25 ANOS

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ
Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cálculo II

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Ementa

UNIDADE 1: Integrais simples.

1. Definição de integral indefinida, propriedades da integração (integrais imediatas).
1. Método de integração por substituição.
2. Método de integração por partes.
3. Método de integração de funções racionais por frações parciais.
4. Integrais impróprias e integrais trigonométricas.
5. Cálculo de áreas e comprimento de arco.

Ementa

UNIDADE 2: Funções de 2 ou mais variáveis.

1. Conceitos preliminares (espaço tridimensional, funções de duas variáveis, curvas de nível).
2. Derivadas parciais. Pontos extremos de funções de duas variáveis.
3. Determinação e classificação de pontos extremos de funções de duas variáveis.
4. Máximos e mínimos condicionais – aplicações.

UNIDADE 3: Integrais múltiplas.

1. Cálculo de integrais duplas.
2. Mudança de variáveis em integrais duplas.
3. Aplicações de integrais duplas.
4. Cálculo de integrais triplas.
5. Mudança de variáveis em integrais triplas.
6. Aplicações envolvendo integrais triplas.

Frequência e Média Final

Frequência: De acordo com as normas da UNIVALI, cada aluno precisa de, no mínimo, 75% de frequência para ser aprovado.

Média Final: A média final (MF) deverá ser igual ou superior a 6,0. O aluno que não atingir a média final 6,0 estará reprovado, pois não existem exames finais.

$$\boxed{\boldsymbol{MF = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{3}}}$$

Justificativa de Faltas

Ao se ausentar em uma das avaliações o aluno deverá solicitar segunda chamada na secretaria, sendo que, neste semestre, as datas para realização das provas serão apenas:

11 de Novembro e/ou 9 de Dezembro

Calendário das Aulas

Semana 1: **03 de Agosto**

Semana 2: **10 de Agosto**

Semana 3: **17 de Agosto (1 – M1)**

Semana 4: **24 de Agosto**

Semana 5: **31 de Agosto**

Atividade à distância (2 – M1)

Semana 7: **14 de Setembro (1 – M2)**

Semana 8: **21 de Setembro**

Semana 9: **28 de Setembro**

Semana 10: **05 de Outubro (2 – M2)**

Semana 11: **19 de Outubro**

Semana 12: **26 de Outubro**

Semana 13: **09 de Novembro (1 – M3)**

Semana 14: **16 de Novembro**

Semana 15: **23 de Novembro**

Semana 16: **30 de Novembro**

Semana 17: **07 de Dezembro (2 – M3)**

Semana 18: **14 de Dezembro (Sub.)**

Cronograma de Avaliações

Avaliações da M1: 17.08 e 11.09

UNIDADE 1: Integrais simples.

Avaliações da M2: 14.09 e 05.10

UNIDADE 2: Integrais definidas e funções de 2 ou mais variáveis.

Avaliações da M3: 09.11 e 07.12

UNIDADE 3: Integrais múltiplas.

- Estas datas podem sofrer alterações ao longo do semestre, sempre previamente comunicadas aos alunos.

UNIVALI

Referências Bibliográficas

- ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte** - 6. ed / 2000 um novo horizonte. Porto Alegre, RS: Bookman, 2000 (10 exemplares).

- FLEMMING, Diva Marilia; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração** - 5. ed. rev. e ampl. / 1992 funções, limite, derivação, integração. São Paulo, SP: Makron Books; Florianópolis, SC: UFSC, c1992, 2006 (21 exemplares).

UNIVALI

Referências Bibliográficas

- GONÇALVES, Mirian Buss; FLEMMING, Diva Marilia. **Calculo B: funções de várias variáveis integrais duplas e triplas** / 2005 funções de várias variáveis integrais duplas e triplas. São Paulo, SP: Makron Books, 2005 (9 exemplares).

- MUNEM, Mustafá A.; FOULIS, David J. **Cálculo.** C1982 Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos. C1982. (9 exemplares).

- SWOKOWSKI, Earl William. **Calculo com geometria analítica** - 2. ed / c1995 São Paulo, SP: Makron Books, c1995. (1 exemplar).

ANOS

CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO
CAMPUS KOBRASOL

UNIVALI

Save the Date

Saturday, April 14th, 2018

A derivada e a integral são duas noções básicas do Cálculo Diferencial e Integral. Do ponto de vista geométrico, a **derivada** está ligada ao problema de traçar a ***tangente a uma curva*** enquanto que a **integral** está relacionada com o problema de determinar a ***área*** de certas figuras, mas também possui muitas outras interpretações possíveis.

História das Integrais

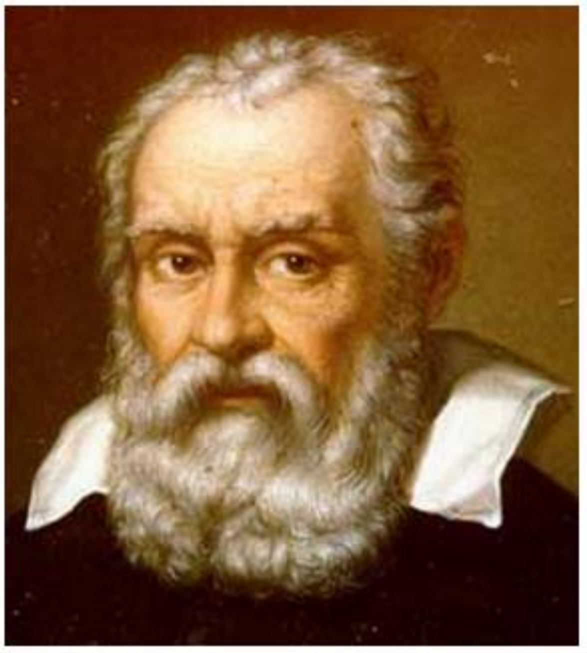
O cálculo integral se originou com problemas de quadratura e cubatura. Resolver um problema de *quadratura* significa encontrar o valor exato da área de uma região bidimensional cuja fronteira consiste de uma ou mais curvas, ou de uma superfície tridimensional, cuja fronteira também consiste de pelo menos uma curva. Para um problema de *cubatura*, queremos determinar o volume exato de um sólido tridimensional limitado, pelo menos em parte, por superfícies curvas.

História das Integrais

Muitas civilizações primitivas conheciam as fórmulas para a área de polígonos como quadrados, retângulos, triângulos e trapézios. Contudo, os matemáticos primitivos se deparavam com muitas dificuldades para encontrar fórmulas para a área de regiões com contornos curvilíneos, dos quais o círculo é o exemplo mais simples.

História das Integrais

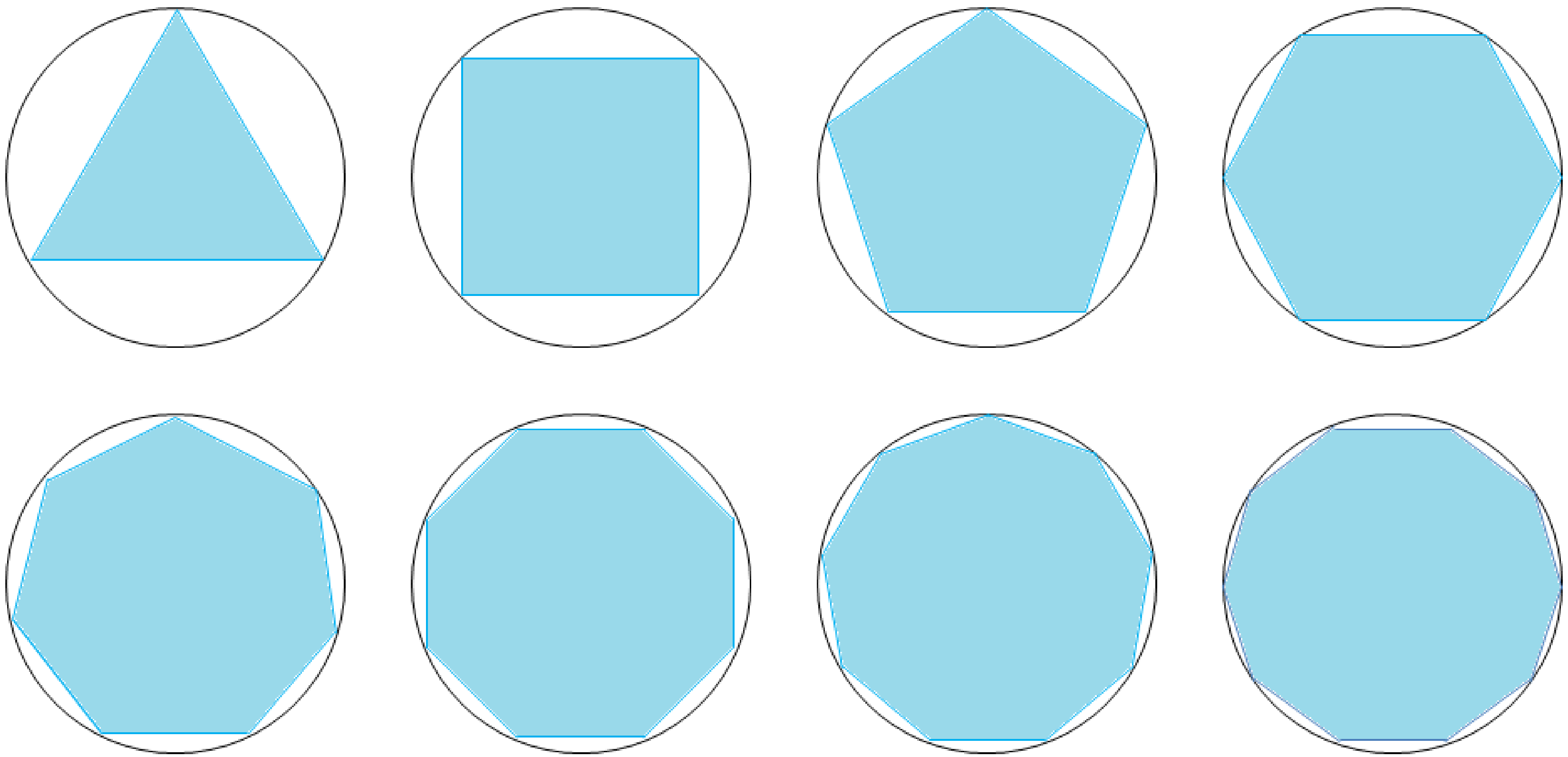
O primeiro progresso real no trato com o problema geral da área foi obtido pelo matemático grego **Arquimedes**, que obteve áreas de regiões delimitadas por arcos de círculos, parábolas, espirais e outros tipos de curvas, usando um procedimento mais tarde denominado *Método de Exaustão.*



Arquimedes (287 a.C – 212 a.C)

Este método, quando aplicado ao círculo, consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados dos polígonos cresça indefinidamente. À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a completar a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais da área exata do círculo.

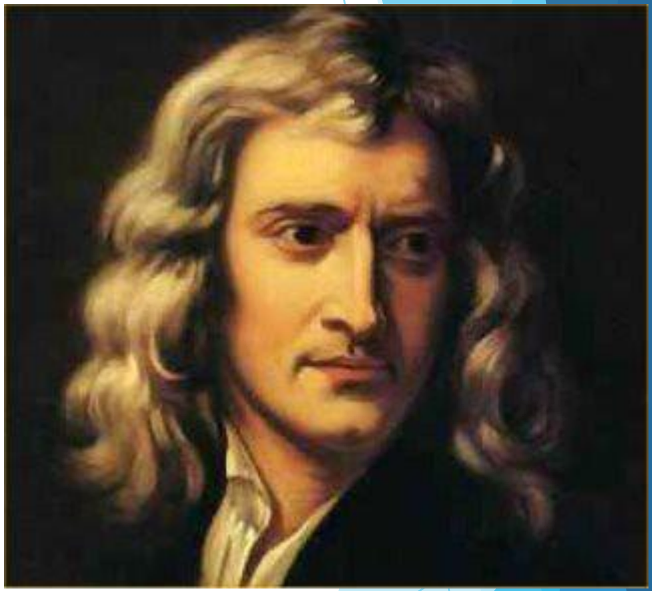
Método de Exaustão



História das Integrais

Após Arquimedes, só no século XVII, por volta de 1670,
é que surgiu o processo definitivo, com a invenção do **Cálculo Integral**,
simultaneamente por **Newton**, na Inglaterra,
e por **Leibniz**, na Alemanha.

Isaac Newton pensava na área da região entre uma curva e o eixo horizontal como uma variável; o extremo esquerdo era fixo, mas o extremo direito podia variar. Este truque levou ao Teorema Fundamental do Cálculo. Usando o teorema, Newton desenvolveu as técnicas básicas para avaliar integrais usadas hoje em dia, incluindo os métodos de substituição e integração por partes.



Newton (1642 - 1727)

Leibniz (1646 - 1716)

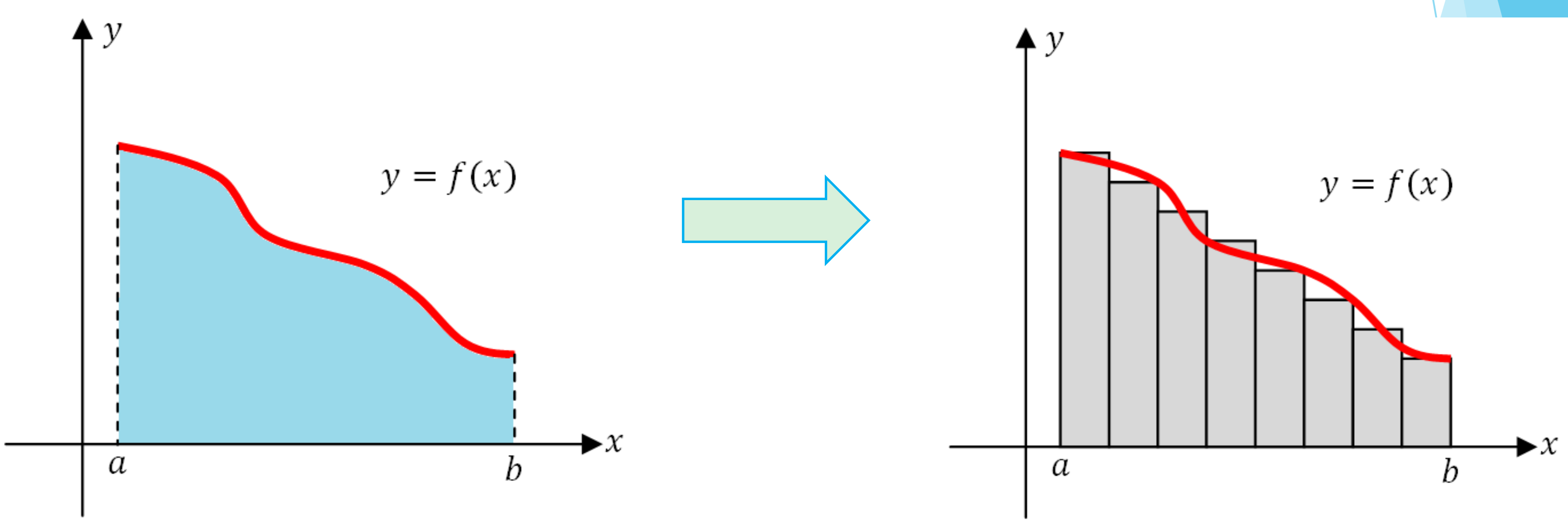
Gottfried Leibniz representou a área de uma figura pela soma de todos os retângulos limitados pelas ordenadas e diferenças das abscissas. Leibniz tomou o "S“ alongado para a integral (do latim *summa)* e tal notação tem permanecido desde então.

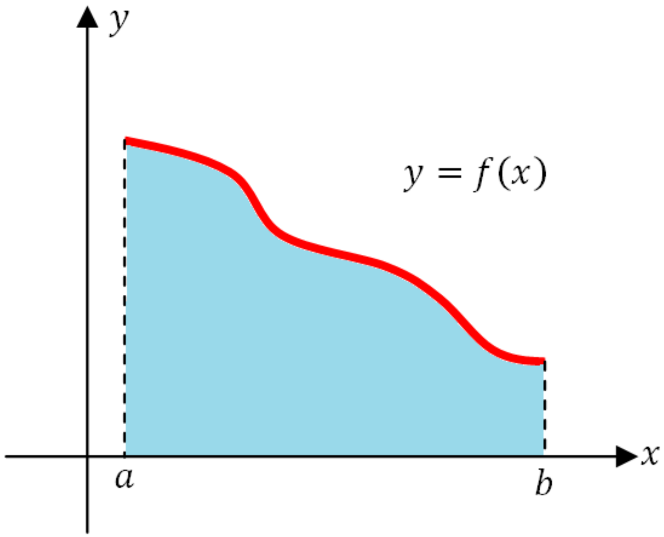
Em maio de 1690, Johann Bernoulli publicou um artigo muito importante para a história do desenvolvimento do Cálculo, uma vez que é nele que o termo **integral** aparece pela primeira vez, com o verdadeiro sentido de integração.

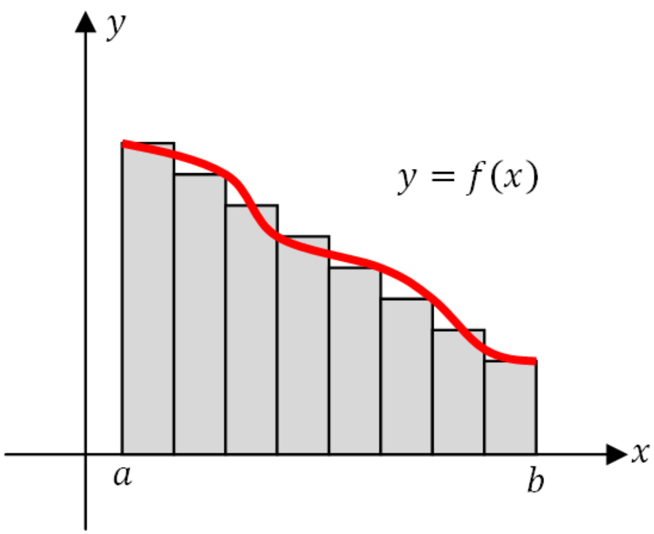
Bernoulli (1667 – 1748)

A ideia do método é, resumidamente, a seguinte:

Dada uma função contínua e não negativa $f(x) \geq 0$ em um intervalo $[a, b]$, a área da região entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ no eixo x é calculada a partir da soma S dos retângulos inscritos na curva.







Essa soma S recebeu o nome de **integral** de $f(x)$ em $[a, b]$ e é indicado por:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

Definição:

A **integração indefinida** ou **antiderivação** é a operação inversa da derivação. Da mesma forma que a subtração é a operação inversa da adição ou a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Integral Indefinida

Exemplos:

1. Se $f(x) = \frac{x^4}{4}$, então sua derivada é: $f'(x) =$

Neste caso, uma das antiderivadas de x^3 é $\frac{x^4}{4}$

2. Se $f(x) = x^3$, então sua derivada é: $f'(x) =$

Neste caso, uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $3x^2$ é x^3.

3. Se $f(x) = x^3 + 7$, então sua derivada é: $f'(x) =$

Neste caso, uma das antiderivadas de $3x^2$ é $x^3 + 7$

Integral Indefinida

Note que nos exemplos, aparece "uma das antiderivadas ou integrais indefinidas". Podemos entender melhor, quando observamos os exemplos 2 e 3, já que tanto x^3 quanto $x^3 + 7$ são integrais indefinidas para a mesma função $3x^2$.

Assim, vemos que a diferença entre quaisquer destas funções (chamadas funções primitivas) é sempre uma constante, veja:

1. no exemplo 2, a constante era o 0 $(x^3 = x^3 + 0)$
2. no exemplo 3, a constante era o 7 $(x^3 + 7)$

Integral Indefinida

Representando essa constante por C, temos que

a integral indefinida de $3x^2$ é $x^3 + C$, onde C é uma constante real.

Indicamos a **integral indefinida** ou **antiderivada** de $f'(x)$ por

$$\int f(x)\ dx = f(x) + C$$

Integral Indefinida

A notação de integral indefinida é dada por:

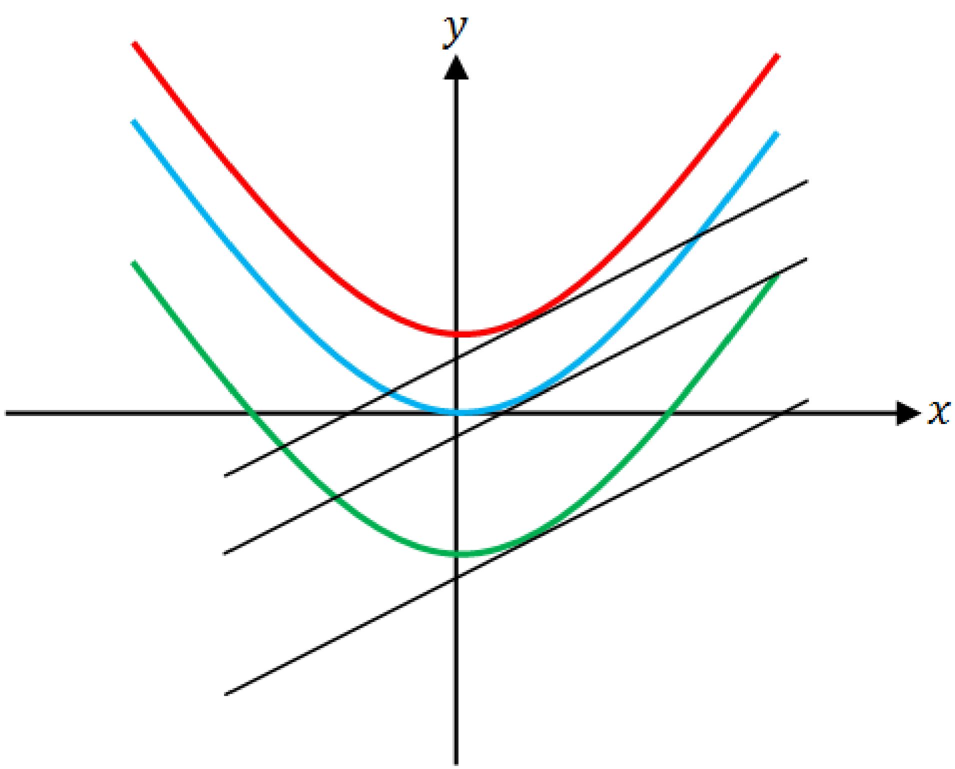
Símbolo da integral

Diferencial

$$\int f(x)dx = \underbrace{F(x) + c}_{\text{Antiderivada}}$$

Integrando

Interpretação Geométrica da Integral Indefinida:



A integral indefinida de uma função é representada geometricamente por uma família de curvas de mesma abscissa que possuem retas tangentes paralelas.

Propriedades e Regras de Integração:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int k\, dx = k \int dx = kx + c, \quad k \text{ é } uma\ constante$
3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
4. $\int e^x\, dx = e^x + c$
5. $\int sen\, x\, dx = -\cos x + c$
6. $\int cos\, x\ \ dx = sen\, x + c$
7. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
8. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ

Curso de CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Exercícios de Integrais

Denise Prado Kronbauer

denise.kronbauer@univali.br

denipk@gmail.com

Integração por Substituição ou Mudança de Variáveis:

Para revolver uma integral na forma:

$$\int f\big(g(x)\big).\,g'(x)dx$$

Utilizamos a técnica de integração por substituição, que consiste em aplicar a mudança de variáveis $u = g(x)$. Desta forma, $du = g'(x)$ o que, substituindo na integral acima, fornece: $\int f(u)du$

Integração por Substituição ou Mudança de Variáveis:

Passo 1: Faça uma escolha para u, digamos $u = g(x)$

Passo 2: Calcule $\frac{du}{dx} = g'(x)$

Passo 3: Faça a substituição $u = g(x), \ \ du = g'(x)dx$

Neste ponto, toda integral deve estar em termos de u; nenhum x deve continuar.

Passo 4: Calcule a integral resultante.

Passo 5: Substituir u por $g(x)$; assim, a resposta final estará em termos de x.

Integral Indefinida

Exemplo: Determine $\int \sqrt{1-3x}dx$

$$u = 1 - 3x \quad \rightarrow \quad du = -3dx \quad \rightarrow \quad dx = -\frac{du}{3}$$

$$\int \sqrt{1-3x}dx \quad \rightarrow \quad \int u^{1/2}\left(-\frac{1}{3}du\right) \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3}\int u^{1/2}du$$

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{u^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\frac{1}{2}+1}\right] \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{3}.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{-\frac{2}{9}(1-3x)^{\frac{3}{2}}+c}$$

Integral Indefinida

Integração por Partes:

É um método que permite expressar a integral de um produto de funções em outra integral.

$$\int f(x)\,.\,g'(x)dx = f(x).\,g(x) - \int g(x).\,f'(x)\,dx$$

$$u = f(x) \quad \rightarrow \quad du = f'(x)$$

$$v = g(x) \quad \rightarrow \quad dv = g'(x)$$

$$\boxed{\int u.\,dv = u.\,v - \int v.\,du}$$

Integral Indefinida

Exemplo: Determine $\int \underbrace{x^2}_{u} . \underbrace{e^x\,dx}_{dv}$

$u = x^2 \xrightarrow{\text{derivada}} du = 2x\,dx$

$dv = e^x dx \xrightarrow{\text{integral}} v = e^x$

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

$$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int e^x.2x dx$$

Integral Indefinida

$$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int e^x.2x dx \quad \rightarrow \quad = x^2.e^x - 2\int \underbrace{x.e^x dx}_{}$$

partes

derivada $u = x$ → $du = dx$

$v = e^x$ ← $dv = e^x dx$ integral

$$= x^2.e^x - 2\left(x.e^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + c$$

$$\boxed{\int x^2.e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c}$$

Exercícios: Determine a integral indefinida das seguintes funções:

1. $\int e^x \cos x \, dx$
2. $\int x \ln x \, dx$
3. $\int (x^2 + 1) \operatorname{sen} x \, dx$

Integral Indefinida

Respostas:

1. $\frac{e^x sen\, x + e^x cos\, x}{2} + c$

2. $\frac{1}{4}x^2(2\,ln\,x - 1) + c$

3. $-(x^2 - 1)cos\,x + 2xsenx + c$