Gabarito

Prova I

Linguagens Formais e Compiladores
Prof^a. Jerusa Marchi

1. Assinale V ou F:

   (a) A união de duas Linguagens Livres de Contexto pode resultar em uma Linguagem Regular.
   Verdadeiro. A união de $a^n b^n$ com $a^n b^m$ para $n \neq m$ resulta em $a^* b^*$ que é regular.

   (b) Considerando a Hierarquia de Chomsky, onde Linguagens Regulares são tipo 3, Linguagens Livres de Contexto são Tipo 2, Linguagens Sensíveis ao Contexto são tipo 1 e Linguagens Recursivamente Enumeráveis são tipo 0, é correto afirmar que se $L_1 \subseteq L_2$ então o tipo de L_1 é necessariamente maior ou igual que o tipo de L_2.
   Falso. A linguagem $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ é LSC (tipo 1) e a linguagem $L_2 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$ é LSC (tipo 2) e $L_1 \subset L_2$.

   (c) Se G_1 e G_2 são Gramáticas Regulares e $L(G_1) \cup L(G_2) = \Sigma^*$ então $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$.
   Falso. Se $L(G_1)$ for formada por palavras pares sobre $\{a, b\}$ e $L(G_2)$ for formada por palavras ímpares, mas com a palavra vazia, então a união é Σ^* mas a interseção é $\{\varepsilon\}$.

   (d) A linguagem $L = \{a^n a^m b^k b^l \mid n, m, k, l \geq \text{ e } n = k \text{ e } m = l\}$ não é uma Linguagem Livre de Contexto.
   Falso. Pois $n + m = l + k$ que é livre de contexto.

   (e) O número de sentenças de tamanho n gerado por uma Gramática exclusivamente tipo 0 é sempre finito.
   Verdadeiro. Pois Σ é finito e as cadeias de tamanho n podem ter em cada uma das n posições um símbolo do alfabeto (o que equivale a uma linguagem regular).

2. Construa uma Gramática Regular G para a seguinte linguagem:

$$L(G) = \{w \mid w \in (a,b)^* c^i \text{ e } i \geq 0 \text{ e } \mid w \mid \text{ seja par e } \#b\text{'s seja ímpar}\}$$

$$\begin{array}{lcl}
\langle CpP \rangle & \rightarrow & a\langle CiP \rangle \mid b\langle CiI \rangle \\
\langle CiP \rangle & \rightarrow & a\langle CpP \rangle \mid b\langle CpI \rangle \mid b \\
\langle CiI \rangle & \rightarrow & a\langle CpI \rangle \mid a \mid b\langle CpP \rangle \mid c\langle Cp \rangle \mid c \\
\langle CpI \rangle & \rightarrow & a\langle CiI \rangle \mid b\langle CiP \rangle \mid c\langle Ci \rangle \\
\langle Ci \rangle & \rightarrow & c\langle Cp \rangle \mid c \\
\langle Cp \rangle & \rightarrow & c\langle Ci \rangle
\end{array}$$

3. Construa uma Gramática Livre de Contexto G para a seguinte linguagem:

$$L(G) = \{a^n b^m c^i d^j \mid n, m, i, j \geq 0 \text{ e } n + m < i + j\}$$

$$\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & X \mid Y \mid Z \mid W \mid CD \mid C \mid D \\
X & \rightarrow & aXd \mid Y \mid Z \mid W \mid CD \mid C \mid D \\
Y & \rightarrow & aYc \mid Z \mid C \\
W & \rightarrow & bWd \mid Z \mid CD \mid C \mid D \\
Z & \rightarrow & bZc \mid C \\
D & \rightarrow & dD \mid d \\
C & \rightarrow & cC \mid c
\end{array}$$

4. Construa uma Gramática Livre de Contexto G para a seguinte linguagem:

$$L(G) = \{a^n (b, c)^* d^m \mid n, m \geq 0 \text{ e } \#c\text{'s } + n > \#b\text{'s } > m\}$$

$$\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & X \mid Y \mid A \mid Z \\
X & \rightarrow & aXBD \mid Y \mid A \mid Z \\
Y & \rightarrow & cYBD \mid bYCD \mid Z \\
A & \rightarrow & aA \mid a \\
Z & \rightarrow & cZ \mid c \\
DB & \rightarrow & BD \\
DC & \rightarrow & CD \\
aB & \rightarrow & ab \\
aC & \rightarrow & ac \\
bB & \rightarrow & bb \\
bC & \rightarrow & bc \\
cB & \rightarrow & cb \\
cC & \rightarrow & cc \\
bD & \rightarrow & bd \\
cD & \rightarrow & cd \\
dD & \rightarrow & dd
\end{array}$$

5. Seja G a seguinte Gramática Regular:

$$\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & aB \mid bD \mid cE \mid a \mid b \mid \varepsilon \\
B & \rightarrow & aE \mid bC \mid b \mid cE \\
C & \rightarrow & aB \mid bF \mid cE \\
D & \rightarrow & aS \mid bE \\
E & \rightarrow & aE \mid bE \mid cE \\
F & \rightarrow & aC \mid bE \mid a \\
G & \rightarrow & aF \mid bH \mid cG \\
H & \rightarrow & aG \mid bC \mid cC \mid b \mid c
\end{array}$$

Apresente todos os passos para a obtenção de um Autômato Finito Determinístico Mínimo M tal que $L(G) = L(M)$. Qual é a linguagem descrita por G?

- Passo 1: Converte G em um AFND:

δ	a	b	c	ε
$\rightarrow S$	$\{B, X\}$	$\{D, X\}$	E	$\{X\}$
B	E	$\{C, X\}$	E	
C	B	F	E	
D	S	E	$-$	
E	E	E	E	
F	$\{C, X\}$	E	$-$	
G	F	H	G	
H	G	$\{C, X\}$	$\{C, X\}$	
$*X$	$-$	$-$	$-$	

- Passo 2: Deteminização

δ	a	b	c
$\rightarrow *\{S, X\}$	$\{B, X\}$	$\{D, X\}$	E
B	E	$\{C, X\}$	E
C	B	F	E
D	S	E	$-$
E	E	E	E
F	$\{C, X\}$	E	$-$
G	F	H	G
H	G	$\{C, X\}$	$\{C, X\}$
$*X$	$-$	$-$	$-$
$*\{B, X\}$	E	$\{C, X\}$	E
$*\{C, X\}$	B	F	E
$*\{D, X\}$	$\{S, X\}$	E	E

- Passo 3: Eliminação de estados inalcançáveis

δ	a	b	c
$\rightarrow \{\mathbf{S}, \mathbf{X}\}$	$\{\mathbf{B}, \mathbf{X}\}$	$\{\mathbf{D}, \mathbf{X}\}$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{E}$	$\{\mathbf{C}, \mathbf{X}\}$	$\mathbf{E}$
C	B	F	E
D	S	E	$-$
$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$
$\mathbf{F}$	$\{\mathbf{C}, \mathbf{X}\}$	$\mathbf{E}$	$-$
G	F	H	G
H	G	$\{C, X\}$	$\{C, X\}$
$*X$	$-$	$-$	$-$
$*\{\mathbf{B}, \mathbf{X}\}$	$\mathbf{E}$	$\{\mathbf{C}, \mathbf{X}\}$	$\mathbf{E}$
$*\{\mathbf{C}, \mathbf{X}\}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{E}$
$*\{\mathbf{D}, \mathbf{X}\}$	$\{\mathbf{S}, \mathbf{X}\}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$

Os estados C, D, G, H e X são inalcançáveis.

- Passo 4: Eliminação de estados mortos

δ	a	b	c
$\rightarrow \{\mathbf{S},\mathbf{X}\}$	$\{\mathbf{B},\mathbf{X}\}$	$\{\mathbf{D},\mathbf{X}\}$	E
$\mathbf{B}$	E	$\{\mathbf{C},\mathbf{X}\}$	E
E	E	E	E
$\mathbf{F}$	$\{\mathbf{C},\mathbf{X}\}$	E	$-$
$*\{\mathbf{B},\mathbf{X}\}$	E	$\{\mathbf{C},\mathbf{X}\}$	E
$*\{\mathbf{C},\mathbf{X}\}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{F}$	E
$*\{\mathbf{D},\mathbf{X}\}$	$\{\mathbf{S},\mathbf{X}\}$	E	E

  O estado E é morto.

- Passo 5: Cálculo das classes de equivalência: Por simplicidade, o estado $\{S, X\}$ será denominado apenas de S, $\{B, X\}$ de X, $\{C, X\}$ de C, $\{D, X\}$ de D . Como as transições por c levam para o estado morto, este símbolo não foi considerado no processo.

F	$K - F$	
$\{S, X, C, D\}$	$\{B, F\}$	$//a$
$\{S, C, D\}\{X\}$	$\{B\}\{F\}$	$//b$
$\{S\}\{C\}\{D\}\{X\}$	$\{B\}\{F\}$	

  O Autômato não possui estados equivalentes.

- Passo 6: Autômato Finito mínimo resultante:

δ	a	b
$\rightarrow *S$	X	D
B	$-$	C
F	C	$-$
$*X$	$-$	C
$*C$	B	F
$*D$	S	$-$

6. Sejam M_1 e M_2 os seguintes AF:

M_1 :

δ	1	2
$\rightarrow *A$	B	C
B	C	A
C	A	B

M_2 :

δ	1	2
$\rightarrow *D$	E	D
E	D	E

Apresente todos os passos para a construção de:

(a) Um Autômato Finito Determinístico Mínimo M tal que $L(M) = L(M_1) - L(M_2)$. Para gerar a linguagem $L(M)$ temos que $L(M) = \{w \mid w \in L(M_1) \text{ e } w \notin L(M_2)\}$ ou seja $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$ Começamos por calcular o complemento de M_2

$\overline{M_2}$:

δ	1	2
$\rightarrow D$	E	D
$*E$	D	E

Agora, via produto cartesiano, podemos obter a interseção de forma que os estados de aceitação sejam simultaneamente estados de aceitação de M_1 e de $\overline{M_2}$

$M_1 \cap \overline{M_2}$:

δ	1	2
$\rightarrow *(A,D)$	(B,E)	(C,D)
(B,E)	(C,D)	(A,E)
(C,D)	(A,E)	(B,D)
(A,E)	(B,D)	(C,E)
(B,D)	(C,E)	(A,D)
(C,E)	(A,D)	(B,E)

(b) Uma Gramática Regular G tal que $L(M) = L(G)$

$$
\begin{array}{lcl}
(A,D) & \rightarrow & 1(B,E) \mid 2(C,D) \\
(B,E) & \rightarrow & 1(C,D) \mid 2(A,E) \\
(C,D) & \rightarrow & 1(A,E) \mid 2(B,D) \\
(A,E) & \rightarrow & 1(B,D) \mid 2(C,E) \\
(B,D) & \rightarrow & 1(C,E) \mid 2(A,D) \mid 2 \\
(C,E) & \rightarrow & 1(A,D) \mid 2(B,E) \mid 1
\end{array}
$$

(c) Detemine $L(G)$ $L(G) = \{w \mid w \in \{1,2\}^*$ e a soma dos símbolos módulo $6 = 0\}$

7. A linguagem reversa (L^R) de uma Linguagem Regular é sempre uma Linguagem Regular? Se sim, proponha um algoritmo para, a partir de uma Gramática Regular G, construir uma Gramática Regular G_1 tal que $L(G_1) = L(G)^R$; se não, justifique.

   Sim. O reverso de uma linguagem regular é sempre uma linguagem regular pois as linguagens regulares são fechadas sob esta operação

   Seja G a gramática de entrada tal que $G = (N, T, S, P)$ onde as produções de P seguem a regra de formação $N \rightarrow aN \mid a$. Seja G_1 uma nova gramática tal que $G_1 = (N_1, T, S_1, P_1)$. Contrua G_1 como segue: $N_1 = N \cup S_1$ onde S_1 é um novo estado de início. O alfabeto, conjunto de Terminais se mantém. Construa P_1 como segue. Repita para todas as produções em P:

   (a) Para cada produção na forma $A \rightarrow a \in P$ onde $A \neq S$ crie produções na forma $S_1 \rightarrow aA \in P_1$.

   (b) Para cada produção na forma $S \rightarrow a \in P$, inclua $S_1 \rightarrow a \in P_1$.

   (c) Para cada produção na forma $A \rightarrow aB \in P$ onde $A \neq S$ crie produções na forma $B \rightarrow aA \in P_1$. Se $B = S$ inclua $B \rightarrow a \in P_1$.