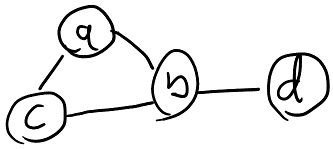
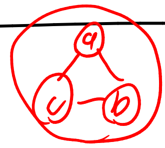
4. Caminhos e Ciclos (Eulerianos e Hamiltonianos)



Caminho: $\langle a, b, d \rangle$ — $\langle \{a,b\}, \{b,d\} \rangle$
$\langle c, b, d \rangle$ — $\langle \{c,b\}, \{b,d\} \rangle$
$\langle d, b, a, c \rangle$ — $\langle \{d,b\}, \{b,a\}, \{a,c\} \rangle$

vértices — arestas

Ciclos: $\langle a, c, b, a \rangle$ → $\langle \{a,c\}, \{c,b\}, \{b,a\} \rangle$



início e fim são no mesmo vértice

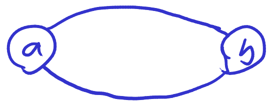
ciclo: $\langle a, c, b, \cancel{a} \rangle$

4.1 Caminhos ou Ciclos Eulerianos

→ Entrada grafo $G = (V, E)$ orientado ou não-orientado (dirigido ou não)

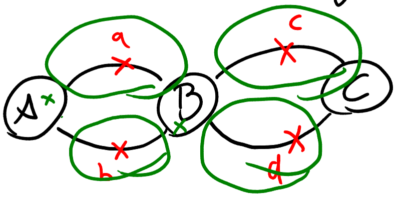
→ Trata da sequência de arestas/arcos onde cada aresta/arco é visitado apenas uma vez.

→ É comum multigrafos $E = (\{a,b\}, \{a,b\})$ →



→ Algoritmo de Hierholzer (1873) → 4.1.1

$v = A$



	C
a	~~F~~ T
b	~~F~~ T
c	~~F~~ T
d	~~F~~ T

$v = A$; $t = A$
Ciclo = (A, B, A)

$\{v, u\} = a$

$(A, \overset{b}{-} B, \overset{d}{-} C, \overset{c}{-} B, \overset{a}{-} A)$

$\boxed{x = B}$

$v = B$; $t = B$
Ciclo = (B, C, B)

$\{v, u\} = c$

Complexidade Hierholzer $O(|E|)$, ou seja, linear no número de arestas

→ Propriedade ciclo Euleriano: todos os vértices grau par e o grafo é conectado (todos os vértices são atingíveis) então o grafo é Euleriano (possui um ciclo Euleriano).

4.2 Caminhos ou Ciclos Hamiltonianos

→ Passe por todos os vértices uma vez (s/ repetição)

→ Muito estudado

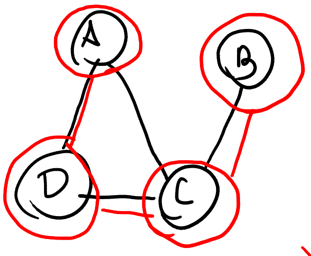
→ Não se conhece um algoritmo polinomial determinístico em tempo

→ Richard Karp 21 problemas

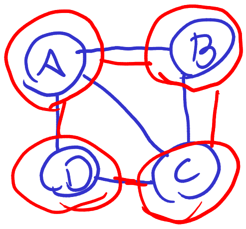
Decisão NP-Completo

∃ Ciclo Hamiltoniano ?

n̄ existe



P = NP?



Existe

⟨A, B, C, D, A⟩

Sempre existe um ciclo Hamiltoniano para um grafo completo.

4.2.1 Problema do Caixeiro Viajante

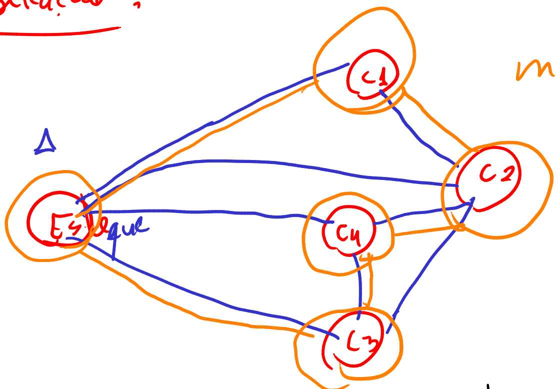
→ Quer encontrar o ciclo Hamiltoniano de custo mínimo.

→ Entrada um grafo completo $G = (V, E, w)$ não-dirigido

$E = V \times V$ { todos os vértices são conectados c/ todos

↳ função de custo $w: E \to \mathbb{R}^+$

Exemplo de aplicação:



menor custo (distância, gasto, níveis de segurança)

→ Problema difícil: n̄ se conhece algoritmo polinomial determinístico em tempo

---

Teste de Mesa: Bellman-Held-Karp

	1	2	3	4
1	–			
2	10	–		
3	15	35	–	
4	20	25	30	–

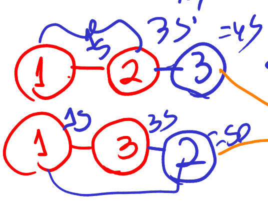
$C(\{2\}, 2) = 10$

$C(\{3\}, 3) = 15$

$C(\{4\}, 4) = 20$

---

p/ $s = 2$ $\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$



$\bullet\ S = \{2, 3\}$

$v = 2 \longrightarrow C(\{2,3\}, 2) = \min\limits_{\substack{u \neq 2 \\ u \in S \\ \{2,3\}}} \{ C(\{3\}, 3) + 35 = 50 \} = 50$

$v = 3 \longrightarrow C(\{2,3\}, 3) = \min\limits_{\substack{u \neq 3 \\ u \in S}} \{ C(\{2\}, 2) + 35 = 45 \} = 45$

• $S = \{2,4\}$

$v = 2 \rightsquigarrow C(\{2,4\},2) = \min\limits_{\substack{u \neq 2 \\ u \in \{2,4\}}} \{ \underbrace{C(\{4\},4)}_{20} + 25 \} = 45$

$v = 4 \rightsquigarrow C(\{2,4\},4) = \min\limits_{\substack{u \neq 4 \\ u \in \{2,4\}}} \{ \underbrace{C(\{2\},2)}_{10} + 25 \} = 35$

• $S = \{3,4\}$

$v = 3 \rightsquigarrow C(\{3,4\},3) = \min\limits_{\substack{u \neq 3 \\ u \in \{3,4\}}} \{ \underbrace{C(\{4\},4)}_{20} + 30 \} = 50$

$v = 4 \rightsquigarrow C(\{3,4\},4) = \min\limits_{\substack{u \neq 4 \\ u \in \{3,4\}}} \{ \underbrace{C(\{3\},3)}_{15} + 30 \} = 45$

$s = 3$ $\{2,3,4\}$

$S = \{2,3,4\}$

$v = 2 \rightsquigarrow C(\{2,3,4\},2) = \min\limits_{\substack{u \neq 2 \\ u \in \{\cancel{2},3,4\}}} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{C(\{3,4\},3)}_{50} + 35 = 85 \\ \underbrace{C(\{3,4\},4)}_{45} + 25 = 70 \end{array} \right. = 70$

$v = 3$

$v = 4$