

# INTEGRAÇÃO DE ELIPSES DE CONFIANÇA NA AVALIAÇÃO E NO DESENVOLVIMENTO DE VENTILADORES CENTRÍFUGOS

**Matheus Costa Pereira (Universidade Federal de Itajubá)**

**Anderson Paulo de Paiva (Universidade Federal de Itajubá)**

**Vinícius Antônio Montgomery de Miranda (Universidade Federal de Itajubá)**

**Tiago Martins de Azevedo (Universidade Federal de Itajubá)**

**Michele de Santana Carmelossi (Universidade Federal de Itajubá)**



*O conceito e a aplicação da elipse de confiança na análise estatística multivariada é muito importante e tem o propósito de manter os valores esperados das variáveis próximos aos desejáveis com a menor dispersão possível. A elipse de confiança é uma representação gráfica bidimensional, ao qual, seu equacionamento e a sua construção é desenvolvida no artigo.*

*Seu desenvolvimento é baseado no equacionamento da matriz de variância-covariância, mas também são discutidos conceitos de grau de liberdade, coeficiente de correlação de Pearson, ângulo de rotação, chi-quadrado e matriz de Cholesky.*

*A elipse de confiança construída foi baseada em respostas obtidas de ventiladores centrífugos industriais que foram analisados pelo método CFD, com isso, as respostas com maior correlação foram representadas na elipse.*

*Diante disso, demonstra-se que união de técnicas estatísticas avançadas e de simulações computacionais possuem uma grande contribuição para o desenvolvimento e a otimização de maquinários tecnológicos.*

*Palavras-chave: Elipse de confiança, Análise estatística multivariada, CFD, ventilador centrífugo.*

## 1. Introdução

A qualidade do que se produz e os custos associados à produção são preocupações legítimas da gestão de qualquer organização que objetiva manter-se competitiva. Todavia, muitas dessas organizações falham nesse propósito por não conseguir controlar a variabilidade de seu processo produtivo, que normalmente depende de muitas variáveis. Almeida et al. (2019) mostram que as causas da variabilidade de um processo de produção estão relacionadas ao produto e ao processo em si, que envolve desgaste e variabilidade de ferramentas, além de falhas de operadores. Assim, estudar a significância dos elementos que causam variação é fundamental para o controle da variabilidade e a obtenção de resultados mais satisfatórios. Nesse aspecto, a construção de elipses de confiança é uma técnica que permite avaliar a dispersão dos resultados em função da variabilidade de duas ou mais variáveis. Elas são descritas como a representação bidimensional de uma função de densidade de probabilidade multivariada com o propósito de visualizar a incerteza associada a um conjunto de dados ou suas estimativas. Dessa forma, proporciona uma medida visual para representar de forma gráfica a incerteza de um conjunto de dados multivariados.

Uma definição precisa da elipse é a de que ela representa uma curva fechada que surge a partir da interseção de um plano que corta uma superfície cônica em uma curva fechada. Esta forma geométrica tem propriedades matemáticas únicas que a tornam uma ferramenta poderosa na Análise Estatística Multivariada, sendo utilizada para representar incertezas de estimativas.

Regiões de confiança apresentam o espaço viável para a precisão de determinado resultado com duas ou mais variáveis. Diante disso, a aplicação do conceito da região de confiança permite investigar a similaridade estatística entre as variáveis de controle dentro de um determinado intervalo de dados e, assim, ajustar as variáveis de processo para minimizar problemas de qualidade e de custos inesperados.

Os pontos encontrados do lado de fora da região da elipse de confiança não apresentam as características desejadas e, portanto, podem ser considerados diferentes (MOREIRA et al., 2021). Logo, não apresentam as características desejadas, por exemplo, em um processo de produção.

A elipse representa a região em que um certo percentual de distribuição de probabilidade está contido e sua área varia de acordo com o nível de confiança desejado para a análise. A equação (1.1) explicita a relação entre as variâncias e a covariância das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{1 - \rho_{12}^2} \left[ \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho_{12} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \quad (1.1)$$

Para dados multivariados que possuem correlação significativa, o espaço dimensional é representado por hiperelipsoides, que são definidas pelo conceito de uma elipse com três ou mais dimensões. Porém, se as variáveis independentes e consequentemente têm correlação nula, os dados apresentam comportamento esférico (ALMEIDA, 2021).

O desenvolvimento de produtos é feito baseado em estudos multidimensionais, pelo fato que a alteração de um aspecto normalmente afeta outros resultados, aos quais, muitas vezes não são observados e avaliados, o que pode acarretar problemas não planejados. O projeto foi desenvolvido com base em uma demanda externa de uma indústria que produz fornos no ramo de cozinhas industriais no cenário nacional e internacional, que solicita o desenvolvimento de um produto com base em um existente, um ventilador centrífugo com fluido circulante sendo o ar para fornos combinados.

Com isso em vista, o projeto não pode ser feito de forma unidimensional, visto que as várias variáveis que podem ser alterados no ventilador possuem influência nas respostas. A elipse revela que quando se altera um parâmetro de entrada, várias características são modificadas, visto que é impraticável fixar um alvo, sendo que as variáveis são dependentes. Perante o exposto, a elipse esclarece que no desenvolvimento do produto qualquer alteração irá afetar outras dimensões, assim sendo, a projeção deve ser feita de forma multivariada.

Ventiladores centrífugos são dispositivos utilizados para mover fluidos em um sistema, eles são projetados com rotores que giram em alta velocidade e proporcionam uma impulsão de ar para fora do centro do rotor, neste trabalho. Tais ventiladores possuem diversas vantagens, como alta pressão estática, eficiência energética, menor consumo de energia comparado aos ventiladores axiais, além de também lidar com sistemas que possuem alta resistência.

A necessidade do cliente para o projeto seria a abrangência um torque requerido mínimo e de uma vazão mássica de saída máxima, mantendo o dimensionamento do cilindro externo com o intuito de buscar o melhor desempenho.

Neste trabalho, objetiva-se utilizar a análise estatística multivariada e a construção da elipse de confiança para avaliar a projeção de um produto real, um ventilador centrífugo industrial utilizado principalmente em padarias e redes de *fast food*. Com a análise das respostas dadas pela análise fluidodinâmica, torna-se possível construir uma elipse que traz os dados que possibilitam a análise e a tomada de decisão fundamentada em resultados factuais.

## 2. Equacionamento da elipse de confiança

A construção da elipse de confiança é baseada na matriz de variância-covariância ( $\Sigma$ ) que é uma matriz simétrica e quadrada, ao qual, se obtém as variâncias de  $x_1$  e  $x_2$  e o coeficiente de correlação dessas variáveis. Ela possui informações sobre as variáveis e suas relações em um conjunto de dados multivariados. Os elementos da diagonal são as variâncias de cada uma das variáveis e os elementos fora da diagonal representa a covariância entre elas. A partir da elipse, torna-se possível a representação de relações entre duas variáveis de um conjunto de dados para fazer avaliações complexas comparando grupos ou fazendo tratamentos de estudos experimentais. Também se torna possível visualizar e interpretar padrões esperados entre os grupos de dados. Destaca-se que um eixo será sempre preponderante em relação ao outro, ou seja, o eixo principal mostra a variável de maior influência e o eixo secundário, ortogonal ao primeiro, a variável correspondente ao ruído.

Para Rencher e Christensen (2007), essa matriz é importante para a compreensão da relação entre as variáveis e para a identificação de padrões e tendências nos dados multivariados. Outra informação relevante é dada pelo sinal dos termos de covariância da matriz, por revelar sua positividade ou negatividade, conforme a equação (2.1).

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O coeficiente de correlação de Pearson ( $\rho$ ) indica a força e a direção da relação entre duas variáveis quantitativas. Ele assume valores em um intervalo fechado de -1 a +1. Quanto mais próximo o coeficiente está de +1, maior será a correlação positiva entre as variáveis. Por outro lado, quanto mais próximo de -1, maior a correlação negativa entre as variáveis estudadas.

Para a correlação ser perfeita, as variâncias devem ser iguais. Nesse caso, a correlação é igual a 1 e a rotação é máxima de 45°. De maneira oposta, quando a correlação é nula, a rotação é mínima, sendo ela de 0°.

A correlação também pode ser definida como a covariância padronizada de duas variáveis. Isto é, a covariância das variáveis dividida pelo produto de seus desvios padrão, conforme mostra a equação (2.2).

$$\rho = \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2}} \quad (2.2)$$

A análise da elipse de confiança evidencia o grau de incerteza do conjunto de dados investigados. Em sua versão bidimensional na função multivariada, tal como está sendo tratado neste artigo e com base na exibição da elipse dada na equação (1) e na matriz de covariância

dada pela equação (2.1), pode-se iniciar o equacionamento para o modelo geral da elipse de confiança. Inicia-se pela equação (2.3), ao qual, trata-se da inversa de  $\Sigma$ . As elipses são baseadas na matriz de variância-covariância e seus autovalores e autovetores (AMORIM et al., 2022).

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2)} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{12} \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\ -\rho_{12} \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

O determinante de  $|\Sigma|$  é dada pela equação (2.4).

$$|\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \rho_{12}^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho_{12}^2) \quad (2.4)$$

Diante disso, pode-se escrever uma operação matricial entre a matriz de variância-covariância, a matriz de autovalores e a matriz identidade que é dada pela equação (2.5).

$$|\Sigma - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (\sigma_1^2 - \lambda) & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & (\sigma_2^2 - \lambda) \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Em casos bidimensionais, pode-se determinar os autovalores da matriz de variância-covariância com o uso da equação (2.6) que foi obtida pela equação (2.5). Com isso, utiliza-se o determinante que é calculado pela diferença entre a multiplicação da diagonal principal pela diagonal secundária.

$$|\Sigma - \lambda I| = (\sigma_1^2 - \lambda)(\sigma_2^2 - \lambda) - \sigma_{12}^2 \quad (2.6)$$

Com o uso da propriedade distributiva, encontra-se a equação (2.7).

$$|\Sigma - \lambda I| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \lambda \sigma_1^2 - \lambda \sigma_2^2 + \lambda^2 - \sigma_{12}^2 \quad (2.7)$$

Ao agrupar os elementos semelhantes, tem-se a equação (2.8).

$$|\Sigma - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2) \quad (2.8)$$

Por fim, tem-se o autovalor, o traço da matriz e o determinante da matriz, de forma simplificada para realizar o cálculo dado pela equação (2.5), isto é representado pela equação (2.9)

$$|\Sigma - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda \text{tr}(\Sigma) + |\Sigma| \quad (2.9)$$

As raízes do polinômio quadrático serão iguais aos autovalores da matriz  $\Sigma$ . Isto é representado pela equação (2.10).

$$\lambda = \frac{\text{tr}(\Sigma) \pm \sqrt{[\text{tr}(\Sigma)]^2 - 4|\Sigma|}}{2} \quad (2.10)$$

Substituindo o traço e o determinante da equação (2.10) pelos termos de  $\Sigma$ , tem-se a equação (2.11).

$$\lambda = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \pm \sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^2 - 4(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}}{2} \quad (2.11)$$

Assim, as equações (2.12) e (2.13) são responsáveis por representarem o primeiro e o segundo autovalor respectivamente.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^2 - 4(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \right] \quad (2.12)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]^2 - 4(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \right] \quad (2.13)$$

Ressalta-se que qualquer coordenada cartesiana, localização da em termos de x e y, pode ser escrita na forma paramétrica que é um modo de descrever a posição de um ponto em relação a representação que é dada por senos e cossenos.

$$\overline{NS} = x \therefore \frac{x}{a} = \cos \theta \Rightarrow x = a \cos \theta \quad (2.14)$$

$$\overline{MN} = y \therefore \frac{y}{b} = \sin \theta \Rightarrow y = b \sin \theta \quad (2.15)$$

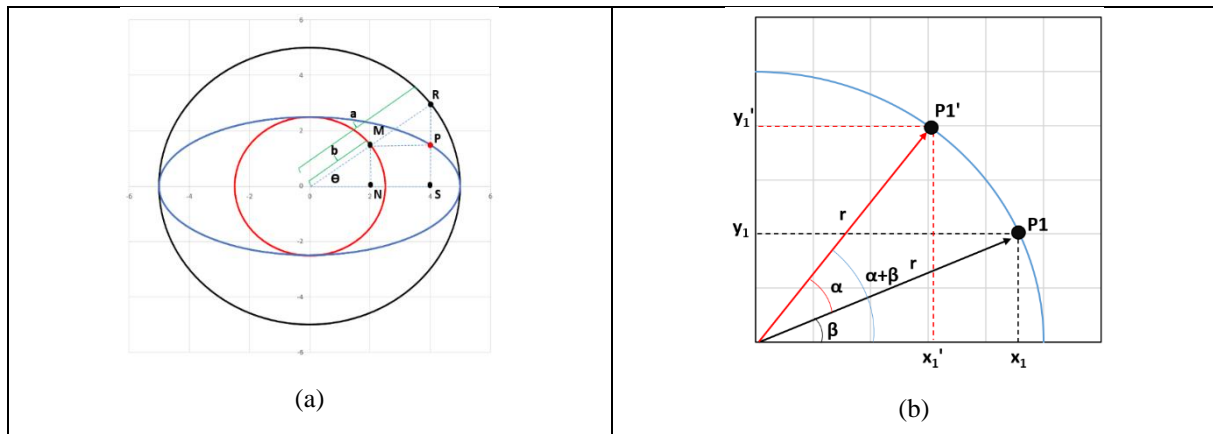
Diante disso, o ponto **P** pode ser representada pela equação (2.16).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Qualquer ponto **P** pode ser rotacionado em torno de um certo eixo, a partir de mudanças de coordenadas em relação a deslocamentos angulares. Diante disso, tem-se o ponto **P**<sub>1</sub>(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) que forma um ângulo β com o eixo x. A partir do ponto inicial, ao se aplicar uma rotação com intensidade α, o ângulo resultante será dado por α + β. Com o auxílio da Figura 1a, torna-se possível compreender as relações feitas na equação (2.14) e na equação (2.15). Enquanto, o novo ponto é dado por **P**'<sub>1</sub>(x'<sub>1</sub>, y'<sub>1</sub>), visualizados com mais clareza na Figura 1b, de acordo com a equação (2.17).

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \beta \\ y_1 = r \sin \beta \end{cases} \quad (2.17)$$

Figura 1 – Representação paramétrica e rotacionamento do ponto **P**<sub>1</sub>



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Com isso, o ponto rotacionado **P**'<sub>1</sub> em relação a **x**'<sub>1</sub> pode ser dado pela equação (2.18).

$$x'_1 = r \cos(\alpha + \beta) = r \cos \alpha (\cos \beta) - r \sin \alpha (\sin \beta) \quad (2.18)$$

Desenvolvendo a equação anterior, chega-se a (2.19).

$$x'_1 = r \cos(\alpha + \beta) = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \quad (2.19)$$

Analogamente, tem-se tal equacionamento feito também para  $y'_1$  dada pela equação (2.20).

$$y'_1 = r \cos(\alpha + \beta) = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \quad (2.20)$$

A partir desse resultado, pode-se escrever tais equações em notação matricial, conforme a equação (2.21).

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Os pontos  $x_1$  e  $x_2$  coordenadas definidas na elipse inicial, são rotacionados e definidos pela equação (2.22).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 = x_1^* \cos \theta - x_2^* \sin \theta \\ x_2 = x_1^* \sin \theta + x_2^* \cos \theta \end{cases} \quad (2.22)$$

Dessa forma, a matriz de rotação ( $\varphi$ ) pode ser exibida conforme a equação (2.23).

$$\varphi = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

O ângulo de rotação ( $\theta$ ) permite diagonalizar a matriz fazendo com que a elipse esteja alinhada com os seus respectivos eixos. Para que fosse possível encontrar este ângulo, dado em radianos, é necessário realizar um equacionamento com os autovalores e com uma matriz genérica, descrita na equação (2.24)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Realizando a primeira multiplicação matricial, tem-se a equação (2.25).

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta a_{11} + \sin \theta a_{21} & \cos \theta a_{12} + \sin \theta a_{22} \\ -\sin \theta a_{11} + \cos \theta a_{21} & -\sin \theta a_{12} + \cos \theta a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A multiplicação matricial realizada pela linha 1 e pela coluna 2 da equação (2.25) resulta em 0, com isso, ela será utilizada para desdobramento do equacionamento descrito na equação (2.26).

$$-\sin \theta (\cos \theta a_{11} + \sin \theta a_{21}) + \cos \theta (\cos \theta a_{12} + \sin \theta a_{22}) = 0 \quad (2.26)$$

Por ser uma matriz simétrica, o termo  $a_{12}$  é igual ao termo  $a_{21}$  e obtém-se a equação (2.27).

$$-\sin \theta \cos \theta (a_{11} - a_{22}) + a_{12}(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \quad (2.27)$$

Com o uso das propriedades trigonométricas descritas pela equação (2.28), torna-se exequível o término do equacionamento.

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (2.28)$$

Substituindo os termos encontrados na equação (2.27) com o uso das identidades trigonométricas, chega-se à equação (2.29).

$$-\frac{1}{2}\sin 2\theta(a_{11} - a_{22}) + \cos 2\theta (a_{12}) = 0 \quad (2.29)$$

Passando um dos termos para o outro lado da equação, tem-se a equação (2.30).

$$-\frac{1}{2}\sin 2\theta(a_{11} - a_{22}) = -\cos 2\theta (a_{12}) \quad (2.30)$$

Realizando mais algumas operações matemáticas, chega-se na equação (2.31).

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (2.31)$$

A partir dos conceitos trigonométricos, aplicando a inversa da função tangente para isolar  $2\theta$ , obtém-se a equação (2.32).

$$2\theta = \arctg\left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) \quad (2.32)$$

Por fim, isola-se  $\theta$  e se obtém a equação do ângulo de rotação, descrito na equação (2.33).

$$\theta = \frac{1}{2}\arctg\left(\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) \quad (2.33)$$

Ao se comparar o resultado obtido pela matriz genérica com os termos da matriz de variância-covariância, pode-se escrever o ângulo  $\theta$  de acordo com a equação (2.34).

$$\theta = \frac{1}{2}\arctg\left(\frac{2\sigma_{x_1x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2}\right) \quad (2.34)$$

Ao obter os autovetores da matriz de variância-covariância e o ângulo de rotação, pode-se escrever a equação (2.35) e a equação (2.36).

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta = \cos\theta \quad (2.35)$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta \sin\frac{\pi}{2} = -\sin\theta \quad (2.36)$$

Deste modo são exibidos os autovetores da matriz de variância-covariância sendo descritos na forma trigonométrica, o que facilita a determinação da matriz de rotação ( $\Phi$ ). A matriz de rotação é uma matriz simétrica e ortogonal e pelo fato de revelar seus autovetores, ela pode ser usada para transformar os dados originais em novas variáveis que expliquem a variação dos dados. Tal matriz é demonstrada na equação (2.23) e os elementos são calculados a partir do ângulo de rotação descrito na equação (2.34). A partir da técnica de decomposição obtém-se os autovalores e autovetores da matriz  $\Sigma$ . Assim, o elipsoide de  $\Sigma$  pode ser obtido pela equação (2.37).

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c^2 \quad (2.37)$$

Também se pode escrever  $\Sigma$  de outras formas, tal como descrito na equação (2.38).

$$\Sigma = \Phi \Lambda \Phi^T \quad (2.38)$$

Assim, pode-se reescrever a equação anterior para obter a equação (2.39).

$$\Phi^T \Sigma \Phi = (\Phi^T \Phi) \Lambda (\Phi^T \Phi) \quad (2.39)$$



Substituindo o termo  $\Sigma^{-1}$ , tem-se a equação (2.40).

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\varphi} \Lambda^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c^2 \quad (2.40)$$

Ao aplicar a raiz em ambos os lados, da equação, obtém-se a nova equação (2.41).

$$\sqrt{[\boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^T \Lambda^{-1/2} \Lambda^{-1/2} [\boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]} = \sqrt{c^2} \quad (2.41)$$

O termo à direita da equação anterior é definido como a raiz do qui-quadrado ( $\sqrt{\chi^2}$ ), que é considerada uma medida significativa para avaliar e adequar modelos teóricos à observação de dados. O qui-quadrado é o resultado da soma de variáveis normais padronizadas ao quadrado, conforme descrito pela equação (2.42). (JOHNSON; WICHERN, 2007).

$$\Lambda^{-1/2} [\boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] = \sqrt{\chi^2} \quad (2.42)$$

Pelo fato de  $\Sigma$  ser uma matriz ortonormal, que é uma matriz em que todas as suas colunas e linhas possuem norma valendo 1 e são mutuamente ortogonais. Matrizes ortogonais formam entre si um ângulo de 90°, além de possuir colunas independentes. Assim, se as duas matrizes normalizadas geram este ângulo entre si, são chamados de ortonormais. Ressalta-se que o fato da matriz ser ortogonal sugere um papel importante ao se tratar de rotações. Diante disso, pode-se escrever tais propriedades desta matriz na equação (2.43).

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^{-1} = \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T = \mathbf{I} \end{cases} \quad (2.43)$$

Com tais propriedades, evolui-se a equação (2.42) para a equação (2.44).

$$[\boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] = \sqrt{\chi^2} \Lambda^{1/2} \quad (2.44)$$

Isolando  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}$ , tem-se a equação (2.45).

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\varphi} \left[ \sqrt{\chi^2} \Lambda^{1/2} \right] \quad (2.45)$$

Posto isso é possível encontrar o valor de  $\mathbf{x}$ , descrito na equação (2.46).

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varphi} \left[ \sqrt{\chi^2} \Lambda^{1/2} \right] \quad (2.46)$$

Dessa forma, a elipse pode ser definida como um lugar geométrico que está compreendido entre duas circunferências de raios respectivamente iguais ao semieixo maior, que é dado por (a), e ao seu semieixo menor, dado por (b). Um ponto qualquer Q da elipse pode ser escrito a partir das relações trigonométricas que são dadas pelas regiões explícitas pela equação (2.47).

$$\begin{cases} \overline{OS} = x \therefore x = (a) \cos \alpha \\ \overline{MN} = y \therefore y = (b) \sin \alpha \end{cases} \quad (2.47)$$

Diante disso, Q pode ser representado pela equação (2.48).

$$Q = \begin{bmatrix} (a) \cos \alpha \\ (b) \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\sqrt{\lambda_1} \cos \alpha \\ c\sqrt{\lambda_2} \sin \alpha \end{bmatrix} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (2.48)$$

Diante disso, a equação da elipse rotacionado ( $\theta$ ) e a paramétrica ( $\alpha$ ) será obtido de acordo com a equação (2.49) e a equação (2.50).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\chi^2 \lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\chi^2 \lambda_2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\chi^2 \lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\chi^2 \lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Substituindo as funções trigonométricas, pode-se obter um modelo geral que é dado pela equação (2.51).

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\sqrt{\lambda_1}h_{11}\cos \alpha - c\sqrt{\lambda_2}h_{12}\sin \alpha \\ c\sqrt{\lambda_1}h_{21}\cos \alpha + c\sqrt{\lambda_2}h_{22}\sin \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow c = \sqrt{\chi^2_{(p,\alpha/2)}}; 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (2.51)$$

O ângulo de rotação ( $\theta$ ) da elipse está associado à correlação e aos autovetores da matriz de variância-covariância ( $\Sigma$ ). O Ângulo ( $\alpha$ ) descreve qualquer ponto da elipse em coordenadas trigonométricas e tem a função de desenhar a elipse. Deste modo, as relações entre os autovetores da matriz de variância-covariância e o ângulo de rotação podem ser descritos de acordo com a equação (2.52).

$$\begin{bmatrix} x_{p,r}^* \\ y_{p,r}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (2.52)$$

Na formulação da equação (2.52), o vetor  $\mu_i$  é o vetor de médias, enquanto  $c$  é igual à raiz quadrada do qui-square ( $\chi^2$ ).

### 3. Estudo do modelo com base no CFD

O projeto aqui apresentado tem como intuito gerar uma elipse de confiança que avalie algumas respostas de um ventilador centrífugo industrial que, são obtidas a partir do uso do *Computacional Fluid Dynamics* (CFD), que é um método numérico amplamente utilizado para a solução de problemas de engenharia (BLAZEK, 2015). De posse dos resultados do CFD, a construção da elipse parte das duas variáveis que possuem a maior correlação entre si.

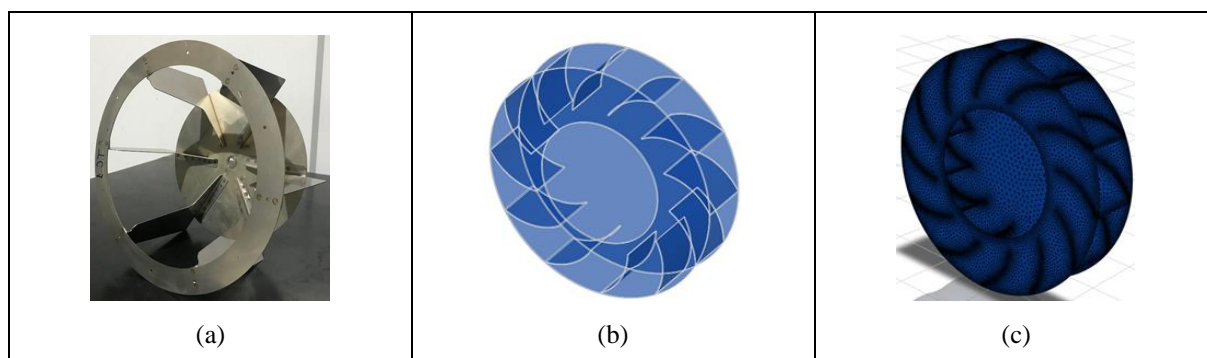
O estudo CFD é feito avaliando um ventilador centrífugo, que é um equipamento utilizado para movimentar fluidos. Ele é composto por um rotor que faz o movimento dentro de uma carcaça, criando fluxo de ar com a ação de forças centrífugas. O fato dele ser centrífugo significa que o ventilador irá rotacionar o ar com ângulo perpendicular à direção do eixo do rotor.

O funcionamento do ventilador é baseado na conversão de energia mecânica para energia cinética. Uma das principais vantagens deste tipo de ventilador é sua eficiência em lidar com resistências de fluxo de ar e sua capacidade em gerar pressão estática maior do que os ventiladores axiais.

A melhoria da eficiência do ventilador é o ponto chave de todo o desenvolvimento desse estudo, mas, ressalta-se que a projeção dos elementos não pode ser feita de forma dependente, visto que ações feitas geram impactos na efetividade do ventilador. Com o uso da elipse de confiança, é possível prever as regiões para o desenvolvimento do produto, o que facilita a construção e o desenvolvimento deste. Assim, ao buscar avaliar essa eficiência, é possível utilizar modelos de valores médios com a aplicação da Série de Taylor (FANG; XU, 2011).

Com um tamanho da voluta padrão definido pela empresa, fatores que foram alterados durante as simulações foram: circunferência interna do ventilador, quantidade de pás, dimensionamento das pás, angulação de entrada e de saída das pás e material. A Figura 2a mostra o ventilador atual da empresa solicitante, enquanto a Figura 2b exibe que obteve o melhor resultado em relação as suas respostas e a Figura 2c com o seu modelo já com a malha refinada a partir da utilização do *Finite Element Method* (FEM).

Figura 2 – Geometria e malha do ventilador centrífugo



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Em processos industriais que demandam o movimento controlado de fluidos, o ventilador centrífugo é considerado essencial para garantir o fornecimento ideal do recinto. A capacidade de fornecimento de fluxo contínuo e controlado corrobora para o controle preciso da temperatura, avaliação de partículas e controle de condições de pressões. A vazão mássica na saída ( $\dot{m}$ ) e o torque requerido ( $T$ ) calculados pelo Ansys Fluent são calculados conforme a equação (3.1) e a equação (3.2).

$$\dot{m} = \int \rho \mathbf{V} d\mathbf{A} \quad (3.1)$$

$$T = (\int_S \mathbf{R} (\bar{\mathbf{r}}\mathbf{N}))dS \mathbf{Y} \quad (3.2)$$

Burgmann et al., (2018) avaliam que a vazão mássica está diretamente relacionada à eficiência do ventilador centrífugo. Assim, foram avaliadas as correlações entre a vazão mássica na saída [g/s], a massa do ventilador [g], o torque requerido [Nm] e o Índice de Desempenho (ID) do mesmo. As duas maiores correlações envolviam a vazão mássica com alguma dessas variáveis. A correlação mais elevada ocorreu em relação ao torque (0,894) e a segunda em relação ao ID (0,855). Entretanto, o ID envolve outras variáveis e, por isso, o estudo foi desenvolvido baseado na relação entre vazão mássica de saída e o torque requerido.

A vazão mássica na saída de um ventilador centrífugo está relacionada à quantidade de massa de fluido, neste caso, o ar, transportado por este ventilador em uma unidade de tempo, nesse caso, a quantidade de gramas transportadas por segundo. Enquanto o torque requerido é a quantidade de força de torção necessária para que o rotor do ventilador gire e que possa gerar o fluxo de ar desejado. A Tabela 1 mostra os resultados de vazão e de torque (alta correlação) do ventilador centrífugo.

Tabela 1 – Experimentos realizados

Experimentos	Vazão mássica na saída [g/s]	Torque requerido [N.cm]
1	199,674	268,000
2	194,638	150,145
3	183,644	116,315
4	185,825	89,002
5	196,397	104,772
6	199,762	103,272
7	262,268	332,279
8	220,234	223,062
9	304,962	392,313
10	312,254	403,654
11	297,098	381,920
12	288,037	365,961
13	314,695	406,899
14	301,366	384,558
15	282,325	347,305
16	302,400	321,000
17	275,400	294,500
18	184,700	113,470
19	305,800	415,340
20	265,421	156,700
21	249,572	220,145
22	237,214	175,143
23	256,470	285,410
24	245,713	125,720
25	215,084	152,678

Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

#### 4. Construção da elipse de confiança

A partir dos experimentos realizados e diante dos equacionamentos apresentados anteriormente, é possível construir a matriz de variância-covariância com base nos dados coletados e calcular os parâmetros da elipse de confiança, conforme apresentados na Tabela 2. Estes fornecem a representação quantitativa estatística dos dados coletados e permitem uma análise precisa e confiável dos mesmos. Paiva et al. (2009) destacam que a análise da variância e da covariância é fundamental para a otimização dos resultados. Assim, a compreensão dos dados é facilitada e o fenômeno é mais profundamente estudado, o que permite uma tomada de decisão mais embasada e assertiva.

Tabela 2 – Equacionamento dos dados

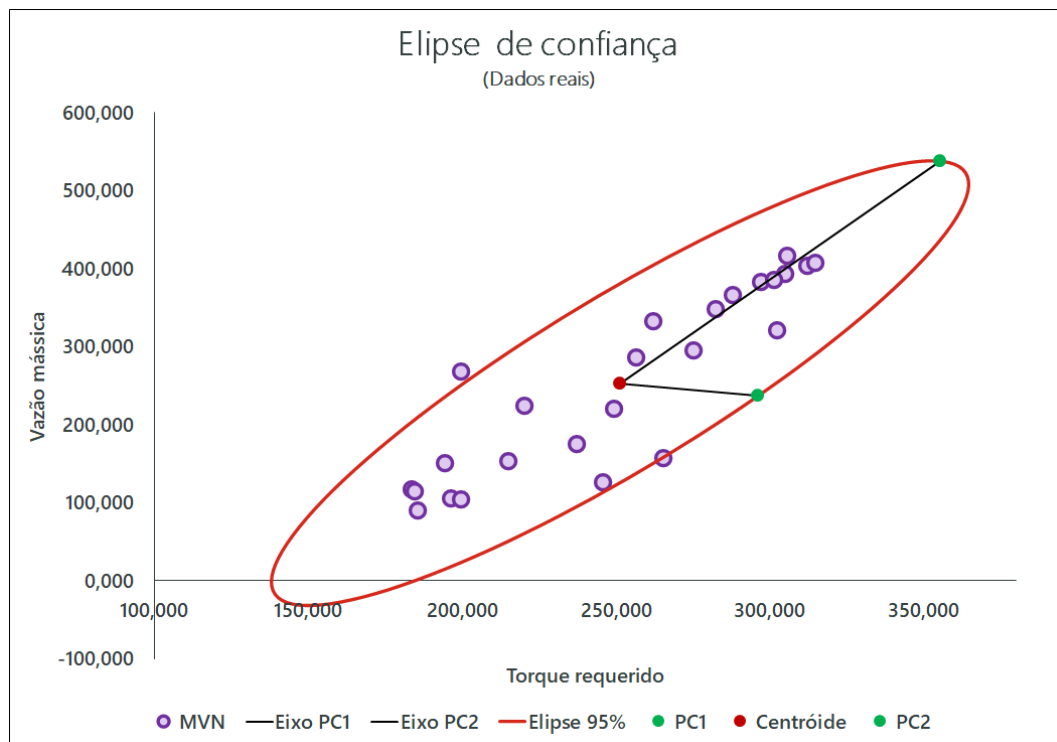
$\Sigma$	<hr/>		$\phi$	<hr/>		<hr/>		$\mu_1^T$	$\mu_2^T$	<hr/>		
	2141,43	4815,87		0,94	0,34					Pontos	x	y
	4815,87	13550,98		-0,34	0,94		251,24	253,18		PC <sub>1</sub>	44,84	-16,40
	<hr/>			<hr/>			<hr/>			PC <sub>1</sub> + $\mu$	296,08	236,79
$p$	2,00		$\Lambda$	380,48	0,000	$\chi^2$	$\chi^2$	5,99		PC <sub>2</sub>	104,02	284,47
$\rho$	0,89			0,000	15311,93					PC <sub>2</sub> + $\mu$	355,26	537,60
$\theta$	-0,35			<hr/>					<hr/>			<hr/>
$x$	5,00%		$L^T$	46,28	104,07	Raios			$(\chi^2\Lambda)^{1/2}$			
				0,000	52,16	Externo	47,75			47,74	0,00	
						Interno	302,89			0,00	302,89	

Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Após encontrar os resultados, a construção da elipse de confiança propicia a visualização da incerteza e da dispersão dados, o que contribui para a avaliação da variabilidade do conjunto de dados. A elipse é a quantificação da relação entre a vazão mássica na saída e o torque requerido. Mesmo com a alteração da parametrização não é possível aumentar esta razão, visto que, são dados correlacionados, entretanto, com tal visualização é possível compreender as regiões de interesse para o projeto.

Com isso, a elipse de confiança com os dados reais é mostrada na Figura 3, enfatiza-se que cada um dos pontos representa um novo projeto de produto com características diferentes e que busquem o melhor resultado para a satisfação do cliente, entretanto, compreende-se que não há como obter uma vazão muito alta e um torque muito baixo, o que torna necessário um *trade-off* que busca o resultado ideal nos parâmetros permitidos. Pelo fato de as variáveis serem dependentes, não é possível chegar na utopia ou desacoplar a vazão mássica na saída máxima e o torque requerido mínimo, com isso, torna-se necessário conceber a faixa na curva ideal que o cliente deseja, visto que as variáveis são correlacionadas de forma natural.

Figura 3 – Elipse de confiança com dados reais do ventilador centrífugo



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

## 5. Conclusão

Normalmente para algumas áreas da engenharia, conceitos de estatística, como apresentados neste artigo, são difíceis de serem utilizados, desse modo, a fim de aprimorar o estudo da área térmica por meio do ventilador, inseriu-se o seu conceito de região de confiança.

O conceito de região de confiança apresenta de forma simples que, para todos os dados gerados tanto por meio de experimentos como pelo meio de computação fluidodinâmica, haverá uma variância e uma covariância nos dados, e ainda assim há pontos operação que apresentam resultados ótimos.

Há uma união da análise estatística multivariada com a análise fluidodinâmica computacional, enquanto a elipse de confiança permite a representação quantitativa estatística dos dados, o CFD possibilita a simulação numérica de fluidos, realizando experimentações computacionais. Com o uso da análise estatística multivariada é possível analisar, compreender e aprimorar diversos processos industriais, com isso, foi abordado no artigo a elipse de confiança que permite investigar o controle dentro de um intervalo de dados e ajustar as variáveis do processo com o propósito de avaliar o que acontece dentro desta região de confiança.

Compreende-se também que a correlação entre a vazão mássica na saída e o torque requerido são naturais, diante dessa relação, torna-se crucial considerar a existência de uma curva ideal

desejável para atender os requisitos do cliente. Com avaliação destes dados, torna-se possível a identificação de padrões e a influência das variáveis, com isso, é possível tomar decisões fundamentais na otimização do processo e no desenvolvimento de novos produtos.

## 6. Agradecimentos

Expressa-se o agradecimento a à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo suporte financeiro fornecido para a realização deste artigo científico.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. A. **Aprimoramento do poder discriminatório de funções elipsoidais modificadas por cargas fatoriais rotacionadas na formação otimizada de agrupamentos**. Tese, UNIFEI, 2021.

AMORIM, L. F., DE PAIVA, A. P., BALESTRASSI, P. P., & FERREIRA, J. R. (2022). Multi-objective optimization algorithm for analysis of hardened steel turning manufacturing process. **Applied Mathematical Modelling**, 106, 822-843.

BLAZEK, Jiri. **Computational fluid dynamics: principles and applications**. Butterworth-Heinemann, 2015.

BURGMANN, Sebastian et al. Development of a centrifugal fan with increased part-load efficiency for fuel cell applications. **Renewable Energy**, v. 116, p. 815-826, 2018.

FANG, Xiande; XU, Yu. Development of an empirical model of turbine efficiency using the Taylor expansion and regression analysis. **Energy**, v. 36, n. 5, p. 2937-2942, 2011.

JOHNSON, R.A.; WICHERN, D. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. 6ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2007, 773p.

MOREIRA, M. O.; BALESTRASSI, P. P.; PAIVA, A.P.; RIBEIRO, P.F.; BONATTO, B. D. Design of experiments using artificial neural network ensemble for photovoltaic generation forecasting. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, 2021.

PAIVA, A. P. et al. A multivariate mean square error optimization of AISI 52100 hardened steel turning. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 43, n. 7, p. 631-643, 2009.

RENCER, A.C.; CHRISTENSEN, W.F. **Methods of Multivariate Analysis**. 3ed. Department of Statistics, Brigham Young University, Provo, UT: John Wiley & Sons, 758p., 2012.