UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Integrais Múltiplas

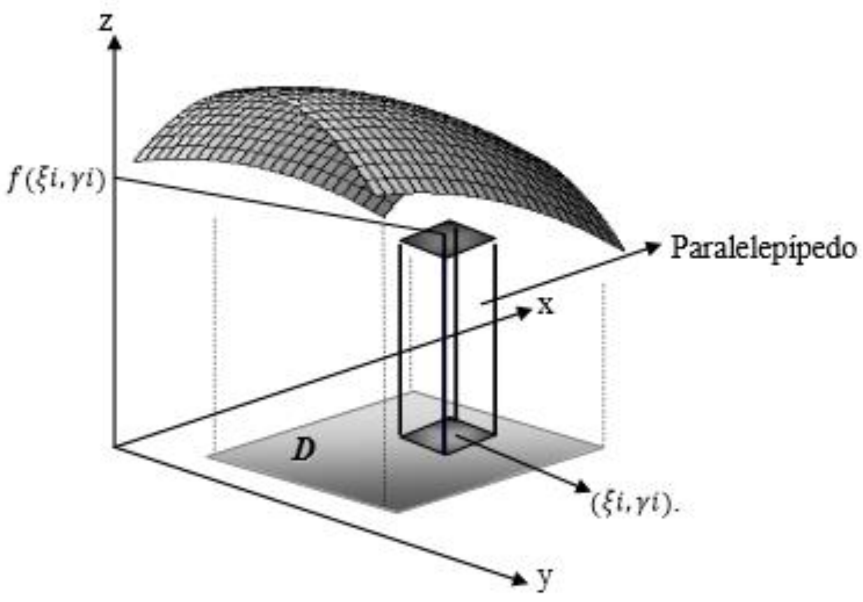
Além da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de uma função f de uma variável, podemos também considerar integrais de funções de diversas variáveis, chamadas ***integrais duplas, integrais tríplices, integrais de superfície*** e ***integrais curvilíneas.*** Cada integral é definida de maneira análoga, a principal diferença está no domínio do integrando.

Integrais Duplas

Integral dupla é uma extensão natural do conceito de integral definida para as funções de duas variáveis. Essa extensão é obtida através da expansão da soma Riemann de uma variável real, para duas variáveis reais.

São utilizadas, por exemplo, em situações envolvendo cálculo de áreas e volumes, massa e carga, ou ainda momento de inércia e centro de massa.

No conceito de integral simples temos que a integral é o limite da soma de Riemann, onde somamos as áreas dos retângulos no conjunto fechado R



. Já no conceito de integral dupla temos que a integral também é o limite da soma de Riemann, mas, no entanto, estamos trabalhando agora com duas variáveis reais, logo a integral dupla é a soma dos volumes dos paralelepípedos numa região fechada do R².

Cálculo de Integrais Parciais

No conteúdo anterior aprendemos como derivar funções com mais de uma variáveis, derivando-as em relação a uma variável por vez, enquanto as outras são mantidas fixas.

Portanto, não deve ser surpreendente que seja possível ***integrar funções de duas ou mais variáveis*** utilizando um procedimento semelhante.

Cálculo de Integrais Parciais

Para calcular uma integral definida de uma função de duas ou mais variáveis, é possível aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a uma das variáveis, mantendo as demais fixas.

Observe o exemplo:

Exemplo: Determine a integral parcial:

$$\int_{1}^{2y} 2xy\,dx$$

x é a variável de integração e ***y*** é fixo

$$= x^2y\Big]_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y$$

Limites de integração

$$\boxed{= 4y^3 - y}$$

O resultado é uma função de ***y*.**

Exemplos: Determine as integrais parciais:

1. $$\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy = 3x^2 - 2x - 1$$

2. $$\int_y^{5y} \sqrt{x - y}\, dx = \frac{16y}{3}\sqrt{y}$$

Exercícios: Determine as integrais parciais:

1. $\int_{x}^{x^2} \frac{y}{x}\, dy$
2. $\int_{1}^{2y} \frac{y}{x}\, dx$
3. $\int_{0}^{e^y} y\, dx$
4. $\int_{0}^{x} (2x - y)\, dy$
5. $\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y\, dy$
6. $\int_{0}^{5} 12x^2 y^3\, dx$
7. $\int_{0}^{1} (y + xe^y)\, dy$

Integrais Duplas

Respostas:

1. $\frac{x(2x^2-3)}{6}$
2. $y\ln|2y|$
3. ye^y
4. $\frac{3x^2}{2}$
5. $x^2\left(2-\frac{x^2}{2}\right)$
6. $500y^3$
7. $\frac{1}{2}+xe-x$

Integrais Duplas

Nos exemplos anteriores, o resultado obtido através da integração por partes resulta numa função de x ou y e ela mesma pode ser integrada.

Uma "***integral de uma integral***" é chamada integral dupla. Como uma função de duas variáveis, há dois tipos de integrais duplas:

i. $$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

ii. $$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

A diferença entre os dois tipos de integrais duplas é a ordem na qual a integração deve ser realizada, $dy\,dx$ ou $dx\,dy$.

A ordem de integração é muito importante, pois através de uma boa escolha podemos facilitar, em muito, os cálculos para encontrar a solução de uma integral dupla, dependendo da escolha feita, pode haver casos de não encontrarmos uma solução. "

Deve-se sempre iniciar a integração de 'dentro' para 'fora'.

Integrais Duplas

Exemplos: Calcule a integral dupla $\int_1^2 \int_0^x (2xy+3)\,dy\,dx =$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^x (2xy+3)\,dy\right] dx = \int_1^2 [2xy^2+3y]_0^x\,dx = \int_1^2 (x^3+3x)\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\Big]_1^2 = \left(\frac{(2)^4}{4} + \frac{3(2)^2}{2}\right) - \left(\frac{(1)^4}{4} + \frac{3(1)^2}{2}\right)$$

$$= 4 + 6 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{33}{4}}$$

Exemplos: Calcule as integrais duplas:

1. $$\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\, dx\, dy = 10$$

2. $$\int_0^4 \int_0^{x^2} (x + 2)\, dy\, dx = \frac{320}{3}$$

Integrais Duplas

Exercícios: Calcule as integrais duplas:

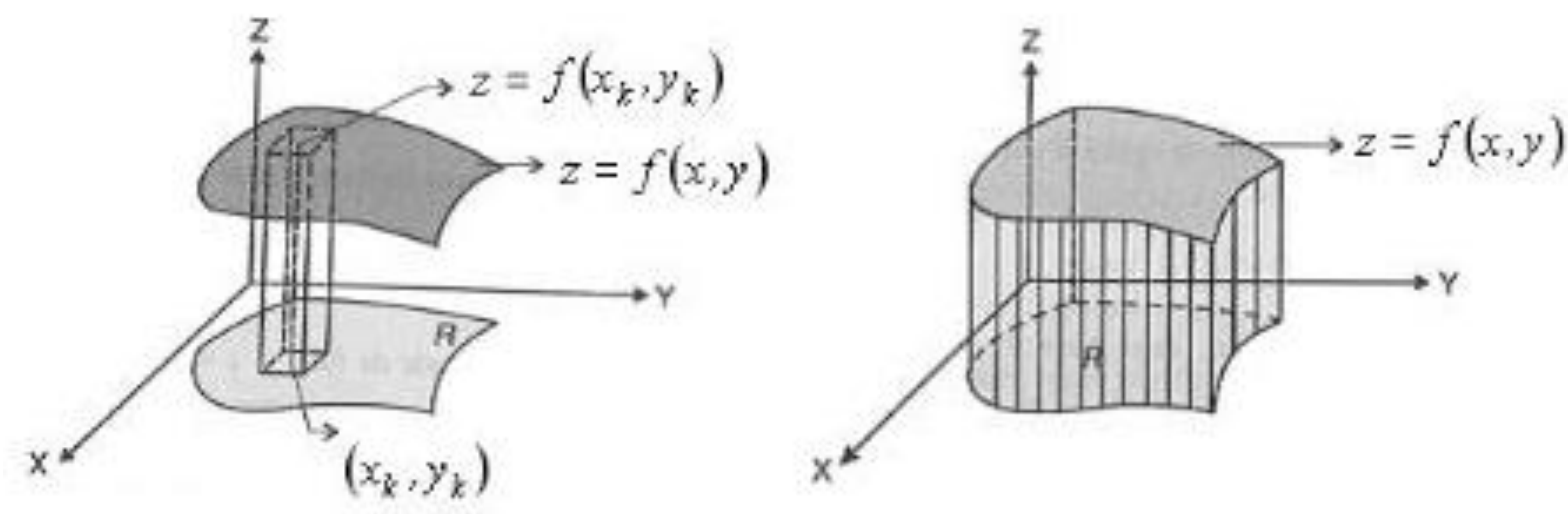
1. $\int_0^1 \int_0^{2y} xy\, dx\, dy$
2. $\int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$
3. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + \frac{y}{2}\right) dy\, dx$
4. $\int_0^{\pi} \int_0^{x} sen\, y\, dy\, dx$
5. $\int_0^1 \int_1^2 x.\frac{e^x}{y} dy\, dx$
6. $\int_1^2 \int_0^{x} (5x^2y - 2)\, dy\, dx$
7. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$
8. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x.sen\, y\, dy\, dx$
9. $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dx\, dy$
10. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)\, dy\, dx$

Respostas:

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1006}{105}$
3. $\frac{8}{3}$
4. π
5. $\ln|2|$
6. $\frac{25}{2}$
7. $\frac{21}{2}\ln|2|$
8. 2
9. $\frac{4}{9}e^{3/2} - \frac{32}{45}$
10. $-\frac{5}{6}$

Integrais Duplas

Se a função dada é positiva, podemos interpretar a integral dupla como o volume V do sólido que está acima de uma área R no plano xy e abaixo da superfície $z = f(x, y)$.



Integrais Duplas

A região R é definida da seguinte maneira:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Então,

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy$$

Exemplo: Calcular a integral dupla $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$

onde $R = \{(x, y) | 0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$

$$\int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy\, dx = -12$$

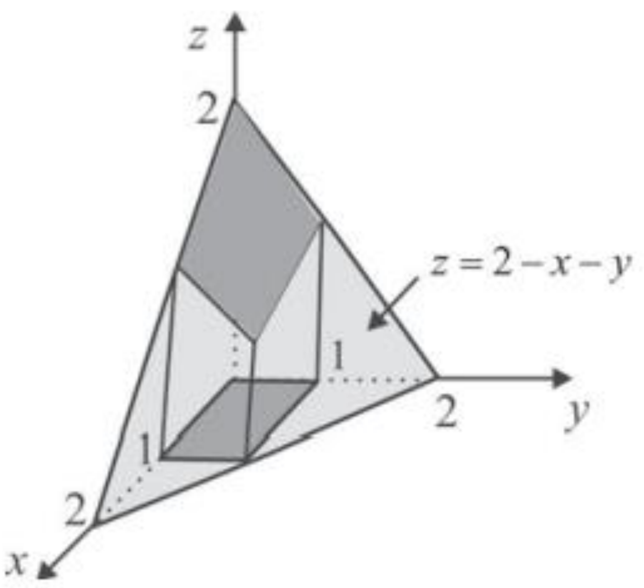
Integrais Duplas

Exemplo: Calcular a integral dupla $\iint_R (x\sqrt{y})\,dA$

onde $R = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x\sqrt{y})dy\,dx = \frac{2}{35}$$

Exercícios: Calcular o volume do sólido Ω acima da região $D = [0,1] \times [0,1]$ do plano xy e abaixo do plano $x + y + z = 2$:

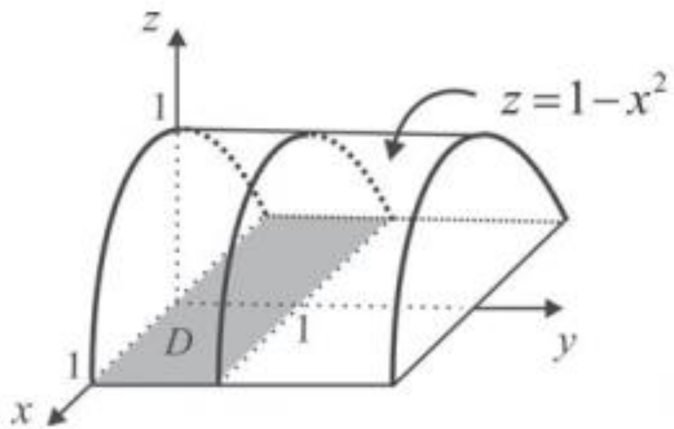


Volume abaixo do plano $x + y + z = 2$.

$$z = 2 - x - y$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (2 - x - y)\, dx\, dy = 1$$

Exercícios: Calcular o volume do sólido Ω acima do retângulo $D = [-1,1] \times [0,1]$ e abaixo do cilindro $z = 1 - x^2$:



Volume abaixo do cilindro $z = 1 - x^2$.

$$z = 1 - x^2$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(1 - x^2)\,dy\,dx = 4/3$$

Integrais Duplas

Exercícios: Calcular as integrais duplas na região R dada:

a) $\iint\limits_R 4xy^3\, dA; R = \{(x,y): -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$

b) $\iint\limits_R x\sqrt{1-x^2}\, dA; R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 2 \le y \le 3\}$

c) $\iint\limits_R xy\, dA; R$ compreendida entre $y = \frac{1}{2}x; y = \sqrt{x}, x = 2\ e\ x = 4$

Respostas:

a) 0

b) $\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{11}{6}$

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Integrais Triplas

Podemos definir as integrais triplas para uma função f de três variáveis x, y, z utilizando um processo análogo ao estudado para funções de duas variáveis.

Uma integral tripla é denotada da seguinte maneira:

$$\int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Calcula-se a integral começando pela integral mais interna e procedendo para fora. Assim, a primeira integração é com relação a x (com y e z fixos), a segunda é em relação a y (com z fixo) e a terceira é em relação a z.

Existem seis maneiras diferentes de montar a integral, e eles dependem da ordem dos diferenciais, sendo que a ordem da integração é irrelevante.

Integrais Triplas

Exemplo: Calcular a integral tripla $\int_3^4 \int_{-1}^1 \int_0^2 (xy^2 + yz^3)\, dz\, dx\, dy$

$$\int_3^4 \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 (xy^2 + yz^3) dz\right] dx\, dy \quad \rightarrow \quad \int_3^4 \int_{-1}^1 \left[xy^2 z + \frac{yz^4}{4}\right]_0^2 dx\, dy$$

$$\int_3^4 \left[\int_{-1}^1 (2xy^2 + 4y)\, dx\right] dy \quad \rightarrow \quad \int_3^4 [x^2y^2 + 4xy]_{-1}^1\, dy$$

$$\int_3^4 [(y^2 + 4y) - (y^2 - 4y)]\, dy$$

$$\int_3^4 8y\, dy = 4y^2|_3^4 = 4.(4^2) - 4.(3)^2 = 28$$

Integrais Triplas

Exemplos: Calcular as integrais triplas:

a) $$\int_0^3 \int_{-1}^0 \int_1^2 (x + 2y + 4z)\, dx\, dy\, dz = \frac{39}{2}$$

b) $$\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_1^3 (6x^2z + 5xy^2)\, dz\, dx\, dy = 77$$

c) $$\int_0^1 \int_{x+1}^{2x} \int_z^{x+z} x\, dy\, dz\, dx = -\frac{1}{12}$$

Integrais Triplas

Exemplos: Calcular as integrais triplas:

d) $$\int_{1}^{2}\int_{0}^{z^2}\int_{x+z}^{x-z} z\,dy\,dx\,dz = -\frac{62}{5}$$

e) $$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^2}\int_{0}^{x+y} 2x^2y\,dz\,dy\,dx = \frac{513}{8}$$

Exemplos: Calcular as integrais triplas:

f) $\int\int\int xyz^2\,dx\,dy\,dz$;

onde R é formada pelos pontos tais que $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2; 1 \leq z \leq 3 = 26/3$

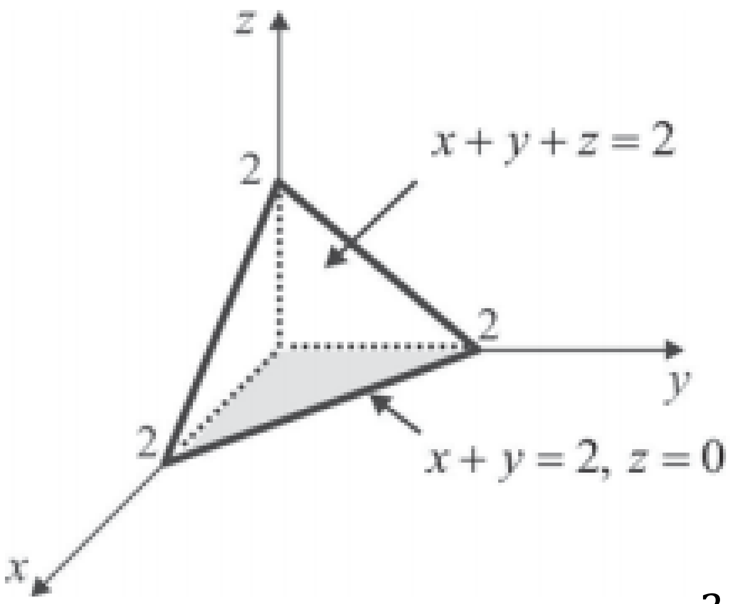
g) $\int\int\int (x^2 + 2yz)\,dx\,dy\,dz$;

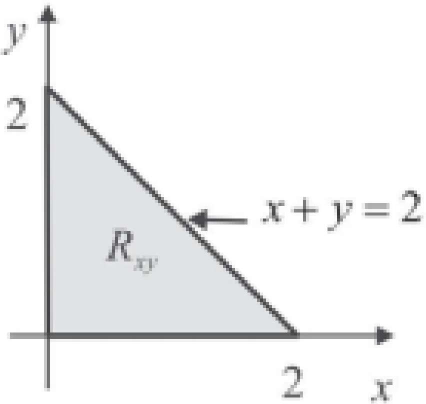
onde R é formada pelos pontos tais que $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq x + y = 46/15$

h) $\int\int\int (x^2 + y^2 + z^2 + xyz)\,dx\,dy\,dz$;

onde $R = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] = 9/8$

Exercícios: Calcular a integral tripla $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dV$ sobre a região delimitada pelos planos $x + y + z = 2, x = 0, y = 0$ e $z = 0$:





$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx = \frac{8}{5}$$