub und spezifischer Verbrauch eines Nebenstromtriebwerks

3.2.3.2 Ermittlung von Schub und Kraftstoffverbrauch

Die für die *Leistungsberechnung* wichtigsten Triebwerksangaben sind der Schub und der spezifische Kraftstoffverbrauch. Sie müssen für den gesamten Höhen- und Machzahlbereich eines geplanten Luftfahrzeugs bekannt sein.

Der Triebwerkshersteller liefert diese Daten entweder unmittelbar oder aber in bezogener Form, grundsätzlich jedoch stets bezogen auf ideale Betriebsbedingungen bezüglich der Verhältnisse am Triebwerkseinlauf und im Bereich der Strahldüse.

Maßgeblich für die Leistungsrechnung sind jedoch der *installierte Schub* und der entsprechende Verbrauch, zu deren Ermittlung sehr sorgfältige rechnerische Betrachtungen und im Allgemeinen umfangreiche Windkanalversuche erforderlich sind. Insbesondere bei Überschallflugzeugen bedeutet die Anpassung des Einlaufs wie auch der Strahldüse an die Flugbedingungen unter Beachtung der Triebwerkseigenschaften einen sehr großen Aufwand. Entsprechend mühsam ist es in solchen Verbrauchswerte zuverlässig zu ermitteln. Da diese Problematik weit über die Themenstellung dieser Vorlesung hinausgeht, sei hier auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen [Muenzberg][Huenecke].

Der Schub ergibt sich bei Vernachlässigung der Erhöhung des Massendurchsatzes durch die Kraftstoffmasse, d.h. für $\dot{m}_a = \dot{m}$ entsprechend Gl. 3.32:

$$F = \dot{m} \cdot (V_a - V) + A_a \cdot (p_a - p) \quad (3.49)$$

wobei Gl. 3.49 bei Zweistromtriebwerken entsprechend zu erweitern ist. Im Allgemeinen sind die Schubwerte auf *ISA-Bedingungen*² bezogen angegeben. Bei hoch gelegenen Startplätzen und hohen Temperaturen am Ort des Startplatzes nimmt der verfügbare Schub empfindlich ab. Dies resultiert im Wesentlichen aus einer Abnahme des Massendurchsatzes infolge der Dichteabnahme.

Wie man aus Gl. 3.49 sieht, nimmt der Schub bei steigender Fluggeschwindigkeit infolge des wachsenden Eintrittimpulses ab. Gleichzeitig erhöht sich infolge der Stauwirkung des eintretenden Luftstroms der Massenstrom \dot{m}_e am Triebwerkseinlass und damit auch der zur Verfügung gestellte Schub F . Beide Effekte ergeben einen bei kleinen Geschwindigkeiten zunächst etwas abfallenden und bei weiter ansteigender Geschwindigkeit einen zunehmenden Schubverlauf. Mit wachsendem Nebenstromverhältnis verlaufen die Schubkurven im unteren Geschwindigkeitsbereich steiler (vgl. auch Bild 3.26 und Bild 3.28).

Bei Geschwindigkeiten im Überschallbereich ist durch zweckmäßige Gestaltung des Einlaufs (Zweistoß- bzw. Mehrstoßdiffusor) dafür zu sorgen, dass der *Druckrückgewinn* so groß wie möglich ist, um den beschriebenen, gerade in diesem Bereich sehr wirksamen, Effekt der Schubsteigerung so gut wie möglich auszunutzen.

Der *Kraftstoffmassenfluß* \dot{m}_B , häufig auch Kraftstoffverbrauch genannt, wird meist auf den

²International Standard Atmosphere, d.h. $H = 0\text{m}$, $T_0 = 288,15\text{ K}$, $p_0 = 1013,25\text{ hPa}$, $\rho_0 = 1,225\text{ kg/m}^3$
 $U = 0\%$

Schub bezogen als *spezifischer Kraftstoffverbrauch* angegeben

$$b = \frac{\dot{m}_B}{F} \quad (3.50)$$

Bei Nebenstromtriebwerken liefert diese Definition nicht mehr geschwindigkeitsunabhängige spezifische Verbräuche, da hier der Schub als Bezugsgröße mit der Geschwindigkeit abnimmt (vgl. Bild 3.26). Zum Vergleich werden deshalb meist auf den Standschub bezogene spezifische Verbräuche angegeben (siehe auch Tabelle 3.3). In diesen Fällen ist die Angabe des unbezogenen Kraftstoffverbrauchs \dot{m}_B vorteilhafter. Eine allgemein verwendbare Definition des *spezifischen Kraftstoffverbrauchs* wird im Unterabschnitt 3.2.5 eingeführt.

3.2.4 Raketenantriebssysteme

Alle Bauarten dieser Antriebsart sind dadurch gekennzeichnet, dass sie ihren für die Verbrennung benötigten Sauerstoff mitführen und damit unabhängig vom Sauerstoff der Atmosphäre sind. Ihr Hauptwendungsbereich liegt damit in der Raumfahrttechnik, während sie in der Flugtechnik vor allem als Antrieb von Flugkörpern eine Rolle spielen.

Allen Systemen dieser Antriebsart ist die Übertragung der thermischen Energie auf das Arbeitsmedium in einer Brennkammer und die Umsetzung der thermischen in kinetische Energie zur Erzielung des Vortriebsschubes in einer konvergent-divergenten Düse gemeinsam. Feststoffraketen, welche nach der Zündung kontinuierlich abbrennen, verwendet man häufig als Starthilfe (Booster) oder zum Antrieb von Flugkörpern, die nur in der Aufstiegsphase einen Antrieb benötigen.

Flüssigkeitsraketen besitzen Pumpensysteme, die Brennstoff und Sauerstoffträger in die Brennkammer fördern. Sie sind damit für den intermittierenden Betrieb geeignet, wie er für ein Antriebssystem für sehr hoch fliegende Flugzeuge (z. B. X 15) oder für die Raumfahrtaufgaben unerlässlich ist. Der Schub ergibt sich zu:

$$F = \dot{m}_a \cdot V_a + A_a \cdot (p_a - p) \quad (3.51)$$

wobei das *Impulsglied* $\dot{m}_a \cdot V_a$ unabhängig von der Flughöhe ist, während das *Druckglied* $A_a \cdot (p_a - p)$ mit wachsender Flughöhe auf den Wert $A_a \cdot p_a$ anwächst. Der Schubzuwachs im Vakuum gegenüber dem Wert am Boden beträgt ca. 25 Prozent. Bei Raketenantrieben ist es üblich, den Verbrauch mit dem *spezifischen Impuls* zu kennzeichnen, der den Schub bezogen auf den Massendurchsatz darstellt. Damit erhält man

$$I = F/\dot{m}_a \quad (3.52)$$

wobei I die Dimension einer Geschwindigkeit hat und nach Gl. 3.52 im Wesentlichen der Strahlgeschwindigkeit entspricht.

Mit Feststoffraketen werden im Vakuum spezifische Impulse von 2000 bis 2400 m/s bei einem Brennkammerdruck von ca. 50 bar und einer Verbrennungstemperatur von ca. 3000 K erreicht.

Bei Flüssigkeitsraketen sind bei der Verwendung von flüssig-Sauerstoff und flüssig-Wasserstoff spezifische Impulse bis über 4000 m/s erzielbar.

3.2.5 Modellierung des Schubes

In Unterabschnitt 3.2.2 bis Unterabschnitt 3.2.4 wurde gezeigt, dass der Schub von den verschiedenen Antriebssystemen in sehr unterschiedlicher Weise von der Fluggeschwindigkeit abhängt oder aber in einigen Fällen auch annähernd als geschwindigkeitsunabhängig angenommen werden kann. Darüber hinaus spielt auch die Veränderung des Schubes infolge einer Änderung der Flughöhe eine wichtige Rolle.

Da es für viele Fälle ausreichend ist, die Geschwindigkeits- und Höhenabhängigkeit des Schubes in begrenzten Bereichen in der Umgebung eines mit *Index i* gekennzeichneten *Auslegungspunktes* zu definieren, bietet sich folgender Schubansatz an

$$\frac{F}{F_i} = \left(\frac{V}{V_i} \right)^{n_V} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} \quad (3.53)$$

Dabei ermöglicht der Exponent n_V die Anpassung der Geschwindigkeitsabhängigkeit und n_ρ die der Höhenabhängigkeit. Der Zusammenhang zwischen Höhe und Dichte ist dabei durch die ISA gegeben.

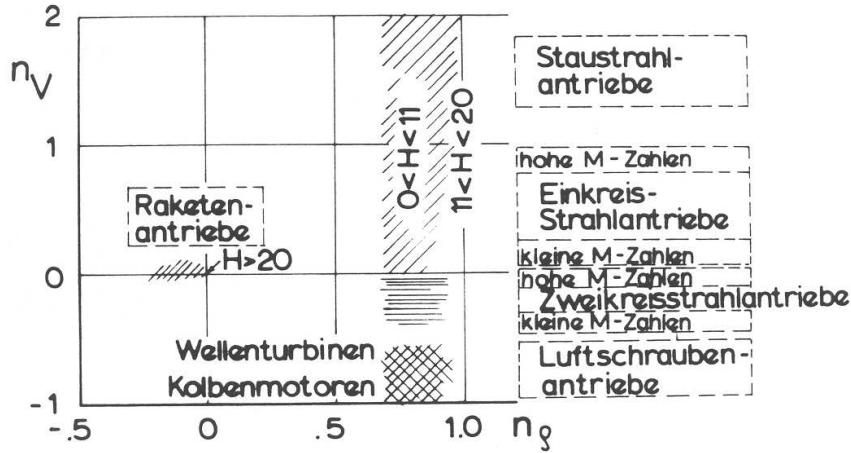
Für analytische Betrachtungen sind ganzzahlige Exponenten in den obigen Ansätzen vorteilhaft. Man erhält damit idealisierte *Triebwerkscharakteristiken*, die bereichsweise dem Verhalten bestimmter Antriebsarten mit ausreichender Genauigkeit entsprechen. So erhält man z. B. für $n_V = -1$ das Verhalten des herkömmlichen *Luftschraubenantriebs*, für $n_V = 0$ des *Einkreisstrahltriebwerks im Langsamflugbereich* und für $n_V = +1$ des *Strahlantriebs im höheren Machzahlbereich* bzw. für $n_V \geq 1$ des *Staustrahltriebwerks*.

Die Schubabhängigkeit von der Luftpumpe liegt in der Troposphäre ($0 < H < 11\text{ km}$) im Bereich von $n_\rho = 0,7$ bis $0,8$ für alle luftatmenden Triebwerke. Besonders einfache Verhältnisse liegen für Strahltrieben in der Stratosphäre $H > 11\text{ km}$, in der man wegen $T = \text{konst}$ für $n_\rho = 1$ erhält, und bei Raketenantrieben, für die sich $n_\rho = 0$ ergibt.

Der Versuch einer Darstellung dieser verschiedenen Abhängigkeiten wurde in Bild 3.27 unternommen, das im $n_V - n_\rho$ Diagramm die Zuordnung der einzelnen Antriebssysteme bezüglich ihrer Abhängigkeiten von Geschwindigkeit und Höhe erfasst.

Schreibt man den Schubansatz nach Gl. 3.53 in folgender Form

$$F = F_i \left(\frac{V}{V_i} \right)^{n_V} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} \quad (3.54)$$

Abbildung 3.27: n_V über n_ρ für verschiedene Triebwerkstypen

so kann der benötigte Schub aus den Daten des bekannten *Bezugspunktes „i“* und der neuen gewünschten Flughöhe und Geschwindigkeit errechnet werden.

$$L = F \cdot V^{-n_V} \quad (3.55)$$

mit der sich dann aus Gl. 3.53 ergibt

$$L = L_i \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} \quad (3.56)$$

Die Leistungsgröße L ist damit geschwindigkeitsunabhängig. Ihre Höhenabhängigkeit kann nach Gl. 3.57 bestimmt werden.

$$L = L_{11} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_{11}} \right)^{n_\rho} \quad (3.57)$$

Als Bezugsgröße wird häufig auch die Höhe $H = 11$ km gewählt. Man erhält damit einen einfachen Zusammenhang ($n_\rho = 1$) für die Höhenabhängigkeit. Je nach Art des Antriebssystems bedeuten die Schubcharakteristiken $n_V = -1, 0$ bzw. $+1$ eine Geschwindigkeitsunabhängigkeit von Vortriebsleistung $F \cdot V$, Schub F sowie bezogen auf die Geschwindigkeit F/V . Der spezifische Verbrauch wird unter Verwendung der in Gl. 3.54 verwendeten Beziehung folgendermaßen definiert

$$b_{n_V} = \frac{\dot{m}_B}{F \cdot V^{-n_V}} \quad (3.58)$$

Für alle Fälle, in denen \dot{m}_B geschwindigkeitsunabhängig ist, erhält man nach der Definition für den spezifischen Verbrauch entsprechend Gl. 3.58 auch eine bezüglich der Geschwindigkeit konstante Größe.

Da der spezifische Verbrauch häufig auch dann auf den Schub bezogen wird, wenn dieser sich mit der Geschwindigkeit ändert, vgl. Bild 3.26, ist es zweckmäßig, ähnlich wie beim Schub

Gl. 3.53 die Geschwindigkeits- und Höhenabhängigkeit des spezifischen Verbrauchs durch folgenden Ansatz darzustellen

$$\frac{b}{b_i} = \left(\frac{V}{V_i} \right)^{n_V} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} \quad (3.59)$$

wobei der *Index i* wie vorher auch einen beliebigen Ausgangszustand kennzeichnet.

Da die Leistung des Triebwerks für die verschiedenen betrachteten Schubcharakteristiken $n_V = -1, 0$ bzw. $+1$ verschiedene Dimensionen annimmt, ist auch der spezifische Verbrauch nach Gl. 3.58 für jede Antriebsart mit verschiedenen Dimensionen behaftet. Dies ist aus der nachfolgenden Zusammenstellung zu ersehen.

Tabelle 3.4: Übersicht zu den Dimensionen des spezifischen Kraftstoffverbrauchs

n_V	-1	0	+1
b_{n_V}	$\frac{\dot{m}_B}{P_{\eta_L}}$	$\frac{\dot{m}_B}{F}$	$\frac{\dot{m}_B}{F/V}$ [-]

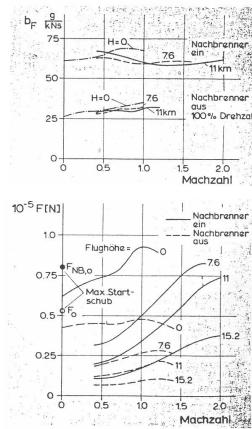


Abbildung 3.28: Schub und spezifischer Verbrauch eines Einkreis-Überschalltriebwerks

3.3 Bewegungsgleichungen (3 FG Modell)

Für die Betrachtungen in der Flugmechanik reicht es häufig aus, das Flugzeug als starren Körper aufzufassen, der sich im Luftraum unter der Einwirkung äußerer Kräfte und Momente frei bewegt. Es besitzt damit sechs Freiheitsgrade, drei translatorische zur Beschreibung der Flugbahn und drei rotatorische, um die Drehdynamik der Starrkörperbewegung abzubilden.

Die in der Flugmechanik I betrachtete *Leistungsberechnung* befasst sich vor allem mit der Untersuchung langzeitiger Bewegungsvorgänge, z.B. der erzielbaren Flugstrecke im Horizontalflug oder der erforderlichen Flugzeit zum Erreichen einer bestimmten Flughöhe im Steigflug. Kurzzeitig verlaufende Vorgänge, wie sie infolge von äußeren Störungen oder durch Steuereingaben des Piloten auftreten, werden erst in der Flugmechanik II betrachtet. Diese Drehbewegungen treten kurzzeitig auf und klingen in der Regel bereits nach wenigen Sekunden ab. Deshalb spielen sie bei langfristigen Leistungsbetrachtungen kaum eine Rolle und können vernachlässigt werden.

Für die Flugmechanik I ist es damit ausreichend und zulässig, das Flugzeug für die Leistungsberechnung als Massenpunkt zu betrachten und die rotatorischen Freiheitsgrade außer acht zu lassen.

3.3.1 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Betrachtet werden die Kräfte am Flugzeug. m stellt die Flugzeugmasse, \mathbf{V} die Fluggeschwindigkeit, $\boldsymbol{\Omega}$ die Drehgeschwindigkeit als Maß für die Bahnkrümmung und $\sum \mathbf{F}$ die Summe aller auf den Massenpunkt wirkenden äußeren Kräfte dar. Als äußere Kräfte werden dabei die Luft-, Gewichts- sowie Triebwerkskräfte angesetzt. Die Summe der äußeren Kräfte \mathbf{F} entspricht der zeitlichen Ableitung des Impulses. In vektorieller Form ergibt dies Gl. 3.60:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \sum \mathbf{F} \quad \text{mit } \mathbf{I} = m \mathbf{V} \quad (3.60)$$

Die Ableitung des Impulses ergibt sich zu Gl. 3.61. Diese besteht jeweils aus der zeitlichen Änderung der Masse und der Geschwindigkeit:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = m \dot{\mathbf{V}} + \dot{m} \mathbf{V} \quad (3.61)$$

Der Term $\dot{m} \mathbf{V}$ welcher die Massenänderung berücksichtigt ist kann bei der Betrachtung von kurzen Flugzuständen und allgemein bei antriebslosen Segelflugzeugen vernachlässigt werden. Dies ist bei der Betrachtung von längeren Flugabschnitten, vor allem wegen des Treibstoffverbrauchs, nicht mehr möglich.

Bei der Ableitung der Geschwindigkeit ist zu beachten, dass diese bezüglich des inertialen (raumfesten) Systems erfolgt, während die Geschwindigkeit \mathbf{V} im aerodynamischen System (einem bewegten System) gegeben ist. Der Term $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ in Gl. 3.62 gibt damit die Beschleunigung

wieder, welche ein Körper erfahren würde, wenn sich die Systeme zueinander nicht bewegen bzw. verdrehen würden. Durch die Relativbewegung der beiden Systeme zueinander, entsteht allerdings eine zusätzliche Beschleunigung (*Coriolisbeschleunigung*), diese wird durch den Euler-Term $\Omega \times \mathbf{V}$ beschrieben.

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} \quad (3.62)$$

Dem besseren Verständnis soll folgendes Beispiel dienen: Der Vektor \mathbf{V} ist im Inertialsystem „i“ gegeben und wird im System „n“ abgeleitet. \mathbf{T} stellt dabei jeweils die Transformationsvorschrift von einem ins andere System dar (entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 2.4)

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \right)_n = \mathbf{T}_{ni} \frac{d(\mathbf{T}_{in} \mathbf{V}_n)}{dt} = \mathbf{T}_{ni} \left(\mathbf{T}_{in} \left(\frac{d\mathbf{V}_n}{dt} \right)_n + \frac{d\mathbf{T}_{in}}{dt} \mathbf{V}_n \right) \quad (3.63)$$

Multipliziert man aus, entsteht Gl. 3.64

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \right)_n = \left(\frac{d\mathbf{V}_n}{dt} \right)_n + \mathbf{T}_{ni} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{in} \cdot \mathbf{V}_n \quad (3.64)$$

Mit $\left(\frac{d\mathbf{V}_n}{dt} \right)_n = \dot{\mathbf{V}} \Big|_{\boldsymbol{\Omega} = 0} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ und $\mathbf{T}_{ni} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{in} \cdot \mathbf{V}_n = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_n$ erhält man die Gl. 3.65:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \right)_n = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_n \quad (3.65)$$

Werden die oberen Betrachtungen zusammen gefasst, ergibt sich der Impulserhaltungssatz der Mechanik (2. Newtonsches Gesetz). Dieser lautet in vektorieller Schreibweise:

$$(m \dot{\mathbf{V}}) = \dot{m} \mathbf{V} + m (\dot{\mathbf{V}}|_{\boldsymbol{\Omega}=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}) = \sum \mathbf{F} \quad (3.66)$$

Die einfachste Gestalt hat die Bewegungsgleichung im aerodynamischen Koordinatensystem. Hierbei ergeben sich folgende Vorteile: Der Fluggeschwindigkeitsvektor zeigt in Richtung der x_a -Achse. Er muss nicht durch eine Transformation in ein anderes Koordinatensystem überführt werden. Für die Luftkräfte ergeben sich einfache Zusammenhänge. Die Gewichtskraft besitzt nur eine Komponente und kann leicht transformiert werden. Bei den Antriebskräften können Vereinfachungen angenommen werden, so dass in Gl. 3.76 einige Anteile vernachlässigt werden können. Ein Nachteil ergibt sich daraus, dass das aerodynamische System kein Inertialsystem ist, sondern ein bewegtes Koordinatensystem. Aus diesem Grund entsteht beim Ableiten der Geschwindigkeit, wie bereits in Gl. 3.62 gezeigt, eine zusätzliche Kraftkomponente aus der Coriolisbeschleunigung.

Im folgenden setzen wir nun die benötigten Komponenten zusammen und erhalten dann die Bewegungsgleichungen. Mit dem Fluggeschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

und dem Drehgeschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_a \quad (3.68)$$

erhält man

$$\dot{\mathbf{V}}|_{\Omega=0} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.69)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_a \\ -q_a \end{bmatrix} \cdot V \quad (3.70)$$

Dazu kann der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \mu_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x_a} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_a \\ 0 \end{bmatrix}_{k2a} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_a \end{bmatrix}_{z_g} \quad (3.71)$$

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass kein Wind die Anströmung verändert. Mit dieser Annahme fallen das bahnfeste und aerodynamische Koordinatensystem zusammen. Daraus folgt:

Flugwindazimut (χ_a) $\hat{=} \text{Bahnazimut}$ (χ)

Flugwindneigungswinkel (γ_a) $\hat{=} \text{Bahnneigungswinkel}$ (γ)

Flugwindhängewinkel (μ_a) $\hat{=} \text{Bahnhängewinkel}$ (μ)

Angelehnt an die Transformationsvorschrift vom geodätischen ins aerodynamische Koordinatensystem in Gl. 2.48 und der getroffenen Annahme ergibt sich auch für die Drehgeschwindigkeiten um die jeweilige Achse der Vektor $\boldsymbol{\Omega}$:

Tabelle 3.5: Transformationsvorschrift geodätisch zu aerodynamisch

	x_g	y_g	z_g
x_a	$\cos\gamma \cos\chi$	$+\cos\gamma \sin\chi$	$-\sin\gamma$
y_a	$\sin\mu \sin\gamma \cos\chi - \cos\mu \sin\chi$	$\sin\mu \sin\gamma \sin\chi + \cos\mu \cos\chi$	$\sin\mu \cos\gamma$
z_a	$\cos\mu \sin\gamma \cos\chi + \sin\mu \sin\chi$	$\cos\mu \sin\gamma \sin\chi - \sin\mu \cos\chi$	$\cos\mu \cos\gamma$

Ω hat damit die Form:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\mu} - \dot{\chi} \sin \gamma \\ \dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \sin \mu \cos \gamma \\ -\dot{\gamma} \sin \mu + \dot{\chi} \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix}_a \quad (3.72)$$

Die Bewegungsgleichung im aerodynamischen System ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} m\dot{V} + \dot{m}V \\ mV(-\dot{\gamma} \sin \mu + \dot{\chi} \cos \mu \cos \gamma) \\ -mV(\dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \sin \mu \cos \gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum F_x \\ \sum F_y \\ \sum F_z \end{bmatrix}_a = \sum \mathbf{F}_a \quad (3.73)$$

Die Komponenten der äußeren Kräfte sind häufig in unterschiedlichen Systemen gegeben, so dass auch für diese entsprechende Transformationen durchzuführen sind.

3.3.1.1 Aerodynamische Kräfte

$$\begin{bmatrix} F_{x_{Ae}} \\ F_{y_{Ae}} \\ F_{z_{Ae}} \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W \\ Q \\ -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_W S \frac{\rho}{2} V^2 \\ C_Q S \frac{\rho}{2} V^2 \\ -C_A S \frac{\rho}{2} V^2 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

3.3.1.2 Antriebskräfte

Unter *Antriebskräften* werden hier alle durch das Antriebssystem verursachten Kräfte betrachtet, also Schubkräfte in Richtung der *Triebwerksachse* und Normalkräfte infolge Strahlumlenkung.

Der Schub eines Triebwerkes wird stets bei axialer Anströmung der Triebwerke ($\alpha_0 + \sigma = 0$, $\beta = 0$) unter Annahme einer vollständigen Expansion definiert:

$$F_{Tr}|_{\alpha_{eff}+\sigma=0, \beta=0} = F = \dot{\mathbf{J}}_a - \dot{\mathbf{J}} \quad (3.75)$$

wobei \mathbf{J}_a der Austrittsimpuls und $\mathbf{J} = m \cdot \mathbf{V}$ der Eintrittsimpuls bedeuten. Bei Berücksichtigung eines Anstell- und Schiebewinkels α_{eff} und β sowie eines Schubeinstellwinkels σ (vgl. Bild 3.29) liefert der Impulssatz für die Antriebskräfte unter Verwendung der Definition für \mathbf{F}

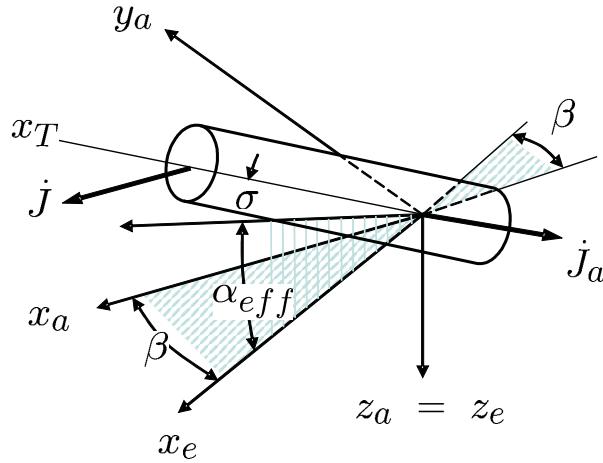


Abbildung 3.29: Anstell-, Schiebe- und Schubeinstellwinkel

nach Gl. 3.75

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{x_{Tr}} \\ F_{y_{Tr}} \\ F_{z_{Tr}} \end{bmatrix}_a &= \begin{bmatrix} -\dot{j} + \dot{j}_a \cos \beta \cdot \cos (\alpha_{eff} + \sigma) \\ -\dot{j}_a \cos (\alpha_{eff} + \sigma) \sin \beta \\ -\dot{j}_a \sin (\alpha_{eff} + \sigma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F \cos \beta \cos (\alpha_{eff} + \sigma) - \dot{j} (1 - \cos (\alpha_{eff} + \sigma) \cos \beta) \\ -(F + \dot{j}) \cos (\alpha_{eff} + \sigma) \sin \beta \\ -(F + \dot{j}) \sin (\alpha_{eff} + \sigma) \end{bmatrix} \quad (3.76) \end{aligned}$$

3.3.1.3 Gewichtskräfte

Die Kraftkomponenten der Gewichtskräfte ergeben sich unmittelbar aus der Transformationsmatrix in Gl. 2.48 zu

$$\begin{bmatrix} F_{x_G} \\ F_{y_G} \\ F_{z_G} \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} -mg \sin \gamma \\ mg \sin \mu \cos \gamma \\ mg \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Mit den einzelnen Kraftkomponenten nach Gl. 3.74, Gl. 3.76 und Gl. 3.77 ist auch die rechte Seite des Differenzialgleichungssystems Gl. 3.73 bekannt.

3.3.1.4 Kinematische Zusammenhänge

Das Flugzeug bewege sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{V} gegenüber dem erdfesten System (Siehe Bild 3.30). Zur Berechnung der Bahnkoordinaten ist zu beachten, dass die Fluggeschwindig-

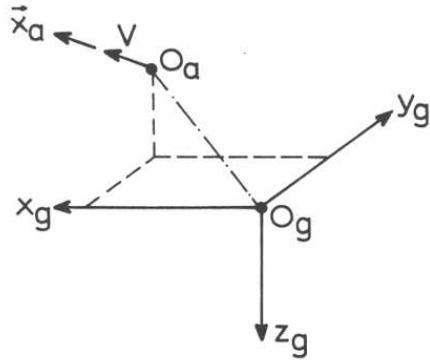


Abbildung 3.30: Orientierung der Flugbahn im erdfesten System

keit \mathbf{V} gleich der zeitlichen Ableitung des Ortsvektors $\overrightarrow{O_g O_a}$ ist. Somit gilt

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_g \quad (3.78)$$

und ferner unter Verwendung der Transformationstabelle in Gl. 2.48

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}_a = V \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \chi \\ \cos \gamma \sin \chi \\ -\sin \gamma \end{bmatrix}_g \quad (3.79)$$

Durch Gleichsetzen der letzten zwei Gleichungen erhält man für die Bahnkoordinaten folgendes Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \gamma \cos \chi \\ \dot{y} &= V \cos \gamma \sin \chi \\ \dot{z} &= V \sin \gamma \end{aligned} \quad (3.80)$$

Mit dem beschriebenen System von insgesamt sechs Differentialgleichungen 1. Ordnung kann die allgemeine Bewegung des als Massenpunkt betrachteten Flugzeuges nunmehr berechnet werden.

Unter Voraussetzung einer konstanten Masse sowie unter der meist zulässigen Annahme, dass der Winkel β zu null gesetzt werden kann, erhält man aus den allgemeingültigen Beziehungen

(Gl. 3.73 bis Gl. 3.77) folgendes Gleichungssystem zur Beschreibung eines Fluges mit beliebig gekrümmter Bahn

$$\begin{aligned}
 m \dot{V} &= -W + F \cos(\alpha_{eff} + \sigma) \dots \\
 &\dots - J [1 - \cos(\alpha_{eff} + \sigma)] - mg \sin \gamma \\
 mV(-\dot{\gamma} \sin \mu + \dot{\chi} \cos \mu \cos \gamma) &= mg \sin \mu \cos \gamma \quad (3.81) \\
 -mV(\dot{\gamma} \cos \mu + \dot{\chi} \sin \mu \cos \gamma) &= -A - (F + J) \sin(\alpha_{eff} + \sigma) + mg \cos \mu \cos \gamma
 \end{aligned}$$

Die Annahme einer unveränderten Masse bedeutet, dass die Beschleunigung infolge Massenabnahme durch den Kraftstoffverbrauch vernachlässigt wird. Dies ist für Flugzeuge meist zulässig, wenn man bedenkt, dass z.B. bei Verkehrsflugzeugen mit Strahltrieb $(\frac{\dot{m}}{m}) \cdot V < 10^{-4} g$ gilt.

Für viele Anwendungen und Betrachtungen ist es möglich sich auch auf ebene Flugbahnen zu beschränken und damit eine erhebliche Vereinfachung des Gleichungssystems zu erreichen. Von besonderer Bedeutung sind der Flug in der vertikalen Ebene (symmetrische Flugbahn) und in der horizontalen Ebene (horizontaler Kurvenflug).

3.3.2 Symmetrischer Flug (Flug in vertikaler Ebene)

Mit Ausnahme einiger weniger Flugzustände können fast alle Flugleistungsaufgaben unter der Voraussetzung behandelt werden, dass die Flugbahn in einer vertikalen Ebene verläuft und der Geschwindigkeitsvektor stets in der Flugzeugsymmetrieebene liegt. Auf Grund dieser Voraussetzungen folgt

$$\dot{\chi} = \dot{\mu} = \dot{\nu} = 0 \quad (3.82)$$

Das Koordinatensystem kann jetzt so gewählt werden, dass auch $\chi = 0$ gilt. Gl. 3.81 vereinfacht sich damit zu

$$\begin{aligned} m \dot{V} + W - F \cos(\alpha_{eff} + \sigma) + J [1 - \cos(\alpha_{eff} + \sigma)] + mg \sin \gamma &= 0 \\ -mV \dot{\gamma} + A + (F + J) \sin(\alpha_{eff} + \sigma) - mg \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Die in diesen Gleichungen enthaltenen Impulsglieder können insbesondere bei Flugfällen mit größeren Triebwerkseinstellwinkeln wie sie z.B. bei Senkrechtstart- oder Kurzstart-Flugzeugen verwendet werden, von Bedeutung sein. Für Leistungsuntersuchungen konventioneller Flugzeuge sind sie im allgemeinen vernachlässigbar. Die vereinfachten Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} m \dot{V} + W - F \cos(\alpha_{eff} + \sigma) + mg \sin \gamma &= 0 \\ -mV \dot{\gamma} + A + F \sin(\alpha_{eff} + \sigma) - mg \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Die beiden Gleichungen werden zukünftig als *Widerstandsgleichung* bzw. als *Auftriebsgleichung* bezeichnet. Der Zusammenhang wird anhand von Bild 3.31 deutlich. Es zeigt eine einfache Darstellung der Flugbewegung in der x - z -Ebene. Zur Beschreibung der Flugbahn

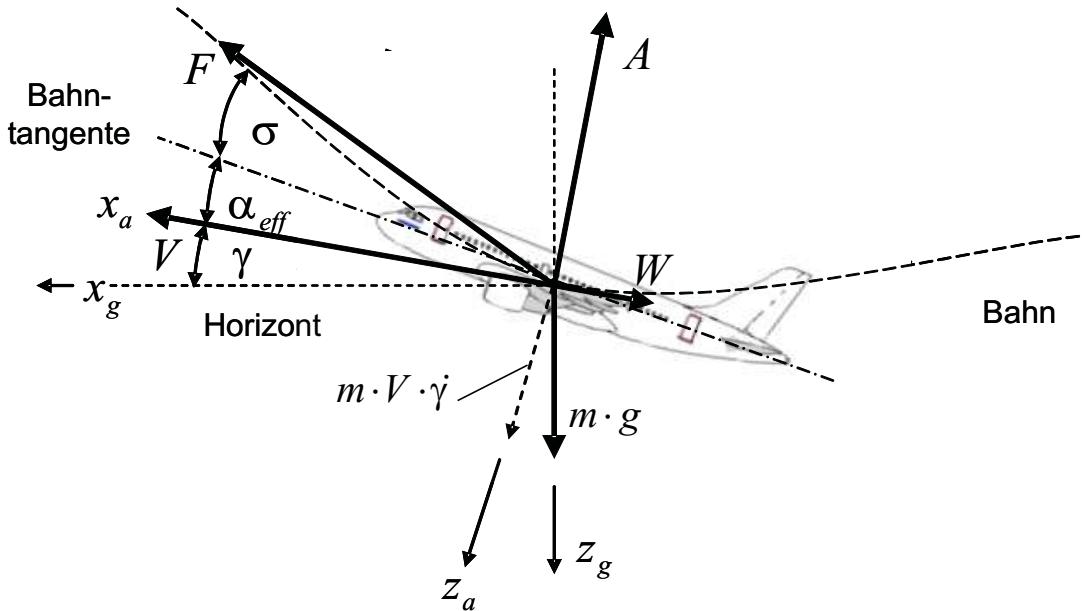


Abbildung 3.31: Darstellung der Kräfte am Flugzeug in der x - z -Ebene

kommen die kinematischen Beziehungen hinzu, welche sich aus Gl. 3.80 zu den folgenden zwei Gleichungen reduzieren

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \gamma & = u \\ \dot{z} &= -V \sin \gamma & = w\end{aligned}\quad (3.85)$$

Statt der Größe z kann auch die geodätische Höhe H eingeführt werden und man erhält wegen $H = -z$

$$\dot{H} = V \sin \gamma = -V_z \quad (3.86)$$

Beim Auswertung der Beziehungen aus Gl. 3.84 ist zu berücksichtigen, dass die Kräfte A , W und F von der Geschwindigkeit bzw. von der Machzahl Ma und im Zusammenhang mit der Luftdichte von der Höhe H abhängen. Weiterhin beeinflussen Anstell- und Schiebewinkel die Luftkräfte A und W , wie in Abschnitt 3.1 beschrieben. Die Größe der Schubkraft ist eine Funktion des Drosselgrades D , der vom Piloten über den Gas- bzw. Schubhebel beeinflusst werden kann. Es gelte

$$F = D \cdot F_{max} \quad (3.87)$$

Vor allem bei langzeitigen Missionen darf das Gewicht nicht mehr als konstant angenommen werden, sondern es verringert sich infolge des Kraftstoffverbrauchs mit der Flugzeit. Das aus dieser Tatsache resultierende Beschleunigungsglied (Gl. 3.66) kann jedoch bei konventionellen Antriebssystemen vernachlässigt werden.

Damit kann man die Grundgleichungen der symmetrischen Flugbahn folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}m(t) \dot{V} + W(H, V, \alpha) - DF_{max}(H, V) \cos(\alpha_0 + \sigma) + m(t) g \sin \gamma &= 0 \\ -m(t) V \dot{\gamma} + A(H, V, \alpha) + DF_{max}(H, V) \sin(\alpha_0 + \sigma) - m(t) g \cos \gamma &= 0 \\ \dot{H} - V \sin \gamma &= 0\end{aligned}\quad (3.88)$$

Hinzu kommt eine Beziehung, die den Zusammenhang zwischen der Massenabnahme und dem Kraftstoffverbrauch des Antriebssystems herstellt:

$$m(t) = m_{To} - \dot{m}_B \cdot t \quad (3.89)$$

wobei m_{To} das Abflugewicht, \dot{m}_B den sekündlichen Kraftstoffverbrauch und t die Flugzeit darstellen. Die 2. kinematische Beziehung (Gl. 3.85)

$$V \cos \gamma = \dot{x} \quad (3.90)$$

kann unabhängig von dem obigen System der drei Grundgleichungen gelöst werden (Siehe Gl. 3.88). In die Differentialgleichungen gehen die Zeit t als unabhängige und die Größen m , H , V , γ , als abhängige bzw. *Zustandsvariablen* ein. Darüber hinaus sind die Größen α , β , σ und D ebenfalls von der Zeit abhängig. Sie verändern sich mit den Steuereingaben des Piloten. Man bezeichnet sie daher auch als *Steuervariablen*.

3.3.3 Horizontaler Kurvenflug (Flug in horizontaler Ebene)

Für den speziellen Fall eines unbeschleunigten horizontalen Kurvenfluges vereinfacht sich (Gl. 3.81) wegen $\gamma = \dot{\gamma} = 0$ und $\dot{V} = 0$ und $\alpha_{eff} + \sigma = 0$ zu

$$W - F = 0$$

$$mV \dot{\chi} \cos \mu - mg \sin \mu = 0 \quad (3.91)$$

$$mV \dot{\chi} \sin \mu - A + mg \cos \mu = 0 \quad (3.92)$$

4 Bewegungen in der Flugzeugsymmetrieebene

Die Grundgleichungen in Abschnitt 3.3 beschreiben in allgemeiner Form die Flugbahn eines Luftfahrzeuges in einer vertikalen Ebene unter Einwirkung von aerodynamischen Kräften sowie Antriebs- und Gewichtskräften. Sind diese Kräfte nicht ausgeglichen, so treten Beschleunigungen auf, Größe und/oder Richtung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{V} ändern sich. Zur Bestimmung der Flugbahn in konkreten Fällen müssen die Grundgleichungen - ein System von Differentialgleichungen - integriert werden. Diese Aufgabe ist analytisch nur in Sonderfällen lösbar, da einige der in den Grundgleichungen enthaltenen Größen höchst nichtlinear von den Zustandsgrößen V , γ und H abhängen und unter Umständen sogar nur in der Form von Kurven und/oder Tabellen bekannt sind.

Mit einer gängigen Software lassen sich numerische Lösungen gewinnen. Sie liefern jedoch keinen Einblick in die Struktur eines Problems, d. h. keine allgemeingültigen Aussagen über den Einfluss der flugzeugabhängigen Größen, seiner Aerodynamik und des augenblicklichen Flugzustands auf den weiteren Verlauf der Flugbahn.

Um solche Betrachtungen durchführen zu können ist es nötig die Grundgleichungen so weit zu vereinfachen, dass sie analytisch lösbar werden. Der Sachverhalt muss dabei auf physikalisch sinnvolle Problemstellungen reduziert werden.

Eine für die theoretische Behandlung besonders wirkungsvolle Vereinfachung besteht in der Annahme eines Gleichgewichtszustandes, bei dem sich die äußeren Kräfte gegenseitig ausgleichen. Dann entfallen die Trägheitskräfte und aus den Differentialgleichungen werden analytisch zu lösende Gleichungssysteme. Die zugehörigen Flugzustände nennt man *stationär*.

4.1 Gleitflug

Der Sonderfall des *antriebslosen Sinkfluges* wird als *Gleitflug* bezeichnet. Auf den umgebenden Luftraum bezogen ist ein Gleitflug nur mit einer gegenüber der Horizontalebene nach abwärts geneigten Flugbahn möglich, wobei die durch den Höhenverlust frei werdende potentielle Energie die Widerstandsarbeit ausgleicht. Wegen des Wegfalls der Antriebskräfte mit ihrer meist komplizierten Abhängigkeit von Fluggeschwindigkeit und Flughöhe (Siehe Abschnitt 3.2), kann man besonders einfache und übersichtliche formelmäßige Zusammenhänge

erwarten.

Beim Betrieb kommerzieller und militärischer Flugzeuge kommt der antriebslose Flug nicht vor. Sinkflüge werden stets mit gedrosselten, aber nicht mit abgeschalteten Triebwerken ausgeführt. Stationäre Sinkflüge mit geringer Bahnneigung, d.h. geringer Änderung der Flughöhe, können näherungsweise als Gleitflug aufgefasst werden, wenn man einen effektiven Widerstand $W_{eff} = W - F$ definiert.

Für Segelflugzeuge dagegen ist der Gleitflug die wesentliche Mission. Für ihre aerodynamische und geometrische Auslegung sind deshalb die Gesetzmäßigkeiten des Gleitflugs von großer Bedeutung. Die speziellen Probleme des Segelflugs, die mit unterschiedlicher Ausnutzung der in *Aufwindfeldern* vorhandenen Energien für einen Steigflug zusammenhängen, werden in dieser Vorlesung nur in Ansätzen behandelt. Am Beispiel des Gleitfluges lassen sich einige wichtige Zusammenhänge und Begriffsbildungen leicht erläutern. Auch bei der Betrachtung des Steigflugs spielen die aus den *Gleitflugbedingungen* abgeleiteten Größen eine Rolle. [Thomas]

Die Grundgleichungen des Gleitflugs erhält man aus Gl. 3.84 mit $\dot{V} = \dot{\gamma} = D = 0$ sowie mit $m(t) = m = \text{konstant}$

$$W + m \cdot g \cdot \sin \gamma = 0 \quad (4.1)$$

$$A - m \cdot g \cdot \cos \gamma = 0 \quad (4.2)$$

Bild 4.1 veranschaulicht dies:

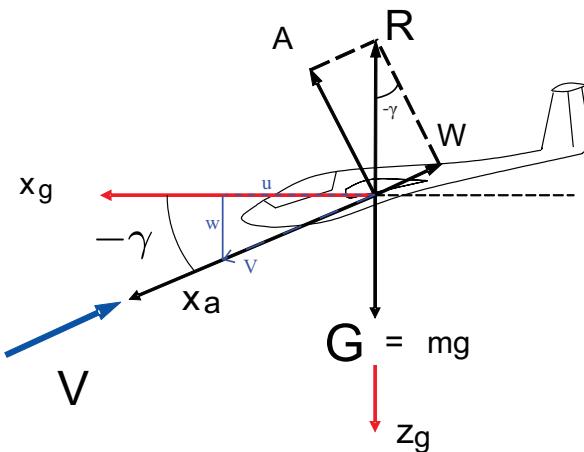


Abbildung 4.1: Die Kräfte am Flugzeug beim Gleitflug

4.1.1 Gleitzahl ε

Aus den Grundgleichungen des Gleitflugs folgt unmittelbar $\tan \gamma = -W/A$. Verwendet man die in Abschnitt 3.1 eingeführten Beiwerte, so erhält man:

$$\tan \gamma = -\frac{C_W}{C_A} = -\varepsilon. \quad (4.3)$$

Auf Grund dieses flugmechanischen Zusammenhangs wurde für die in Unterabschnitt 3.1.5 eingeführte aerodynamische Größe $\varepsilon = C_W/C_A$ die Bezeichnung *Gleitzahl* gewählt. Für die praktische Anwendung ist es wichtig festzustellen, dass der Gleitwinkel des antriebslosen Flugzeugs ausschließlich von den aerodynamischen Daten abhängt, also z. B. auch unabhängig vom Gewicht des Flugzeugs ist. Der Bahnneigungswinkel γ lässt sich anschaulich im Polardiagramm $C_A = F(C_W)$, Bild 4.2, darstellen. Da für konventionelle Fluggeräte $|\gamma|$ bzw. ε stets sehr klein sind, kann man mit guter Genauigkeit $\gamma = -\varepsilon$ setzen. Die Gleitzahl ist eine zur Beschreibung der Flugleistungen häufig verwendete Größe. Eine anschauliche Deutung der Gleitzahl liefert Unterabschnitt 4.1.6, hier wird die *Geschwindigkeitspolare* behandelt. Ihr Kehrwert gibt an, welche Strecke ein Flugzeug in Metern zurücklegt, wenn es um einen Meter sinkt.

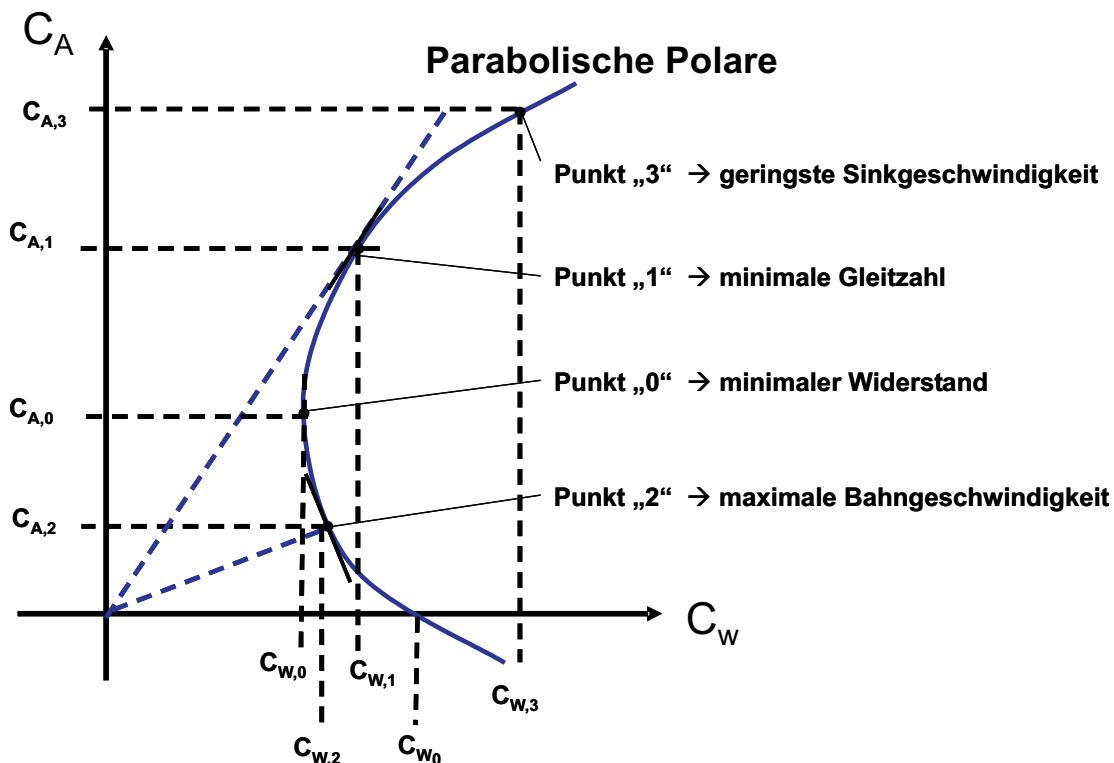


Abbildung 4.2: Ausgezeichnete Punkte auf der Flugzeugpolaren

4.1.2 Geschwindigkeiten

Ersetzt man in den Gleichungen 4.1 und 4.2 Widerstand und Auftrieb durch die Gl. 3.10 und 3.4, so erhält man nach Elimination von γ

$$\sqrt{C_A^2 + C_W^2} = \frac{m g}{S \bar{q}}. \quad (4.4)$$

Auch diese Beziehung ist anschaulich im Polarendiagramm, Bild 4.2, darstellbar. Wie man sieht, ist der Abstand eines beliebigen Polarenpunktes vom Ursprung der Flächenbelastung mg/S direkt und dem Staudruck umgekehrt proportional. Mit $\bar{q} = (\rho/2) \cdot V^2$ folgt aus Gl. 4.4 für das Quadrat der Bahngeschwindigkeit

$$V^2 = \frac{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S}}{\sqrt{C_A^2 + C_W^2}} \quad (4.5)$$

Der besseren Übersichtlichkeit wegen empfiehlt es sich, mit bekannten Größen zu arbeiten. In Unterabschnitt 3.1.5 wurde bereits der Auftriebsbeiwert $C_{A,1}$ verwendet, der dem Polarenwert mit der minimalen Gleitzahl zugeordnet ist. Eine weitere ausgezeichnete Größe ist die Bezugsgeschwindigkeit V^* . Hiermit ist die Bahngeschwindigkeit gemeint, die sich im statio-nären horizontalen Geradeausflug mit dem Auftriebsbeiwert $C_{A,1}$ einstellen würde. Sie beträgt:

$$V^{*2} = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S} \cdot \frac{1}{C_{A,1}} \quad (4.6)$$

Statt der naheliegenden Beziehung V_1 wird die Bezugsgeschwindigkeit hier V^* genannt, um in den nachfolgenden Abschnitten Verwechslungen zu vermeiden. Es ist zu beachten, dass die so definierte Bezugsgeschwindigkeit V^* proportional $\sqrt{m g/S}$ und $1/\sqrt{\rho}$ ist.

Von besonderer Bedeutung für den Gleitflug sind die Komponenten der Bahngeschwindigkeit, welche in Gl. 3.85 bereits als kinematische Beziehungen eingeführt wurden. Für ihre Berech-nung benötigt man die Sinus- und Cosinus-Funktion des Bahnneigungswinkels, die man aus Gl. 4.3 erhält:

$$\sin \gamma = -\frac{C_W}{\sqrt{C_A^2 + C_W^2}} \quad (4.7)$$

$$\cos \gamma = \frac{C_A}{\sqrt{C_A^2 + C_W^2}} \quad (4.8)$$

Für die horizontale Komponente u bzw. die vertikale Komponente w des Geschwindigkeitsvektors erhält man damit folgendes:

$$u = V \cos \gamma = \frac{\sqrt{\frac{2mg}{\rho \cdot S}}}{\sqrt[4]{C_A^2 + C_W^2}} \cos \gamma \quad (4.9)$$

$$w = -V \sin \gamma = -\frac{\sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}}{\sqrt[4]{C_A^2 + C_W^2}} \sin \gamma \quad (4.10)$$

Diese Beziehungen sind zunächst noch unabhängig von der Form der Polaren. Erst nach der Festlegung eines bestimmten Flugzeugs und damit seiner $C_A - C_W$ -Polare $C_W = f(C_A)$, siehe hierzu Unterabschnitt 3.1.4, werden sie eindeutige Funktionen des jeweiligen Flugzustandes beschreibenden C_A -Wertes.

4.1.3 Minimale Gleitzahl ε_{min} (Punkt „1“)

Die Gleitzahl nimmt einen Minimalwert an, wenn die Bedingung $d\varepsilon/dC_A = 0$ erfüllt ist. Beim Gleitflug mit ε_{min} wird die zurückgelegte Strecke unter Voraussetzung unbewegter Luft maximal.

In Unterabschnitt 3.1.5 wurde der entsprechende Punkt der Polare mit „1“ gekennzeichnet und zugleich seine geometrische Deutung im Polarendiagramm angegeben, Bild 4.2. Die entsprechenden Beiwerte $C_{A,1}$ und $C_{W,1}$ sind Tabelle 3.2 zu entnehmen. Die Beiwerte lauten:

$C_{A,1} =$	$C_{W,1} =$
$\sqrt{\frac{C_{W_0}}{k}}$	$2 C_{W_0} \left(1 - \frac{C_{A,0}}{C_{A,1}}\right)$

Tabelle 4.1: Bezogenen aerodynamische Beiwerte für Punkt „1“

Damit erhält man für die in Unterabschnitt 4.1.2 abgeleiteten bezogenen Geschwindigkeiten im Punkt „1“ für die symmetrische Polare:

$V_1 =$	$u_1 =$	$w_1 =$
$\sqrt[4]{\frac{V^*}{1+\varepsilon_{min}^2}}$	$\sqrt[4]{\frac{V^*}{(1+\varepsilon_{min}^2)^3}}$	$\sqrt[4]{\frac{V^* \cdot \varepsilon_{min}}{(1+\varepsilon_{min}^2)^3}}$

Tabelle 4.2: Abgeleitete Geschwindigkeiten in Punkt „1“ für symm. Polare

Da für konventionelle Flugzeuge ε_{min} stets eine kleine Größe ist, kann mit guter Genauigkeit $V_1 \approx u_1$ und $w_1 \approx V_1 \varepsilon_{min}$ gesetzt werden.

4.1.4 Maximale Bahngeschwindigkeit (Punkt „2“)

Die Bedingung für maximale Bahngeschwindigkeit lautet $dV/dC_A = 0$. Es folgt als Bestimmungsgleichung für den Auftriebsbeiwert $C_{A,2}$,

$$\left. \frac{dC_W}{dC_A} \right|_2 = - \frac{C_{A,2}}{C_{W,2}} \quad (4.11)$$

dem die maximale Geschwindigkeit $V_{max} = V_2$ entspricht. Gl. 4.11 sagt aus, dass im Punkt „2“ die Verbindungsgerade mit dem Ursprung senkrecht auf der örtlichen Tangente an die Polare stehen muss, siehe Bild 4.2. Wie sich aus der Polare in dieser Abbildung erkennen lässt, ist $\frac{C_{A,2}}{C_{A,1}}$ stets sehr klein. Damit folgt näherungsweise aus Tabelle 3.2

$$\left. \frac{dC_W}{dC_A} \right|_2 \approx \left. \frac{dC_W}{dC_A} \right|_{C_A=0} = -2k C_{A,0} \quad (4.12)$$

sowie $C_{W,2} \approx C_{W_0}$. Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in Gl. 4.11) folgt daraus:

$C_{A,2} \approx$	$C_{W,2} \approx$	$\varepsilon_2 \approx$
$2k C_{W_0} C_{A,0}$	C_{W_0}	$\frac{1}{2kC_{A,0}}$

Tabelle 4.3: Beiwerte und Gleitzahl an Punkt „2“

Im Falle einer symmetrischen Polare wird die Maximalgeschwindigkeit wegen $C_{A,0} = 0$ im senkrechten Sturzflug ($\tan\gamma_2 = -\infty, \gamma_2 = -90^\circ$) erreicht; bei einer parabolischen Polare ergeben sich etwas kleinere Bahnwinkel. Mit den Daten der Polare in Bild 3.15 beträgt z. B. $\gamma_2 = -88,7^\circ$. Für die Sturzfluggeschwindigkeit und ihre Komponenten erhält man näherungsweise

$V_2 \approx$	$u_2 \approx$	$w_2 \approx$
$\frac{V^*}{\sqrt[4]{k \cdot C_{W_0}}}$	$\frac{2V^* \cdot C_{A,0} \cdot k}{\sqrt[4]{k \cdot C_{W_0}}}$	$\frac{V^*}{\sqrt[4]{k \cdot C_{W_0}}}$

Tabelle 4.4: Geschwindigkeiten am Punkt „2“

4.1.5 Minimale Sinkgeschwindigkeit (Punkt „3“)

Während der minimale Bahnwinkel unter der Annahme unbewegter Luft einen Gleitflug mit größter Flugstrecke darstellt, Unterabschnitt 4.1.1, wird beim Gleitflug mit minimaler Sink-

geschwindigkeit die Flugdauer maximal. Aus $dw/dC_A = 0$ liefert Gl. 4.10 nach kurzer Zwischenrechnung

$$\left. \frac{dw}{dC_A} \right|_3 = \frac{3C_{A,3}C_{W,3}}{2C_{A,3}^2 - C_{W,3}^2} \quad (4.13)$$

Wie bereits in Bild 4.2 angedeutet, unterscheidet sich der Polarenpunkt für minimale Sinkgeschwindigkeit ③ deutlich von den übrigen ausgezeichneten Punkten der Polare. Er liegt bei wesentlich größeren C_A -Werten. Gl. 4.13 liefert bei Annahme einer parabolischen Polare eine Bestimmungsgleichung 5. Grades für $C_{A,3}$, die nur numerisch ausgewertet werden kann. Nimmt man an, dass für alle hier betrachteten Fälle $\varepsilon^2 \ll 1$, d.h. $C_{W,3}^2 \ll C_{A,3}^2$ und mit Tabelle 3.2 die übrigen Größen im Punkt ③

$$\left. \frac{dC_W}{dC_A} \right|_3 \approx \frac{3C_{W,3}}{2C_{A,3}} \quad (4.14)$$

Hieraus erhält man mit $C_{W,3} = f(C_{A,3})$ aus Teil a von Tabelle 3.2 den Auftriebsbeiwert $C_{A,3}$ und mit Teil a und c aus Tabelle 3.2 die übrigen Größen im Punkt „3“:

$C_{A,3} =$	$\sqrt{3C_{A,1}^2 + C_{A,0}^2} - C_{A,0}$
$C_{W,3} =$	$4k \left(C_{A,1}^2 - C_{A,0} \left(\sqrt{3C_{A,1}^2 + C_{A,0}^2} - C_{A,0} \right) \right)$
$\varepsilon_3 =$	$\frac{4}{3}k \left(\sqrt{3C_{A,1}^2 + C_{A,0}^2} - 2C_{A,0} \right)$

Tabelle 4.5: Beiwerte in Punkt „3“

Zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten werden die unter der Voraussetzung $\varepsilon^2 \ll 1$ vereinfachten Gl. 4.10 und Gl. 4.9 verwendet und man erhält

$u_3 \approx V_3 \approx$	$\frac{V^*}{\sqrt{3 \cdot C_{A,1}}} \sqrt{\sqrt{3} C_{A,1}^2 + C_{A,0}^2} - C_{A,0}$
$w_3 \approx$	$\frac{4 \cdot V^*}{\sqrt{27}} \frac{C_{W,0}}{C_{A,1}^{\frac{5}{2}}} \sqrt{\left(3 C_{A,1}^2 + C_{A,0}^2 \right)^{3/2} - C_{A,0} \left(9 C_{A,1}^2 - C_{A,0}^2 \right)}$

Tabelle 4.6: Geschwindigkeiten an Punkt „3“

In Bild 4.3 sind die wichtigsten der oben abgeleiteten Größen, jeweils bezogen auf die entsprechenden Werte im Punkt ①, dargestellt. Die Werte sind zwar bis $\frac{C_{A,0}}{C_{A,1}} = 1$ mathematisch darstellbar, jedoch in diesem Bereich physikalisch nicht mehr sinnvoll. Im Fall $\frac{C_{A,0}}{C_{A,1}} = 1$ würden wegen $C_{A,0} = C_{A,1}$ die Tangente vom Ursprung und die vertikale Tangente an die Polare sich im gleichen Punkt berühren. Das ist nur möglich, wenn die physikalisch nicht realisierbare Bedingung $C_{W_s} + C_{W_{po}} = 0$ gilt (Gl. 3.24).

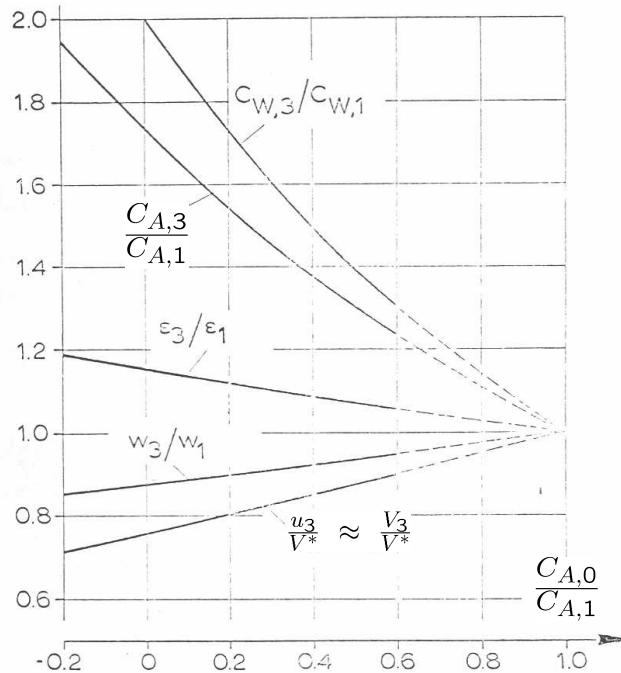


Abbildung 4.3: Vergleich der errechneten Größen

Hinweise auf die Größe der in der Praxis auftretenden $C_{A,0}$ -Werte liefert Unterabschnitt 3.1.5. Dort wurde der Optimalwert der minimalen Gleitzahl als Funktion von $C_{A,0}$ berechnet, Gl. 3.31 und Bild 3.17. Eine sinnvolle obere Grenze liefert Gl. 3.29 mit $C_{A,0} < \sqrt{k_p/k}$. Für $C_{A,0} = 0$, d.h. eine symmetrische Polare, sind die bezogenen Daten für minimale Sinkgeschwindigkeit in der folgende Tabelle zusammengestellt: Die Genauigkeit der in diesem Abschnitt unter der

Tabelle 4.7: Vergleich der Größen in Punkt „1“ und Punkt „3“

$\frac{C_{A,3}}{C_{A,1}} =$	$\frac{C_{W,3}}{C_{W,1}} =$	$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} =$	$\frac{V_3}{V_1} =$	$\frac{w_3}{w_1} =$
$\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 0,76$	$\frac{2}{\sqrt[4]{27}} \approx 0,877$
symmetrische Polare, $C_{A,0} = 0$				

Voraussetzung $\varepsilon^2 \ll 1$ abgeleiteten Beziehungen ist für Anwendungen auf konventionelle Flugzeuge einschließlich der Überschallkonfigurationen ausgezeichnet.

4.1.6 Die Geschwindigkeitspolaren

In den vergangenen Abschnitten wurden die optimalen Flugzustände des Gleitflugs durch ihre Polarenpunkte charakterisiert und die zugeordneten optimalen Geschwindigkeitskomponenten errechnet. Man kann diese Zuordnung verdeutlichen, wenn man die Geschwindigkeitsebene zur Darstellung verwendet. Üblicherweise wählt man als Ordinate die Sinkgeschwindig-

keit w und als Abszisse die Bahngeschwindigkeit V , die bei Flugzeugen mit sehr kleinen Gleitzahlen der Horizontalkomponente u gleichgesetzt werden kann. Diese Darstellung wird als Geschwindigkeitspolare bezeichnet. Sie hat sich besonders zur Beurteilung der Flugleistungen von Segelflugzeugen sehr bewährt. Sie kann relativ leicht aus den Flugmessungen an Segelflugzeugen gewonnen werden und erlaubt in einfacher Weise die wichtigen Größen ε_{min} und $w_{min} = w_3$ abzulesen.

Da bei dieser Darstellung voraussetzungsgemäß $\varepsilon_{min}^2 \ll 1$ gilt, erhält man für V und w aus den entsprechend vereinfachten Beziehungen für die Bahngeschwindigkeit und Gl. 4.10

$$u \approx V \approx \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S \cdot C_A}}; \quad (4.15)$$

$$w \approx V \cdot \frac{C_W}{C_A} \quad (4.16)$$

In Bild 4.4 ist die Geschwindigkeitspolare für ein Segelflugzeug mit einer minimalen Gleit-

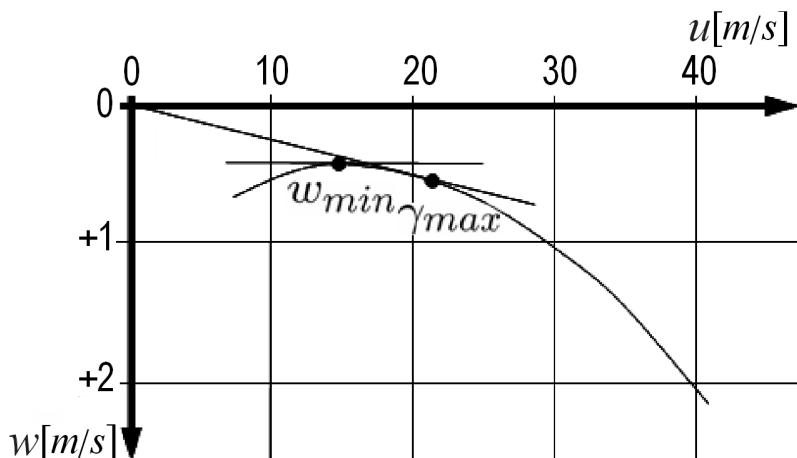


Abbildung 4.4: Geschwindigkeitspolare für ein Segelflugzeug $\varepsilon = 1/40$

zahl von $1/40$ aufgetragen. Man erkennt, dass die Bahngeschwindigkeit für w_{min} deutlich niedriger liegt als diejenige für γ_{max} bzw. $|\gamma|_{min}$. Da bei aerodynamisch hochwertigen Flugzeugen V stets eine Größenordnung höher liegt als w , hat es sich eingebürgert, den Maßstab für die Abszisse zehnmal größer zu wählen als für die Ordinate. Nur so werden die wichtigen Zahlenwerte für w und γ ablesbar.

Zur Darstellung der Gleitflugleistungen von Fluggeräten mit kleineren Gleitzahlen, für die die Annahme $\varepsilon_{min}^2 \ll 1$ nicht mehr zulässig ist, kann man die Geschwindigkeitskomponenten u und w nach den Gleichungen 4.9 und 4.10 direkt übereinander aufgetragen. Sie lässt sich allein aus der Polare berechnen. Die Wahl desselben Maßstabes für beide Achsen ist wegen der in diesem Fall möglichen hohen Sinkgeschwindigkeiten sinnvoll und erlaubt eine unmittelbare Beurteilung der auftretenden Bahnneigungswinkel und Bahngeschwindigkeiten.

In Bild 4.5 sind die so definierten Geschwindigkeitspolaren für ein Überschallflugzeug bei verschiedenen Machzahlen und einem Hyperschallflugkörper (Raumtransporter) bei einer höheren Machzahl dargestellt. Der stationäre antriebslose Sinkflug stellt für leichte Flugzeuge,

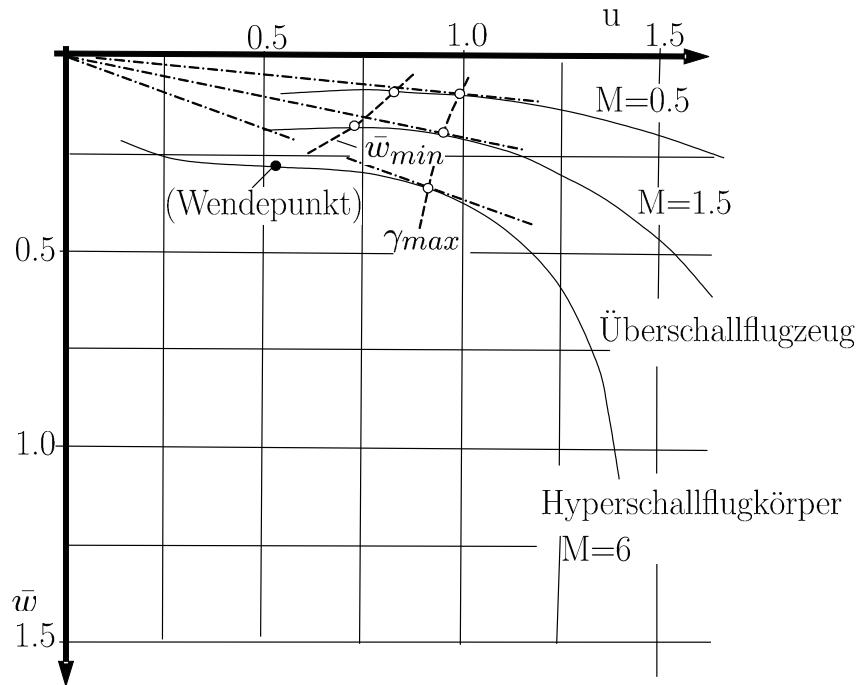


Abbildung 4.5: Darstellung von verschiedenen Geschwindigkeitspolaren

insbesondere für Segelflugzeuge, eine sehr wichtige Flugphase dar. Das trifft für moderne Verkehrs- und Hochleistungsflugzeuge nicht in diesem Maße zu, da diese den Sinkflug mit Triebwerksschub durchführen. Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Zusammenhänge gelten nicht für den angetriebenen Sinkflug.

4.2 Horizontalflug

4.2.1 Definitionen und Grundbeziehungen

Der unbeschleunigte Flug mit horizontal verlaufender Bahn wird als stationärer Horizontalflug bezeichnet. Er ist für die Leistungsfähigkeit eines Flugzeuges von besonderem Interesse, da der größte Teil eines jeden Fluges unter den Bedingungen dieses Flugzustandes durchgeführt wird. Wie bereits ausgeführt, beschränkt sich dieser Abschnitt nur auf Augenblickzustände während eines Fluges im Höhen-Mach-Bereich, bei denen die Flugzeugmasse als konstant angesetzt wird.

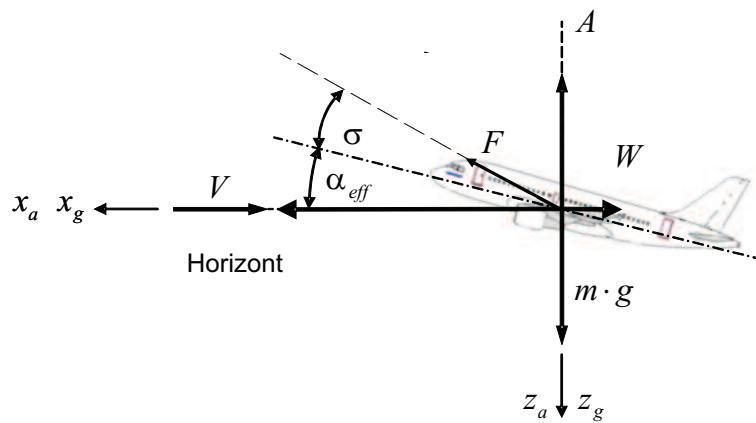


Abbildung 4.6: Kräfte und Geschwindigkeit im stationären Horizontalflug

Die Gleichungen zur Beschreibung des Horizontalfluges folgen unmittelbar aus Gl. 3.84 mit $\gamma = \dot{\gamma} = \dot{V} = 0$. Zum besseren Verständnis können die geometrischen Zusammenhänge im Horizontalflug in Bild 3.31 ersehen werden.

$$W - F \cdot \cos(\alpha_{eff} + \sigma) = 0 \quad (4.17)$$

$$A + F \cdot \sin(\alpha_{eff} + \sigma) - m \cdot g = 0 \quad (4.18)$$

Mit $\alpha_{eff} + \sigma = 0$ erhält man daraus folgende Näherungsbeziehungen

$$W \approx F \quad (\text{Widerstandsgleichung}) \quad (4.19)$$

$$A \approx m \cdot g \quad (\text{Auftriebsgleichung}) \quad (4.20)$$

Diese einfachen Gleichungen erweisen sich in der Praxis als sehr nützlich. Zur Abschätzung des hierbei in Kauf genommenen Fehlers erhält man durch Vergleich der Gl. 4.17 bis Gl. 4.20

Tabelle 4.8: Abschätzung des sich aus der Linearisierung ergebenden Fehlers

	Hochleistungsflugzeug	Verkehrsflugzeug	
	Start	Start	Reiseflug M=0,9; H=11km
$\frac{F}{m \cdot g}$	0,85	0,3	0,1
α_{eff}	15 °	12 °	2 °
$\frac{\Delta A}{A}$	22 %	6,3 %	0,3 %
$\frac{\Delta W}{W}$	3,5 %	2,2 %	0,1 %

mit $\sigma = 0$:

$$\frac{\Delta A}{A} \cong \frac{F}{m \cdot g} \cdot \alpha_{eff} \quad \text{mit} \quad \sin x = x \quad (4.21)$$

$$\frac{\Delta W}{W} \cong 1 - \cos \alpha_{eff} \cong \frac{\alpha_{eff}^2}{2} \quad \text{mit} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (4.22)$$

Man erkennt aus diesen Beziehungen, dass bei leistungsstarken Flugzeugen im Bereich großer Anstellwinkel, wie sie zum Beispiel bei Start und Landung vorkommen, der Fehler in der Auftriebsgleichung u.U. so groß werden kann, dass dann auf die genaue Gl. 4.18 zurückgegriffen werden muss. Wesentlich kleinere Ungenauigkeiten erhält man aus der Widerstandsgleichung. Im Reiseflug sind die Fehler im allgemeinen derart klein, dass die Gleichungen 4.19 und 4.20 ohne Einschränkung angewendet werden können. Das in Tabelle 4.8 dargestellte Beispiel soll dies veranschaulichen.

4.2.2 Auftriebsgleichung

Mit der Definition des Auftriebs nach Gl. 3.4 schreibt sich Gl. 4.20:

$$C_A \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2 = m \cdot g \quad (4.23)$$

oder aufgelöst nach der Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{S \cdot \rho \cdot C_A}}. \quad (4.24)$$

Für den Horizontalflug im Punkt ① der Polaren ergibt sich hieraus mit $C_A = C_{A,1}$ die Bezugsgeschwindigkeit

$$V^* = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{S \cdot \rho \cdot C_{A,1}}}. \quad (4.25)$$

Zwischen dem Auftriebsbeiwert und der Geschwindigkeit besteht damit der einfache Zusammenhang:

$$C_{A,1} \sim \frac{1}{V^{*2}} \quad (4.26)$$

Die Auftriebsgleichung Gl. 4.23 kann auch dazu verwendet werden, die auftriebsmäßig erfliegbare maximale Flughöhe zu bestimmen.

Führt man die Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}}$ ein, wobei κ das Verhältnis der spezifischen Wärmen, p den statischen Druck und ρ die Luftdichte darstellen, so ergibt sich für $\kappa = 1.4$ (für zweiatomige Gase) mit der Machzahl $Ma = V/a$

$$0.7p(H) \cdot C_A \cdot Ma^2 = \frac{m \cdot g}{S}. \quad (4.27)$$

Die Gl. 4.27 ist folgendermaßen zu interpretieren: Bei gegebener Flächenbelastung m/S ist die Auftriebsgleichung dann erfüllt wird, wenn jeder Flughöhe, gegeben durch den statischen Druck $p(H)$, ein fester $C_A \cdot Ma^2$ zugeordnet ist. Die vom Auftrieb her maximale Flughöhe wird erreicht, wenn mit einem Auftriebsbeiwert $C_A = C_{A,\max}$ geflogen wird. Da $C_{A,\max}$ von der Machzahl abhängt, bestimmt sich mit Gl. 4.27 unter Verwendung der Zuordnung zwischen Flughöhe und statischem Druck entsprechend der Standardatmosphäre (vgl. Bild 2.5) die auftriebsmäßig erfliegbare Flughöhe abhängig von der Machzahl.

In Bild 4.7 ist das Ergebnis einer solchen Rechnung für zwei Flächenbelastungen unter Verwendung von $C_{A,\max}(Ma)$ aus Bild 3.6 dargestellt.

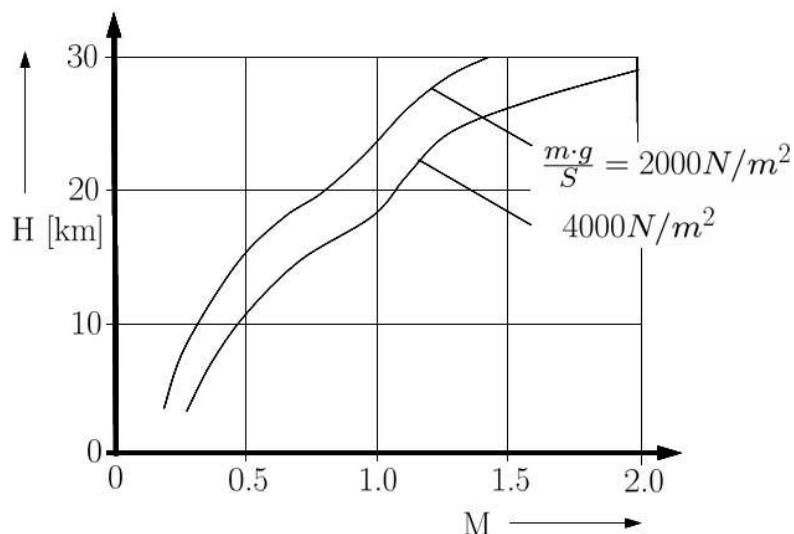


Abbildung 4.7: Auftriebsmäßig erfliegbare Flughöhe in Abhängigkeit von der Machzahl

4.2.3 Widerstandsgleichung

Schreibt man den Widerstand unter Verwendung von Gl. 3.10, so erhält man aus Gl. 4.19

$$W = C_W \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2 = F. \quad (4.28)$$

Wählt man in den folgenden Betrachtungen für die Funktion $C_W = f(C_A)$ den allgemeinen Fall einer parabolischen Polare entsprechend Tabelle 3.2 und verwendet C_A aus Gl. 4.23, so wird

$$W = C_{W_0} \cdot S \frac{\rho}{2} V^2 + \frac{2 \cdot k \cdot m^2 \cdot g^2}{S \cdot \rho \cdot V^2} + k_1 \cdot m \cdot g. \quad (4.29)$$

Nach Division durch $m \cdot g$ mit Einführen der Bezugsgeschwindigkeit V^* entsprechend der Definition nach Gl. 4.25 erhält man:

$$\frac{W}{mg} = C_{W_0} \frac{S \rho}{2mg} V^2 + \frac{2kmg}{S \rho} \frac{1}{V^2} + k_1 \quad (4.30)$$

Mit $k_1 = -2 \cdot C_{A,0} \cdot k$

$$\frac{W}{mg} = C_{W_0} \cdot \frac{S \rho}{2m g} V^2 + \frac{2kmg}{S \rho} \frac{1}{V^2} - 2k C_{A,0} \quad (4.31)$$

Wie man nach kurzer Rechnung ($\frac{dW}{dV} = 0$) zeigen kann, liegt das Widerstandsminimum bei $V = V^*$. Seine Größe beträgt unabhängig von der Flughöhe:

$$\frac{W_{min}}{mg} = \varepsilon_{min} = 2 \sqrt{k C_{W_0}} - 2k C_{A,0} \quad (4.32)$$

Die Abhängigkeit des bezogenen Widerstandes von der Geschwindigkeit V nach Gl. 4.31 ist in Bild 4.8 dargestellt. Man erkennt, wie sich der Gesamtwiderstand durch

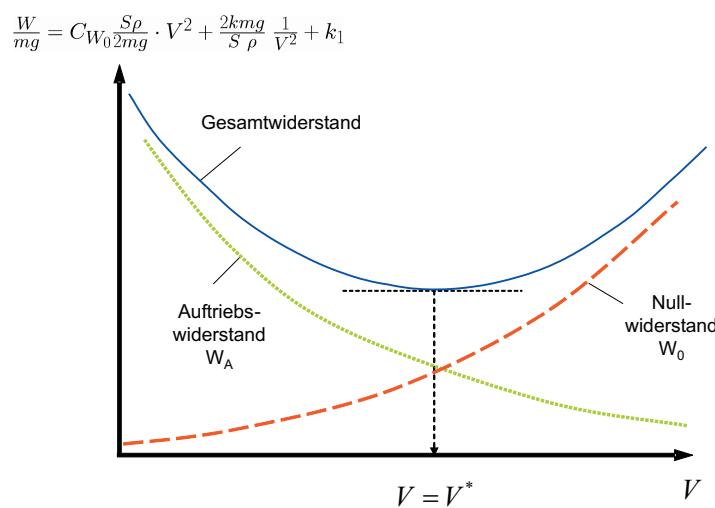


Abbildung 4.8: Widerstand im Horizontalflug

Überlagerung des Nullwiderstandes und des Auftriebswiderstandes zusammensetzt. Gegenüber der symmetrischen Polare ($C_{A,0} = 0$) ergibt die allgemeine Polare eine Verringerung des Widerstands, die sich unter der Annahme konstanter Werte von C_{W_0} aus Bild 4.8 in einfacher Weise ablesen lässt. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass C_{W_0} entsprechend Gl. 3.24 und Gl. 3.29 noch von $C_{A,0}$ abhängt, vgl. hierzu Unterabschnitt 3.1.5.

Bezieht man den Nullwiderstand $W_0 = C_{W_0} \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2$ auf den Gesamtwiderstand, so erhält man unter Verwendung von Gl. 4.31 und Gl. 4.26 bzw. mit Tabelle 3.2

$$\frac{W_0}{W} = \frac{1}{1 + \frac{W_A}{W_0}} \quad (4.33)$$

In Bild 4.9 ist der relative Nullwiderstand nach Gl. 4.33 für den Sonderfall $C_{A,0} = 0$ abhängig von der Flugmachzahl mit der Höhe als Parameter für ein Überschallflugzeug mit den Polarenwerten entsprechend Bild 3.16 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass im bodennahen Schnellflug der Nullwiderstand der maßgebende Anteil ist, während bei großen Flughöhen der Auftriebswiderstand um so mehr an Bedeutung gewinnt, je langsamer geflogen wird, d.h. je größer der jeweilige Auftriebwert ist. Die sich hieraus ergebende Folgerung für die Flugzeugauslegung bei gegebener Flugaufgabe liegt auf der Hand.

Alle obigen Beziehungen sind unmittelbar für den symmetrischen Polarenansatz verwendbar, wenn man $k_1 = 0$ bzw. $C_{A,0} = 0$ setzt.

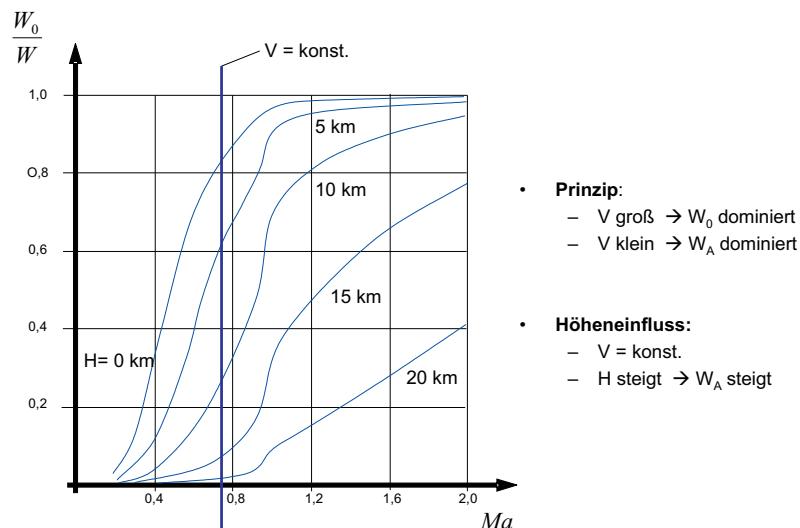


Abbildung 4.9: Anteil Nullwiderstand Abhängigkeit von Machzahl und Flughöhe

4.2.4 Einfluss der Schubcharakteristik

Für die Beurteilung der Horizontalflugleistungen ist die Abhängigkeit des Schubes und des Widerstandes von Machzahl und Flughöhe von entscheidender Bedeutung. Am Beispiel eines

Überschallverkehrsflugzeuge sind in Bild 4.10 beide Werte für verschiedene Flughöhen dargestellt. Die Schnittpunkte bei kleinen und bei hohen Machzahlen kennzeichnen die Gleichgewichtsbedingungen, bei denen Gl. 4.28 erfüllt ist. Im Bereich zwischen diesen Gleichgewichtspunkten $F = W$ ist ein stationärer Horizontalflug nur mit gedrosseltem Triebwerks schub möglich. Zur Ermittlung des Flugbereichs ist die Kenntnis der genauen Abhängigkeit des Widerstandes und des installierten Schubes von der Flugmachzahl erforderlich. Wie in Unterabschnitt 3.2.5 erläutert wurde, ist die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Schubes für die verschiedenen Antriebsarten sehr unterschiedlich. Dieses wird auch durch die in Bild 4.10 dargestellten Schubverläufe eines Einkreisstrahltriebwerkes für den Fall mit und ohne eingeschalteter Nachverbrennung bestätigt. Es ist einleuchtend, dass wesentliche Aussagen der Flugleistungsuntersuchungen, wie die Geschwindigkeit der geringsten erforderlichen Triebwerksleistung u.ä., in starkem Maße von der Schubcharakteristik des verwendeten Antriebs systems abhängen.

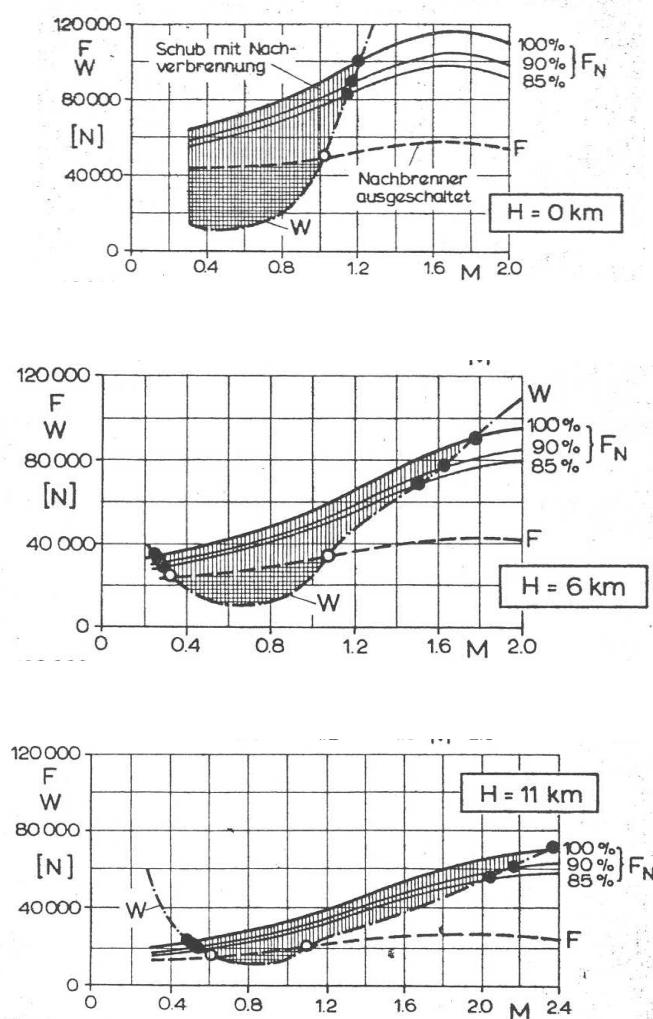


Abbildung 4.10: Schub und Widerstand eines Überschallflugzeugs

4.2.5 Flugbedingung für minimalen Schubbedarf

Mit dem Schubansatz in Unterabschnitt 3.2.5 ergibt sich der auf das Gewicht bezogene Schub:

$$\frac{F}{mg} = \frac{F_i}{mg} \left(\frac{V}{V_i} \right)^{n_v} \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} \quad (4.34)$$

Nimmt man nun den Horizontalflug an und setzt den bezogenen Schub mit dem bezogenen Widerstand gleich, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{W}{mg} = C_{W_0} \frac{S \rho}{2mg} V^2 + \frac{2kmg}{S \rho} \frac{1}{V^2} - 2C_{A,0} k = \frac{F}{mg} = \frac{F_i}{mg} \left(\frac{V}{V_i} \right)^{n_v} \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} \quad (4.35)$$

Gl. 4.35 enthält alle Einflussgrößen, um den stationären Horizontalflug zu beschreiben. Angenommen wird hierbei ein Referenzzustand bei dem die Horizontalflugbedingung erfüllt ist. Von diesem Zustand ausgehend werden dann alle weiteren Zustände errechnet. Zu beachten ist hierbei, dass die Gleichung von folgenden Größen abhängig ist:

- Geschwindigkeit
- Höhe
- Widerstand
- Auftrieb
- Triebwerkseigenschaften

Löst man die Gl. 4.35 nach $\frac{F_i}{V_i^{n_v}}$ auf, so ergibt sich ein Leistungsbedarf für einen beliebigen Horizontalflug. Man erhält folgende Bedingung:

$$\frac{F_i}{V_i^{n_v}} = \frac{mg}{V^{n_v}} \left(C_{W_0} \frac{S\rho}{2mg} V^2 + \frac{2kmg}{S\rho} \frac{1}{V^2} - 2C_{A,0}k \right) \quad (4.36)$$

Betrachtet man nun die drei Triebwerkstypen und führt die in Unterabschnitt 3.2.5 bereits eingeführten Zusammenhänge ein, ergeben sich für $\frac{F_i}{mg}$ folgende Gleichungen. Die Höhe bleibt hierbei für die Betrachtungen konstant, so dass $\rho = \rho_i$ gilt.

In Bild 4.11 ist der Schubbedarf für die drei typischen Schubcharakteristiken dargestellt. F^* stellt dabei den Schubbedarf im Referenzzustand bei $\rho = \rho_i$ und $V = V^*$ dar. Ausgewertet sind die drei Triebwerkscharakteristiken:

a) $n_V = -1; \rho_i = \rho$

$$\frac{F_i}{V_i^{-1}} = mg \left(C_{W_0} k_2 V^3 + \frac{k}{k_2} \frac{1}{V} - 2C_{A,0}k V \right) \quad (4.37)$$

b) $n_V = 0; \rho_i = \rho$

$$\frac{F_i}{V_i^0} = mg \left(C_{W_0} k_2 V^2 + \frac{k}{k_2} \frac{1}{V^2} - 2C_{A,0}k \right) \quad (4.38)$$

c) $n_V = 1; \rho_i = \rho$

$$\frac{F_i}{V_i^{n_V}} = mg \left(C_{W_0} k_2 V + \frac{k}{k_2} \frac{1}{V^3} - \frac{2C_{A,0}k}{V} \right) \quad (4.39)$$

Dieser Zusammenhang ist in Bild 4.11 aufgetragen.

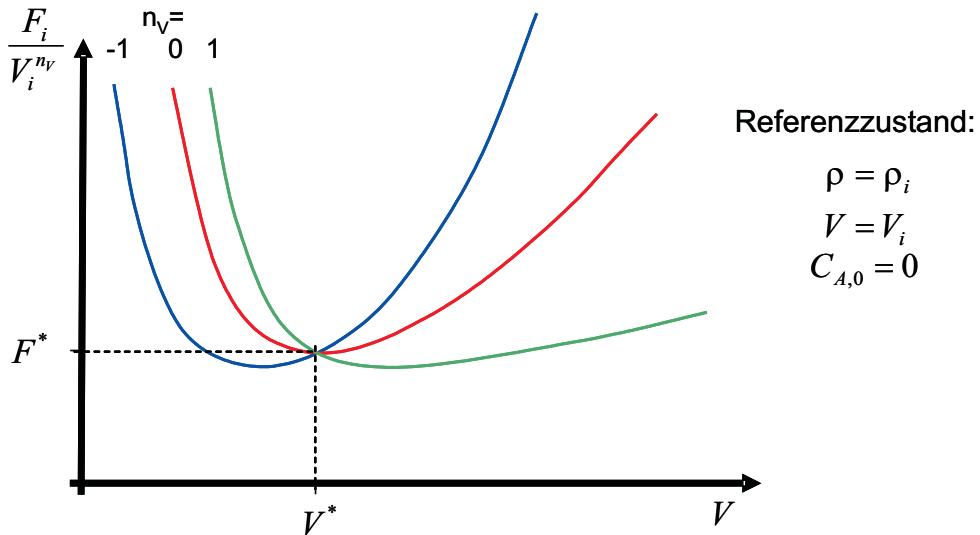


Abbildung 4.11: Schub- bzw. Leistungsbedarf im Horizontalflug

Im nächsten Schritt wird nun die erforderliche Fluggeschwindigkeit ermittelt, für die der benötigte Schub und damit das Triebwerk am kleinsten wird. Die Bedingung hierfür ergibt sich aus der Gl. 4.36. Mit der Bedingung

$$\frac{\partial \left(\frac{F_i}{V_i^{n_V}} \right)}{\partial V} = 0 \quad (4.40)$$

entsteht zur Berechnung der erforderlichen Fluggeschwindigkeit V_{min} folgende Bedingungsgleichung mit $k_2 = \frac{S \rho}{2m g}$:

$$V_{min}^4 + \frac{2n_V C_{A,0} k}{(2-n_V) \cdot C_{W_0} k_2} \cdot V_{min}^2 - \frac{(2+n_V) \cdot k}{(2-n_V) \cdot C_{W_0} k_2^2} = 0 \quad (4.41)$$

mit der Lösung:

$$V_{min}^2 = \sqrt{\left(\frac{n_V C_{A,0} k}{(2-n_V) \cdot C_{W_0} k_2} \right)^2 + \frac{(2+n_V) \cdot k}{(2-n_V) \cdot C_{W_0} k_2^2} - \frac{n_V C_{A,0} k}{(2-n_V) \cdot C_{W_0} k_2}} \quad (4.42)$$

Für die drei Schubcharakteristiken erhält man:

a) $n_V = -1$

$$\begin{aligned} V_{min}^2 \Big|_{n_V=-1} &= \sqrt{\left(\frac{-C_{A,0}k}{3C_{W_0}k_2}\right)^2 + \frac{k}{3C_{W_0}k_2^2} + \frac{C_{A,0}k}{3C_{W_0}k_2}} = \dots \\ \dots &= \sqrt{\left(\frac{C_{A,0}^2 k}{9C_{W_0}}\right) \cdot V^{*4} + \frac{V^{*4}}{3} + \frac{C_{A,0}k}{3C_{W_0}k_2}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

b) $n_V = 0$

$$V_{min}^2 \Big|_{n_V=0} = \sqrt{\frac{k}{C_{W_0}k_2^2}} = V^{*2} \quad (4.44)$$

c) $n_V = 1$

$$\begin{aligned} V_{min}^2 \Big|_{n_V=1} &= \sqrt{\left(\frac{C_{A,0}k}{C_{W_0}k_2}\right)^2 + \frac{3k}{C_{W_0}k_2^2} - \frac{C_{A,0}k}{C_{W_0}k_2}} = \dots \\ \dots &= \sqrt{\left(\frac{C_{A,0}^2 k}{C_{W_0}}\right) \cdot V^{*4} + 3V^{*4} - \frac{C_{A,0}k}{C_{W_0}k_2}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Wiederum bleibt bei $n_V = 0$ die Unsymmetrie der Polaren ohne Einfluss auf V_{min} . Bei $n_V = -1$ würde V_{min}^2 ohne Berücksichtigung der Unsymmetrie etwa um $C_{A,0}/\sqrt{3}$ zu klein, bzw. für $n_V = +1$ um den gleichen Betrag zu groß angesetzt werden.

Setzt man nun $C_{A,0} \approx 0$, ergeben sich für V_{min}^2 folgende einfachen Zusammenhänge, für die Schubcharakteristiken.

a) $n_V = -1$

$$V_{min}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} V^{*2} \quad (4.46)$$

b) $n_V = 0$

$$V_{min}^2 = V^{*2} \quad (4.47)$$

c) $n_V = 1$

$$V_{min}^2 = \sqrt{3} V^{*2} \quad (4.48)$$

Setzt man die Beziehung für V_{min} in Gl. 4.36 ein und nimmt an, dass für $C_{A,0} \approx 0$ gilt und setzt die Triebwerksfaktoren ein, so erhält man für die jeweiligen Minima des Schubs nach einiger Zwischenrechnung:

a) $n_V = -1$

$$\frac{F_{i,min}}{V_i^{-1}} = \frac{mg}{\sqrt[4]{3}} V^* \left(C_{W_0} \frac{S\rho}{2mg} \frac{V^{*2}}{\sqrt{3}} + \frac{2kmg}{S\rho} \frac{\sqrt{3}}{V^{*2}} \right) \quad (4.49)$$

b) $n_V = 0$

$$F_{i,min} = mg \left(C_{W_0} \frac{S\rho}{2mg} V^{*2} + \frac{2kmg}{S\rho} \frac{1}{V^{*2}} \right) = F_i^* \quad (4.50)$$

c) $n_V = 1$

$$\frac{F_{i,min}}{V_i} = \frac{mg}{\sqrt[4]{3} V^*} \left(C_{W_0} \frac{S\rho}{2mg} \sqrt{3} V^{*2} + \frac{2kmg}{S\rho} \frac{1}{\sqrt{3} V^{*2}} \right) \quad (4.51)$$

4.2.6 Maximale Flughöhen in Abhängigkeit vom Schub

Vergleichbar wie in Unterabschnitt 4.2.5 die Geschwindigkeit für den minimalen Schubbedarf kann auch die vom Antrieb abhängige Flughöhe bestimmt werden. Im Folgenden wird nun untersucht, welche maximale Flughöhe durch den von einem beliebigen Antriebssystem gelieferten Schub erreicht werden kann.

Als Basis für die Betrachtungen verwenden wir, wie auch schon in Unterabschnitt 4.2.5 Gl. 4.35. Sie enthält über die Dichte ρ die Abhängigkeit des vom Triebwerk gelieferten Schubes. Damit ergibt sich für die Höhenabhängigkeit folgende Gleichung:

$$\frac{F_i}{V_i^{n_V} \cdot \rho_i^{n_\rho}} = \frac{m g}{V^{n_V} \cdot \rho^{n_\rho}} \cdot \left(C_{W_0} \frac{S\rho}{2mg} V^2 + \frac{2kmg}{S\rho} \frac{1}{V^2} - 2C_{A,0}k \right) \quad (4.52)$$

Als Näherung betrachten wir im folgenden die symmetrische Polarengleichung. Damit wird $C_{A,0} = 0$ und man erhält:

$$\frac{F_i}{V_i^{n_V} \cdot \rho_i^{n_\rho}} = \frac{m g}{V^{n_V} \cdot \rho^{n_\rho}} \cdot \left(C_{W_0} \frac{S\rho}{2mg} V^2 + \frac{2kmg}{S\rho} \frac{1}{V^2} \right) \quad (4.53)$$

Unberücksichtigt bleibt in Gl. 4.53 zunächst die Tatsache, dass die enthaltene Geschwindigkeit V auch noch von ρ abhängig ist. Ersetzt man V durch die Geschwindigkeit am Bezugspunkt „ i “ mit $V = V_i \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich die Gleichung:

$$\rho = \rho_i \cdot \sqrt[n_\rho - \frac{n_V}{2}]{\frac{m g}{F_i} \cdot \left(C_{W_0} \frac{S}{2mg} \cdot \rho_i V_i^2 + \frac{2k mg}{S} \frac{1}{\rho_i V_i^2} \right)} \quad (4.54)$$

Für den Sonderfall Strahlantrieb in $H > 11km$ ($n_\rho = 1, n_V = 0$) gilt:

$$\rho = \rho_i \frac{m g}{F_i} \cdot \left(C_{W_0} \frac{S}{2mg} \cdot \rho_i V_i^2 + \frac{2k mg}{S} \frac{1}{\rho_i V_i^2} \right) \quad (4.55)$$

Wird aus der Gl. 4.55 die Geschwindigkeit ermittelt, mit der ein Flugzeug mit geschwindigkeitsunabhängigen Antrieb die maximale Flughöhe erreicht, so ist festzustellen, dass diese bei der Geschwindigkeit V_i^* erreicht wird. Also im Flug am Punkt „1“ der Polaren.

Um nun die maximale Flughöhe zu errechnen, wird als Bezugszustand der Beginn der Tropopause angenommen. Für die Größen mit Bezugspunkt „i“ sind also die Werte in 11 km Höhe einzusetzen.

Werden Gl. 4.55 und Gl. 2.13 ausgewertet und Beispieldaten eingesetzt, ergibt sich sinngemäß der Zusammenhang in Bild 4.12. Die Näherungsformel aus Gl. 2.13, wird zur Vereinfachung trotz ihrer Ungenauigkeit in der Höhe $H > 11$ angesetzt. Zur korrekten Darstellung der Höhe, muss in Gl. 2.13 der Bezugswert von $\rho_i = 1,225 \text{ kg/m}^3$ für die Höhe $H = 0 \text{ km}$ verwendet werden.

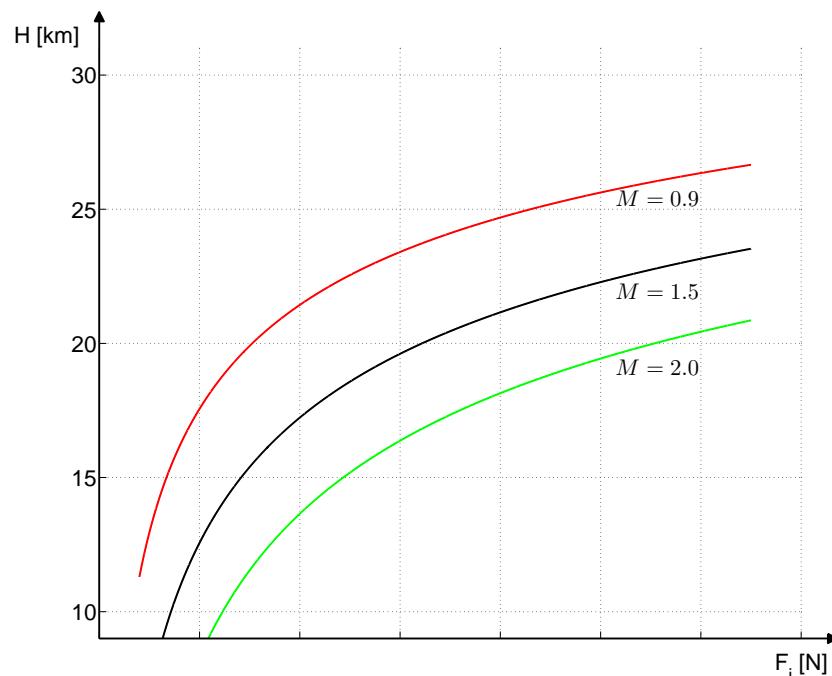


Abbildung 4.12: Beispiel für schubbedingte maximale Flughöhen

Wie aus den Beispielen zu ersehen ist, erhält man für verschiedene Geschwindigkeiten unterschiedliche maximale Flughöhen. Flugtechnisch von Interesse ist jedoch das absolute Maximum, das sich aus folgender Bedingung ergibt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = 0 \quad (4.56)$$

Wendet man diese Vorschrift auf die Gleichung Gl. 4.53, so erhält man folgenden Zusammenhang graphisch ausgewertet.

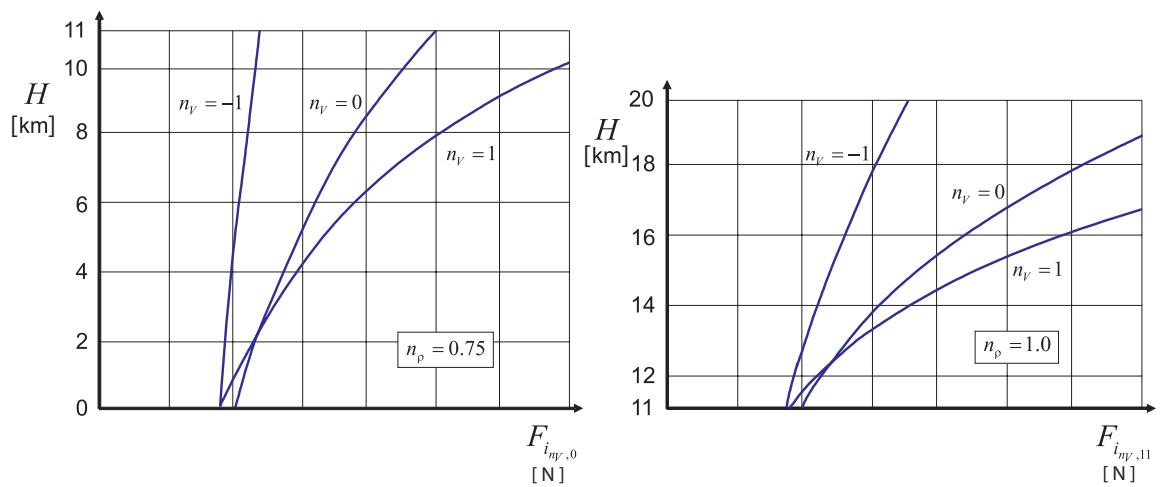


Abbildung 4.13: Maximale Flughöhe für gegebenen Schub F_i (Polarenwerte Ma-Zahl unabhängig)

4.3 Steigflug

4.3.1 Definitionen und Grundbeziehungen

Die Steigleistung eines Flugzeugs lässt sich mittels zweier Parameter ausdrücken:

- Steigwinkel ($\gamma > 0$)
- Steiggeschwindigkeit ($-w$)

Der *Steigwinkel* dient meistens als Maß für den Höhengewinn nach einer bestimmten Flugstrecke. Der Höhengewinn ΔH wird damit durch den Tangens der Flugstrecke ausgedrückt:

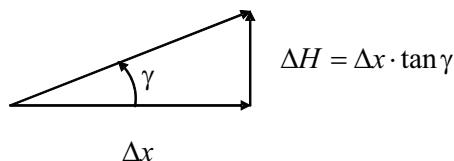


Abbildung 4.14: Steigwinkel γ

Die *Steiggeschwindigkeit* gibt im Gegensatz zum Steigwinkel den Höhengewinn nach einer bestimmten Flugzeit an.

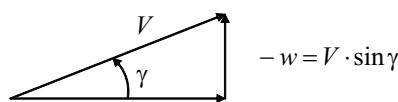


Abbildung 4.15: Steiggeschwindigkeit w

Der allgemeine Steigflug unter Einschluss von Beschleunigungen in Bahnrichtung wird im Abschnitt 7.4 ausführlich behandelt. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf die Berechnung der grundsätzlichen Zusammenhänge des unbeschleunigten Steigfluges. Während beim unbeschleunigten Horizontalflug die Antriebsleistung ausschließlich zur Überwindung der Widerstandsleistung verwendet wird, erhöht sich der Leistungsbedarf beim unbeschleunigten Steigflug um die Hubleistung. Zur Verdeutlichung sei dieser Zusammenhang formelmäßig dargestellt: Multipliziert man die Kraftgleichung Gl. 3.84 mit der Geschwindigkeit V und setzt verabredungsgemäß $\dot{V} = 0$, so wird unter der Annahme, dass der Schub in Bahnrichtung wirkt ($\cos(\alpha_{eff} + \sigma) = 1$) und der Steiggeschwindigkeit $V \cdot \sin \gamma = -w$:

$$\underbrace{F \cdot V}_{\text{Schubleistung}} = \underbrace{W \cdot V}_{\text{Widerstandsleistung} \\ (\text{Horizontalflug-} \\ \text{leistung})} - \underbrace{m \cdot g \cdot w}_{\text{Hubleistung} \\ (\text{Aufbau} \\ \text{potentieller Energie})} \quad (4.57)$$

Gl. 4.57 kann man auch dazu verwenden, die Steigfluggeschwindigkeit w zu interpretieren. Nach Division durch das Fluggewicht $m \cdot g$ erhält man unter Verwendung der Beziehung in Gl. 4.32

$$\underbrace{-w}_{\text{Steiggeschwindigkeit}^1} = \underbrace{\frac{F}{m \cdot g} \cdot V}_{\text{Hubgeschwindigkeit}} - \underbrace{\frac{W}{m \cdot g} \cdot V}_{\text{Sinkgeschwindigkeit} \atop (\text{antriebslos})} \quad (4.58)$$

Die in der Gleichung Sinkgeschwindigkeit bezeichnete Größe ist identisch mit Gl. 4.10. Das Verhalten des Flugzeugs im Sinkflug ist also von großer Bedeutung für die Leistungsverhältnisse im Steigflug.

4.3.2 Steigwinkel und Steiggeschwindigkeit

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist die Berechnung des Steigwinkels γ und daraus folgend der Steiggeschwindigkeit, bestimmt durch die aerodynamischen und antriebsabhängigen Größen. Aus dem Kapitel Bewegungsgleichungen folgt unter den schon diskutierten Annahmen $\dot{V} = 0$, $\dot{m} = 0$ und $\alpha_{eff} + \sigma = 0$ und der Gl. 3.84:

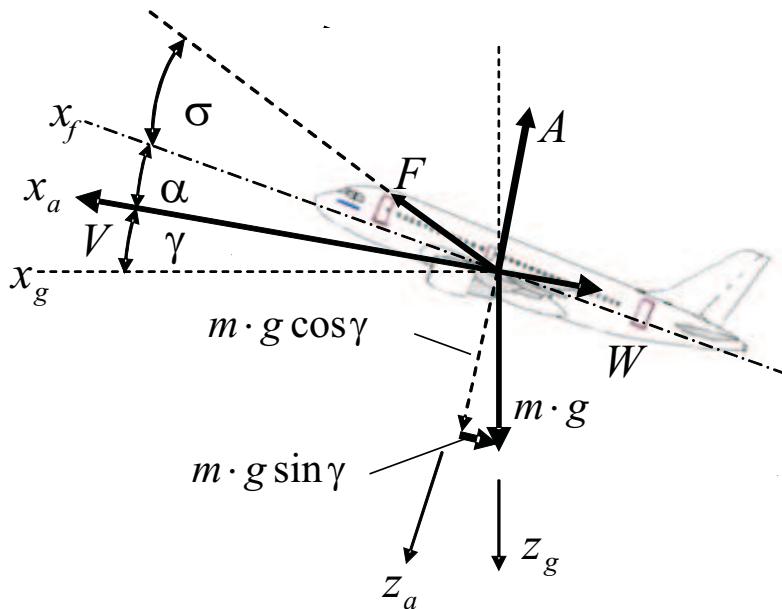


Abbildung 4.16: Kräfte und Geschwindigkeiten im Steigflug

$$F = W + m \cdot g \cdot \sin \gamma \quad (4.59)$$

$$A = m \cdot g \cdot \cos \gamma \quad (4.60)$$

¹Vielfach ist es üblich, in Anlehnung an den englischen Sprachgebrauch einzuführen: $-w$ = SEP (Specific Excess Power). Entsprechend stellt nach Gl. (4.57) die Größe $-w$ die auf das Gewicht bezogene Überschussleistung dar, die im folgenden vereinfacht *Steiggeschwindigkeit* genannt wird.

Die obere Gleichung ergibt aufgelöst nach $\sin \gamma$

$$\sin \gamma = \frac{F - W}{m \cdot g} . \quad (4.61)$$

Diese Beziehung ermöglicht leicht den Geltungsbereich der vorliegenden Betrachtung des unbeschleunigten Steigfluges einzugrenzen. $F = W$ ergibt den Grenzfall des Horizontalfluges ($\gamma = 0$), während $F = m \cdot g + W$ den Fall $\gamma = 90^\circ$ kennzeichnet, bei dem im Flug mit vertikaler Steigbahn gerade unbeschleunigt geflogen werden kann. Unter Verwendung der minimalen Gleitzahl ε_{\min} und der Geschwindigkeit V hatte sich im Abschnitt 4.2 eine sehr einfache Beziehung für den auf das Gewicht bezogenen Widerstand ergeben (vgl. Gl. 4.32). Für den Steigflug erhält man wegen der Auftriebsgleichung 4.59 eine entsprechende Beziehung. Dabei sei im folgenden der einfache Fall einer symmetrischen Polaren $C_{A,0} = 0$ betrachtet, für den $2\sqrt{kC_{W_0}} = \varepsilon_{\min}$ gilt mit $k_2 = \frac{S\rho}{2mg}$:

$$\frac{W}{mg} = C_{W_0} k_2 V^2 + \frac{k \cos^2 \gamma}{k_2 V^2} . \quad (4.62)$$

Damit wird:

$$\sin \gamma = \frac{F}{mg} - \left(C_{W_0} k_2 V^2 + \frac{k \cos^2 \gamma}{k_2 V^2} \right) , \quad (4.63)$$

Normalerweise sind die maximal erfolgten Steigwinkel so klein, dass mit ausreichender Genauigkeit in (Gl. 4.62) $\cos \gamma = 1$ gesetzt werden kann. Dann vereinfachen sich die Beziehungen zur Ermittlung des Bahnwinkels bzw. der Steiggeschwindigkeit erheblich:

$$\sin \gamma = \frac{F}{mg} - C_{W_0} V^2 k_2 - \frac{k}{V^2 k_2} \quad (4.64a)$$

$$-w = \frac{F V}{mg} - C_{W_0} V^3 k_2 - \frac{k}{V k_2} \quad (4.64b)$$

Es ist sehr wichtig zu wissen, bei welchen Geschwindigkeiten jeweils Steigwinkel und Steiggeschwindigkeit einen Maximalwert annehmen. Da sich der Schub (vgl. Abschnitt 3.2) je nach Art des verwendeten Antriebssystems mit der Geschwindigkeit ändert, leuchtet ein, dass die Geschwindigkeit besten Bahnwinkels (V_x) bzw. bester Steiggeschwindigkeit (V_y) sehr stark von der Art des Antriebssystems abhängt. In Bild 4.17 und Bild 4.18 ist dies für die betrachteten Antriebssysteme anschaulich dargestellt (vgl. auch Gl. 4.58). Man erkennt, dass beim Antrieb mit geschwindigkeitsunabhängigem Schub ($F = \text{konst.}$) die maximale Steiggeschwindigkeit bei beträchtlich höheren Geschwindigkeiten liegt als beim Antrieb mit konstanter Leistung.

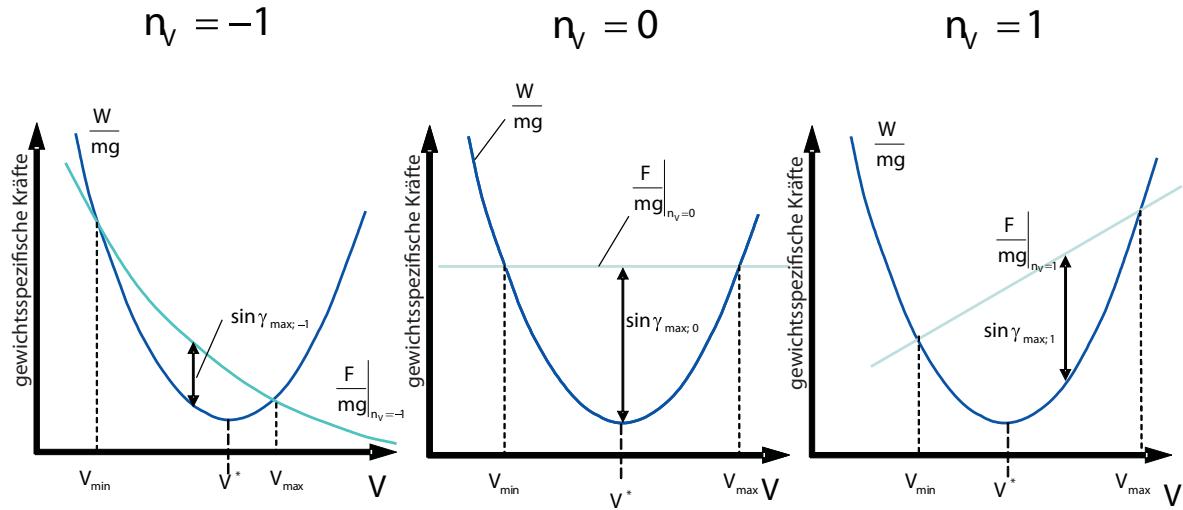


Abbildung 4.17: Maximale Steigwinkel bei den verschiedenen Schubcharakteristiken

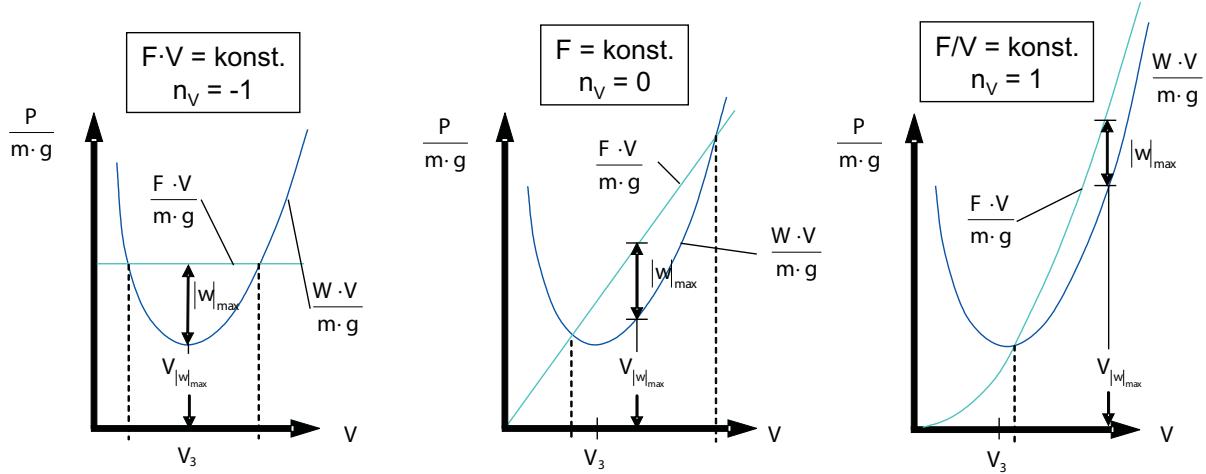


Abbildung 4.18: Maximale Steiggeschwindigkeiten bei den verschiedenen Schubcharakteristiken

Zur Darstellung des Einflusses der Schubcharakteristik wird der auf das Gewicht bezogene Schub ($\frac{F}{m \cdot g}$) durch den Schubansatz in Gl. 4.34 ersetzt, wobei $\rho = \rho_i$ gilt. Mit der Gleichung

$$\frac{F}{m \cdot g} = \frac{F_i}{m \cdot g \cdot V_i^{n_V}} \cdot V^{n_V} \quad (4.65)$$

erhält man Gl. 4.66:

$$\sin \gamma = \frac{F_i}{m \cdot g \cdot V_i^{n_V}} V^{n_V} - C_{W_0} V^2 k_2 - \frac{k}{V^2 k_2} \quad (4.66)$$

$$-w = \frac{F_i}{m \cdot g \cdot V_i^{n_V}} V^{(n_V+1)} - C_{W_0} V^3 k_2 - \frac{k}{V k_2} \quad (4.67)$$

4.3.3 Ermittlung der Maximalwerte

Für den praktischen Flugbetrieb ist es wichtig, die Maximalwerte für γ und $|w|_{max}$ sowie Bedingungen, unter denen sie erreicht werden, zu kennen.

Durch Nullsetzen der Ableitungen der Gl. 4.66 ergeben sich für beide Fälle Bedingungsgleichungen für die Geschwindigkeit, in die der Exponent n_V zur Kennzeichnung der Triebwerksart eingesetzt werden kann. Aus der Bedingung $\frac{\partial(\sin\gamma)}{\partial V} = 0$ ergibt sich aus

Gl. 4.66:

$$\frac{\partial(\sin\gamma)}{\partial V} = 0 = -2 C_{W_0} k_2 V^4 + \frac{n_V F_i}{m g V_i^{n_V}} \cdot V^{n_V+2} + 2 \frac{k}{k_2} \quad (4.68)$$

Für die drei früher bereits verwendeten Fälle $n_V = -1, 0, 1$ ergeben sich die Optimalbedingungen entsprechend nachstehender Zusammenstellung. Dabei sind auch nur diese drei Fälle analytisch darstellbar. Für $V_{\gamma_{max}}$ erhält man damit folgendes:

a) $n_V = -1$

$$0 = V^4 + \frac{F_i V_i}{2C_{W_0} k_2 m g} V - V^{*4} \quad (4.69)$$

b) $n_V = 0$

$$V = V^* \quad (4.70)$$

c) $n_V = 1$

$$0 = V^4 - \frac{F_i}{m g 2C_{W_0} k_2 V_i} V^3 - V^{*4} \quad (4.71)$$

Mit $\frac{\partial(-w)}{\partial V} = 0$ ergibt sich aus Gl. 4.67:

$$\frac{\partial(-w)}{\partial V} = 0 = -3 C_{W_0} k_2 V^2 + \frac{(n_V + 1) F_i}{m g V_i^{n_V}} \cdot V^{n_V} + \frac{k}{k_2} \cdot \frac{1}{V^2} \quad (4.72)$$

Für $V_{|w|_{max}}$ erhält man:

a) $n_V = -1$

$$V = \frac{V^*}{\sqrt[4]{3}} \quad (4.73)$$

b) $n_V = 0$

$$0 = V^4 - \frac{F_i}{3C_{W_0} k_2 m g} \cdot V^2 - \frac{1}{3} \cdot V^{*4} \quad (4.74)$$

c) $n_V = 1$

$$0 = V^4 - \frac{2 F_i}{3 C_{W_0} k_2 m g V_i} \cdot V^3 - \frac{1}{3} \cdot V^{*4} \quad (4.75)$$

Die Bedingungen für den optimalen Steigwinkel und die optimale Steiggeschwindigkeit aus Gl. 4.69 bis Gl. 4.75 sind in Bild 4.19 ausgewertet.

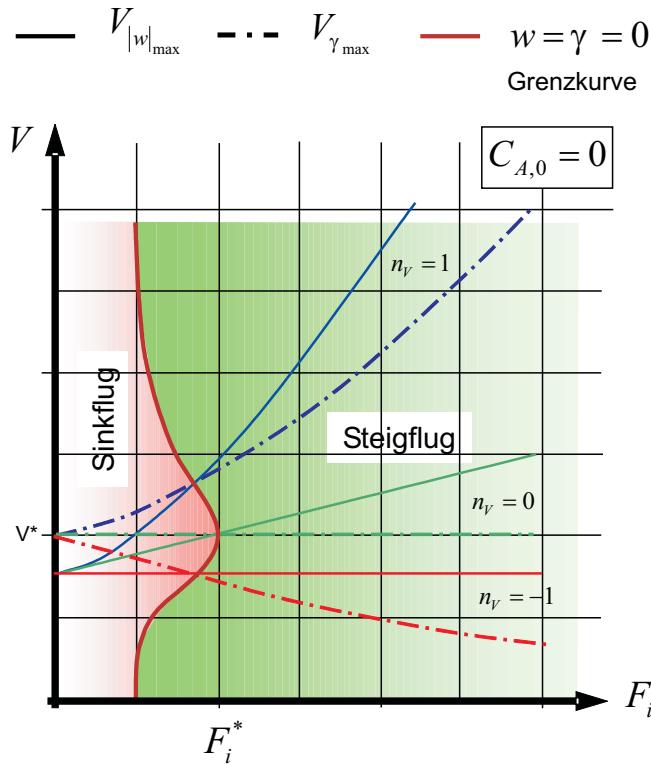


Abbildung 4.19: Optimalbedingungen für Steigwinkel und Steiggeschwindigkeit

Für den Steigflug sind in Bild 4.19 nur die Bereiche der Kurven interessant, für die $\gamma > 0$ gilt. Die Kurve $\gamma = w = 0$ begrenzt den Steigflugbereich. Wie zu erwarten ist, sind im Steigflugbereich die Geschwindigkeiten für γ_{max} und $|w|_{max}$ um so größer, je größer der Exponent n_V ist (vgl. hierzu auch Bild 4.18). Geschlossene Formeln für $(\sin \gamma)_{max}$ und $|w|_{max}$ lassen sich selbstverständlich nur dann angeben, wenn auch die zugehörige Optimalgeschwindigkeit analytisch gegeben ist. F_i ist der Schub, welcher am Bezugspunkt V_i und $\rho = \rho_i$ vorliegt.

Die Maximalwerte für Steigwinkel und die Steiggeschwindigkeit ergeben sich durch eine Auswertung der Gl. 4.69 bis Gl. 4.75. Diese sind analytisch nur in drei Fällen zu ermitteln. Für den maximalen Steigwinkel γ_{max} ist dies bei $n_V = 0$ der Fall. $\gamma_{max,n_V=0}$ erhält man durch Einsetzen der in Gl. 4.70 ermittelten Geschwindigkeit in Gl. 4.66. Des Weiteren ergibt sich die maximale Steiggeschwindigkeit $|w|$ aus den Ergebnissen in Gl. 4.73 und Gl. 4.74 durch Einsetzen in Gl. 4.67.

Die Ergebnisse für den maximalen Steigungswinkel in Abhängigkeit vom Triebwerksfaktor n_V sind in Bild 4.19 zusammengefasst.

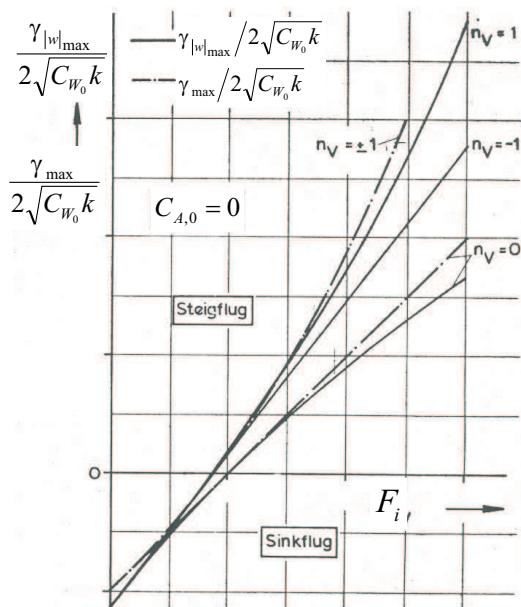


Abbildung 4.20: Maximale Steigungswinkel γ

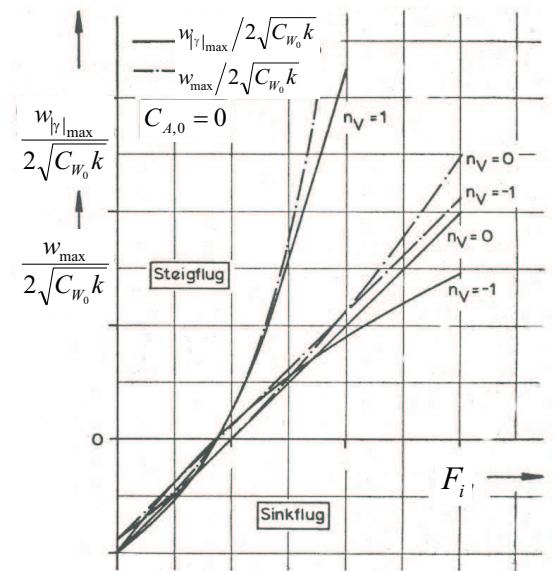


Abbildung 4.21: Maximale Steiggeschwindigkeiten w_{max}

In Bild 4.20 sind die maximalen Steigwinkel abhängig vom Triebwerksfaktor F_i aufgetragen. Bild 4.21 gibt die maximale Steiggeschwindigkeit $\frac{(-w)\gamma_{max}}{2C_{W_0}}$ als Funktion von F_i wieder. Im Gegensatz zum Fall γ_{max} in Bild 4.20 unterscheiden sich die Kurven für $n_V = -1$ und $n_V = 1$ in Bild 4.21 im Steigflug beträchlich. Für gleiche Werte des Triebwerksfaktors ist die Steiggeschwindigkeit bei $n_V = 1$ wesentlich größer, als bei den anderen Fällen $n_V = 0$ bzw. $n_V = -1$.

Von Interesse sind auch der Bahnneigungswinkel, bei dem $(-w)_{max}$ erreicht wird, d.h. $\gamma_{(-w)_{max}}$, sowie die Steiggeschwindigkeit $(-w)$, mit der beim maximalem Bahnneigungswinkel geflogen wird, d.h. $(-w)_{\gamma_{max}}$.

In Bild 4.20 sind die Kurven $\gamma_{| -w|_{max}}$ mit eingetragen. Der Vergleich mit den Kurven γ_{max} bei gleichem $\frac{F_i}{V_i}$ zeigt, dass erwartungsgemäß in allen Fällen der Steigungswinkel des schnellsten Steigens geringer als der maximale Steigungswinkel ist.

In Bild 4.21 sind zum Vergleich auch die Kurven für $(-w)_{\gamma_{max}}$ eingetragen. Auch hier zeigt sich, dass $(-w)_{\gamma_{max}}$ stets kleiner als $(-w)_{max}$ ist.

4.3.4 Darstellung im Geschwindigkeitspolaren-Diagramm

Eine anschauliche Darstellungsweise der Steigflugleistungen liefert das Geschwindigkeitspolardiagramm, in dem als Ordinate die Sinuskomponente des Geschwindigkeitsvektors und als Abszisse seine Kosinuskomponente gewählt wird. Somit kann man jeden Punkt dieses Diagramms als die Spitze des vom Ursprungs ausgehenden Vektors auffassen, dessen Größe und Richtung ablesen und damit Steiggeschwindigkeit und Steigwinkel ermitteln. Unter Verwendung der Gl. 4.66 schreiben sich Ordinate und Abszisse des Polarendiagramms:

$$|\mathbf{V}| \sin \gamma = \frac{F_i}{mg V_i^{n_V}} \cdot V^{(n_V + 1)} - C_{W_0} k_2 V^3 - \frac{k}{k_2 V} = -w \quad (4.76)$$

$$|\mathbf{V}| \cos \gamma = \sqrt{V^2 - \left(\frac{F_i}{mg V_i^{n_V}} \cdot V^{(n_V + 1)} - C_{W_0} k_2 V^3 - \frac{k}{k_2 V} \right)^2} = u \quad (4.77)$$

Als Beispiel sind in Bild 4.22 und Bild 4.23 die Kurven für $n_V = -1, 0, +1$ und die optimale Gleitzahl bei $\varepsilon_{opt} = \varepsilon_{min} = 2\sqrt{C_{W_0} k} = 0,1$ dargestellt, wobei die Schubeinstellungen variiert werden.

Außer der Ermittlung der Steiggeschwindigkeit, abhängig von V und F_i erlaubt das Diagramm auf anschauliche Weise die Ermittlung der Optimalwerte. Z.B. ist auch deutlich abzulesen, dass γ_{max} bei beträchtlich niedrigeren Geschwindigkeiten als $|w|_{max}$ liegt (für $F_i = 0$ eingezeichnet.).

Die gleiche Darstellung hat in der Praxis große Bedeutung, wenn bei gleich bleibender Schubkraft, d.h. bei gleicher Schubhebeleinstellung ε_{min} variiert wird, z.B. durch Variation der Landeklappenstellung. Besonders beim Steigflug nach dem Abheben mit einem ausgefallenen Triebwerk ist von großer Wichtigkeit mit der Klappenstellung zu fliegen, die den größten Bahnwinkel ergibt.

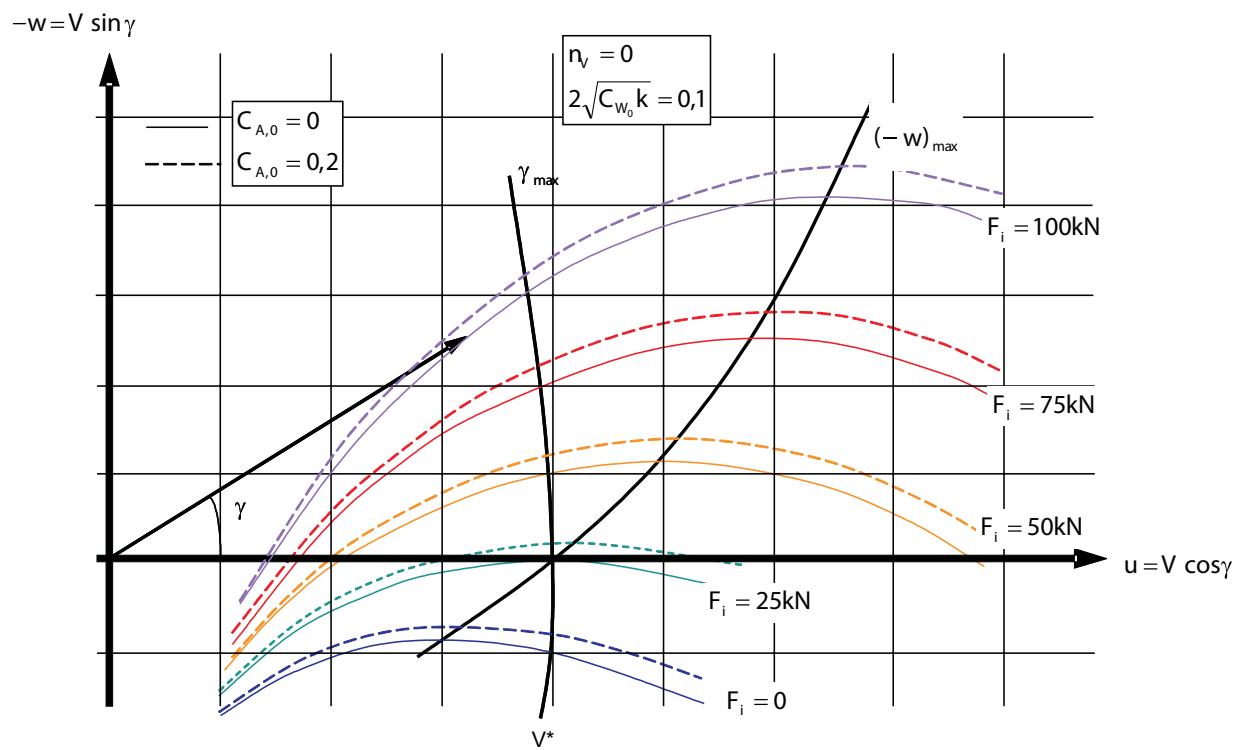


Abbildung 4.22: Darstellung der Steigleistung im Geschwindigkeitspolaren-Diagramm

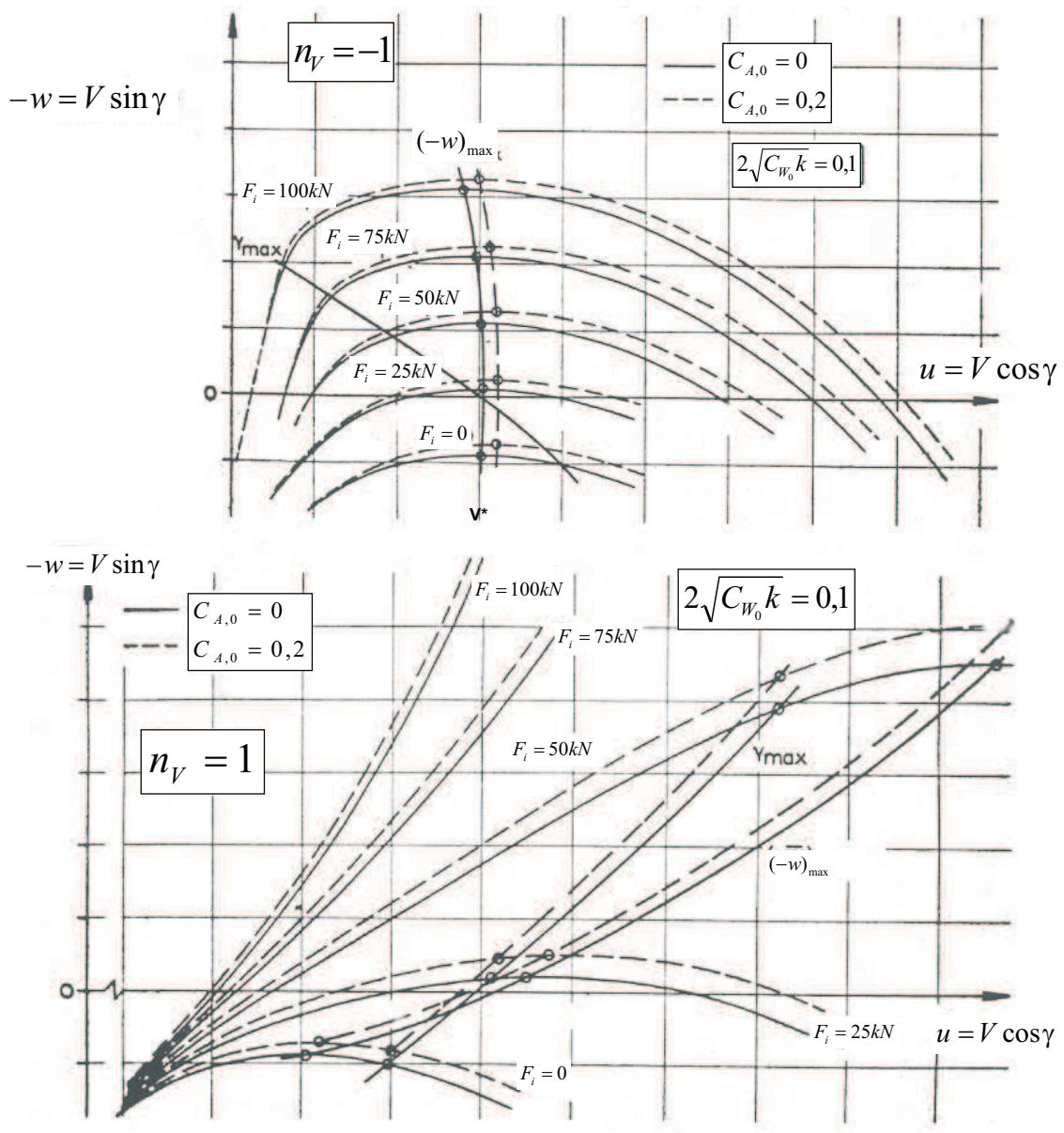


Abbildung 4.23: Darstellung der Steigleistung im Geschwindigkeitspolaren-Diagramm

4.3.5 Einfluss der Höhe

Als Voraussetzung für eine Steigflugberechnung muss der verfügbare Schub als Funktion der Flughöhe bekannt sein.

In Unterabschnitt 4.2.6 wurde gezeigt, wie die maximal erfliegbare Flughöhe von der Dichte und damit von der Höhe selbst abhängt. Die im vorangegangenen Abschnitt erfliegbare maximale Flughöhe ist dabei so zu interpretieren, dass diese quasi-stationär, also steht mit kleinen Änderungen der Höhe und damit des Steigwinkels erfliegen wird. Die Betrachtungen im vor-

liegenden Abschnitt gehen aber von wesentlich höheren Steigraten bzw. -winkeln aus.

Wie auch in vorangegangenen Betrachtungen geht man bei den in diesem Kapitel ausgeführten Berechnungen davon aus, dass diese auf einen beliebigen Referenzzustand bezogen werden. Dieser Zustand wird mit Index „i“ gekennzeichnet, am Referenzpunkt sind die Größen F , ρ , und V bekannt. Oft wählt man für den Referenzzustand die Höhe $H = 0$ oder $H = 11\text{km}$.

Wie bereits in Unterabschnitt 3.2.5 erwähnt, gilt für luftatemde Triebwerke in der Höhe von $0 \leq H \leq 11\text{km}$ etwa $0,7 \leq n_{\rho,0} \leq 0,8$. Oberhalb von 11km gilt $n_{\rho,11} = 1$. Betrachtet man die Gleichung für den Schubansatz und berücksichtigt wie in Unterabschnitt 4.2.6 den folgenden Zusammenhang:

$$V = V_i \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.78)$$

Mit der Berücksichtigung des Höheneinflusses ergibt sich für den Schub:

$$F = F_i \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{\left(n_{\rho} - \frac{n_V}{2} \right)} \quad (4.79)$$

Man erhält daher mit einem mittleren Wert von $n_{\rho,0} = 0,75$ die folgenden Exponenten:

Tabelle 4.9: Mittelwerte für die Exponenten zur Berechnung des Triebwerksschubes

	Triebwerksfaktor n_V		
$H [\text{km}] / n_{\rho}$	-1	0	+1
$0 \leq H \leq 11 / n_{\rho,11} = 0,75$	1,25	0,75	0,25
$> 11 / n_{\rho,0} = 1$	1,5	1	0,5

Das Bild 4.24 zeigt den Verlauf der sich aus der Tabelle 4.9 ergebenden Kurven. Wegen der Änderung des Exponenten in 11 km Höhe gilt oberhalb davon die Beziehung:

$$\frac{F_{n_V}}{F_{n_{V,i}}} = \frac{F_{n_{V,11}}}{F_{n_{V,i}}} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_{11}} \right)^{\left(n_{\rho,11} - \frac{n_V}{2} \right)} \quad (4.80)$$

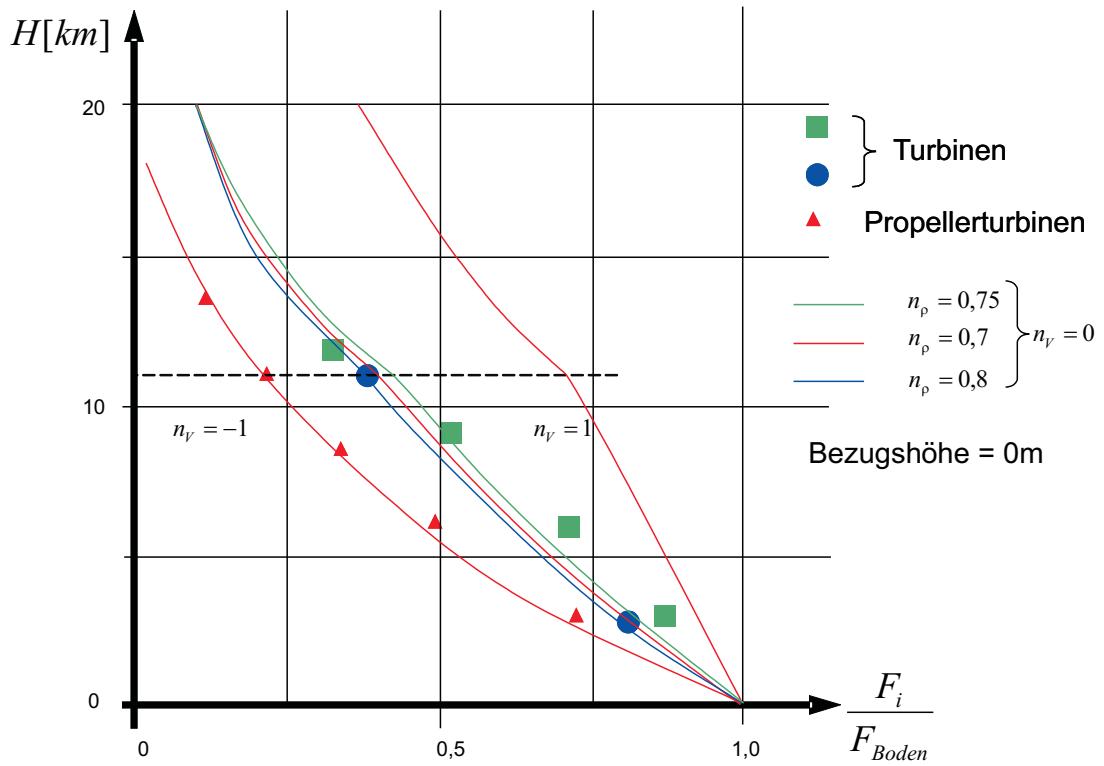


Abbildung 4.24: Verfügbarer Triebwerksschub in in bestimmter Höhe bezogen auf den max. Standschub

Zum Vergleich sind im Fall $n_V = 0$ auch die Kurven mit $n_{\rho,0} = 0,7$ und $n_{\rho,0} = 0,8$ mit eingetragen. Wie man sieht, ist der Einfluss von $n_{\rho,0}$ deutlich erkennbar. So steht für ein Einkreistriebwerk im Langsamflug ($n_V = 0$) bei $n_{\rho,0} = 0,7$ in ca. 9,2 km Höhe bzw. bei $n_{\rho,0} = 0,8$ jedoch schon in 8,2 km Höhe nur die Hälfte des am Boden zur Verfügung stehenden Schubes zur Verfügung.

Die in Bild 4.24 eingetragenen Werte ausgeführter Triebwerke bestätigen, dass es berechtigt ist, für die Abschätzung des Höheneinflusses den genannten Exponentialansatz zu verwenden.

Die zur Verfügung stehende Steigleistung bestimmt sich aus dem in der betrachteten Höhe zur Verfügung stehenden Schub und dem entsprechenden Widerstand. Die Höhenabhängigkeit von Schub und Widerstand bestimmt sich aus der Geschwindigkeit. Um nun die maximale Steigleistung bestimmen zu können wird wiederum ein Bezugspunkt benötigt. Hierzu ersetzen wir in Gl. 4.67 die Geschwindigkeit V entsprechend durch $V = V_i \cdot \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho}}$ und im Schubansatz zusätzlich den Anteil $\left(\frac{\rho}{\rho_i}\right)^{n_{\rho}}$ und erhalten dann folgende Gleichung:

$$-w_i = \frac{F_i \cdot V_i}{mg} \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{\frac{n_V+1}{2}} - C_{W_0} \cdot k_2 \cdot V_i^3 \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{k}{k_2 \cdot V_i \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.81)$$

Für die Bahngeschwindigkeiten ergeben sich hier:

$$V_{i,2}^2 = \frac{F_{i,0}}{6k_2 mg C_{W_0}} \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)^{\frac{(n_V-2)}{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{F_i}{3C_{W_0} k_2 mg} \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)^{\frac{(n_V-2)}{2}} \right)^2 + \frac{\rho}{3\rho_i} V^{*4}} \quad (4.82)$$

mit $n_V = -1, 0, 1$ und $F_{i,0} = \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho}$.

Von besonderer Bedeutung ist hierbei die Kenntnis der maximalen Steiggeschwindigkeit sowie ihre Zuordnung zu der entsprechenden Bahngeschwindigkeit. Analog zu den Ableitungen in Unterabschnitt 4.3.3 erhält man aus der Gl. 4.81 die in Bild 4.25 dargestellten Ergebnisse:

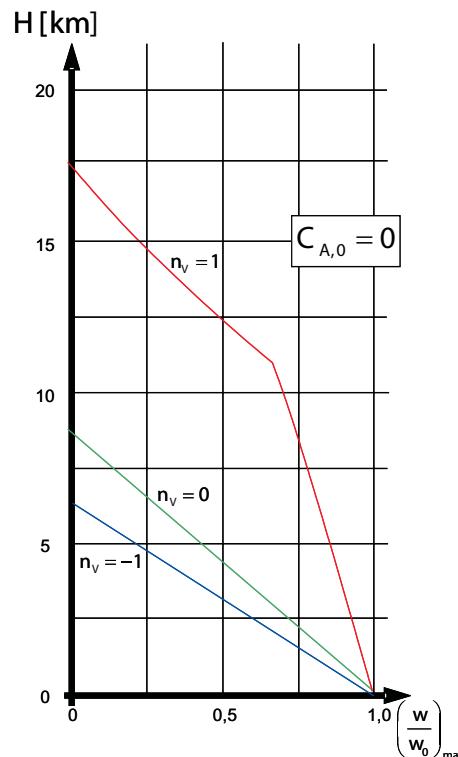


Abbildung 4.25: Max. Steiggeschwindigkeit bezogen auf die Werte am Boden

In Bild 4.25 ist die Abhängigkeit der maximalen Steiggeschwindigkeit, bezogen auf die Werte am Boden, dargestellt. Die Schnittpunkte der Kurven mit der Ordinate kennzeichnen zugleich die maximal erreichbare Flughöhen, bei denen voraussetzungsgemäß $w = 0$ gilt.

5 Bewegungen in der Horizontalebene - Kurvenflug

5.1 Allgemeine Zusammenhänge zum horizontalen Kurvenflug

Der Kurvenflug ist ein Flugmanöver zur Änderung des Flugbahnnazimuts χ . Um die dabei notwendige Krümmung der Flugbahn in der Horizontalebene zu erzielen, muss eine Kraft normal zum Drehvektor in der gewünschten Richtung erzeugt werden. Diese Zentripetalkraft entspricht der horizontalen Komponente des Auftriebsvektors, die durch die Querneigung des Flugzeuges entsteht. Bei den folgenden Betrachtungen wird der dynamische Vorgang der Kurveneinleitung außer acht gelassen und nur das Kräftegleichgewicht eines mit Querneigung in einer Horizontalebene fliegende Flugzeuges betrachtet. Da die Bahngeschwindigkeit betragsmäßig unverändert bleibt, bewegt sich das Flugzeug auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_K , für die folgende einfache Beziehung gilt

$$V = r_K \cdot \dot{\Delta\chi} . \quad (5.1)$$

Die Komponenten der Kraftgleichung im aerodynamischen System schreiben sich unter der Annahme, dass der Schiebewinkel $\beta = 0$ ist und der Schub in Bahnrichtung wirkt (vgl. Bild 5.1) entsprechend Gl. 3.91 mit $\cos(\alpha_{eff} + \sigma) = 1$:

$$\sum \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - W \\ mV\dot{\Delta\chi}\cos\Phi - mg\sin\Phi \\ mV\dot{\Delta\chi}\sin\Phi - A + mg\cos\Phi \end{bmatrix} = 0 \quad (5.2)$$

Das Kräftegleichgewicht in y_a -Richtung gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem Kurvenradius r_K und der Querneigungswinkel Φ . Unter Verwendung von Gl. 5.1 folgt

$$\tan\Phi = \frac{V}{g} \dot{\Delta\chi} = \frac{V^2}{g \cdot r_K} . \quad (5.3)$$

Das Kräftegleichgewicht in z_a -Richtung ergibt

$$A = mg\cos\Phi \left(1 + \frac{V}{g} \dot{\Delta\chi} \tan\Phi \right) . \quad (5.4)$$

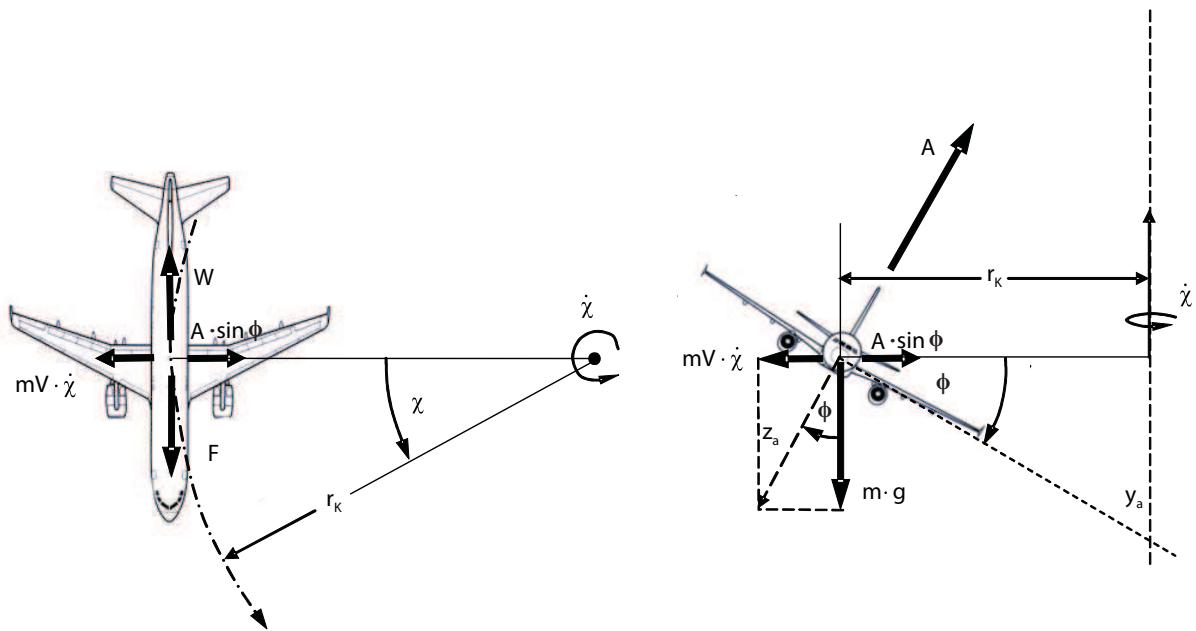


Abbildung 5.1: Kräfte und Beziehungen im horizontalen Kurvenflug

Unter Verwendung der Gl. 5.3 folgt daraus:

$$A = mg \cos \Phi \left(1 + \tan^2 \Phi \right) = mg \sqrt{1 + \tan^2 \Phi} = mg \sqrt{1 + \left(\frac{V^2}{g r_K} \right)^2} \quad (5.5)$$

Führt man die allgemeine Definition des Lastvielfachen $n = A/mg$ ein, so beträgt das Lastvielfache im Kurvenflug

$$\frac{A}{mg} = n = \sqrt{1 + \left(\frac{V^2}{g r_K} \right)^2} = \frac{C_A S (\rho/2) V^2}{mg}. \quad (5.6)$$

Zur Berechnung der Schubkraft wird eine symmetrische Polare angenommen. Die Kraftgleichung in Bahnrichtung besitzt unter Verwendung von Tabelle 3.2 folgende Form:

$$F = \left(C_{W_0} + k C_A^2 \right) S \frac{\rho}{2} V^2 \quad (5.7)$$

Dies führt auf folgenden Schubbedarf:

$$\frac{F}{mg} = \frac{F_i}{mg} \left(\frac{V}{V_i} \right)^{n_v} \left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho} = C_{W_0} V^2 k_2 + \frac{k n^2}{V^2 k_2}. \quad (5.8)$$

5.2 Optimaler Kurvenflug bei gegebenem Lastvielfachen

Nach Gl. 5.8 hängt die erforderliche Triebwerksleistung im Kurvenflug von der Bahngeschwindigkeit und dem Lastvielfachen ab. Die Bedingung für die erforderliche Leistung erhält man in bekannter Weise durch Ableitung und Nullsetzung der Gl. 5.8.

Man erhält

$$\frac{\partial \left(\frac{F_i}{V_i^{n_V}} \right)}{\partial V} = 0 = mg \left[C_{W_0} k_2 (2 - n_V) V_{min}^{(1-n_V)} - \frac{k n^2}{k_2} (2 + n_V) V_{min}^{(-3-n_V)} \right] \quad (5.9)$$

nach einiger Zwischenrechnung erhält man die optimale Geschwindigkeit um bei gegebenem Lastvielfachen mit dem minimalen Schub fliegen zu können.

$$V_{F_{i_{min}}^{n_V}}^2 |_{n=const} = \sqrt{\frac{(2+n_V) k n^2}{(2-n_V) k_2^2 C_{W_0}}} = n \cdot V^{*2} \sqrt{\frac{(2+n_V)}{(2-n_V)}} \quad (5.10)$$

Die Auswertung der Gl. 5.10 für die von uns betrachteten Triebwerkfaktoren liefert folgendes Ergebnis:

a) $n_V = -1$

$$V_{F_{i_{min}}^{-1}}^2 = \sqrt{\frac{k n^2}{3 k_2^2 C_{W_0}}} = \frac{n}{\sqrt{3}} V^{*2} \quad (5.11)$$

b) $n_V = 0$

$$V_{F_{i_{min}}^0}^2 = \sqrt{\frac{k n^2}{k_2^2 C_{W_0}}} = n \cdot V^{*2} \quad (5.12)$$

c) $n_V = 1$

$$V_{F_{i_{min}}^{+1}}^2 = \sqrt{\frac{3 k n^2}{k_2^2 C_{W_0}}} = \sqrt{3} n \cdot V^{*2} \quad (5.13)$$

Die Geschwindigkeit für die minimale erforderliche Triebwerksleistung ist nach Gl. 5.10 proportional der Wurzel des Lastvielfachen. Sie liegt bei $n_V = -1$ um den Faktor $1/\sqrt[4]{3}$ niedriger und bei $n_V = +1$ um den Faktor $\sqrt[4]{3}$ höher als für $n_V = 0$ (vgl. Bild 5.2). Aus dem Kräftegleichgewicht im Kurvenflug besteht nach Gl. 5.6 folgender Zusammenhang zwischen Lastvielfachen, Geschwindigkeit und Kurvenradius

$$V^4 = (n^2 - 1) g^2 r_K^2 \quad (5.14)$$

Durch Gleichsetzen von Gl. 5.14 und dem Quadrat von Gl. 5.10 erhält man eine Bestimmungsgleichung für den Kurvenradius abhängig vom Lastvielfachen, bei dem die erforderliche Triebwerksleistung am geringsten wird

$$r_{K, V_{min}^{n_V} |_{n=const}} = \sqrt{\frac{2+n_V}{2-n_V} \frac{k}{k_2^2 C_{W_0}} \frac{n^2}{(n^2-1) g^2}} \quad (5.15)$$

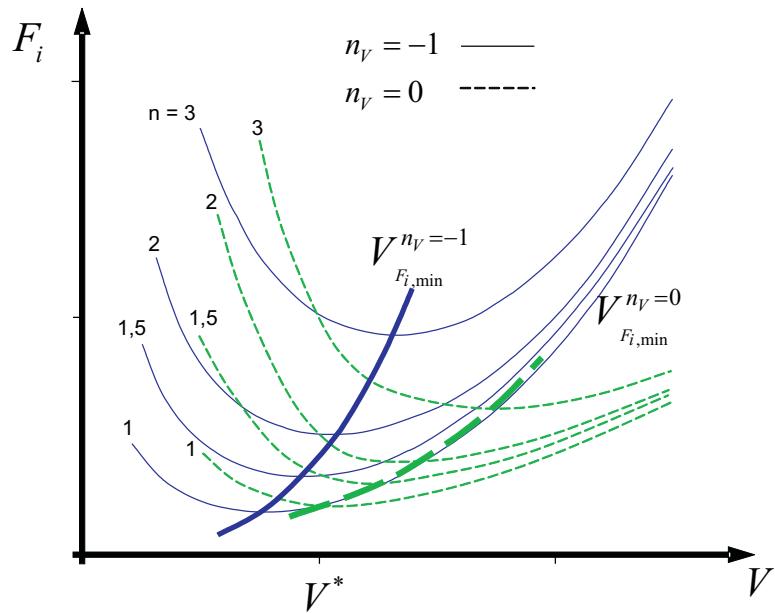


Abbildung 5.2: Abhängigkeit der Schubkraft vom Lastvielfachen und der Geschwindigkeit im Kurvenflug

Die Abhängigkeit des Triebwerksfaktors vom Lastvielfachen und der Geschwindigkeit ist in Bild 5.3 dargestellt.

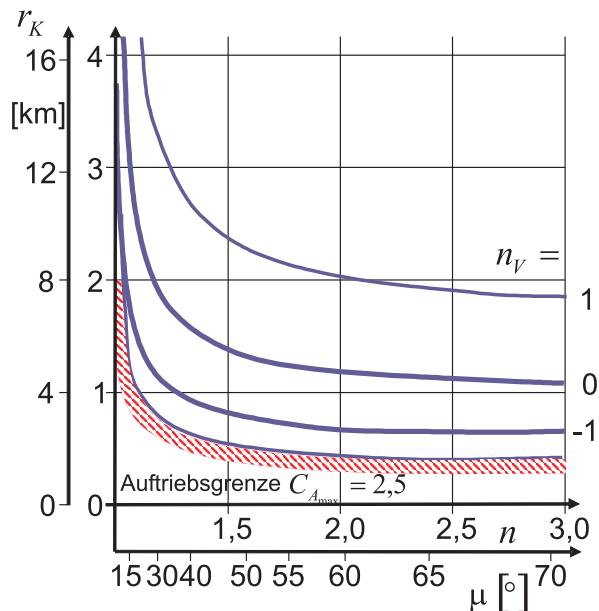


Abbildung 5.3: Kurvenradius in Abhängigkeit vom Lastvielfachen (minimale erforderliche Triebwerksleistung) gemäß Gl. 5.15

5.3 Optimaler Kurvenflug bei gegebenem Radius

Geht man von einem gegebenen Kurvenradius aus, so folgt nach Einsetzen von $n = f(V)$ aus Gl. 5.6 in Gl. 5.8 mit dem Schubansatz (wobei gilt: $\rho = \rho_i$) folgendes:

$$\frac{F_i}{V_i^{nV}} = \frac{m g}{V^{nV}} \cdot \left(\frac{k}{g^2 r_k^2 k_2} V^2 + C_{W_0} k_2 V^2 + \frac{k}{k_2 V^2} \right) \quad (5.16)$$

Mit der Bedingung $\frac{d\left(\frac{F_i}{V_i^{nV}}\right)}{dV} = 0$ ergeben sich die minimalen Geschwindigkeiten für die drei Triebwerksfaktoren bei konstantem Radius zu:

a) $n_V = -1$

$$V_{F_i, \min}^4 = \frac{\frac{k}{k_2}}{3 \left(\frac{k}{g^2 r_k^2 k_2} + C_{W_0} k_2 \right)} \quad (5.17)$$

b) $n_V = 0$

$$V_{F_i, \min}^4 = \frac{\frac{k}{k_2}}{\left(\frac{k}{g^2 r_k^2 k_2} + C_{W_0} k_2 \right)} \quad (5.18)$$

c) $n_V = 1$

$$V_{F_i, \min}^4 = \frac{3 \frac{k}{k_2}}{\left(\frac{k}{g^2 r_k^2 k_2} + C_{W_0} k_2 \right)} \quad (5.19)$$

Werden die Geschwindigkeiten in Gl. 5.16 eingesetzt, ergeben sich die Abbildungen:

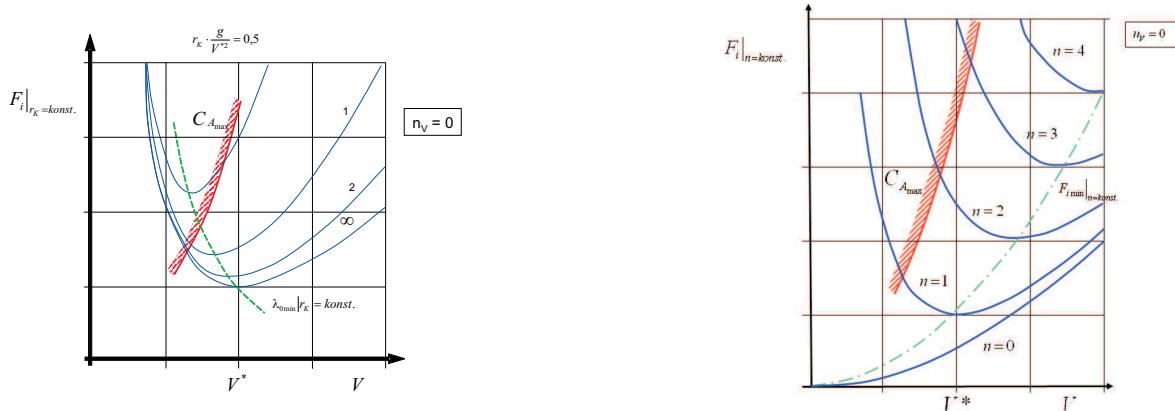


Abbildung 5.4: Vergleich der Schubkraft bei $n=\text{konst.}$ und $r_k=\text{konst.}$

5.4 Energiebetrachtung

Der Flug auf einer gekrümmten Bahn, hier also der horizontale Kurvenflug, ist zwangsläufig mit einer Erhöhung des Widerstandes (Erhöhung des Auftriebswiderstandes) gegenüber dem des horizontalen Horizontalfluges verbunden. Der Kurvenflug ist deshalb energetisch ungünstiger als der Horizontalflug. Dies hat großen Einfluss auf die Leistungsbetrachtungen im Flug.

Der Energieverbrauch beim Flug auf einem Kurvenstück s_K , welches durch den Kurvenradius r_K und den Azimutwinkel $\Delta\chi$ definiert sei, ist gleich der Widerstandsarbeit $A_{\Delta\chi}$. Bezogen auf das Fluggewicht erhält man unter Verwendung der Gl. 4.62

$$a_{\Delta\chi} = \frac{A_{\Delta\chi}}{m \cdot g} = \frac{W_{\Delta\chi} \cdot r_K \cdot \Delta\chi}{m \cdot g} = (C_{W_0} V^2 k_2 + \frac{k \cdot n^2}{V^2 k_2}) \cdot r_K \cdot \Delta\chi \quad (5.20)$$

Die Widerstandsarbeit für eine Horizontalflugstrecke beträgt entsprechend

$$a_{Hor} = \frac{W_{Hor} \cdot s_{Hor}}{m \cdot g} = (C_{W_0} V^2 k_2 + \frac{k}{V^2 k_2}) \cdot s_{Hor} \quad (5.21)$$

Bei gleicher Widerstandsarbeit bzw. gleichem Energieverbrauch beträgt das Verhältnis der Horizontalflugstrecke zur Kurvenflugstrecke unter Voraussetzung konstanten Fluggewichts

$$\frac{s_{Hor}}{r_K \cdot \Delta\chi} = \frac{C_{W_0} \cdot V^4 \cdot k_2^2 + k \cdot n^2}{C_{W_0} \cdot k_2^2 \cdot V^4 + k} \quad (5.22)$$

In Bild 5.5 ist diese Beziehung ausgewertet. Man erkennt, dass für $n > 1$ die Kurvenflugstrecke stets kleiner als die energiegleiche Horizontalflugstrecke ist. Die ausgezogenen Kurven gelten allgemein. Sie setzen allerdings voraus, dass der Kurvenflug und der zum Vergleich herangezogene Horizontalflug mit der gleichen Geschwindigkeit \mathbf{V} geflogen wurden. Für die Zuordnung der Machzahl (gestrichelt gezeichnet) zu \mathbf{V} wurden als Beispiel folgende Zahlenwerte angenommen: $\frac{m \cdot g}{s} = 4000 \text{ N/m}^2$, $H = 11 \text{ km}$ und eine symmetrische Polare entsprechend Bild 3.16. Die Grenzkurve n_{max} soll die leistungsmäßige Grenze des Lastvielfachen kennzeichnen, die im vorliegenden Beispiel für ein Hochleistungsflugzeug gewählt wurde. Für eine durch die Azimutwinkeländerung $\Delta\chi$ definierte Kurve kann man die äquivalente Horizontalflugstrecke nach Gl. 5.22 als Funktion vom Lastvielfachen n und Geschwindigkeit V darstellen, wenn der Kurvenradius durch $r_K = \frac{V^2}{g \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$ ausgedrückt wird.

$$\frac{s_{Hor} \cdot g}{\Delta\chi} = \frac{V^2}{C_{W_0} \cdot k_2^2 \cdot V^4 + k} \cdot \frac{C_{W_0} k_2^2 \cdot V^4 + k \cdot n^2}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (5.23)$$

Bild 5.6 zeigt den Verlauf dieser Kurven über V mit dem Lastvielfachen n als Parameter. Es ist zu erkennen, dass es günstig ist, im Bereich kleiner Geschwindigkeiten ($M < 1$) mit kleinen Lastvielfachen und bei großen Werten von V mit höheren n -Werten zu fliegen, im letzten Fall also bis an die Leistungsgrenze zu gehen.

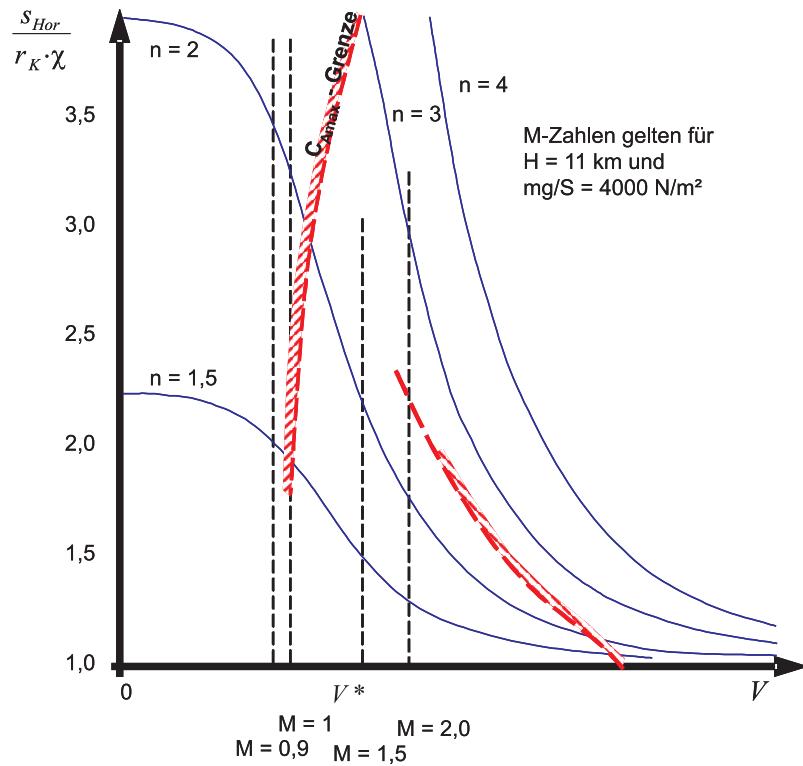


Abbildung 5.5: Verhältnis der Horizontalflugstrecke zur Kurvenflugstrecke bei gleicher Widerstandsarbeit

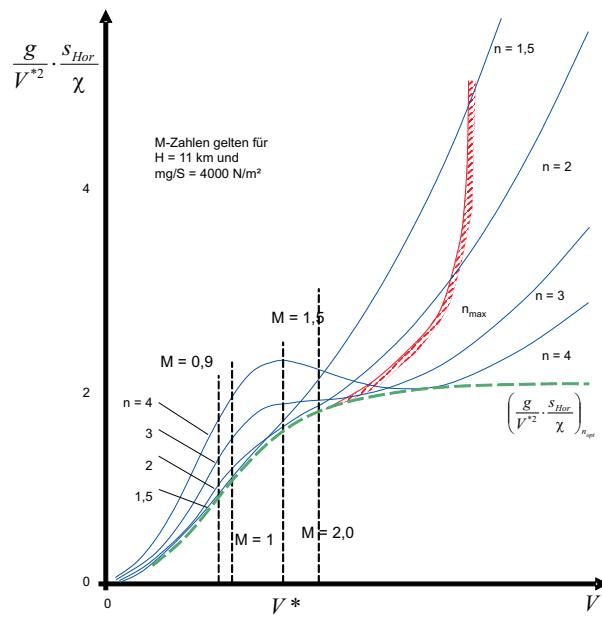


Abbildung 5.6: Äquivalente Horizontalflugstrecke in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Die Funktion 5.23 besitzt drei Extremwerte, für die sich durch Auswertung der Beziehung

$\frac{\partial(\frac{s_{Hor}}{\Delta\chi})}{\partial V} = 0$ folgende Bedingungsgleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_{2,3} &= \frac{V^*}{\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[4]{n^2 - 3 \pm \sqrt{(n^2 - 3)^2 - 4 \cdot n^2}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Interessant ist hiervon die Geschwindigkeit V_2 , bei der $\frac{s_{Hor}}{\Delta\chi}$ einen Maximalwert annimmt. Dieser wird jedoch nur erreicht, wenn $n > 3$ ist; im Grenzfall $n = 3$ erhält man einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente, vgl. Bild 5.6. Da auch bei Hochleistungsflugzeugen die leistungsmäßig stationär erfliegbare Horizontalflugkurve kaum bei Lastvielfachen $n > 3$ liegt, ist der beschriebene Maximalwert praktisch ohne Bedeutung.

Ermittelt man das Lastvielfache für die geringste Widerstandsarbeit $\frac{\partial a_{\Delta\chi}}{\partial n} = 0$ aus Gl. 5.20 nach Einsetzen der Beziehung $r_K = \frac{V^2}{g \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$, so erhält man

$$n^2 \Big|_{a_{\Delta\chi_{min}}} = 2 + \frac{V^4}{V^{*4}}. \quad (5.25)$$

Eingesetzt in Gl. 5.23 erhält man die Einhüllende der $n = \text{konstant}$ -Kurven in Bild 5.6 kennzeichnet voraussetzungsgemäß den Kurvenflug mit geringster Widerstandsarbeit.

$$\frac{g}{V^{*2}} \cdot \frac{s_{Hor}}{\Delta\chi} \Big|_{a_{\Delta\chi_{min}}} = \frac{2 \cdot V^2}{\sqrt{V^{*4} + V^4}}. \quad (5.26)$$

Abschließend betrachten wir nun das Verhältnis einer geradlinig verlaufenden Flugstrecke zu einer im stationären Kurvenflug geflogenen Strecke. Dabei wird angenommen, dass die für diese beiden Strecken zur Verfügung stehende Energie gleich groß ist. Das Verhältnis der beiden Strecken berechnet sich aus dem einfachen Zusammenhang:

$$\frac{s_{Hor}}{\Delta\chi} \Big|_{a_{\Delta\chi_{min}}} = 2 \cdot r_K|_{n_{opt}} \quad (5.27)$$

Wir erhalten dann eine Aussage über den Mehraufwand an Energie im Kurvenflug, der sich in einer quantifizierbaren Flugstrecke ausdrücken lässt.

Dieses Ergebnis bedeutet, dass die äquivalente Horizontalflugstrecke für einen Kurvenflug mit der Azimuthwinkeländerung $\Delta\chi$ und bei Einhalten des optimalen Lastvielfachen gerade zweimal so groß ist wie die Kurvenflugstrecke $r_{K_{opt}} \cdot \Delta\chi$. Der Verlust an Flugstrecke durch Einleiten z. B. einer 360° Kurve beträgt demnach

$$\Delta s = 4 \cdot \pi \cdot r_{K_{opt}} \quad (\text{Vgl. Bild 5.7}).$$

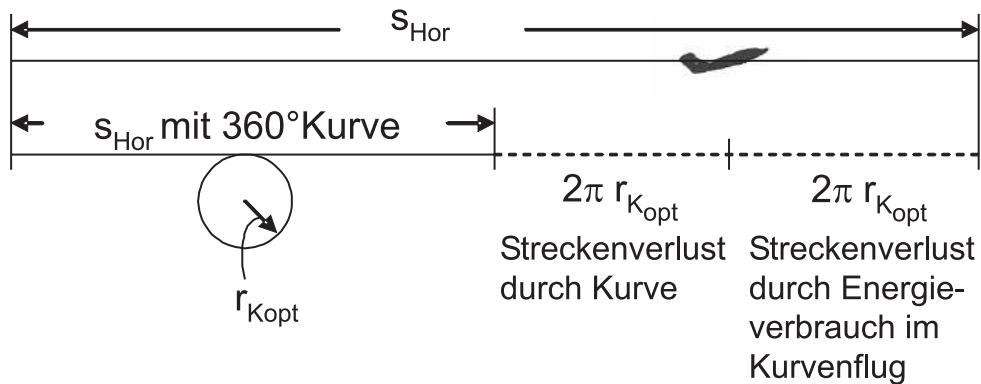


Abbildung 5.7: Streckenverlust durch Kurvenflug

In den vorliegenden Fällen wurde der zum Vergleich herangezogene Horizontalflug stets mit der gleichen Geschwindigkeit geflogen wie die Kurve. Dies ist sinnvoll, wenn z. B. nur eine 360° Kurve beim Streckenflug eingeleitet wird. Betrachtet man zum Vergleich einen optimalen Streckenflug mit der Geschwindigkeit V^* , so wird der äquivalente Streckenverlust im Kurvenflug beim Flug mit $V \neq V^*$ noch beträchtlich höher.

6 Höhen-Machzahl-Diagramm

6.1 Einführung

In den vorangehenden Abschnitten wurden stationäre Flugzustände betrachtet. Da Schub (F) und Fluggeschwindigkeit (V) von der Flughöhe H und dem Fluggewicht $m \cdot g$ abhängen, erhält man bei gegebenem Gewicht innerhalb des noch zu definierenden Flugbereichs in allen Punkten der Höhen-Machzahl-Ebene stationäre Leistungswerte. Diese bezeichnet man als *Punktleistungen*. Es ist zweckmäßig, Punkte gleicher SEP (*Specific Excess Power*) im Höhen-Machzahl-Diagramm miteinander zu verbinden, so dass man ein Feld von Niveaulinien erhält, aus dem sich leicht die Gebiete optimaler Leistungsfähigkeit ablesen lassen. Voraussetzung für die Berechnung solcher Diagramme ist die Kenntnis der machzahlabhängigen Polarenwerte sowie der Triebwerksdaten abhängig von Machzahl, Drosselgrad und Flughöhe.

Für Flugzeuge, deren maximale Fluggeschwindigkeit noch bei Machzahlen liegen, die eine Vernachlässigung von Kompressibilitätseffekten erlauben, erübrigt sich die Verwendung der Machzahl. Man stellt in solchen Fällen die Punktleisungen im Höhen-Geschwindigkeits-Diagramm dar.

Die Grenzlinie des Flugbereichs wird häufig als *Flugveloppe* bezeichnet, da sie den theoretisch erfliegbaren Flugbereich einhüllt. Sie besteht aus mehreren Teilstücken, die jeweils durch verschiedenartige physikalische Bedingungen definiert sind und die auch stark von den Auslegungskriterien eines Flugzeugs abhängen. Für das Beispiel eines Überschallflugzeuges sind die Flugbereichs-Grenzkurven in Bild 6.1 schematisch dargestellt, die im folgenden erläutert und diskutiert werden. Bild 6.2 stellt im Vergleich zu Bild 6.1 die Grenzen für ein Unterschallflugzeug dar. Für die Beispielkurven wurden die Polarenwerte nach Bild 3.16 und die Schub- und Vortriebswerte etwa entsprechend Bild 3.26 verwendet.

6.2 Flugbereichsgrenzen

Die *Auftriebsgrenze* definiert die kleinste erfliegbare Fluggeschwindigkeit, bei der der maximal erzielbare Auftrieb gerade gleich dem Fluggewicht ist. Da der Auftrieb mit zunehmender Höhe bzw. abnehmender Luftdichte abnimmt, verschiebt sich diese Grenze entsprechend zu größeren Machzahlen. Entsprechend Gl. 4.24 gilt mit der Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}}$

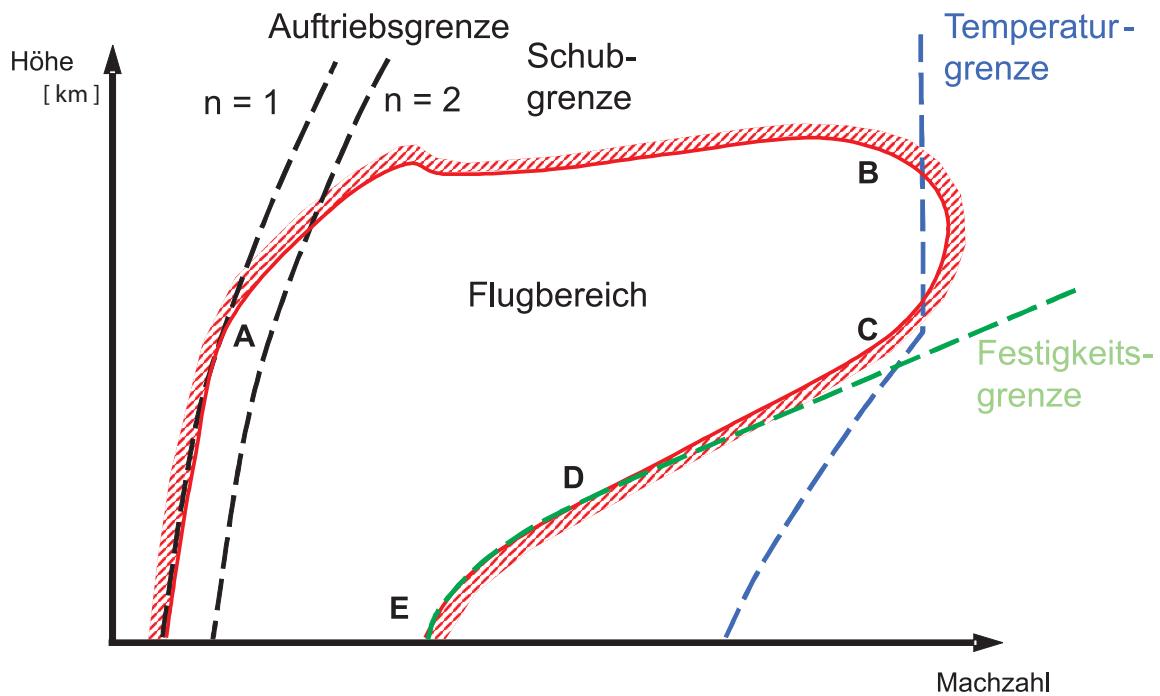


Abbildung 6.1: Grenzkurven des Flugbereichs: Flugveloppe (für ein Überschallflugzeug)

für die kleinste zulässige Machzahl:

$$Ma_{min} = \frac{V_{min}}{a} \geq \sqrt{\frac{m \cdot g}{S \cdot C_{A_{max}}} \frac{2 \cdot n}{\kappa \cdot p(H)}} = \sqrt{\bar{q}_{min} \cdot \frac{2}{\kappa \cdot p(H)}} \quad (6.1)$$

wobei $p(H)$ der Standardatmosphäre zu entnehmen ist und n das Lastvielfache darstellt. Man erkennt aus Gl. 6.1, dass zur Erweiterung des Flugbereichs zu kleinen Geschwindigkeiten kleine Flächenbelastungen und hohe Auftriebsmaxima anzustreben sind. In Unterabschnitt 4.2.2, insbesondere Bild 4.7, ist dieser Zusammenhang ausführlich erläutert. Das Erfliegen dieser durch den maximalen Auftriebsbeiwert definierten Grenze ist mit Rücksicht auf die Flugsicherheit meist nicht zulässig, z. B. ist für Verkehrsflugzeuge die zulässige Minimalgeschwindigkeit bei Start/Landung auf $V \geq 1,2 \cdot V_{min}$ festgelegt. Bis auf den Kurvenflug sowie den Abfangfall gilt in der obigen Beziehung stets $n = 1$.

Die *Leistungsgrenze* im Horizontalflug ist entsprechend Gl. 4.28 definiert durch die Bedingung $F_{max} = W$. Sie stellt einen theoretischen Grenzwert dar, der insbesondere zum Vergleich der Leistungsfähigkeit verschiedener Flugzeuge von Nutzen sein kann. Da diese Grenze sowohl in vertikaler Richtung, d. h. im Steigflug, als auch in horizontaler Richtung im Beschleunigungsflug nur in unendlich großer Flugzeit wegen des mit Annäherung an diese Grenze immer stärker abnehmenden Schubüberschusses erreicht werden kann, definiert man häufig die Leistungsgrenzen eines Flugzeuges durch Werte, die innerhalb der theoretischen Grenzkurve liegen. Die Leistungsgrenze schränkt bei Unterschallflugzeugen den Flugbereich bezüglich der maximal erreichbaren Höhen ein und definiert zugleich auch die maximal erreichbare Fluggeschwindigkeit bzw. Flugmachzahl. Bei Überschallflugzeugen erhält man sowohl für den

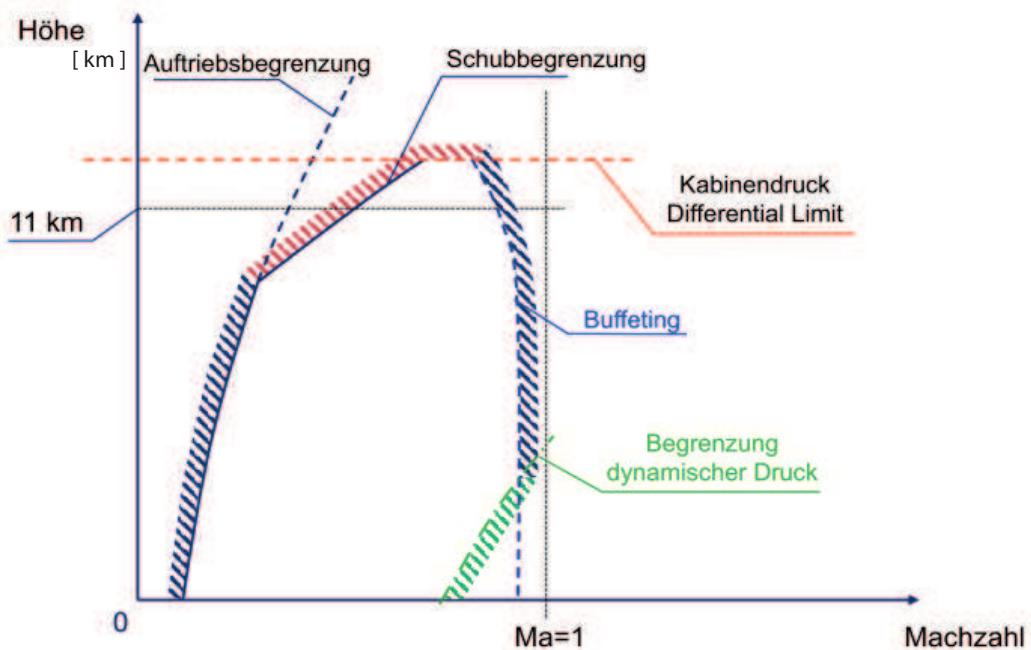


Abbildung 6.2: Grenzkurve des Flugbereichs: Flugveloppe (für ein Unterschall-Jet)

Unterschallbereich als auch den Überschallbereich jeweils eine maximal erreichbare Flughöhe, die auch als *Dienstgipfelhöhe* bezeichnet werden; dabei ist die des Überschallbereichs stets größer. Nur bei Flugzeugen mit Raketenantrieb kann bei hohen Flächenbelastungen die Gipfelhöhe durch die Auftriebsgrenze definiert sein, Bild 4.13. Die Beziehungen zur Berechnung der Leistungsgrenze sind dem Abschnitt 4.2 zu entnehmen.

Die *Wärmegrenze* ist nur bei Überschallflugzeugen hoher Leistungsfähigkeit von Bedeutung. Mit Rücksicht auf die Erhaltung der durch Werkstoffvergütung erreichten Festigkeitswerte sowie thermische Wechselbelasten darf die Struktur solcher Flugzeuge nur begrenzten Maximaltemperaturen ausgesetzt werden. Da im Überschallflug besonders am Staupunkt, aber auch in der Grenzschicht hohe Temperaturen auftreten, die proportional dem Quadrat der Machzahl sind, wäre die Festigkeit der gesamten Struktur beim Überschreiten der zulässigen maximalen Machzahl gefährdet. Maßgebend ist hierbei die Totaltemperatur, die sich aus der Addition der Umgebungstemperatur und derjenigen infolge der aerodynamischen Aufheizung ergibt. Da die Umgebungstemperatur mit wachsender Höhe entsprechend der Standardatmosphäre (vgl. Unterabschnitt 2.2.3) bis zur Tropopause abnimmt und in der Stratosphäre konstant bleibt, prägt sich diese Charakteristik auch der Wärmegrenze im Höhen-Machzahl-Diagramm auf.

Die aerodynamische Aufheizung kann durch die Beziehung

$$T_{\text{Zelle}} = T(H) \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2\right) \quad (6.2)$$

dargestellt werden. Damit erhält man für die maximale Machzahl bei einer zulässigen Ober-

flächentemperatur $T_{zul} = 273 + t_{zul}$, t_{zul} in °C

$$Ma_{max,t} = \sqrt{(273 + t_{zul} - T(H)) \cdot \frac{2}{T(H) \cdot (\kappa - 1)}}. \quad (6.3)$$

Dabei bedeutet $T(H)$ die Umgebungstemperatur in Kelvin, die z. B. entsprechend der Standardatmosphäre ($H > 11\text{ km}$), da die maximalen Machzahlen von Überschallflugzeugen in diesen Höhen erreicht werden. Mit $\kappa = 1,4$ und $T_{H>11\text{ km}} = 216,5\text{ K}$ nach der Standardatmosphäre vereinfacht sich Gl. 6.3 zu folgender Zahlenwertgleichung

$$Ma_{max,t,H>11} = \sqrt{1,305 + \frac{t_{zul}}{43,3}}. \quad (6.4)$$

Die *Festigkeitsgrenze* wird gekennzeichnet durch die maximale Flugmachzahl, bei der die Kräfte und Momente im Horizontalflug den der Strukturauslegung zugrunde gelegten zulässigen sicheren Grenzwerten entsprechen. Da die Luftkraftbelastungen im wesentlichen dem Staudruck proportional sind, kann diese Grenze im Höhen-Machzahl-Diagramm durch eine Kurve konstanten maximalen Staudrucks $\bar{q} = \frac{\rho}{2} \cdot V^2$ dargestellt werden.

Analog zu der Gl. 6.1 erhält man

$$Ma_{max,\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}_{max} \cdot \frac{2}{\kappa \cdot p(H)}}. \quad (6.5)$$

Bild 6.1 veranschaulicht, wie sich die Enveloppe eines Überschallflugzeugs mit Strahltrieb aus den einzelnen Grenzkurven zusammensetzt. So ist für den Bereich 0-A der Auftrieb, für A-B die Triebwerksleistung für die maximalen Höhen, für B-C die aerodynamische Erwärmung, für C-D wiederum die Triebwerksleistung, hier jedoch für die maximale Machzahl, und für D-E die Festigkeitsauslegung des Flugzeugs maßgebend. Die hier beschriebenen Flugbereichsgrenzen sind die wichtigsten und lassen sich zudem relativ einfach flugmechanisch beschreiben. Im praktischen Flugbetrieb können je nach Einsatzart des Flugzeugs weiter einschränkende Flugbereichsgrenzen auftreten, wie z. B. die Böengrenze u. a.

Wie zuvor erwähnt wurde und auch in Bild 6.2 verdeutlicht ist, spielt die Temperaturgrenze bei Unterschallflugzeugen keine Rolle. Bei diesen sind primär andere Effekte zu beachten. Der Einfluss der Festigkeitsgrenze ist eher in den geringen Höhen relevant, da mit zunehmender Höhe der Effekt des *Buffeting* überwiegt. Unter *Buffeting* versteht man eine elastische Schwingung des Tragflügels, die durch den *Buffet* ausgelöst wird. *Buffet* wiederum wird durch einen Verdichtungsstoß ausgelöst. Dieser Verdichtungsstoß entsteht in diesem Fall dadurch, dass die Geschwindigkeit der Strömung lokal, in der Regel auf der Oberseite des Tragflügels, die Schallgeschwindigkeit überschreitet, obwohl die Anströmgeschwindigkeit im Unterschallbereich liegt. Dieser Verdichtungsstoß wandert auf der Tragfläche und erzeugt dadurch unterschiedliche Auftriebs- und Widerstandswerte, die das *Buffeting* zur Folge haben. Die obere Grenze in Bild 6.2 ist durch den maximal zulässigen Kabinendruck bestimmt.

6.3 Flugmechanische Deutung des Flugbereichs

6.3.1 Der Drosselgrad

Ein stationärer Horizontalflug innerhalb des durch die Leistungsgrenze beschriebenen Flugbereichs ist nur möglich, wenn das Triebwerk entsprechend gedrosselt wird. Verbindet man nun Punkte gleichen *Drosselgrades*, wobei als Drosselgrad D das Verhältnis des vorhandenen Schubes (bzw. Leistung) zum Maximalschub (Maximalleistung) definiert sei, so erhält man Kurven entsprechend Bild 6.3. Je kleiner der Drosselgrad in einzelnen Punkten des Flugbereichs ist, um so größer ist der in diesem Punkt vorhandene Leistungsüberschuss. Der Punkt kleinsten Drosselgrades liegt im vorliegenden Beispiel bei $H = 0$ und $M = 0,46$. Der Flugbereich innerhalb der Grenzkurven ist durch einen mehr oder weniger großen Schub- bzw. Leistungsüberschuss gekennzeichnet, der zur Durchführung von Flugmanövern zur Verfügung steht. Dieses wird im folgenden für einige Beispiele veranschaulicht.

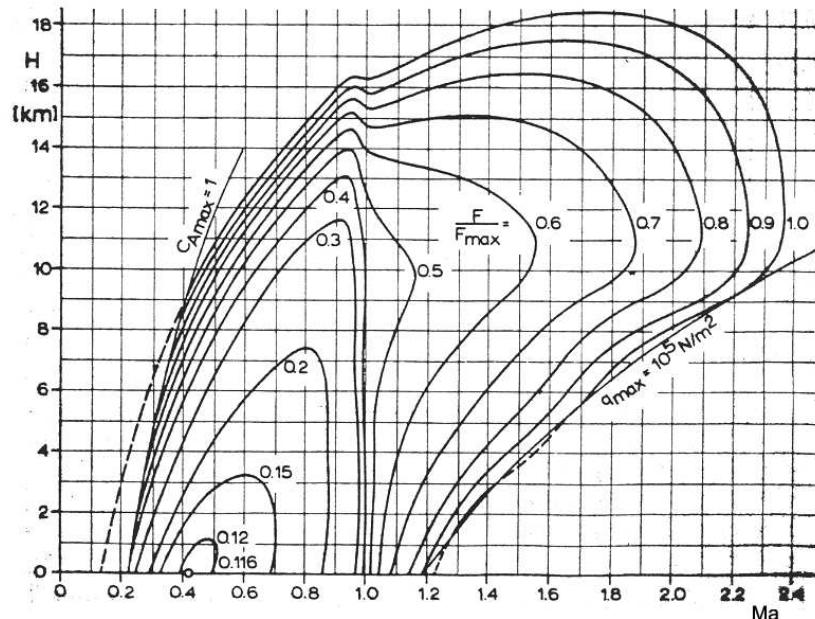


Abbildung 6.3: Höhen-Machzahl-Diagramm bei unterschiedlichen Einstellungen des Drosselgrads

6.3.2 Das Steigvermögen

In Bild 6.4 ist als Maß für die Manövriertfähigkeit das Steigvermögen dargestellt, für das nach den Beziehungen in Unterabschnitt 4.3.1 gilt

$$|w| = V \cdot \frac{F - W}{m \cdot g}. \quad (6.6)$$

Während die Leistungsgrenze entsprechend $F - W = 0$ hier durch $w = 0$ dargestellt wird, ergeben sich innerhalb der Grenzkurven Bereiche verschiedenen Steigvermögens, von denen die Punkte $H = 0$ und $M = 0,93$ bzw. $H = 9,6\text{ km}$ und $M = 1,78$ herausragen, weil sie jeweils die Maximalwerte im Unterschall- bzw. im Überschallbereich darstellen. Diese Betrachtung $|w|(H, M)$ ist von besonderer Bedeutung auch für die Durchführung instationärer Steigflüge, denn es ist einleuchtend, dass zur Planung eines Steigflugprogramms die Kurven des Steigvermögens im stationären Bereich eine wesentliche Grundlage darstellen. Im Abschnitt 7.4 wird auf diese Problematik noch näher eingegangen werden.

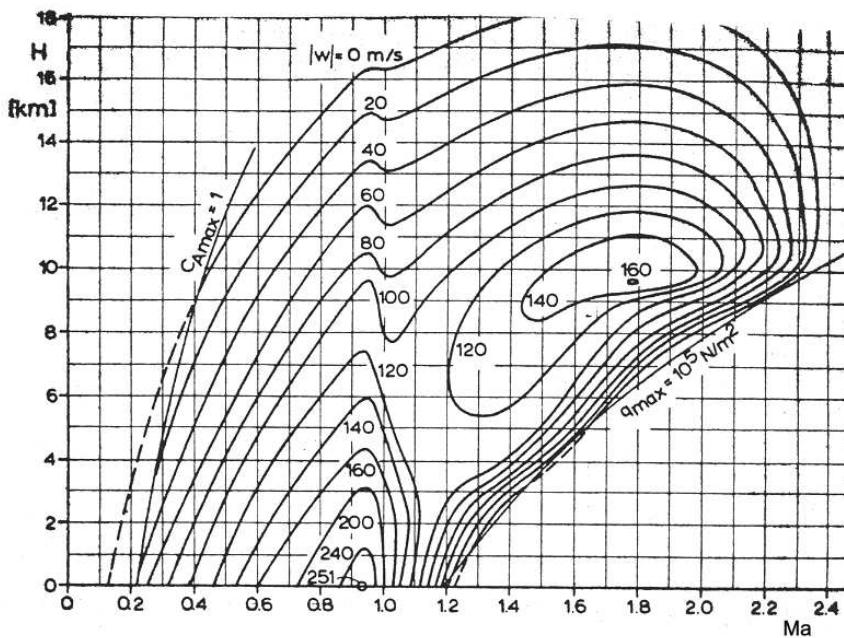


Abbildung 6.4: Steiggeschwindigkeit im Höhen-Machzahl-Diagramm

6.3.3 Das wirtschaftliche Steigvermögen

Während das Steigvermögen den Höhengewinn pro Zeiteinheit und damit ein Maß für den schnellstmöglichen Steigflug darstellt, ist häufig der Höhengewinn je kg verbrauchter Kraftstoffmasse von Bedeutung. Diese häufig als *wirtschaftlichstes Steigvermögen* h bezeichnete Größe ist eng mit dem oben definierten Steigvermögen verknüpft und beträgt

$$h = \frac{\dot{H}}{m_B} = \frac{|w|}{m_B}. \quad (6.7)$$

In Bild 6.5 sind Linien konstanter Werte h innerhalb des Flugbereichs dargestellt. Man erkennt auch hier zwei ausgeprägte Maximalwerte, die im Vergleich zu den entsprechenden Werten in Bild 6.4 bei wesentlich größeren Flughöhen liegen. Man kann schon aus diesem Ergebnis schließen, dass ein wirtschaftlicher, d. h. kraftstoffoptimaler Steigflug in größeren Flughöhen verlaufen muss als ein zeitoptimaler Steigflug. Nur im Sonderfall eines von der Höhe und der Machzahl unabhängigen Kraftstoffmassenflusses m_B liegen die Maximalwerte für $|w|$ und h in gleichen Punkten des H-M-Diagramms.

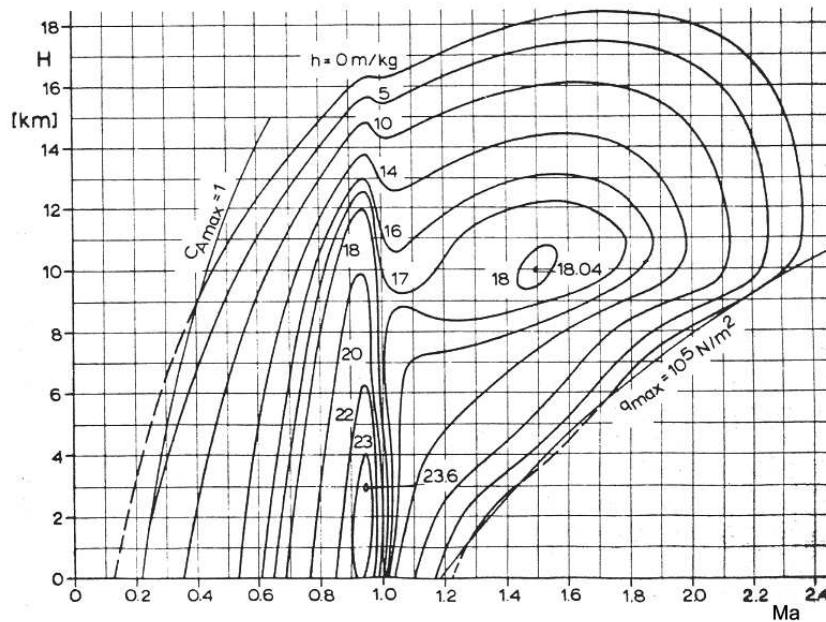


Abbildung 6.5: Flugbereichsgrenzen für wirtschaftliches Steigvermögen

6.3.4 Beschleunigungsvermögen

Der im Flugbereich vorhandene Schubüberschuss kann auch dazu verwendet werden, das Flugzeug im Horizontalflug zu beschleunigen. Das in dem jeweiligen Punkt des Flugbereichs

verfügbare Beschleunigungsvermögen beträgt entsprechend Gl. 3.84 für $\alpha_0 + \sigma \rightarrow 0$ und $\gamma = 0$

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{F - W}{m \cdot g}. \quad (6.8)$$

Bild 6.6 veranschaulicht die Kurven konstanter Werte von n_x . Auch hier zeigen sich sowohl im Unterschall- als auch im Überschallbereich Maximalwerte, die erkennen lassen, in welchen Teilen des Flugbereichs Beschleunigungsflüge am günstigsten durchgeführt werden sollten.

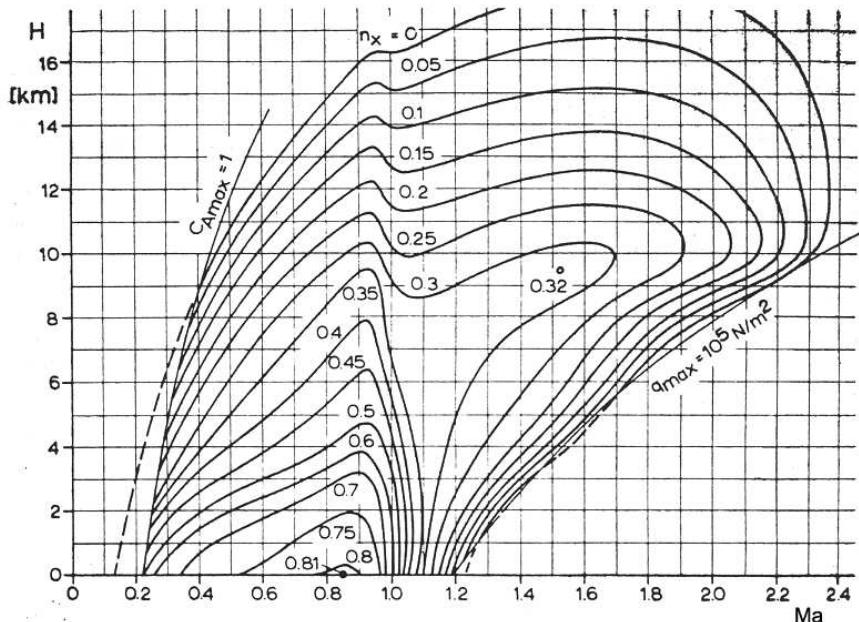


Abbildung 6.6: Höhen-Machzahl-Diagramm zum Beschleunigungsvermögen aus vorhandenem Schubüberschuss

6.3.5 Kurvenflugvermögen

Die Gesetzmäßigkeiten des stationären Kurvenfluges sind in Abschnitt 5.1 ausführlich behandelt. Danach hängt der leistungsmäßig erflogbare Kurvenradius in folgender Form vom Schub $F(M, H)$, den Polarenwerten $C_{W_0}(M)$, $k(M)$ sowie der Fluggeschwindigkeit ab (vgl. Gl. 5.6 und Gl. 5.8):

$$r_K = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{g} \cdot \frac{V^2}{\sqrt{\frac{F_i k_2}{V_i^{nV} m g} \cdot V^{(2+nV)} - \frac{C_{W_0} k_2}{k} V^4 - 1}} \quad (6.9)$$

Die Lastvielfachen im Kurvenflug, die sich aus den leistungsmäßig erflogbaren Kurvenradien entsprechend Gl. 6.9 ergeben, liegen stets unterhalb der festigkeitsmäßig zulässigen Werte. Dies bedeutet, dass höhere Lastvielfache, bis an die Grenzen der sicheren Lasten heran,

nur instationär d. h. unter Einbuße an Geschwindigkeit erflogen werden können, siehe hierzu Abschnitt 7.5. Für die Flugplanung ist die Zeit zum Durchfliegen einer Umkehrkurve t_{180} (180° -Kurve) wichtiger als der Kurvenradius selbst. Diese ergibt sich für konstante Bahngegeschwindigkeit unter Verwendung der Gl. 6.9 wegen $t_{180} \cdot V = r_K \cdot \pi$ zu

$$t_{180} = \frac{\pi}{g} \frac{V}{\sqrt{\frac{F_i k_2}{V_i^{n_V} m g} \cdot V^{(2+n_V)} - \frac{C_{W_0} k_2}{k} V^4 - 1}}. \quad (6.10)$$

In Bild 6.7 und Bild 6.8 sind Kurvenradius r_K und Kurvenflugzeit t_{180} entsprechend den obigen Beziehungen für das Beispielflugzeug im Höhen-Machzahl-Diagramm dargestellt. Zu beachten ist dabei, dass sich die Auftriebsgrenze infolge des erhöhten Lastvielfachen zu höheren Machzahlen verschiebt, entsprechend der Definition der Auftriebsgrenze nach Gl. 6.1. In Bild 6.7 und Bild 6.8 sind die Kurven gestrichelt dargestellt, wenn die zulässigen Grenzen überschritten werden, z. B. im Bereich kleiner Machzahlen.

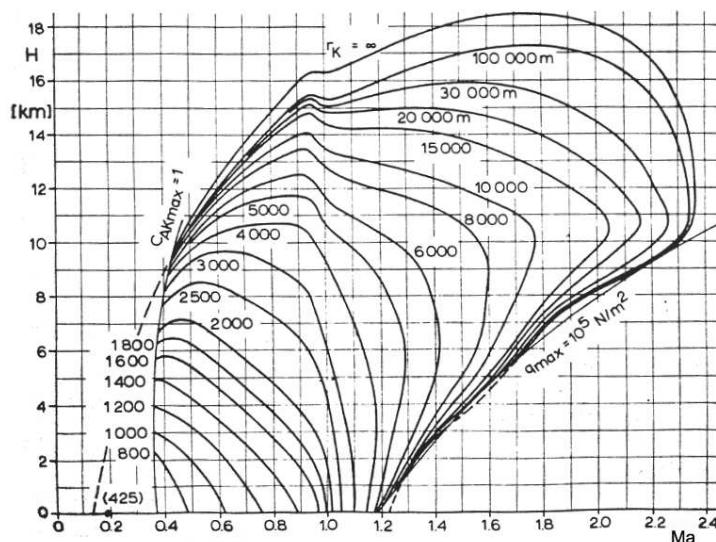


Abbildung 6.7: Höhen-Machzahl-Diagramm konstant geflogener Kurvenradien

6.3.5.1 Abfangen

Von besonderer Bedeutung ist schließlich noch der leistungsmäßig stationär erfliegbare Ablangbogen. Hier wird der wichtige Bereich am untersten Punkt des Ablangbogens, für den $\gamma = 0$ gilt, betrachtet. Da hier die Erdbeschleunigung und die Bahnbeschleunigung im Fall $\gamma = 0$ in entgegengesetzte Richtung wirken, erhält man wegen

$$m \cdot g + \frac{m \cdot V^2}{r_Z} = m \cdot g \cdot n_Z \quad (6.11)$$

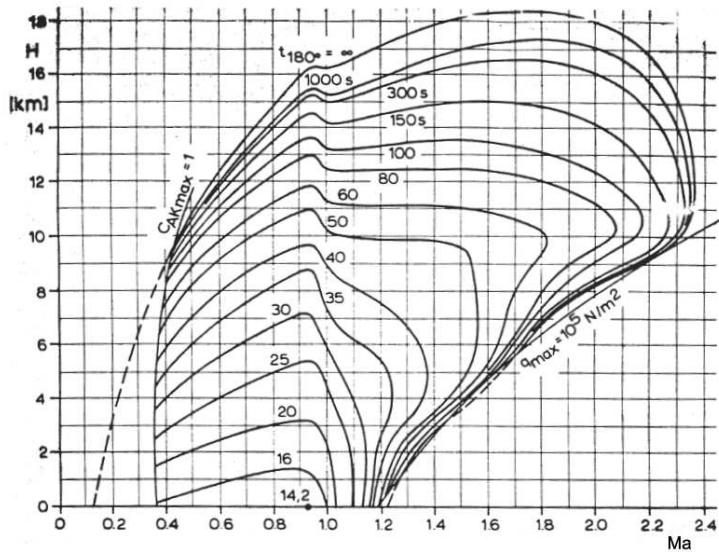


Abbildung 6.8: Höhen-Machzahl-Diagramm zu konstanten Flugzeiten im Kurvenflug

für den Radius des Abfangbogens abhängig vom Lastvielfachen

$$r_Z = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{n_Z - 1}. \quad (6.12)$$

Die Kräftegleichung in Bahnrichtung ist identisch mit Gl. 5.8, wenn man statt n hier n_Z entsprechend der Definition Gl. 6.12 einsetzt. Für das leistungsmäßig erfliegbare Lastvielfache n_Z erhält man damit

$$n_Z = \sqrt{\frac{F_i k_2}{V_i^{nv} m g} \cdot V^{(2+n_V)} - \frac{C_{W0} k_2}{k} V^4}. \quad (6.13)$$

Bild 6.9 zeigt, dass beim betrachteten Beispielflugzeug das maximal stationär erfliegbare Lastvielfache im bodennahen Flug bei $M = 0,96$ erreicht wird. Er liegt nur geringfügig oberhalb des festigkeitsmäßig zulässigen Wertes von $n_{Z_{max}} = 8$. Auch hier verschiebt sich die Auftriebsgrenze entsprechend der Erhöhung der wirksamen Flächenbelastung $\frac{m \cdot g}{S} \cdot n$ zu höheren Machzahlen. Man verwendet das Lastvielfache vielfach auch zur Definition der Dienstgipfelhöhe, die im vorliegenden Beispiel mit $n_Z = 1,2$ sinnvoll angesetzt wäre.

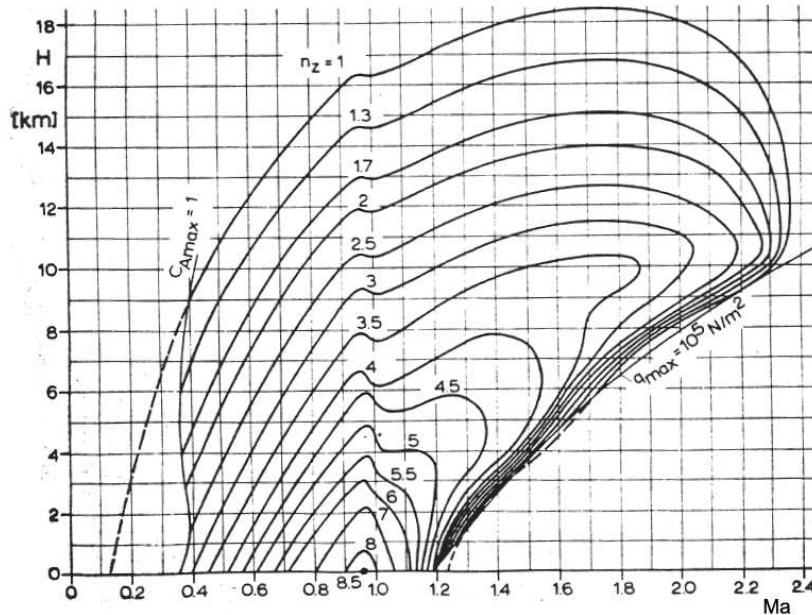


Abbildung 6.9: Darstellung der erfliegbaren Abfangbögen im Höhen-Machzahl-Diagramm

6.3.6 Die spezifische Reichweite

Zur wirtschaftlichen Planung von Streckenflügen ist die spezifische Reichweite $\frac{ds}{dm_B}$ von großem Interesse. Sie lässt sich ebenfalls als Punktleistungsgroße in jedem Punkt M, H des Höhen-Machzahl-Diagramms errechnen und gibt an, welche Horizontalflugstrecke das Flugzeug bei gegebenem Fluggewicht in dem jeweiligen durch M und H gekennzeichneten Flugzustand pro kg Kraftstoff zurücklegen kann. Mit $ds = V dt$ und $\frac{dm_B}{dt} = b_{n_V} \cdot F \cdot V^{n_V}$ nach Gl. 3.58 errechnet sich die spezifische Reichweite zu

$$\frac{ds}{dm_B} = V \frac{dt}{dm_B} = \frac{V}{b_{n_V} \cdot F \cdot V^{n_V}}. \quad (6.14)$$

Unter Berücksichtigung der Bahngleichungen bei horizontalem Flug, Gl. 4.19 und Gl. 4.20, ergibt sich für $F \cdot V^{n_V}$:

$$F \cdot V^{-n_V} = \frac{W}{A} m \cdot g \cdot V^{-n_V} = \frac{C_W}{C_A} m \cdot g \cdot V^{-n_V}, \quad (6.15)$$

so dass für Gl. 6.14 die noch allgemeingültige Beziehung

$$\frac{ds}{dm_B} = \frac{V^{n_V+1}}{m \cdot g \cdot b_{n_V}} \cdot \frac{C_A}{C_W} \quad (6.16)$$

geschrieben werden kann. Die Verwendung dieses Ergebnisses für die Berechnung und Auswahl optimaler Streckenflüge von Strahlverkehrsflugzeugen wird in Abschnitt 7.2 behandelt.

In Bild 6.10 sind für das betrachtete Überschallflugzeug Kurven konstanter spezifischen Reichweite eingetragen. Man sieht, dass im Unterschallbereich ein Flug in 11,7 km Höhe mit $M = 0,91$ optimal ist, während im Überschallbereich zum Erreichen guter Werte in möglichst großer Flughöhe geflogen werden muss.

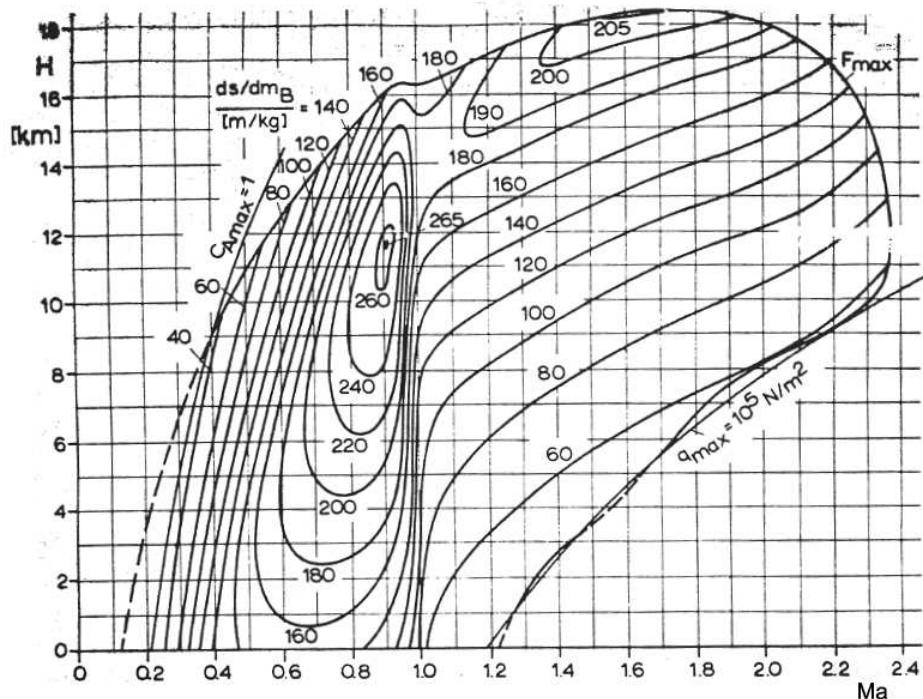


Abbildung 6.10: Darstellung der spezifischen Reichweite Höhen-Machzahl-Diagramm

7 Flugabschnitte

7.1 Allgemeines

Flugabschnitte lassen sich durch besondere Flugbedingungen kennzeichnen, wie z.B. Beschleunigungsflug, Steigflug, Streckenflug. Während sich Flugzustände stets in einem für eine konstante Flugzeugmasse geltenden Höhen-Mach-Diagramm als Punkte darstellen lassen, gilt dies im allgemeinen für Flugabschnitte nicht. Bei einigen Flugabschnitten, wie Streckenflug oder Steigreiseflug, sind die Massenänderungen infolge Kraftstoffverbrauch derart groß, dass die zeitliche Massenänderung berücksichtigt werden muss. Andere Flugabschnitte, wie z. B. der Kurvenflug, umfassen nur kurze Zeiträume, in denen der Kraftstoffverbrauch im Vergleich zur Gesamtmasse nur gering ist, so dass näherungsweise mit konstanter Masse gerechnet werden kann. In diesen Fällen stellen sich die Flugabschnitte im Höhen-Mach-Diagramm durch Strecken dar, wobei eine horizontale Strecke den Beschleunigungsflug, eine vertikale Strecke den unbeschleunigten Steigflug und eine geneigte Strecke je nach Neigungsrichtung einen beschleunigten bzw. verzögerten Steig- oder Sinkflug kennzeichnet.

Bei der Optimierung der Flugzustände kommt es darauf an, diejenigen Punkte im Höhen-Machzahl-Diagramm zu bestimmen, in denen die stationären Flugbedingungen optimal erfüllt werden können, z. B. mit geringstem Leistungsaufwand, mit größter Fluggeschwindigkeit, mit größter Flughöhe oder ähnlichem. Bei der Optimierung der verschiedenen Flugabschnitte wird dagegen versucht, die Trajektorie mit größtmöglicher Flugstrecke, der größten Flugdauer, dem geringsten Kraftstoffverbrauch oder mit den minimalen Kosten zu ermitteln. Im Vergleich zu Kapitel 4 bis Kapitel 6 tritt an die Stelle der Zustandsoptimierung die Bahnoptimierung, wobei die Ergebnisse der Flugzustandsuntersuchung wertvolle Hilfe leisten. Beispiele für Flugabschnitte sind aus den folgenden schematisch dargestellten Flugprofilen zu entnehmen. Bild 7.1 stellt eine Transportmission dar, bei der eine Nutzlast (Passagiere, Gepäck) über eine vorgegebene Gesamtflugstrecke (z. B. Frankfurt-New York) mit möglichst geringen Kosten transportiert werden soll. Das untere Beispiel könnte das Profil z. B. eines Aufklärungsflugzeugs oder auch eines Reklameflugzeugs darstellen, bei dem u. U. gewünscht wird, eine möglichst große Flugzeit zu erreichen.

Zur Durchführung solcher Flugaufgaben stellt sich stets die Frage nach dem erforderlichen Kraftstoffbedarf. Dieser kann nur durch Addition der in den einzelnen Flugabschnitten benötigten Kraftstoffmengen ermittelt werden, zuzüglich der notwendigen Reserven für ungünstige Wetterbedingungen zum Erreichen von Ausweichflugplätzen, die für alle Verkehrsflugzeuge

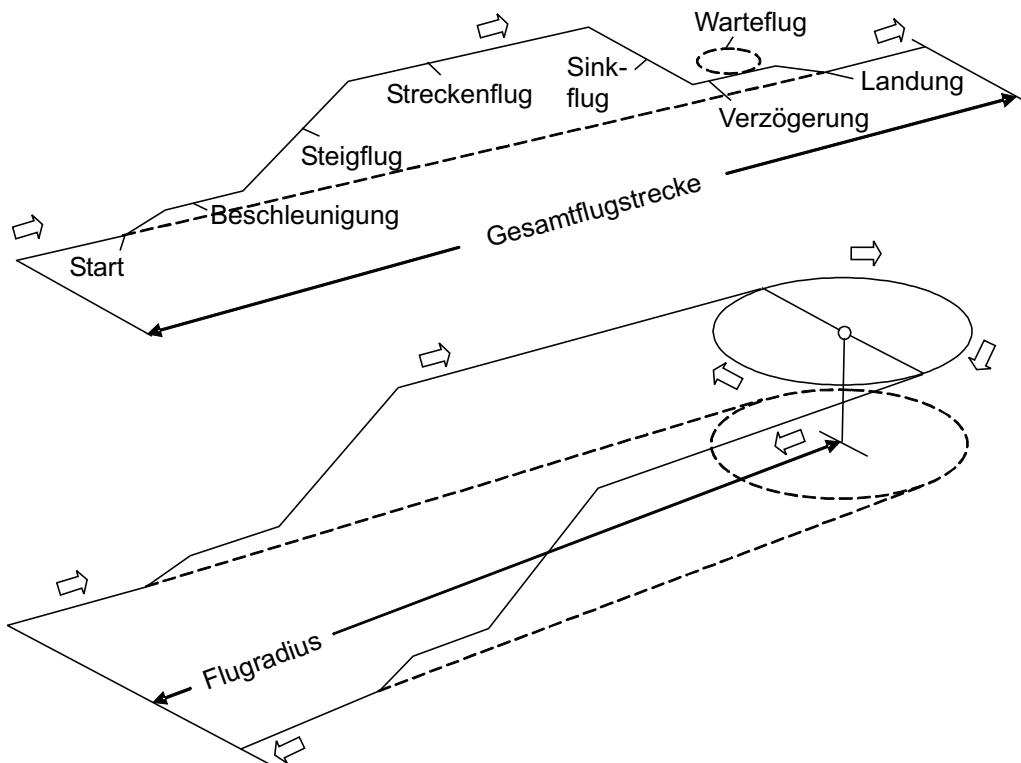


Abbildung 7.1: Beispiel: Transportmission und Aufklärungsflug

vorgeschrieben sind. Ein wichtiges Ergebnis der Flugabschnittsberechnung ist also die Aufstellung der *Kraftstoffbilanz*. Dass darüberhinaus für jeden Flug eine genaue Streckenplanung unter Beachtung der meteorologischen Gegebenheiten und der Luftraumnutzung in Zusammenarbeit mit der CMFU (Central Flow Management Unit) notwendig ist, sei hier nur erwähnt.

7.2 Streckenflug

7.2.1 Definitionen und Grundbeziehungen

Als Streckenflug bezeichnet man den Teil des Fluges, in dem die zu überwindende Flugstrecke quasistationär, d. h. mit annähernd konstanter Geschwindigkeit durchflogen wird. Die beim Flug über größere Strecken verbrauchte Kraftstoffmasse kann nicht mehr als vernachlässigbar klein betrachtet werden. Deshalb muss bei der Behandlung des Streckenfluges die Massenabnahme berücksichtigt werden. Die bisherigen Betrachtungen erweitern sich hiermit um die Massenänderung \dot{m} .

Das Ziel der Betrachtungen dieses Abschnittes ist die Ermittlung der Bedingungen, unter denen die Flugstrecke, die zugehörige Flugzeit oder eine andere wichtige Größe, wie z. B. die

Kosten, ein Optimum erreichen. Es ist zu klären, in welcher Form sich die Flugzustandsgrößen, wie Fluggeschwindigkeit und Flughöhe, auf die erwähnten Optima auswirken, und welche Zustands- oder Steuergrößen beim Streckenflug unverändert bleiben können. Von besonderem Einfluss ist in diesem Zusammenhang die Abhängigkeit des Schubes von Geschwindigkeit und Höhe (bzw. Luftdichte). Deshalb spielt die Antriebsart bei der Ermittlung der optimalen Bedingungen eine wichtige Rolle. Bei der endgültigen Wahl des Flugzustandes ist der praktischen Durchführbarkeit unter Berücksichtigung moderner Navigations- und Steuerhilfen (Autopiloten - Modi) besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

Der Kraftstoffverbrauch beim Streckenflug \dot{m}_B entspricht zugleich einer Massenabnahme $-\dot{m}$ des Flugzeugs. Man kann daher schreiben

$$-dm = \dot{m}_B dt. \quad (7.1)$$

Führt man den spezifischen Kraftstoffverbrauch nach Gl. 3.58 ein, so erhält man für die Differenziale von Flugzeit und Flugstrecke

$$dt = -\frac{dm}{b_{n_V} \cdot F \cdot V^{-n_V}} \quad (7.2)$$

$$ds = -\frac{V}{b_{n_V} \cdot F \cdot V^{-n_V}} \cdot dm. \quad (7.3)$$

Diese Gleichungen sind eindeutig bestimmt, wenn F und V längs der Flugstrecke als Funktionen von m darstellbar sind. Als Bedingungen des Kräftegleichgewichts senkrecht zur horizontalen Bahn und in Richtung der Bahn gelten Gl. 4.23 und Gl. 4.28

$$m \cdot g = A = C_A \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2, \quad (7.4)$$

$$F = W = C_W \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} \cdot V^2. \quad (7.5)$$

Den Zusammenhang zwischen C_W und C_A liefert die Flugzeugpolare, für die im vorliegenden Kapitel weitgehend die *symmetrische* Form entsprechend Tabelle 3.2 verwendet wird

$$C_W = C_{W_0} + k C_A^2. \quad (7.6)$$

Einsetzen von Gl. 7.4 und 7.5 in die beiden Gleichungen 7.2 und 7.3 ergibt den folgenden Zusammenhang:

$$dt = -\frac{V^{n_V}}{g \cdot b_{n_V}} \cdot \frac{C_A}{C_W} \cdot \frac{dm}{m}, \quad (7.7)$$

$$ds = -\frac{V^{1+n_V}}{g \cdot b_{n_V}} \cdot \frac{C_A}{C_W} \cdot \frac{dm}{m}. \quad (7.8)$$

Zur Ermittlung der mit einer vorgegebenen Kraftstoffmasse erfliegbaren Flugzeit oder Flugstrecke sind diese Grundbeziehungen zu integrieren.

7.2.2 Wahl der Flugzustände

Bevor die Integration der Grundbeziehungen in Gl. 7.7 für dt und in Gl. 7.8 für ds vorgenommen werden kann, sind einige Betrachtungen über den zu wählenden Flugzustand erforderlich. Dabei wird vorausgesetzt, dass die aerodynamischen Größen und der spezifische Kraftstoffverbrauch von der Machzahl unabhängig sind.

Gemäß Gl. 7.6 ist C_W eine eindeutige Funktion von C_A ; deswegen stehen zur Festlegung des durch die Gl. 7.4 allgemeingültig beschriebenen Horizontalflugzustands bei gegebener Flugzeugmasse m die vier weiteren Größen C_A , V , ρ und F zur Verfügung. Da nur zwei Gleichungen vorhanden sind, um sie als Funktionen der jeweiligen Flugzeugmasse m auszudrücken, lassen sich zwei der aufgezählten Größen willkürlich vorschreiben. Statt der Größen selbst könnten auch Kombinationen aus ihnen, z. B. die Machzahl M oder der Schub F vorgegeben werden. Im folgenden werden mit Rücksicht auf eine übersichtliche Darstellung nur die drei Größen C_A , V und ρ betrachtet, da die Vorgabe eines konstanten Schubes praktisch ohne Bedeutung ist. Man erhält damit drei verschiedene Flugzustände, die in Tabelle 7.1 zusammengestellt sind.

Tabelle 7.1: Wahl der Flugzustände

Flugzustand	C_A	V	ρ	Abhängigkeit von der Flugzeugmasse	Bemerkung
I	konst.	konst.	-	$\rho \sim m$	operationell interessante Fälle
II	-	konst.	konst.	$C_A \sim m$	
III	konst.	-	konst.	$V \sim \sqrt{m}$	im folgenden nicht genauer betrachtet

Aus Gl. 7.4 kann die Abhängigkeit von der Flugzeugmasse bestimmt werden; sie wird für die Integration der Differentiale 7.7 und 7.8 benötigt.

Alle veränderlichen Größen werden am Anfang des Streckenfluges mit dem Index „a“, am Ende mit dem Index „e“ gekennzeichnet.

Aus Gl. 7.4 und 7.5 folgt daher

$$\frac{m}{m_a} = \frac{C_A}{C_{A,a}} \cdot \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \left(\frac{V}{V_a} \right)^2, \quad (7.9)$$

$$\frac{F}{F_a} = \frac{C_W}{C_{W,a}} \cdot \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \left(\frac{V}{V_a} \right)^2. \quad (7.10)$$

Mit dem Schubansatz Gl. 4.34 folgt für den maximal verfügbaren Schub

$$\frac{F_{max}}{F_{max,a}} = \left(\frac{\rho}{\rho_a} \right)^{n_\rho} \cdot \left(\frac{V}{V_a} \right)^{n_V}. \quad (7.11)$$

Für den Drosselgrad $D = \frac{F}{F_{max}}$ bzw. $D_a = \frac{F_a}{F_{max,a}}$ erhält man daraus das Verhältnis:

$$\frac{D}{D_a} = \frac{\frac{F}{F_a}}{\frac{F_{max}}{F_{max,a}}} = \frac{C_W}{C_{W,a}} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_a} \right)^{1-n_\rho} \cdot \left(\frac{V}{V_a} \right)^{2-n_V}. \quad (7.12)$$

7.2.3 Flugzeiten und Flugstrecken

Für die im vorigen Abschnitt definierten Flugzustände werden nun die mit einem gegebenen Kraftstoffvorrat $m_B = m_a - m_e$ erzielbaren Flugzeiten und Flugstrecken berechnet. Ferner wird untersucht, in welcher Höhe und in welchem Punkt der Polare geflogen werden muss, wenn diese Größen maximal werden sollen, und wie der Drosselgrad anzupassen ist.

7.2.3.1 Flugzustand I, $C_A = C_{A,I} = \text{konst.}$, $V = V_I = \text{konst.}$

Zunächst folgt für den Zusammenhang zwischen Luftdichte und Flugzeugmasse nach

Gl. 7.9

$$\rho = \rho_a \cdot \frac{m}{m_a}. \quad (7.13)$$

Da $\frac{m}{m_a}$ während des Streckenfluges abnimmt, muss auch die Luftdichte abnehmen, die Höhe also zunehmen. Setzt man $\rho = \rho_a - \Delta\rho$, so folgt

$$\Delta\rho = \rho_a \cdot \left(1 - \frac{m}{m_a}\right). \quad (7.14)$$

Man erkennt, dass die Abnahme der Luftdichte $\Delta\rho$ der Anfangsluftdichte ρ_a proportional ist. Flugzeuge, die ihren Streckenflug in großer Höhe beginnen, brauchen also weniger stark zu steigen als solche, die ihn in niedrigerer Höhe beginnen.

Mit Gl. 2.13

$$H = 41900 \text{ m} \cdot \left(1 - \sqrt[4]{\frac{\rho}{\rho_0}}\right) \quad (7.15)$$

folgt für die Höhenzunahme $\Delta H = H_e - H_a$ während des Streckenfluges mit

$$\frac{\rho_a}{\rho_e} = \frac{m_a}{m_e} = \mu \quad (7.16)$$

nach einfacher Rechnung

$$\Delta H = (41900 - H_a)(1 - \mu^{-\frac{1}{4}}). \quad (7.17)$$

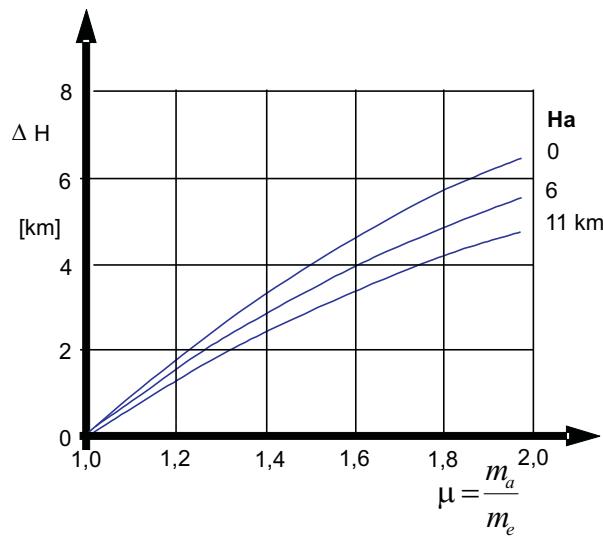


Abbildung 7.2: Höhenänderung beim Flug mit $C_A = \text{konst.}$, $V = \text{konst.}$ (Flugzustand I)

Dieser Zusammenhang ist für verschiedene Anfangshöhen H_a in Bild 7.2 aufgetragen. Die Höhenzunahme ΔH wird umso kleiner, je größer H_a gewählt wird. Man erkennt ferner, dass ΔH für größere Massenverhältnisse μ , d. h. für die Langstreckenflüge, beträchtliche Werte annehmen kann. Unterschallflugzeuge beginnen ihren Streckenflug meist in Höhen $H \leq 11 \text{ km}$, Bild 7.6. Nach der Standardatmosphäre nimmt die Schallgeschwindigkeit in diesem Bereich mit zunehmender Höhe ab, erst oberhalb $H = 11 \text{ km}$ bleibt sie konstant. Die Annahme $V = \text{konst.}$ bedeutet daher, dass die Machzahl bis zur Tropopause ($H = 11 \text{ km}$) geringfügig zunimmt und erst oberhalb davon konstant bleibt.

Im Flugzustand I ist die Integration der Grundbeziehungen Gl. 7.7 und 7.8 besonders einfach, da alle Parameter von der Flugzeugmasse unabhängig sind. Nach Integration und Einsetzen der Grenzen m_a und m_e erhält man Flugzeit und Flugweg als Funktionen des Massenverhältnisses $\mu = \frac{m_a}{m_e}$ zunächst in der Form

$$t_I = \frac{V_I^{n_V}}{g \cdot b_{n_V}} \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu, \quad (7.18)$$

$$s_I = \frac{V_I^{1+n_V}}{g \cdot b_{n_V}} \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu \quad \text{Breguet-Gleichung.} \quad (7.19)$$

(Für die in der Praxis üblichen Werte $\mu \leq 1,5$ kann man mit meist ausreichender Genauigkeit näherungsweise schreiben

$$\ln \mu \approx 2 \cdot \frac{m_a - m_e}{m_a + m_e} = 2 \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} = 2 \cdot \frac{m_B}{m_a + m_e}, \quad (7.20)$$

wobei m_B die verbrauchte Kraftstoffmasse bezeichnet.)

Für die drei typischen Schubcharakteristiken erhält man damit die in Tabelle 7.2 zusammengestellten Werte.

Tabelle 7.2: Flugzeit und Flugstrecke für die verschiedenen Schubcharakteristiken

$n_V =$	-1	0	1
$t_I =$	$\frac{1}{g \cdot b_{-1}} \cdot \frac{1}{V_I} \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu$	$\frac{1}{g \cdot b_0} \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu$	$\frac{1}{g \cdot b_1} \cdot V_I \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu$
$s_I =$	$\frac{1}{g \cdot b_{-1}} \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu$	$\frac{1}{g \cdot b_0} \cdot V_I \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu$	$\frac{1}{g \cdot b_1} \cdot V_I^2 \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu$

Der Fall $n_V = -1$ beschreibt den Luftschaubenantrieb. Wie bereits in Abschnitt 3.2 erläutert, bezieht man bei dieser Antriebsart den spezifischen Verbrauch nicht auf die Vortriebsleistung $F \cdot V = P \cdot \eta_L$, sondern stets auf die Wellenleistung P . Daher wurde in Unterabschnitt 3.2.2 aus Gründen der Einheitlichkeit

$$b^* = b_{-1} \cdot \eta_L \quad (7.21)$$

gesetzt. Man erhält dann für $n_V = -1$

$$t_I = \frac{\eta_L}{g \cdot b^*} \cdot \frac{1}{V_I} \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu \quad (7.22)$$

$$s_I = \frac{\eta_L}{g \cdot b^*} \cdot \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \cdot \ln \mu \quad (7.23)$$

Die Beziehung für s_I ist auch als *Breguet-Formel* bekannt, nach der die *Flugstrecke* bei gegebener Kraftstoffmasse am größten wird, wenn mit kleinster Gleitzahl $(\frac{C_W}{C_A})_I$ geflogen wird. In allen anderen Fällen für n_V hängen Flugzeit und Flugstrecke von bestimmten Kombinationen aus Geschwindigkeit und Gleitzahl ab, wodurch die Optimierung erschwert wird. Jedoch lässt sich bereits aus Gl. 7.18 und 7.19 erkennen, dass beide umso größer sind, je größer $\mu = \frac{m_a}{m_a - m_p}$, d. h. je größer die Kraftstoffmasse m_B ist. Außerdem sind beide dem spezifischen Kraftstoffverbrauch b_{n_V} umgekehrt proportional.

Die Gleichungen für t_I und s_I enthalten die beiden Zustandsgrößen V_I und $C_{A,I}$, diese hängen über die Auftriebsgleichung zusammen. Gibt man zu Beginn des Streckenfluges, z. B. auf Anweisung der Flugsicherung, die Anfangshöhe H_a und damit die Anfangsluftdichte ρ_a vor, so folgt aus der Auftriebsgleichung

$$m_a \cdot g = C_{A,I} \cdot S \cdot \frac{\rho_a}{2} \cdot V_I^2. \quad (7.24)$$

Aus dieser Beziehung lässt sich V_I als Funktion von $C_{A,I}$ berechnen

$$V_I = \sqrt{\frac{2 \cdot m_a \cdot g}{S \cdot \rho_a \cdot C_{A,I}}} \quad (7.25)$$

Hiermit und unter Verwendung von Gl. 7.6 lassen sich die Gleichungen 7.18 mit $C_{A,I}$ als

alleiniger Variabler schreiben, so dass eine einfache Optimierung möglich wird. Man erhält

$$t_I = \frac{\left(\frac{2m_a g}{S\rho_a}\right)^{\frac{n_V}{2}}}{g \cdot b_{n_V}} \cdot \frac{C_{A,I}^{\frac{2-n_V}{2}}}{C_{W_0} + kC_{A,I}^2} \cdot \ln \mu, \quad (7.26)$$

$$s_I = \frac{\left(\frac{2m_a g}{S\rho_a}\right)^{\frac{1+n_V}{2}}}{g \cdot b_{n_V}} \cdot \frac{C_{A,I}^{\frac{1-n_V}{2}}}{C_{W_0} + kC_{A,I}^2} \cdot \ln \mu. \quad (7.27)$$

Sollten t_I oder s_I Extremalwerte annehmen, so ist $C_{A,I}$ geeignet zu wählen, d. h. es muss im richtigen Punkt der Polare geflogen werden.

Bildet man $\frac{\partial t_I}{\partial C_{A,I}} = 0$, so findet man für den optimalen $C_{A,I}$ -Wert

$$C_{A,I, t_{max}} = \sqrt{\frac{C_{W_0}(2-n_V)}{k(2+n_V)}} = C_{A,1} \sqrt{\frac{2-n_V}{2+n_V}}. \quad (7.28)$$

Für die zugehörige Geschwindigkeit ergibt sich mit Gl. 7.25

$$V_{I, t_{max}}^2 = V^{*2} \sqrt{\frac{2+n_V}{2-n_V}}. \quad (7.29)$$

Die maximal erzielbare Flugzeit ergibt sich dann zu

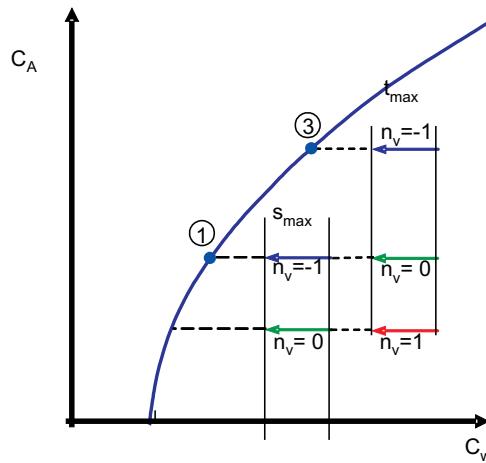
$$g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min} \cdot t_{I, max} = \frac{V^{*n_V}}{2} \cdot (2+n_V)^{\frac{2+n_V}{4}} \cdot (2-n_V)^{\frac{2-n_V}{4}} \cdot \ln \mu. \quad (7.30)$$

Für die drei typischen Schubcharakteristiken sind die jeweiligen Maximalwerte in Tabelle 7.3 zusammengestellt.

Tabelle 7.3: Werte für maximale Flugzeit der drei Schubcharakteristiken im Flugzustand I

$n_V =$	-1	0	1
$C_{A,I, t_{max}} =$	$\sqrt{3} \cdot C_{A,1}$	$C_{A,1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} C_{A,1}$
$V_{I, t_{max}}^2 =$	$\frac{1}{\sqrt{3}} V^{*2}$	V^{*2}	$\sqrt{3} \cdot V^{*2}$
$g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min} \cdot t_{I, max} =$	$\frac{\sqrt[4]{27} \cdot \ln \mu}{2 \cdot V^*}$	$\ln \mu$	$\frac{V^*}{2} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \ln \mu$

In Bild 7.3 sind die sich hieraus ergebenden Punkte auf der Polare dargestellt. Sie fallen teilweise mit den in Abschnitt 4.1 eingeführten Polarenpunkten zusammen.

Abbildung 7.3: Polarenpunkte für die Optimalwerte von s_{max} und t_{max}

Für die Optimierung der Flugstrecke s_I folgt aus der Bedingung $\frac{\partial s_I}{\partial C_{A,I}} = 0$ für den optimalen $C_{A,I}$ -Wert

$$C_{A,I,s_{max}} = C_{A,1} \sqrt{\frac{1-n_V}{3+n_V}}. \quad (7.31)$$

Für die zugehörige Geschwindigkeit erhält man

$$V_{I,s_{max}}^2 = V^{*2} \sqrt{\frac{3+n_V}{1-n_V}} \quad (7.32)$$

und für die maximal erzielbare Flugstrecke

$$g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min} \cdot s_{I,max} = \frac{V^{*1+n_V}}{2} \cdot (3+n_V)^{\frac{3+n_V}{4}} \cdot (1-n_V)^{\frac{1-n_V}{4}} \cdot \ln \mu. \quad (7.33)$$

Für die drei typischen Schubcharakteristiken folgt Tabelle 7.4.

Tabelle 7.4: Werte für maximale Flugstrecke der drei Schubcharakteristiken im Flugzustand I

$n_V =$	-1	0	1
$C_{A,I,s_{max}} =$	$C_{A,1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} C_{A,1}$	(0)
$V_{I,s_{max}}^2 =$	V^{*2}	$\sqrt{3} \cdot V^{*2}$	(∞)
$g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min} \cdot s_{I,max} =$	$\ln \mu$	$\frac{V^{*} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \ln \mu}{2}$	$2 \cdot V^{*2} \cdot \ln \mu$

Auch sind die sich aus Tabelle 7.4 ergebenden C_A -Werte in Bild 7.3 eingetragen. Soll die *Flugstrecke* maximal werden, so muss in allen Fällen mit einem geringeren Auftriebsbeiwert, d. h. mit höherer Geschwindigkeit geflogen werden, als wenn die *Flugzeit* maximal werden soll.

Wählt man $C_{A,I}$ nicht nach diesen Vorschriften, so ergeben sich mehr oder weniger stark reduzierte Flugzeiten bzw. Flugstrecken. Zur Veranschaulichung sind in den Bildern 7.4 und Bild 7.5 die Quotienten $\frac{t_I}{t_{I,\max}}$ und $\frac{s_I}{s_{I,\max}}$ über $C_{A,I}$ bzw. V_I aufgetragen.

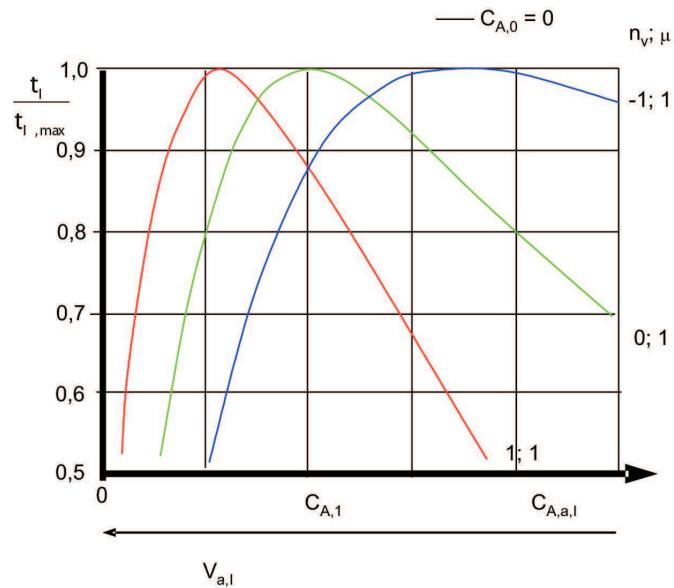


Abbildung 7.4: Auf den Maximalwert bezogene Flugzeiten, abhängig von $C_{A,1}$ bzw. V_I (Flugzustand I)

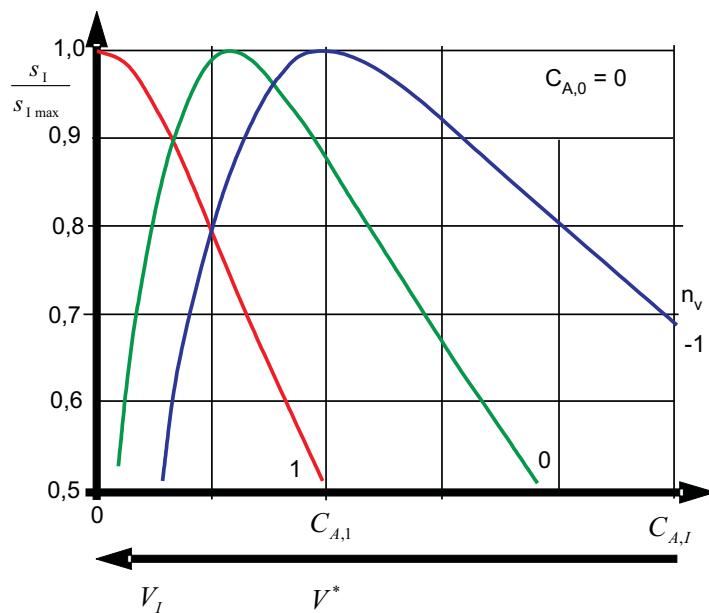


Abbildung 7.5: Auf den Maximalwert bezogene Flugstrecken, abhängig von $C_{A,1}$ bzw. V_I (Flugzustand I)

Außerdem hängen $t_{I, \max}$ und $s_{I, \max}$ laut Gl. 7.30 und Gl. 7.33 von V^* ab. Nun gilt

$$V^{*2} = 2 \cdot \frac{m \cdot g}{S \cdot \rho \cdot C_{A,1}} = 2 \cdot m_a \cdot \frac{g}{S \cdot \rho_a \cdot C_{A,1}} \quad (7.34)$$

Die Bezugsgeschwindigkeit V^* ist demnach zwar während des gesamten Streckenfluges konstant, hängt aber bei vorgegebener Flugzeugmasse m_a von der wählbaren Anfangsluftdichte ρ_a , bzw. von der Anfangshöhe H_a ab.

Die Flughöhe beeinflusst daher über die Luftdichte allein die Bezugsgeschwindigkeit V_I^* , die mit dem Exponenten n_V in die Flugzeit t_I und mit dem Exponenten $1+n_V$ in die Flugstrecke s_I eingeht. Sollen Extremalwerte erzielt werden, so muss (je nach Exponent n_V bzw. $1+n_V$) der Flug in minimal zugelassener Höhe begonnen, bzw. in maximal zugelassener Höhe beendet werden. Deshalb ist die Höhe nach Tabelle 7.5 zu wählen.

Tabelle 7.5: Tabelle mit den zu wählenden Anfangs- und Endhöhen

$n_V =$	-1	0	1
$t_{I, \max}$	$H_a = H_{\min}$	H_a beliebig	$H_e = H_{\max}$
$s_{I, \max}$	H_a beliebig	$H_e = H_{\max}$	$H_e = H_{\max}$

Jede von Tabelle 7.5 abweichende Wahl führt zu reduzierten Werten $t_{I, \max}$ bzw. $s_{I, \max}$. Das setzt allerdings voraus, dass die Optimierung eine Geschwindigkeit (Bezugsgeschwindigkeit V_I^*) liefert, die im zugelassenen Bereich liegt. Bei Unterschallflugzeugen ist die Maximalgeschwindigkeit durch den Widerstandsanstieg beim Erreichen der kritischen Machzahl festgelegt und damit letztlich auch die Anfangshöhe.

Aus Bild 7.2 geht hervor, dass die Höhenzunahme während des Streckenfluges beträchtliche Werte erreichen kann. Deshalb ist die Frage naheliegend, ob die Näherungsannahme eines *horizontalen* Streckenfluges, d. h. die Vernachlässigung des Steigungswinkels, gerechtfertigt ist.

Zur Abschätzung betrachte man den Fall $n_V = 0$. Für ihn gilt gemäß Gl. 7.33

$$s_{I, \max} = \frac{V_I^*}{g \cdot b_0 \cdot \varepsilon_{\min}} \cdot \frac{3^{\frac{3}{4}}}{2} \cdot \ln \mu. \quad (7.35)$$

Damit erhält man mittels Gl. 7.17

$$\frac{\Delta H}{s_{I, \max}} = \tan \gamma = \frac{4 \cdot (41900 - H_a) (1 - \mu^{-\frac{1}{4}}) \cdot g \cdot b_0 \cdot \sqrt{C_{W_0} k}}{3^{\frac{3}{4}} \cdot V_I^* \ln \mu} \quad (7.36)$$

Da

$$\frac{1 - \mu^{-\frac{1}{4}}}{\ln \mu} \approx \frac{1}{4} \quad (7.37)$$

gilt näherungsweise

$$\tan \gamma \approx \gamma \approx 2,15 \cdot (41900 - H_a) \cdot b_0 \cdot \frac{\varepsilon_{min}}{V_I^*}. \quad (7.38)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass der zur korrekten Einhaltung des Flugzustandes erforderliche Steigungswinkel außerordentlich klein ist. Für heutige Verkehrsflugzeuge würde er in der Größenordnung von $0,02 - 0,03^\circ$ liegen. In der Praxis ist die exakte Einhaltung des Flugzustandes $C_{A,I} = \text{konst.}$, $V_I = \text{konst.}$ kaum möglich, da dies eine ständige Korrektur sowohl der angezeigten Geschwindigkeit V_{IAS} als auch der Flughöhe erfordern würde. (Der Pilot liest auf dem Fahrtmesser nicht die wahre Geschwindigkeit V_I , sondern die angezeigte Geschwindigkeit V_{IAS} ab. Als praktisch durchführbare Möglichkeit bietet es sich an, die theoretisch geforderte stetig ansteigende Flugbahn durch eine treppenförmige Bahn mit jeweils längeren horizontalen Streckenabschnitten und zwischengeschalteten kurzen Steigflügen anzunähern.)

Dieses Verfahren wird in der Praxis angewendet. Bild 7.6 zeigt als Beispiel das Flugprofil eines Atlantikfluges von Frankfurt nach Chicago. Zum Vergleich ist die optimale Höhe eingetragen. Man erkennt, wie der Pilot versucht hat, die Flughöhe durch Einschaltung von Steigflügen dem optimalen Verlauf anzupassen.

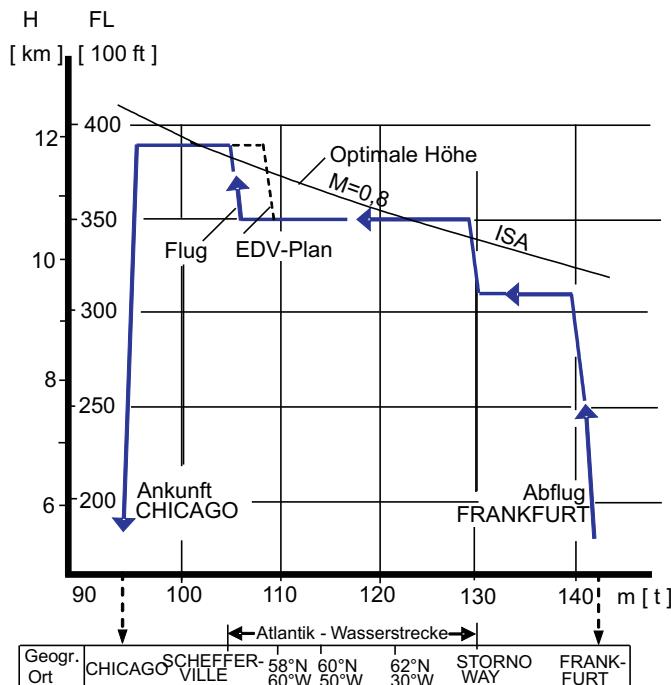


Abbildung 7.6: Ausgeföhrter Streckenflug einer B707 (LH 431 v. 3.3.1975)

Schließlich lässt sich nach Gl. 7.12 der Verlauf des Drosselgrades bestimmen. Wenn $C_A = C_{A,I} = \text{konst.}$ und $V = V_I = \text{konst.}$, so verbleibt

$$\frac{D_I}{D_a} = \left(\frac{\rho}{\rho_a} \right)^{1-n_\rho},$$

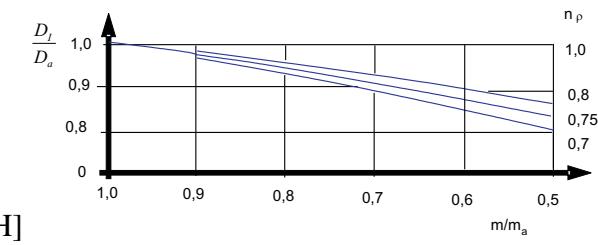


Abbildung 7.7: Drosselgrad für verschiedene n_ρ , Flugzustand I

bzw. wegen Gl. 7.13

$$\frac{D_I}{D_a} = \left(\frac{m}{m_a}\right)^{1-n_\rho}.$$

Die sich hieraus ergebenden Kurven sind für drei typische n_ρ -Werte in Bild 7.7 aufgetragen.

7.2.3.2 Flugzustand II, $V = V_{II} = \text{konst.}$, $\rho = \rho_{II} = \text{konst.}$

Der Streckenflug mit konstanter Geschwindigkeit in konstanter Höhe kommt in der Praxis immer dann vor, wenn dem Piloten von der Flugsicherung eine feste Flughöhe vorgeschrieben ist. (Dabei erfolgt die Angabe der Flughöhe in sog. *Flugflächen*, *FL* in 100 ft, z. B. $H = 6100 \text{ m} \approx 20000 \text{ ft} \hat{=} \text{FL}200$.)

Zur Erfüllung der Auftriebsgleichung während des Streckenfluges muss bei diesem Flugzustand der Auftriebsbeiwert kontinuierlich herabgesetzt werden. Aus Gl. 7.9 findet man dafür

$$C_A = C_{A,a} \frac{m}{m_a} \quad (7.39)$$

Damit folgt für den Widerstandsbeiwert nach Gl. 7.6

$$C_W = C_{W_0} + k \left(C_{A,a} \cdot \frac{m}{m_a} \right)^2 \quad (7.40)$$

Ferner gilt noch

$$\frac{C_{A,e}}{C_{A,a}} = \frac{m_e}{m_a} = \frac{1}{\mu}, \quad (7.41)$$

d. h.

$$C_{A,e} = \frac{C_{A,a}}{\mu}. \quad (7.42)$$

Für die Bezugsgeschwindigkeit V_{II}^* gilt in diesem Fall

$$V_{II}^{*2} = 2 \cdot \frac{m \cdot g}{\rho_{II} \cdot S \cdot C_{A,1}};$$

sie ist demnach eine Funktion der Masse, und es gilt z. B.

$$V_{a,II}^{*2} = 2 \cdot \frac{m_a \cdot g}{\rho_{II} \cdot S \cdot C_{A,1}}. \quad (7.43)$$

Damit besteht eine Abhängigkeit der Geschwindigkeit V_{II}^* von der Masse, sie nimmt also im Verlaufe des Fluges ab.

Um die Grundbeziehungen Gl. 7.7 integrieren zu können, geht man zunächst auf bezogene Beiwerte über. Sodann wird C_A gemäß Gl. 7.39 und C_W gemäß Gl. 7.40 eingesetzt. Es folgt daraus

$$dt_{II} = - \frac{V_{II}^{nv} \cdot \frac{C_{A,a}}{m_a}}{g \cdot b_{nv}} \cdot \frac{dm}{C_{W_0} + \frac{k C_{A,a}^2}{m_a^2} \cdot m^2}, \quad (7.44)$$

$$ds_{II} = - \frac{V_{II}^{nv+1} \cdot \frac{C_{A,a}}{m_a}}{g \cdot b_{nv}} \cdot \frac{dm}{C_{W_0} + \frac{k C_{A,a}^2}{m_a^2} \cdot m^2}. \quad (7.45)$$

Diese Differentiale sind zwischen den Grenzen $m_a = 1$ und $m_e = \frac{1}{\mu}$ zu integrieren. Man findet

$$t_{II} = \frac{V_{II}^{n_V}}{g \cdot b_{n_V} \sqrt{C_{W_0} k}} \cdot \arctan \left(\frac{\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \cdot (\mu - 1)}{\mu + \frac{C_{A,a}^2}{C_{A,1}^2}} \right) \quad (7.46)$$

$$s_{II} = \frac{V_{II}^{n_V+1}}{g \cdot b_{n_V} \sqrt{C_{W_0} k}} \cdot \arctan \left(\frac{\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \cdot (\mu - 1)}{\mu + \frac{C_{A,a}^2}{C_{A,1}^2}} \right). \quad (7.47)$$

Soll untersucht werden, bei welchem Wert $C_{A,a}$ der Streckenflug begonnen werden muss, damit t_{II} oder s_{II} maximal werden. Mit Einsetzen von

$$V_{II} = V_{a,II}^* \cdot \left(\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (7.48)$$

erhält man:

$$t_{II} = \frac{V_{a,II}^{n_V}}{g \cdot b_{n_V} \cdot \sqrt{C_{W_0} \cdot k}} \cdot \left(\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \right)^{-\frac{n_V}{2}} \cdot \arctan \left(\frac{\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \cdot (\mu - 1)}{\mu + \frac{C_{A,a}^2}{C_{A,1}^2}} \right), \quad (7.49)$$

$$s_{II} = \frac{V_{a,II}^{n_V+1}}{g \cdot b_{n_V} \cdot \sqrt{C_{W_0} \cdot k}} \cdot \left(\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \right)^{-\frac{1+n_V}{2}} \cdot \arctan \left(\frac{\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \cdot (\mu - 1)}{\mu + \frac{C_{A,a}^2}{C_{A,1}^2}} \right). \quad (7.50)$$

Hierin ist $V_{a,II}^*$ ein fester, nur noch von der Höhe, d. h. von ρ_{II} abhängiger Zahlenwert.

Zur Extremwertbildung wären nun die Ableitungen $\frac{dt_{II}}{dC_{A,a}} = 0$ und $\frac{ds_{II}}{dC_{A,a}} = 0$ zu setzen. Da jedoch die Veränderliche $C_{A,a}$ sowohl unter der arctan-Funktion als auch davor als Faktor auftritt, ergeben sich im allgemeinen Fall transzendente Bestimmungsgleichungen für die optimalen $C_{A,a}$ -Werte. Daher ist nur eine Näherungslösung möglich, die man gewinnt, indem man die arctan-Funktion durch ihr Argument ersetzt. Die Güte dieser Näherung ist umso besser, je kleiner das Argument ist. Nach erfolgter Optimierung ist daher eine entsprechende Abschätzung vorzunehmen. Für die Optimierung der Flugzeit wird daher

$$\frac{d}{dC_{A,a}} \cdot \left(\frac{\left(\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \right)^{\frac{2-n_V}{2}}}{\mu + \left(\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \right)^2} \right) = 0 \quad (7.51)$$

gebildet, und man erhält

$$C_{A,a,II,t_{max}} = C_{A,1} \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2-n_V}{2+n_V}}.$$

und

$$V_{a, II, t_{max}}^2 = \frac{V_{a, II}^{*2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{2+n_V}{2-n_V}}.$$

Für die maximal erzielbare Flugzeit ergibt sich daraus, wenn man jetzt wieder in die exakte Gl. 7.49 einsetzt

$$g \cdot b_{n_V} \varepsilon_{min} t_{II, max} = 2 \cdot V_{a, II}^{*n_V} \cdot \left(\frac{(2-n_V) \cdot \mu}{2+n_V} \right)^{-\frac{n_V}{4}} \cdot \arctan \sqrt{4-n_V^2} \frac{\mu-1}{4 \cdot \sqrt{\mu}} \quad (7.52)$$

Für die drei typischen Schubcharakteristiken erhält man für die maximale Flugzeit:

Tabelle 7.6: Werte für maximale Flugzeit für die drei Schubcharakteristiken im Flugzustand II

$n_V =$	-1	0	1
$C_{A, II, t_{max}} =$	$\sqrt{3 \cdot \mu} \cdot C_{A,1}$	$\sqrt{\mu} \cdot C_{A,1}$	$\sqrt{\frac{\mu}{3}} \cdot C_{A,1}$
$V_{II, t_{max}}^2 =$	$V_{a, II}^{*2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot \mu}}$	$V_{a, II}^{*2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}$	$V_{a, II}^{*2} \cdot \sqrt{\frac{3}{\mu}}$
$g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min} \cdot t_{II, max} =$	$\frac{2 \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \mu}}{V_{a, II}^*} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\mu-1}{\sqrt{\mu}} \right)$	$2 \cdot \arctan \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu-1}{\sqrt{\mu}} \right)$	$2 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{\mu}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\mu-1}{\sqrt{\mu}} \right) \cdot V_{a, II}^*$

Für die Optimierung der Flugstrecke muss man bilden

$$\frac{d}{dC_{A,a}} \cdot \left(\frac{\left(\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \right)^{\frac{1-n_V}{2}}}{\mu + \left(\frac{C_{A,a}}{C_{A,1}} \right)^2} \right) = 0, \quad (7.53)$$

und man erhält

$$C_{A, a, II, s_{max}} = \sqrt{\mu} \cdot \sqrt{\frac{1-n_V}{3+n_V}} \cdot C_{A,1}, \quad (7.54)$$

$$V_{a, II, s_{max}}^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \sqrt{\frac{3+n_V}{1-n_V}} \cdot V_{a, II}^{*2}, \quad (7.55)$$

$$g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min} \cdot s_{II, max} = 2 \cdot V_{a, II}^{*1+n_V} \cdot \frac{(1-n_V) \cdot \mu^{-\frac{1+n_V}{4}}}{3+n_V} \cdot \arctan \left(\sqrt{(1-n_V)(3+n_V)} \frac{\mu-1}{4 \cdot \sqrt{\mu}} \right) \quad (7.56)$$

Im einzelnen sind die Werte in Tabelle 7.7 dargestellt. Wie man in Tabelle 7.7 sieht, entartet der Fall $n_V = 1$, da s_{II} für $n_V = 1$ monotonen Verhalten hinsichtlich $C_{A,a}$ zeigt. Vergleicht man nun die Argumente mit den Funktionswerten, so kann man sich davon überzeugen, dass im optimalen Fall selbst für große Werte μ die Abweichungen klein bleiben (ca. 4% für $\mu = 2$). Für hiervon abweichend gewählte Werte $C_{A,a, II}$ reduzieren sich die erzielbaren Flugzeiten und Flugstrecken, wie in den Bildern 7.8 und 7.9 dargestellt ist.

Tabelle 7.7: Werte für maximale Flugstrecke und die drei Schubcharakteristiken im Flugzustand II

$n_V =$	-1	0	1
$C_{A, II, s_{max}} =$	$C_{A,1}\sqrt{\mu}$	$C_{A,1}\sqrt{\frac{\mu}{3}}$	(0)
$V_{II, s_{max}}^2 =$	$\frac{V_{a, II}^*}{\sqrt{\mu}}$	$V_{a, II}^* \sqrt{\frac{3}{\mu}}$	(∞)
$g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min} \cdot s_{II, max} =$	$2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu-1}{\sqrt{\mu}}\right)$	$2 \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{\mu}} \cdot V_{a, II}^* \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\mu-1}{\sqrt{\mu}}\right)$	$2 \cdot \frac{\mu-1}{\mu} \cdot V_{a, II}^* {}^2$

Die Höhenabhängigkeit steckt wiederum allein in der Bezugsgeschwindigkeit $V_{a, II}^*$. Aus Gl. 7.43 entnimmt man, dass auch in diesem Flugzustand dieselben Überlegungen gelten, wie im Zustand I. Tabelle 7.5 ist daher auch für den Flugzustand II anwendbar. Im Flugzustand I war zur

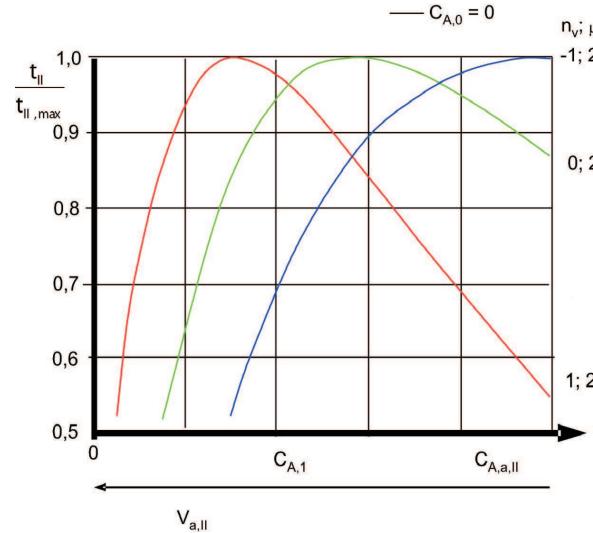


Abbildung 7.8: Auf den Maximalwert bezogene Flugzeiten, abhängig von $C_{A, a, II}$ bzw. $V_{a, II}$ (Flugzustand II)

Erzielung maximaler Flugzeiten bzw. Flugstrecken in denjenigen Polarenpunkten zu fliegen, die bereits in Abschnitt 4.1 als optimal erkannt waren, s. Bild 7.3. Für sie gilt

$$C_{A, I, t_{max}} = C_{A,1} \sqrt{\frac{2-n_V}{2+n_V}}, \quad (7.57)$$

$$C_{A, I, s_{max}} = C_{A,1} \sqrt{\frac{1-n_V}{3+n_V}}. \quad (7.58)$$

Im Flugzustand II ist der Auftriebsbeiwert der jeweiligen Masse anzupassen, die bezogenen

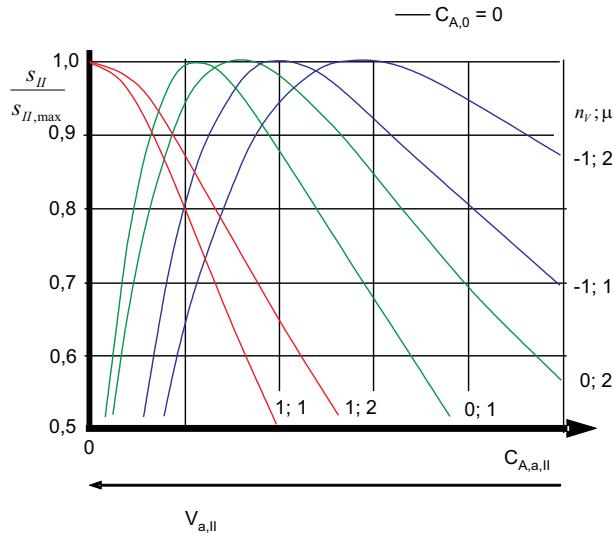


Abbildung 7.9: Auf den Maximalwert bezogene Flugstrecken, abhängig von $C_{A,a,II}$ bzw. $V_{a,II}$ (Flugzustand II)

Beiwerte ändern sich gemäß Gl. 7.42 nach folgender Gesetzmäßigkeit

$$C_{A,a,II,t_{max}} = C_{A,1} \sqrt{\frac{2-n_V}{2+n_V}} \cdot \sqrt{\mu}; \quad (7.59)$$

$$C_{A,e,II,t_{max}} = C_{A,1} \frac{\sqrt{\frac{2-n_V}{2+n_V}}}{\sqrt{\mu}}, \quad (7.60)$$

$$C_{A,a,II,s_{max}} = C_{A,1} \sqrt{\frac{1-n_V}{3+n_V}} \cdot \sqrt{\mu}; \quad (7.61)$$

$$C_{A,e,II,s_{max}} = C_{A,1} \frac{\sqrt{\frac{1-n_V}{3+n_V}}}{\sqrt{\mu}}. \quad (7.62)$$

Da $C_{A,II} = C_{A,a,II} \cdot \frac{m}{m_a}$ gilt, muss es daher eine mittlere Flugzeugmasse m_m geben, für die der Auftriebsbeiwert gerade den Wert annimmt, bei dem im Flugzustand I ständig geflogen wird. Durch Vergleich von Gl. 7.59 mit Gl. 7.57 findet man, dass sowohl bei zeit- als auch bei streckenoptimalen Flügen hierfür gelten muss

$$\frac{m_m}{m_a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \quad (7.63)$$

Da $\mu = \frac{m_a}{m_e}$, gilt für m_m

$$m_m = \sqrt{m_a \cdot m_e}; \quad (7.64)$$

sie ist demnach das geometrische Mittel aus Anfangs- und Endmasse. Aus Gl. 7.12 folgt für den Drosselgrad im Flugzustand II

$$D_{II} = \frac{C_W}{C_{W,a}} = \frac{C_{A,1}^2 + C_A^2}{C_{A,1}^2 + C_{A,a}^2}, \quad (7.65)$$

bzw. mit Gl. 7.39

$$D_{II} = \frac{C_W}{C_{W,a}} = \frac{C_{A,1}^2 + \left(C_{A,a} \frac{m}{m_a} \right)^2}{C_{A,1}^2 + C_{A,a}^2}. \quad (7.66)$$

Dieser Zusammenhang ist für einige typische Werte von $C_{A,a}$ in Bild 7.10 über m aufgetragen.

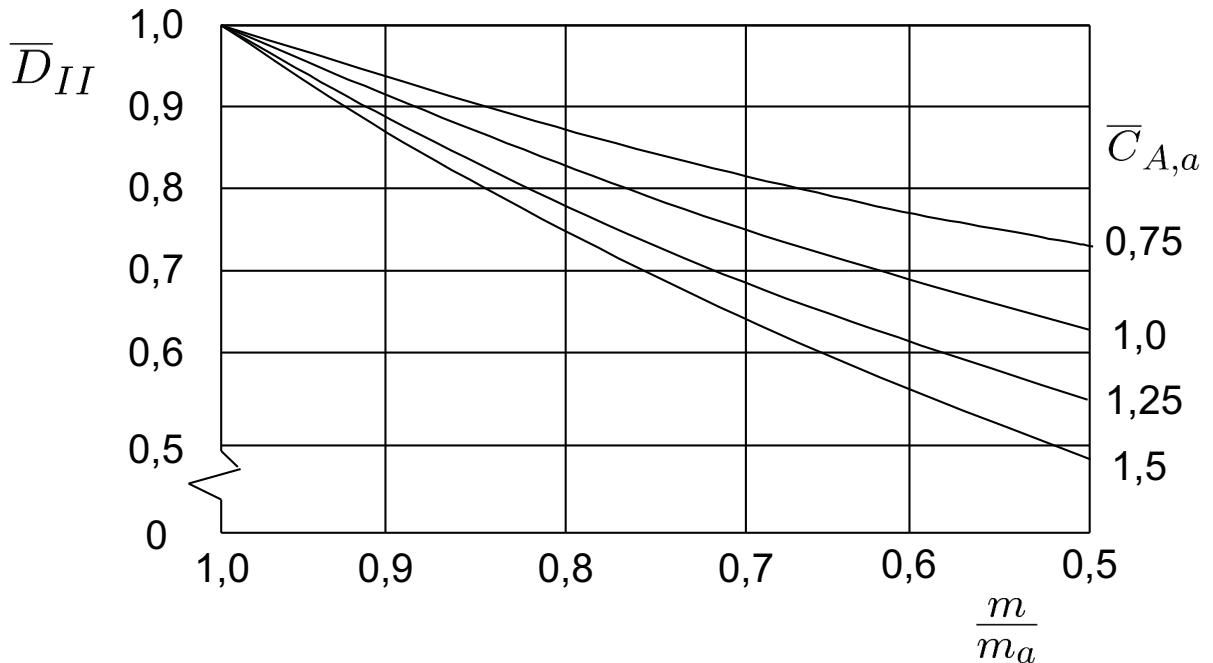


Abbildung 7.10: Drosselgrad abhängig von $\frac{m}{m_a}$ (Flugzustand II)

7.2.4 Vergleichende Betrachtungen

Im vorigen Abschnitt sind für zwei einfache, aber grundsätzlich verschiedene Strategien des Streckenfluges die maximalen Flugzeiten und Flugstrecken berechnet worden, die mit einem gegebenen Kraftstoffvorrat erfüllt werden können. Nunmehr ist die Frage naheliegend, welche der zwei Strategien das absolute Maximum liefert und wieviel die anderen schlechter sind. Beim Vergleich der verschiedenen Flugzustände wird angenommen, dass keine sonstigen Einschränkungen, etwa seitens der Flugsicherung, beachtet werden brauchen.

Es werden die maximalen Flugzeiten t_{max} und die maximalen Flugstrecken s_{max} des Flugzustands II auf die entsprechenden Werte des Flugzustands I bezogen. Dabei spielt es eine wichtige Rolle, wie die Anfangsflughöhen der zu vergleichenden Flugzustände festgelegt werden. Das sei an einem Beispiel erläutert. Aus den Gleichungen 7.33 und 7.54 erhält man mit

$n_V = 0$ folgende Beziehung

$$\frac{s_{II, \max}}{s_{I, \max}} = \frac{V_{a, II}^*}{V_I^*} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\arctan \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\mu-1}{\sqrt{\mu}}}{\sqrt[4]{\mu} \ln \mu}.$$

Außer vom Massenverhältnis μ hängt dieser Ausdruck noch vom Quotienten $\frac{V_{a, II}^*}{V_I^*}$ ab, für den bei gleichen Abflugmassen $m_{a,I} = m_{a,II}$ folgendes gilt:

$$\frac{V_{a, II}^*}{V_I^*} = \sqrt{\frac{\rho_{a, I}}{\rho_{II}}}.$$

Bei gleicher Anfangshöhe, (die meist von der Flugsicherung vorgeschrieben wird), d. h. für $\rho_{a, I} = \rho_{II}$, verringert sich die erzielbare Maximalflugstrecke beträchtlich, wenn der Pilot statt mit ansteigender Flughöhe (Flugzustand I) in konstanter Höhe (Flugzustand II) fliegt, Bild 7.11. In diesem Beispiel beträgt die Verringerung für $\mu = 2$ fast 17%. Für die Flugplanung ist wichtig, dass der Pilot nicht vorhersehen kann, ob ihm die Flugsicherung gestatten wird, im Verlauf des Fluges mit abnehmendem Gewicht größere Flughöhen aufzusuchen. Dieses Ergebnis war

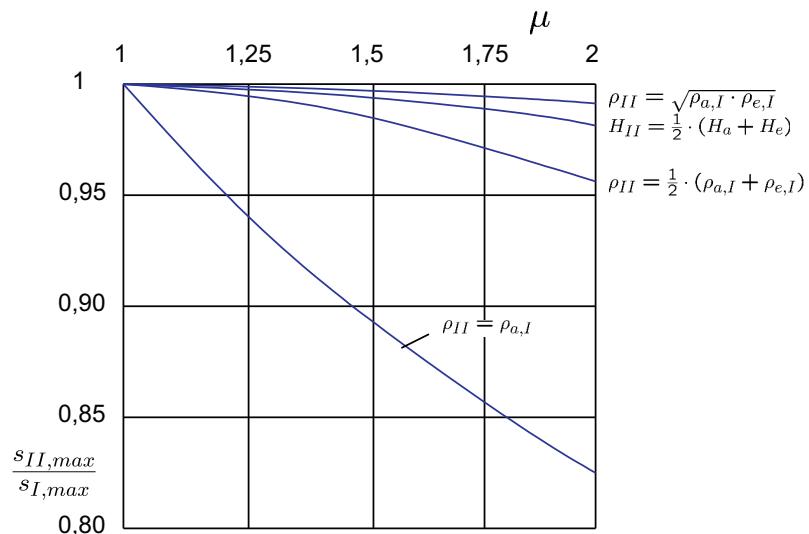


Abbildung 7.11: Verhältnis der maximalen Flugstrecken nach Flugzustand II zu I bei verschiedener Wahl der Flughöhenzuordnung

– zumindest der Tendenz nach – vorauszusehen, da in allen drei untersuchten Flugzuständen zur Erzielung maximaler Flugstrecken bei $n_V = 0$ möglichst hoch geflogen werden muss. Nimmt man an, dass beide Flüge in derselben Höhe beginnen, so dass die mittlere Höhe beim Flug im Zustand I entsprechend größer ist, als die (konstante) Höhe des Zustands II, so ist der Flug im Zustand I von vornherein günstiger. Dieser Vergleich hinkt daher.

Bestimmt man das Dichteveerhältnis $\frac{\rho_{a, I}}{\rho_{II}}$ derart, dass das geometrische Mittel aus Anfangs- und Enddichte im Flugzustand I gleich der Dichte im Flugzustand II ist, so gilt

$$\rho_{II} = \rho_{m, I} = \sqrt{\rho_{a, I} \cdot \rho_{e, I}}, \quad (7.67)$$

bzw. wegen $\rho_{e, I} = \frac{\rho_{a, I}}{\mu}$, Unterabschnitt 7.2.3,

$$\rho_{II} = \frac{\rho_{a, I}}{\sqrt{\mu}}. \quad (7.68)$$

Damit folgt

$$\frac{V_{a, II}^*}{V_I^*} = \sqrt[4]{\mu} \quad (7.69)$$

Wählt man die Flughöhe nach diesen Überlegungen, so zeigt Bild 7.11, dass die maximale Flugstrecke im Flugzustand II auch für große Werte von μ nur geringfügig kleiner ist als im Flugzustand I (ca. 1% bei $\mu = 2$).

Wie B. Faber in seiner Dissertationsschrift (1978) nachweist, wird bei Flügen mit jeweils $V = \text{konst.}$, bei denen in einem Fall wegen $C_A = \text{konst.}$ mit steigender Höhe (Flugzustand I) und im anderen Fall wegen $\rho = \text{konst.}$ mit konstanter Höhe (Flugzustand II) geflogen wird, ein voller Rückgewinn der im Steigflug aufgewendeten Energie während des anschließenden Sinkflugs erreicht, wenn der Sinkflug mit dem gleichen C_A -Wert wie beim Steigflug ausgeführt wird.

Wie in Bild 7.11 ferner dargestellt ist, erhält man fast dasselbe Ergebnis, wenn man ρ_{II} derart wählt, dass die zugehörige Höhe das *arithmetische* Mittel aus Anfangs- und Endhöhe des Fluges im Zustand I ist. (Wegen des annähernd exponentiellen Zusammenhangs zwischen Dichte und Höhe entspricht das *arithmetische* Mittel der *Höhen* dem *geometrischen* Mittel der *Dichten*!) Das *arithmetische* Mittel der Dichtewerte ergibt hingegen beträchtlich geringere Flugstrecken.

In Bild 7.12 ist das Dichteverhältnis $\frac{\rho_I}{\rho_{II}}$ als Funktion der (bezogenen) Flugzeugmasse $\frac{m}{m_a}$ für die verschiedenen Höhenansätze des Flugzustands I für $\mu = 1,5$ aufgetragen. Gemäß Gl. 7.13 gilt

$$\rho_I = \rho_{a, I} \frac{m}{m_a}.$$

Für $\rho_{a, I} = \rho_{II}$ folgt daher

$$\left(\frac{\rho_I}{\rho_{II}} \right)_1 = \frac{m}{m_a}.$$

Beim Flug mit dem *geometrischen* Mittel der Dichtewerte wurde oben gefunden

$$\rho_{II} = \sqrt{\rho_{a, I} \cdot \rho_{e, I}} = \frac{\rho_{a, I}}{\sqrt{\mu}}.$$

Damit erhält man

$$\left(\frac{\rho_I}{\rho_{II}} \right)_2 = \sqrt{\mu} \frac{m}{m_a}.$$

Fliegt man schließlich beim *arithmetischen* Mittel der Dichtewerte, so gilt zunächst

$$\rho_{II} = \frac{\rho_{a, I} + \rho_{e, I}}{2}.$$

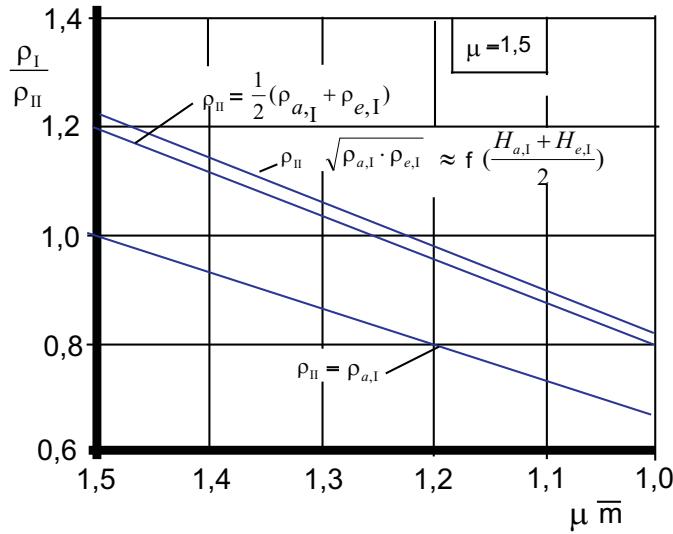


Abbildung 7.12: Dichtevehältnis abhängig von $\frac{\mu \cdot m}{m_a}$ für verschiedene Höhenansätze des Flugzustandes I bei $\mu = 1,5$

Wegen $\rho_{e,I} = \frac{\rho_{a,I}}{\mu}$ ergibt sich

$$\left(\frac{\rho_I}{\rho_{II}}\right)_3 = \frac{2 \cdot \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{m}{m_a}.$$

Anschaulicher als die Luftpichtewerte sind die Flughöhen. Bild 7.13 zeigt die zugehörigen Verläufe für drei verschiedene Flughöhen (6, 8 und 10 km) des Flugzustands II. Unter Verwendung von Gl. 2.13 findet man zunächst

$$H_I\left(\frac{m}{m_a}\right) = 41900 \cdot \left(1 - \sqrt[4]{f_i\left(\frac{m}{m_a}\right)}\right) + H_{II} \cdot \sqrt[4]{f_i\left(\frac{m}{m_a}\right)}, \quad i = 1, 2, 3$$

wobei

$$f_1\left(\frac{m}{m_a}\right) = \frac{m}{m_a}, \quad f_2\left(\frac{m}{m_a}\right) = \sqrt{\mu} \cdot \frac{m}{m_a}, \quad f_3\left(\frac{m}{m_a}\right) = \frac{2 \cdot \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{m}{m_a}.$$

Wie man aus Bild 7.13 sieht, liegt der Flug im Zustand I beim arithmetischen Mittelwert der Luftpichtewerte geringfügig höher als der Flug beim geometrischen Luftpichtemittelwert.

Unter Verwendung der in Unterabschnitt 7.2.3 hergeleiteten Beziehungen kann man nun die Verhältnisse der maximalen Flugzeiten und Flugstrecken berechnen. Dabei wird angenommen, dass im Flugzustand II mit der geometrisch mittleren Dichte des Zustands I geflogen wird, so dass Gl. 7.69 gilt.

Man erhält dann folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{t_{II, max}}{t_{I, max}} &= \frac{4}{\sqrt{4 - n_V^2}} \cdot \frac{\arctan \frac{\sqrt{4 - n_V^2}}{4} \cdot \frac{\mu - 1}{\sqrt{\mu}}}{\ln \mu}, \\ \frac{s_{II, max}}{s_{I, max}} &= \frac{4}{\sqrt{4 - (1 + n_V)^2}} \cdot \frac{\arctan \frac{\sqrt{4 - (1 + n_V)^2}}{4} \cdot \frac{\mu - 1}{\sqrt{\mu}}}{\ln \mu}. \end{aligned}$$

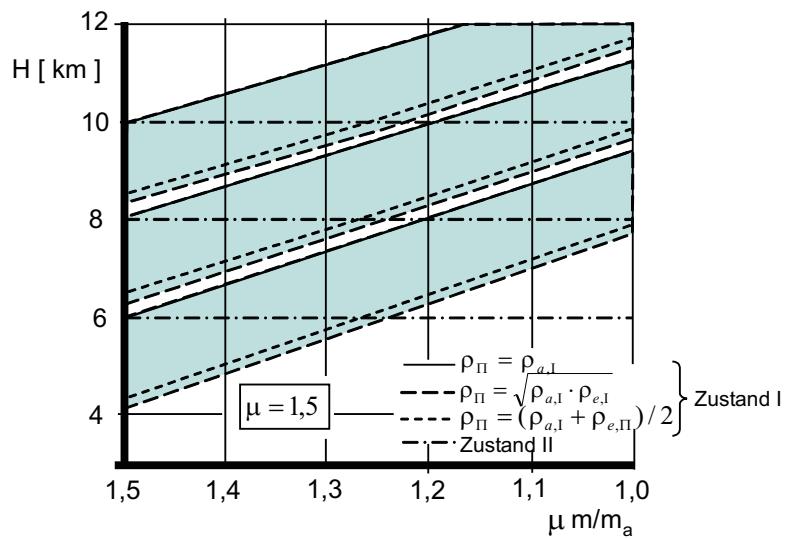


Abbildung 7.13: Verlauf der Flughöhe in Streckenflug abhängig von $\mu \cdot \frac{m}{m_a}$ für verschiedene Höhenansätze des Flugzustandes I

In Bild 7.14 sind diese Ergebnisse ausgewertet. Man erkennt die schon beschriebenen, fast vernachlässigbaren Unterschiede der betrachteten Flugzustände, die allerdings eine sehr genaue Einhaltung der Höhenzuordnung erfordern.

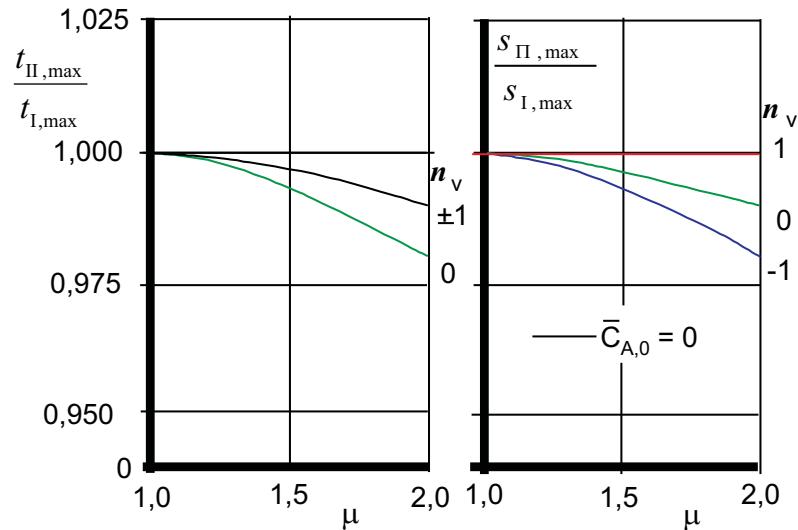


Abbildung 7.14: Vergleich der maximalen Flugzeiten und Flugstrecken bei günstiger Flughöhenzuordnung

7.2.5 Wirtschaftlicher Streckenflug

Neben der Optimierung der Flugzeit und der Flugstrecke ist in vielen Fällen die Frage nach den minimalen Kosten bei vorgegebener Flugstrecke von besonderer Bedeutung. Die Gesamtkosten setzen sich aus zwei wesentlichen Anteilen zusammen: aus den zeitabhängigen Kosten $K_t \cdot t$, die u. a. die Wartungs-, Überholungs- und Flugpersonalkosten enthalten, und aus den kraftstoffabhängigen Kosten $K_B \cdot m_B$. Daher gilt für die Gesamtkosten K_{ges}

$$K_{ges} = K_t \cdot t + K_B \cdot m_B. \quad (7.71)$$

Die während des Streckenfluges verbrauchte Kraftstoffmasse kann man mit der Anfangsmasse m_a unter Verwendung des Massenfaktors μ in Beziehung bringen, und man erhält

$$K_{ges} = K_t \cdot t + K_B \cdot m_a \frac{\mu - 1}{\mu}. \quad (7.72)$$

Zur Ermittlung des Minimalwertes setzt man die Ableitung der Kosten nach der Größe C_A gleich Null.

$$\frac{dK_{ges}}{dC_A} = K_t \cdot \frac{dt}{dC_A} + K_B \cdot m_a \cdot \frac{d}{dC_A} \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right) = 0. \quad (7.73)$$

Wie man aus Unterabschnitt 7.2.3 entnehmen kann, ist die Flugstrecke s ebenfalls eine Funktion des Auftriebsbeiwertes C_A und des Massenfaktors μ

$$s = s(C_A, \mu). \quad (7.74)$$

Wird s fest vorgegeben, so muss gelten

$$ds = \frac{\partial s}{\partial C_A} \cdot dC_A + \frac{\partial s}{\partial \mu} \cdot d\mu = 0. \quad (7.75)$$

Daraus folgt

$$\frac{d\mu}{dC_A} = -\frac{\frac{\partial s}{\partial C_A}}{\frac{\partial s}{\partial \mu}}. \quad (7.76)$$

Die totale Ableitung $\frac{dt}{dC_A}$ ergibt sich unter Verwendung der soeben abgeleiteten Größe $\frac{d\mu}{dC_A}$ zu

$$\frac{dt}{dC_A} = \frac{\partial t}{\partial C_A} + \frac{\partial t}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dC_A} = \frac{\partial t}{\partial C_A} - \frac{\partial t}{\partial \mu} \frac{\frac{\partial s}{\partial C_A}}{\frac{\partial s}{\partial \mu}}. \quad (7.77)$$

Da

$$\frac{d}{dC_A} \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{dC_A} = -\frac{1}{\mu^2} \frac{\frac{\partial s}{\partial C_A}}{\frac{\partial s}{\partial \mu}}, \quad (7.78)$$

schreibt sich Gl. 7.73 folgendermaßen

$$\frac{dK_{ges}}{dC_A} = K_t \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial C_A} - \frac{\partial t}{\partial \mu} \frac{\frac{\partial s}{\partial C_A}}{\frac{\partial s}{\partial \mu}} \right) - K_B \cdot \frac{m_a}{\mu^2} \frac{\frac{\partial s}{\partial C_A}}{\frac{\partial s}{\partial \mu}} = 0. \quad (7.79)$$

Führt man den Kostenfaktor $\kappa_K = m_a \frac{K_B}{K_t}$ ein, so erhält man folgende Bedingung für den Flug mit minimalen Kosten

$$\frac{\partial s}{\partial C_A} \cdot \left(\frac{\kappa_K}{\mu^2} + \frac{\partial t}{\partial \mu} \right) - \frac{\partial t}{\partial C_A} = 0 \quad (7.80)$$

In Unterabschnitt 7.2.3 sind für die verschiedenen Flugzustände die Flugzeiten $t(C_A, \mu)$ und die Flugstrecken $s(C_A, \mu)$ berechnet. Daher kann man mittels Gl. 7.80 denjenigen C_A -Wert bestimmen, bei dem die Kosten als Funktion von κ_K , μ und einiger weiterer Flugzeug- bzw. Flugzustandskenngrößen minimal werden.

Führt man statt t und s dimensionslose Zeit- bzw. Weggrößen ein,

$$\tilde{t} = \frac{g \cdot b_{n_V}}{\left(\frac{2m_a g}{S\rho_a} \right)^{\frac{n_V}{2}}} \cdot t, \quad \tilde{s} = \frac{g \cdot b_{n_V}}{\left(\frac{2m_a g}{S\rho_a} \right)^{\frac{2+n_V}{2}}} \cdot s \quad (7.81)$$

erhält man aus Gl. 7.80

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial C_A} \cdot \left(\frac{\kappa_{K_{n_V}}^*}{\mu} + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \mu} \right) - \frac{\partial \tilde{t}}{\partial C_A} = 0, \quad (7.82)$$

wobei

$$\kappa_{K_{n_V}}^* = \frac{\kappa_K \cdot g \cdot b_{n_V} \cdot \varepsilon_{min}}{2 \cdot \mu \cdot V^{*n_V}} = \frac{K_B \cdot m_e \cdot g \cdot b_{n_V} \varepsilon_{min}}{2 \cdot K_t \cdot V^{*n_V}}. \quad (7.83)$$

Als Beispiel werde der Flugzustand I für den Fall einer symmetrischen Polare ($C_{A,0} = 0$) betrachtet. Dort galt für die Flugzeit t_I bzw. die Flugstrecke s_I

$$t_I = \frac{V_I^{n_V}}{g \cdot b_{n_V}} \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \ln \mu, \quad s_I = \frac{V_I^{1+n_V}}{g \cdot b_{n_V}} \frac{C_{A,I}}{C_{W,I}} \ln \mu. \quad (7.84)$$

Daraus folgt

$$\tilde{t}_I = \frac{C_{A,I}^{\frac{2-n_V}{2}}}{C_{W_0} + k C_{A,I}^2} \cdot \ln \mu; \quad \tilde{s}_I = \frac{C_{A,I}^{\frac{1-n_V}{2}}}{C_{W_0} + k C_{A,I}^2} \cdot \ln \mu. \quad (7.85)$$

Für die Ableitungen erhält man

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial C_{A,I}} = \frac{C_{W_0} \cdot (2 - n_V) - k \cdot (2 + n_V) \cdot C_{A,I}^2}{2 \cdot (C_{W_0} + k \cdot C_{A,I}^2)^2} \cdot C_{A,I}^{-\frac{n_V}{2}} \ln \mu; \quad \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \mu} = \frac{C_{A,I}^{\frac{2-n_V}{2}}}{C_{W_0} + k C_{A,I}^2} \cdot \frac{1}{\mu}; \quad (7.86)$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial C_{A,I}} = \frac{C_{W_0} \cdot (1 - n_V) - k \cdot (3 + n_V) \cdot C_{A,I}^2}{2 \cdot (C_{W_0} + k \cdot C_{A,I}^2)^2} \cdot C_{A,I}^{-\frac{(1+n_V)}{2}} \ln \mu; \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \mu} = \frac{C_{A,I}^{\frac{1-n_V}{2}}}{C_{W_0} + k C_{A,I}^2} \cdot \frac{1}{\mu}; \quad (7.87)$$

Durch Einsetzen in Gl. 7.80 findet man nach einigen Umformungen die Bestimmungsgleichung

$$k \cdot (3 + n_V) \cdot K_{n_V}^* \cdot C_{A,I}^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{C_{W_0}}} \cdot C_{A,I}^{\frac{2-n_V}{2}} - C_{W_0} \cdot (1 - n_V) \cdot K_{n_V}^* \right) = 0. \quad (7.88)$$

Sie lässt sich nur im Fall eines geschwindigkeitsabhängigen Antriebs, d. h. für $n_V = 0$, auflösen und liefert dann

$$C_{A, I, K_{min}} = C_{A,1} \cdot \frac{\sqrt{1 + 12K_0^{*2}} - 1}{6} \cdot K_0^*, \quad (7.89)$$

$$V_{I, K_{min}}^2 = V^* \cdot \frac{\sqrt{1 + 12K_0^{*2}} + 1}{2} \cdot K_0^*. \quad (7.90)$$

Für $n_V = -1$ erhält man eine Gleichung vierten Grades in $\bar{C}_{A, I}^{\frac{1}{2}}$

$$2k \cdot K_{-1}^* \cdot C_{A, I}^2 + (\sqrt{\frac{k}{C_{W_0}}} \cdot C_{A, I})^{\frac{3}{2}} - C_{W_0} \cdot 2K_{-1}^* = 0, \quad (7.91)$$

die keine analytische Auflösung zulässt. Für $n_V = 1$ folgt zunächst

$$4k \cdot K_1^* \cdot C_{A, I}^2 + (\sqrt{\frac{k}{C_{W_0}}} \cdot C_{A, I})^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (7.92)$$

Hieraus ergibt sich

$$C_{A, I, K_{min}} = 0,$$

die verbleibende Wurzel der Gleichung liefert keine sinnvolle Lösung. Bild 7.15 enthält die optimalen $C_{A, I}$ -Werte für verschiedene Werte von n_V als Funktion von K_{nv}^* . Wie man sieht, erfordert der kostenoptimale Flug niedrigere $C_{A, I}$ -Werte und damit höhere Geschwindigkeiten, als zur Optimierung der Flugstrecke erforderlich sind. Mit wachsendem Kostenfaktor K_B , d. h. mit steigenden Kraftstoffpreisen, wird der $C_{A, I}$ -Wert für minimale Gesamtkosten größer und nähert sich damit dem Wert für maximale Flugstrecken. Die mögliche Spanne ist aus den in Bild 7.15 gekennzeichneten Kostenfaktoren für heutige Verkehrsflugzeuge unter Berücksichtigung der Preisindizes 1971 und 1974 zu ersehen.

7.2.6 Verfahren zur praktischen Durchführung von Streckenflügen

Bei den vorangegangenen Betrachtungen war angenommen worden, dass die Polarenwerte unabhängig von der Machzahl sind und die Triebwerksschübe durch einfache Funktionen der Fluggeschwindigkeit dargestellt werden können. Unter diesen Voraussetzungen war es möglich, analytische Ausdrücke für die Flugzeiten und die Flugstrecken bei den einzelnen Flugzuständen zu erhalten. Sie wiederum ermöglichten es, Optimalwerte der Flugzeiten, der Flugstrecken und der Flugkosten zu berechnen.

Anders geartet ist die Problemstellung, wenn für ein gegebenes Flugzeug mit einem bestimmten Triebwerk Flugverfahren für die zweckmäßige Durchführung des Streckenfluges festgelegt werden sollen. In solchen Fällen können die analytischen Lösungen der vorhergehenden Betrachtungen zwar wesentliche Hinweise für die zweckmäßige Fluggestaltung geben, trotzdem

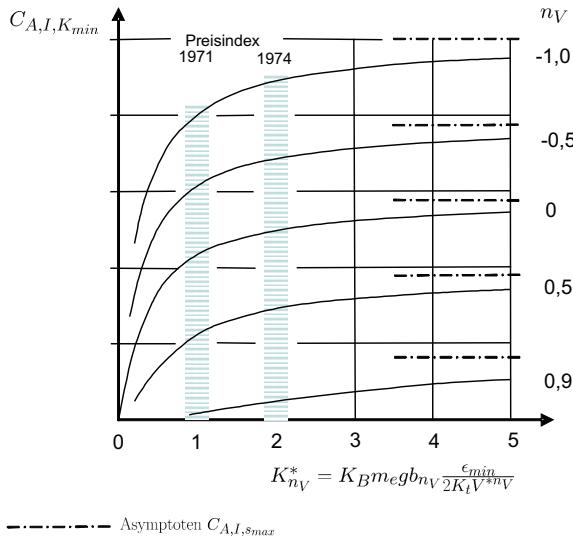


Abbildung 7.15: Auftriebsbeiwert für minimale Kosten (Flugzustand I)

ist es unumgänglich, die aerodynamischen Kräfte und die Triebwerksschübe unter Berücksichtigung der grundlegenden Beziehungen Gl. 7.2 bis Gl. 7.6 durchzuführen.

Vielfach wird hierbei mit der *spezifischen Reichweite* $\frac{ds}{dm_B}$ gearbeitet, die als Flugstrecke je Kraftstoffeinheit definiert ist und in Abschnitt 6.3 bereits eingeführt wurde.

Im Bereich der üblichen Reiseflughöhen, insbesondere bei Flugzeugen mit Strahltriebwerken mit hohem Nebenstromverhältnis, kann $n_V = 0$ gesetzt werden, siehe Bild 3.26. Berücksichtigt man, dass bei modernen Unterschallflugzeugen die aerodynamischen Größen und der spezifische Verbrauch von der Machzahl abhängen, so erhält man entsprechend Gl. 6.16

$$\frac{ds}{dm_B} = \frac{aM}{mg b_0(M, \rho)} \cdot \frac{C_A(M)}{C_W(M)} \quad (7.93)$$

In dieser Gleichung hängt der Ausdruck $\frac{C_A}{m} \cdot C_W$ von der Flugzeugmasse ab.

Damit ergeben schwere Flugzeuge zwangsläufig niedrigere Werte für $\frac{ds}{dm_B}$ als leichtere (bei sonst gleichen Abmessungen). Die spezifische Reichweite kann deshalb als Gütezahl nur beim Vergleich gleichartiger Flugzeuge verwendet werden.

Sie eignet sich besonders gut zur Festlegung der Reiseflugbedingungen eines Flugzeugs und wird in den Flughandbüchern als Funktion der Machzahl mit dem Flugzeuggewicht als Parameter für verschiedene Flughöhen dargestellt.

Bild 7.16 zeigt ein solches Diagramm für ein großes Verkehrsflugzeug bei einer Höhe von $H = 11$ km. Die aerodynamischen Daten wurden der Polare in Bild 3.15, der spezifische Kraftstoffverbrauch Bild 3.26 entnommen. Für eine von der Machzahl unabhängige symmetrische Polare und die Schubcharakteristik $n_V = 0$ findet man für den Flugzustand I aus Gl. 7.33

$$s_{I, max} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{V_I}{g b_0 \sqrt{C_{W,0} \cdot k}} \cdot \ln \mu.$$

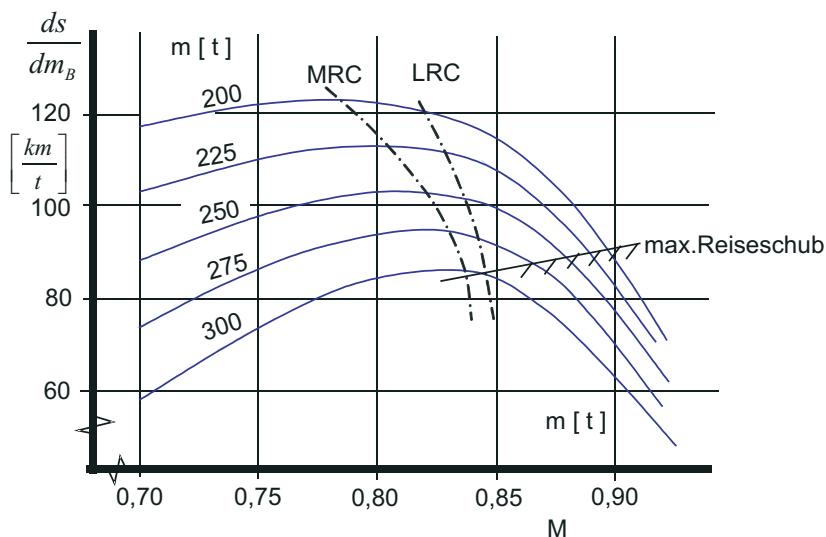


Abbildung 7.16: Spezifische Reichweite für ein Unterschallverkehrsflugzeug ($H=11\text{ km}$)

Die maximale Flugstrecke nimmt demnach proportional mit der Geschwindigkeit zu. Bei Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Machzahl zeigt dagegen Bild 7.16 ein deutliches Maximum in der Nähe der kritischen Machzahl und eine starke Abnahme der pro kg Kraftstoff erreichbaren Strecke, wenn die Machzahl weiter vergrößert wird. Die spezifische Reichweite kann daher nur dann verbessert werden, wenn es gelingt, das Maximum zu höheren Machzahlen zu verschieben, d. h. die kritische Machzahl zu erhöhen (z. B. durch Verwendung eines superkritischen Flügels).

Ein Flug mit maximaler Reichweite (*Maximum Range Cruise*, MRC) wird erzielt, wenn mit abnehmender Flugzeugmasse zugleich die Machzahl, wie in Bild 7.16 angegeben, reduziert wird.

Wegen des relativ flachen Maximums der Kurven $\frac{ds}{dm_B} = f(M)$ wird häufig ein geringer Verlust in Kauf genommen, um dadurch für eine gegebene Strecke kürzere Flugzeiten zu erhalten. Das in den Flughandbüchern als *Long Range Cruise* (LRC) bezeichnete Verfahren verwendet eine höhere Machzahl, bei der die spezifische Reichweite 1 % unterhalb ihres Maximalwertes liegt. In Bild 7.16 sind beide Flugverfahren durch die Kurven MRC bzw. LRC kenntlich gemacht. Zu beachten ist, dass in den Handbüchern die spezifische Reichweite stets in Nautische Meilen pro 1000 lb Kraftstoff angegeben wird. Der Umrechnungsfaktor gegenüber den hier verwendeten km/t beträgt 4,1 ($\frac{1}{1000} \text{ NM/lb} = 4,1 \text{ km/t}$).

Die maximale Reisefluggeschwindigkeit ist erreicht, wenn der Widerstand gleich dem maximalen Reiseschub wird. Da der Schub von der Lufttemperatur abhängt, verschiebt sich diese Grenze zu kleineren Machzahlen, wenn die äußere Temperatur höher ist als die Standardatmosphäre und umgekehrt.

Wie man aus Bild 7.16 erkennt, bewirkt der Flug mit maximaler Machzahl eine spürbare Reichweiteneinbuße und wird deshalb relativ selten angewandt. Während bei den vorher be-

schriebenen Verfahren die Machzahl durch Betätigung des Schubhebels eingeregelt werden muss, erfordert der Flug mit maximaler Machzahl eine konstante Schubhebelstellung.

Zur Erzielung minimaler Kosten ist eine Flugmachzahl zu wählen, die zwischen der des LRC-Verfahrens und der maximalen Machzahl liegt.

7.3 Instationärer Streckenflug

7.3.1 Allgemeines zum instationären Streckenflug

Während jeder *Flugmission* muss ein Flugzeug vom Stillstand am Boden auf die Reisefluggeschwindigkeit beschleunigt und von dieser später auf geringere Fluggeschwindigkeiten verzögert werden. Während dieser Beschleunigungs- bzw. Verzögerungsvorgänge, die meist mit horizontaler oder nur schwach geneigter Bahn geflogen werden, wird eine Strecke zurückgelegt, für die eine gewisse Zeit benötigt und eine bestimmte Kraftstoffmenge verbraucht wird. Die hier verbrauchte Kraftstoffmenge ist bei Unterschallflugzeugen normalerweise klein im Vergleich zur Flugzeugmasse, so dass in diesen Fällen die Annahme einer konstanten Flugzeugmasse zulässig ist. Diese Voraussetzungen treffen jedoch sicher nicht zu, wenn bei Hochleistungsflugzeugen oder z. B. Überschallverkehrsflugzeugen ein größerer Teil des Reisefluges im beschleunigten Steigflug durchgeführt wird. Dieser Fall soll hier ausgeschlossen sein und wird im Abschnitt 7.4 behandelt.

Für einen *horizontalen Beschleunigungsflug* folgt aus den Bewegungsgleichungen des Fluges in der Symmetrieebene (Gl. 3.84) mit $\dot{\gamma} = \gamma = 0$ und unter der Annahme, dass der Winkel zwischen dem Schubvektor und der Bahn sehr klein ist, ($\alpha_{eff.} + \sigma = 0$)

$$\dot{V} - \frac{1}{m} \cdot (F - W) = 0 \quad (7.94a)$$

$$A - mg = 0. \quad (7.94b)$$

mit $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx}$ erhält man aus der Widerstandsgleichung folgende Differentialgleichungen zur Berechnung des Beschleunigungsweges bzw. der Beschleunigungszeit

$$\frac{dx}{dV} = m \cdot \frac{V}{F - W} \quad (7.95)$$

$$\frac{dt}{dV} = m \cdot \frac{1}{F - W} \quad (7.96)$$

7.3.2 Beschleunigungsweg

In den folgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass die Beschleunigungsflüge in einem Geschwindigkeitsbereich durchgeführt werden, in dem die Polarenwerte C_{W0} und k sowie Ma und Re als konstant betrachtet werden können. Diese Annahme wird im Unterschallbereich häufig zur Vereinfachung getroffen.

Mit $\frac{F}{mg}$ aus Gl. 4.34, mit $\rho = \rho_i$, und $\frac{W}{mg}$ aus Gl. 4.31 für $n_v = 0$ wird daraus

$$\frac{dx}{dV} = \frac{-2 m \cdot V^3}{C_{W0} \cdot S \cdot \rho \left(V^4 - \frac{2F_i}{C_{W0} \cdot S \cdot \rho} \cdot V^2 + V^{*4} \right)} \quad (7.97)$$

Der Geschwindigkeitsbereich, in dem der verfügbare Schub größer als der Widerstand ist und damit Beschleunigungsflüge möglich werden, ist durch die Bedingung $F - W = 0$ begrenzt. In diesem Fall wird der Nenner in Gl. 7.97 zu null werden und seine Wurzeln liefern damit die Grenzkurven $V_{1,2}$ für die obige Bedingung. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs sind in Bild 7.17 der Horizontalflugwiderstand $\frac{W}{m \cdot g}$ und der Schub $\frac{F}{m \cdot g}$ abhängig von der Geschwindigkeit V aufgetragen. Für den Sonderfall $n_V = 0$ lassen sich die Grenzgeschwin-

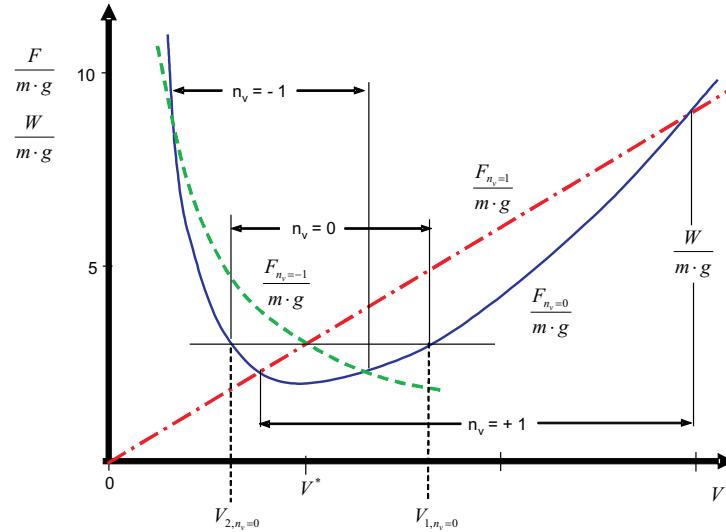


Abbildung 7.17: Grenzen der Beschleunigung im Horizontalflug

digkeiten unmittelbar angeben, da in diesem Fall der zu Null gesetzte Nenner in Gl. 7.97 zu einer biquadratischen Gleichung wird, deren Lösung lautet

$$V_{1,2,n_V=0}^2 = \frac{F_i}{C_{W_0} \cdot S \cdot \rho} \pm \sqrt{\left(\frac{F_i}{C_{W_0} \cdot S \cdot \rho} \right)^2 - V^{*4}}. \quad (7.98)$$

In Bild 7.18 sind die Grenzgeschwindigkeiten abhängig vom Schub für die drei charakteristischen Triebwerkskenngroßen $n_V = -1, 0$ und $+1$ dargestellt. Während die Kurve für $n_V = 0$ aus der oben angegebenen Beziehung berechnet werden kann, ist die Bestimmung der beiden anderen Verläufe nur numerisch möglich. Die Erweiterung der Bereiche mit wachsendem F_i ist gut zu erkennen, wie auch ihre Verschiebung zu höheren Geschwindigkeiten bei zunehmender Geschwindigkeitsabhängigkeit des Schubes (wachsendes n_V). Für den Sonderfall $n_V = 0$ schreibt sich Gl. 7.97 unter Verwendung der Wurzeln $V_{1,2,n_V=0}$

$$\frac{dx}{dV} \Big|_{n_V=0} = \frac{-2m}{C_{W_0} \cdot S \cdot \rho} \cdot \frac{V^3}{(V^2 - V_1^2) \cdot (V^2 - V_2^2)}, \quad (7.99)$$

nach deren Integration man für den dimensionslosen Beschleunigungsweg erhält

$$x_{n_V=0} = A_b(V, F_i) + C \quad \text{mit} \quad (7.100)$$

$$A_b = \frac{-2m}{C_{W_0} \cdot S \cdot \rho} \cdot \frac{V_1^2 \cdot \ln(V^2 - V_1^2) - V_2^2 \cdot \ln(V^2 - V_2^2)}{(2V_1^2 - 2V_2^2)},$$

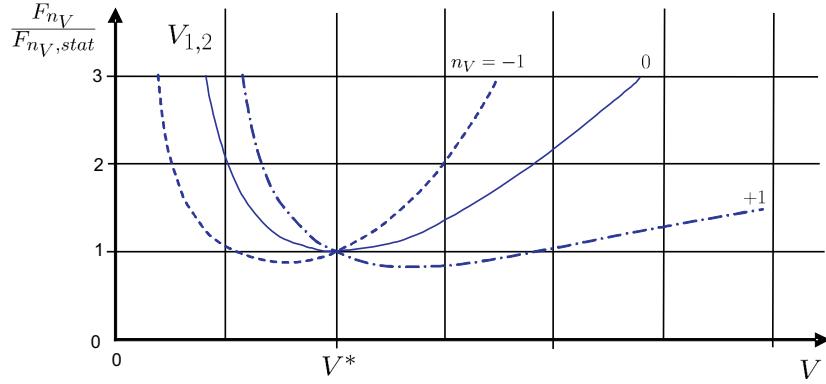


Abbildung 7.18: Grenzgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Schub

mit

$$g \cdot \left(2 V_1^2 - 2 V_2^2 \right) = 4g \cdot \sqrt{\left(\frac{F_i}{2C_{W_0} \cdot mg \cdot k_2} \right)^2 - V^{*4}}.$$

Für einen horizontalen Beschleunigungsflug von der Anfangsgeschwindigkeit V_a auf die Endgeschwindigkeit V_e wird dann folgende Strecke zurückgelegt

$$x_{nV=0} = [A_b(V_e, F_i) - A_b(V_a, F_i)] \quad (7.101)$$

7.3.3 Beschleunigungszeit

Wie in Unterabschnitt 7.3.2 folgt aus $\frac{F}{mg}$ und $\frac{W}{mg}$ (Gl. 4.31)

$$\frac{dx}{dV} = \frac{-2 m \cdot V^2}{C_{W_0} \cdot S \cdot \rho \left(V^4 - \frac{2F_i}{C_{W_0} \cdot S \cdot \rho} \cdot V^2 + V^{*4} \right)} \quad (7.102)$$

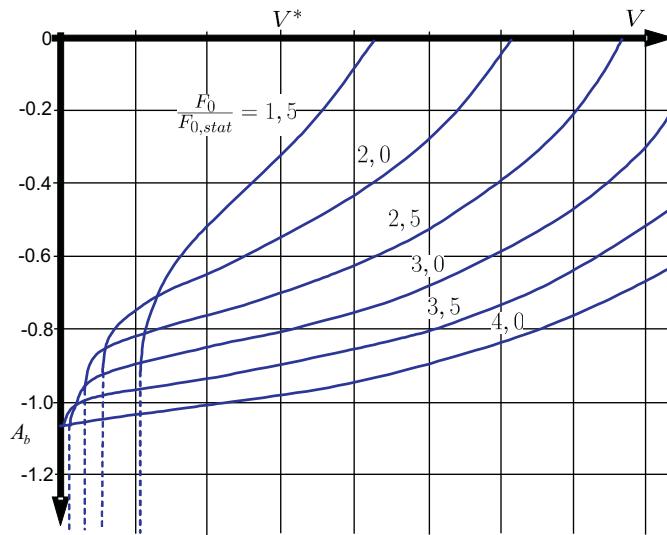
wiederum für den Sonderfall $n_V = 0$

$$\left. \frac{dt}{dV} \right|_{n_V=0} = \frac{-2m}{C_{W_0} S \rho} \cdot \frac{V^2}{(V^2 - V_1^2) \cdot (V^2 - V_2^2)}, \quad (7.103)$$

Die für die Beschleunigung von V_a auf V_e benötigte Zeit beträgt

$$t_{nV=0} = [B_b(V_e, F_i) - B_b(V_a, F_i)] \quad (7.104)$$

Bei der Verwendung einer parabolischen Polaren, d. h. $C_{A,0} \neq 0$, ist zu beachten, dass auch $\frac{W}{mg}$ über C_{W_0} noch von $C_{A,0}$ abhängig ist, vgl. hierzu Gl. 3.29. Die Funktion A_b und B_b abhängig von V mit F_i als Parameter sind in Bild 7.19 und Bild 7.20 dargestellt, sie sind für eine schnelle Abschätzung von Beschleunigungsweg und -zeit geeignet.

Abbildung 7.19: Veränderung des Parameters A_b bei unterschiedlichen Schubeinstellungen

Der Kraftstoffverbrauch für den Beschleunigungsflug beträgt definitionsgemäß $m_B = F_i \cdot b_0 \cdot t$. Mit t aus Gl. 7.104 folgt daraus für den auf die Flugzeugmasse bezogenen Kraftstoffverbrauch

$$\frac{m_B}{m} = F_i \cdot b_0 \cdot [B_b(V_e, F_i) - B_b(V_a, F_i)]. \quad (7.105)$$

Am Beispiel eines Strahlverkehrsflugzeugs sei die Größe des Kraftstoffverbrauchs für einen Beschleunigungsflug von $M = 0,4$ auf $M = 0,8$ in 6 km Höhe veranschaulicht.

Mit $b_0 = 17,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/Ns}$, $\frac{mg}{S} = 5000 \text{ N/m}^2$ und $C_{A,1} = 0,5$ erhält man abhängig vom Drosselgrad, dargestellt durch das Verhältnis von Schub im beschleunigten zum stationären Horizontalflug, Tabelle 7.8. Dieses Ergebnis zeigt zunächst, dass es aus Gründen der Wirtschaftlichkeit

Tabelle 7.8: Kraftstoffverbrauch am Beispiel eines Strahlverkehrsflugzeugs

$\frac{F_i}{2C_{W_0}mgk_2}$	1,5	2,0	2,5
$10^3 \frac{m_B}{m}$	8,68	5,05	3,96

zweckmäßig ist, den Beschleunigungsflug mit möglichst großem Schub durchzuführen.

Ferner ist festzustellen, dass zumindest für Beschleunigungsflüge im Unterschallbereich die verbrauchte Kraftstoffmasse im Vergleich zur Flugzeugmasse sehr klein ist ($< 0,5\%$). Die Annahme einer unveränderlichen Flugzeugmasse ist deshalb durchaus berechtigt.

7.3.4 Verzögerungsflug

Bei der Betrachtung des Verzögerungsflugs wird zur Vereinfachung die Annahme gemacht, dass die Triebwerke soweit gedrosselt werden, dass $F = 0$ gesetzt werden kann. Aus Sicher-

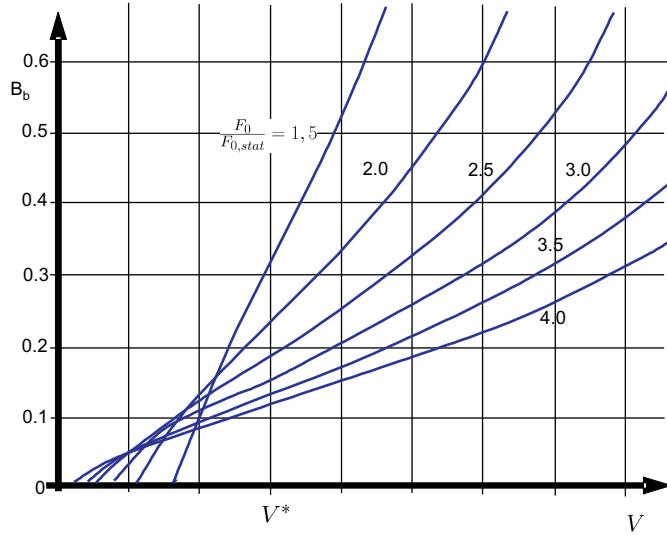


Abbildung 7.20: Veränderung des Parameters B_b bei unterschiedlichen Schubeinstellungen

heitsgründen werden die Triebwerke, vor allem bei Verkehrsflugzeugen, im Regelfall nicht komplett abgeschaltet, um z.B. ein Durchstarten zu ermöglichen, weshalb eine geringe Schubkraft F verbleibt. Mit der getroffenen Annahme $F = 0$ und Gl. 7.97 bzw. Gl. 7.103 erhält man

$$\frac{dx}{dV} = \frac{-2m}{C_{W_0}S\rho} \cdot \frac{V^3}{(V^4 + V^{*4})} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dt}{dV} = \frac{-2m}{C_{W_0}S\rho} \cdot \frac{V^2}{(V^4 + V^{*4})}. \quad (7.106)$$

Die Integration ergibt

$$x = A_v(V) + C_1 \quad (7.107)$$

$$t = B_v(V) + C_2 \quad (7.108)$$

mit

$$A_v(V) = \frac{-2m}{C_{W_0}S\rho} \cdot \frac{1}{4} \ln(V^4 + V^{*4}) \quad (7.109)$$

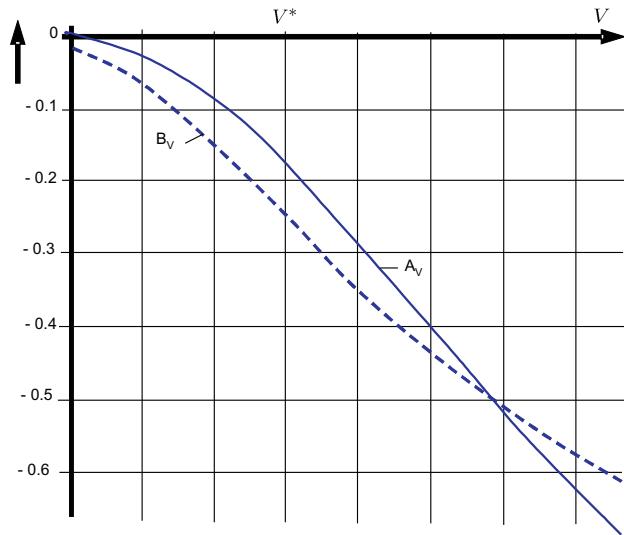
$$B_v(V) = \frac{-m}{C_{W_0}S\rho} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot V^*} \cdot \left(\ln \frac{V^2 + \sqrt{2}V^*V + V^{*2}}{V^2 - \sqrt{2}V^*V + V^*} - \arctan \left(\frac{\sqrt{2} \cdot V^* \cdot V}{V^{*2} - V^2} \right) \right). \quad (7.110)$$

Verzögerungsweg bzw. Verzögerungszeit ergeben sich dann unter Verwendung der Abkürzungen in Gl. 7.109 und Gl. 7.110 zu

$$x = [A_v(V_e) - A_v(V_a)] \quad (7.111)$$

$$t = [B_v(V_e) - B_v(V_a)] \quad (7.112)$$

Die Verläufe der Funktionen $A_v(V)$ bzw. $B_v(V)$ sind in Bild 7.21 dargestellt.

Abbildung 7.21: Verläufe der Funktionen für A_V und B_V

7.3.5 Praxisbeispiel Beschleunigungs- und Verzögerungsflug

Für ein großes Strahlverkehrsflugzeug sind in den Bildern Bild 7.22 bis Bild 7.25 die benötigten Beschleunigungswege und -zeiten dargestellt. Die Geschwindigkeitsspanne wurde

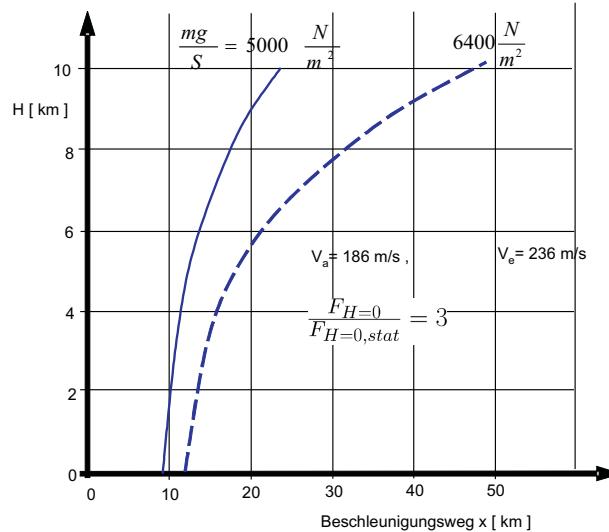


Abbildung 7.22: Abhängigkeit des Beschleunigungswegs von der Höhe

zwischen 186 und 236 m/s angenommen. (Die maximale Machzahl beträgt dabei für die höhere Geschwindigkeit in 11 km Höhe $M = 0,8$).

Als Flächenbelastung wurden die Werte $\frac{mg}{S} = 5000$ bzw. 6400 N/m^2 gewählt, die damit Flugzuständen bei verschiedenen Fluggewichten entsprechen. Für den Schub wurde maximale Schubhebelstellung ($D = 1$) vorausgesetzt. Unter dieser Voraussetzung beträgt der Triebwerksfaktor für den bodennahen Flug bei der kleineren Flugzeugmasse $\frac{F_{H=0}}{F_{H=0,\text{stat}}} = 3,0$ und entspricht

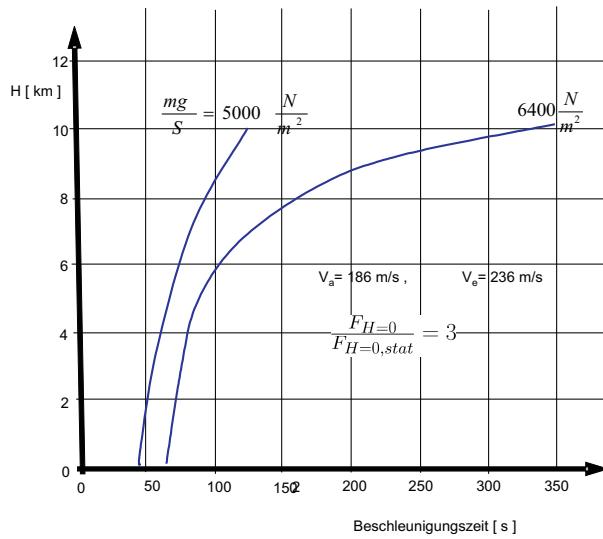


Abbildung 7.23: Abhängigkeit der Beschleunigungszeit von der Höhe

damit einer Schubbelastung von $\frac{F}{mg} \cong 0,2$.

Die aerodynamischen Daten wurden der Polaren Bild 3.15 für $M = 0,7$ entnommen und betragen $C_{W_0} = 0,017$ und $C_{A,1} = 0,5$.

Beim Beschleunigungsflug zeigen die Bilder Bild 7.22 und 7.23 die zu erwartende Abhängigkeit der Wege und Zeiten von Höhe und Flugzeugmasse. Infolge der Schubabnahme entsprechend dem Ansatz $\frac{F}{F_0} = (\frac{\rho}{\rho_0})^{0,7}$ nehmen die Beschleunigungsleistungen in größeren Höhen stark ab. Insbesondere bei der großen Flugzeugmasse entsprechend $\frac{mg}{S} = 6400 \text{ N/m}^2$ ergibt sich in 10 km Höhe ein starkes Anwachsen der zum Beschleunigen erforderlichen Wege und Zeiten.

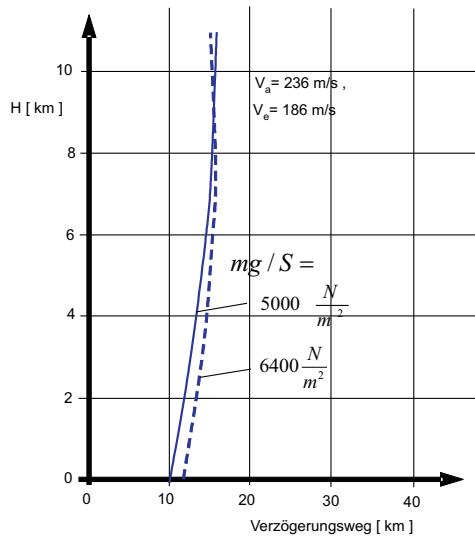


Abbildung 7.24: Maximaler Verzögerungsweg in Abhängigkeit von der Höhe

Beim Verzögerungsflug, Bild 7.24 und Bild 7.25, erhält man für Strecken und Zeiten Maximalwerte, die bei gleichen Beträgen je nach Flächenbelastung in unterschiedlicher Höhe liegen. Hier prägt sich der Charakter der Widerstandskurve, Bild 7.17, auf. Maximale Werte werden erreicht, wenn der Geschwindigkeitsbereich beim Verzögerungsflug in der Umgebung des Widerstandsminimums zu liegen kommt.

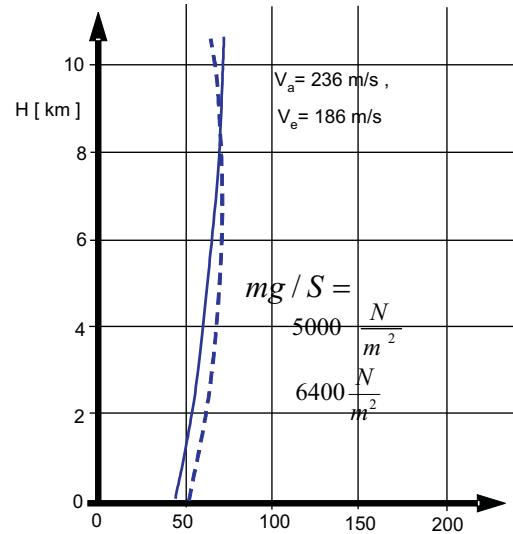


Abbildung 7.25: Maximale Verzögerungszeit in Abhängigkeit von der Höhe

7.4 Allgemeiner Steigflug

7.4.1 Definition der Energiehöhe

Bei den Betrachtungen zum Steigflug im Abschnitt 4.3 kam es neben der Darlegung der wichtigsten Grundzusammenhänge vor allem auf die Ermittlung der *Steigfähigkeit* im Höhen-Machzahl-Diagramm an.

Das Ziel des vorliegenden Abschnittes ist dagegen die Berechnung der Steigbahn, wobei sich im allgemeinen der Bahnvektor zum Erreichen optimaler Bahnen in Größe und Richtung ändert.

Die Betrachtung des Leistungsbedarfs entsprechend Gl. 4.57 erweitert sich beim beschleunigten Flug zu folgender Beziehung mit $w = -V \sin \gamma = -\dot{H}$

$$\underbrace{F \cdot V}_{\text{Vortriebsleistung}} = \underbrace{W \cdot V}_{\text{Widerstandsflugleistung}} + \underbrace{m \cdot g \cdot \dot{H}}_{\text{Hubleistung}} + \underbrace{m \cdot V \cdot \dot{V}}_{\text{Beschleunigungsleistung}} \quad (7.113)$$

Hub- und Beschleunigungsleistung kann man folgendermaßen zusammenfassen

$$mg\dot{H} + mV\dot{V} = \frac{d}{dt}(mgH + \frac{m}{2} \cdot V^2), \quad (7.114)$$

wobei $mgH + \frac{m}{2} \cdot V^2$ die Summe von potentieller und kinetischer Energie darstellt und als Gesamtenergie E bezeichnet wird. Damit kann man Gl. 7.113 folgendermaßen interpretieren: Die im beschleunigten Steigflug benötigte Leistung ist um den zeitlichen Zuwachs der Gesamtenergie größer als im Horizontalflug. Für die Gesamtenergie kann man auch schreiben

$$E = mgH^* \quad (7.115)$$

wobei $H^* = \frac{E}{mg}$ als spezifische Gesamtenergie oder besser als *Energiehöhe* bezeichnet wird. Es gilt damit

$$H^* = H + \frac{V^2}{2g} \quad (7.116)$$

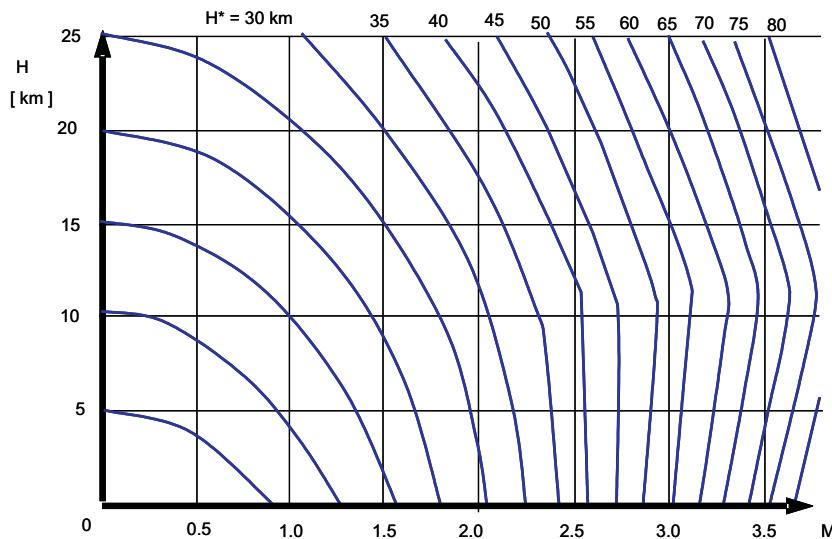


Abbildung 7.26: Linien konstanter Energiehöhe H^* im Höhen-Machzahl-Diagramm

Bild 7.26 zeigt im Höhen-Mach-Diagramm Linien konstanter Energiehöhe, die definitionsgemäß die Äquivalenz von Geschwindigkeit und Höhe veranschaulichen. Wenn man annimmt, dass die Widerstandsleistung durch das Triebwerk aufgebracht wird, so ist insbesondere beim Flug mit hohen Machzahlen ein beträchtlicher Höhengewinn ohne weitere Energiezufuhr möglich, wenn man sich auf einer Flugbahn mit $H^* = \text{konst.}$ bewegt.

7.4.2 Numerische Berechnungen von Steigbahnen in der Vertikalebene

Da sich der Triebwerksschub sowie die Luftkräfte in komplizierter Weise mit Höhe und Machzahl ändern, ist eine geschlossene Berechnung von Steigbahnen nicht möglich. Man ist deshalb auf eine numerische Lösung der die Bahn beschreibenden Differentialgleichungen angewiesen.

Bei Vernachlässigung der Impulskräfte sowie unter der Annahme eines vernachlässigbar kleinen Schubeinstellwinkels $\alpha_{\text{eff.}} + \sigma$, liefert Gl. 3.81 folgende Beziehungen für eine Bahn in der Vertikalebene

$$m\dot{V} + W - F + mg \sin \gamma = 0, \quad (7.117)$$

$$mV\dot{\gamma} - A + mg \cos \gamma = 0. \quad (7.118)$$

Dabei sind Widerstand, Schub und Auftrieb von der Flughöhe und der Flugmachzahl abhängig. Zusätzlich ist der Widerstand noch über den auftriebsabhängigen Anteil mit der Auftriebsgleichung gekoppelt.

Für die im folgenden Abschnitt betrachteten Größen erhält man

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{F}{mg} - \left(C_{W_0} \cdot k_2 \cdot V^2 + \frac{k \cdot \cos^2 \gamma}{k_2 \cdot V^2} \right) - \sin \gamma \quad (7.119)$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{g} = \frac{1}{V} \cdot (n_z - \cos \gamma), \quad (7.120)$$

$$\dot{H} = V \sin \gamma, \quad \dot{x} = V \cos \gamma. \quad (7.121)$$

Die Steigbahn $H(x)$ erhält man bei vorgegebenem $n_z(t)$ durch numerische Integration dieses Differentialgleichungssystems.

In Sonderfällen, z. B. für heutige Unterschallverkehrsflugzeuge, bei denen die Polare im Steigflug mit nahezu konstanter Machzahl geflogen wird, bieten sich Näherungsverfahren an, die zumindest in der Auslegungsphase eines Flugzeugs gute Dienste leisten.

7.4.3 Näherungsverfahren

Gl. 4.81 erlaubt die Ermittlung der Steiggeschwindigkeit $-w$ in jedem Punkt der Höhen-Machzahl-Ebene. Dabei wird ein Zusammenhang zwischen der Luftdichte und der Flughöhe entsprechend der Standardatmosphäre angenommen.

Für die Steigzeit von einer Anfangshöhe H_a auf eine Endhöhe H_e erhält man wegen $\dot{H} = -w$

$$t_{St} = \int_{H_a}^{H_e} \frac{dH}{-w}. \quad (7.122)$$

Die geschlossene Integration dieser Beziehung ist wegen der komplizierten Abhängigkeit der Steiggeschwindigkeit von der Höhe nach Gl. 4.81 nicht möglich.

Wertet man Gl. 4.81 aus, so kann man zeigen, dass sich der Verlauf $-w = f(H)$ näherungsweise durch eine Gerade ersetzen lässt, deren Steigung $\frac{d(-w)}{dH}$ dieselbe ist, wie sie Gl. 4.81 an der Stelle $H = 0$ liefert. Bild 7.27 zeigt für die Beispiele $V_0 = 0,8 \cdot V^*$ und $V_0 = V^*$ bei $n_V = 0$ die gute Qualität dieser Näherung für verschiedene Triebwerksfaktoren $\lambda_{0,0}$ im Bereich $0 \leq H \leq 11 \text{ km}$.

Daher gilt in diesem Höhenbereich näherungsweise für die Steiggeschwindigkeit

$$-w \approx -w(H=0) + \frac{d(-w)}{dH} \Big|_{H=0} \cdot H = -w(H=0) + \left(\frac{d(-w)}{d(\frac{\rho}{\rho_0})} \cdot \frac{d(\frac{\rho}{\rho_0})}{dH} \right) \cdot H, \quad (7.123)$$

mit Gl. 4.81 sowie dem durch $\left(\frac{\rho}{\rho_i} \right)^{n_\rho}$ um die Höhenabhängigkeit erweiterten Schubansatz

$$-w(H=0) = \frac{F_0}{mg \cdot V_0^{n_V}} \cdot V_0^{n_V+1} - C_{W_0} \cdot k_2 \cdot V_0^3 - \frac{k}{k_2 \cdot V_0} \quad (7.124)$$

$$\frac{d(-w)}{dH} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{n_\rho \cdot F_0}{mg \cdot V_0^{n_V}} \cdot V_0^{n_V+1} - C_{W_0} \cdot k_2 \cdot V_0^3 - \frac{k}{k_2 \cdot V_0}, \quad (7.125)$$

und nach Gl. 2.9

$$\frac{d(\frac{\rho}{\rho_0})}{dH} = -\frac{g}{nRT_0} \cdot (\frac{\rho}{\rho_0})^{2-n} \approx -9,6 \cdot 10^{-5} \cdot (\frac{\rho}{\rho_0})^{\frac{3}{4}}. \quad (7.126)$$

Die Integration der Gl. 7.122 liefert unter Verwendung der Steiggeschwindigkeit nach Gl. 7.123

$$t_{St} \approx \frac{dH}{d(-w)} \Big|_{H=0} \cdot \ln \frac{-w(H=0) + \frac{d(-w)}{dH} \Big|_{H=0} H_e}{-w(H=0) + \frac{d(-w)}{dH} \Big|_{H=0} H_a} \quad (7.127)$$

mit

$$\frac{d(-w)}{dH} \Big|_{H=0} = -9,6 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{n_\rho \cdot F_0}{mg \cdot V_0^{n_V}} \cdot V_0^{n_V+1} - C_{W_0} \cdot k_2 \cdot V_0^3 - \frac{k}{k_2 \cdot V_0} \right). \quad (7.128)$$

Das Ergebnis einer solchen Rechnung für $n_V = 0$, $n_\rho = 0,75$ und $\bar{V}_0 = V^*$ sowie verschiedene Triebwerksfaktoren gibt Bild 7.27 wieder. Als Anfangshöhe wurde stets $H_a = 0$ angenommen.

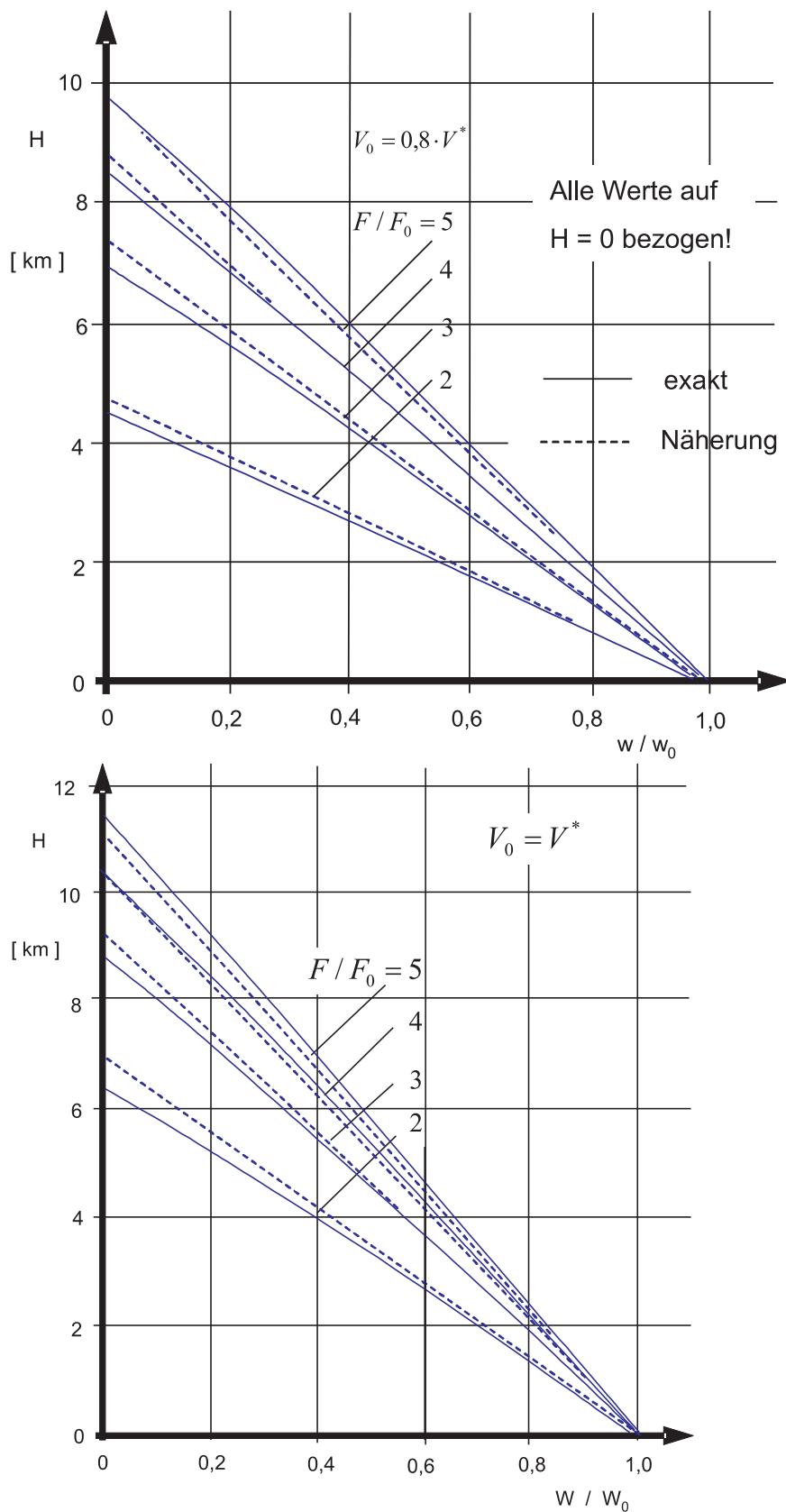


Abbildung 7.27: Bezogene Steiggeschwindigkeit, abhängig von der Höhe. Vergleich der exakten Rechnung mit der Näherung, $n_v = 0$

Wie man aus dem Bild 4.25 entnimmt, hängt auch die maximale Steiggeschwindigkeit ($-w_{max}$) näherungsweise linear von der Höhe ab. Führt man für sie auf entsprechende Weise eine lineare Ersatzfunktion ein, so lassen sich die minimal möglichen Steigzeiten errechnen.

7.4.4 Steigverfahren für Unterschallflugzeuge

Die der maximalen Steiggeschwindigkeit zugeordnete Bahngeschwindigkeit kann aus Gl. 4.49, Gl. 4.50 und Gl. 4.51 entnommen werden. Sie beträgt z. B. für $n_V = 0$

$$V_{w_{max}} = \frac{V^*}{\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{3} + \frac{F_i^2}{m^2 g^2 \varepsilon_{min}^2} + \frac{F_i}{mg \varepsilon_{min}}} \quad (7.129)$$

mit

$$F_i = F_{i,0} \cdot \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{n_\rho} \quad (7.130)$$

und

$$V^* = V_0^* \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_i}} \quad (7.131)$$

Sie ist in Bild 7.29 für verschiedene $F_{i,0}$ -Werte abhängig von der Höhe dargestellt.

Man erkennt, dass zum Steigen mit maximaler Steiggeschwindigkeit die Bahngeschwindigkeit mit wachsender Höhe vergrößert, d. h. beschleunigt gestiegen werden muss.

Im Betrieb, z. B. von Unterschall-Verkehrsflugzeugen, kommt es neben der Erzielung des schnellsten oder verbrauchsminimalen Steigwegs auch auf die Einfachheit der Durchführung an. Dabei muss man berücksichtigen, dass die optimalen Wege von den jeweiligen atmosphärischen Zustandsgrößen abhängen. Es wird deshalb ein Steigverfahren angestrebt, dass einerseits in der Nähe des Optimums liegt, andererseits eine einfache Durchführung ermöglicht.

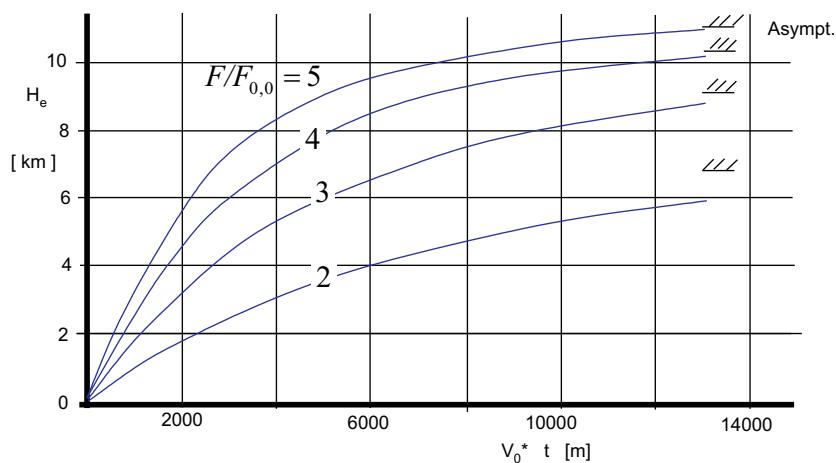


Abbildung 7.28: Steigverfahren bei verschiedenen Schubeinstellungen

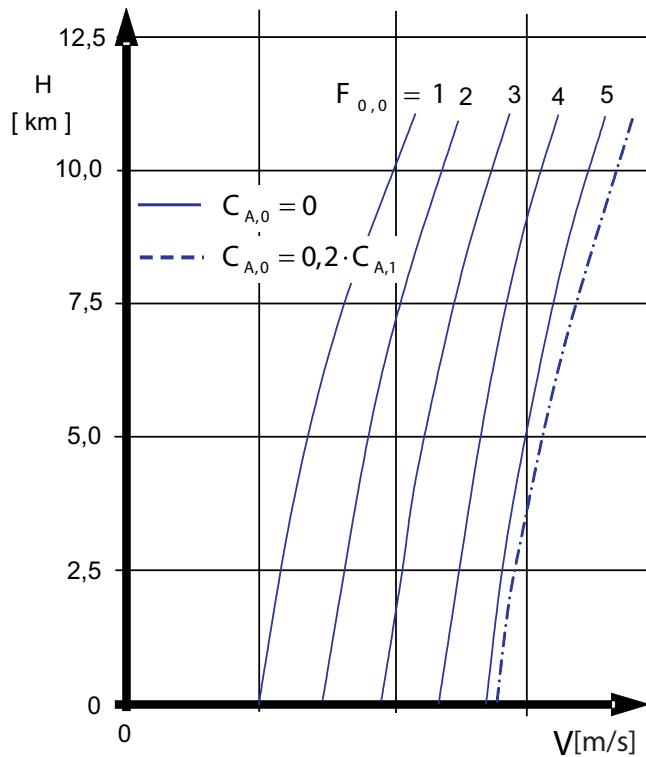


Abbildung 7.29: Geschwindigkeiten für maximales Steigen ($n_V = 0, n_\rho = 0,75$)

Ein solches Verfahren ist das Steigen mit konstanter, angezeigter Geschwindigkeit V_{IAS} . Da Fahrtmesser üblicherweise nicht die Geschwindigkeit selbst, sondern einen Druck messen, ist ihre Anzeige von der Luftdichte abhängig. Zwischen wahrer ($V = V_{TAS}$) und angezeigter Geschwindigkeit besteht dabei der genäherte Zusammenhang

$$V_{TAS} = \frac{V_{IAS}}{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}}, \quad (7.132)$$

so dass die wahre Geschwindigkeit nur am Boden exakt angezeigt wird. (Auf die bei der Geschwindigkeitsmessung darüberhinaus noch auftretenden Einbau- und Kompressibilitäteinflüsse kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden.)

Bei konstant gehaltener Geschwindigkeit V_{IAS} erhält man für ein typisches Zahlenbeispiel den in Bild 7.30 aufgetragenen Zusammenhang zwischen der Höhe H und der Geschwindigkeit V_0 .

Durch den Vergleich mit den Kurven $H = H(V_{0,w_{max}})$ in Bild 7.29 erkennt man, dass in beiden Fällen beim Steigen beschleunigt werden muss. Die Abweichungen sind insbesondere bei kleinen Triebwerksfaktoren nicht sehr groß, so dass wegen des flachen Minimums der Steiggeschwindigkeit abhängig von der Bahngeschwindigkeit beim Flug mit $V_{IAS} = \text{konst.}$ die Leistungsverluste gegenüber dem Optimalfall relativ gering sind.

Sobald im beschleunigten Steigflug die maximale Flugmachzahl erreicht ist, muss die Bahn-

geschwindigkeit beim weiteren Steigen dieser Bedingung angepasst werden. Bild 7.30 enthält daher auch Kurven konstanter Machzahl, für die $V_0 = a \cdot Ma$ gilt. Wie man sieht, muss unterhalb $H = 11\text{ km}$ nach Erreichen der vorgegebenen Flugmachzahl mit verzögerter Geschwindigkeit V_0 weitergestiegen werden. Oberhalb $H = 11\text{ km}$ wird –Standardatmosphäre vorausgesetzt– $Ma = \text{konst.}$ und damit $V_0 = \text{konst.}$ identisch, so dass dort stationär weitergestiegen werden kann.

Die sich ergebende Steiggeschwindigkeit ist in Bild 7.31 schematisch dargestellt. Gegenüber dem unbeschleunigten Steigflug erhält man beim Flug mit $V_{IAS} = \text{konst.}$ eine kleinere und beim Flug mit $Ma = \text{konst.}$ im Bereich $H \leq 11\text{ km}$ eine größere Steiggeschwindigkeit.

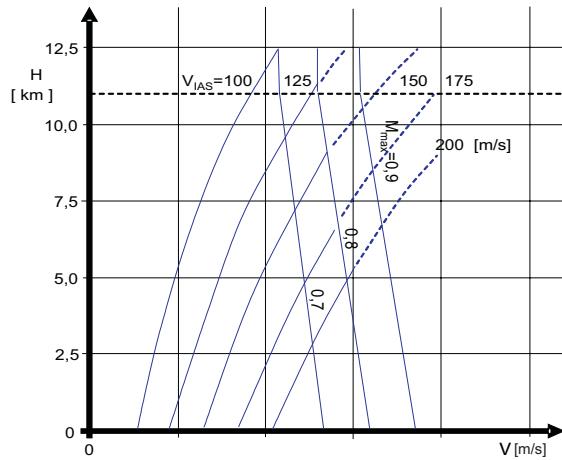


Abbildung 7.30: Steigflug $V_{IAS} = \text{konst.}$ bis $Ma = Ma_{\max} (\frac{mg}{S}, C_{A,1} = 0,48)$

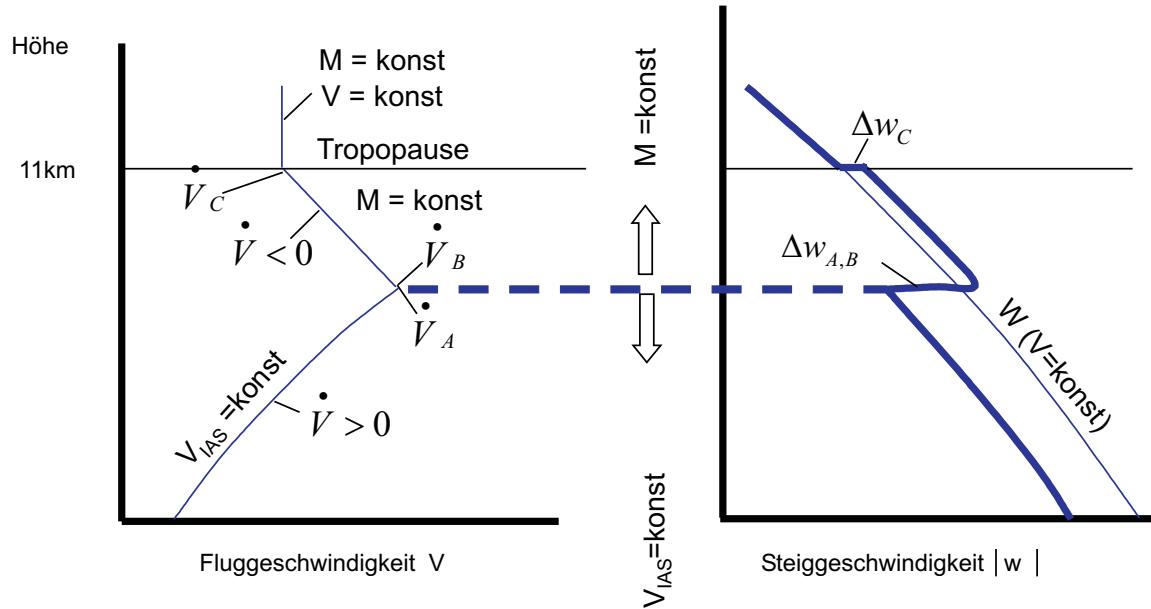


Abbildung 7.31: Praktische Durchführung von Steigverfahren

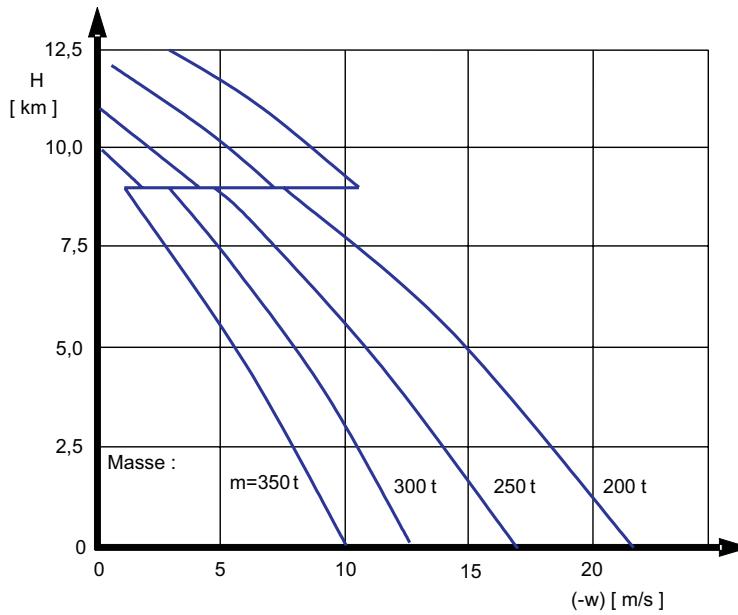


Abbildung 7.32: Praktische Durchführung von Steigverfahren

Diese Änderungen der Steiggeschwindigkeit kann man relativ einfach ausrechnen, indem man Gl. 7.114 außer für den allgemeinen Fall auch für den Sonderfall $\dot{V} = 0$, $w = w_{\dot{V}=0}$ ansetzt. Mit $w_{\dot{V}} = w_{\dot{V}=0} + \Delta w$ erhält man dann die Beziehung

$$\Delta w = V \cdot \frac{\dot{V}}{g}. \quad (7.133)$$

Beim Flug mit $V_{IAS} = \text{konst.}$ gilt daher

$$(\Delta w)_{V_{IAS}=\text{konst.}} = \frac{V}{g} \cdot \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dH} \cdot \frac{dH}{dt} \quad (7.134)$$

Mit

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{V_{IAS}}{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}} \right) = -\frac{1}{2\rho} \frac{V_{IAS}}{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}} = -\frac{1}{2\rho_0} \cdot V_{IAS} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (7.135)$$

und gemäß Gl. 7.126

$$\frac{d\rho}{dH} = -9,6 \cdot 10^{-5} \rho_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (7.136)$$

sowie

$$\frac{dH}{dt} = -w_{\dot{V}} \quad (7.137)$$

folgt nach einfacher Zwischenrechnung

$$\frac{w_{\dot{V}}}{w_{\dot{V}=0}} = \frac{1}{1 + \frac{4,8 \cdot 10^{-5}}{g} \cdot V_{IAS}^2 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{5}{4}}}. \quad (7.138)$$

Beim Flug mit $M = \text{konst.}$ erhält man

$$(\Delta w)_{M=\text{konst.}} = \frac{aMa}{g} \cdot \frac{dV}{da} \cdot \frac{da}{dT} \cdot \frac{dT}{dH} \cdot \frac{dH}{dt} \quad (7.139)$$

Hierin gilt –wiederum für Standardatmosphäre–

$$\frac{dV}{da} = Ma, \quad \frac{da}{dT} = \frac{a}{2T}, \quad \frac{dT}{dH} = -0,0065, \quad \frac{dH}{dt} = -w_V. \quad (7.140)$$

Insgesamt ergibt sich, wenn man $\frac{a^2}{T} = \kappa R = 401,87 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$ setzt

$$\frac{w_V}{w_{V=0}} = \frac{1}{1 - 0,133Ma^2}. \quad (7.141)$$

Bild 7.31 gibt den Verlauf der Steiggeschwindigkeit eines modernen Unterschall-Verkehrsflugzeuge wieder, bei dem nach dem oben beschriebenen Programm geflogen wurde. Bei Änderung des Fluggewichts bleibt die Höhe, in der vom beschleunigten auf verzögertes Steigen umgeschaltet werden muss, unverändert.

7.4.5 Steigverfahren für Überschallflugzeuge

Bei instationären Optimal-Steigflügen, die insbesondere für Überschallflugzeuge typisch sind, ist die Betrachtung stationärer Punktzustände nicht mehr ausreichend. Vielmehr kommt hier der Änderung der Geschwindigkeit und dem Anteil der kinetischen Energie an der Gesamtenergie eine maßgebliche Bedeutung zu. Als zweckmäßige Größe für die Steigflugberechnung bietet sich damit die Energiehöhe H^* gemäß Gl. 7.116 an. Der Steigflug von einer Anfangshöhe H_a^* zu einer Endhöhe H_e^* aufzufassen. Hierdurch wird eine anschauliche Betrachtungsweise der Steigflugoptimierung ermöglicht.

Mit der zeitlichen Ableitung der Energiehöhe

$$\dot{H}^* = \dot{H} + \frac{VV}{g} = V \cdot \sin \gamma + \frac{VV}{g} \quad (7.142)$$

folgt aus der Ausgangsgleichung des Steigflugs, Gl. 7.113

$$\dot{H}^* = V \frac{F - W}{mg}. \quad (7.143)$$

Die *Flugzeit* ergibt sich mit

$$dt_{St} = \frac{dH^*}{\dot{H}^*} = \frac{dH^*}{V \cdot \frac{F-W}{mg}} \quad (7.144)$$

zu

$$t_{St} = \int_0^{t_e} dt = \int_{H_a^*}^{H_e^*} \frac{dH^*}{V \cdot \frac{F-W}{mg}}. \quad (7.145)$$

Die minimale Steigflugzeit erhält man für den Weg, der das Integral in Gl. 7.145 zu einem Minimum macht. Ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung dieses Weges wird weiter unten, zusammen mit der Minimierung des Kraftstoffverbrauchs, dargestellt.

Zur Optimierung des *Kraftstoffverbrauchs* betrachte man die Energiehöhenänderung dH^* pro Einheit Kraftstoff dm_B

$$h^* = \frac{dH^*}{dm_B}. \quad (7.146)$$

Mit Gl. 3.58 für \dot{m}_B , und Gl. 7.143 für \dot{H}^* erhält man

$$h^* = \frac{\dot{H}^*}{\dot{m}_B} = \frac{V^{1+n_V}}{b_{n_V} F} \cdot \frac{F - W}{mg}. \quad (7.147)$$

In dieser Gleichung stellt der durch \dot{H} hervorgerufene Anteil das in Abschnitt 4.3 behandelte wirtschaftliche Steigvermögen h dar.

Aus Gl. 7.147 erhält man für den Gesamtverbrauch

$$m_B = \int_{H_a^*}^{H_e^*} \frac{dH^*}{\frac{V^{1+n_V}}{b_{n_V} F} \cdot \frac{F - W}{mg}}. \quad (7.148)$$

Der minimale Verbrauch $m_{B,min}$ ergibt sich somit aus einem ähnlichen Ausdruck wie zuvor die Steigflugzeit, wenn man den Flug bei konstantem Drosselgrad betrachtet, anderenfalls tritt der Drosselgrad als zusätzliche Steuervariable auf. Setzt man voraus, dass Änderungen des Steigungswinkels und die daraus resultierende Widerstandserhöhung infolge bahnnormaler Beschleunigungen vernachlässigbar sind, dann ist der Nenner der beiden Gleichungen 7.145 und 7.148 nur von H und Ma abhängig. Allgemein kann man deshalb schreiben

$$y = \int_{H_a^*}^{H_e^*} \frac{dH^*}{f(H, Ma)} = \text{Min!} \quad (7.149)$$

Dabei bedeutet $f(H, Ma)$ entweder den Nenner von Gl. 7.145 mit $y = t_{St}$, oder von Gl. 7.148 mit $y = m_B$. Der Steigweg muss dann derart gewählt werden, dass sich im H - Ma -Diagramm die Kurven H^* und $f(H, Ma)$ tangieren, Bild 7.33. Dadurch wird erreicht, dass $f(H, Ma)$ auf allen Kurven $H^* = \text{konst.}$ seinen Maximalwert annimmt. Auf diese Weise wird die Minimalbedingung nach Gl. 7.149 erfüllt.

Diese als „Kaisersches Steigverfahren“ bekannte Methode zur Optimierung des Steigwegs liefert nur dann den Minimalwert, wenn Anfangs- und Endpunkte gleichzeitig Berührungs punkte von H^* und $f(H, Ma)$ sind, Bild 7.33. Außerdem können die Kurven $f = \text{konst.}$ auch noch von der Bahnkrümmung abhängen, deren Einfluss, wie schon erwähnt, hier vernachlässigt wurde.

Fällt der Endpunkt $P(H_e, Ma_e)$ nicht mit dem Berührungs punkt der Kurven $H_e^* = \text{konst.}$ und $f(H, Ma) = \text{konst.}$ zusammen, so gewinnt man eine näherungsweise optimale Lösung, indem man annimmt, dass die Endphase des Fluges auf der Kurve $H_e^* = \text{konst.}$ erfolgt, Bild 7.34.

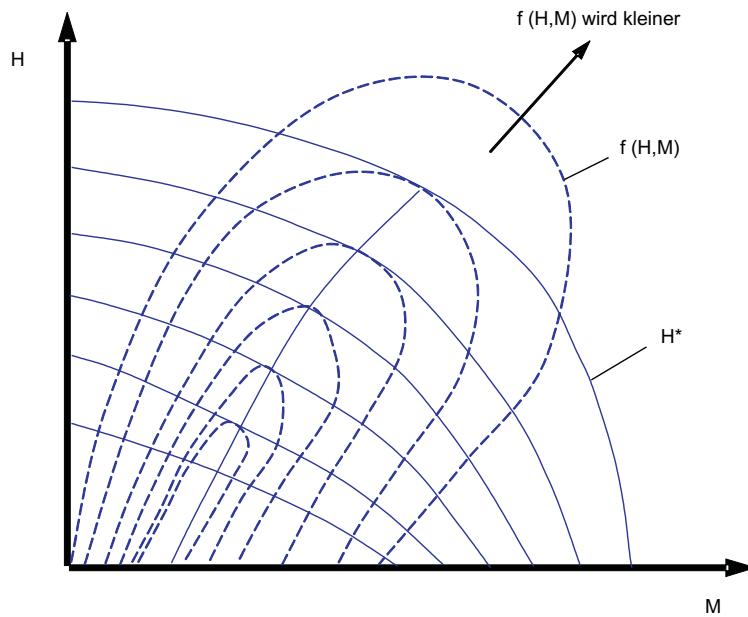
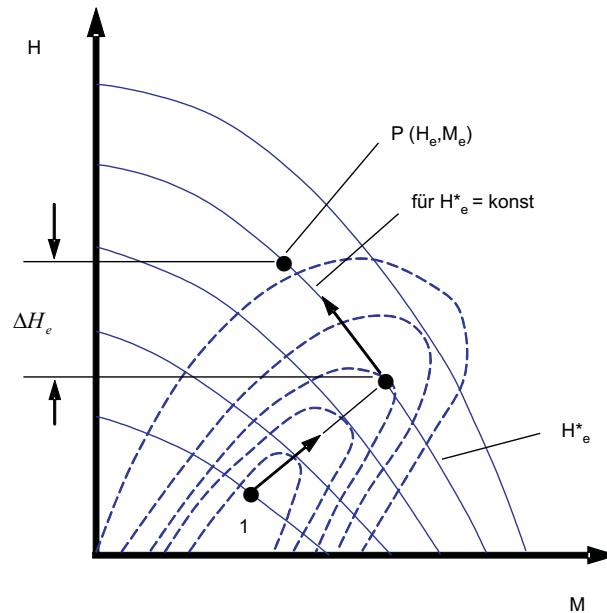


Abbildung 7.33: Praktische Durchführung von Steigverfahren

Die Berechnung von Steigflügen längs Kurven $H^* = \text{konst.}$ wird in Unterabschnitt 7.4.6 behandelt.

Bild 7.35 veranschaulicht den Steigflug eines Überschallflugzeugs mit beliebigen Anfangs- und Endpunkten im H - Ma -Diagramm nach dem Kaiserverfahren. Die hier dargestellten unstetigen Übergänge zwischen den einzelnen Bahnteilen sind nicht realistisch. Ausgeführte Flugbahnen erfordern ein Ausfliegen der Bahnübergänge unter Beachtung des zulässigen Lastvielfachen.

Abbildung 7.34: Endphase des Steigflugs auf einer Linie $H^* = \text{konst.}$

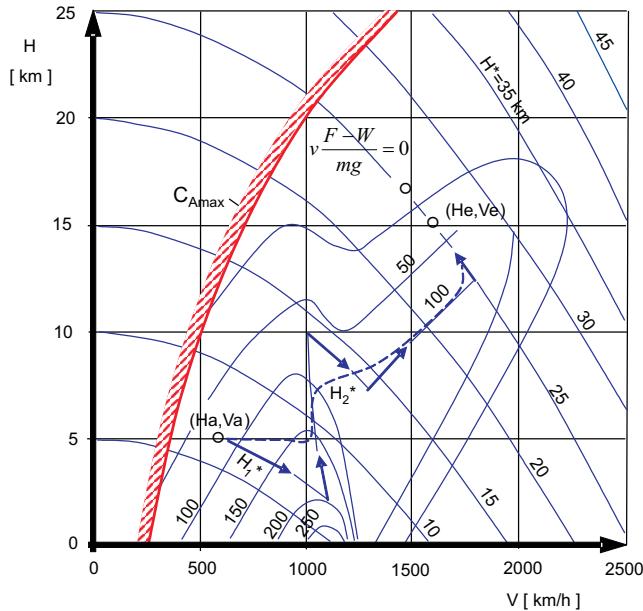


Abbildung 7.35: Zeitminimaler Steigflug

Untersuchungen über die Optimierung von Steigflügen bei Anwendung geeigneter mathematischer Methoden und ihre numerische Durchrechnung mit dem Digitalrechner bestätigen das Grundprinzip des Kaiserverfahrens, zumindest für den Überschallbereich, während sich im Unterschallbereich horizontale Beschleunigungsstrecken gelegentlich als vorteilhafter erweisen; der in Bild 7.35 gestrichelt eingetragene Steigflug deutet dies an.

7.4.6 Steigflüge mit konstanter Energiedichte

Ein Steigflug mit $H^* = \text{konst.}$ bedeutet gemäß Gl. 7.116, dass die kinetische Energie verlustlos in potentielle Energie umgesetzt wird. Die verlustlose Umsetzung der Energie ist nur unter Vernachlässigung der Luftkräfte, also im Vakuum zu realisieren. Dort entspricht der Flug mit $H^* = \text{konst.}$ einer Wurfparabel. Nimmt man an, dass zu Beginn des Steigflugs die Bahngeschwindigkeit V_0 und der Steigwinkel γ_0 betragen, so erhält man für die Gleichung der Wurfparabel im luftleeren Raum nach einfacher Rechnung, Bild 7.36

$$\begin{aligned} x &= V_0 \cdot \cos \gamma_0 \cdot t, \\ z - z_0 &= -V_0 \cdot \sin \gamma_0 \cdot t + g \cdot \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Nach Elimination der Zeit wird daraus

$$z - z_0 = -x \cdot \tan \gamma_0 + \frac{gx^2}{2V_0^2 \cdot \cos^2 \gamma_0}. \quad (7.150)$$

Dass die Energiehöhe dieser Bahn konstant ist, lässt sich wie folgt zeigen

$$H^* = \frac{V^2}{2g} - z = \frac{1}{2g} \cdot \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] - z = \frac{V_0^2}{2g} - z_0 = H_0^*. \quad (7.151)$$

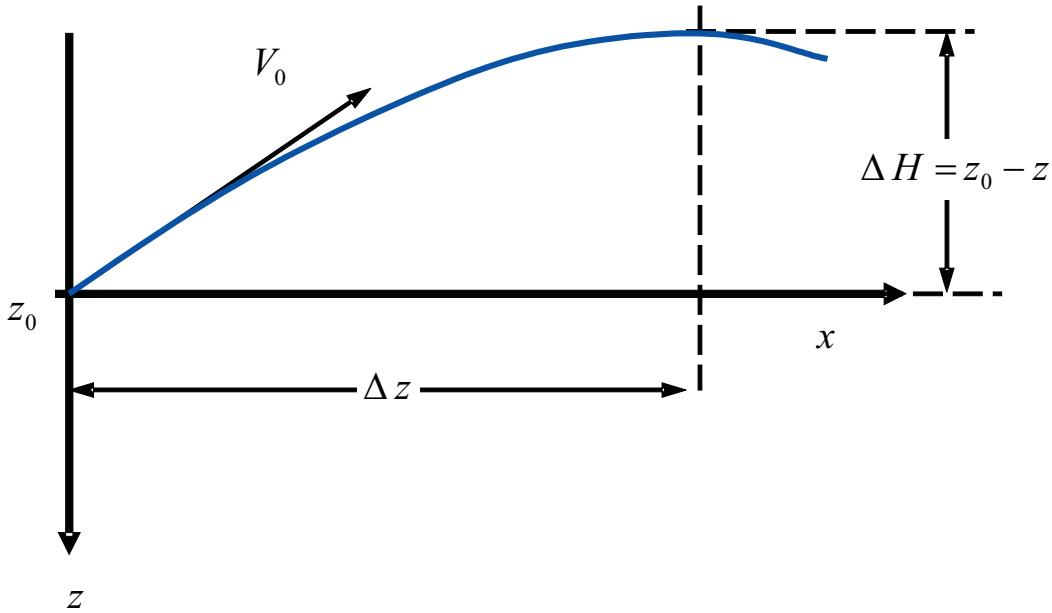


Abbildung 7.36: Wurfparabel

Für die Flugbahnüberhöhung und die zugehörige Horizontalflugstrecke erhält man

$$x|_{z_{max}} = \frac{V_0^2}{2g} \cdot \sin 2\gamma_0, \quad (7.152a)$$

$$\Delta H = (z_0 - z)_{max} = \frac{V_0^2}{2g} \cdot \sin^2 \gamma_0. \quad (7.152b)$$

Wie zu erwarten, wird der größte Höhengewinn für $\gamma_0 = 90^\circ$, die größte Flugstrecke für $\gamma_0 = 45^\circ$ erzielt.

Im praktischen Flugbetrieb kann dieser Idealfall dadurch angenähert werden, dass der Pilot nach Erreichen der vorgesehenen Kurve $H^* = \text{konst.}$ mit dem C_A des minimalen Widerstands fliegt und über den Schubhebel die Geschwindigkeit, bzw. die Machzahl steuert. Für sie folgt aus Gl. 7.116

$$V = \sqrt{2g \cdot (H^* - H)} \quad \text{bzw.} \quad Ma = \frac{\sqrt{2g \cdot (H^* - H)}}{a}.$$

Dieser Zusammenhang kann ihm z. B. an Hand einer Tabelle zugänglich gemacht werden. In sehr großen Höhen kann das Triebwerk ausgehen, so dass in diesem Fall der durch den Widerstand auftretende Energieverlust in Kauf genommen werden muss.

Bevor die Kurve $H^* = \text{konst.}$ erreicht wird, muss der Pilot das Flugzeug aus dem Flug mit mäßigem Steigungswinkel durch *Hochziehen (Zooming)* in eine wesentlich steilere bzw. vertikale Bahn überführen.

Diese Übergangsphase, die meist mit hohem Lastvielfachem geflogen wird, ist Ursache von Energieverlusten. Längs der Übergangsbahn verrichtet der Widerstand eine Arbeit, die von der vorhandenen Energie abgezogen werden muss, und nicht mehr zum Höhengewinn zur Verfügung steht.

Durch Ausnutzung der kinetischen Energie zum Höhengewinn beim Flug mit $H^* = \text{konst.}$ ist es möglich, die Grenzkurve des stationären Flugbereichs, Kapitel 6, kurzfristig zu überschreiten und beträchtlich größere Höhen zu erreichen, wie in Bild 7.37 und Bild 7.38 für ein Mach 3-Hochleistungsflugzeug dargestellt ist. Aus dem beschleunigten Steigflug längs der Festigkeitsgrenze wurde das Flugzeug bei verschiedenen Machzahlen hochgezogen und in einen Zustand mit $H^* = \text{konst.}$ überführt. Bei kleineren Machzahlen ist der Verlust infolge der Widerstandsarbeit beim Übergangsflug relativ gering, so dass bis zum senkrechten Steigflug gezogen wurde, der nach Gl. 7.152 die größtmögliche Flughöhe ergibt. Allerdings erreicht das Flugzeug diese Höhe mit der Bahngeschwindigkeit $V = 0$ und bewegt sich danach im unkontrollierten Sturzflug zur Erde zurück.

Bei höheren Machzahlen ist es günstiger, den Zustand $H^* = \text{konst.}$ mit geringerem Anfangssteigwinkel als $\gamma_0 = 90^\circ$ zu fliegen. Der dabei eintretende Höhenverlust entsprechend Gl. 7.152 wird durch die Einsparung an Widerstandsarbeit beim Hochziehen mehr als ausgeglichen.

Es sei erwähnt, dass die Höhenflugrekorde bemannter Hochleistungsflugzeuge mit der beschriebenen Technik erflogen wurden.¹

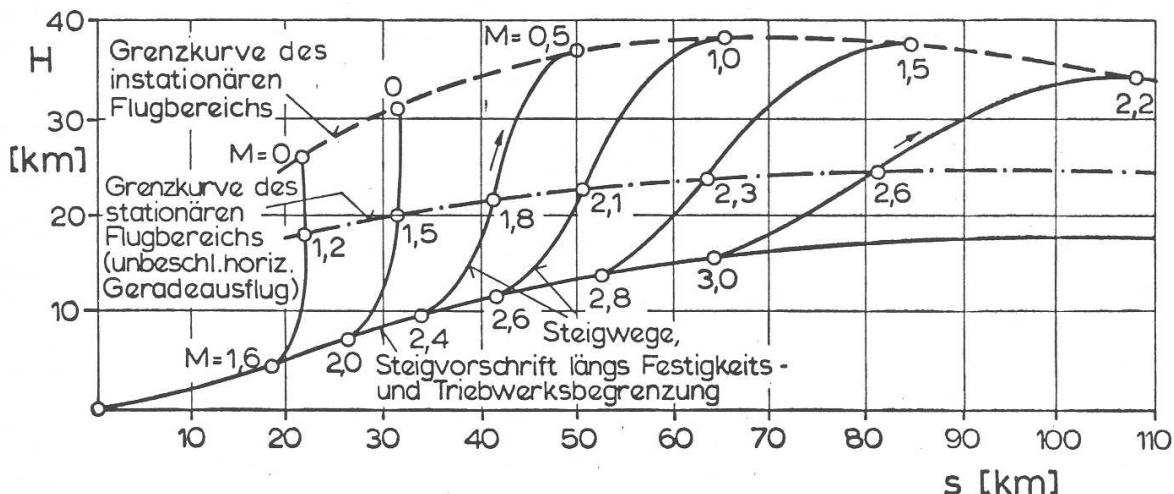


Abbildung 7.37: Flugbahnen bei stationär erfliegbaren Maximalhöhen

¹Höhenrekord der X-15

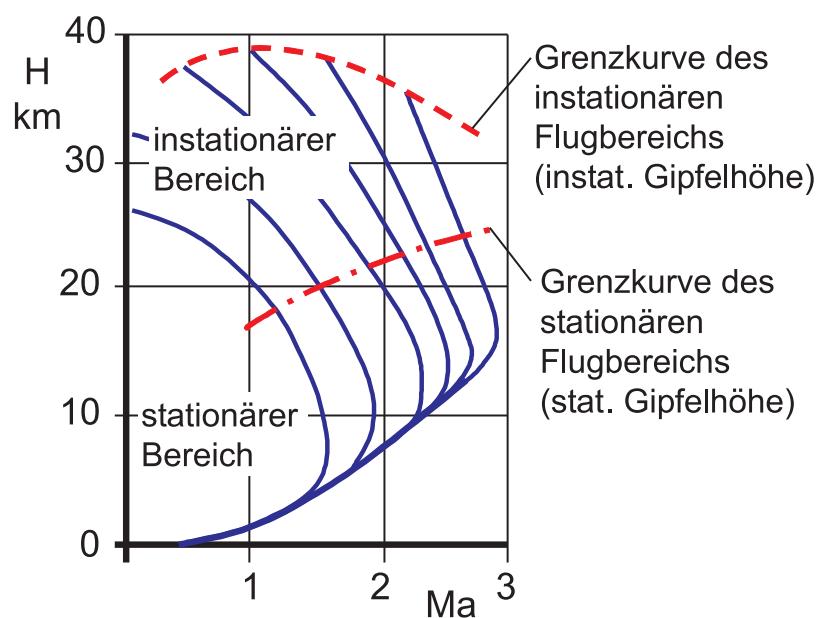


Abbildung 7.38: Zuordnung von Höhe und Machzahl zu den Flugbahnen von Bild 7.37

7.5 Start und Landung

7.5.1 Einführung

Der aerodynamisch getragene Flug setzt eine Mindestfluggeschwindigkeit voraus, bei der der Auftrieb eine ausreichende Größe erreicht hat, um die Schwerkraft zu überwinden.

Das am Boden stehende Flugzeug muss also zunächst auf die Abhebegeschwindigkeit beschleunigt werden, ehe es in aerodynamisch getragenen Flug übergehen kann. Entsprechend wird auch das landende Flugzeug nach dem Aufsetzen am Boden bis zum Stillstand verzögert. In diesem Teil des Abflugs bzw. des Landevorgangs findet ein Wechselspiel zwischen den von der Start- und Landebahn auf das Flugzeug übertragenen Normal- und Tangentialkräften einschließlich den daraus resultierenden Momenten, den Luftkräften und -momenten und den Massenkräften statt.

Von wesentlichem Einfluss auf diesen Bereich von Abflug und Landung ist die konstruktive Gestaltung des Fahrwerks, insbesondere, ob es sich um ein Flugzeug mit Sporn- bzw. Heckrad oder ein Bugradfahrwerk handelt. Beim teilweise oder vollständig schubgestützten Start, wie er z. B. für Senkrechtstarter typisch ist, sind besondere Betrachtungen notwendig, auf die im Rahmen dieser Vorlesung nicht eingegangen werden kann.

Vom Abhebepunkt beim Abflug bzw. vor dem Aufsetzen bei der Landung bewegt sich das Flugzeug im Einflussbereich der aerodynamischen Bodeneffekte, die außer Auftrieb und Widerstand auch die Steuerbarkeit um so stärker beeinflussen, je geringer der Abstand des Tragflügels bzw. des Leitwerks vom Boden ist. Weiterhin wirkt in diesem Bereich die durch die bodennahe Grenzschicht beeinflusste Scherströmung auf das Flugzeug. Diese Scherströmung und eventuell auftretende Böen erschweren insbesondere bei der Landung den Übergang vom aerodynamisch getragenen Flug zum bodengestützten Rollvorgang. In neuester Zeit treten zusätzliche Probleme durch die Nachlaufwirbel zuvor gestarteter oder gelandeter sehr großer Flugzeuge auf. Da die Stärke dieser Wirbel bekanntlich dem Auftrieb, d.h. dem Fluggewicht proportional ist, ist dieser Einfluss besonders dann kritisch, wenn ein kleines Flugzeug einem großen in zu geringem Abstand folgt.

Der dritte Teil der Abflug- bzw. Landephase ist der Flug in freier Atmosphäre, d.h. außerhalb der Wirksamkeit des beschriebenen Bodeneffektes. In diesem Bereich wird die Flugbahn nach Leistungsgesichtspunkten, aber häufig auch mit Rücksicht auf minimale Lärmabstrahlung gewählt.

7.5.1.1 Definition der Geschwindigkeiten

Bei allen Start- und Landevorgängen befindet sich das Flugzeug nahe der unteren Grenze der Flugenveloppe. Mit Rücksicht auf ausreichende Flugsicherheit sind alle für diese Flugphase wichtigen Fluggeschwindigkeiten durch die Luftfahrtbehörde EASA (*European Aviation*

Safety Agency) in den CS (*Certification Specification*) verbindlich festgelegt.

Im Folgenden sind die wichtigsten Größen (Zahlenwerte aus der CS-25, die große Flugzeuge reglementiert, entnommen), soweit sie für die Betrachtungen dieses Abschnittes von Bedeutung sind, zusammengestellt. Da die englischen Bezeichnungen international verbindlich sind, sind diese neben den deutschen Begriffen in Klammern angefügt. Die Geschwindigkeiten sind hier als Calibrated Airspeed definiert.

- *Minimalgeschwindigkeit* V_{min} (*Stall Speed* V_S)

Die *Minimalgeschwindigkeit* oder auch *Strömungsabrissgeschwindigkeit* ist die Geschwindigkeit, bei deren Unterschreitung ein Strömungsabriss vorliegt. Hierbei ist das Lastvielfache $n < 1$. Ein Steuern des Flugzeugs bei einem Strömungsabriss ist nicht mehr möglich.

- *Reference stall speed* V_{SR}

Die *reference stall speed* darf nicht niedriger sein als die Geschwindigkeit, die aus dem maximalen Auftriebsbeiwert resultiert. V_{SR} wird berechnet durch

$$V_{SR} \geq \frac{V_{c_{Amax}}}{\sqrt{n}},$$

wobei $V_{c_{Amax}}$ der Geschwindigkeit bei maximalem Auftriebsbeiwert und n dem Lastvielfachen entspricht. Hierbei ist darauf zu achten, dass $V_{c_{Amax}}$ bei abgesetzten Triebwerk, ungünstigster Schwerpunktlage und angepassten Klappenstellungen sowie Fluggewicht anzugeben ist.

- *Minimale Steuergeschwindigkeit* V_{MC} (*Minimum Control Speed* V_{MC})

Geringste Geschwindigkeit, bei der die Steuerbarkeit des Flugzeugs nach einem plötzlichen Triebwerksausfall wiedererlangt werden und ein gerader Horizontalflug ohne Schieben bei maximal 5 Grad Hängewinkel aufrecht erhalten werden kann. Hierbei dürfen vom Piloten keine außergewöhnlichen fliegerischen Fähigkeiten erwartet werden.

- *Kritische Entscheidungsgeschwindigkeit bei einem Triebwerksausfall* V_1 (*Critical Engine Failure Recognition Speed* V_1)

Geschwindigkeit, bei der bei Ausfall des ungünstigsten Triebwerks während des Rollvorgangs gehandelt werden muss. Bei Überschreiten dieser Geschwindigkeit ist ein Start trotz des ausgefallenen Triebwerks fortzusetzen, andernfalls ist der Start abzubrechen. Manchmal gibt es einen Spielraum zur Festlegung der Geschwindigkeit. Diese Situation ist auf Seite 224 unter dem Begriff der *balanced field lenght* erläutert.

- *Bugradabhebegeschwindigkeit* V_{BA} (*Rotation Speed* V_R)

Niedrigste Rollgeschwindigkeit, bei der das Bugrad abgehoben bzw. eine Drehung um das Hauptfahrwerk eingeleitet werden kann, um ein Abheben des Flugzeugs bei V_A zu

gewährleisten. V_{BA} darf nicht kleiner sein als die Geschwindigkeit V_1 , eine Geschwindigkeit entsprechend $1,05 \cdot V_{MC}$ oder nicht kleiner als eine Geschwindigkeit, die ausreicht, um noch V_2 bei der Hindernishöhe (35 ft) zu erreichen.

- *Abhebegeschwindigkeit V_A (Lift-off-Speed V_{LOF})*
Geschwindigkeit, bei der das Flugzeug erstmals aerodynamisch getragen wird.
- *Start-Steiggeschwindigkeit V_2 (Take-off Climbspeed V_2)*
Geschwindigkeit, die in der Hindernishöhe bei ununterbrochenem Start erreicht wird. Die Geschwindigkeit muss bis zu einer Höhe von 122 m (400 ft) gehalten werden können. Sie muss größer sein als die niedrigsten Geschwindigkeit von:
 - $1,13 \cdot V_{SR}$ für zwei- und dreimotorige Turboprops und Strahlflugzeuge
 - $1,08 \cdot V_{SR}$ für viermotorige Turboprops und Strahlflugzeuge
 - $1,1 \cdot V_{MC}$
 oder im Zusammenhang mit der *Bugradabhebegeschwindigkeit* gebildet werden.
- *Anfluggeschwindigkeit über der Landeschwelle V_{Ref} (Reference Speed for Landing V_{Ref})*
 V_{Ref} darf niemals kleiner als $1,23 \cdot V_{SR0}$ sein, wobei V_{SR0} die *reference stall speed* bei der Landung ist.

In folgenden werden die wichtigsten Zusammenhänge der beschriebenen Bereiche für Abflug und Landung getrennt behandelt.

7.5.2 Abflug

7.5.2.1 Die Abflugphase

Die Abflugphase erstreckt sich vom Stand am Beginn der Startbahn bis zu einem Punkt der Flugbahn, bei dem das Flugzeug eine Höhe von ca. 450 m (1500 ft) über der Startbahn erreicht hat, oder dem Punkt, bei dem das Flugzeug die Reisekonfiguration erreicht hat. Maßgebend ist die größte der beiden Höhen. Die Abflugphase wird in zwei Hauptabschnitte unterteilt:

- I. Die Abflugstrecke, die vom Stillstand bis zum Erreichen der Hindernishöhe von 10,6 m (35 ft) gemäß der CS-25 und 15,2 m (50 ft) gemäß der CS-22, reicht. Sie wird unterteilt in die Rollstrecke und Übergangsflugstrecke.
- II. Den Steigflugpfad, der von der Hindernishöhe bis zu der oben beschriebenen Endhöhe reicht.

Die einzelnen Abschnitte werden meist noch in Segmente unterteilt, die in Bild 7.39 dargestellt sind.

Mit Rücksicht auf geringstmögliche Lärmabstrahlung werden Steigflugpfade gewählt, bei denen die Steigphase über 122 m Höhe hinaus verlängert wird (*continuous climb departure*), um möglichst schnell eine große Flughöhe zu erreichen. In Bild 7.39 ist das durch den gestrichelten Steigflugpfad angedeutet.

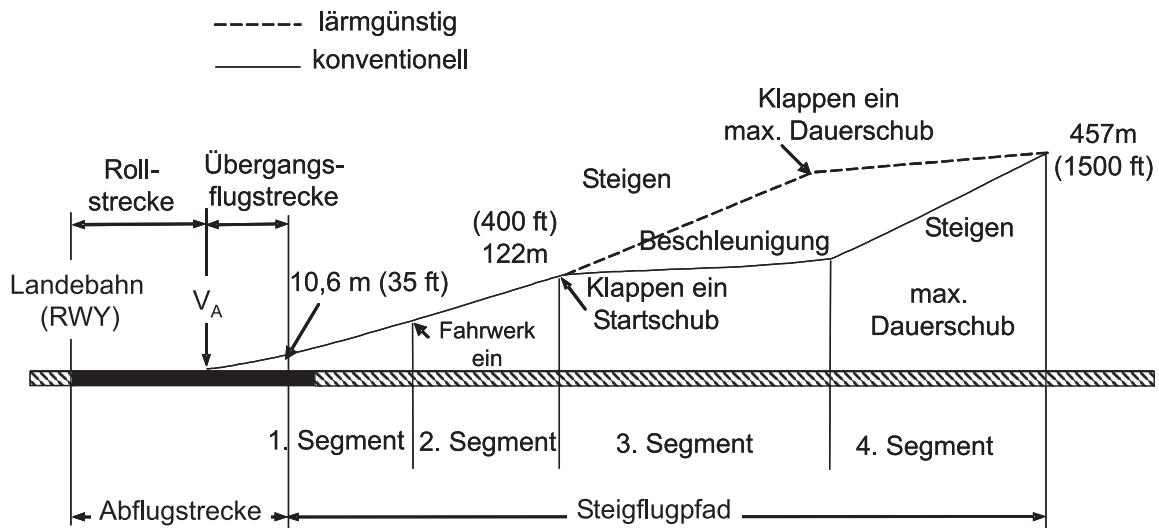


Abbildung 7.39: Abflugprofil

7.5.2.2 Rollvorgang für Bugradflugzeuge (Bugradabheben)

Während Flugzeuge mit Sporn- bzw. Heckrad, welches den Boden berührt, beim Rollen bereits einen Anstellwinkel besitzen, der ohne weiteren Piloteneingriff ein Abheben des Flugzeugs beim Erreichen der erforderlichen Geschwindigkeit V_A erlaubt, rollen Bugradflugzeuge mit sehr kleinen Anstellwinkeln. Um den Anstellwinkel zu erreichen, bei dem der Auftrieb ein Abheben ermöglicht, muss das Flugzeug um das Hauptfahrwerk gedreht werden. Da der Schwerpunkt hier stets vor dem Hauptfahrwerk liegt, ist ein aerodynamisches Moment erforderlich, um im wesentlichen das Gewichtsmoment zumindest ausgleichen und so den Aufrichtvorgang des Flugzeugs einleiten zu können.

Der Bewegungsvorgang des am Boden rollenden Flugzeugs wird durch folgende Gleichungen beschrieben (Bezeichnungen siehe Bild 7.40), bei denen die Kräfte im erdfesten Koordinatensystem und die Momente um den Flugzeugschwerpunkt angesetzt sind.

$$\sum X_g : F - W_R - \mu_R \cdot N_H - \mu_R \cdot N_B - m \cdot \dot{V} = 0 \quad (7.153)$$

$$\sum Z_g : N_B + N_H + A_R - m \cdot g = 0 \quad (7.154)$$

$$\sum M : N_B \cdot (x_B - \mu_R \cdot z_H) - N_H \cdot (x_H + \mu_R \cdot z_H) - F \cdot z_F - A_R \cdot x_A + M_\eta \cdot \Delta\eta = 0 \quad (7.155)$$

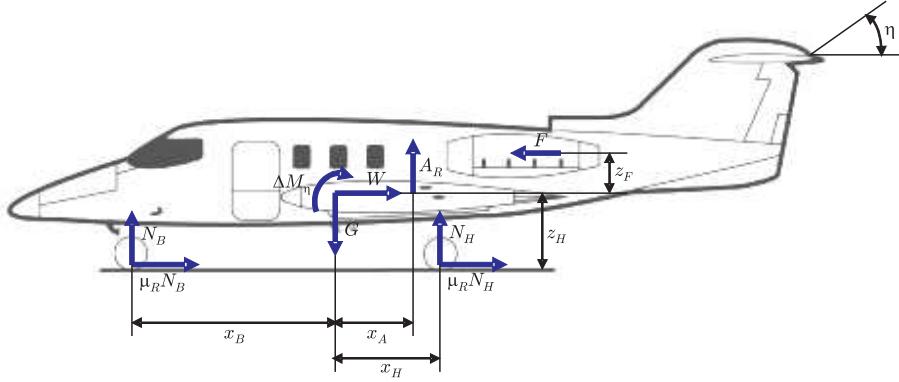


Abbildung 7.40: Kräfte und Momente am Flugzeug

Der Schub F sei für den Abflugvorgang als konstant betrachtet. Im Augenblick des Bugradabhebens bzw. des Einleitens der Drehbewegung um das Hauptfahrwerk muss die Normalkraft am Bugrad $N_B = 0$ sein. Ersetzt man in Gl. 7.155 die Normalkraft am Hauptfahrwerk N_H durch Gewicht $m \cdot g$ und den Auftrieb A_R aus Gl. 7.154, so folgt

$$-(m \cdot g - A_R) \cdot (x_H + \mu_R \cdot z_H) - F \cdot z_F - A_R \cdot x_A + M_\eta \cdot \Delta\eta = 0 \quad (7.156)$$

Ersetzt man die aerodynamischen Kräfte und Momente in bekannter Weise durch die entsprechenden Beiwerte, so erhält man eine Bedingungsgleichung für $V = V_{BA}$:

$$-m \cdot g \cdot (x_H + \mu_R \cdot z_H) - F \cdot z_F = V^2 \cdot \left\{ C_{AR} \cdot S \cdot \frac{\rho}{2} [x_A - (x_H + \mu_R \cdot z_H)] - C_{m_\eta} \cdot \Delta\eta \cdot S \cdot l_\mu \cdot \frac{\rho}{2} \right\} \quad (7.157)$$

aus der, aufgelöst nach V_{BA} , schließlich folgt

$$V_{BA} = \sqrt{\frac{2 m \cdot g}{\rho S} \frac{\frac{x_H}{l_\mu} + \mu_R \cdot \frac{z_H}{l_\mu} + \frac{F}{m \cdot g} \frac{z_F}{l_\mu}}{C_{AR} \cdot \left(\frac{x_H}{l_\mu} + \mu_R \cdot \frac{z_H}{l_\mu} - \frac{x_A}{l_\mu} \right) + C_{m_\eta} \cdot \Delta\eta}} \quad (7.158)$$

Dabei stellt C_{AR} den Auftriebsbeiwert des Flugzeugs beim Rollen am Boden dar. Er ist abhängig vom Anstellwinkel des Flugzeugs im letzten Teil der Rollphase sowie von der beim Start verwendeten Landeklappenstellung und dem voll gezogenen Höhenruder zu ermitteln. Der aerodynamische Widerstand ist ohne Einfluss auf das Moment, wenn man ihn als in Höhe des Schwerpunktes angreifend annimmt. Es ist zweckmäßig, die Bugradabhegeschwindigkeit im Verhältnis zur Minimalgeschwindigkeit V_{min} zu setzen. Nach der Definition in Gl. 7.153 gilt dann mit Gl. 7.158

$$\frac{V_{BA}}{V_{min}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{x_H}{l_\mu} + \mu_R \cdot \frac{z_H}{l_\mu} + \frac{F}{m \cdot g} \frac{z_F}{l_\mu} \right) \cdot C_{Amax}}{C_{AR} \cdot \left(\frac{x_H}{l_\mu} + \mu_R \cdot \frac{z_H}{l_\mu} - \frac{x_A}{l_\mu} \right) + C_{m_\eta} \cdot \Delta\eta}} > 1 \quad (7.159)$$

Bild 7.41 zeigt die Abhängigkeit der bezogenen Bugradabhebegeschwindigkeit nach Gl. 7.159 von der Geometrie der Fahrwerkslage zum Schwerpunkt sowie dem bezogenen Schubmoment. Für dieses Beispiel wurden die folgenden Werte als konstante Größen eingesetzt:

$$C_{m_\eta} \cdot \Delta\eta = 0,25; \quad \frac{x_A}{l_\mu} = 0,1; \quad C_{AR} = 0,25; \quad C_{Amax} = 1,5 \quad (7.160)$$

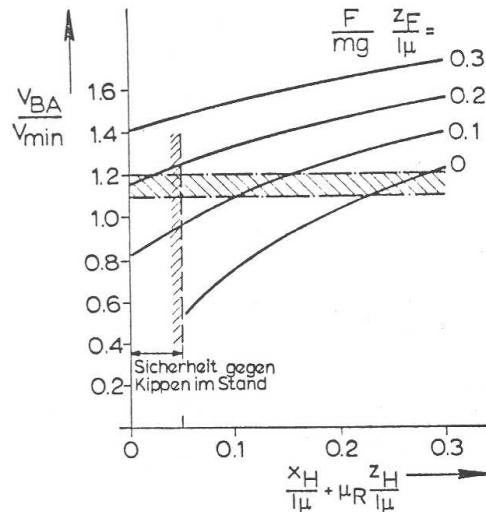


Abbildung 7.41: Kräfte und Momente am Flugzeug

Mit Rücksicht auf die Sicherheit sollte die Bugradabhebegeschwindigkeit innerhalb des schraffierten Bereichs liegen. Bei gegebenem Abflug-Schubmoment ist dann die erforderliche Lage des Hauptfahrwerks zum Schwerpunkt bei vorderster Schwerpunktstufe abzulesen, die im vorliegenden Beispiel z.B. bei $\frac{F}{m \cdot g} \cdot \frac{z_F}{l_\mu} = 0,1$ zwischen $0,1 < \frac{x_H}{l_\mu} + \mu_R \cdot \frac{z_H}{l_\mu} < 0,15$ liegen würde. Auch zu geringe Fahrwerksrücklagen sind mit Rücksicht auf unvermeidbare Schwerpunktswanderungen zu vermeiden, um ein Kippen auf das Flugzeugheck im Stand auszuschließen.

An wichtigsten Vorteilen des Bugfahrwerks gegenüber dem Heckrad sind zu nennen:

- Geringerer aerodynamischer Widerstand beim Rollen,
- der Rollvorgang verläuft stabil (kein Ausbrechen),
- bessere Landeeigenschaften (kein Springen, aber „Schubkarre“),
- bessere Bremsmöglichkeit (kein „Kopfstand“),
- bessere Sicht beim Rollen,
- höherer Passagierkomfort, insbesondere beim Einstiegen.

7.5.2.3 Rollstrecke

Zur Berechnung der Rollstrecke und der Rollzeit geht man von der Gl. 7.153 aus und erhält mit $(N_B + N_H) = m \cdot g - A_R$ aus Gl. 7.154

$$\frac{dx}{dV} = m \cdot \frac{V}{F - W_R - \mu_R(m \cdot g - A_R)} \quad (7.161)$$

$$\frac{dt}{dV} = m \cdot \frac{1}{F - W_R - \mu_R(m \cdot g - A_R)} \quad (7.162)$$

Unter der Annahme, dass während des Rollvorgangs F , μ_R und α unverändert bleiben, lassen sich obige Gleichungen einfach integrieren.

Zuvor werden noch dimensionslose Koordinaten eingeführt. Auch die Geschwindigkeit wird stets auf die Abhebegeschwindigkeit $V_A = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot S \cdot C_A}}$ bezogen.

Dimensionslose Rollstrecke:

$$\xi = \frac{x \cdot g}{V_A^2} \left(\frac{F}{m \cdot g} - \mu_R \right) \quad (7.163)$$

$$\theta = \frac{t \cdot g}{V_A} \left(\frac{F}{m \cdot g} - \mu_R \right) \quad (7.164)$$

Für den Ausdruck $\frac{m \cdot g}{F - W_R - \mu_R(m \cdot g - A_R)}$ kann man nach Einführen der Beiwerte C_{AR} bzw. C_{WR} schreiben

$$\frac{1}{\frac{F}{mg} - \mu_R + \frac{\mu_R \cdot C_{AR} - C_{WR}}{C_A} \left(\frac{V}{V_A} \right)^2} = \frac{1}{\frac{F}{mg} - \mu_R \frac{1}{1+a_1} \left(\frac{V}{V_A} \right)^2} \quad (7.165)$$

mit

$$a_1 = \frac{\mu_R \cdot C_{AR} - C_{WR}}{C_A} \left(\frac{F}{m \cdot g} - \mu_R \right)^{-1} \quad (7.166)$$

Damit schreiben sich die Gl. 7.161 und Gl. 7.162

$$\frac{d\xi}{d \left(\frac{V}{V_A} \right)} = \frac{\frac{V}{V_A}}{1 + a_1 \left(\frac{V}{V_A} \right)^2} \quad (7.167)$$

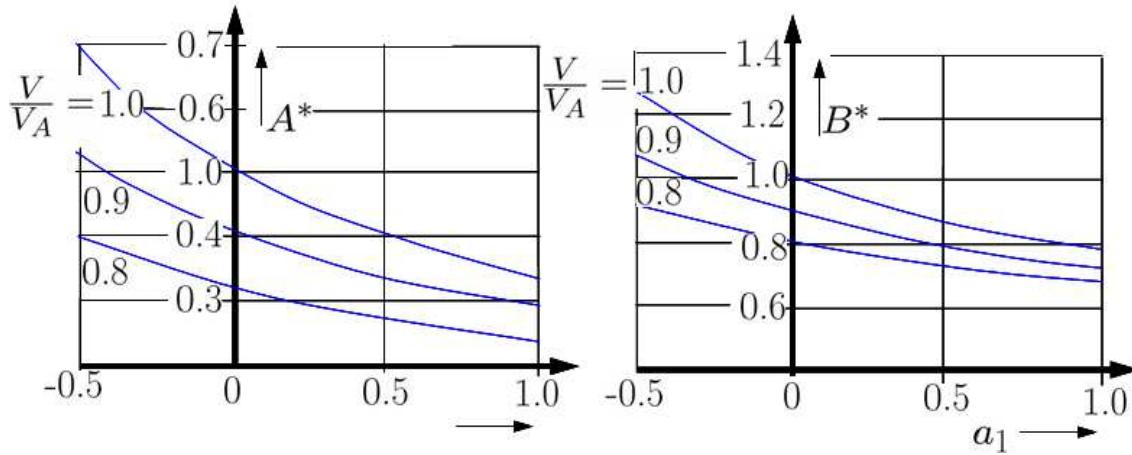
$$\frac{d\theta}{d \left(\frac{V}{V_A} \right)} = \frac{\frac{V}{V_A}}{1 + a_1 \left(\frac{V}{V_A} \right)^2} \quad (7.168)$$

deren Lösung allgemein lautet:

$$\xi = A^*(a_1, \frac{V}{V_A}) + konst \quad (7.169)$$

$$\theta = B^*(a_1, \frac{V}{V_A}) + konst \quad (7.170)$$

	A^*	B^*
$a_1 > 0$	$\frac{1}{2 \cdot a_1} \ln \left[1 + a_1 \cdot \left(\frac{V}{V_A} \right)^2 \right]$	$1 \sqrt{a_1} \cdot \arctan(\sqrt{a_1} \cdot \frac{V}{V_A})$
$a_1 = 0$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{V}{V_A} \right)^2$	$\frac{V}{V_A}$
$a_1 < 0$	$\frac{1}{2 \cdot a_1} \ln [1 + a_1 \cdot \left(\frac{V}{V_A} \right)^2]$	$\frac{1}{2\sqrt{-a_1}} \ln \frac{1 + \sqrt{-a_1} \cdot \frac{V}{V_A}}{1 - \sqrt{-a_1} \cdot \frac{V}{V_A}}$

Tabelle 7.9: Zusammenstellung von A^* und B^* Abbildung 7.42: Einfluss von a_1 und $\frac{V}{V_A}$ auf A^* und B^*

Die Größen A^* bzw. B^* abhängig von a_1 und $\frac{V}{V_A}$ sind in Tabelle 7.9 zusammengestellt. Für die Beispielrechnungen können die Zahlenwerte von A^* und B^* den Diagramm von Bild 7.42 entnommen werden. Überführt man die dimensionslosen Lösungsgleichungen wieder in dimensionsbehaftete Größen, so erhält man für die Rollstrecke bzw. die Rollzeit, d.h. die Strecke bzw. Zeit, die für die Beschleunigung von der Geschwindigkeit V_a auf V_e benötigt wird

$$x = \frac{V_A^2}{g} \frac{1}{\frac{F}{mg} - \mu_R} \left[A^* \left(\frac{V_e}{V_A}, a_1 \right) - A^* \left(\frac{V_a}{V_A}, a_1 \right) \right] \quad (7.171)$$

$$t = \frac{V_A}{g} \frac{1}{\frac{F}{mg} - \mu_R} \left[B^* \left(\frac{V_e}{V_A}, a_1 \right) - B^* \left(\frac{V_a}{V_A}, a_1 \right) \right]. \quad (7.172)$$

Die Größe a_1 entsprechend Gl. 7.166 kann von beträchtlicher Bedeutung für die Flugstrecke und Zeit sein. Es ist deshalb interessant festzustellen, mit welchen Werten für a_1 normalerweise zu rechnen ist.

Für das Beispiel eines typischen Unterschall-Verkehrsflugzeugs wurden die Polarenwerte zur Ermittlung von a_1 eingesetzt. Bild 7.43 stellt die Abhängigkeit der Größe a_1 vom Anstellwinkel beim Rollen, von der Landeklappenstellung sowie vom Roll-Reibungsbeiwert μ_R dar. Diese Darstellung enthält folgende wichtige Ergebnisse

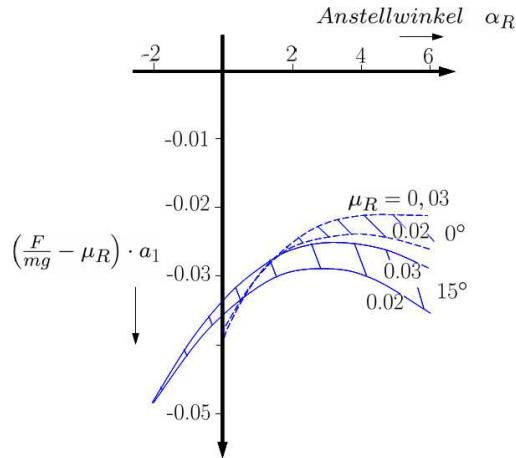


Abbildung 7.43: Einfluss von Anstellwinkel α_R , Landeklappenstellung und Rollreibungsbeiwert auf die Größe a_1

- Der Zahlenwert von a_1 ist außerordentlich klein
- a_1 besitzt einen Maximalwert, der im Bereich relativ kleiner konstruktiv ausführbarer Anstellwinkel liegt, diesem entspricht nach Gl. 7.171 bzw. Bild 7.42 eine kleine Rollstrecke.
- Die Stellung der Landeklappen und auch der Rollreibungsbeiwert haben keinen sehr großen Einfluss auf den Verlauf von a_1 einschließlich seines Maximalwertes.

Betrachtet man die Abhängigkeit von A^* und B^* von a_1 nach Bild 7.42, so erkennt man, dass unter Beachtung der in Bild 7.43 gezeigten Größenordnung von a_1 in erster Näherung $a_1 = 0$ gesetzt werden kann. Die entsprechenden Werte von A^* und B^* sind aus Tabelle 7.9 zu entnehmen. Eine bessere Näherung erhält man, wenn man A^* bzw. B^* um den Punkt $a_1 = 0$ herum entwickelt. Man erhält dann unter Voraussetzung kleiner Werte für a_1 :

$$A^* \cong \frac{1}{2} \left(\frac{V}{V_A} \right)^2 \left[1 - \frac{a_1}{2} \left(\frac{V}{V_A} \right)^2 \right] \quad (7.173)$$

$$B^* \cong \frac{V}{V_A} \left[1 - \frac{a_1}{3} \left(\frac{V}{V_A} \right)^2 \right] \quad (7.174)$$

Den am Beispiel in Bild 7.43 gezeigten Maximalwert von a_1 kann man leicht analytisch darstellen, wenn man in Gl. 7.166 für $C_W = f(C_A)$ einen zweckmäßigen Polarenansatz einführt. Da bei Startpolaren infolge des durch den Landeklappenausschlag stark gewölbten Profils der allgemeine Polarenansatz vorzuziehen ist, gilt mit Gl. 3.22

$$\left(\frac{F}{mg} - \mu_R \right) \cdot a_1 = \frac{1}{C_{AA}} \cdot \left[(\mu_R - k_1) \cdot C_{AR} - C_{WoR} - k \cdot C_{AR}^2 \right] \quad (7.175)$$

Es kann gezeigt werden, dass a_1 einen Maximalwert annimmt für

$$(C_{AR})_{a_{1max}} = \frac{\mu_R - k_1}{2 \cdot k} \quad (7.176)$$

Dieser beträgt

$$\left(\frac{F}{mg} - \mu_R \right)_{a_{1max}} = \frac{C_{WoR}}{C_{AA}} \left[\frac{(\mu_R - k_1)^2}{4 \cdot k \cdot C_{WoR}} - 1 \right] \quad (7.177)$$

Bei Vergleichsrechnungen ist es empfehlenswert, für a_1 den Wert a_{1max} entsprechend Gl. 7.177 zu verwenden und die Rollstrecken nach Gl. 7.171 mit A^* nach Gl. 7.173 zu berechnen.

7.5.2.4 Triebwerksausfall beim Rollen

Fällt bei einem mehrmotorigen Flugzeug während des Beschleunigens am Boden ein Triebwerk aus, so muss der Pilot sich je nach Zeitpunkt dieses Ausfalls entscheiden, entweder den Start mit den restlichen Triebwerken fortzusetzen oder aber die Triebwerke auf Umkehrschub oder Idle einzustellen und das Flugzeug bis zum Stillstand abbremsen. Geschieht dieser Ausfall bei einer Geschwindigkeit V_1 , so benötigt im Fall der letztgenannten Entscheidung der Pilot eine gewisse Zeit, um zu reagieren. Bis die Bremsung wirksam wird, ist das Flugzeug mit den restlichen Triebwerken auf eine Geschwindigkeit V_1' beschleunigt worden.

Die Gleichungen Gl. 7.171 bzw. Gl. 7.172 können zur Berechnung der Rollstrecken bei den verschiedenen, oben beschriebenen Vorgängen sinngemäß angewendet werden:

Fortsetzen des Startvorgangs

Sind von insgesamt vorhandenen k Triebwerken l Triebwerke zugleich ausgefallen, so erhält man für die Rollstrecke x_1 bis zum Erreichen von $V = V_A$

$$x_1^* = \frac{V_A^2}{g} \left[\frac{A^* \left(\frac{V_1}{V_A}, a_1 \right)}{\frac{F}{mg} - \mu_R} + \frac{A^* (1, a_{11}) - A^* \left(\frac{V_1}{V_A}, a_{11} \right)}{\frac{F}{mg} \left(1 - \frac{l}{k} \right) - \mu_R} \right] \quad (7.178)$$

Setzt man näherungsweise $a_1 = a_{11} = 0$, so beträgt die gesamte Rollstrecke entsprechend Tabelle 7.9:

$$x_1^* = \frac{V_A^2}{2g} \left[\frac{\frac{F}{mg} - \mu_R - \left(\frac{V_1}{V_A} \right)^2 \cdot \frac{F}{mg} \frac{l}{k}}{\left(\frac{F}{mg} - \mu_R \right) \left[\frac{F}{mg} \left(1 - \frac{l}{k} \right) - \mu_R \right]} \right] \quad (7.179)$$

Der Vergrößerungsfaktor für die Rollstrecke mit dem Ausfall von l Triebwerken erhält man, wenn man x_1^* nach Gl. 7.179 auf den entsprechenden Wert für $l = 0$ bezieht:

$$\frac{x_1^*}{x_1} = \frac{\frac{F}{mg} - \mu_R - \left(\frac{V_1}{V_A} \right)^2 \cdot \frac{F}{mg} \frac{l}{k}}{\frac{F}{mg} \left(1 - \frac{l}{k} \right) - \mu_R} \quad (7.180)$$

Abbremsen des Rollvorgangs

Entsprechend der obigen Beschreibung dieses Vorganges setzt sich diese Rollstrecke x_1^{**} aus drei Anteilen zusammen:

1. Beschleunigung von $V_0 = 0$ bis V_1 (a_1)
2. Weiterbeschleunigung mit verringertem Schub von V_1 bis V_1' ($a_1 = a_{11}$)
3. Abbremsen von V_1 auf $V_c = 0$ ($a_1 = a_{12}$)

$$x_1^{**} = \frac{V_A^2}{g} \left[\frac{A^*\left(\frac{V_1}{V_A}, a_1\right)}{\frac{F}{mg} - \mu_R} + \frac{A^*\left(\frac{V_1'}{V_A}, a_{11}\right) - A^*\left(\frac{V_1}{V_A}, a_{11}\right)}{\frac{F}{mg} \left(1 - \frac{l}{k}\right) - \mu_R} + \frac{A^*\left(\frac{V_1'}{V_A}, a_{12}\right)}{\mu_B} \right] \quad (7.181)$$

Hierbei bedeutet die Abkürzung

$$a_{12} = \frac{C_{WR} - \mu_B \cdot C_{AR}}{C_{AA} \left(\mu_B - \frac{F}{mg} \right)} \quad (7.182)$$

In Bild 7.44 ist a_{12} abhängig vom Anstellwinkel beim Rollen α_R für verschiedene Werte des Reibungsbeiwertes beim Bremsen mit und ohne Verwendung einer Schubumkehrseinrichtung für ein modernes Verkehrsflugzeug dargestellt. Man erkennt, dass a_{12} für größere Anstellwin-

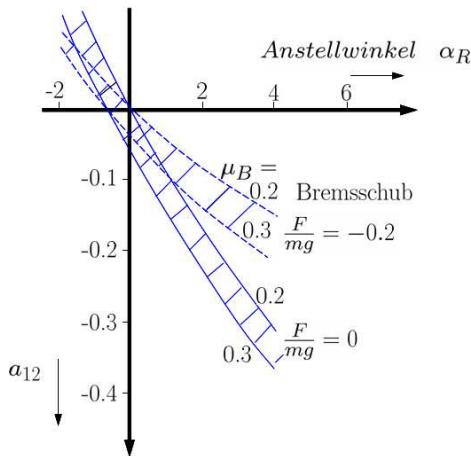


Abbildung 7.44: Einfluss vom Bremsschub und Reibungsbeiwert auf die Größe a_{12}

kel beim Rollen relativ große negative Werte annimmt, insbesondere wenn nur die Radbremsen verwendet werden. Wegen der daraus resultierenden großen Bremswege sind kleine Anstellwinkel beim Rollen anzustreben. Diese werden sich beim Bremsen durch die Einfederung des Bugrades noch verkleinern.

Nimmt man wiederum näherungsweise an $a_1 = a_{11} = a_{12} = 0$, was für a_{12} nach Bild 7.44 nur für sehr kleine Anstellwinkel beim Rollen zulässig ist, und vernachlässigt auch noch die Phase 2, d. h. $V_1 = V_1'$ so folgt für die Rollstrecke mit Abbremsen bei V_1

$$x_1^{**} = \frac{V_A^2}{2g} \left[\left(\frac{V_1}{V_A} \right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{F}{mg} - \mu_R} + \left(\frac{V_1}{V_A} \right)^2 \cdot \frac{1}{\mu_B} \right] - \frac{V_1^2}{2g\mu_B} \left[1 + \frac{\mu_B}{\frac{F}{mg} - \mu_R} \right] \quad (7.183)$$

Bezogen auf die Rollstrecke x_1 beim normalen Abflugvorgang bis zum Erreichen von V_A erhält man

$$\frac{x_1^{**}}{x_1} = \left(\frac{V_1}{V_A} \right)^2 \left[1 + \frac{\frac{F}{mg} - \mu_R}{\mu_B} \right]. \quad (7.184)$$

Die Gl. 7.180 und Gl. 7.184 sind für ein Beispielflugzeug in Bild 7.45 ausgewertet. Die

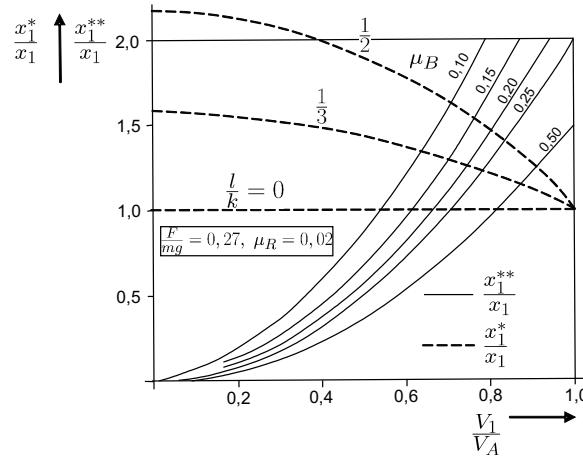


Abbildung 7.45: Einfluss vom Bremsschub und Reibungsbeiwert auf die Größe a_{12}

Schnittpunkte der Kurven

$$\frac{x_1^*}{x_1}(V_1, \frac{l}{k}) \quad \text{und} \quad \frac{x_1^{**}}{x_1}(V_1, \mu_B) \quad (7.185)$$

kennzeichnen die bereits in Unterabschnitt 7.5.1 definierte kritische Entscheidungsgeschwindigkeit V_1 . Fällt ein Triebwerk unterhalb V_1 aus, ist in jedem Fall der Abflugvorgang zu unterbrechen. Dagegen muss der Abflug durchgeführt werden, wenn der Ausfall bei $V > V_1$ auftreten sollte. Es ist einleuchtend, dass die Entscheidungsgeschwindigkeit um so niedriger liegt, je geringer der Brems-Reibungskoeffizient ist, d. h. V_1 hängt stark von der Beschaffenheit der Rollbahn (Nässe, Schnee, Eis, etc.) ab. Die hierbei auftretenden Probleme werden im Abschnitt Lande-Rollstrecke ausführlich behandelt.

7.5.2.5 Übergang in den Steigflug bis zur Hindernishöhe

Wenn ein Flugzeug die vorgeschriebene Bugrad-Abhebegeschwindigkeit V_{BA} erreicht hat, wird der Pilot es bei weiterer Beschleunigung langsam durch Betätigen der Höhensteuerung auf den Lagewinkel des Abhebens bringen und bei der Geschwindigkeit $V = V_A$ abheben. Danach wird eine im allgemeinen beschleunigte gekrümmte Flugbahn folgen, an die sich ein gradliniger Steigflug anschließt. Die Übergangsflugstrecke stellt die horizontale Entfernung dar, die vom Abhebepunkt bis zum Erreichen einer *Hindernishöhe*, die je nach EASA CS festgelegt ist, zurückgelegt wird. In dieser Höhe sollte das Flugzeug die *Startsteiggeschwindigkeit* V_2 erreicht haben. Zugleich wird gefordert, dass bei einem Triebwerksausfall bei V_2

der Schubüberschuss in der Hindernishöhe ausreicht, den Flug mindestens unverzögert fortzusetzen, bis das Fahrwerk eingefahren ist. Für die Übergangsflugstrecke entsprechend Bild 7.46 gilt

$$x_{\ddot{u}} = x_0 + \frac{H - H_0}{\tan \gamma_0} \quad (7.186)$$

Unter der Annahme eines unbeschleunigt geflogenen Übergangsbogens mit dem Bahnradius

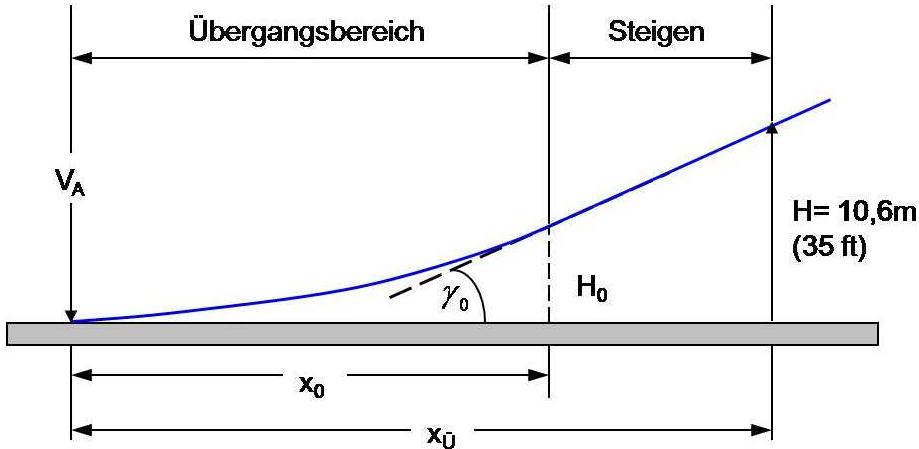


Abbildung 7.46: Übergangsbogen

aus $r_z = \frac{V_A^2}{g \cdot (n_z - 1)}$ und einem Steigungswinkel der Bahn γ_0 erhält man unter Voraussetzung kleiner Bahnneigungen γ_0 aus Gl. 7.186 wegen $H_0 = r_z \cdot (1 - \cos \gamma_0) \cong r_z \cdot \frac{\gamma_0}{2}$

$$x_{\ddot{u}} = r_z \cdot \gamma_0 + \frac{H}{\gamma_0} - \frac{r_z \cdot \gamma_0}{2} = \frac{H}{\gamma_0} + \frac{r_z \cdot \gamma_0}{2}. \quad (7.187)$$

Die Bedingung für eine kleinste Übergangsflugstrecke lautet

$$\gamma_0|_{x_{min}} = \sqrt{\frac{2H}{r_z}}. \quad (7.188)$$

Durch Einsetzen in Gl. 7.187 folgt

$$x = \sqrt{2Hr_z} = x_0 \quad \text{bzw.} \quad (7.189)$$

$$H = \frac{x_0}{2 \cdot r_z} = \frac{(n_z - 1) \cdot g}{V_A^2} \cdot \frac{x_0^2}{2}. \quad (7.190)$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass die Übergangsflugstrecke am kürzesten wird, wenn die Bahn mit konstantem Radius bis zum Erreichen der Hindernishöhe geflogen wird.

Die wegen ihrer Einfachheit häufig für erste Abschätzungen verwendete Beziehungen können nur eine grobe Näherung der wirklichen Übergangsflugbahn vorstellen, da sie die Beschleunigung in der Übergangsphase vernachlässigen und einen konstanten Bahnradius voraussetzen.

Eine genauere Betrachtung des Übergangsbereichs setzt eine Lösung der die Bahn beschreibenden Differentialgleichungen voraus. Diese sind in Abschnitt 3.3 unter Gl. 3.84 (vgl. auch Bild 3.31) abgeleitet und sollen im folgenden verwendet werden.

Dividiert man Gl. 3.84 durch das Fluggewicht und führt die Flugstrecke als unabhängige Variable ein mit

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{dV}{dx_a} \cdot \frac{dx_a}{dt} = V' \cdot V \\ \dot{\gamma} &= \frac{d\gamma}{dx_a} \cdot \frac{dx_a}{dt} = \gamma' \cdot V\end{aligned}\quad (7.191)$$

so schreiben sich die Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Abkürzung

$$\gamma_a = \gamma \quad \bar{w} = \frac{C_{WA} \cdot S \cdot \rho}{2 \cdot m \cdot g} \quad \bar{a} = \frac{C_{AA} \cdot S \cdot \rho}{2 \cdot m \cdot g} \quad (7.192)$$

$$\frac{VV'}{g} = \frac{F}{mg} \cdot \cos(\alpha + \sigma) - \bar{w}V^2 - \sin \gamma \quad (7.193)$$

$$\frac{V^2}{g} \cdot \gamma' = \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma) + \bar{a}V^2 - \cos \gamma \quad (7.194)$$

Auftriebs- und Widerstandsbeiwert beim Abheben und Durchfliegen des Übergangsflugwegs werden in guter Übereinstimmung mit der Flugpraxis als konstant angenommen. Da sich während der kurzen Dauer des Übergangsfluges die Geschwindigkeit nur geringfügig ändert, kann man setzen

$$V \cong V_A \left(1 + \frac{\Delta V}{V_A} \right) \text{ bzw. } V^2 \cong V_A^2 \left(1 + \frac{2\Delta V}{V_A} \right) \quad (7.195)$$

Ferner nimmt der Bahnwinkel, der zu Beginn des Übergangsfluges $\gamma = 0^\circ$ beträgt, stets sehr kleine Werte an. Damit gilt

$$\sin \gamma \cong \gamma = \Delta \gamma \quad (7.196)$$

$$\cos \gamma \cong 1 \quad (7.197)$$

Für die Ableitungen kann man entsprechend schreiben

$$V' = \Delta V' \text{ bzw. } \gamma' = \Delta \gamma' \quad (7.198)$$

Damit wird die Gl. 7.193 in folgende linearisierte Form überführt

$$\frac{V_A^2}{g} \cdot \frac{\Delta V'}{V_A} + \left(\frac{F}{mg} \cdot \cos(\alpha + \sigma) + \bar{w}V_A^2 \right) \cdot \frac{\Delta V}{V_A} + \Delta \gamma = \gamma_A \quad (7.199)$$

$$\frac{V_A^2}{g} \cdot \Delta \gamma' - 2 \cdot \left[1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma) \right] \cdot \frac{\Delta V}{V_A} = n_{zA} - 1 \quad (7.200)$$

Für die rechten Seiten der Gl. 7.193 sind als Abkürzungen eingeführt worden

$$\frac{F \cos(\alpha + \sigma) - W}{mg} = \frac{F}{mg} \cdot \cos(\alpha + \sigma) - \bar{w} V_A^2 = \gamma_A \quad (7.201)$$

$$\frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma) + \bar{a} V_A^2 - 1 = n_{zA} - 1 \quad (7.202)$$

Ermittelt man aus der Gl. 7.199 $\Delta\gamma'$ durch Ableitung nach x_a und führt diese Größe in die untere Gleichung ein, so erhält man eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten in $\frac{\Delta V}{V_A}$, die die Bahngleichung darstellt:

$$\frac{\Delta V''}{V_A} + a \cdot \frac{\Delta V'}{V_A} + b \cdot \frac{\Delta V}{V_A} = c = - \left(\frac{g}{V_A^2} \right)^2 \cdot (n_{zA} - 1) \quad (7.203)$$

mit den Koeffizienten

$$a = \frac{g}{V_A^2} \cdot \left(\frac{F}{mg} \cdot \cos(\alpha + \sigma) + \bar{w} V_A^2 \right); \quad b = \left(\frac{g}{V_A^2} \right)^2 \cdot 2 \cdot [1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma)] \quad (7.204)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\frac{\Delta V_A}{V_A} = 0; \quad \frac{\Delta V_A'}{V_A} = \frac{g}{V_A^2} \cdot \gamma_A \quad (7.205)$$

Unter der Voraussetzung, dass die für eine Periode zurückgelegte Strecke

$$x_{2\pi} \cong \frac{2\pi}{\sqrt{b}} \cong \frac{\sqrt{2}\pi}{g} \cdot V_A^2 \quad (7.206)$$

im allgemeinen sehr groß gegenüber der im Übergangsbereich zurückgelegten Strecke ist ($x \leq 0, 2x_{2\pi}$), kann man die Lösung der Gl. 7.203 in eine Reihe entwickeln. Hierbei werden die Glieder bis zur 3. Potenz berücksichtigt. Man erhält nach einiger Zwischenrechnung

$$\frac{\Delta V}{V_A} = \frac{\Delta V_A'}{V_A} \cdot x_a + \left(c - a \cdot \frac{\Delta V_A'}{V_A} \right) \cdot \frac{x_a^2}{2} + [(a^2 - b) \cdot \frac{\Delta V_A'}{V_A} - ac] \cdot \frac{x_a^3}{6} + \dots \quad (7.207)$$

Damit ist man in die Lage versetzt, auch den Verlauf des Bahnneigungswinkels $\Delta\gamma$ aus Gl. 7.199 zu ermitteln:

$$\Delta\gamma = - \frac{V_A^2}{g} \cdot \frac{\Delta V'}{V_A} - \left(\frac{F}{mg} \cdot \cos(\alpha + \sigma) + \bar{w} V_A^2 \right) \cdot \frac{\Delta V}{V_A} + \gamma_A$$

Hieraus folgt durch Einsetzen von $\frac{\Delta V}{V_A}$ bzw. $\frac{\Delta V'}{V_A}$ aus Gl. 7.207 bzw. deren Ableitung

$$\begin{aligned} \Delta\gamma = & (n_{zA} - 1) \cdot \frac{x_a g}{V_A^2} + [1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma)] \cdot \\ & \left\{ \gamma_A \cdot \left(\frac{x_a g}{V_A^2} \right)^2 + [n_{zA} - 1 + \gamma_A \cdot (\gamma_A + 2\bar{w} V_A^2)] \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x_a g}{V_A^2} \right)^3 \right\} \end{aligned} \quad (7.208)$$

Die Übergangsbahn $H(x)$ erhält man unter der stets erfüllten Bedingung sehr kleiner Bahnwinkel und mit $x_a = x$:

$$H(x) = \int^{x_{\text{ü}}} \Delta\gamma \, dx$$

Beschränkt man sich auf die beiden ersten Glieder der Gl. 7.208 und führt die Integration aus, so wird

$$H = \frac{(n_{zA} - 1)g}{V_A^2} \cdot \frac{x^2}{2} + [1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma)] \cdot \gamma_A \cdot \left(\frac{g}{V_A^2} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3}. \quad (7.209)$$

Man erkennt, dass im Fall einer unbeschleunigten Übergangsbahn, gekennzeichnet durch $\gamma_A = 0$, Gl. 7.209 eine Bahn mit konstantem Krümmungsradius darstellt und mit der Beziehung Gl. 7.189 übereinstimmt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Übergangsbogen im Abhebepunkt mit $n_z = n_{zA} = 1$ zu beginnen. Die Bahnkrümmung nimmt dann kontinuierlich infolge der Auftriebssteigerung durch die Bahnbeschleunigung zu. Diese Bahn wird durch das zweite Glied der Gl. 7.209 beschrieben. In Bild 7.47 sind die Übergangsflugstrecken nach den beiden oben beschriebenen Verfahren, bei denen jeweils $C_A = \text{konst.}$ gesetzt wurde, verglichen. Während für den unbeschleunigten Flug ($\gamma_A = 0$) das Lastvielfache für die gesamte Übergangsbahn konstant ist, nimmt beim beschleunigten Flug das Lastvielfache von n_{zA} am Abhebepunkt bis $n_z > 1$ beim Erreichen der Steigbahn zu. In Bild 7.47 ist im letzten Fall als Ordinate das beschriebene Lastvielfache n_z beim Erreichen der Steigbahn, bei $H = 10,6 \text{ m}$,

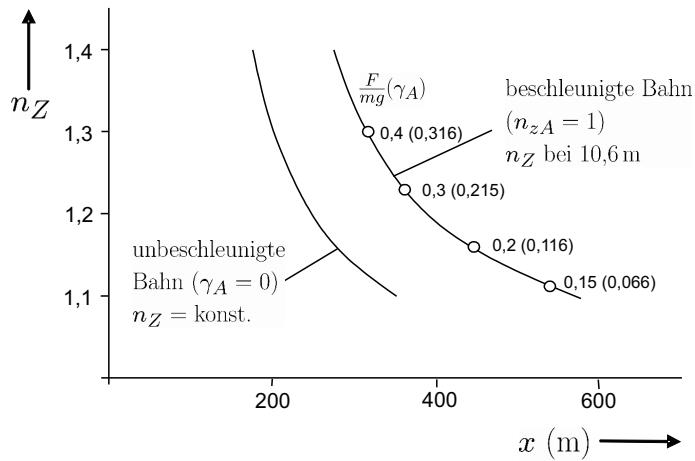


Abbildung 7.47: Übergangsbahnen für ein Verkehrsflugzeug

gewählt worden. Es ist einleuchtend, dass sich hierbei beträchtlich größere Übergangsflugstrecken ergeben. Flug- und Simulationsuntersuchungen zeigen, dass die Annahme eines konstanten Auftriebsbeiwertes für den größten Teil der Übergangsbahn durchaus berechtigt ist. Allerdings besteht eine Tendenz, dass die Piloten im letzten Teil der Bahn das Höhenruder in kopflastiger Richtung bewegen (*nachdrücken*) und so über den Anstellwinkel auch den Auftriebsbeiwert verringern. Erflogene Übergangsflugstrecken, die abhängig von den Steuerbetätigungen durch den Piloten und den Umgebungsbedingungen stets größere Streuungen aufweisen, liegen im allgemeinen zwischen den in Bild 7.47 dargestellten Grenzfällen $\gamma_A = 0$ und $n_{zA} = 1$.

Für einen Übergangsflug mit $n_{zA} = 1$ folgt aus der Bedingung eines tangentialen Anschlusses an die Steigbahn mit $\gamma = \gamma_0$ nach Gl. 7.208 für die Strecke, nach der dieser Anschluss erfolgen soll:

$$x_0 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_A}} \cdot \frac{\frac{V_A^2}{g}}{\sqrt{1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma)}} \quad (7.210)$$

Die Übergangsflugstrecke entsprechend Gl. 7.186 beträgt damit unter Verwendung von Gl. 7.209:

$$x_{\ddot{u}} = \frac{H}{\gamma_0} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_A}} \cdot \frac{\frac{V_A^2}{g}}{\sqrt{1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma)}} \quad (7.211)$$

Diese Strecke wird ein Minimum für

$$\gamma_0|_{x_{\ddot{u},min}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3Hg}{V_A^2}\right)^2 \cdot \gamma_A \cdot \left(1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma)\right)} \quad (7.212)$$

Durch Einsetzen in Gl. 7.211 erhält man

$$x_{\ddot{u},min} = \sqrt[3]{\frac{3H}{\gamma_A} \cdot \left(\frac{V_A^2}{g}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma)}} \quad (7.213)$$

Durch Vergleich mit Gl. 7.209 (mit $n_{zA} = 1$) erkennt man, dass die Minimalbedingung erfüllt ist, wenn der Übergangsbogen erst beim Erreichen der Hindernishöhe H in den Steigflug übergeht, analog zu dem Ergebnis eines Übergangsbogens mit konstantem Radius ($n_z = \text{konst}$).

Eine wichtige Forderung beim Abflug besteht darin, dass beim Erreichen der Hindernishöhe ausreichendes Steigvermögen vorhanden sein muss, um auch für den Fall eines ausgefallenen Triebwerks beim Überfliegen der Hindernishöhe (1. Segment entsprechend Bild 7.39) einen positiven Steiggradienten zu erzielen. Man kann zeigen, dass im Gültigkeitsbereich der obigen Näherungen (etwa $\gamma_A > 0,075$) bei der Bahnneigung γ_0 in der Hindernishöhe H entsprechend Gl. 7.212 stets eine ausreichende Schubreserve zur Erfüllung der oben beschriebenen Bedingung vorhanden ist.

7.5.2.6 Abflugstrecke

Die Abflugstrecke setzt sich zusammen aus der oben behandelten Rollstrecke und der Übergangsstrecke und beträgt bei Vernachlässigung der Beschleunigung im Übergangsflug

$$x_{\text{Abfl.}} = \frac{V_A^2}{2g \left(\frac{F}{mg} - \mu_R\right)} + \sqrt{\frac{2V_A^2 H}{g \cdot \left[\frac{F}{mg} \cdot \sin(\alpha + \sigma) + \bar{a}V_A^2 - 1\right]}} \quad (7.214)$$

Man erkennt, dass die Übergangsflugstrecke bei der hier gemachten Annahme $V = \text{konst} = V_A$ gegen unendlich strebt, wenn der Nenner Null wird, d. h. wenn kein Auftriebsüberschuss zum

Einleiten einer gekrümmten Übergangsbahn vorhanden ist. Dagegen wächst die Rollstrecke stetig mit V_A^2 an. Damit erhält man bei einer bestimmten Abhebegeschwindigkeit $V_{A,x_{min}}$ die kleinste Abflugstrecke (siehe gestrichelte Kurve in Bild 7.48).

Berücksichtigt man jedoch die Beschleunigung in der Übergangsbahn, so erhält man kleinere Übergangsstrecken bei Geschwindigkeiten, die geringfügig über der Gleichgewichtsgeschwindigkeit liegen. Die minimale Startstrecke verschiebt sich dann in die Nähe der Gleichgewichtsgeschwindigkeit. In Bild 7.48 sind die Roll- und Übergangsflugstrecke für ein Strahlverkehrsflugzeug abhängig von der Abhebegeschwindigkeit V_A dargestellt.

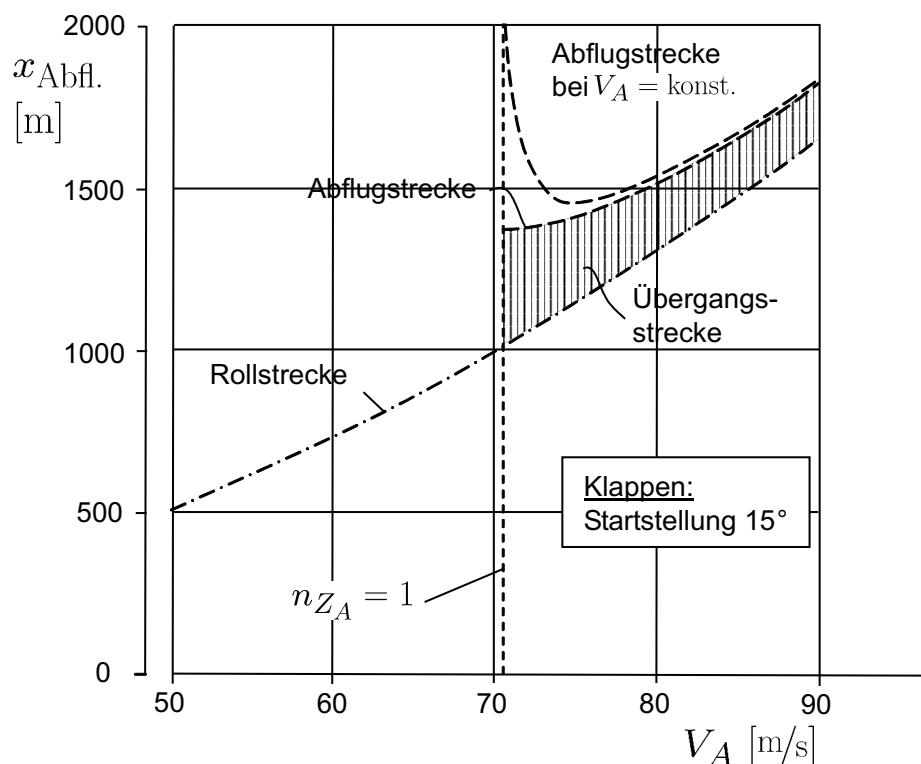


Abbildung 7.48: Abflug- und Rollstrecke bei verschiedenen Abfluggeschwindigkeiten

7.5.2.7 Erforderlichen Abflugbahnlängen nach EASA CS

Nach den Zulassungsvorschriften (EASA CS) sind bestimmte Regeln für die Definition der *erforderlichen Abflugbahnlänge* zu beachten. Hier werden die Daten für ein Verkehrsflugzeug nach CS-25 aufgelistet:

- Die *CS Abflugbahnlänge* (Takeoff Distance, T. O. D.)

Als T. O. D. bezeichnet man die größere folgender Strecken bei trockenem Untergrund:

1. die Abflugbahnlänge bis zur Hindernishöhe unter der Annahme, dass ein Triebwerk bei V_1 ausgefallen ist.

2. 115 % der Abflugbahnlänge bis zur Hindernishöhe bei normal arbeitenden Triebwerken.

Die so definierte Strecke darf nicht größer sein als Abflugbahnlänge einschließlich der Bremsbahn und der freien Startbahn, falls solche vorhanden sind.

- Die *Beschleunigungs-Brems-Strecke* (Accelerate-Stop-Distance, A. S. D.)

Die A. S. D. ist definiert als die Summe folgender Strecken auf trockenem Untergrund:

1. Die Strecke, die zum Beschleunigen des Flugzeuges bis zu einer Geschwindigkeit benötigt wird, bei der ein plötzlicher Ausfall des kritischen Triebwerks angenommen wird.
2. Die Strecke, die durchlaufen wird vom Punkt des angenommenen Triebwerksausfalls bis zum Punkt, an dem der Pilot den Ausfall bemerkt und Gegenmaßnahmen vorbereitet hat.
3. Die Strecke, die benötigt wird, um das Flugzeug aus der Geschwindigkeit, die im vorigen Punkt beschrieben ist, zum völligen Stillstand zu bringen. Zuzüglich der Strecke, die innerhalb von 2 Sekunden vom Flugzeug mit V_1 zurückgelegt wird (Abbildung der Reaktionszeit des Piloten).

Diese Strecke darf nicht größer sein als die Abflugbahnlänge zuzüglich der Bremsbahn (falls vorhanden).

- Die *Abflug-Rollstrecke* (Takeoff-Run, T. O. R.)

Als T. O. R. bezeichnet man die größere folgender Strecken auf trockenem Untergrund:

1. Horizontale Abstand vom Punkt der Bremsfreigabe bis zu einem Punkt in der Mitte zwischen der Position, an der die Abhebegeschwindigkeit und dem Punkt, an dem die Höhe von 10,6 m über der Startbahn erreicht ist, unter der Annahme, dass ein Triebwerk ausgefallen ist; oder
2. 115 % des in gleicher Weise definierten Abstandes bei normal arbeitenden Triebwerken.

Die Abflug-Rollstrecke darf nicht die Abflugbahnlänge überschreiten. Er wurde eingeführt, um Beschleunigungen auf den Bremsweg zu vermeiden und wird ermittelt und angewendet, wenn ein Bremsweg und/oder freie Reservebahn (clearway) benutzt werden.

Die T. O. D., A. S. D. und die T. O. R. sind Längen, die vom Flugzeugtyp abhängen. Betrachtet man den Flugplatz in Kombination mit den zuvor aufgelisteten Längen lässt sich noch

die *ausgewogene Flugfeldlänge* (Balanced Field Length) definieren.

Wenn die oben beschriebene Abflugbahnlänge (T. O. D.) und die Beschleunigungs-bremsstrecke stark voneinander abweichen, kann man durch andere Festlegung der Geschwindigkeit V_1 erreichen, dass sich beide Strecken einander nähern. Das Ergebnis ist

dann die ausgewogene Abfluglänge. Zur Ermittlung dieser Strecke kann die Darstellung in Bild 7.45 verwendet werden, wenn zu der dort dargestellten Rollstrecke x_1^* noch die Übergangsflugstrecke hinzugefügt wird.

In Bild 7.49 sind die Abflugrollstrecken mit und ohne Triebwerksausfall sowie die Rollstrecke bei abgebrochenem Start schematisch dargestellt.

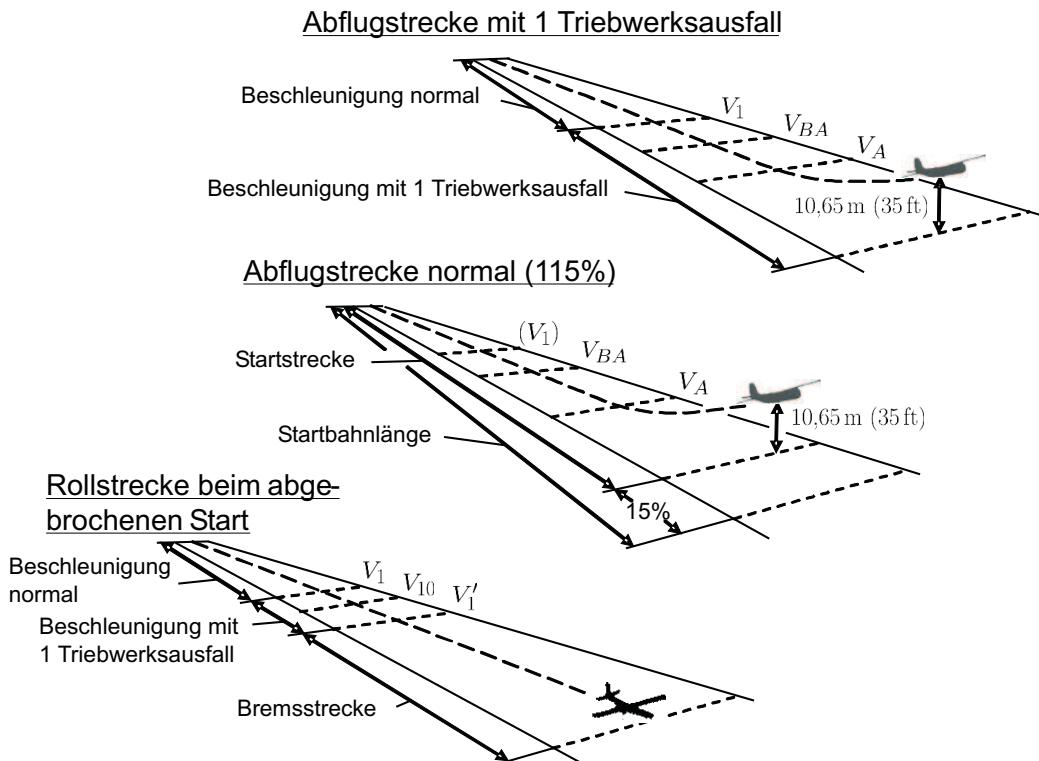


Abbildung 7.49: Definition der Abflugstrecke bzw. Rollstrecke bei abgebrochenem Start

7.5.3 Landung

Die Landephase eines Flugzeuges lässt sich in drei Abschnitte unterteilen, die als *Anflug*, *Endanflug* und *Aufsetzen* bezeichnet werden.

7.5.3.1 Anflug

Mit dem Anflug wird der Landevorgang eingeleitet. Er wird im allgemeinen mit einem konstanten Bahnwinkel γ erfolgen. Aber auch Anflüge im Gegenkurs zur Aufsetzrichtung mit einem seitlichen Abstand werden ausgeführt. Dabei spricht man von einem kurzen, normalen oder langen Anflug, je nach Abstand des Anflugbogens vom Aufsetzpunkt. Der Anflug erfolgt standardmäßig mit ausgefahrenem Fahrwerk. Zur Lärmreduzierung gibt es aber auch Verfahren, bei denen das Fahrwerk relativ spät im Anflug ausgefahren wird.

Die Anfluggeschwindigkeit hängt von der Klappenstellung ab und wird so gewählt, dass die notwendige Manövrierbarkeit ohne Einschränkung der Sicherheit garantiert werden kann.

Bei den gradlinigen Anflügen treten wegen des kleineren Gleitwinkels und dem daraus resultierendem relativ kleinen Bodenabstandes bereits in großen Abständen vor dem Aufsetzen Lärmbelästigungen auf, die mit der Zunahme des Luftverkehrs immer häufiger zu Beschwerden der Anwohner führten. Fühlbare Abhilfe für diese Belästigung brachte neben der Inbetriebnahme neuer Flugzeugmuster und leiseren Triebwerken die Einführung lärmgünstiger Anflugverfahren.

Normalerweise wird der Anflug grundsätzlich mit ausfahrenem Fahrwerk geflogen und auch die Landeklappen werden bereits sehr früh auf die maximale Landestellung gebracht. Dieses Verfahren ergibt kleinstmögliche Anfluggeschwindigkeiten und damit längere Anflugzeiten, die vom Piloten für die Vorbereitung der Landung erwünscht sind. In dieser Landekonfiguration ist der Luftwiderstand des Flugzeuges sehr groß und erfordert zur Einhaltung der Bahn einen relativ hohen Triebwerksschub, der zusammen mit dem durch Turbulenz entstehenden Lärm von Klappen und Fahrwerk für die beschriebene Lärmbelästigung verantwortlich ist.

Bei lärmünstigem Anfliegen wird der Landeanflug früher und damit in größeren Höhen begonnen und solange wie möglich mit kleiner Klappenstellung und eingefahrenem Fahrwerk angeflogen und die dadurch unvermeidbare Vergrößerung der Anfluggeschwindigkeit bzw. Verringerung der Anflugzeit in Kauf genommen. Erst in etwa 300 - 400 m Höhe bzw. 6 - 7 km Abstand von der Landebahnschwelle erfolgt das Ausfahren des Fahrwerks und das Verstellen der Klappen auf Landestellung. Die hierdurch erreichte Lärmreduzierung in den Anflugschneisen kann die Größenordnung von 10 - 15 dB erreichen und hat zur Anwendung dieses oder ähnlicher Anflugverfahren bei vielen Flughäfen geführt.

In Bild 7.50 sind die beiden Verfahren schematisch dargestellt und verglichen.

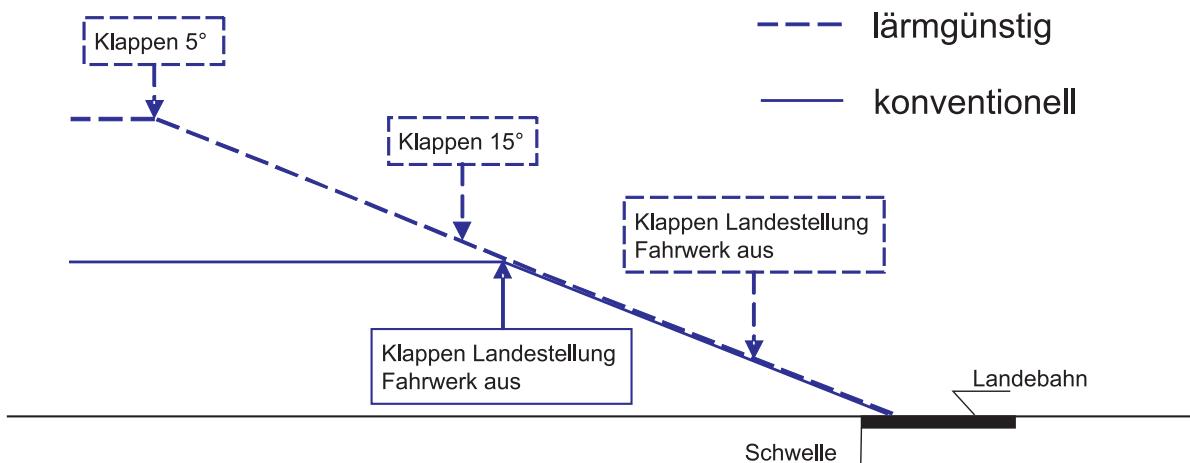


Abbildung 7.50: Anflugprofile

7.5.3.2 Endanflug

Der *Endanflug* stellt den letzten Teil des Anfluges dar und findet unabhängig von dem gewählten, oben beschriebenen Anflugverhalten auf dem Gleitpfad statt. Es wird vorerst noch unter Sichtbedingungen vom Piloten meist unter Aufschaltung des Instrumentenlandesystems durchgeführt. Auf dem Leitstrahl wird das Flugzeug unter einem Bahnwinkel von 2,5 bis 3 Grad bis dicht an den Boden herangeführt.

Zur Normierung der Anforderungen an die Sichtbedingungen während des Endanfluges wurden von der internationalen Luftfahrtbehörde, der ICAO, verschiedene Betriebsstufen für Allwetterflugbetrieb eingeführt, die aus Tabelle 7.10 zu entnehmen sind. Hierbei ist die Wahl der Kategorie abhängig von der vorliegenden Ausrüstung (Pilot/Flugzeug/Flugplatz).

Kategorie	I	II	III		
			A	B	C
Entscheidungshöhe	ca. 60 m (200 ft)	ca. 30 m (100 ft)	ca. 16 m (50 ft)	—	—
Landebahnsicht	ca. 550 m (1850 ft)	ca. 300 m (1000 ft)	ca. 200 m (700 ft)	ca. 75 m (250 ft)	0

Tabelle 7.10: Verschiedene Betriebsstufen für Allwetterflugbetrieb

7.5.3.3 Aufsetzen

Dieser Teil des Landevorgangs, der das Aufsetzen und Abbremsen des Flugzeugs bis zum Stillstand einschließt, wird durch die *Landestrecke* gekennzeichnet. Man definiert die Landestrecke als diejenige horizontale Entfernung, die ein landendes Flugzeug von einem Punkt in ca. 15,2 m (50 ft) Höhe über der Landebahnschwelle bis zum Stillstand auf der Landebahn benötigt. Wie aus Bild 7.56 zu ersehen ist, besteht die Landestrecke aus einem aerodynamisch getragenen Bahnabschnitt, der das Abfangen und Aufsetzen einschließt und *Aufsetzstrecke* X_{L1} genannt wird, sowie der *Landerollstrecke* X_{L2} , die das Flugzeug am Boden rollend zurücklegt, bis es zum Stillstand kommt.

7.5.3.4 Aufsetzstrecke

Das Flugzeug befindet sich beim Erreichen der Landebahnschwelle auf dem Leitstrahl, etwa in der vorgeschriebenen Höhe von 15,2 m (50 ft). Der Pilot setzt den Anflug mit konstant gehaltenem Gleitwinkel fort. Kurz vor dem Aufsetzen werden die Triebwerke auf Leerlauf gedrosselt und das Flugzeug durch *Ziehen* abgefangen. Hierbei wird der Auftrieb durch Vergrößerung des Flugzeuganstellwinkels erhöht, um eine Krümmung der Flugbahn zu erreichen. Bild 7.51

veranschaulicht, wie sich bei einer ausgeführten Landung Lagewinkel und Geschwindigkeit des Flugzeugs bis zum Aufsetzen ändert.

Die Berechnung des Abfangvorgangs ist z. B. unter Verwendung der Gl. 7.193 möglich, wenn die zeitliche Abhängigkeit einer Steuervariablen, z. B. des Höhenruderwinkels vorgegeben wird.

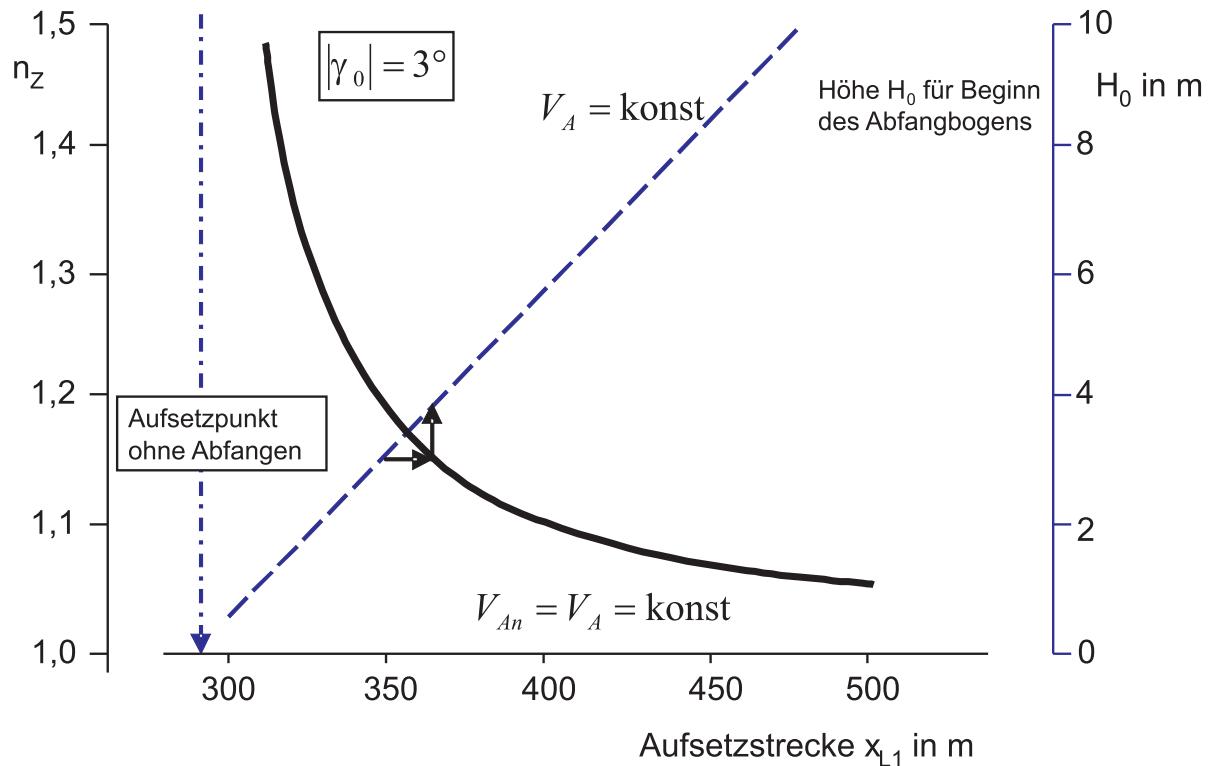


Abbildung 7.51: Aufsetzstrecke

Zur Abschätzung der Aufsetzstrecke wird häufig vereinfachend angenommen, dass zu Beginn des Abfangens die Auftriebserhöhung durch sprungartige Vergrößerung des Anstellwinkels erreicht wird und dann im Abfangbogen Auftrieb und Bahngeschwindigkeit konstant bleiben. Unter dieser Voraussetzung fliegt das Flugzeug während des *Abfangbogens* auf einer Kreisbahn. Die von der Landebahnschwelle bis zum Aufsetzen zurückgelegte Strecke lässt sich dann unter Verwendung der für die Berechnung des Übergangsbogens beim Abflug abgeleiteten Beziehung ermitteln, Gl. 7.211, wobei statt V_A hier die Anfluggeschwindigkeit V_{An} einzusetzen ist. Die Aufsetzstrecke wird bei gegebenem Bahnwinkel γ_0 umso kleiner, je kleiner der Abfangradius bzw. je größer das Lastvielfache Δn_z auf dem Abfangbogen gewählt ist. Mit Rücksicht auf den Passagierkomfort sind die zulässigen Abfangbeschleunigungen etwa auf $n_z < 1,2$ beschränkt. Der Abfangvorgang beginnt relativ dicht über dem Boden. Für die Höhe H_0 beim Einleiten des Abfangens erhält man entsprechend den Beziehungen in Unterunterab-

schnitt 7.5.2.5

$$H_0 = \frac{V_{An}^2}{2g \cdot (n_z - 1)} \cdot \gamma_0^2 \quad (7.215)$$

γ_0 ist durch den Bahnneigungswinkel der Anflugbahn festgelegt. Wegen $r_z = \frac{V_{An}^2}{g \cdot (n_z - 1)}$ erhält man in Anlehnung an Gl. 7.211 die Aufsetzstrecke

$$X_{L1} = \frac{H}{\gamma_0} + \frac{V_{An}^2}{2g \cdot (n_z - 1)} \cdot \gamma_0. \quad (7.216)$$

Darin ist H über der Landebahnschwelle einzuhaltende Höhe von 15,2 m (50 ft). Diese Abschätzung, die von einer konstanten Geschwindigkeit und einem konstanten Lastvielfachen auf dem Abfangbogen ausgeht, liefert eine untere Grenze für die Größe der Aufsetzstrecke.

Bild 7.51 zeigt die Auswertung der Gl. 7.216 für ein Strahlverkehrsflugzeug bei Annahme einer Landegeschwindigkeit von $V_L = 70 \text{ m/s}$. Die Neigung der Anflugbahn wurde mit 3° angenommen. Ferner sind die Bodenabstände des Flugzeugschwerpunktes H_0 , in denen der jeweilige Abfangbogen angesetzt werden muss, eingetragen.

Der wirkliche Flugvorgang ist wesentlich komplizierter, da die Fluggeschwindigkeit längs der Abfangbahn abnimmt und weitere Randbedingungen erfüllt werden müssen. Überdies ändern sich mit Annäherung an den Boden die aerodynamischen Größen (Bodeneffekt). Die Berechnung ist dadurch erschwert, dass neben den Anfangsbedingungen ($V(0) = V_{An}$, $\gamma(0) = \gamma_{An}$) auch noch ein Aufsetzen bei $H = 0$ mit vorgeschriebenen kleinen Bahnwinkeln nach Durchfliegen der Abfangbahn verlangt werden muss. Diese Aufgabe ist nicht geschlossen lösbar, sie erfordert vielmehr zur Nachbildung des wirklichen Flugvorgangs den Ansatz einer zusätzlichen Steuervariablen, durch die die Bahn kontinuierlich den obengenannten Forderungen angepasst werden kann. Diese schwierige Aufgabe übernimmt normalerweise der Pilot beim Anflug. Eine Möglichkeit für die Berechnung des verzögerten Abfangbogens wäre, ihn als eine Umkehrung des Flugvorgangs bei einem beschleunigten Startübergangsbogen, Gl. 7.211 darzustellen.

In Bild 7.52 sind die Aufsetzstrecken eines Flugzeuges bei einer großen Zahl ausgeführter Landungen aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die gemessenen Aufsetzstrecken große Schwankungen aufweisen. Als Gründe sind hierfür die Ungenauigkeiten der erzielten Anfluggeschwindigkeiten sowie Schätzfehler der Aufsetzhöhe und daraus folgend relativ große Schwankungen der Vertikalgeschwindigkeit beim Aufsetzen maßgebend. Unter Beachtung dieser Ergebnisse erscheint es wenig sinnvoll, die Berechnungsmethode zur Ermittlung der Aufsetzstrecke über die in Gl. 7.216 angegebene Beziehung hinaus zu verfeinern.

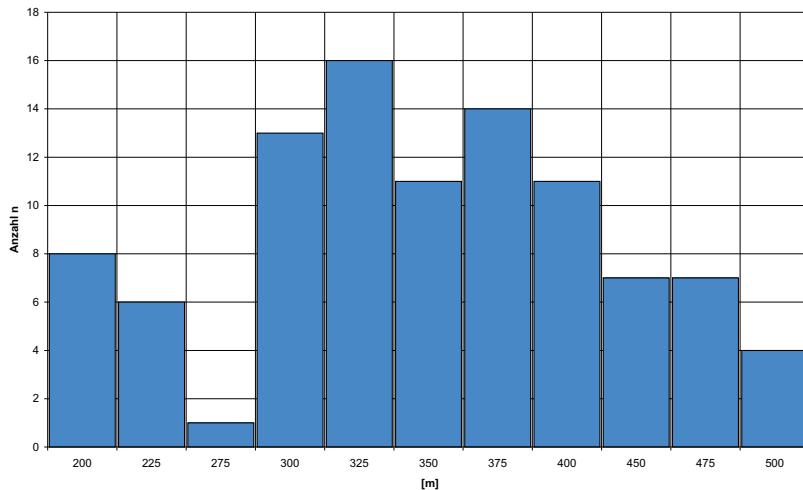


Abbildung 7.52: Wahrscheinliche Aufsetzstrecken ausgeführter Landungen von Verkehrsflugzeugen

Die Ergebnisse nach Bild 7.52 machen deutlich, dass in den EASA-Bestimmungen für erforderliche Flugplatzlängen große Sicherheitszuschläge vorgesehen werden müssen, um mögliche Abweichungen zu erfassen.

7.5.3.5 Landerollstrecke

Unmittelbar nach dem Aufsetzen wird die Bremsung über die Räder eingeleitet. In wenigen Fällen wird bei Verkehrsflugzeugen zusätzlich die Schubumkehr eingeleitet. Die gleichzeitig ausgefahrenen Bremsklappen bewirken neben der eigenen Bremswirkung infolge des fast verdoppelten aerodynamischen Widerstandes zugleich eine starke Reduktion des aerodynamischen Auftriebes und tragen so indirekt zur Bremswirkung der Radbremsen bei höheren Rollgeschwindigkeiten bei.

Bezeichnet man die Rollgeschwindigkeit, bei der der Bremsschub wirksam wird, mit V_U und die Geschwindigkeit bei voller Betätigung der Radbremsen mit V_B , so kann man die gesamte Rollstrecke bis zum Stillstand unter Verwendung der Gl. 7.171 berechnen:

$$x_{L2} = V_A \cdot \Delta t + \frac{V_A^2}{g} \cdot \left\{ \frac{A^*(\frac{V_U}{V_A}, a_{1U}) - A^*(\frac{V_B}{V_A}, a_{1U})}{\mu_{B1} - \frac{F_B}{mg}} + \frac{A^*(\frac{V_B}{V_A}, a_{12})}{\mu_{B2}} \right\} \quad (7.217)$$

Dabei bedeutet

$$a_{1U} = \frac{C_{WR} - \mu_{B1} C_{AR}}{C_{AA} \cdot (\mu_{B1} - \frac{F_B}{mg})}.$$

Es ist zu beachten, dass die Schubumkehr mit Vollschub nur etwa bis $V > 30 \text{ m/s}$ (60 kn) angewendet werden sollte, da bei kleineren Geschwindigkeiten die Gefahr des Ansaugens heißer

Verbrennungsgase oder eventueller Gegenstände (FOD) und damit einer Beschädigung des Triebwerks besteht. Bei den höheren Geschwindigkeiten wird die Radbremsung mit Rücksicht auf die zulässige Erwärmung der Bremsen relativ schwach betätigt (μ_{B1}), um im Anschluss die Bremsen voll einzusetzen (μ_{B2}).

Setzt man näherungsweise unter Beachtung der oben gegebenen Begründung $a_{12} = a_{1U} = 0$, so vereinfacht sich die Beziehung zur Berechnung der Landerollstrecke:

$$x_{L2} \cong V_A \cdot \Delta t + \frac{V_A^2}{2g} \left\{ \frac{\left(\frac{V_U}{V_A}\right)^2 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^2}{\mu_{B1} - \frac{F_B}{mg}} + \frac{1}{\mu_{B2}} \cdot \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^2 \right\} \quad (7.218)$$

Bild 7.53 zeigt den Einfluss des Beginns der vollen Radbremsung, gekennzeichnet durch $\frac{V_B}{V_A}$, auf die Landerollstrecke. Dabei wurde angenommen, dass drei Sekunden vergehen, bis das Bugrad aufsetzt und erst dann der Bremsvorgang einsetzt. Der verwendete Reibungsbeiwert $\mu_{B2} = 0,5$ ist bei trockener Bahn sicher erreichbar, wenn in geeigneter Weise gebremst wird, d. h. wenn der Schlupf zwischen Rad und Bahn nicht zu groß wird.

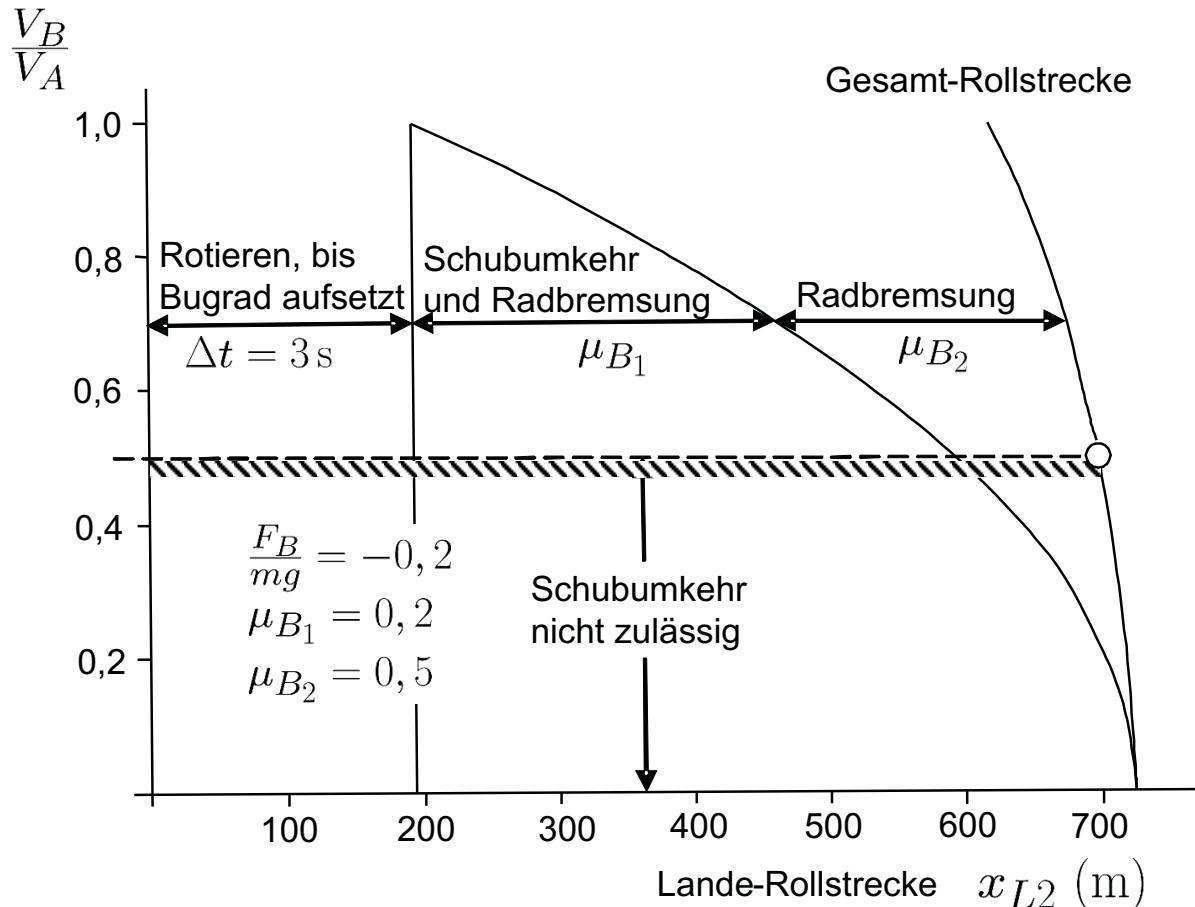


Abbildung 7.53: Lande-Rollstrecke

Wie Bild 7.54 zeigt, wird der maximale Reibungsbeiwert bei einem Schlupf-Verhältnis von etwa 0,3 erreicht. Bei wachsendem Schlupf sinkt er ab bis zum Wert bei gleitender Reibung,

der bei blockierten Rädern erreicht wird. Die Räder moderner Großflugzeuge besitzen deshalb Einrichtungen, die selbst bei Vollbremsung ein Blockieren der Räder verhindern (Antiskid) und so die Erzielung günstiger Brems-Reibungsbeiwerte ermöglichen.

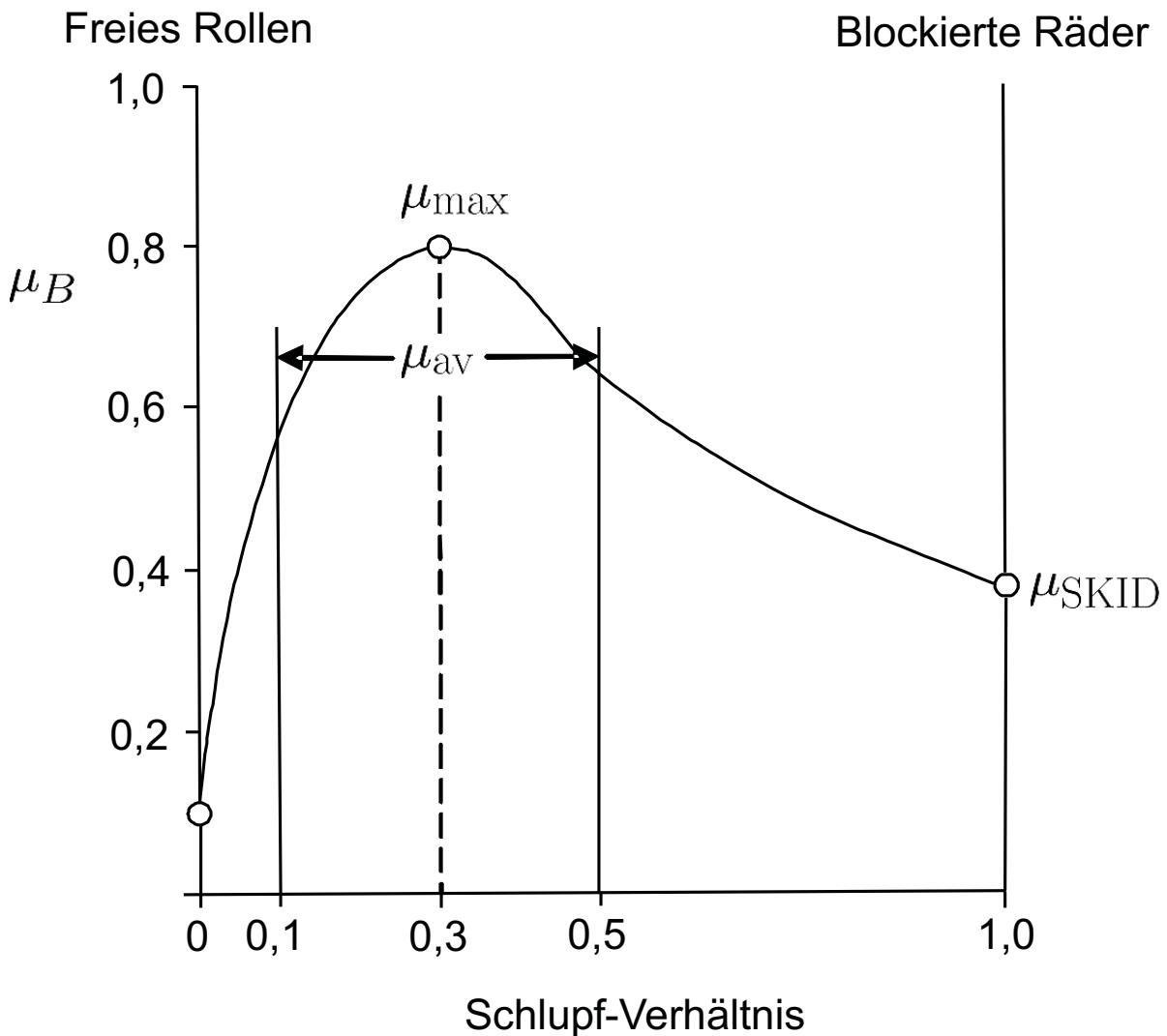


Abbildung 7.54: Brems-Reibungsbeiwert in Abhängigkeit vom Schlupfverhältnis

Bei nasser Bahn nimmt der Reibungsbeiwert je nach Bodenbeschaffenheit stark ab (siehe Bild 7.55) und bewirkt dadurch eine beträchtliche Vergrößerung der Lande-Rollstrecke. Eine besondere Gefahr stellt das *Hydroplaning* dar. Bei überfluteten Startbahnen, wie es z. B. bei sehr starken Regengüssen vorkommt, schiebt sich bei bestimmten Rollgeschwindigkeiten ein Wasserkeil zwischen Rad und Boden, so dass kurzzeitig keine Haftung mit dem Boden besteht.

Abgesehen von der dadurch bedingten stark reduzierten Bremswirkung besteht auch die Gefahr, dass das landende Flugzeug durch Seitenwind von der Bahn abkommt.

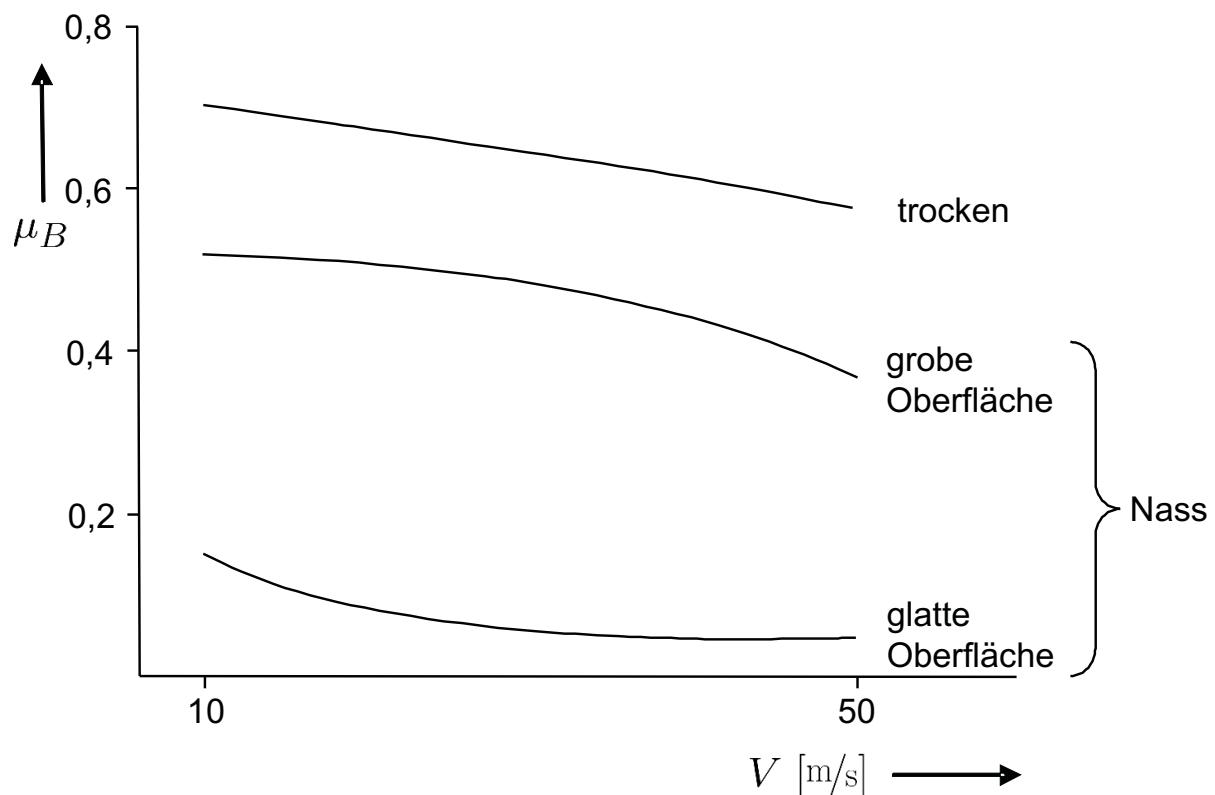


Abbildung 7.55: Brems-Reibungsbeiwerte bei verschiedenen Bahnbeschaffenheiten

Die kritische Hydroplaninggeschwindigkeit hängt vom Reifendruck und der Beschaffenheit der Reifenoberfläche ab. Sie liegt bei den Hochdruckreifen moderner Verkehrsflugzeuge im Bereich von 50 bis 60 m/s, also bei Geschwindigkeiten kurz nach dem Aufsetzen.

Für die Ermittlung der EASA-Landestrecken ist vorgeschrieben, die Rollstrecke mit einem Reibungskoeffizienten von $\mu_B = 0,3$ zu rechnen, einem Wert, der bei trockener Bahn sicher beträchtlich überschritten wird. Ferner darf hierbei die Bremswirkung durch Schubumkehr nicht angesetzt werden.

7.5.3.6 Landestrecke

Als Landestrecke bezeichnet man die horizontale Entfernung, die ein Flugzeug vom Überfliegen der Landeschwelle in 15,2 m (50 ft) Höhe bis zum Stillstand auf der Landebahn benötigt. Bild 7.56 zeigt, ergibt sich durch Addition der Aufsetzstrecke nach Gl. 7.216 und der Landrollstrecke nach Gl. 7.217 bzw. Gl. 7.218.

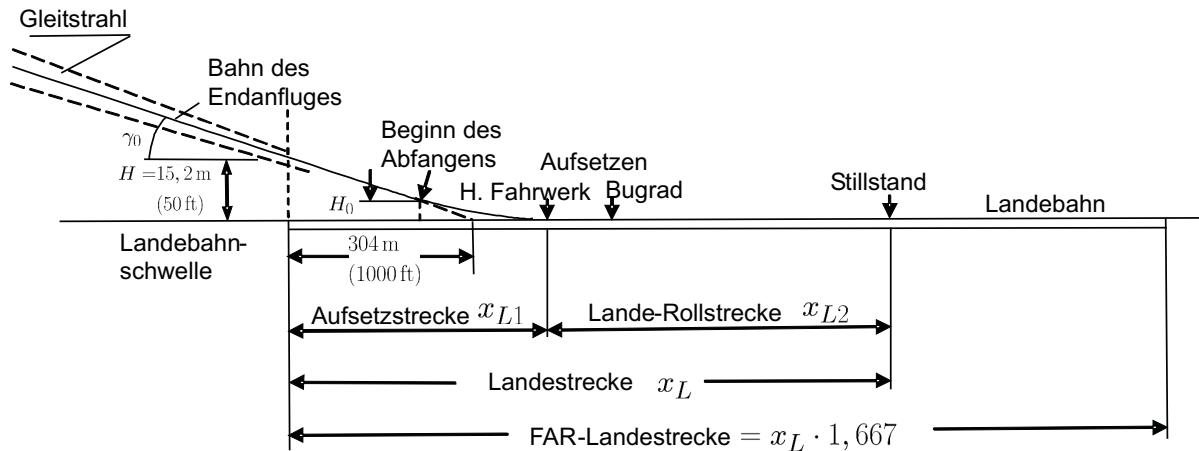


Abbildung 7.56: Landestrecke

In Bild 7.57 ist die Landestrecke abhängig vom Lastvielfachen des Abfangbogens aufgetragen und die Aufteilung in Roll- und Aufsetzstrecke dargestellt. Man erkennt, dass sich die Landestrecke nur geringfügig ändert. Berücksichtigt man die Verzögerung beim Abfangen, so wird die Aufsetzstrecke größer, zugleich reduziert sich die Lande-Rollstrecke wegen der kleineren Aufsetzgeschwindigkeiten.

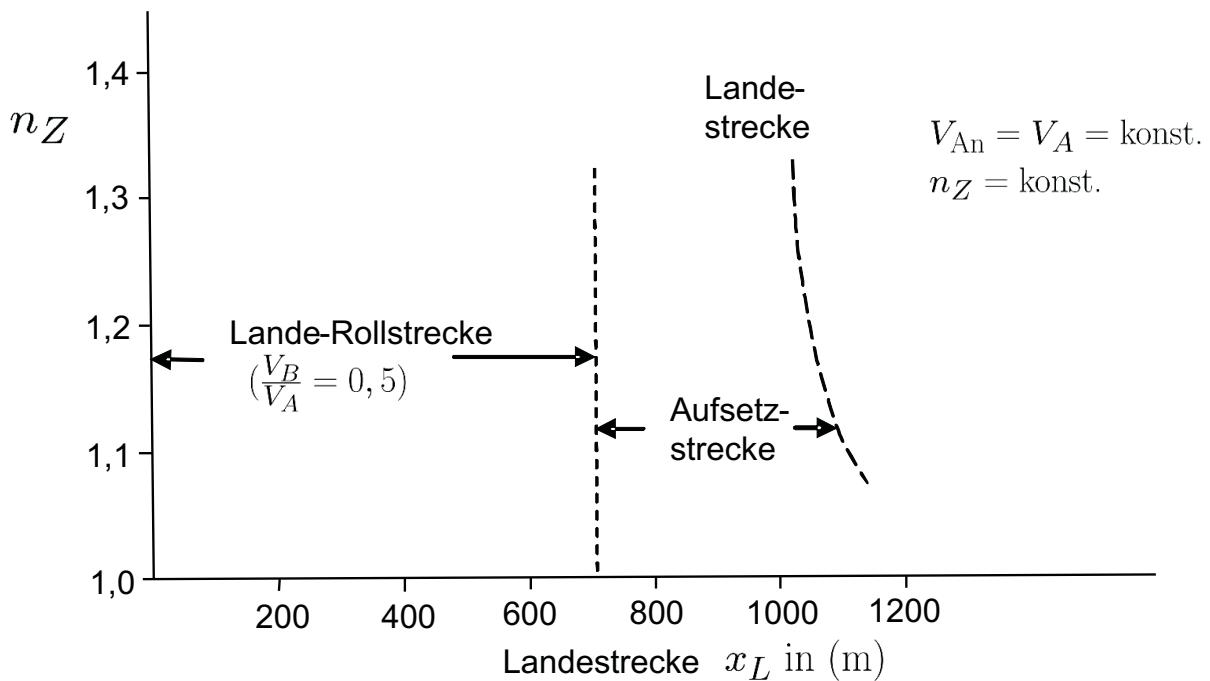


Abbildung 7.57: Einfluss des Lastvielfachen auf die Landestrecke

Literaturverzeichnis

- [Brockhaus] Brockhaus, R. / Alles, W. / Luckner, R., Flugregelung, Heidelberg / Dordrecht / London / New York, 3. Auflage (2011).
- [DIN 5450] Norm - Atmosphäre DIN 5450, Blatt1, 1968.
- [DIN 9300] DIN 9300, Luft- und Raumfahrt - Begriffe, Größen und Formelzeichen der Flugmechanik, 1988.
- [EASA-CS25] EASA, Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Large Aeroplanes CS-25, Amendment 11 (4 July 2011).
- [EASA-CS22] EASA, Certification Specifications for Sailplanes and Powered Sailplanes CS-22, Amendment 2 (5 March 2009).
- [EU-OPS-1] European Union, EU-OPS 1: Gewerbsmäßige Beförderung in Flugzeugen, 20. August 2008.
- [FAA] Federal Aviation Administration, Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge, 2003.
- [Goetsch] Götsch, E., Luftfahrzeugtechnik - Einführung, Grundlagen, Luftfahrzeukunde, Stuttgart, 2000.
- [Huenecke] Hünecke, K., Flugtriebwerke - Ihre Technik und Funktion, Stuttgart, 1987.
- [ICAO] International Civil Aviation Organization, Manual of the ICAO Standard Atmosphere extended to 32km, Montreal, 1964.
- [McCormick] McCormick, B.W., Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics, Pennsylvania, 1996.
- [Mensen0] Mensen, H., Betriebsausstattung von Luftfahrzeugen, Darmstadt, 1993.
- [Mensen1] Mensen, H., Handbuch der Luftfahrt, Langen, 2003.
- [Moir] Moir, I. / Seabridge, J., Aircraft Systems - Mechanical, electronical and avionics subsystems integration, Suffolk, 2001.
- [Muenzberg] Münzberg, G.H., Flugantriebe - Grundlagen, Systematik und Technik der Luft- und Raumfahrtantriebe, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

- [Nelson] Nelson, R.C., Flight Stability and automatic Control, Singapore, 1998.
- [Scheiderer] Scheiderer, J., Angewandte Flugleistung - Eine Einführung in die operationelle Flugleistung vom Start bis zur Landung, Berlin / Heidelberg, 2008.
- [Schlichting] Schlichting / Truckenbrodt, Aerodynamik des Flugzeuges, Berlin / Heidelberg / New York, 1967.
- [Tropea] Tropea, C., Aerodynamik I, Darmstadt, 2004.
- [USGV] US-Government Prining-Office, US-Standard Atmosphere, Washington D.C., 1962.
- [Yechout] Yechout, T.R., Introduction to aircraft flight mechanics: performance, static stability, dynamic stability, and classical feedback control, Reston, 2003.