UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

# Cálculo II

**Denise Prado Kronbauer**

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

# Integrais Impróprias

Na definição de integral definida, consideramos a função $f$ contínua num intervalo fechado e limitado.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

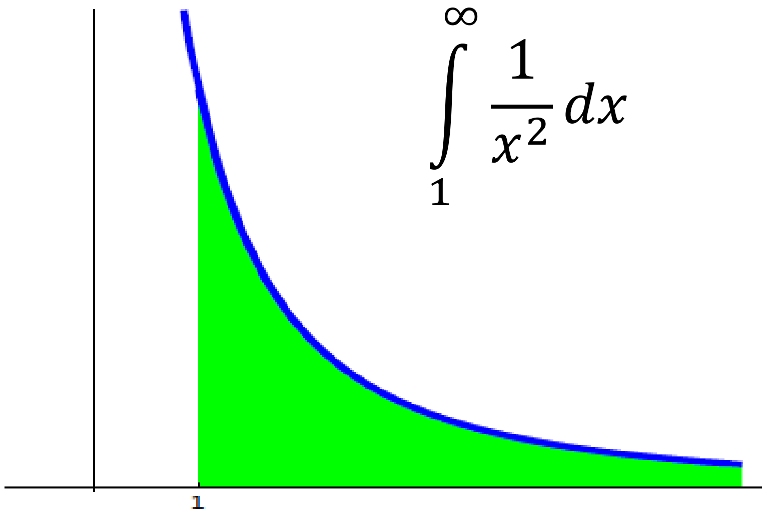
Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

**Caso 1:** Um ou ambos os limites de integração são infinitos;

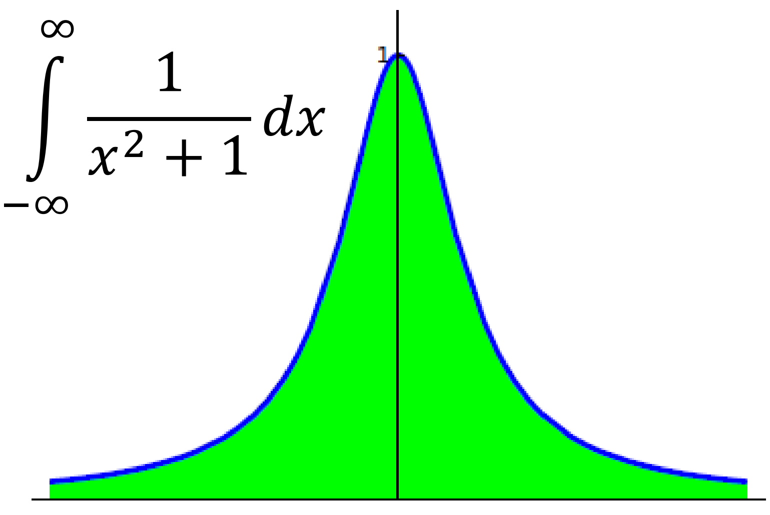
**Caso 2:** $f$ possui uma descontinuidade infinita no intervalo $[a, b]$.

# Integrais Impróprias

As integrais que possuem uma dessas características são chamadas **integrais impróprias**. Por exemplo, as integrais:




$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad e \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$




são impróprias porque um ou ambos os limites de integração são infinitos.

# Integrais Impróprias

## Caso 1: Cálculo de uma integral imprópria

### Integrais sobre intervalos infinitos

- Se $f$ for contínua no intervalo $[a, \infty)$, então

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $(-\infty, b]$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

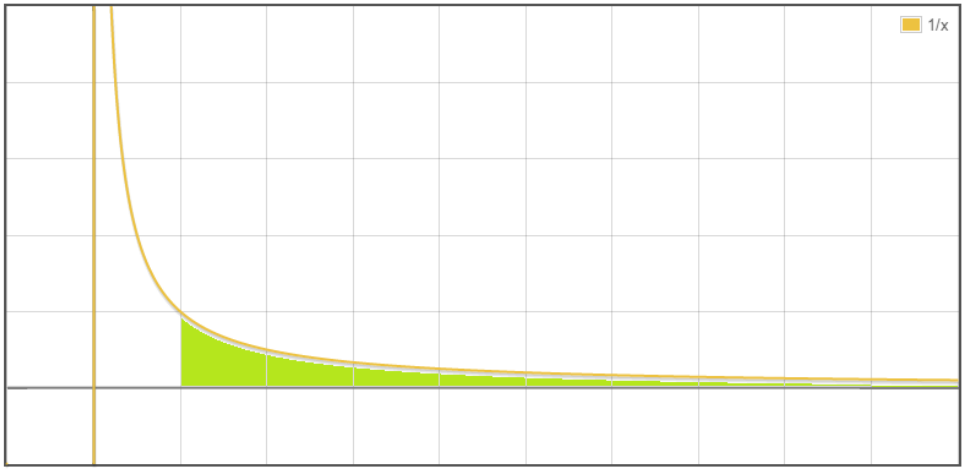
Nos dois primeiros casos, se o limite existir, então a integral imprópria será **convergente**; do contrário, ela será **divergente**.

No terceiro caso, a integral à esquerda será divergente se uma das integrais à direita for divergente.

# Integrais Impróprias

## Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$




$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1)$$

$$= \infty$$

Como o limite é infinito, a integral imprópria é divergente.

## Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} dx$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \right]_a^0$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-2a}} \right]_a^0 = 1 - 0 = 1$$

Assim, a integral imprópria converge para 1.

## Caso 2: Cálculo de uma integral imprópria

### Integrais cujos integrandos têm descontinuidades infinitas

- Se $f$ for contínua no intervalo $[a, b)$ e tender a infinito em $b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $(a, b]$ e tender a infinito em $a$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

- Se $f$ for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto para algum $c$ em $(a, b)$ no qual $f$ tende a infinito, então

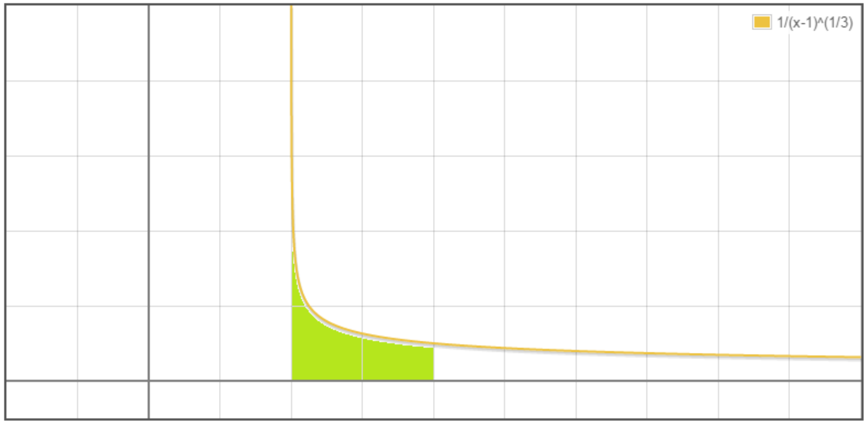
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Nos dois primeiros casos, se o limite existir, então a integral imprópria será **convergente**; do contrário, ela será **divergente**.

No terceiro caso, a integral à esquerda será divergente se uma das integrais impróprias à direita for divergente.

# Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$




$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_c^2$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}(c-1)^{2/3}\right] = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

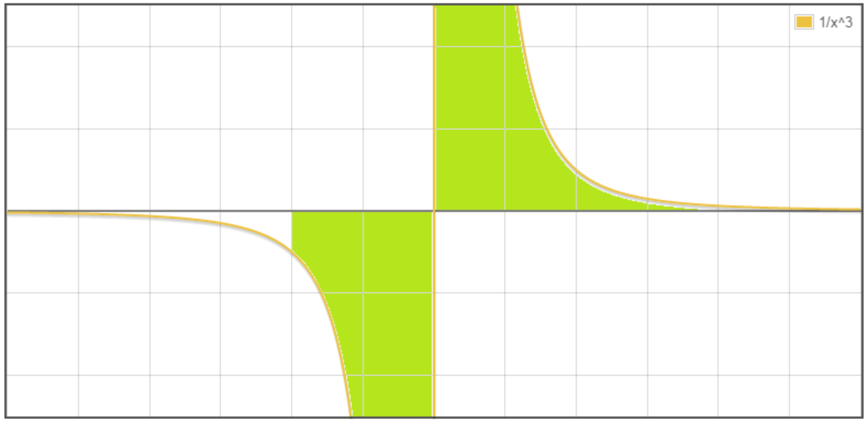
Assim, a integral converge para $3/2$.

## Exemplo:

Determine a convergência ou divergência de: $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$

Esta integral é imprópria, pois o integrando possui uma descontinuidade infinita no valor $x = 0$. Assim, escrevemos:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^3}\,dx$$




Aplicando a definição de integral imprópria, é possível verificar que cada uma dessas integrais é divergente. Portanto, a integral imprópria original também diverge.

# Integrais Impróprias

**Exercícios:** Determinar se a integral imprópria é divergente ou convergente:

1) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

2) $\int_{0}^{\infty} e^{x/3}\,dx$

3) $\int_{5}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$

4) $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx$

5) $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

6) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-3x^2}\,dx$

7) $\int_{0}^{1} \frac{1}{1-x}\,dx$

8) $\int_{0}^{9} \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx$

9) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

10) $\int_{1}^{3} \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\,dx$

11) $\int_{3}^{4} \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

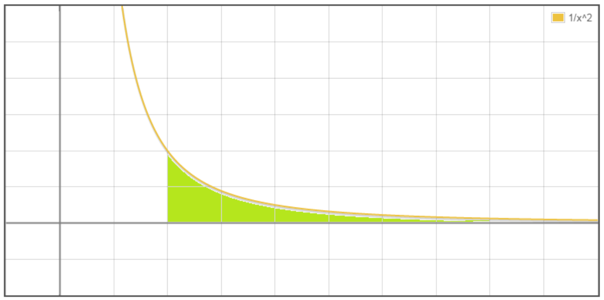
# Integrais Impróprias

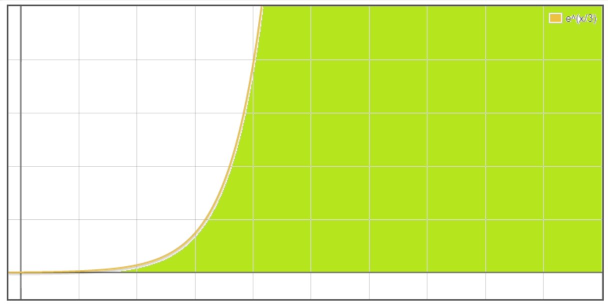
## Respostas:

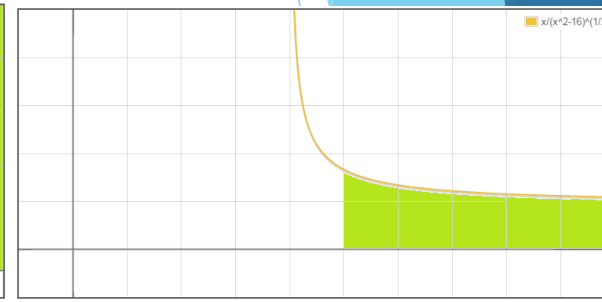
1. Integral Converge para $x = 1$
2. Integral Diverge
3. Integral Diverge
4. Integral Diverge
5. Integral Diverge
6. Integral Converge para $x = 0$
7. Integral Diverge
8. Integral Converge para $x = 6$
9. Integral Diverge
10. Integral Diverge
11. Integral Converge para $x = \sqrt{7}$

# Integrais Impróprias

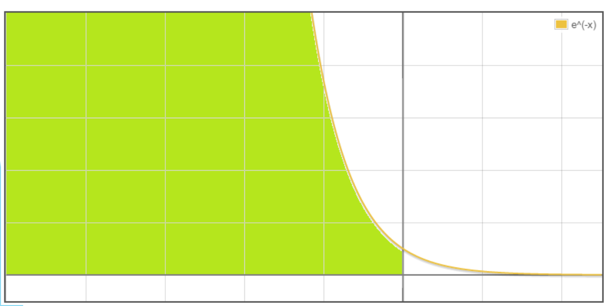
| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|

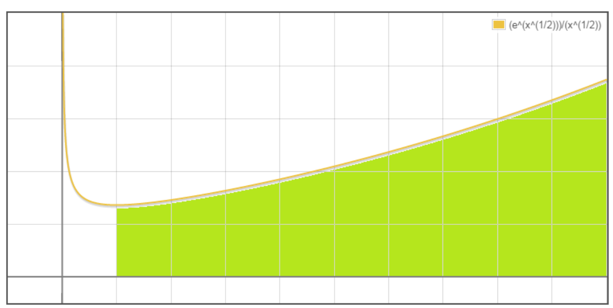


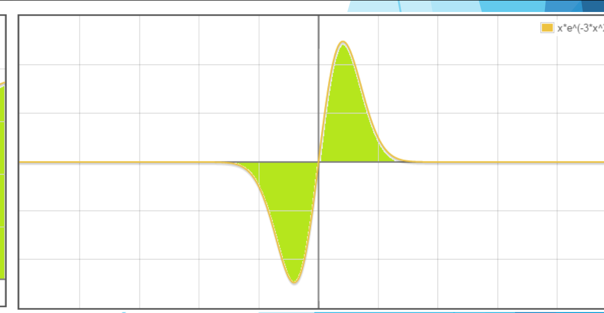




| 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|

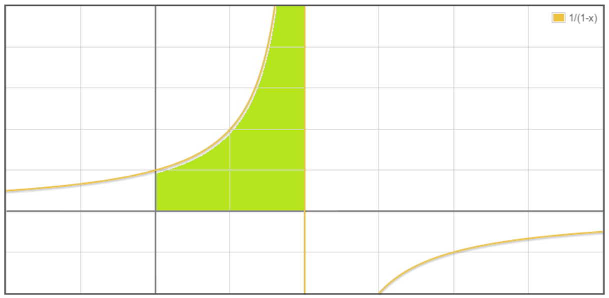


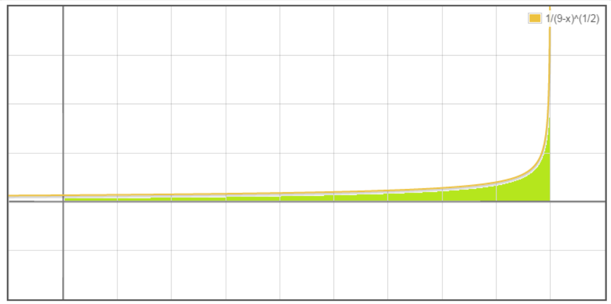



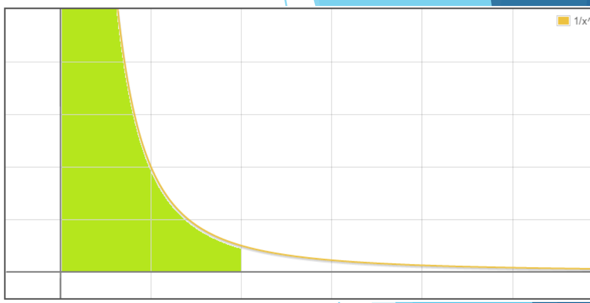



# Integrais Impróprias

| 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|




| 10 | 11 |
|---|---|