PRÁCE OPRAVOVANÁ TUTOREM

Matematika 2, kombinované studium, 2018

JMÉNO (hůlkovým písmem):	....
UČO:	....
Datum odevzdání:	....
Podpis:	....

POT musí být vypracován RUČNĚ (prosím o slušnou úpravu, nečitelné řešení nebude hodnoceno). U úloh se hodnotí nejen výsledné řešení, ale též POSTUP! Výpočetní programy lze použít jen pro ověření správnosti výsledků. Práci je nutné odevzdat v papírové podobě na posledním tutoriálu nebo vložit naskenovanou jako **1 soubor formátu pdf** do odevzdávárny nejpozději do 31.12.2018.

Zadání úloh

Příklad 1: Mějme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že x_1, x_2 a x_3 jsou vektory odpovídající vlastním číslům matice, dále najděte přidružená vlastní čísla.

Příklad 2: Pro následující matice najděte vlastní čísla a také vektory, které odpovídají reálným vlastním číslům.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Příklad 3: Pomocí Sylvestrova kritéria rozhodněte o definitnosti kvadratické formy:

a) $2x^2 - 2xy + y^2$ b) $-3x^2 + 8xy - 6y^2$ c) $-x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3 + 4x_2^2 + 6x_3^2$

Příklad 4: Najděte lineární aproximaci (Taylorův polynom prvního řádu) v bodě $[1,1]$ pro funkce

a) $f(x,y) = e^{-xy}$

b) $f(x,y) = 2e^{x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \ln(1+xy^2)$

Příklad 5: Načrtněte uvedené množiny a rozhodněte, zda jsou konvexní:

a) $\{(x,y) : x^2 + y^2 > 16\}$

b) $\{(x,y) : xy \leq 1\}$

c) $\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \geq 1\}$

d) $\{(x,y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2\}$

Příklad 6: Rozhodněte o konvexitě/konkávnosti uvedených funkcí. Zdůvodněte!

a) $z = x + y - e^x - e^{x+y}$

b) $z = e^{x+y} + e^{x-y} - \frac{y}{2}$

c) $w = (x + 2y + 3z)^2$

Příklad 7: Použitím grafické metody řešte problém lineárního programování:

a) $max \;\; 3x_1 + 4x_2$ s podmínkami $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 4 \end{array} \right.$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

b) $min \;\; 10u_1 + 27u_2$ s podmínkami $\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 + 3u_2 & \geq & 11 \\ 2u_1 + 5u_2 & \geq & 20 \end{array} \right.$ $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$

Příklad 8: Řešte následující problém graficky

$max \;\; 2x + 7y$ s podmínkami $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 5y & \leq & 20 \\ 3x + 7y & \leq & 21 \end{array} \right.$ $x \geq 0,\ y \geq 0$

a) Zapište duální problém a vyřešte ho graficky.

b) Jsou si optimální hodnoty účelových funkcí primární a duální úlohy rovny?

Příklad 9: Firma vyrábí dva výrobky A a B. firma vydělává 300 za jednu jednotku výrobku A a 200 za jednu jednotku výrobku B. Existují tři fáze výrobního procesu. Výrobek A prochází 6 hodin procesem přípravy, 4 hodiny výrobním procesem a 5 hodin balícím procesem. Výrobek B prochází 3 hodin procesem přípravy, 6 hodiny výrobním procesem a 5 hodin balícím procesem. Firma má na výrobu k dispozici celkem 54 hodin v první fázi, 48 ve druhé a 50 ve třetí fázi.

a) Formulujte a řešte problém lineárního programování pro maximalizaci zisku, který je omezen danými limity.

b) Zapište a řešte duální problém.

c) Pomocí řešení duálního problému odhadněte jak moc bude optimální zisk změněn, pokud firma dostane dvě hodiny navíc na přípravu a jednu hodinu navíc na balení.

Příklad 10: Zákazník se rozhoduje o nákupu ovoce, přitom má na výběr pomeranče a jablka. Cena pomerančů je 40 Kč za kg a cena jablek je 25 Kč za kg. Je známo, že 1 kg pomerančů obsahuje 4 mg vitamínu C a 1 kg jablek obsahuje 5 mg vitamínu C.

a) Zapište matematický model úlohy pro maximalizaci celkového obsahu vitamínu C v zakoupeném ovoci, má-li zákazník k dispozici rozpočet 200 Kč a tašku o nosnosti 20 kg.

b) Zapište také duální problém.

c) Je-li optimální hodnota duální proměnné pro rozpočtové omezení rovna $\frac{1}{5}$ a pro hmotnostní omezení 0, odhadněte jak se změní maximální obsah vitamínu C při navýšení rozpočtu o 10 Kč?

Příklad 11: Řešte následující problémy převedením na jednorozměrnou optimalizaci.

a) max $10x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ za podmínky $2x + 4y = 10$.

b) max $12x\sqrt{y}$ za podmínky $3x + 4y = 12$.

Příklad 12: Předpokládejme, že cena jednotky prvního výrobku je \$2 a že cena jednotky druhého výrobku y je \$4. Osoba s užitkovou funkcí

$$u(x, y) = 100xy + x + 2,$$

kde x, y jsou množství nakoupených výrobků, obdrží \$1000, které musí všechny vynaložit na obě složky x a y. Vyřešte problém maximalizace užitku.

Příklad 13: Užitím metody Lagrangeových multiplikátorů řešte problém:

a) max xy za podmínky $x + 3y = 24$.

b) min $-40Q_1+Q_1^2-2Q_1Q_2-20Q_2+Q_2^2$ za podmínky $Q_1+Q_2 = 15$.

Příklad 14:

a) Řešte problém
max $f(x, y) = 24x - x^2 + 16y - 2y^2$ za podmínky $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 44$.

b) Jaká je přibližná změna v optimální hodnotě funkce $f(x, y)$, zvýší-li se pravá strana omezení o 1? Využijte optimální hodnotu multiplikátoru.

Příklad 15: Je dán optimalizační problém

$$max \;\; 1 - x^2 - y^2 \qquad \text{s podmínkami} \qquad x \geq 3 \quad a \quad y \geq 2$$

a) Vyřešte problém graficky.

b) Sestavte pro úlohu Kuhn-Tuckerovy podmínky.

c) Ověřte, že jsou podmínky v nalezeném bodě optima splněny.