9. Fluxo Máximo

→ Um grafo dirigido e ponderado $G = (V, A, c)$ — vértices, arcos, capacidade

↳ $c: V \times V \to \mathbb{R}^+$

↳ mapear a capacidade de vazão.

↳ $c((u,v)) = 0$ se $(u,v) \notin A$

↳ $c((u,v))$ é igual a capacidade do arco $(u,v) \in A$

→ Os vértices s (origem) fonte ou e t (destino) sorvedouro, $s, t \in V$

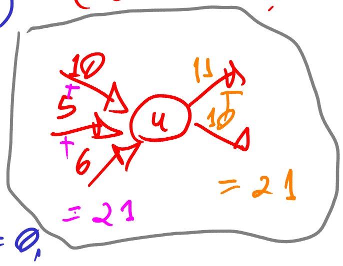
Entradas

→ Características:

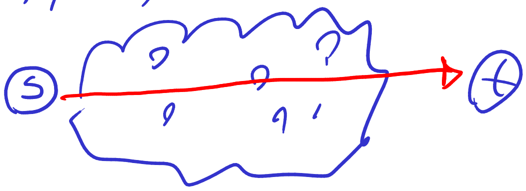
- fluxo: é uma função $f: V \times V \to \mathbb{R}^+$;
- $0 \le f((u,v)) \le c((u,v))$; (restrição de capacidade)
- P/ todo $u \in V \setminus \{s,t\}$:

$$\sum_{v \in V} f((v,u)) = \sum_{v \in V} ((u,v))$$

(conservação de fluxo)



- Quando $(u,v) \notin A$, então $f((u,v)) = 0$,

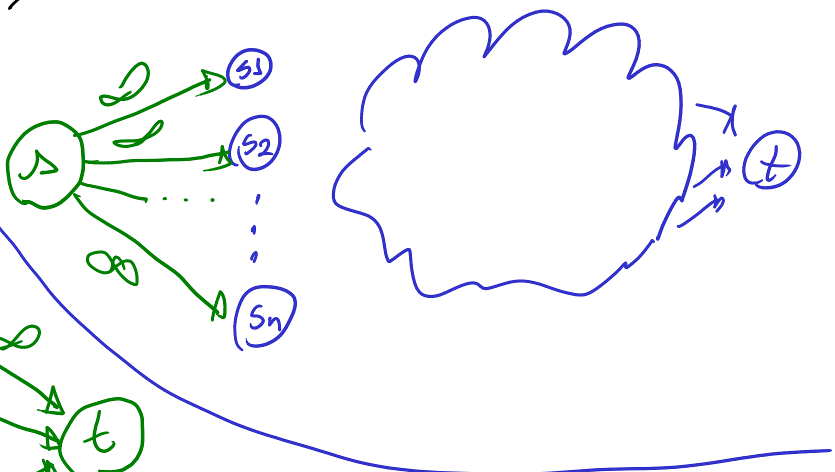


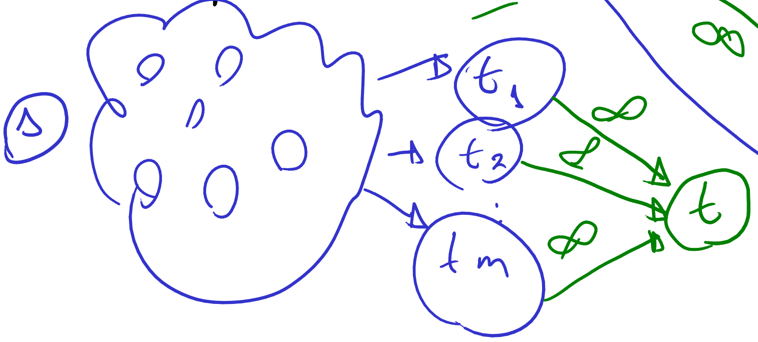
Dar vazão máxima de s p/ t

Saída

→ Para alguma aplicações há

- múltiplas origens
- múltiplos destinos





9.2 Rede Residual

→ Um grafo $G_f(V, A_f, c_f)$

→ $c_f((u,v)) = c((u,v)) - f((u,v))$

capacidade residual/disponível

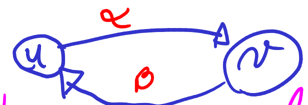
↳ se $(u,v) \in A$

$c((u,v))=10$

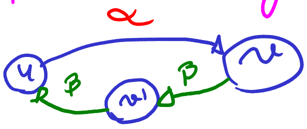
$f((u,v))=3$

$c_f((u,v))=7$

P/ o grafo de entrada



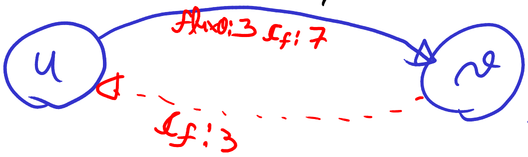
adaptação no grafo G



→ $c_f((u,v)) = f((u,v))$ se $(u,v) \notin A$ (arco de retorno que só existe em G_f)

→ P/ todo $(u,v) \in A$, existem: $(u,v) \in A_f$, $(v,u) \in A_f$ } devolução de fluxo

G_f



$c((u,v))=10$

$f((u,v))=3$

$c_f((u,v))=7$

9.3 Caminhos Aumentantes:

→ É um caminho $s \rightsquigarrow t$ tal que contribua com o aumento de fluxo

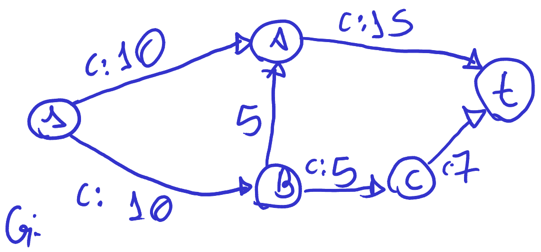
→ Caminho aumentante p tem capacidade:

$$c_f(p) = \min\{c_f((u,v)) : (u,v) \in p\}$$

p': $s \xrightarrow{cf:3} v \xrightarrow{cf:2} t$ $\quad c_f(p') = 2$

9.5 Ford-Fulkerson

Teste de mesa:

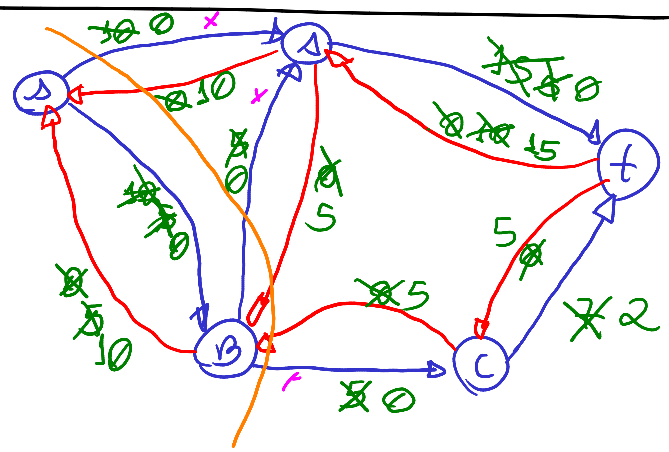


c_f →

$\in A$: $c-f$

$\notin A$: f

G_f:



Caminhos Aumentantes:

1°: $s \xrightarrow{10} A \xrightarrow{15} t$: cap. é 10 +

2°: $s \xrightarrow{10} B \xrightarrow{5} C \xrightarrow{7} t$: cap é 5 +

3°: $s \xrightarrow{5} B \xrightarrow{5} A \xrightarrow{5} t$: cap é 5

} 20 fluxo máximo

→ Complexidade do Ford-Fulkerson é $O(|A| . f^*)$ na qual f^* é o fluxo máximo.

9.6 Edmonds-Karp

→ Estabeleceu uma maneira de encontrar um nº polinomial de caminhos aumentante (independente do valor do fluxo máximo).

→ A complexidade é de $O(|V||A|^2)$