Exemplos de construção de Provas

Prova por Resolução

1. $\vdash (P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

   negação do teorema
   $\vdash \neg((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q))$

   Eliminar a implicação$(A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B)$
   $\vdash \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \vee \neg(P \rightarrow Q))$
   $\vdash \neg(\neg(P \wedge \neg Q) \vee \neg(\neg P \vee Q))$

   Redução do escopo das negações (conforme regras nos slides)
   $\vdash P \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee Q)$

   Distribuição do $\vee$ - desnecessária neste exemplo

   Aplicar Resolução - construção do conjunto G:
   (1) $\quad P$
   (2) $\quad \neg Q$
   (3) $\quad (\neg P \vee Q)$

   Resolução:
   (4) $\quad Q$ $\quad$ de (3) e (1)
   (5) $\quad \square$ $\quad$ de (4) e (2)

2. $\vdash (\exists x.P(x) \land \forall x.Q(x)) \to \exists x.(P(x) \land Q(x))$

negação do teorema
$\neg((\exists x.P(x) \land \forall x.Q(x)) \to \exists x.(P(x) \land Q(x)))$

elimininação da implicação
$\neg(\neg(\exists x.P(x) \land \forall x.Q(x)) \lor \exists x.(P(x) \land Q(x)))$

redução do escopo das negações
$\exists x.P(x) \land \forall x.Q(x) \land \neg(\exists x.(P(x) \land Q(x)))$
$\exists x.P(x) \land \forall x.Q(x) \land \forall x.\neg(P(x) \land Q(x))$
$\exists x.P(x) \land \forall x.Q(x) \land \forall x.\neg P(x) \lor \neg Q(x))$

renomeação das variáveis
$\exists x_1.P(x_1) \land \forall x_2.Q(x_2) \land \forall x_3.\neg P(x_3) \lor \neg Q(x_3)$

mover os quantificadores para o início da fórmula
$\exists x_1.\forall x_2.\forall x_3.P(x_1) \land Q(x_2) \land \neg P(x_3) \lor \neg Q(x_3)$

elimininação dos quantificadores
$P(a) \land Q(x_2) \land \neg P(x_3) \lor \neg Q(x_3)$

Aplicar Resolução - construção do conjunto G:
(1) $P(a)$
(2) $Q(x_2)$
(3) $\neg P(x_3) \lor \neg Q(x_3)$
Resolução
(4) $\neg Q(a)$ de (1) e (3) com $\theta : \{x_3/a\}$
(5) $\square$ de (2) e (4) com $\theta : \{x_2/a\}$

Prova por Método de Tableaux

Ao lado de cada passo é indicado sobre qual linha do Tableau o operador atua e também qual foi a regra aplicada sendo

- R.C.$\rightarrow$ - Regra Conjuntiva da implicação
- R.C.$\wedge$ - Regra Conjuntiva do E
- R.C.$\vee$ - Regra Conjuntiva do OU
- R.D.$\rightarrow$ - Regra Disjuntiva da implicação
- R.D.$\wedge$ - Regra Disjuntiva do E
- R.D.$\vee$ - Regra Disjuntiva do OU
- R.N. - Regra Negação
- R.U. - Regra para os quantificadores universais
- R.E. - Regra para os quantificadores existenciais

1. $\vdash \neg(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)$

$$\begin{array}{lcl}
(1) & \neg(\neg(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)) & \\
(2) & \neg(\neg P \wedge Q) & de(1)\text{(R.C. }\rightarrow\text{)} \\
(3) & \neg(\neg P \rightarrow Q) & de(1)\text{(R.C. }\rightarrow\text{)} \\
(4) & \neg P & de(3)\text{(R.C. }\rightarrow\text{)} \\
(5) & \neg Q & de(3)\text{(R.C. }\rightarrow\text{)} \\
(6) & \neg\neg P \quad de(2) \mid \neg\neg Q \quad de(2)\text{(R.D. }\wedge\text{)} & \\
(7) & P \quad de(6) \mid Q \quad de(6)\text{(R.N.)} & \\
(8) & \Box \qquad \mid \Box &
\end{array}$$

2. $\exists x.\forall y.P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y)$

$$\begin{array}{lcr}
(1) & \neg(\exists x.\forall y.P(x,y) \rightarrow \forall y.\exists x.P(x,y)) & \\
(2) & \exists x.\forall y.P(x,y) & de(1)\text{(R.C. }\rightarrow\text{)} \\
(3) & \neg(\forall y.\exists x.P(x,y)) & de(1)\text{(R.C. }\rightarrow\text{)} \\
(4) & \forall y.P(\pi,y) & de(2)\theta : \{x/\pi\}\text{(R.E.)} \\
 & & \text{onde } \pi \text{ é uma nova constante} \\
(5) & P(\pi,a) & de(4)\theta : \{y/a\}\text{(R.U)} \\
(6) & \neg P(\pi,a) & de(3)\theta : \{x/\pi, y/a\}\text{(R.E e R.U.)} \\
(7) & \Box &
\end{array}$$