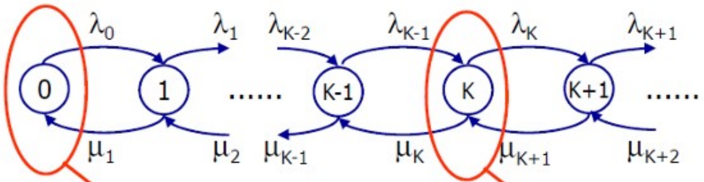
Equações de Equilíbrio

- ✓ Em equilíbrio, a soma dos fluxos que saem de um determinado estado (λ_k), deve ser igual a soma dos fluxos que chegam a este mesmo estado (μ_{k+1}).

- ✓ Ou seja: $\sum \text{Fluxo de Entrada} = \sum \text{Fluxo de Saída}$



$\lambda_0.P_0 = \mu_1.P_1$

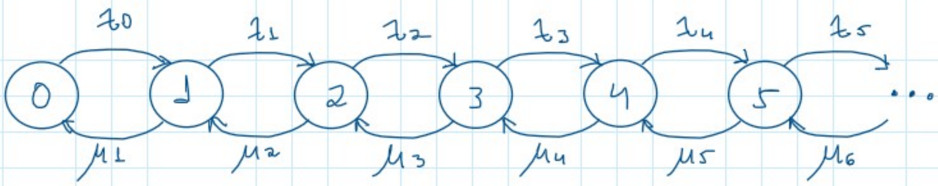
$(\lambda_K + \mu_K)P_K = \mu_{K+1}.P_{K+1} + \lambda_{K-1}.P_{K-1}$ (2)

$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}.P_0$ (1)

$K=1$ em (2): $(\lambda_1+\mu_1).P_1 = \mu_2.P_2 + \lambda_0.P_0$ $\qquad$ $\mu_2 P_2 = (\lambda_1+\mu_1).P_1 - \lambda_0.P_0$ (1)

$\mu_2.P_2 = (\lambda_1+\mu_1).\frac{\lambda_0}{\mu_1}.P_0 - \lambda_0.P_0$

$\mu_2.P_2 = \frac{\lambda_1.\lambda_0}{\mu_1}.P_0 + \cancel{\lambda_0.P_0} - \cancel{\lambda_0 P_0}$ $\qquad$ $P_2 = \frac{\lambda_1.\lambda_0}{\mu_2.\mu_1}.P_0$



$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}.P_0$ $\qquad$ $P_2 = \frac{\lambda_1.\lambda_0}{\mu_2.\mu_1}.P_0$ $\qquad$ $P_3 = \frac{\lambda_2.\lambda_1.\lambda_0}{\mu_3.\mu_2.\mu_1}.P_0$

$$P_K = P_0.\prod_{i=0}^{K-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1+x_2+x_3+x_4$ $\qquad$ $\prod_{i=1}^{4} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

$P_3 = P_0.\prod_{i=0}^{2}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = P_0 \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\mu_3}$

- ✓ Lembre-se que:

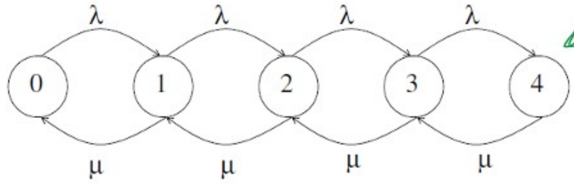
$$\sum_{K=0}^{\infty} P_K = 1$$

$P_0 + \sum_{K=1}^{\infty} P_K = 1$

$$P_0 + \sum_{K=1}^{\infty} P_0.\prod_{i=0}^{K-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = 1 \qquad P_0 = \frac{1}{1+\left(\sum_{K=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{K-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)}$$

Todas as filas

Exemplo 05: Determine as equações de equilíbrio para a fila a seguir:



$m = 4$ e $J = 0$

$m = 1$ e $J = 3$

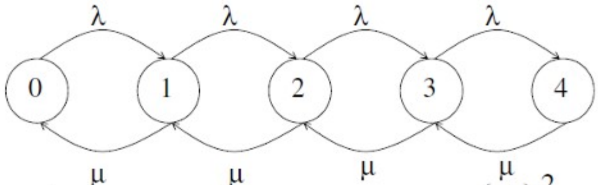
$m = 2$ e $J = 2$

$m = 3$ e $J = 1$

Em cada estado tem-se ∑ Fluxo de Entrada = ∑ Fluxo de saída

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \qquad P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

V.A. DISCRETA: $E[X] = \sum x . f_X(x)$



$E[Q] = \sum K . P_K$

$E[Q] = 0 . P_0 + 1 . P_1 + 2 . P_2 + 3 . P_3 + 4 . P_4$

$$(\lambda + \mu) P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \qquad P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$(\lambda + \mu) P_2 = \lambda P_1 + \mu P_3 \qquad P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$(\lambda + \mu) P_3 = \lambda P_2 + \mu P_4 \qquad P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

Teorema de Little (para filas de capacidade infinita)

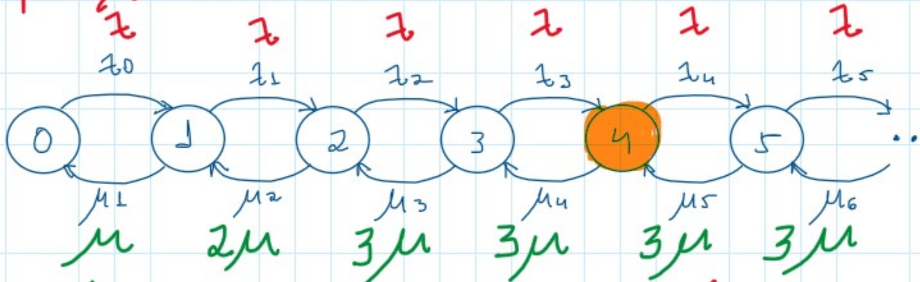
- Diz que o número médio de elementos no sistema é igual a taxa média efetiva de chegadas no sistema multiplicada pelo tempo médio de permanência no sistema.

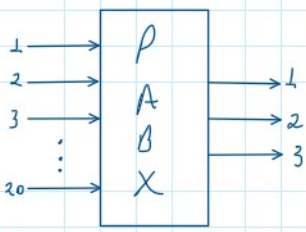
$$E\{q\} = \lambda . E\{t_q\} \quad \therefore \quad E\{t_q\} = \frac{E\{q\}}{\lambda}$$

Também é válido para as demais médias de elementos no sistema:

$$E\{t_w\} = \frac{E\{w\}}{\lambda} \qquad E\{t_s\} = \frac{E\{s\}}{\lambda}$$

População → ∞





$m = 3$ servidores

Servidores

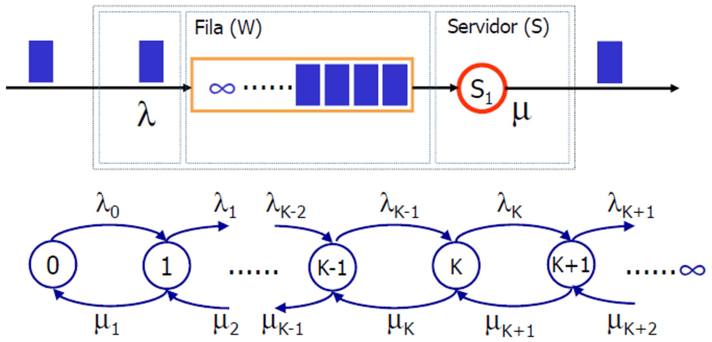
$m = 3$

População $S = 20$

Filas com Servidor Único

Sistema de Fila com Servidor Único e Buffer Infinito

- ✓ Este sistema é conhecido como M/M/1, ou na notação expandida M/M/1/∞/∞/∞/FCFS.

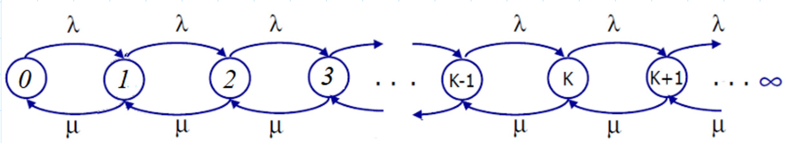


Sistema de Fila com Servidor Único e Buffer Infinito

- ✓ No sistema M/M/1, todas as transições de nascimento tem valor igual a λ, e como existe somente um servidor, todas as transições de morte são iguais a μ. Ou seja:

$$\lambda_K = \lambda, \text{ para } K=0,1,\ldots,\infty$$

$$\mu_K = \mu, \text{ para } K=1,\ldots,\infty$$



- ✓ As equações de equilíbrio, neste caso, são:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu . P_1 & K=0 \quad (1) \\ (\lambda+\mu)P_K = \lambda . P_{K-1} + \mu . P_{K+1} & K \geq 1 \quad (2) \\ \sum_{K=0}^{\infty} P_K = 1 \quad (3) \end{cases}$$

$(1) \rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \qquad P_1 = \rho . P_0$

Resolvendo, tem-se:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} . P_0 \qquad P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \qquad P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$P_K = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K P_0$$

$$P_2 = \rho^2 . P_0 \qquad P_3 = \rho^3 . P_0 \qquad P_K = \rho^K . P_0 \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3):

$$\sum_{K=0}^{\infty} P_K = 1 \qquad \sum_{K=0}^{\infty} \rho^K . P_0 = 1 \qquad P_0 . \sum_{K=0}^{\infty} \rho^K = 1$$

Série geométrica de razão ρ. Converge se $\rho < 1$ $\left(\frac{\lambda}{\mu} < 1\right)$, para $\frac{1^{\circ} \text{ termo}}{1 - \text{razão}}$

$$P_0 . \frac{1}{1-\rho} = 1 \qquad P_0 = 1 - \rho \quad (5)$$

$$\rho = 1 - P_0$$

$\rho \rightarrow$ fator de utilização

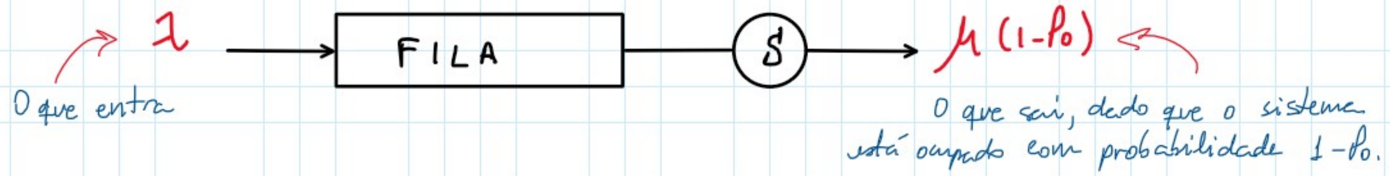
✓ A utilização do sistema é igual a probabilidade de que o sistema não esteja vazio (válido para todas as filas).

$$U = 1 - P_0 \longrightarrow \text{Para TODAS as filas}$$

Para $M/M/1 \rightarrow U = 1 - (1 - \rho) = 1 - 1 + \rho \qquad U = \rho \; (M/M/1)$

(5) em (4): $P_K = \rho^K . (1 - \rho)$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \lambda = \mu(1 - P_0)$$



$\lambda = \mu(1-P_0)$ ✓ Esta expressão iguala o que entra no sistema com o que sai do sistema.

$$E[Q] = \sum_{K=0}^{\infty} K . P_K = \sum_{K=0}^{\infty} K . \rho^K . (1-\rho) = (1-\rho) . \sum_{K=0}^{\infty} K . \rho^K$$

$$\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1 - 2\rho + \rho^2} = \sum_{K=0}^{\infty} K . \rho^K$$

$$\begin{array}{l} \rho \\ \cancel{-\rho} + 2\rho^2 - \rho^3 \\ \hline \cancel{2\rho^2} - \rho^3 \\ \cancel{-2\rho^2} + 4\rho^3 - 2\rho^4 \\ \hline \cancel{3\rho^3} - 2\rho^4 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} 1 - 2\rho + \rho^2 \\ \hline 1 . \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + 4\rho^4 + \ldots \end{array}$$

$$E[Q] = \cancel{(1-\rho)} . \frac{\rho}{(1-\rho)^{\cancel{2}}}$$

$$E[Q] = \rho$$

$$\cancel{2\rho^2} - \rho^3$$
$$\cancel{-2\rho^2} + 4\rho^3 - 2\rho^4$$
$$\cancel{3\rho^3} - 2\rho^4$$
$$\cancel{-3\rho^3} + 6\rho^4 - 3\rho^5$$
$$4\rho^4 - 3\rho^5$$

$$E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Teorema de Little:

$$E[t_a] = \frac{E[Q]}{\lambda} \qquad E[t_w] = \frac{E[W]}{\lambda} \qquad E[t_s] = \frac{E[S]}{\lambda}$$

$$E[t_a] = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda\cdot\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\cancel{\frac{\lambda}{\mu}}}{\cancel{\lambda}\cdot\left(\frac{\mu-\lambda}{\cancel{\mu}}\right)} \qquad E[t_a] = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$E[t_s] = \frac{E[S]}{\lambda} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{E[S]}{\lambda} \qquad E[S] = \frac{\lambda}{\mu} \qquad E[S] = \rho$$

↳ Para TODAS as filas de capacidade infinita.

Dica:

Calcular $E[Q]$ $E[t_a]$ $E[t_s] = \frac{1}{\mu}$ $E[S] = \rho$

$$E[t_w] = E[t_a] - E[t_s] \qquad E[W] = E[Q] - E[S]$$