MBA Big Data e Business Intelligence

Matrizes

Prof. Abraham Laredo Sicsu

Parte I – definições e operações com R

Tan, Steibach e Kumar (2006):

" vector representation brings with it powerful mathematical tools that can be used to represent , transform and analyze data"

Matriz de dados

- Cada cliente (uma linha) pode ser representado por um vetor
  cliente 1 = (376,16,1, 80,1)
- Cada variável pode ser representada por um vetor
  - **Despesas = (376, 198, . . . , 61)**

CLIENTE	DESPESAS	INTERVALO	ITENS	IDADE	DEPENDENTES
1	376	16	1	80	1
2	198	64	4	56	2
3	84	8	0,5	24	0
4	122	32	2	46	1
5	196	40	2,5	52	3
6	298	48	3	44	2
7	130	40	2,5	30	1
8	138	56	3,5	58	0
9	84	56	3,5	42	0
10	199	96	6	46	0
11	408	64	4	68	1
12	61	56	3,5	34	2

Definições

Notas de 5 alunos

Vetor coluna (5 x 1)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vetor linha (1x5) →"transposto" do vetor coluna

$$\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{x}' = [\mathbf{8}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{4}]$$

Transposição

$$\boldsymbol{x}' : \text{vetor transposto de } \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} : \text{vetor transposto de } \boldsymbol{x}'$$

Note que os vetores estão em negrito

Definições

Soma de vetores

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Produto por um escalar

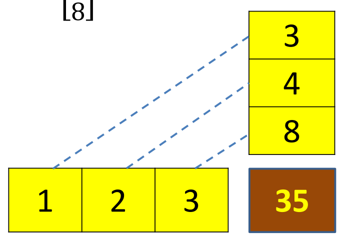
$$2\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 18 \end{bmatrix} \quad ou \quad 5(3,6,10) = (15,30,50)$$

Vetor nulo: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **vetor unitário:** $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Produto escalar

- Outros nomes : dot product ou produto interno
  - Vetores de mesma ordem (nx1)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{x}'.\mathrm{y} = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 8 = 35$$



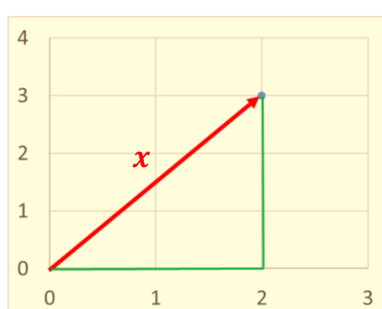
- Produto escalar de um vetor por si mesmo

$$\mathbf{x}'.\mathbf{x} = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \qquad \text{note que } \mathbf{x}'.\mathbf{x} \geq 0$$

Módulo de um vetor

- Módulo ou comprimento de um vetor $\|x\| = \sqrt{\mathrm{x}'.\mathrm{x}}$ $\quad note\ que\ \mathrm{x}'.\mathrm{x} \geq 0$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \|x\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3{,}61$$



Cálculos com R

> a=c(1,2,5)

> b=c(4,3,8)

produto escalar $a^t . b$

t(a) transposto do vetor a

> t(a) %*% b # o operador **%*%** é para produto de matrizes

```
     [,1]
[1,]   50
```

Matrizes

- Matriz **A** (3x4)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- Genericamente

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- Representamos como $\mathbf{A}_{nxp} = [a_{ij}]_{nxp}$

- Transposta de $\mathbf{A} : \mathbf{A}' \text{ou} \, \mathbf{A}^t$ $(4x3)$ ➔ $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \\ 8 & 5 & 8 \\ 5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

Propriedades da matriz transposta

$(\mathbf{A^t})^\mathbf{t} = \mathbf{A}$

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\mathbf{t} = \mathbf{A^t} + \mathbf{B^t}$

$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\mathbf{t} = \mathbf{B^t} \cdot \mathbf{A^t}$ (veremos produto mais adiante)

$\mathrm{k} \in \mathrm{R};\ (\mathrm{k} \cdot \mathbf{A})^\mathrm{t} = \mathrm{k} \cdot \mathbf{A^t}$

Matrizes

- Matriz identidade

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{ou}\ \ \mathbf{D} = diag(5, -3, 5)$$

- Matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 2 \\ 7 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

- se **A** é simétrica ➔ $\mathbf{A^t = A}$

Matriz de correlações

Consideremos o arquivo de dados FREES

INCM	HIGH	OVER	PHYD	BEDP	EXPN
14110,00	68,70	13,40	222,70	3,26	762,21
17829,00	72,30	11,40	239,00	2,87	772,77
13945,00	71,00	11,90	308,00	2,88	653,64
18636,00	72,20	13,80	398,20	3,61	1103,39
15189,00	61,10	14,80	296,70	3,16	851,45

$$r_{xy} = \text{Correlation}\,(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)}\sqrt{\text{var}(y)}}.$$

> print(**cor(FREES)**,digits = 3)

```
        INCM   HIGH   OVER   PHYD   BEDP   EXPN
INCM   1.000  0.405 -0.151  0.702 -0.420  0.265
HIGH   0.405  1.000 -0.305  0.219 -0.524 -0.318
OVER  -0.151 -0.305  1.000  0.109  0.579  0.477
PHYD   0.702  0.219  0.109  1.000 -0.273  0.436
BEDP  -0.420 -0.524  0.579 -0.273  1.000  0.527
EXPN   0.265 -0.318  0.477  0.436  0.527  1.000
```

Produto de matrizes

Sejam $A_{n,p}=(a_{ij})$ *e* $B_{p,k}=(b_{ij})$

8	8
4	3
3	0

3	5	1
6	1	2

47	

Se X(3x3) e Y(3x2)

XY é possível → C(3x2)

YX não é possível → Y(3x2) Y(3x3)

- Nem sempre é possível obter **B.A** (incompatibilidade linhas e colunas)
- Em geral, quando ambas existirem, $AB \neq BA$,
- $(AB)' = B'A'$

Operator or Function	Description
A * B	Element-wise multiplication
A %*% B	Matrix multiplication
A %o% B	Outer product. **AB'**
crossprod(A,B) **crossprod(A)**	**A'B** and **A'A** respectively.
t(A)	Transpose
diag(x)	Creates diagonal matrix with elements of **x** in the principal diagonal
diag(A)	Returns a vector containing the elements of the principal diagonal
diag(k)	If k is a scalar, this creates a k x k identity matrix. Go figure.
solve(A, b)	Returns vector **x** in the equation **b = Ax** (i.e., $A^{-1}b$)
solve(A)	Inverse of **A** where A is a square matrix.
ginv(A)	Moore-Penrose Generalized Inverse of **A**. ginv(A) requires loading the **MASS** package.
y<-eigen(A)	**y$val** are the eigenvalues of **A** **y$vec** are the eigenvectors of **A**
y<-svd(A)	Single value decomposition of **A**. **y$d** = vector containing the singular values of **A** **y$u** = matrix with columns contain the left singular vectors of **A** **y$v** = matrix with columns contain the right singular vectors of **A**
R <- chol(A)	Choleski factorization of **A**. Returns the upper triangular factor, such that **R'R = A**.
y <- qr(A)	QR decomposition of **A**. **y$qr** has an upper triangle that contains the decomposition and a lower triangle that contains information on the Q decomposition. **y$rank** is the rank of A. **y$qraux** a vector which contains additional information on Q. **y$pivot** contains information on the pivoting strategy used.
cbind(A,B,...)	Combine matrices(vectors) horizontally. Returns a matrix.
rbind(A,B,...)	Combine matrices(vectors) vertically. Returns a matrix.
rowMeans(A)	Returns vector of row means.
rowSums(A)	Returns vector of row sums.
colMeans(A)	Returns vector of column means.
colSums(A)	Returns vector of column sums.

Operações com R

#geração das matrizes A e B

```
> a1=c(1,5,4)
> a2=c(6,4,2)
> A=rbind(a1,a2);A
   [,1] [,2] [,3]
a1    1    5    4
a2    6    4    2
```

A(2x3)

```
> b1=c(2,4)
> b2=c(1,3)
> b3=c(5,2)
> B=rbind(b1,b2,b3);B
  [,1] [,2]
b1    2    4
b2    1    3
b3    5    2
```

B(3x2)

Operações com R

> t(A)

```
     a1 a2
[1,]  1  6
[2,]  5  4
[3,]  4  2
```

> AB=A%*%B ; AB

```
   [,1] [,2]
a1   27   27
a2   26   40
```

> BA=B%*%A ; BA

```
   [,1] [,2] [,3]
b1   26   26   16
b2   19   17   10
b3   17   33   24
```

> diag(AB) # vetor com elementos da diagonal

```
[1] 27 40
```

Traço de uma matriz :

- soma dos elementos da diagonal

> sum(diag(AB))

```
[1] 67
```

Note que AB ≠ BA

Determinante de uma matriz quadrada

A toda matriz quadrada A corresponde um número |A|, **determinante da matriz**

Seja a matriz $\boldsymbol{A}(\mathbf{2}\times\mathbf{2}) = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$

det (**A**) = |**A**| = 5 × 6 – 3 × 4 = 18 ($|A| = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$)

- Matrizes de ordem superior a 2x2 → vamos utilizar o R
  - Fórmulas : vide livros de álgebra matricial

Determinante de uma matriz

- **Propriedades dos determinantes**

1. $|A| = |A'|$
2. $A(pxp) \rightarrow |cA| = c^p|A|$
3. $\det(AB)=\det(BA)=\det(A)\det(B)$
4. Se $D=\text{diag}(a_1,a_2,\ldots,a_p)$ [matriz diagonal] $\rightarrow |\boldsymbol{D}| = \prod_1^p \boldsymbol{a_i}$
5. $|A^{-1}| = 1/|A|$ (veremos matriz inversa adiante)

Dependência linear

Os vetores $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ...,$\mathbf{x}_p$ são ***linearmente dependentes*** se existirem p escalares k_1, k_2, ...,k_p, não nulos, tais que

$$k_1\, \mathbf{x}_1 + k_2\, \mathbf{x}_2 + \ldots + k_p\, \mathbf{x}_p = 0$$

Caso contrário são ditos ***linearmente independentes***

- Dependência linear causa problemas
  - Redundância ente variáveis: uma variável é combinação linear das demais
  - Multicolinearidade em regressão, por exemplo

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 22 \\ 32 \\ 60 \end{bmatrix}$ $\quad 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} + (-0{,}5)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ **0: vetor nulo**

Cálculo do determinante com R

```
> A=matrix(c(5,3,4,6), nrow = 2);A
     [,1] [,2]
[1,]    5    4
[2,]    3    6
```

Matriz 2x2 de slide anterior

```
> det(A)
[1] 18

> x1=c(3,5,12)
> x2=c(4,2,9)
> x3=c(8,2,3)
> X=rbind(x1,x2,x3);X
   [,1] [,2] [,3]
x1    3    5   12
x2    4    2    9
x3    8    2    3
```

Matriz 3x3 – exemplo

```
> det(X)
[1] 168
```

Matriz inversa

A= matriz tal que det (A) ≠0 →

Existe uma matriz **B**, única, tal que **AB=I** → **notação** A^{-1}

```
> A
   [,1] [,2] [,3]
a1    1   -1    1
a2    2    1    3
a3    1    1    1

> det(A)
[1] -2
```

```
> B=solve(A)
       a1 a2   a3
[1,]  1.0 -1  2.0
[2,] -0.5  0  0.5
[3,] -0.5  1 -1.5
> det(B)
[1] -0.5
> B%*%A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
```

Importante.

Matriz ortogonal

- **A** é dita ortogonal se $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$ → **($\mathbf{A.A}^t$)=I matriz identidade**

Condição para a existência da inversa de uma matriz:

- A inversa de uma matriz $\mathbf{A}_{p,p}$ existe se as *p* colunas da matriz forem linearmente independentes. → det(**A**)≠0
    - Se as colunas forem linearmente dependentes, **det(A) = 0**

Exercício : Cálculo do determinante com R

```
> x1=c(3,5,13)
> x2=c(4,2,8)
> x3=c(8,2,12)
> X=rbind(x1,x2,x3);X

   [,1] [,2] [,3]
x1    3    5   13
x2    4    2    8
x3    8    2   12
```

Note que
vetor[,3] = vetor[,1] + 2 x vetor[,2]

```
> det(X)
```

Tente calcular a inversa de X com R

RANK de uma matriz

RANK (ordem) de uma matriz $A_{m,p}$

É o número de colunas da matriz que forem vetores linearmente independentes

R tem funções para calcular o rank

Aplicação – sistemas lineares

É um conjunto de m $(m \geq 1)$ equações lineares nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. O sistema abaixo é dito como sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \cdots + a_{3n} \cdot x_n = b_3 \\ (\ldots) \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Podemos representar o sistema linear na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A \cdot X = B$
$A: matriz\ dos\ coeficientes\ (mxn)$
$X: matriz\ das\ incógnitas\ (nx1)$
$B: matriz\ dos\ termos\ independentes\ (mx1)$

Slide do R. Togneri

Sistema lineares – resolução com inversa

Vamos considerar um sistema no qual o número de equações é igual ao número de incógnitas ($m = n$).

Precisamos isolar a matriz X da equação. Se A for invertível, temos:

$$\boldsymbol{A \cdot X = B} \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot \boldsymbol{A \cdot X} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \quad \rightarrow \quad I \cdot \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2 \cdot x + y + 3 \cdot z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Slide do R. Togneri

Solução com R

```
> a1=c(1,-1,1);  a2=c(2,1,3);  a3=c(1,1,1)
> A=rbind(a1,a2,a3)
> B=c(4,0,0)
> Ainv=solve(A)
> X=Ainv%*%B
> X
     [,1]
[1,]    4
[2,]   -2
[3,]   -2
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estatística : regressão múltipla (original)

Objetivo: regressão múltipla de y sobre as demais variáveis (n=2000; p=4)

x1	x2	x3	x4	y
26	-8	17	6	426,00
1	26	1	24	753,00
14	-7	8	19	201,00
18	-2	19	3	313,00

$$b = \begin{bmatrix} b0 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 26 & -8 & 17 & 6 \\ 1 & 1 & 26 & 1 & 24 \\ 1 & 14 & -7 & 8 & 19 \\ 1 & 18 & -2 & 19 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 426,00 \\ 753,00 \\ 201,00 \\ 313,00 \end{bmatrix}$$

Regressão múltipla

$$\hat{y} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{b}_p\mathbf{x}_p$$

Modelo na forma matricial

$$\hat{y} = \mathbf{X}.\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Demonstra-se que a solução de mínimos quadrados para estimar β é dada por:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\boldsymbol{b} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$$

H: hat matrix

(demonstração em livros de análise multivariada)

Exemplo de regressão

(vide script regcommatrizes.R)

Utilizando a função lm

```
> sim=SIMULA80_reg
> reg.lm=lm(data = sim, y~.)
> reg.lm

Call:
lm(formula = y ~ ., data = sim)

Coefficients:
(Intercept)           x1           x2           x3           x4
   -204.488       38.144       38.756        9.344        8.863
```

Exemplo de regressão

```
> simx=model.matrix(data=sim,~.) #gera colunas de "1" na matriz x
> simx=as.data.frame(simx)
> X=simx[,1:5]; X=as.matrix(X)
> Y=simx[6] # forma mais conveniente; melhor que simx [,6]
> Y=as.matrix(Y)
> betas=solve(t(X)%*%X) %*% t(X) %*% Y
```

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}$$

```
> betas
                      y
(Intercept) -204.488127
x1            38.144305
x2            38.756364
x3             9.344195
x4             8.863352
```

Exercícios

- Calcule o determinante da matriz seguinte (resp=44)

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Coloque o sistema seguinte na forma matricial e resolva utilizando a matriz inversa dos coeficientes

  x+y=3 ;

  2x-6y= -10

  (resp: x=1 y=2)

- Idem para

  6x+9y=3;

  2x+3y=5

  (resp: sistema sem solução)

Parte II - Autovalores e autovetores

Transformação de um vetor

Seja a matriz $\mathbf{A}_{n,n}$ e o vetor $\mathbf{x}_{n,1}$

$\mathbf{A.x} = \mathbf{y}_{n,1}$ ➔ **A** transforma o vetor **x** no vetor **y**

Em geral, **y** tem direção diferente de **x**

```
> A
   [,1] [,2] [,3]
a1    1   -1    1
a2    2    1    3
a3    1    1    1

> x=c(2,3,4)

> A%*%x
   [,1]
a1    3
a2   19
a3    9
```

Note que ***x*****=(2, 3, 4)** *e* ***y*****=(3, 19, 9)** *tem direções distintas*

Não existe um escalar λ tal que $\mathbf{x} = \lambda\, y$

Autovalores e autovetores

Seja o vetor x não nulo tal que $\mathbf{A.x} = \lambda\, \mathbf{x}$ onde λ é um escalar

- **A** transforma **x** em outro vetor (λ**x**) com mesma direção que **x**
- Esse vetor **x** é denominado **autovetor** (*vetor próprio, vetor característico ou* ***eigenvector***) de **A**
- λ é o **autovalor** (*valor próprio, valor característico ou* ***eigenvalue***) de **A** associado a **x**

Definição

FGV EDUCAÇÃO EXECUTIVA

Definição 1:

Os autovalores de uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{p,p}$ são as raízes da equação (**equação característica**)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

As p raízes dessa equação são denotadas por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

- Para cada λ_i existe um vetor x que satisfaz a equação $Ax = \lambda_i x$. Um vetor que satisfaça essa equação é dito **autovetor** de A associado a λ (a demonstração não será apresentada aqui). Pode ser **x** ou múltiplo de **x**, não nulo
- **λ** pode ser nulo
- Os **autovalores** podem ser números reais ou complexos.
  - **Se A for simétrica todos os autovalores serão números reais**
  - **Caso usual em aplicações estatísticas**

Exemplo 1

FGV EDUCAÇÃO EXECUTIVA

> W

```
     [,1] [,2]
[1,]    1    5
[2,]    2    4
```

> eigen(W)

```
eigen() decomposition
$values
[1]  6 -1

$vectors
           [,1]       [,2]
[1,] -0.7071068 -0.9284767
[2,] -0.7071068  0.3713907
```

R dá em ordem decrescente

Autovetores padronizados Módulo=1

Exercícios

- Defina no R os vetores

```
v1=eigen(W)$vectors[,1]    #1º autovetor de W
v2=eigen(W)$vectors[,2]    #2º autovetor de W
```

- Calcule os produtos

```
a1=W  %*%  v1
a2 = W  %*%  v2
```

```
$vectors
           [,1]       [,2]
[1,] -0.7071068 -0.9284767
[2,] -0.7071068  0.3713907
```

- Compare **a1** e **a2** com **v1** e **v2** respectivamente

Exemplo 2

```
> Q
     [,1] [,2]
[1,]    1   -2
[2,]    2    4

> eigen(Q)
eigen() decomposition
$values
[1] 2.5+1.322876i 2.5-1.322876i

$vectors
                     [,1]                  [,2]
[1,] -0.5303301+0.4677072i -0.5303301-0.4677072i
[2,]  0.7071068+0.0000000i  0.7071068+0.0000000i
```

Valores complexos

Exemplo 3

```
> D
  [,1] [,2] [,3]
a    1    0    0
b    0    1    0
c    0    0    3

> eigen(D)
eigen() decomposition
$values
[1] 3 1 1

$vectors
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    1
[2,]    0    1    0
[3,]    1    0    0
```

Matriz diagonal
Os autovalores são os valores da diagonal

Matriz simétrica

```
> A
     [,1] [,2]
[1,]  0.8  0.2
[2,]  0.2  0.7
> eigen(A)
eigen() decomposition
$values
[1] 0.9561553 0.5438447

$vectors
           [,1]       [,2]
[1,] -0.7882054  0.6154122
[2,] -0.6154122 -0.7882054
```

Autovetores ortogonais

- Exercício
- Determine os vetores
  v1=eigen(A)$vectors[,1]
  v2=eigen(A)$vectors[,2]
- Calcule o produto $v1^t v2$
  t(v1) %*% v2
- O que significa o resultado ?

PROPRIEDADES

1) O produto dos autovalores é igual ao determinante da matriz
2) Uma matriz $\mathbf{A}$ é singular [det($\mathbf{A}$) =0] sse possuir um autovalor nulo
3) A soma dos autovalores é igual ao traço da matriz
4) Se λ for um autovalor de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}$ for invertível, $1/\lambda$ é um auto valor de A^{-1}
5) Se λ for um autovalor de $\mathbf{A}$, λ será um auto valor de A^t
6) Se A for simétrica, os autovetores $\mathbf{x}_a$ e $\mathbf{x}_b$ correspondentes a autovalores distintos λ_a e λ_b ($\lambda_a \neq \lambda_b$) são ortogonais, i.e., $\mathbf{x}^t_a\,\mathbf{x}_b = 0$
7) Decomposição espectral de A : Toda matriz simétrica pode ser escrita como $\mathbf{A}=\mathbf{P}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\mathbf{P}^t$ onde :

   $\boldsymbol{\Lambda}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $\mathbf{A}$

   $\mathbf{P}$ é uma matriz ortogonal (i.e., $\mathbf{P}\,.\,\mathbf{P}^t\!=\!\mathbf{I}$) cujas colunas são os autovetores padronizados (módulo 1) associados com as entradas na diagonal de $\boldsymbol{\Lambda}$

Autovalores de uma matriz de correlações

> head(IRIS)

	sepal_length	sepal_width	petal_length	petal_width
1	5.1	3.5	1.4	0.2
2	4.9	3.0	1.4	0.2
3	4.7	3.2	1.3	0.2
4	4.6	3.1	1.5	0.2
5	5.0	3.6	1.4	0.2
6	5.4	3.9	1.7	0.4

> R=cor(IRIS) # em geral a matriz de correlações é denotada por R

> R

	sepal_length	sepal_width	petal_length	petal_width
sepal_length	1.0000000	-0.1093692	0.8717542	0.8179536
sepal_width	-0.1093692	1.0000000	-0.4205161	-0.3565441
petal_length	0.8717542	-0.4205161	1.0000000	0.9627571
petal_width	0.8179536	-0.3565441	0.9627571	1.0000000

Autovalores e autovetores de R

FGV EDUCAÇÃO EXECUTIVA

```
> EIG=eigen(R)
> EIG$values
[1] 2.91081808 0.92122093 0.14735328 0.02060771
> AV=EIG$vectors
> AV
           [,1]        [,2]       [,3]       [,4]
[1,]  0.5223716 -0.37231836  0.7210168  0.2619956
[2,] -0.2633549 -0.92555649 -0.2420329 -0.1241348
[3,]  0.5812540 -0.02109478 -0.1408923 -0.8011543
[4,]  0.5656110 -0.06541577 -0.6338014  0.5235463
> round(t(AV)%*%AV,5)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    0    0
[2,]    0    1    0    0
[3,]    0    0    1    0
[4,]    0    0    0    1
```

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1^t	1	0	0	0
v_2^t	0	1	0	0
v_3^t	0	0	1	0
v_4^t	0	0	0	1

Autovalores e autovetores de R

FGV EDUCAÇÃO EXECUTIVA

- Note que
  - Os autovalores são reais e maiores que zero
  - Autovetores são ortogonais
  - A matriz pode ser decomposta como segue:

$$R = AV \, . \, D. \; AV^t$$

    - **AV** matriz dos autovetores
    - **D** Matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de **A**
    - (decomposição spectral de A)

Estes resultados valem para toda matriz de correlações e toda matriz de covariâncias

Operator or Function	Description
A * B	Element-wise multiplication
A %*% B	Matrix multiplication
A %o% B	Outer product. **AB'**
crossprod(A,B) **crossprod(A)**	**A'B** and **A'A** respectively.
t(A)	Transpose
diag(x)	Creates diagonal matrix with elements of **x** in the principal diagonal
diag(A)	Returns a vector containing the elements of the principal diagonal
diag(k)	If k is a scalar, this creates a k x k identity matrix. Go figure.
solve(A, b)	Returns vector **x** in the equation **b = Ax** (i.e., $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$)
solve(A)	Inverse of **A** where A is a square matrix.
ginv(A)	Moore-Penrose Generalized Inverse of **A**. ginv(A) requires loading the **MASS** package.
y<-eigen(A)	**y$val** are the eigenvalues of **A** **y$vec** are the eigenvectors of **A**
y<-svd(A)	Single value decomposition of **A**. **y$d** = vector containing the singular values of **A** **y$u** = matrix with columns contain the left singular vectors of **A** **y$v** = matrix with columns contain the right singular vectors of **A**
R <- chol(A)	Choleski factorization of **A**. Returns the upper triangular factor, such that **R'R = A**.
y <- qr(A)	QR decomposition of **A**. **y$qr** has an upper triangle that contains the decomposition and a lower triangle that contains information on the Q decomposition. **y$rank** is the rank of A. **y$qraux** a vector which contains additional information on Q. **y$pivot** contains information on the pivoting strategy used.
cbind(A,B,...)	Combine matrices(vectors) horizontally. Returns a matrix.
rbind(A,B,...)	Combine matrices(vectors) vertically. Returns a matrix.
rowMeans(A)	Returns vector of row means.
rowSums(A)	Returns vector of row sums.
colMeans(A)	Returns vector of column means.
colSums(A)	Returns vector of column sums.