UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Ementa

UNIDADE 2: Funções de 2 ou mais variáveis.

1. Conceitos preliminares (espaço tridimensional, funções de duas variáveis, curvas de nível).
2. Derivadas parciais. Pontos extremos de funções de duas variáveis.
3. Determinação e classificação de pontos extremos de funções de duas variáveis.
4. Máximos e mínimos condicionais – aplicações.

Conceitos Preliminares

Em muitas situações práticas, o valor de certa quantidade, depende dos valores de duas outras ou de mais quantidades. Então, é usual representar estas relações como funções de várias variáveis.

Uma função de várias variáveis reais é uma regra que descreve como uma quantidade é determinada por outras quantidades, de maneira única. Através das funções de várias variáveis poderemos modelar uma grande quantidade de fenômenos dos mais diversos ramos da Ciência.

Exemplos:

1. Numa fábrica, uma quantidade chamada de produção *(P)*, depende do número de homens-hora *(L)* e do número de máquinas *(K)*, usadas para produzir algum produto. A representação funcional dessa relação dada por:

$$\boxed{P = f(L, K)}$$

Exemplos:

2. O número de indivíduos Q de certa colônia de fungos depende essencialmente da quantidade N de nutrientes *(em gr)*, da quantidade H de água *(cm³)*, da temperatura T *(°C)* e da presença de certa proteína L *(ml)*. Q possivelmente não tem uma formulação matemática explícita, mas é uma função bem definida:

$$\boxed{Q = Q(N, H, T, L)}$$

Exemplos:

3. O volume V de um cilindro é função do raio r de sua base e de sua altura h: $V(r,h) = \pi r^2 h$. Logo, um cilindro de altura $h = 10\ cm$ e raio $r = 2\ cm$ tem volume: $V(2{,}10) = 40\pi\ cm^3$ aproximadamente, $125{,}663\ cm^3$.

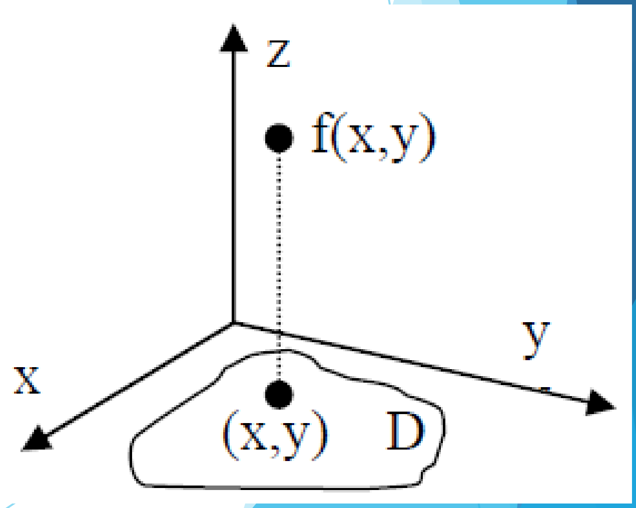
Funções de Duas Variáveis

Seja D um subconjunto (região) do espaço R^2 (plano).

Uma função real f de duas variáveis é uma relação que a cada par ordenado de números reais (x,y) associa um único número real $f(x,y)$.

Assim,

- O conjunto D é o domínio da função em R^2;
- f é a função em análise
- $f(x,y)$ é o valor da função calculado em (x,y).



Exemplos:

1. Se $f(x,y) = x^2 + 2y$, então $f(2,3) = 2^2 + 2.3 = 10$
2. Se $f(x,y) = (3x + y^3)^{1/2}$, então $f(1,2) = (3.1 + 2^3)^{1/2} = 3{,}32$
3. Sendo $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1$, determine:

   a) $f(1,4)$

   b) $f(0,9)$

   c) $f(a,ab)$

Gráfico de Funções de Duas Variáveis

Para funções de uma variável, o gráfico é no plano xy e $y = f(x)$.

Para funções de duas variáveis o gráfico é em $\mathbb{R}^3$ e $z = f(x, y)$.

A superfície gerada no espaço $\mathbb{R}^3$ é obtida para cada par x, y, fixando um valor de x e variando y, em seguida fixando um 2º valor de x e variando y, depois fixando um 3º x e variando y, etc., até variar x e y em todo o domínio.

Em geral, essa representação pode se tornar bastante complexa sem o auxílio de uma ferramenta computacional.

Exemplos:

1. Função $z = f(x, y) = 5$.

   A superfície é um plano infinito, paralelo a x, y
   e passando por $z = 5$.

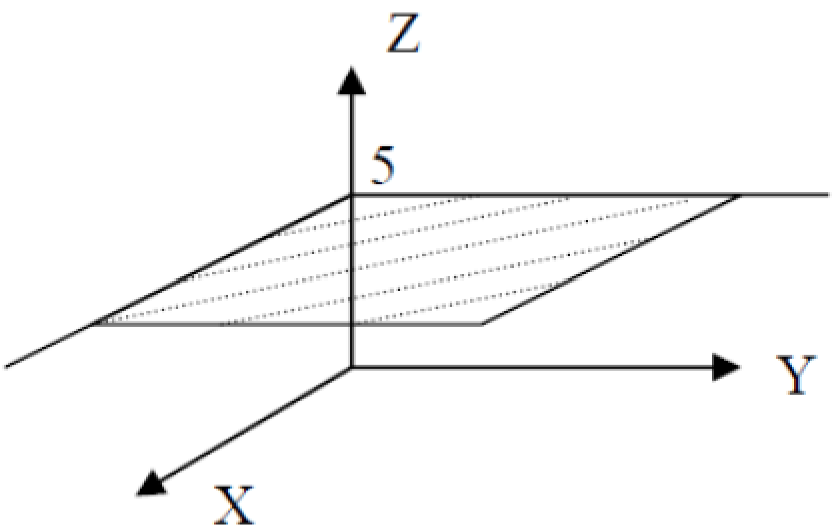


Gráfico de Funções de Duas Variáveis

Exemplos:

2. Função $z = f(x, y) = 6 - 2x + 3y$.

A função pode ser escrita na forma $2x - 3y + z = 6$

que é a equação de um plano.

Para achar os pontos onde este plano intercepta os eixos é só fazer:

a) $x = 0; y = 0 \rightarrow z = 6$

b) $x = 0; z = 0 \rightarrow y = 2$

c) $y = 0; z = 0 \rightarrow x = 3$

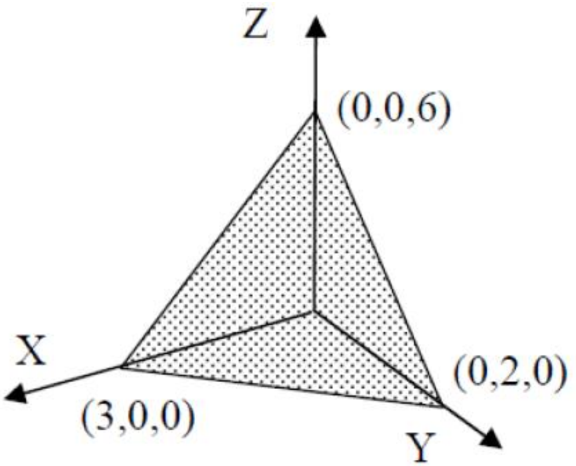


Gráfico de Funções de Duas Variáveis

Exemplos:

3. Função $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

A superfície gerada é uma semi-esfera de centro na origem.

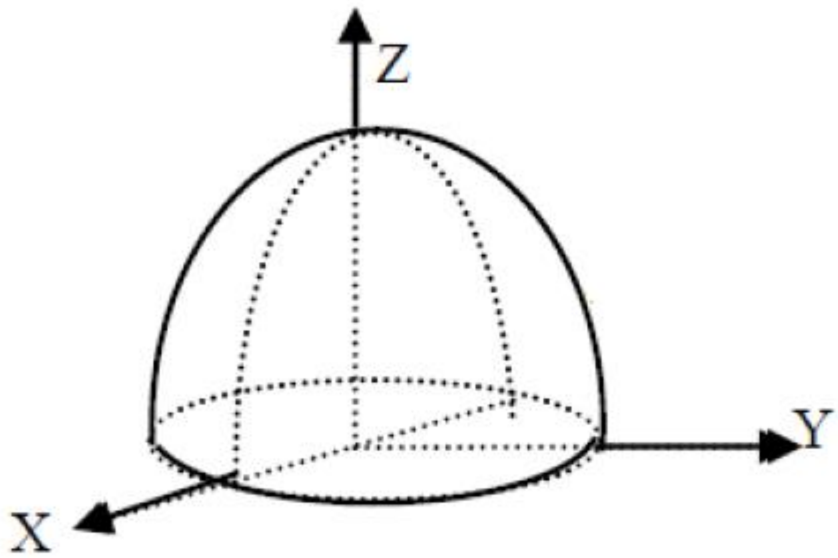
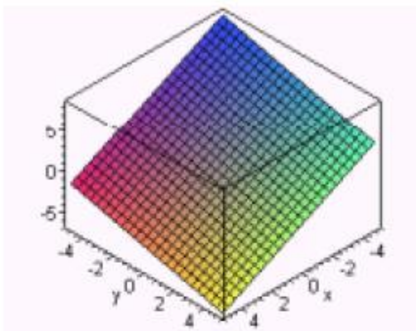
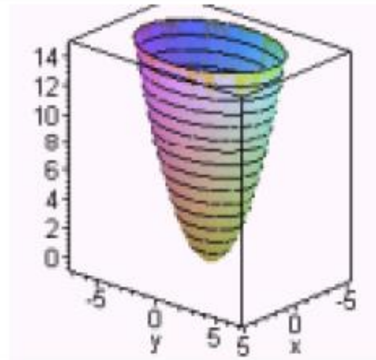
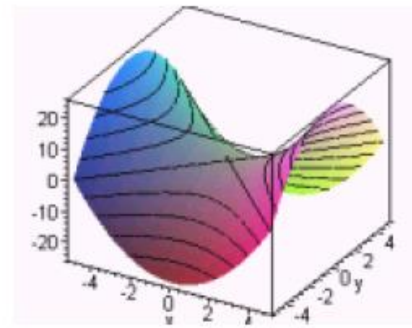
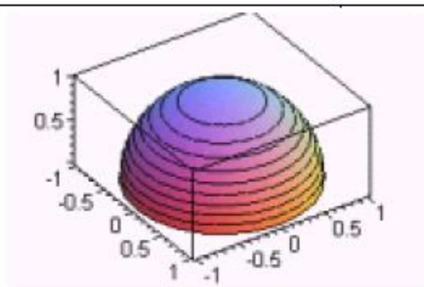
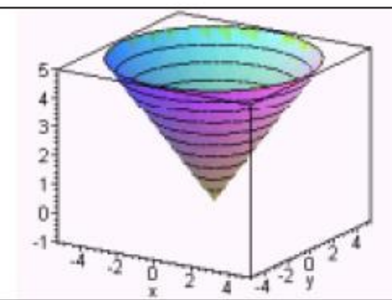


Gráfico de Funções de Duas Variáveis

Exemplos:

		
Plano $z = ax + by + c$	Parabolóide Elíptico $z = ax^2 + by^2 + c$	Parabolóide Hiperbólico $z = ax^2 - by^2 + c$

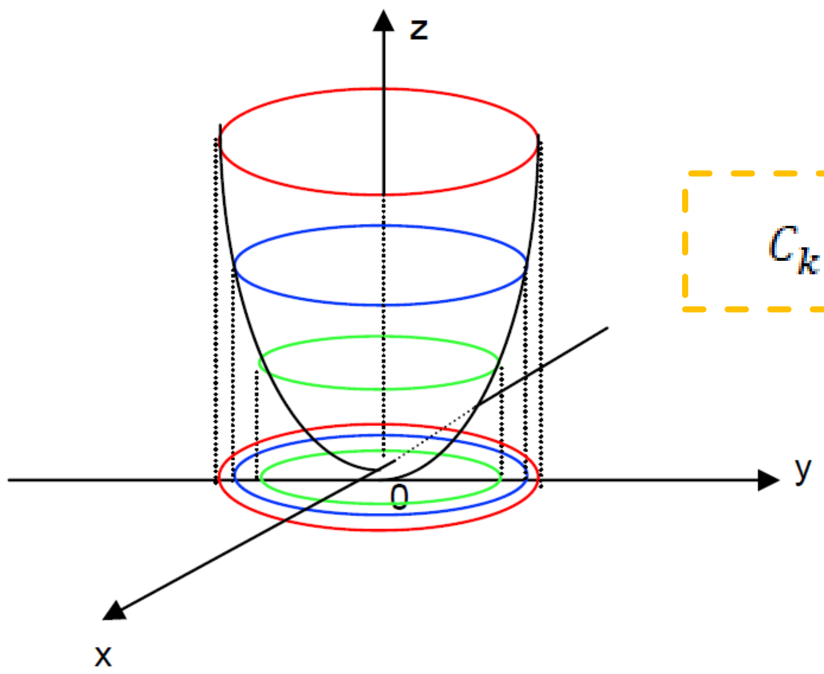
	
Metade de uma superfície esférica de raio r $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$	Metade de uma superfície cônica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Curvas de Nível

Outra forma de visualizar funções de duas variáveis é um método semelhante ao da representação de uma paisagem tridimensional por meio de um mapa topográfico bidimensional. Vamos supor que a superfície $z = f(x, y)$ seja interceptada por um plano $z = k$, e a curva de intersecção seja projetada no plano xy. Essa curva tem equação $f(x, y) = k$ e é chamada de curva de nível (ou curva de contorno) da função f em k.

Curvas de Nível

Para funções de uma variável, o gráfico é no plano xy e $y = f(x)$.



$$C_k = \left\{(x, y) \in R^2 \,|\, f(x, y) = k\right\}$$

Curvas de Nível

As curvas de nível de uma função f de duas variáveis são gráficos no plano xy de equações na forma $f(x, y) = k$.

O conjunto de curvas de nível é chamado **mapa de contorno**.

Todos os pontos (x, y) que estão na mesma curva de nível têm a mesma imagem x.

Curvas de Nível

No caso de representar uma grandeza física, as curvas de nível ganham particular importância, recebendo inclusive denominações específicas:

- Se $f(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y) de uma chapa plana, as curvas $f(x, y) = k$ são chamadas de isotérmicas ou isotermas;
- Se $f(x, y)$ é a pressão de um gás de volume x e temperatura y, as curvas são chamadas isobáricas o isóbaras;
- Se $f(x, y)$ é o potencial (elétrico ou gravitacional) na região D do plano xy então as curvas são chamadas equipotenciais.

Curvas de Nível

Exemplos:

1. Seja a função dada por $z = x^2 + y^2$.

   As curvas de nível para $z = 0, z = 1, z = 2 \; e \; z = 4$ são:

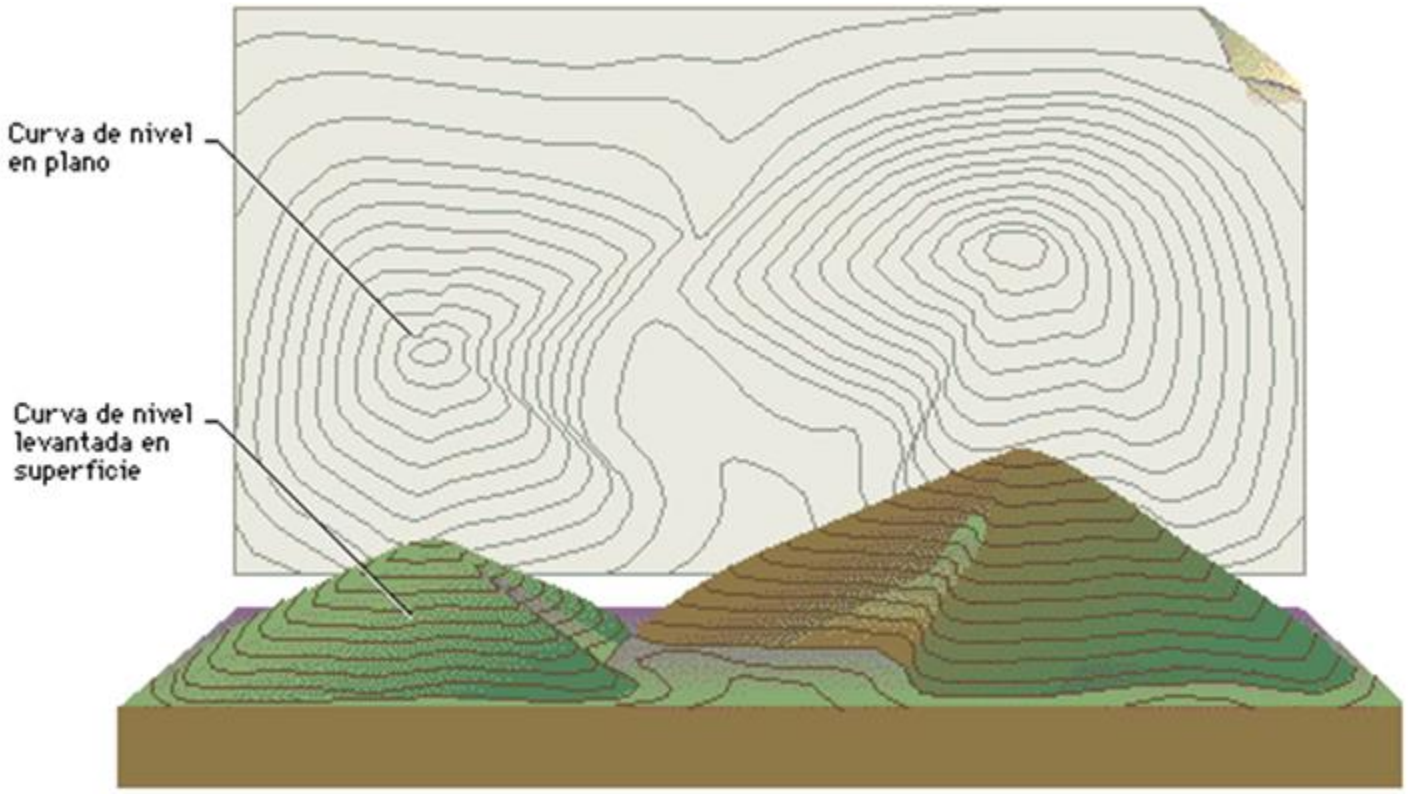
   - $z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \; (x = y = 0)$
   - $z = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (Circunferência de centro $C(0{,}0)$ e raio 1
   - $z = 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 2$ (Circunferência de centro $C(0{,}0)$ e raio $\sqrt{2}$
   - $z = 4 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4$ (Circunferência de centro $C(0{,}0)$ e raio 2

Observações:

- As curvas de nível nunca de interceptam;
- As funções de três ou mais variáveis não podem ser representadas graficamente.

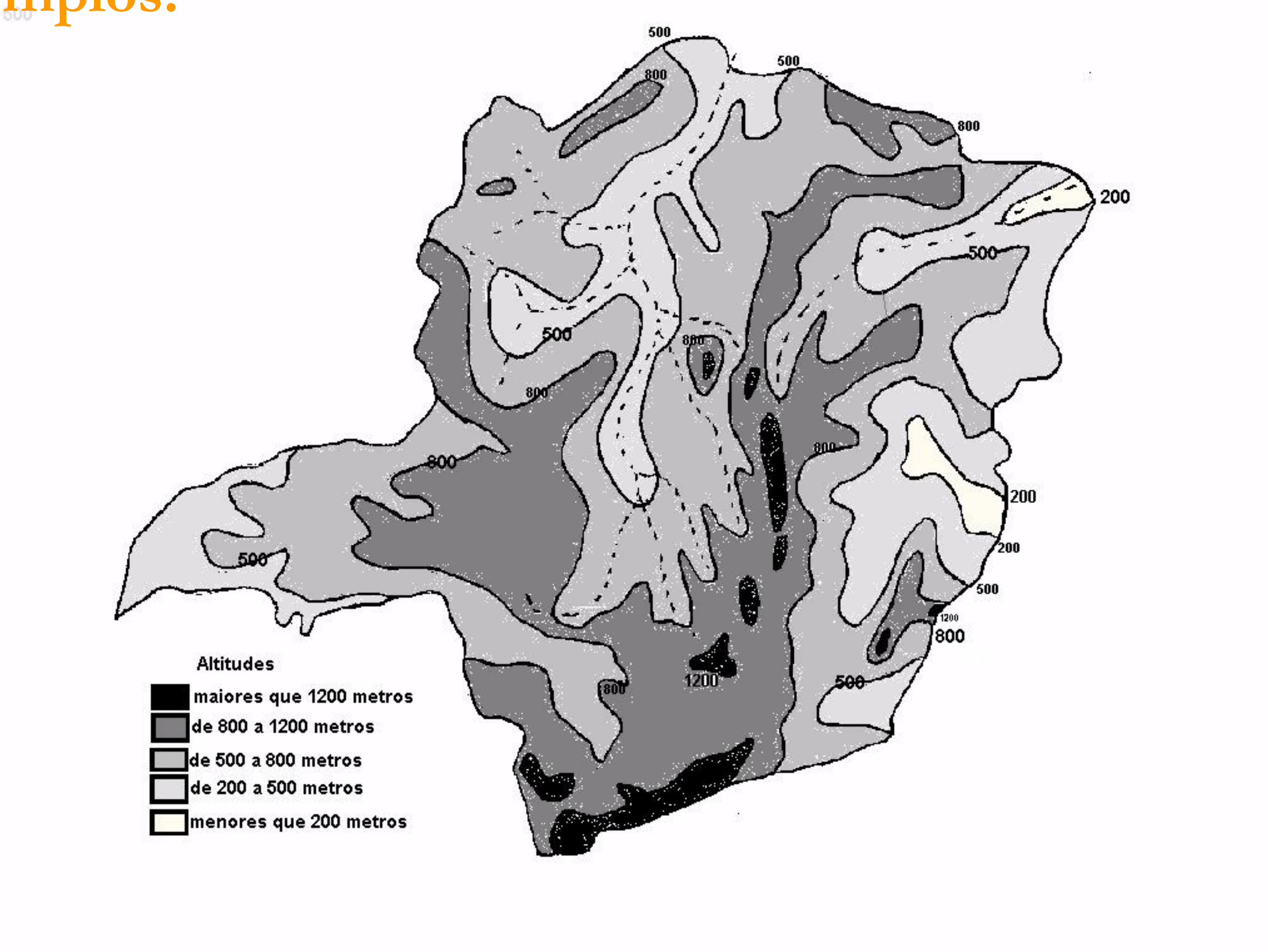
Curvas de Nível

Exemplos:



Curvas de Nível

Exemplos:



UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

A definição de derivada parcial de uma função de duas variáveis

é a mesma que a de funções de uma variável.

A única diferença aqui é que, como se tem duas variáveis,

uma delas deve ser mantida fixa enquanto se dá acréscimos para a outra.

Derivada de Funções de Duas Variáveis

Assim, seja a função $f(x,y)$, sua derivada em relação a x é

$$f(x+h,y) - f(x,y) \qquad (incremento\ da\ função)$$

$$f'(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \qquad (taxa\ de\ variação\ da\ função)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x,y) \Longrightarrow \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = f_x(x,y) \qquad Derivada\ parcial\ em\ x$$

Derivada de Funções de Duas Variáveis

Analogamente, se mantivermos agora o valor de x constante, a derivada parcial em relação a y é:

$$\lim_{h \to 0} f(x, y) \Longrightarrow \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = f_y(x, y) \qquad \textit{Derivada parcial em } y$$

Exemplos:

1. Derivar a função $f(x, y) = 3x^3y^2$.

$$f_x = \frac{\vartheta(3x^3y^2)}{\vartheta x} = 9x^2y^2$$

$$f_y = \frac{\vartheta(3x^3y^2)}{\vartheta y} = 6x^3y$$

Exemplos:

2. Derivar a função $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$$f_x = \frac{\vartheta(x^2 + y^2)}{\vartheta x} = 2x$$

$$f_y = \frac{\vartheta(x^2 + y^2)}{\vartheta y} = 2y$$

Exemplos:

3. Derivar a função $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

$$f_x = \frac{\vartheta\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\vartheta x} = \frac{[(x^2+y^2).1 - x.2x]}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{\vartheta\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\vartheta y} = \frac{[(x^2+y^2).0 - .2y]}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Diferencial Total de Funções de Duas Variáveis

A condição para que uma função seja diferenciável é que suas derivadas parciais existam. Assim, dada a função $z = f(x, y)$, sua diferencial total é:

$$\boxed{dz = \frac{\vartheta f}{\vartheta x} dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y} dy}$$

Diferencial Total de Funções de Duas Variáveis

Exemplos:

1. Diferenciar a função $z = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$.

$$f_x = \frac{\vartheta(3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1)}{\vartheta x} = 9x^2y^2 - 2y^3 + y$$

$$f_y = \frac{\vartheta(3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1)}{\vartheta y} = 6x^3y - 6xy^2 + x$$

Assim, a diferencial da função é:

$$dz = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy \quad \Longrightarrow \quad dz = (9x^2y^2 - 2y^3 + y)dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)dy$$

Exemplos:

2. Calcule a diferencial da função $F(x, y, z) = 2x + 3xy - 2zy$.

$$f_x = \frac{\vartheta(2x + 3xy - 2zy)}{\vartheta x} = 2 + 3y$$

$$f_y = \frac{\vartheta(2x + 3xy - 2zy)}{\vartheta y} = 3x - 2z$$

$$f_z = \frac{\vartheta(2x + 3xy - 2zy)}{\vartheta z} = -2y$$

Assim, a diferencial da função é:

$$dz = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}dz \qquad dF = (2 + 3y)dx + (3x - 2z)dy - 2ydz$$

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Se f é uma função de duas variáveis x e y, suas derivadas parciais são

$$f_x = \frac{\vartheta f}{\vartheta x} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{\vartheta f}{\vartheta y}$$

Se derivarmos essas derivadas mais uma vez, obteremos as derivadas parciais de segunda ordem, que são representadas por:

$$\boxed{f_{xx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} \qquad f_{yx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x} \qquad f_{yy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}}$$

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Exemplos:

1. Calcular as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy.$$

$$f_x = \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 8x - 6y$$

$$f_{xx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = 8 \qquad f_{xy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = -6$$

$$f_y = \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 6y - 6x$$

$$f_{yx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x} = -6 \qquad f_{yy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = 6$$

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Exemplos:

2. Calcular as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x, y) = e^{2x+5y}.$$

$$f_x = \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 2e^{2x+5y}$$

$$f_{xx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = 4e^{2x+5y} \qquad f_{xy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = 10e^{2x+5y}$$

$$f_y = \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 5e^{2x+5y}$$

$$f_{yx} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x} = 10e^{2x+5y} \qquad f_{yy} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = 25e\hat{}(2x + 5y)$$

Derivada de Funções de Duas Variáveis

Exercícios:

Nos exercícios a seguir, encontre $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$ e $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}$

a) $f(x,y) = 2x^3 - 3y - 4$

b) $f(x,y) = 3x^4y^4 - 5x^2y^6$

c) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

d) $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y$

e) $f(x,y) = (xy - 1)^2$

f) $f(x,y) = (2x - 3y)^3$

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$

i) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

j) $f(x,y) = \frac{x+y}{xy-1}$

k) $f(x,y) = \text{sen}\, x . \cos y$

l) $f(x,y) = \text{sen}\,(2x + 3y)$

m) $f(x,y) = \ln(3x + 5y)$

n) $f(x,y) = x^2e^{xy}$

UNIVALI

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Pontos Extremos

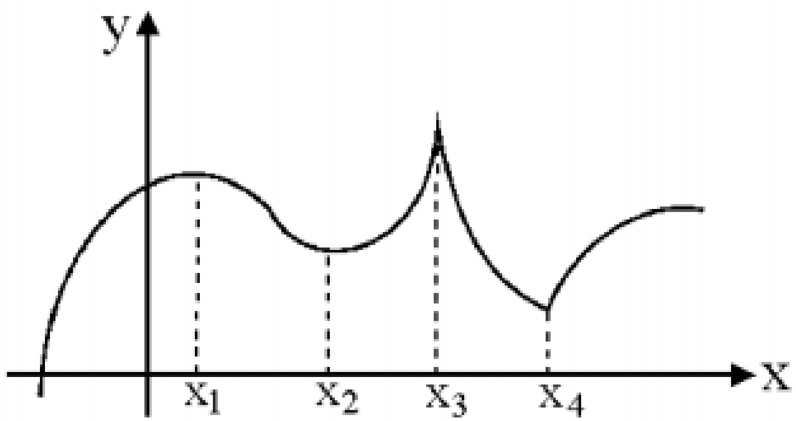
No Cálculo I, estudamos como determinar máximos e mínimos

de funções de uma única variável real utilizando

os testes da derivada primeira e segunda.

Pontos Extremos

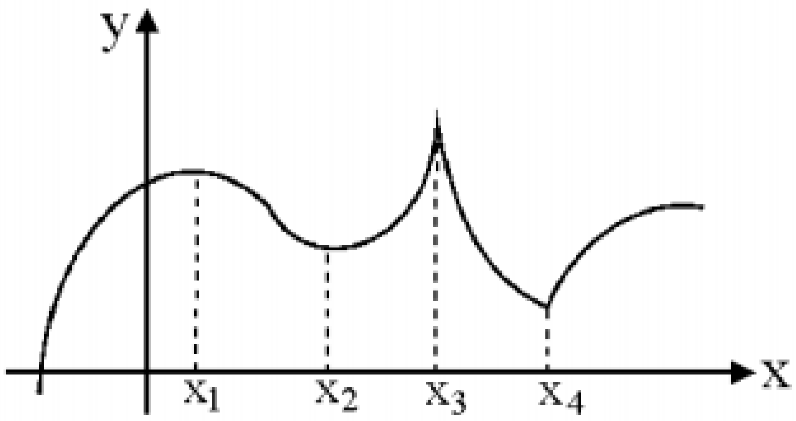
A figura abaixo mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.



Esses pontos são chamados **pontos extremos** da função, e por meio das derivadas podemos determinar os valores de máximo e mínimo.

Pontos Extremos

Os pontos x_1 e x_3 são **pontos de máximo relativo (ou local)**, enquanto que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são **valores máximos relativos.** Os pontos x_2 e x_4 são chamados **pontos de mínimo relativos (ou local)**, enquanto que $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os **valores mínimos relativos.**



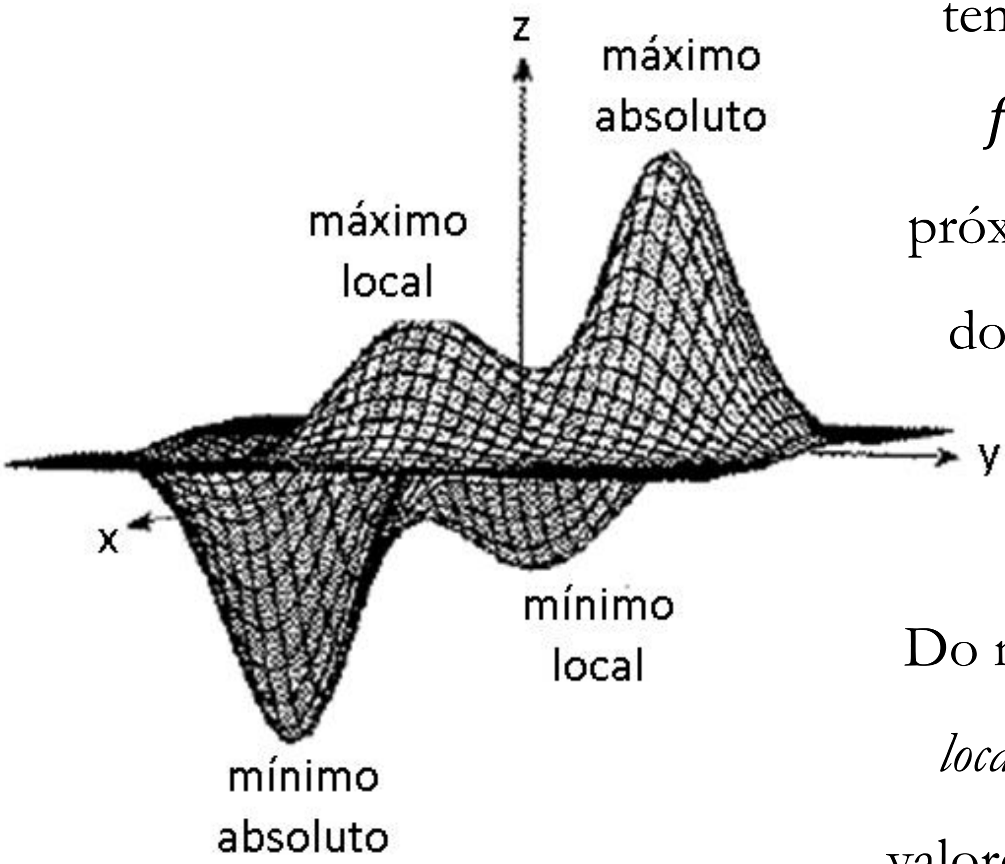
Além disso, observamos que f é **crescente** para $x < x_1, x \in (x_2, x_3)$ e $x > x_4$, e **decrescente** para $x \in (x_1, x_2)$ e $x \in (x_3, x_4)$.

Pontos Extremos

Vamos agora estender a discussão sobre máximos e mínimos para funções de duas variáveis reais.

E, para tanto, vamos utilizar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis .

Pontos Extremos

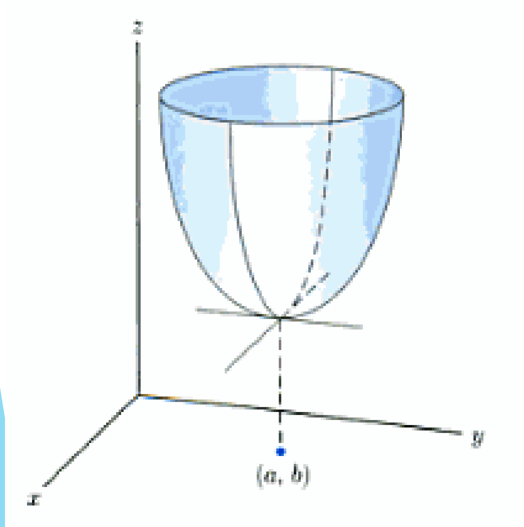


Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um *máximo local*, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$. O maior destes dois valores é **máximo absoluto**.

Do mesmo modo, f tem dois *mínimos locais* onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos. O menor destes dois valores é o **mínimo absoluto.**

Pontos Extremos

Vamos supor que a função $f(x,y)$ tem um mínimo em $(x,y) = (a,b)$. Quando y é mantido constante igual a b, $f(x,y)$ é uma função de x com mínimo em $x = a$.

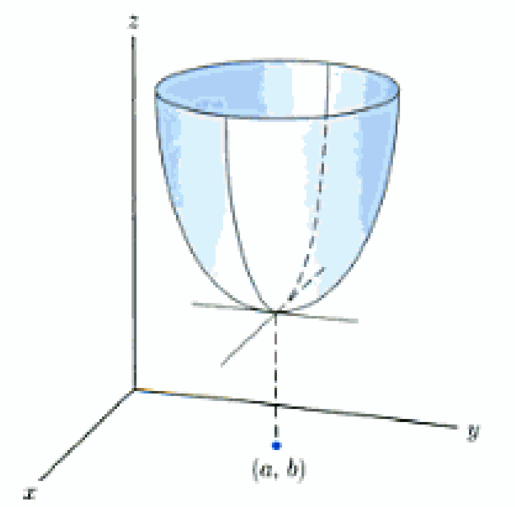


Assim, a reta tangente à curva $z = f(x,y)$ é horizontal em $x = a$, portanto, seu coeficiente angular é zero, ou seja,

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(a,b) = 0$$

Pontos Extremos

Da mesma forma, quando x é mantido constante a a, $f(x, y)$ é uma função de y com um mínimo em $y = b$.



Assim, sua derivada em relação a y é zero em $y = b$, isto é,

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y}(a, b) = 0$$

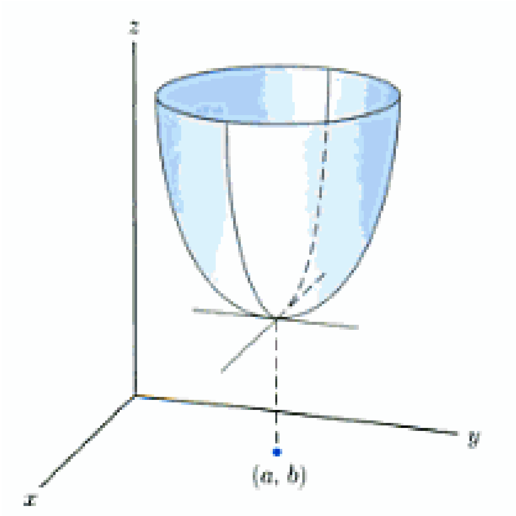
Considerações similares aplicam-se quando $f(x, y)$ tem um máximo em $(x, y) = (a, b)$.

Pontos Extremos

Exemplo: O gráfico da função abaixo é dado a seguir:

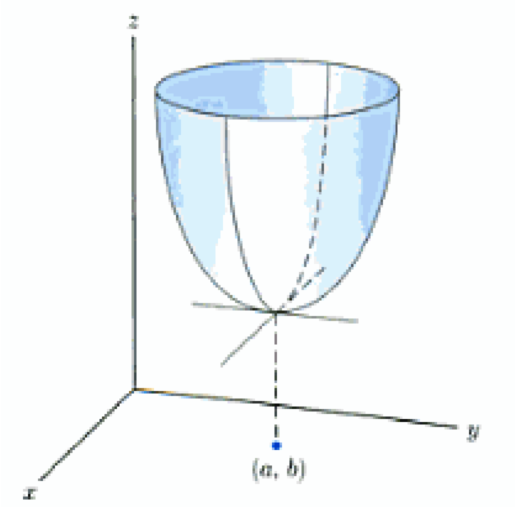
$$f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 30$$

Encontre o ponto (a,b) no qual $f(x,y)$ atinge o seu valor mínimo.



Pontos Extremos

Devemos encontrar os valores de x e y para os quais ambas as derivadas parciais são zero.



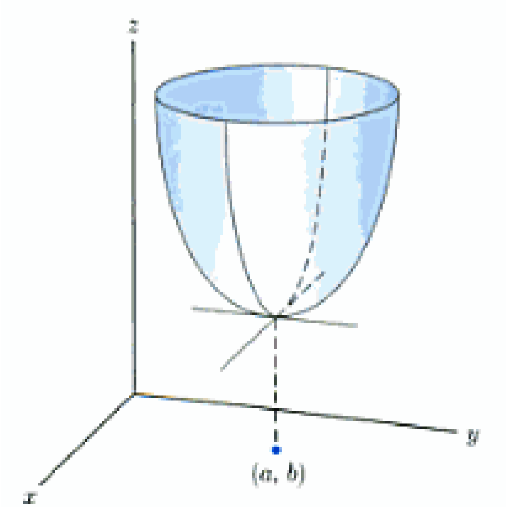
As derivadas parciais são:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 6x - 4y + 8$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = -4x + 6y - 17$$

Pontos Extremos

Determinando os valores de $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0$ e de $\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ obtemos:



$$6x - 4y + 8 = 0 \text{ ou } y = \frac{6x+8}{4}$$

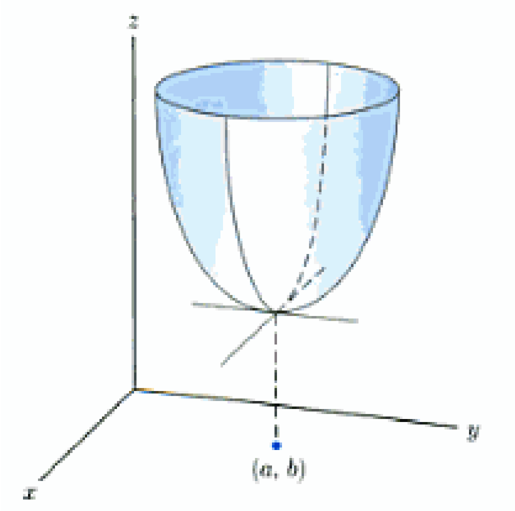
$$-4x + 6y - 17 = 0 \text{ ou } y = \frac{4x+17}{6}$$

Igualando as duas expressões obtemos:

$$\frac{6x+8}{4} = \frac{4x+17}{6} \quad \rightarrow \quad x = 1 \; e \; y = \frac{7}{2}$$

Pontos Extremos

Se $f(x, y)$ tem um mínimo, ele deve ocorrer quando



$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0 \;\; e \;\; \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$$

Assim, $f(x, y)$ tem um mínimo no ponto

$$(x, y) = \left(1, \frac{7}{2}\right)$$

Pontos Extremos

Ao considerar uma função de duas variáveis, encontramos os pontos (x, y) para os quais $f(x, y)$ pode ter um ponto de máximo ou de mínimo, igualando $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0\ \ e\ \ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ e resolvendo o sistema de equações obtemos x e y.

Entretanto, se nenhuma outra informação adicional a respeito de $f(x, y)$ for fornecida, pode ser difícil determinar se os valores obtidos para as variáveis correspondem a um ponto de máximo ou de mínimo.

Pontos Extremos

No caso de uma função de uma variável, estudamos concavidade e deduzimos o teste da segunda derivada.

Existe um análogo ao teste da derivada segunda para funções de duas variáveis. Enunciamos este teste a seguir:

Pontos Extremos

Teste da Derivada Segunda para Funções de Duas Variáveis:

Suponha que $f(x,y)$ seja uma função e (a,b) seja um ponto no qual

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x}(a,b) = 0 \quad e \quad \frac{\vartheta f}{\vartheta y}(a,b) = 0$$

E seja,

$$D(x,y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} \cdot \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} .\right)^2$$

Pontos Extremos

$$D(x,y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} \cdot \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} .\right)^2$$

1. Se $D(a,b) > 0$ e $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) > 0$, então $f(x,y)$ tem um mínimo relativo em (a,b).

2. Se $D(a,b) > 0$ e $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) < 0$, então $f(x,y)$ tem um máximo relativo em (a,b).

3. Se $D(a,b) < 0$, então $f(x,y)$ não tem um máximo ou mínimo relativo em (a,b).

4. Se $D(a,b) = 0$, então nenhuma conclusão pode ser obtida por este teste.

Pontos Extremos

Exemplo: Considere a função

$$f(x, y) = x^3 - y^2 - 12x + 6y + 5$$

Encontre todos os pontos onde máximos ou mínimos ocorrem. Utilize o teste da derivada segunda para determinar a natureza de cada ponto.

Pontos Extremos

Devemos encontrar os valores de x e y para os quais ambas as derivadas parciais são zero.

As derivadas parciais são

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 3x^2 - 12$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = -2y + 6$$

Pontos Extremos

Determinando os valores de $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0\ e\ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ obtemos:

$$3x^2 - 12 = 0 \ \rightarrow \ x = \pm 2$$

$$e$$

$$-2y + 6 = 0 \ \rightarrow y = 3$$

Assim, $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0\ e\ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ quando $(x, y) = (2{,}3)$ e quando $(x, y) = (-2{,}3)$

Pontos Extremos

Para aplicar o teste da segunda derivada, calculamos:

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = 6x \quad / \quad \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = -2 \quad / \quad \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} = 0$$

Então:

$$D(x,y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} . \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} . \right)^2 = 6x.(-2) - (0)^2 = -12x$$

Pontos Extremos

Para o ponto $(2,3)$ teremos $D(2,3) = -12.2 = -24$, assim $f(x,y)$ não tem um máximo ou mínimo relativo em $(2,3)$.

No entanto, para o ponto $(-2,3) = 12.(-2) = 24$, logo, $f(x,y)$ tem um ponto de máximo ou um ponto de mínimo. Para determinar qual deles, calculamos:

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(-2,3) = 6.(-2) = -12 < 0$$

Pelo caso 2 do teste da derivada segunda, a função $f(x,y)$ tem um ponto de máximo em $(-2,3)$.

Pontos Extremos

Exemplo: Considere a função

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - y - xy$$

Encontre todos os pontos onde máximos ou mínimos ocorrem. Utilize o teste da derivada segunda para determinar a natureza de cada ponto.

Pontos Extremos

As derivadas parciais de primeira ordem são:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = f_x(x, y) = 2x - 4 - y$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = f_y(x, y) = 2y - 1 - x$$

UNIVALI

Pontos Extremos

Fazendo $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 0 \ e \ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 0$ obtemos:

$$2x - 4 - y = 0 \ \rightarrow y = 2x - 4$$

$$2y - 1 - x = 0 \ \rightarrow y = \frac{1 + x}{2}$$

$$2x - 4 = \frac{1 + x}{2}$$

$$x = 3 \ e \ y = 2$$

Pontos Extremos

Determinemos agora as derivadas de segunda ordem de $f(x, y)$:

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = f_{xx}(x, y) = 2$$

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = f_{yy}(x, y) = 2$$

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x.\vartheta y} = f_{xy}(x, y) = -1$$

Pontos Extremos

Logo,

$$D(x,y) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} \cdot \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} - \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x . \vartheta y} .\right)^2 = 2.2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $D(a,b) > 0$, $f(x,y)$ tem um mínimo ou um máximo relativo em (a,b)=(3,2).

Para determinar qual deles, precisamos calcular $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) = f_{xx}(3,2)$

Pontos Extremos

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}(a,b) = 2 > 0$$

Pelo caso 1 do teste da derivada segunda, a função $f(x,y)$ tem um ponto de mínimo$(3,2)$.

Exercícios: Determine os pontos extremos de cada função:

a) $f(x,y) = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 1$

b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

c) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

d) $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$

e) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + x - 8y$

f) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 32y + 4$

g) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

Pontos Extremos

Respostas:

a) Ponto de Máximo: $f(-2,1) = 4$;

b) Ponto de Mínimo: $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

c) Ponto de Mínimo: $f(0,0) = 0$;

d) Ponto de Mínimo: $f(1,-1) = -1$; Ponto de Sela: $f(0,0)$, não tem um máximo ou mínimo relativo;

e) Ponto de Sela: $f(3,-2)$, não tem um máximo ou mínimo relativo;

f) Ponto de Mínimo: $f(2,-4) = -\frac{266}{3}$; Ponto de Máximo: $f(-3,4) = \frac{617}{6}$; Pontos de Sela: $f(2,4), f(-3,-4)$, não tem um máximo ou mínimo relativo;

g) Ponto de Mínimo: $f(4,-8) = -64$; Ponto de Máximo: $f(-1,2) = -\frac{3}{2}$; Ponto de Sela: $f(0,0)$, não tem um máximo ou mínimo relativo;

Pontos Extremos

Revisão: Nos exercícios abaixo, para cada função dada, calcule:

a) $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$ b) $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}$ c) $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}$ d) $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}$ e) $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y}$ f) $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x}$

1. $f(x,y) = 5x^2 + 4xy^3 + 2y$
2. $f(x,y) = -x^3 + x^3y^5 + 2yx$
3. $f(x,y) = 3x^2 - 3xy^3 + 2y + 2x + 6$
4. $f(x,y) = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2y^3 + x$
5. $f(x,y) = 5x^2 - 6xy^3 + 2y + 123$
6. $f(x,y) = sen(5x^2) + 4xy^3 + y - x^3$
7. $f(x,y) = e^{3x+2y} - 5x^2 - 7xy + 2y^3 + 12$
8. $f(x,y) = \cos(xy) - sen(xy) + 10$

Pontos Extremos

Exercícios: Encontre e classifique os pontos críticos das funções a seguir:

a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

c) $f(x,y) = (1 + xy)(x + y)$

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

e) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$