17/09/2021

Capítulo 04
Distribuições Especiais de Probabilidade

- Distribuição Geométrica
- Distribuição Hipergeométrica
- Distribuição de Cauchy
- Distribuição Chi-Quadrada
- Distribuição Beta
- Distribuição de Weibull
- Distribuição de Maxwell
- Distribuição Normal Bivariada
- Distribuição de Nakagami-m
- Distribuição $\eta-\mu$
- Distribuição m-Erlang
- Distribuição $\kappa-\eta$
- etc

4) Distribuições especiais de probabilidade

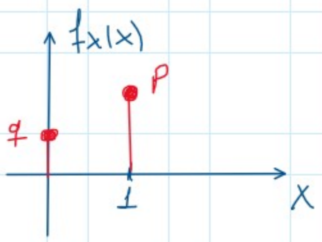
4.1) Distribuição de Bernoulli (DISCRETA)

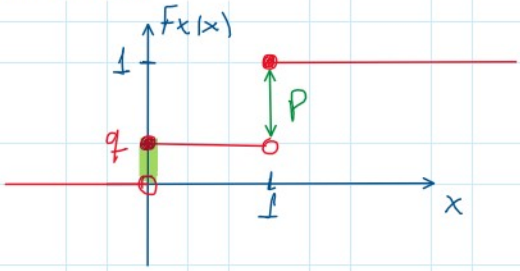
- A distribuição de Bernoulli modela um experimento que possui apenas 2 resultados.

- Por convenção, considere que uma variável aleatória discreta X de Bernoulli assume o valor 1 com probabilidade p (sucesso) e assume o valor 0 com probabilidade q (falha).

X		$f_X(x)$
$0 \to$	falha	$q = 1-p$
$1 \to$	sucesso	p

- **Exemplo 01:** Construa os gráficos da função massa de probabilidade e da função de distribuição cumulativa para a distribuição de Bernoulli.





- **Exemplo 02:** Determine a média, a variância, o desvio padrão e a função característica para uma variável aleatória de Bernoulli.

$$E[X] = \sum_{x=0}^{1} x \cdot f_X(x) = \cancel{0 \cdot q}^{\,0} + 1 \cdot p \qquad E[X] = p$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\sigma_X^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p)$$

$E[X] = \sum_{x=0} x \cdot f_X(x) = \cancel{0} \cdot q + 1 \cdot p \qquad E[X] = p$

$E[X^2] = \sum_{x=0}^{1} x^2 \cdot f_X(x) = \cancel{0^2}^{\,0} \cdot q + 1^2 \cdot p \qquad E[X^2] = p$

$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

$\sigma_X^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p)$

$\sigma_X^2 = p \cdot q \qquad \sigma_X = \sqrt{p \cdot q}$

$\Psi_X(w) = E[e^{jwx}] = \sum_{x=0}^{1} e^{jwx} \cdot f_X(x) = e^{jw\cdot 0} \cdot q + e^{jw \cdot 1} \cdot p$

$\Psi_X(w) = q + p \cdot e^{jw}$

4.2) Distribuição Binomial

$X \to$ nº de sucesso

$p \to$ prob. de sucesso

$q \to$ prob. de falha

Ex03:	Bernoulli ($n=1$)	Binomial ($n>1$)
$E[X]$	p	$n \cdot p$
σ_X^2	$p \cdot q$	$n \cdot p \cdot q$
σ_X	$\sqrt{p \cdot q}$	$\sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$n = 10 \quad X \to$ nº de caras

sucesso $\to$ cara $\to p = 1/2$

falha $\to$ coroa $\to q = 1/2$

$E[X] = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ caras

$P(X=2) = f_X(2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$

Usos mais frequentes

X é o número de sucessos em n experimentos de Bernoulli e, portanto, a soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a p.

Domínio: $S_X = \{0, 1, \ldots, n\}$

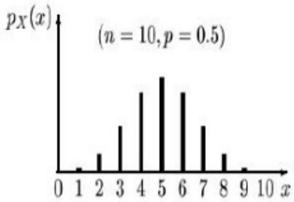
Função massa de probabilidade

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \ldots, n$$

$f_X(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$

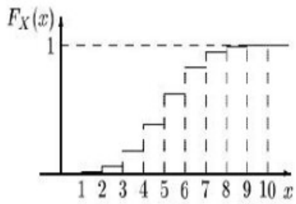
$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$



n, p, q

Função distribuição cumulativa

$$F_X(x) = \sum_k \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} u(x - x_k)$$



• **Exemplo 04:** Qual é a probabilidade de se obter exatamente duas caras em seis jogadas de uma moeda?

$n = 6 \quad X \to$ nº de caras

Sucesso - cara

Falha - coroa

$p = 1/2$

$q = 1/2$

$\binom{6}{2} = 15$

$P(X=2) = f_X(2) = \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6!}{2!\,4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{\cancelto{3}{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2}\cdot\cancel{4!}}\cdot\frac{1}{64} = \frac{15}{64} \cong 23,44\%$

• **Exemplo 05:** Determinar a probabilidade de em uma família com 4 crianças existir pelo menos um menino.

$n = 4$ $\quad X \to$ nº de meninos $\quad$ Sucesso − ♂ − $p = 1/2$

Falha − ♀ − $q = 1/2$

$P(X \geq 1) = f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4)$

$P(X \geq 1) = 1 - f_X(0) = 1 - 0,0625 = 93,75\%$

$f_X(0) = \cancelto{1}{\binom{4}{0}}\cdot\cancelto{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 6,25\%$

• **Exemplo 06:** A probabilidade de um bit ser recebido corretamente por um sistema de transmissão digital é 0,7. Determine a probabilidade de que entre 5 bits:

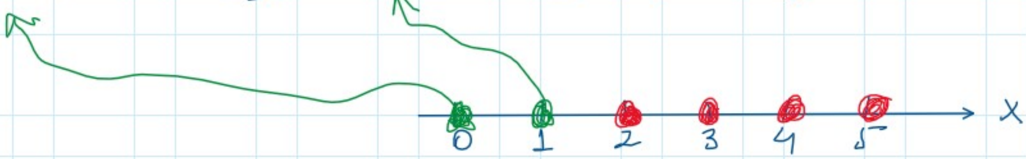
a) nenhum seja recebido corretamente.
b) um bit seja recebido corretamente.
c) ao menos dois sejam recebidos corretamente.

$f_X(x) = \binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$

$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$

$X \to$ nº de bits corretos na Rx $\quad p = 0,7 \quad q = 0,3 \quad n = 5$

a) $P(X=0)$ $\quad$ b) $P(X=1)$ $\quad$ c) $P(X \geq 2)$



4.3) Distribuição de Poisson

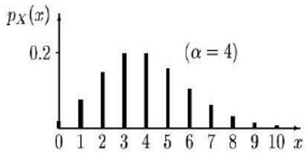
Usos mais frequentes

Em muitas aplicações, estamos interessados em contar o número de ocorrências de um evento em um certo intervalo de tempo ou em uma determinada região do espaço. A variável aleatória de Poisson conta o número de eventos que ocorrem em uma unidade de tempo quando o tempo entre os eventos é exponencialmente distribuído com média $1/\alpha$.

Domínio: $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$

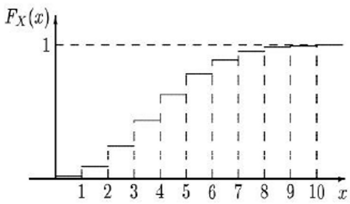
Função massa de probabilidade

$$\boxed{p_X(x) = \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} \qquad x = 0, 1, \dots \quad \text{e} \quad \alpha > 0}$$



Função distribuição cumulativa

$$\boxed{F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!} u(x-k)}$$



- Características:

a) Média: $E[X] = \alpha$

b) Variância: $\sigma_x^2 = \alpha$

c) Desvio padrão: $\sigma_x = \sqrt{\alpha}$

d) Função característica: $\psi(j.w) = e^{\alpha.(e^{j.w}-1)}$

- **Exemplo 08:** Em uma fila de banco entram 30 pessoas por hora durante o horário comercial. Determine a probabilidade de em um intervalo de 10 minutos pelo menos uma pessoa entrar nesta fila.

Binomial $X \to$ nº de sucessos

$n \quad p \quad q$

$0 \le X \le n$

Poisson $X \to$ nº de ocorrências

$E[X] = \alpha$ tempo espaço

$$f_X(x) = \frac{\alpha^x}{x!} \cdot e^{-\alpha}$$

30 pessoas — 60 min

α — 10 min

$\alpha = 5$ pessoas/10 min

$$P(X \geq 1) = 1 - f_X(0) = 1 - \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} = 1 - e^{-5} \cong 99{,}33\%$$

- **Exemplo 09:** A vovó assa biscoitos com lascas de chocolate em lotes de 100 biscoitos. Ela coloca 300 lascas de chocolate na massa que irá se transformar nos 100 biscoitos. Depois de assados, você seleciona um biscoito para comer. Qual é a probabilidade do seu biscoito conter no máximo duas lascas de chocolate?

$$f_X(x) = \frac{\alpha^x}{x!} \cdot e^{-\alpha}$$

$\alpha = 3$ lascas/biscoito

$$P(X \leq 2) = f_X(2) + f_X(1) + f_X(0)$$

$$P(X \leq 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} + \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 4{,}5 e^{-3} + 3 e^{-3} + e^{-3} = 8{,}5 e^{-3}$$

$$P(X \leq 2) = 42{,}32\%$$