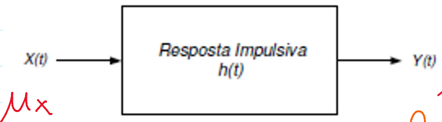


μ_x $\qquad$ μ_y

$R_x(\tau)$ $\qquad$ $R_y(\tau)$

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)$$

$$S_Y(w) = |H(w)|^2 \cdot S_X(w)$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_x(w)$$

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(w) \qquad |H(w)|^2$$

$$S_y(w) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} R_y(\tau)$$

$$P_x = R_x(0) \qquad P_y = R_y(0)$$

- **Exemplo 09:** Um processo estacionário X(t) no sentido amplo tem função de autocorrelação dada por

$$R_X(\tau) = e^{-b|\tau|}$$

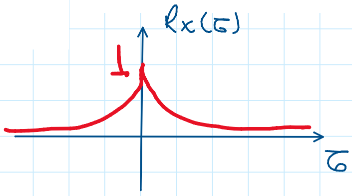
- Este processo é aplicado na entrada de um filtro RC com resposta ao impulso

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t/RC} & t \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Assumindo que $b = 2$ e $1/RC = 1$, encontre a função de autocorrelação e a densidade espectral de potências do processo estocástico Y(t) na saída do filtro.

- Qual é a potência média do processo estocástico na saída do filtro?

$$R_x(\tau) = e^{-2|\tau|}$$



$$h(t) = e^{-t} u(t)$$

$$R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_x(w) = \frac{4}{w^2+4}$$

x(t)	X(w)
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$

x(t)	X(w)
$e^{-at}u(t)$ $a>0$	$\frac{1}{a+jw}$

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(w) = \frac{1}{1+jw} \qquad |H(w)| = \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}$$

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{w^2+1} \qquad S_y(w) = \frac{4}{(w^2+4)\cdot(w^2+1)} \qquad w/\text{rad/s}$$

$$x = w^2$$

$$\frac{4}{(x+4)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{4}{\cancel{(x+4)\cdot(x+1)}} = \frac{(x+1)\cdot A + (x+4)B}{\cancel{(x+4)\cdot(x+1)}}$$

$$(x+1).A + (x+4)B = 4$$

- Para $x = -1$: $\quad 3B = 4 \qquad B = 4/3$

• Para $x = -4$: $-3A = 4$ $A = -4/3$

$$S_y(w) = \frac{-4/3}{w^2+4} + \frac{4/3}{w^2+1} = -\frac{4}{3\cdot\cancel{4}} \cdot \frac{1\cdot 4}{w^2+4} + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3\cdot\cancel{2}} \cdot \frac{1\cdot 2}{w^2+1}$$

$a = 2$ $a = 1$

$\mathcal{F}^{-1}$

$$R_y(\tau) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-2|\tau|} + \frac{2}{3} \cdot e^{-|\tau|}$$

$$P_y = R_y(0) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \; W$$

$R_y(\tau)$	$S_y(w)$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$

5.7) Processos estocásticos múltiplos

5.7.1) Correlações cruzadas

- Para dois processos estocásticos *X(t)* e *Y(t)*, a função de correlação cruzada é definida como:

$$R_{XY}(t, t+\tau) = \overline{X(t)Y(t+\tau)}$$

Processos conjuntamente estacionários

- Dois processos são conjuntamente estacionários no sentido amplo se cada um deles é estacionário no sentido amplo e a correlação cruzada satisfaz:

$$R_{XY}(t, t+\tau) = R_{XY}(\tau)$$

Processos descorrelacionados

- Dois processos *X(t)* e *Y(t)* estacionários no sentido amplo são descorrelacionados se sua função de correlação cruzada é igual ao produto de suas médias

$$R_{XY}(\tau) = \overline{X(t).Y(t+\tau)} = \overline{X}.\overline{Y}$$

Processos incoerentes ou ortogonais

- Dois processos *X(t)* e *Y(t)* estacionários no sentido amplo são ortogonais se

$$R_{XY}(\tau) = 0$$

- Processos descorrelacionados com *E[X]=0* e/ou *E[Y]=0* são ortogonais.

$0 \rightarrow X(t)$

$1 \rightarrow Y(t)$

$$\frac{R_x}{? \cdot X(t)}$$

5.7.2) Propriedades da função de correlação cruzada

- Para dois processos conjuntamente estacionários no sentido amplo *X(t)* e *Y(t)*, temos:

P1) $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$

P2) $|R_{XY}(\tau)| \leq \{R_X(0).R_Y(0)\}^{1/2}$

P3) Se *X* e *Y* são *v.a.*'s independentes, então

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(\tau) = \overline{X}.\overline{Y}$$

5.7.3) Densidade espectral de potência cruzada

- Para dois processos *X(t)* e *Y(t)* conjuntamente estacionários no sentido amplo, a transformada de Fourier da correlação cruzada leva à densidade espectral de potência cruzada

$$R_{XY}(\tau) \leftrightarrow S_{XY}(f)$$

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

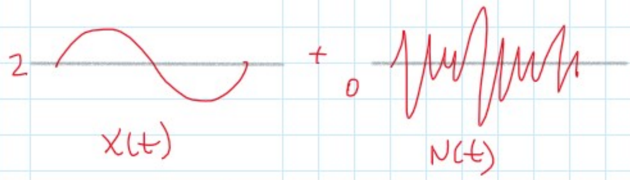
- Propriedade: $S_{XY}(f) = S_{YX}(-f)$

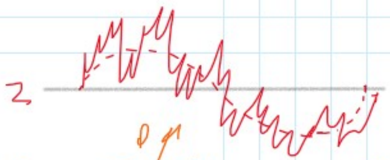
- Encontramos correlações cruzadas em experimentos que envolvem observações ruidosas de um processo estocástico *X(t)* estacionário no sentido amplo.

- **Exemplo 10:** Suponha que estejamos interessados em *X(t)*, mas só podemos observar

$$Y(t) = X(t) + N(t)$$

em que *N(t)* é um processo estacionário no sentido amplo com média zero, que interfere na observação de *X(t)*. Assumimos que *X(t)* e *N(t)* são conjuntamente estacionários no sentido amplo. Para caracterizar *Y(t)*, encontre a média *E[Y(t)]*, a função de autocorrelação $R_Y(\tau)$ e a densidade espectral de potência $S_Y(f)$.





$Y(t) = X(t) + N(t)$

$$E[Y(t)] = E[X(t) + N(t)] = E[X(t)] + E[\underbrace{N(t)}_{0}]$$

$$E[Y(t)] = E[X(t)]$$

$$R_Y(\tau) = \overline{Y(t)\cdot Y(t+\tau)} = \overline{[X(t)+N(t)]\cdot[X(t+\tau)+N(t+\tau)]}$$

$$R_Y(\tau) = \overline{X(t)\cdot X(t+\tau)} + \overline{X(t)\cdot N(t+\tau)} + \overline{N(t)\cdot X(t+\tau)} + \overline{N(t)\cdot N(t+\tau)}$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) + R_{XN}(\tau) + R_{NX}(\tau) + R_N(\tau)$$

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega) + S_{XN}(\omega) + S_{NX}(\omega) + S_N(\omega)$$

- **Exemplo 11:** No exemplo anterior, suponha que *N(t)* seja um processo de média zero, independente de *X(t)*. Encontre a função de autocorrelação e a densidade espectral de potência do processo *Y(t)*.

$$R_Y(\tau) = \overline{X(t)\cdot X(t+\tau)} + \underbrace{\overline{X(t)}\cdot\overline{N(t+\tau)}}_{0} + \underbrace{\overline{N(t)}\cdot\overline{X(t+\tau)}}_{0} + \overline{N(t)\cdot N(t+\tau)}$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) + R_N(\tau) \qquad S_Y(\omega) = S_X(\omega) + S_N(\omega)$$

5.8) Filtragem de processos estocásticos

- Quando um processo *X(t)* estacionário no sentido amplo é a entrada de um filtro LIT, a correlação cruzada entre a entrada e saída do filtro é dada por

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) R_X(\tau - u)\, du$$

- Quando *X(t)* é um processo estacionário no sentido amplo na entrada de um filtro LIT, a saída também será, e a entrada *X(t)* e a saída *Y(t)* são conjuntamente estacionários no sentido amplo.

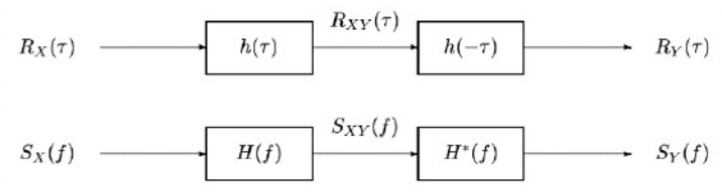
- Quando um processo *X(t)* estacionário no sentido amplo é a entrada de um filtro LIT, a autocorrelação da saída Y(t) é dada por

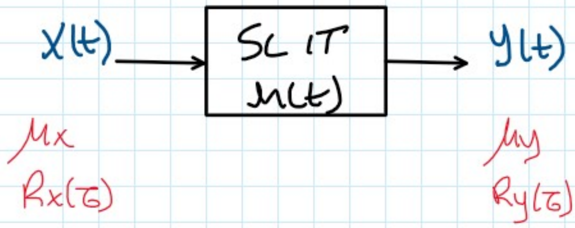
$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(-w) R_{XY}(\tau - w)\, dw$$

- Passando as duas últimas equações para o domínio da frequência:

$$S_{XY}(f) = H(f) S_X(f)$$

$$S_Y(f) = H^*(f) S_{XY}(f)$$





$S_{xy}(f) = S_x(f) \cdot H(f)$

$S_y(f) = S_{xy}(f) \cdot H^*(f)$

$S_y(f) = S_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f)$

$$\boxed{S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2}$$

5.9) Processo ruído branco Gaussiano

- Ruído: forma de onda imprevisível normalmente modelado por um processo estocástico Gaussiano estacionário *W(t)*.

- Componente DC nula

$$E[W(t)] = \mu_W = 0$$

- Para vários instantes $t_1, t_2, \ldots, t_k$, as V.A.'s

$$W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_k)$$

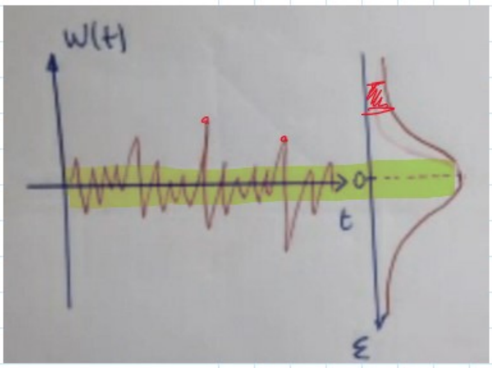
são independentes. Isto significa que, para $\tau \neq 0$

$$R_W(\tau) = E[W(t)W(t+\tau)] = E[W(t)]E[W(t+\tau)] = 0$$

- O valor do ruído no instante *t* não diz nada sobre o valor do ruído no instante *t+τ*.

- A densidade espectral de potência do ruído branco é dada por:

$$S_W(f) = \frac{N_0}{2} \text{ [W/Hz]}$$



AWGN
→ Noise
→ Gaussian
→ White
→ Additive

$P_W \to \infty$

$R_W(0) = P_W \to$

$S_W(f)$

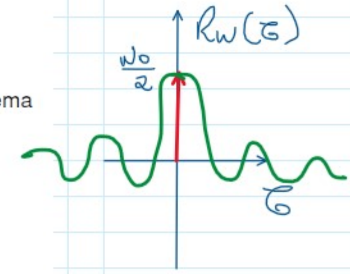
$R_W(\tau)$

é dada por:

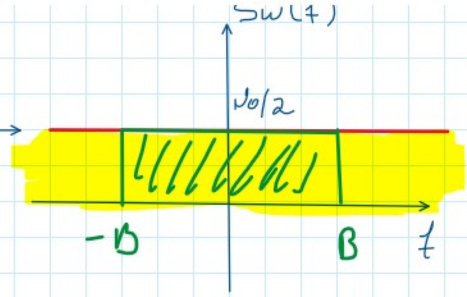
$$S_W(f) = \frac{N_0}{2} \text{ [W/Hz]}$$

- No estágio de entrada do receptor de um sistema de comunicações:

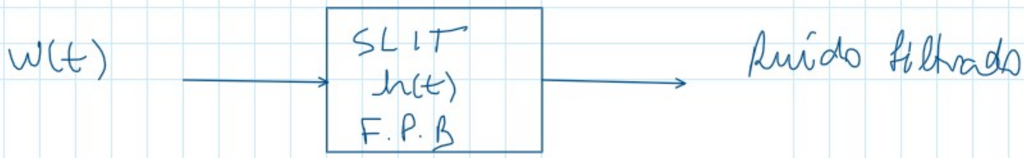
$$N_0 = k.T_e$$
$$k = 1{,}38 \times 10^{-23} \text{ [J/K]}$$



$\overset{f}{\longleftrightarrow}$



$$A \cdot \delta(t) \longleftrightarrow 1 \cdot A$$



- Potência média do ruído gaussiano

$$E[W^2(t)] = R_W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_W(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} df = \infty$$

- O ruído branco tem potência infinita, o que é fisicamente impossível, entretanto, o modelo é útil quando se imagina o ruído na entrada de um sistema físico.

- Todo sinal de ruído Gaussiano observado na prática pode ser visto como um sinal de ruído branco Gaussiano filtrado.

- Passando um processo ruído branco por um filtro *h(t)*, geramos o processo ruído *Y(t)* dado por

- **Exemplo 12:** Um processo ruído branco Gaussiano com $N_0 = 10^{-15}$ *[W/Hz]* é inserido em um filtro linear invariante no tempo com resposta ao impulso

$$h(t) = \begin{cases} 2\pi 10^6 e^{-2\pi 10^6 t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

$$S_x(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{10^{-15}}{2} \ \text{W/Hz}$$

$$h(t) = 2\pi \cdot 10^6 \cdot e^{-2\pi \cdot 10^6 t} u(t)$$

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

Para o processo filtrado Y(t), determine:

a) Densidade espectral de potência $S_Y(f)$.
b) Função de autocorrelação na saída do filtro.
c) Potência média do processo ruído na saída do filtro.

$e^{-at}u(t)$, $a>0$	$\frac{1}{a+jw}$

$$H(f) = \frac{2\pi \cdot 10^6}{2\pi \cdot 10^6 + j2\pi f}$$

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{2\pi \cdot 10^6}{\sqrt{(2\pi \cdot 10^6)^2 + (2\pi f)^2}}\right)^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{12}}{(2\pi \cdot 10^6)^2 + (2\pi f)^2}$$

$$S_x(f) = \frac{10^{-15}}{2}$$

$$S_y(f) = \frac{10^{-15}}{2} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot 10^{12}}{(2\pi \cdot 10^6)^2 + (2\pi f)^2} = \frac{10^{-15}\pi \, 10^6}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^6}{(2\pi \cdot 10^6)^2 + (2\pi \cdot f)^2}$$

$$R_y(\tau) = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-9} \cdot e^{-2\pi \cdot 10^6 \cdot |\tau|}$$

$a = 2\pi \cdot 10^6$

$R_y(\tau)$	$S_y(f)$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$

$P_y = R_y(0) = \frac{\pi}{2}$ nW