UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Definição:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$.

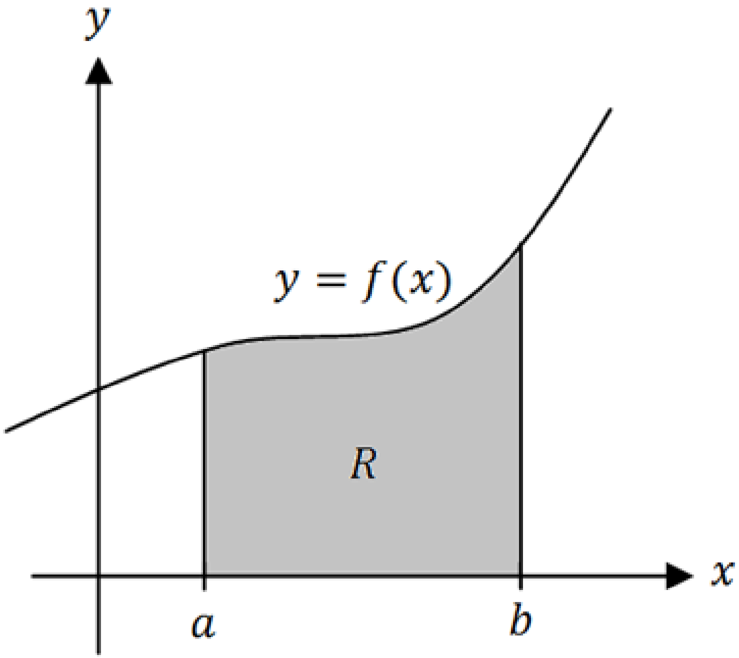
A área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é denotado por

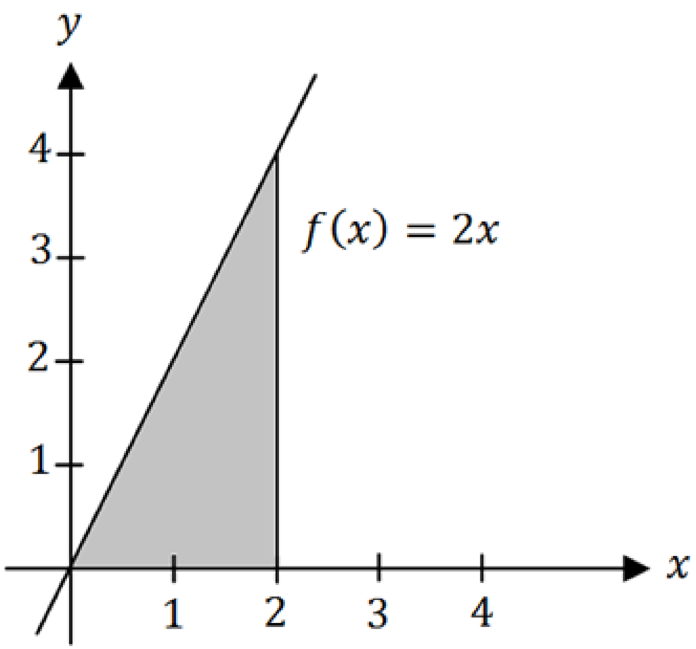
$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

A integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada de **integral definida** de a até b, em que a é o **limite inferior de integração** e b é o **limite superior de integração**.

Integrais Definidas

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

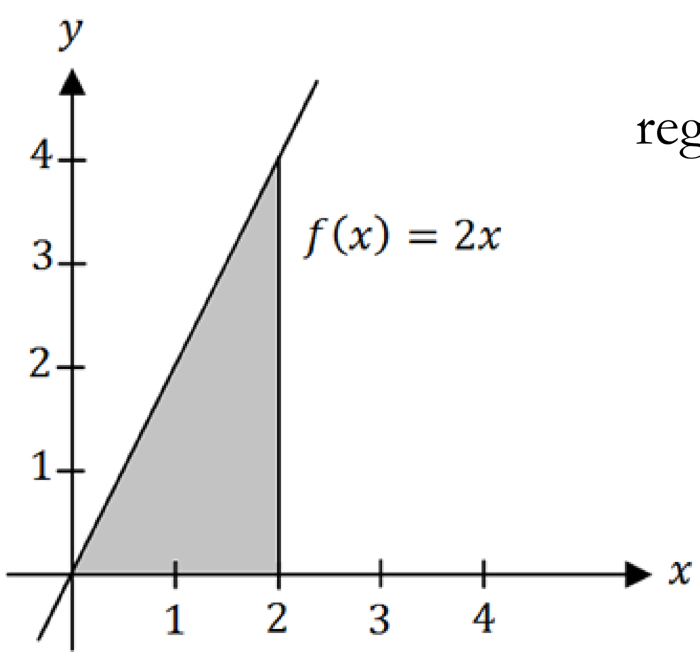




Integrais Definidas

Exemplo:

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 2x\,dx.$$



Esta integral representa a área da região delimitada pelo gráfico de $f(x) = 2x$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$.

$$\acute{A}rea = \int_0^2 2x\,dx = \left(\frac{2x^2}{2}\right)_0^2$$

$$= (x^2)_0^2 = (2^2) - (0^2) = 4$$

Teorema Fundamenta do Cálculo

Se f é uma função não negativa e contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

em que F é qualquer função com $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$.

Propriedades:

1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad k \text{ uma constante}$

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b$

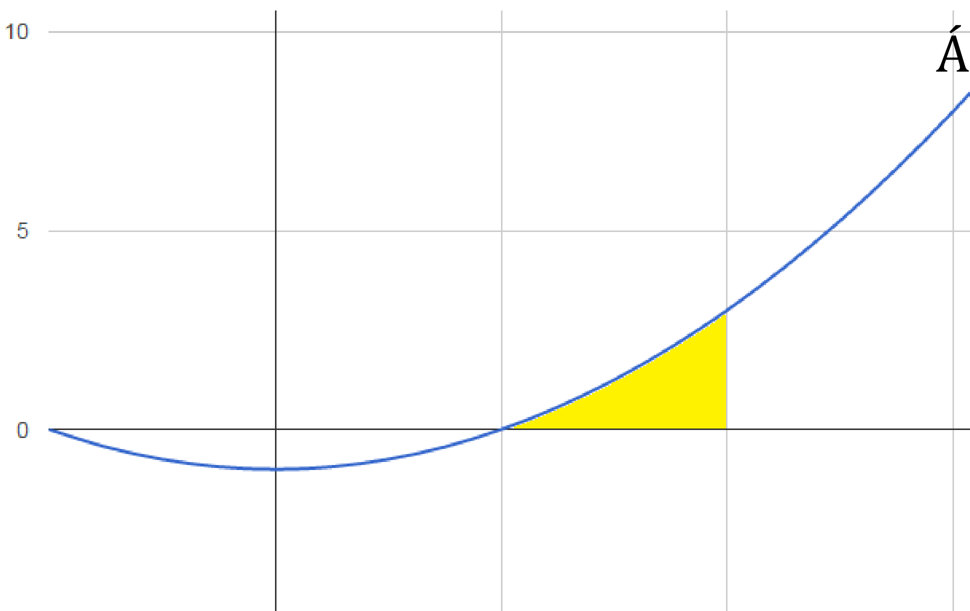
4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Exemplo:

Determinar a área da região delimitada pelo eixo x e pelo gráfico de

$$f(x) = x^2 - 1, \qquad 1 \leq x \leq 2$$



$$\acute{A}rea = \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$$

Então, a área da região é de $\frac{4}{3}$ unidades quadradas.

Integrais Definidas

Exemplo:

Calcular a integral definida: $\int_0^1 (4t+1)^2\,dt$

$$\int_0^1 (4t+1)^2\,dt = \int_0^1 (16t^2+8t+1)\,dt$$

$$= \left(\frac{16t^3}{3}+\frac{8t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^1 = \left[\frac{16(1^3)}{3}+\frac{8(1^2)}{2}+1\right]-\left[\frac{16(0^3)}{3}+\frac{8(0^2)}{2}+0\right]$$

$$= \frac{16}{3}+4+1 = \frac{16+12+3}{3} = \boxed{\frac{31}{3}}$$

Integrais Definidas

Exercícios: Calcular as seguintes integrais definidas:

1) $\int_0^1 3x\,dx$

2) $\int_{-1}^0 (x-2)\,dx$

3) $\int_0^1 (2t+3)^3\,dt$

4) $\int_0^3 e^{2x}\,dx$

5) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

6) $\int_1^4 -3\sqrt{x}\,dx$

7) $\int_{-1}^1 (\sqrt[3]{t}-2)\,dt$

8) $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}}\,du$

9) $\int_{-1}^0 \left(s^{\frac{1}{3}} - s^{\frac{2}{3}}\right) ds$

10) $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3}\,dx$

11) $\int_0^4 \frac{x^{1/2}}{7x}\,dx$

12) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

13) $\int_1^3 \frac{e^{3/x}}{x^2}\,dx$

14) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

15) $\int_0^2 \frac{x}{1+4x^2}\,dx$

Respostas:

1) $3/2$

2) $-5/2$

3) 68

4) $\frac{e^6}{2} - \frac{1}{2}$

5) $\ln 2$

6) -14

7) -4

8) $2/3$

9) $-27/20$

10) $-1/18$

11) $4/7$

12) 2

13) $\frac{e^3}{3} - \frac{e}{3}$

14) 0

15) $\frac{\ln 17}{8}$

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Cálculo de Área

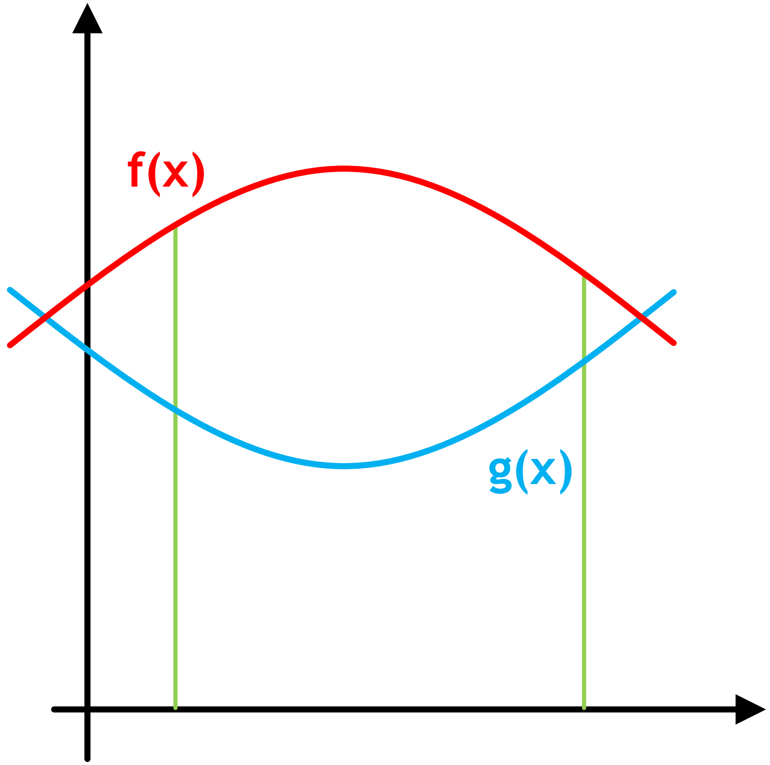
De acordo com a definição, a área da região limitada pelo gráfico de uma função f, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\boxed{Área = \int_{a}^{b} f(x)\, dx}$$

Esta integral é chamada de **integral definida**.

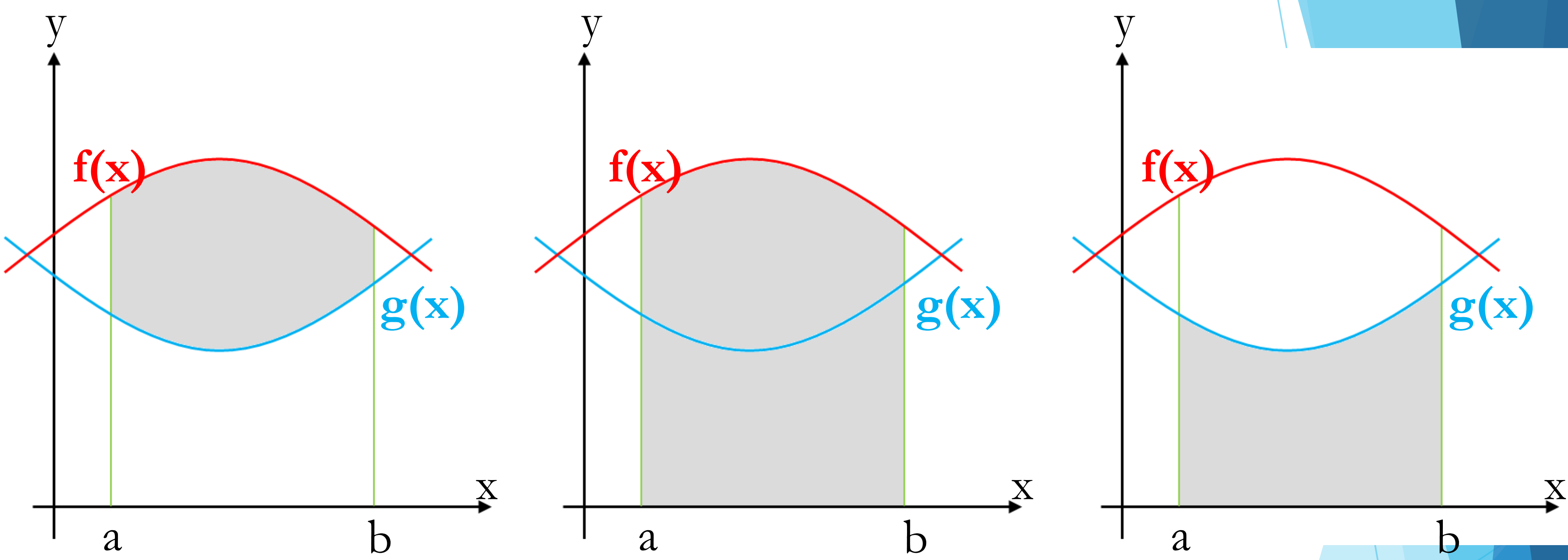
Área entre Gráficos

Vamos considerar a região limitada pelos gráficos de f, g, $x = a$ e $x = b$, conforme a figura.



Se os gráficos estiverem acima do eixo x, então é possível interpretar a área da região entre os gráficos como a área da região abaixo do gráfico de f menos a área da região abaixo do gráfico de g:

Área entre Gráficos



Área entre *f* e *g* = Área da região abaixo de *f* – Área da região abaixo de *g*

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

Área entre Gráficos

Definição:

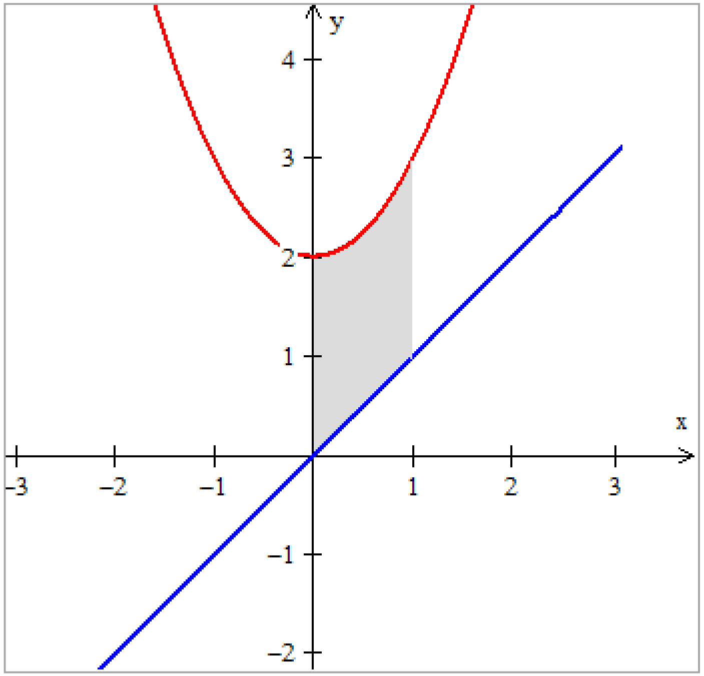
Se f e g são contínuos em $[a, b]$ e $g(x) \leq f(x)$ para todo x no intervalo, então a área da região limitada pelos gráficos de f, g, $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx}$$

Área entre Gráficos

Exemplo: Determine a área da região limitada pelos gráficos de

$$y = x^2 + 2 \text{ e } y = x \text{ para } 0 \leq x \leq 1.$$



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$A = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (x)]\, dx$$

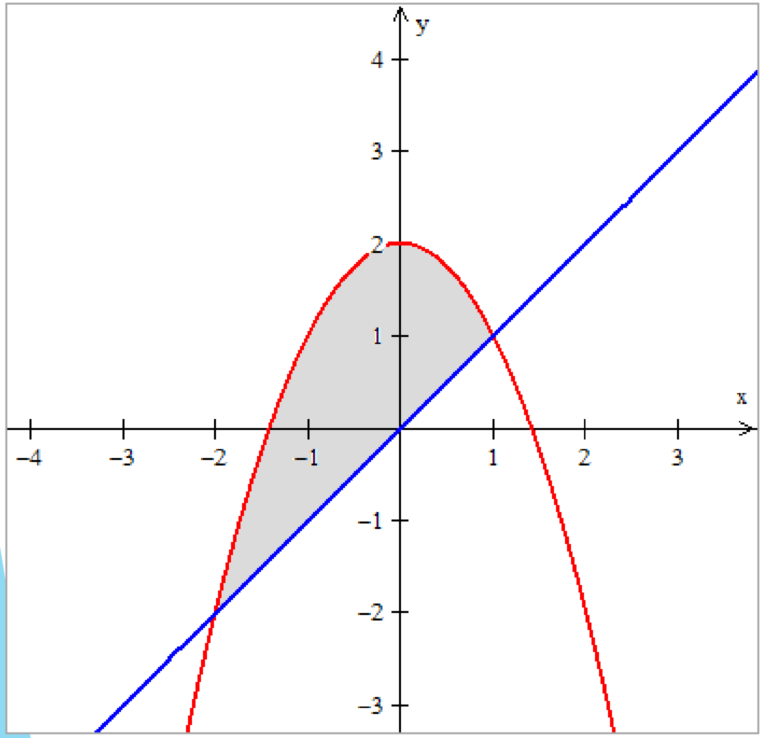
$$A = \int_0^1 (x^2 + 2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$

$$\boxed{A = \frac{11}{6}\, unidades\ quadradas}$$

Área entre Gráficos

Exemplo: Determine a área da região limitada pelos gráficos de

$$y = 2 - x^2 \text{ e } y = x.$$



Como o intervalo não é dado, precisamos inicialmente encontrar os pontos de interseção entre os gráficos:

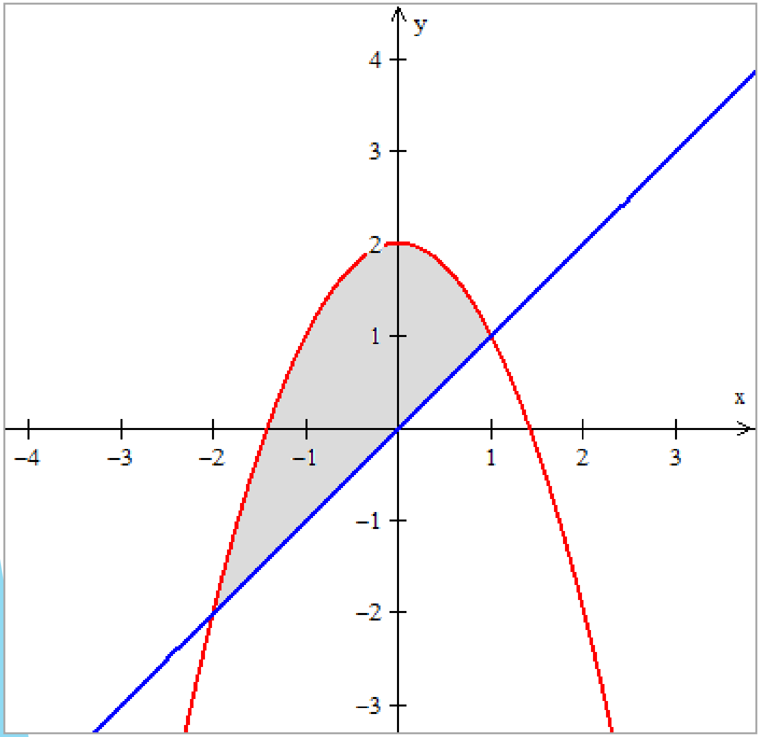
$$2 - x^2 = x \quad \rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = -2 \quad e \quad x = 1}$$

Área entre Gráficos

Exemplo: Determine a área da região limitada pelos gráficos de

$$y = 2 - x^2 \text{ e } y = x.$$



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - (x)]\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$\boxed{A = \frac{9}{2} unidades\ quadradas}$$

Área entre Gráficos

Exercícios: Determine a área da região limitada pelos gráficos:

a) $f(x) = x^2 - 6x$ e $g(x) = 0$

b) $y = x^2 - 3x - 4$ e pelo eixo x

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

d) $f(x) = 3(x^3 - x)$ e $g(x) = 0$

e) $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ e $g(x) = -x^2 + 2x$

Área entre Gráficos

Respostas:

a) 36 unidades quadradas

b) 125/6 unidades quadradas

c) 9 unidades quadradas

d) 3/2 unidades quadradas

e) 24 unidades quadradas

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

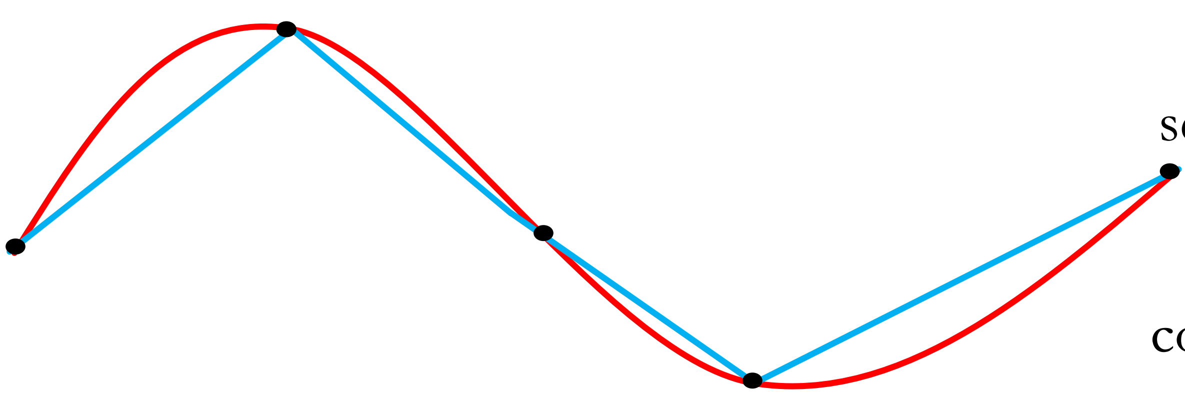
Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Comprimento de Arco

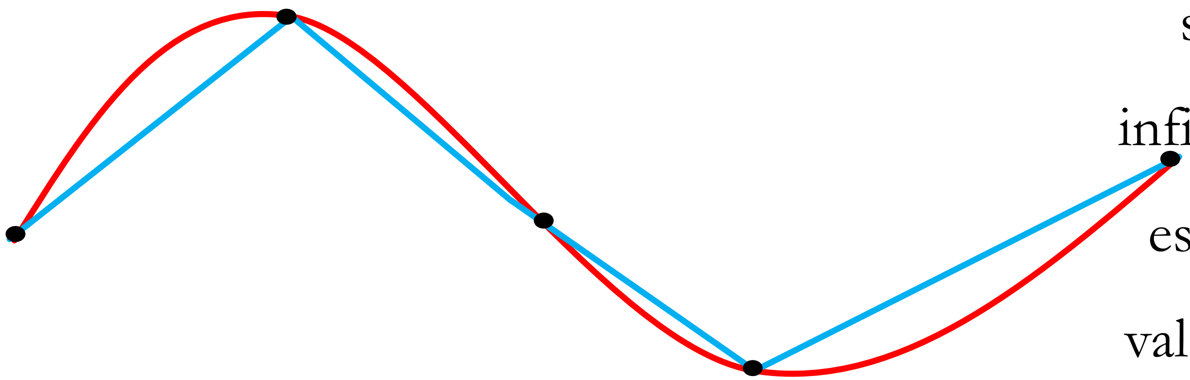
Ao escolher um número finito de pontos ao longo de uma curva e conectar cada um destes pontos com o próximo com uma linha reta, temos que a soma do comprimento de cada um destes segmentos é o comprimento de um ***caminho polinomial***.



Quanto menores os segmentos (mais pontos), mais próximo será o comprimento do caminho polinomial à curva dada.

Comprimento de Arco

A equação para o cálculo do comprimento de um arco deriva da fórmula da distância aproximada do comprimento do arco composto de muitos pequenos segmentos de reta.



Como o número de segmentos tende para o infinito (pelo uso da integral) esta aproximação tende ao valor exato do comprimento de arco.

Comprimento de Arco

Definição:

Se $y = f(x)$ for uma curva suave no intervalo $[a, b]$, então o comprimento de arco desta curva sobre $[a, b]$ é definido como:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

Comprimento de Arco

Exemplo: Determine o comprimento da curva

$$y = x^{3/2} \text{ de } (1,1) \text{ até } \left(2, 2\sqrt{2}\right)$$

Incialmente devemos calcular a derivada da função: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$$

Comprimento de Arco

Resolvendo a integral por substituição, temos:

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \quad \rightarrow \quad du = \frac{9}{4}dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{4}{9}\int_{1}^{2} u^{1/2}\,du \quad \rightarrow \quad = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}\times 2\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{4}\times 1\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(\frac{11}{2}\right)^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right] \approx 2{,}09$$

Comprimento de Arco

Exercícios: Determine o comprimento de arco do gráfico das equações seguintes compreendido no intervalo dado.:

$a)\;\; y = \frac{x}{2} + 1, \qquad para\; 0 \leq x \leq 3.$

$b)\;\; y = \sqrt{4x^3}, \qquad entre\; os\; pontos\; (0{,}0)\; e\; \left(2{,}4\sqrt{2}\right).$

$c)\;\; y = \frac{1}{3}x^{3/2}, \qquad para\; 0 \leq x \leq 5.$

Comprimento de Arco

Respostas:

a) $\frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}35$ unidades quadradas

b) $\frac{2}{27}\left(19\sqrt{19} - 1\right) \approx 6{,}06$ unidades quadradas

c) $\frac{19}{3} \approx 6{,}33$ unidades quadradas