22/10/2021

5.6) Processamento de sinais aleatórios

5.6.1) Sistemas lineares e invariantes no tempo

- Um sistema é linear se

$$T\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\}=a_1T\{x_1(t)\}+a_2T\{x_2(t)\}$$

- Um sistema é invariante no tempo se

$$T\{x(t-t_0)\}=y(t-t_0)$$

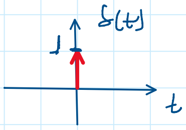
- Resposta impulsiva

$$h(t)=T\{\delta(t)\}$$

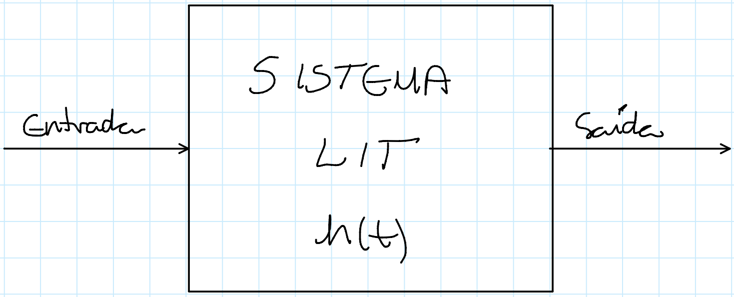
1) $x_1(t)$, $x_2(t)$

2) $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$

3) $x(t)$, $x(t-\tau)$

4) 

5) $x(t)$



1) $y_1(t)$, $y_2(t)$

2) $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$

3) $y(t)$, $y(t-\tau)$

4) $h(t)$

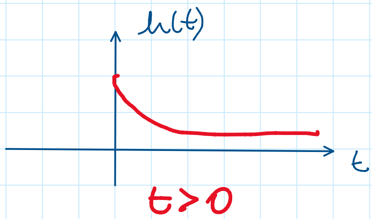
5) $y(t)=x(t)*h(t)$

- Resposta de um sistema LIT

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(v)h(t-v)dv=\int_{-\infty}^{\infty}h(v)x(t-v)dv$$

- Causalidade

$$h(t)=0 \qquad \forall t<0$$



5.6.2) Filtragem linear de um processo estocástico

- Transformada de Fourier

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j2\pi ft}dt \qquad g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$g(t)\overset{\Im}{\leftrightarrow}G(f)$$

$$h(t)\overset{\Im}{\leftrightarrow}H(f) \qquad H(\omega)$$

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\omega=2\pi f \qquad \frac{d\omega}{df}=2\pi \qquad df=\frac{d\omega}{2\pi}$$

- $H(f)$: resposta em frequência.

$$y(t)=x(t)*h(t) \qquad Y(f)=X(f)\times H(f)$$

- Se as entradas do filtro são funções amostras de um processo estocástico X(t), então

$$Y(t,s) = h(t) * X(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) X(t-v,s) dv$$

- $Y(t,s)$ é uma função amostra do processo estocástico Y(t).

- Para um processo estocástico X(t):

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v) X(t-v) dv$$

- **Teorema:** Se a entrada de um filtro LIT com resposta ao impulso *h(t)* é um processo estacionário no sentido amplo X(t), a saída é um processo estacionário no sentido amplo Y(t) com valor médio e função de autocorrelação dados por:

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \mu_X H(0) \quad e \quad R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(v) R_X(\tau + u - v) du dv$$

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot X(t-u) \, du$$

$$\overline{Y(t)} = E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot X(t-u) \, du\right]$$

$$\overline{Y(t)} = \mu_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot \underbrace{E[X(t-u)]}_{\mu_X} \, du = \mu_X \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, dt = \mu_X \cdot H(0)$$

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, e^{-j2\pi f t} \, dt \qquad H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \, dt$$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(v) R_X(\tau + u - v) du dv$$

$t+\tau$

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot X(t-u) \, du$$

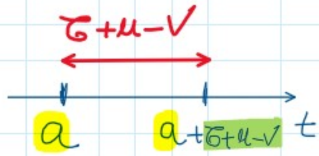
$t+\tau$

$$R_Y(\tau) = \overline{Y(t) \cdot Y(t+\tau)} = E[Y(t) \cdot Y(t+\tau)]$$

$$R_Y(\tau) = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot X(t-u) \, du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) \cdot X(t+\tau-v) \, dv\right]$$

$$R_Y(\tau) = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot h(v) \cdot X(t-u) \cdot X(t+\tau-v) \, du \, dv\right] \qquad a = t-u \qquad t = a+u$$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot h(v) \cdot E[X(a) \cdot X(a+u+\tau-v)] \, du \, dv$$



$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot h(v) \cdot R_X(\tau+u-v) \, du \, dv$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot h(v)\cdot R_x(\tau+u-v)\,du\,dv$$

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SLIT}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{cases} \overline{X(t)} = \mu_x \\ R_x(\tau) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{Y(t)} = \mu_y = \mu_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \mu_x \cdot H(0) \\ R_y(\tau) \end{cases}$$

- **Exemplo 06:** Considere que X(t), um processo estocástico estacionário no sentido amplo com valor médio $\mu_X = 10\,\text{volts}$ é a entrada de um filtro LIT. A resposta ao impulso do filtro é

$$h(t) = \begin{cases} e^{t/0,2} & 0 \le t \le 0,1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad e^{5t}$$

Qual é o valor esperado do processo Y(t) na saída do filtro?

$$\mu_y = \mu_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$$

$$\mu_y = \frac{10}{5} \cdot \int_0^{0,1} 5\,e^{5t}\,dt = 2 \cdot e^{5t}\Big|_{t=0}^{0,1} = 2e^{0,5} - 2 \cong 1,3\ V$$

Densidade espectral de amplitudes e a transformada de Fourier

$$f(t) \longleftrightarrow F(w) = |F(w)| \cdot e^{j\theta(w)}$$

Por exemplo,

$$f(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow F(w) = \frac{1}{a+jw}$$

$$|F(w)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$$

• Se um sinal $g(t)$ real existe no intervalo $(-\infty,+\infty)$, sua energia E_g é dada por

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt$$

e a sua potência P_g definida por

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t)dt$$

• De forma geral:

1) Sinais periódicos e sinais aleatórios são sinais de potência,

2) Sinais determinísticos e sinais não periódicos são sinais de energia.

• Sinais para os quais E_g é finita são conhecidos como sinais de energia e sinas com P_g finita e não nula são conhecidos como sinais de potência.

• Em resumo:

1) Sinal de energia : E finita e $P_M = 0$.

2) Sinal de Potência: $E \longrightarrow \infty$ e P_M finita.

• **Exemplo 07:** O sinal a seguir é de energia ou de potência?

$$g(t) = e^{-a.t}, -\infty < t < \infty, \quad a > 0$$

↳ CASA

$E \to \infty$ $\quad P \to \infty$

5.6.3) Densidade espectral de potência

• Caracteriza a distribuição do sinal de potência no domínio da frequência.

Densidade espectral de potência de um processo estocástico

- Processos estocásticos são sinais de potência.

- Dificuldades para encontrar a densidade espectral de potência para processos estocásticos:

1) Podemos não ser capazes de descrever uma função amostra analiticamente.

2) Para um dado processo, cada função amostra pode ser diferente de outra (mesmo que exista a densidade espectral e potência para cada função amostra, ela pode ser diferente para funções amostras diferentes).

• Mesmo assim, existe a densidade espectral de potência para processos estocásticos estacionários.

• Para processos não estacionários, a densidade espectral de potência não existe.

• Para um processo estocástico estacionário no sentido amplo $X(t)$, temos:

$$R_X(\tau) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} S_X(f)$$

• Se

$$\omega = 2\pi f$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

• A unidade da densidade espectral de potências é *W/Hz*.

$S_x(\omega)$ $\quad$ W/rad/s

• A densidade espectral de potência de uma sinal g(t) representa a potência relativa de cada uma das várias componentes de freqüência.

- Relembrando: $R_X(\tau)$ é uma função real e par de τ.

- <u>Propriedades da densidade espectral de potências:</u>

P1) A densidade espectral de potências $S_X(f)$ é uma função real, par e não negativa de f.

$$S_X(-f) = S_X(f)$$

$$S_X(f) \geq 0$$

P2) O valor médio quadrático de um processo estacionário é igual a área total abaixo do gráfico da densidade espectral de potência.

$$R_X(\tau) = \overline{X(t) \cdot X(t+\tau)}$$

- O valor quadrático médio de um processo estacionário no sentido amplo *X(t)* é a potência P_X (potência média) de *X(t)*. Vimos que

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f).e^{j2\pi f\tau}df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(w).e^{jw\tau}dw$$

$$R_X(0) = \overline{X(t).X(t+0)} = \overline{X^2(t)} = P_X$$

- Portanto,

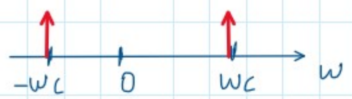
$$P_X = \overline{X^2} = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f).df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(w).dw$$

- **Exemplo 08:** Determine a densidade espectral de potências e a potência média de um processo estocástico $X(t) = A.\cos(\omega_c t + \theta)$, em que θ é uma *v.a.* uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$.

Do exemplo 03, $R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(w_c\tau)$ $\quad P_X = \frac{A^2}{2}$

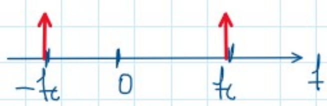
$x(t)$	$X(w)$	$X(f)$
$\cos(w_0 t)$	$\pi\delta(w+w_0)+\pi\delta(w-w_0)$	$\frac{1}{2}\delta(f+f_0)+\frac{1}{2}\delta(f-f_0)$

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4}\delta(f+f_c) + \frac{A^2}{4}\delta(f-f_c)$$



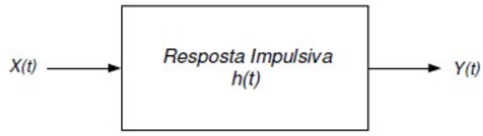
$$P_X = \frac{1}{2\cancel{\pi}} \cdot A^2\cancel{\pi} = \frac{A^2}{2}$$

$$S_X(w) = \frac{A^2}{2}\pi\,\delta(w+w_c) + \frac{A^2}{2}\pi\,\delta(w-w_c)$$



$$P_X = \frac{2A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

- Considere que $S_Y(f)$ represente a densidade espectral de potência de saída de um processo estocástico $Y(t)$ obtido pela passagem do processo estocástico estacionário no sentido amplo $X(t)$ através de um filtro linear com resposta em freqüência $H(f)$.



$$S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)$$

$$S_Y(w) = |H(w)|^2 \cdot S_X(w)$$

$$R_x(\tau) \longleftrightarrow S_x(f)$$

$$h(t) \longleftrightarrow H(f) \qquad |H(f)|^2$$

$$S_y(f) \xleftrightarrow{f^{-1}} R_y(\tau)$$

$$R_y(0) = P_y$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot h(v) \cdot R_x(\tau + u - v)\, du\, dv$$

$$R_y(\tau) \xleftrightarrow{f} S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, h(v)\, R_x(\tau + u - v)\, e^{-j2\pi f\tau}\, du\, dv\, d\tau \qquad \tau \to t$$

$$t = \tau + u - v \qquad \tau \to -\infty \quad t \to -\infty \qquad \frac{dt}{d\tau} = 1 \qquad dt = d\tau$$

$$\tau = t - u + v \qquad \tau \to +\infty \quad t \to +\infty$$

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot h(v) \cdot R_x(t) \cdot e^{-j2\pi f(t - u + v)}\, du\, dv\, dt$$

$$e^{-j2\pi f(t-u+v)} = e^{-j2\pi ft + j2\pi fu - j2\pi fv} =$$

$$= e^{-j2\pi ft} \cdot e^{-j2\pi(-f)u} \cdot e^{-j2\pi fv}$$

$$S_y(f) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt}_{S_x(f)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, e^{-j2\pi(-f)u}\, du}_{H(-f)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(v) \cdot e^{-j2\pi fv}\, dv}_{H(f)}$$

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot H(-f) \cdot H(f)$$

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot H^*(f) \cdot H(f)$$

$$\boxed{S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2}$$