5. Caminhos Mínimos (custo nas arestas/arcos)

→ Entrada: orientado ou não $G = (V, E, w)$ → custo $w : E \to \mathbb{R}$ → Positivo → Negativo

→ Encontrar um caminho mínimo:

Pg 41

um caminho $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ tal que o custo total $\sum_{i=2}^{k} w((v_{i-1}, v_i))$ seja mínimo.

$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$ = custo do caminho

→ δ: representa a distância mínima teórica entre dois vértices

→ D_v: distância encontrada por um algoritmo para chegar em "v". → estrutura ("vetor")

→ custo do caminho "p"

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \leadsto v\}, & \text{se há um caminho de } u \text{ a } v. \\ \infty, & \text{caso não haja caminho de "u" a "v".} \end{cases}$$

→ Variantes de problemas de caminho:

→ • fonte única: G, $s \leadsto v$, $s \leadsto u$ — $\forall v \in V$, (- Bellman-Ford, - Dijkstra)

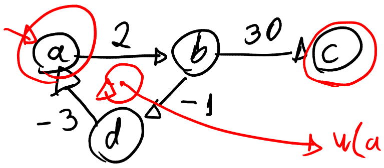
• Único destino: G, t — $\forall v \in V$ — G invertido — única

• Para um par: G, $s \leadsto t$

→ • Para todos os pares: G: descobre o caminho min p/ todo o par de vértices de G. Floyd-Warshall

---

→ Pesos Negativos: $a \xrightarrow{-1} b$ só não resolveremos ciclos com peso negativo



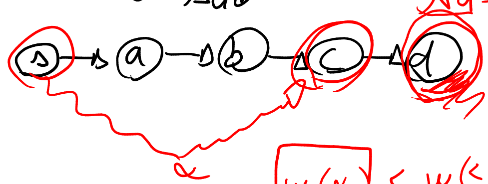
ciclo: $(a,b,c,a) = -2$

$w(a \leadsto c) = -\infty$

Pag 43

5.1.1. Subcaminhos de caminhos mínimos são.

Suponha um caminho mínimo



$\Delta d = c$

Então $\boxed{p' = \langle s, a, b, c \rangle}$, → não é mínimo

$p'' = \langle s, a, b \rangle$,

$p''' = \langle s, a \rangle$ são caminhos mínimos.

$\boxed{w(\alpha)} < w(\langle s,a,b,c \rangle)$

$w(\langle s,a,b,c,d \rangle)$ mínimo

$\Delta c = b$

$\Delta b = a$

$\Delta a = \Delta$

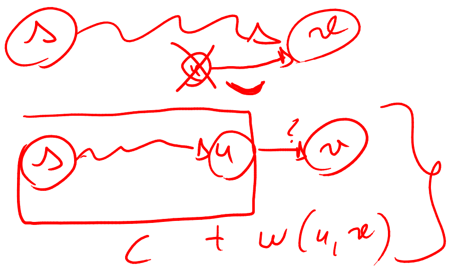
$\Delta s = \text{null}$

Estrutura linear de Δ: depende dessa propriedade.

5.1.2 Desigualdade Triangular:

$s \rightsquigarrow v$ existe $u \to v$

$\delta(s,v) \le \delta(s,u) + w((u,v))$



$\delta(s,v) = \delta(s,u) + w((u,v))$

5.1.3. Inicialização + Relax $D_v \ge \delta(s,v)$ $\forall v \in V$ Limite Superior

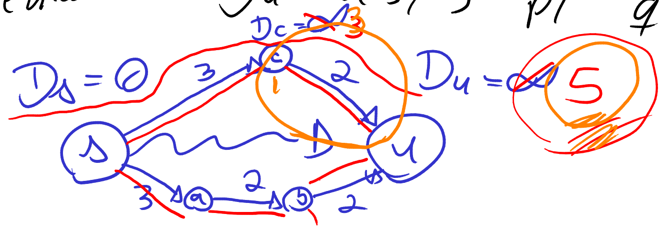
↳ executar várias vezes

5.1.4. Inexistência de caminhos: $D_v = \infty = \delta(s,v)$

assumindo q "v" não é atingido pela fonte s.

c/ inicialização e c/ sucessivas exec. do Relax. de caminhos

5.1.5. Convergência: Inicializado + uma sequência de Relax. ∀ todos arcos/arestas de G. Se $D_u = \delta(s,u)$ em qlq momento anterior, então $D_u = \delta(s,u)$ p/ qlq chamada posterior



$\delta(s,u) = 5$

$D_a = \cancel{\infty}$ 3 ; $D_b = \cancel{\infty}$ 5 +2 = 7

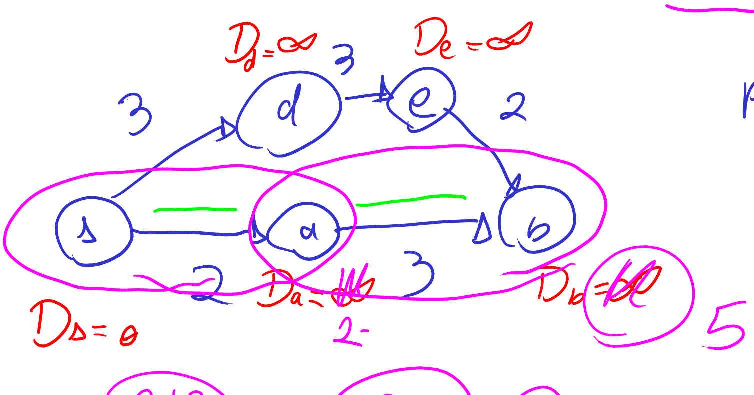
5.1.6: Rel. de Caminho: Inicializado

→ Considerando cam. mín. $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, $s = v_1$

→ Assume uma seq. de Relax que inclui o relaxamento na ordem dos arcos/arestas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$.

→ $D_k = \delta(s,v)$

~~a,b~~
~~e,b~~
~~s,d~~
a,b



$p = \langle s, a, b \rangle$
$w(p) = 5$

$(0+2) = 2$ $(2+3) = 5$

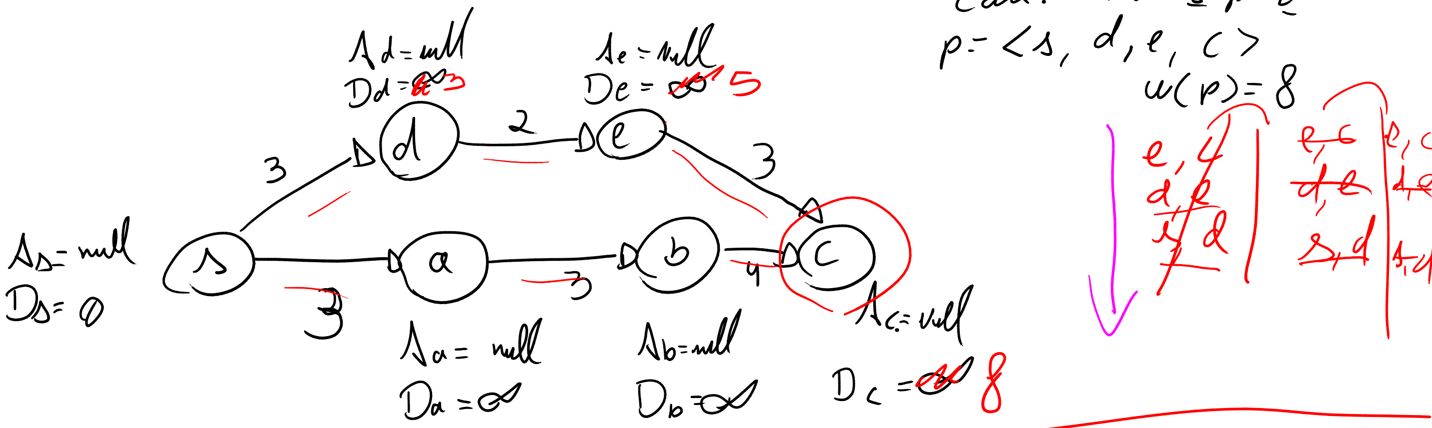
5.2. Bellman-Ford

- Caminho mínimo de fonte única: G + vértice de origem
- $G = (V, E, w)$ → custo; E → arestas/arcos; $w: E \to \mathbb{R}$
- Aceita pesos negativos
- Retorna falso se encontrar um ciclo negativo.

Cam. min "s" p/ "c"

$p = \langle s, d, e, c \rangle$

$w(p) = 8$

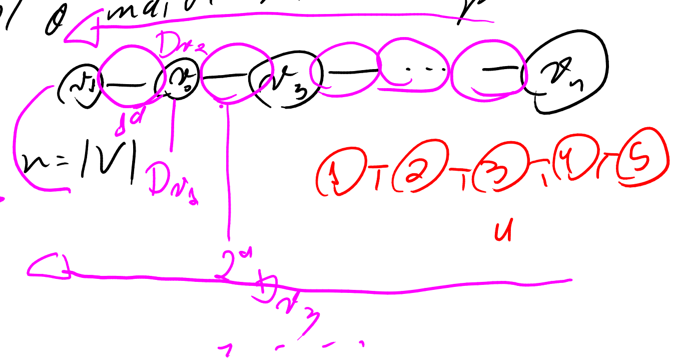


Caminho simples: q não repete vértices: cam mínimo

Todo caminho min é simples

Quantos arcos/arestas são necessários p/ o maior mínimo possível

no pior caso $n-1$ arestas



5.2.2