UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Definição:

Uma função polinomial é uma função na forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Se $a_n \neq 0$, seu grau é igual a n.

Definição:

Uma função racional é uma função na forma:

$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}}$$

Com $p(x)$ e $q(x)$ funções polinomiais e $q(x) \neq 0$.

As funções racionais podem ser classificadas em

próprias ou ***impróprias***:

Uma função **racional própria** tem o grau do numerador menor do que o grau do denominador:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x-2}$$

Uma função é **racional imprópria** se o grau do numerador é igual ou maior do que o grau do denominador.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{2x^3+2x^2}{x^2-3}$$

Integral de funções racionais com frações parciais

Para resolver a integral de uma função racional podemos escrever a função na forma de ***funções racionais simples*** chamadas **frações parciais** e então calculamos as integrais destas frações parciais.

As frações parciais podem ser próprias ou impróprias.

Antes de verificar os vários casos possíveis observemos que se o grau do numerador $p(x)$ da fração $p(x)/q(x)$ não é menor que o grau do denominador $q(x)$, podemos sempre dividir $p(x)$ por $q(x)$ e obter um quociente $f(x)$ e um resto $r(x)$.

$$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{q(x)}}$$

Integral de funções racionais com frações parciais

Exemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5}\,dx$

$p(x)$ $\qquad$ $q(x)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 + x & x^2 + 5 \\ \cline{2-2}
-(x^3 + 5x) & x + 2 \quad \Rightarrow f(x) \\ \cline{1-1}
2x^2 - 4x & \\
-(2x^2 + 10) & \\ \cline{1-1}
-4x - 10 &
\end{array}
$$

$r(x)$

1. $$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5} dx$$

$$= \int \frac{(x+2)(x^2+5) - (4x+10)}{x^2+5} dx$$

$$= \int \frac{(x+2)(x^2+5)}{x^2+5} dx - \int \frac{4x+10}{x^2+5} dx$$

$$\boxed{= \int (x+2) dx + \int \frac{4x+10}{x^2+5} dx}$$

$$f(x) \qquad \frac{r(x)}{q(x)}$$

Integral de funções racionais com frações parciais

1. $$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 5}\,dx = \int (x+2)\,dx + \int \frac{4x+10}{x^2+5}\,dx$$

Polinômio de fácil resolução

Fração Própria

o grau do denominador é maior do que o grau do numerador

Integral de funções racionais com frações parciais

Para resolver a integral de uma **fração racional própria**, podemos expressar a função como uma soma das **frações parciais** da forma:

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

A seguir serão discutidos casos para facilitar a resolução.

Caso 1: **O denominador é um produto de fatores lineares distintos.**

Caso 2: **O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.**

Caso 3: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.**

Caso 4: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.**

Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$$

Como o grau do numerador é menor que o denominador, não precisamos dividir.

Fatoramos o denominador como:

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2)$$
$$= x(2x - 1)(x + 2)$$

Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando tem a forma:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Para determinarmos os valores de A, B e C, multiplicamos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores:

Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Expandindo o lado direito da equação e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos:

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Caso 1: O denominador é um produto de fatores lineares distintos.

Os coeficientes do lado direito devem ser iguais aos coeficientes do lado esquerdo, resultando num sistema de equações para A, B e C:

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{5} \\ C = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Caso 1: **O denominador é um produto de fatores lineares distintos.**

Assim,

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \boxed{\frac{1}{10}\ln|2x-1|} - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

Integral por substituição, $u = 2x-1$

$du = 2dx \implies dx = du/2$

Caso 2: O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$$

Como o grau do numerador é maior que o do denominador, a primeira etapa é dividir:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^2 + 4x + 1 & x^3 - x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
-(x^4 - x^3 - x^2 + x) & x + 1 \\ \cline{1-1}
x^3 - x^2 + 3x + 1 & \\
-(x^3 - x^2 - x + 1) & \\ \cline{1-1}
4x &
\end{array}$$

Caso 2: **O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.**

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)(x^3 - x^2 - x + 1) + 4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$$

Caso 2: **O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.**

A decomposição em frações parciais é:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

Procedendo de forma análoga ao caso 1, obtemos os valores de A, B e C e resolvemos a integral.

Caso 2: **O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.**

$$4x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

$$4x = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C = 4 \\ -A + B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}$$

Caso 2: **O denominador é um produto de fatores lineares e alguns dos fatores são repetidos.**

Assim,

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}\right]dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Resolva as seguintes integrais:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

2. $\displaystyle\int \frac{3x - 5}{x^2 - x - 2}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{5x^3 - 6x^2 - 68x - 16}{x^3 - 2x^2 - 8x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{x(x+1)^2}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3}$

Integral de funções racionais com frações parciais

Respostas:

1. $\frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

2. $\frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{8}{3}\ln|x+1| + C = \ln\left[\,|x-2|^{1/3}|x+1|^{8/3}\right] + C$

3. $5x + 2\ln|x| - \frac{8}{3}\ln|x-4| + \frac{14}{3}\ln|x+2| + C = 5x + \ln\left(\frac{x^2|x+2|^{14/3}}{|x-4|^{8/3}}\right) + C$

4. $3\ln|x| + 2\ln|x-1| - \ln|x+3| + C = \ln\left(\frac{x^3|x-1|^2}{|X+3|}\right)$

5. $2\ln|x| + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln|x^2(x+1)| + \frac{1}{x+1} + C$

6. $2\ln|x+1| + \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + C = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + \ln[(x+1)^2(x-2)]$

Caso 3: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.**

Se o denominador tiver o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$ então, além das frações parciais a expressão para $r(x)/q(x)$ terá um termo na forma:

$$\boxed{\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}}$$

Caso 3: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.**

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$$

Como o grau do numerador é menor que o denominador, não precisamos dividir.

Fatoramos o denominador como:

$$x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 4)}$$

Caso 3: O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.

Multiplicando por $x(x^2+4)$, temos:

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$2x^2 - x + 4 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

Resolvendo o sistema formado, obtemos:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C = -1 \\ 4A = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Integral de funções racionais com frações parciais

Caso 3: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis distintos.**

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + C$$

Integral por substituição, $u = x^2 + 4$

$$du = 2xdx \implies xdx = du/2$$

Integral obtida pela tabela,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arc\;tg\;(x/a) + C$$

Integral de funções racionais com frações parciais

Caso 4: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.**

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

Como o grau do numerador é menor que o denominador, não precisamos dividir.

Escrevemos a função da seguinte forma:

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

Caso 4: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.**

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$ temos:

$$1 - x + 2x^2 - x^3 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x$$

$$1 - x + 2x^2 - x^3 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = -1 \\ 2A + B + D = 2 \\ C + E = -1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 1 \\ E = 0 \end{cases}$$

Integral de funções racionais com frações parciais

Caso 4: **O denominador contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.**

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - tg^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

Integral de funções racionais com frações parciais

Resolva as seguintes integrais:

7. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{8x^2 + 3x + 20}{(x+1)(x^2+4)}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x+2)(x^2+3)^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2+1)^2}\,dx$

Respostas:

7. $\frac{3}{2}\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}arc\ tg\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\ln|2x-1|+C$

8. $\frac{3}{2}\ln|x^2+4|+5\ln|x+1|+C$

9. $\ln|x+2|+\ln|x^2+3|-\frac{2}{x^2+3}+C$

10. $\frac{5}{2}\ln|x^2+1|-3arc\ tg\ x-\frac{1}{x^2+1}+C$