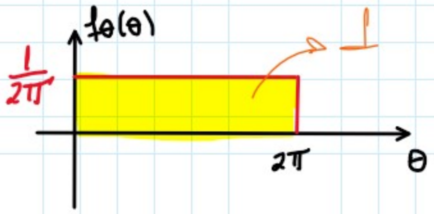
08/10/2021

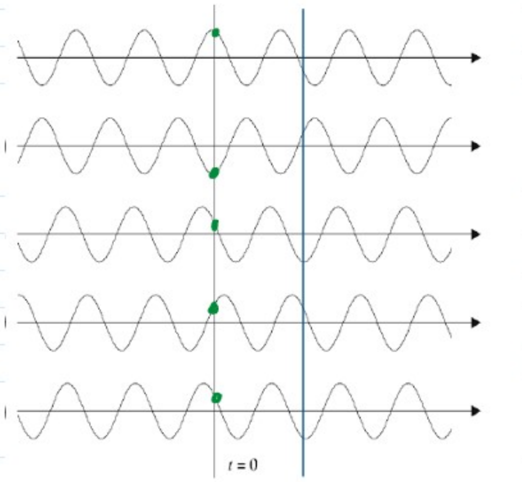
Voltando ao exemplo 03:

- **Exemplo 03**: Mostre que o processo aleatório

$$X(t) = A.\cos(\omega_c t + \theta)$$

em que θ é uma v.a. uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$ é um processo estacionário no sentido amplo.





$$X(t) = A \cdot \cos(w_c t + \theta)$$

$$\overline{X(t)} = CTE \quad e \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$$

$\tau = t_2 - t_1$ ou $\tau = t_1 - t_2$

$$\overline{X(t)} = \overline{A\cos(w_c t + \theta)}$$

$\theta \to$ V.A

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)\,dx$$

$$\overline{X(t)} = \int_0^{2\pi} A\cos(w_c t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

$$E[g(\theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) \cdot f_\theta(\theta)\,d\theta$$

$$\overline{X(t)} = \frac{A}{2\pi} \operatorname{sen}(w_c t + \theta) \Big|_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{A}{2\pi}\left\{\operatorname{sen}(w_c t + 2\pi) - \operatorname{sen}(w_c t)\right\} = 0 \ (\text{é constante})$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{X(t_1) \cdot X(t_2)} = \overline{A\cos(w_c t_1 + \theta) \cdot A\cos(w_c t_2 + \theta)}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x - y) + \frac{1}{2}\cos(x + y)$$

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{\frac{A^2}{2}\cos[w_c(t_1 - t_2)]} + \overline{\frac{A^2}{2}\cos(w_c t_1 + w_c t_2 + 2\theta)}$$

$\theta \to$ V.A.

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2}\cos(w_c \tau) + \int_0^{2\pi} 2 \cdot \frac{A^2}{2}\cos(w_c t_1 + w_c t_2 + 2\theta) \cdot \frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2}\cos(w_c \tau) + \frac{A^2}{2 \cdot 4\pi}\operatorname{sen}(w_c t_1 + w_c t_2 + 2\theta) \Big|_{\theta=0}^{2\pi}$$

0

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2}\cos(w_c \tau)$$

$$\overline{X(t)} = 0 \quad \text{constante}$$

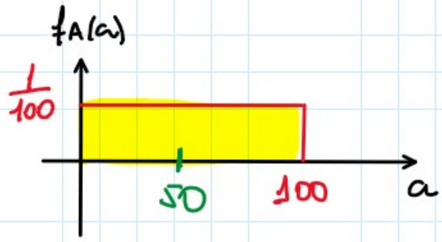
5a Lista de exercícios:

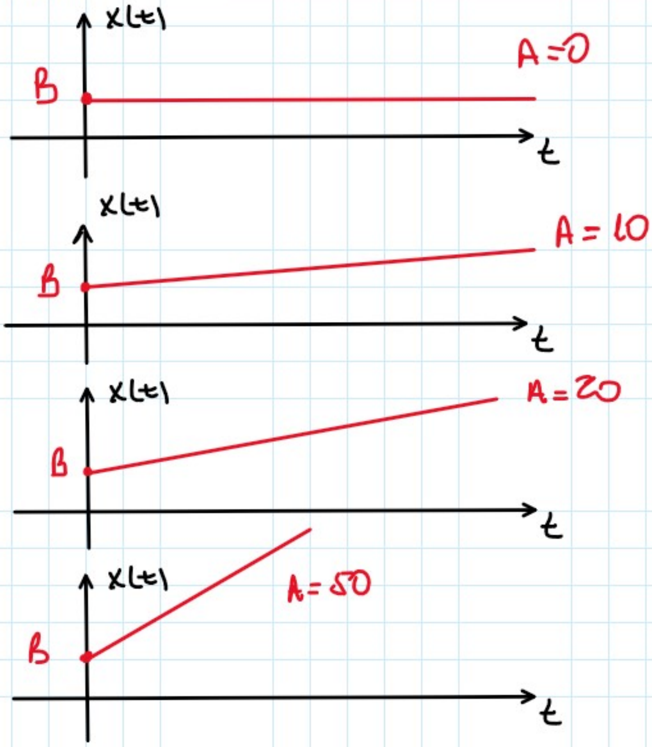
01) Considere o processo estocástico definido por: → V. A.

$$X(t) = At + B$$

em que B é uma constante e A é uma variável aleatória uniformemente distribuída na faixa $[0,100]$. Pede-se:

a) Esboce o conjunto deste processo, indicando pelo menos 4 funções amostras.





$E[A] = \overline{A} = 50$

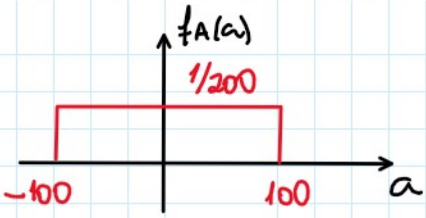
$X(t) = A \cdot t + B$

b) Determine o valor médio do processo $X(t)$. Este processo estocástico é estacionário para estatísticas de primeira ordem? Justifique.

$\overline{X(t)} = \overline{At+B} = \overline{A}t + \overline{B} = \overline{A}t + B = 50t + B$

Não, pois a média $\overline{X(t)}$ depende do tempo.

c) Supondo agora A uma variável aleatória uniformemente distribuída na faixa $[-100,100]$, determine o valor médio do processo $X(t)$ e sua função de autocorrelação. Neste caso, o processo estocástico é estacionário no sentido amplo? Justifique.



$X(t) = A \cdot t + B$

$E[A] = \overline{A} = 0$

$\overline{X(t)} = \overline{At+B} = \overline{At} + \overline{B} = \overset{0}{\overline{A}} \cdot t + B = B$ (constante)

$R_X(t_1,t_2) = \overline{X(t_1)\cdot X(t_2)} = \overline{(At_1+B)\cdot(At_2+B)}$

$$R_x(t_1,t_2) = \overline{X(t_1)\cdot X(t_2)} = \overline{(At_1+B)\cdot(At_2+B)}$$

$$R_x(t_1,t_2) = \overline{A^2}\,t_1\cdot t_2 + \cancelto{0}{\overline{AB}}\,t_1 + \cancelto{0}{\overline{AB}}\,t_2 + B^2$$

$$R_x(t_1,t_2) = \overline{A^2}\cdot t_1\cdot t_2 + B^2$$

$$\overline{A^2} = E[A^2] = \int_{-100}^{100} a^2\cdot\frac{1}{200}\,da = \frac{a^3}{600}\Bigg|_{a=-100}^{100} = \frac{10^6-(-10^6)}{600} = \frac{\cancelto{1}{2}\times 10^6}{\cancelto{3}{6}\times 10^2} = \frac{10.000}{3}$$

$$R_x(t_1,t_2) = \frac{10.000}{3}\,t_1\cdot t_2 + B^2$$

Não, pois a função de autocorrelação depende dos instantes t_1 e t_2.