6) Cadeias de Markov

6.1) Cadeias de Markov de tempo discreto

- Sequência aleatória de valores inteiros (discretos)

$$\{X_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

- Cadeia de Markov: "O futuro, dado o presente, independe do passado."

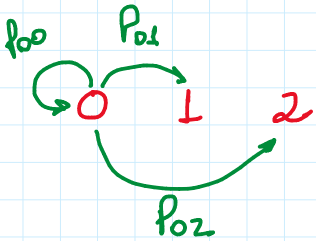
- Cadeia de Markov de tempo discreto e valores discretos:

$$\{X_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

- X_{n+1} depende apenas de X_n com probabilidade de transição dada por

$$P[X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0] =$$
$$= P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] = P_{ij}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \ldots \end{matrix}$$



- O valor de X_n resume todo o histórico (passado) do sistema necessário para predizer o próximo valor X_{n+1} da sequência aleatória.

- X_n : estado do sistema no instante *n*.

- Valores assumidos por X_n : conjunto de estados ou espaço de estados.

- P_{ij} : probabilidade de transição de estados – probabilidade do próximo estado ter valor *j* dado que o estado atual possui valor *i*.

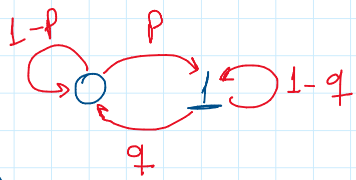
- **Propriedades da probabilidade de transição**

$$0 \le P_{ij} \le 1$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$$

- **Exemplo 01:** A cadeia de Markov de dois estados pode ser utilizada para modelar uma variedade de sistemas cujos estados se alternam entre ON e OFF. Supondo que a cada instante que o estado do sistema é OFF, o sistema se torna ON com probabilidade *p* e a cada instante que o estado é ON, o mesmo se torna OFF com probabilidade *q*. Represente graficamente a cadeia de Markov para este sistema, indicando as probabilidades de transições.

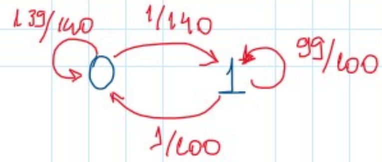
OFF – 0
ON – 1



$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

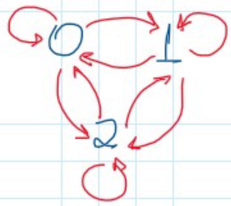
- **Exemplo 02:** Um sistema de comunicações de voz por pacotes transmite pacotes de voz enquanto o locutor estiver falando. A cada 10 ms, o sistema decide se o locutor está falando ou se o mesmo está em silêncio. Quando o locutor está falando, um pacote de voz é gerado pelo sistema, caso contrário, não há geração de pacotes. Se num determinado instante o locutor estiver em silêncio, o mesmo falará no próximo instante com probabilidade *p=1/140*. Se num determinado instante o locutor estiver falando, o mesmo estará em silêncio num instante posterior com probabilidade *q=1/100*. Faça a representação da cadeia de Markov para este sistema.

SILÊNCIO - 0
FALA - 1



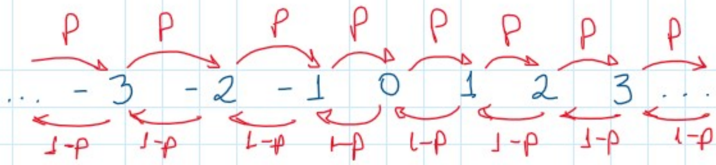
$$P = \begin{pmatrix} 139/140 & 1/140 \\ 1/100 & 99/100 \end{pmatrix}$$

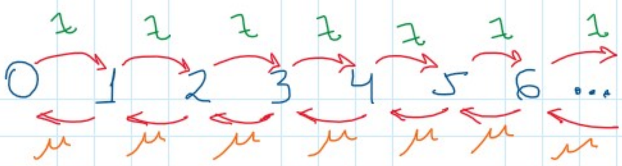
- **Exemplo 03:** Um drive de CD de um computador se encontra em um dos 3 estados: 0 (IDLE), 1 (READ) ou 2 (WRITE). Represente a cadeia de Markov para este drive, quando uma unidade de tempo é necessária para ler ou gravar alguma informação no disco.



$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

- **Exemplo 04:** Em um processo "*random walk*" discreto, a posição de uma pessoa é marcada com um valor inteiro num eixo real. Para cada unidade de tempo, a pessoa se locomove um passo de forma aleatória para a direita (com probabilidade *p*) ou para a esquerda. Represente a cadeia de Markov para esta situação.





FILA

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 5 \text{ cl/min} \\ \mu &= 6 \text{ cl/min} \end{aligned}\right\} \text{Poisson}$$

$E[X] = \alpha$

- **Algumas definições:**

- P_{ij} : probabilidade de ramo ou de transição de estados.

- A soma de todas as probabilidades de ramos que partem de um estado *i* é igual a 1.

- Transição de um estado para outro: salto.

- Uma sequência de saltos (por exemplo $i \to j \to k$) é chamado de caminho da cadeia de Markov se as transições ocorrem com probabilidades não nulas.

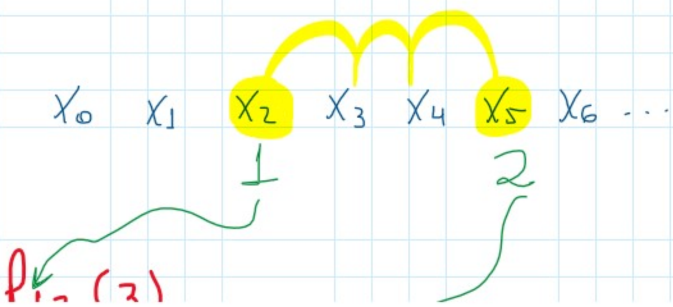
- A cadeia de Markov do exemplo 04 possui um conjunto de infinitos estados.

- Cadeia de Markov de finitos estados:

$$X_n = \{0,1,2,...,K\}$$

6.2) Matriz de probabilidades de transições de passo 1

$$P = P(1) = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & P_{0K} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1K} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$



$$P = P(1) = \begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1K} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{K0} & P_{K1} & P_{K2} & \cdots & P_{KK} \end{bmatrix}$$

$P_{12}(3)$

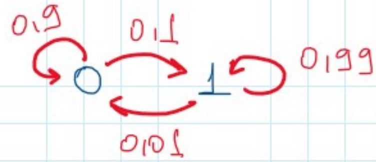
- A soma das probabiliades de transições de uma linha dever ser igual a 1.

- **Exemplo 05:** Construa a matriz de probabilidades de transições do exemplo 01.

- **Exemplo 06:** Idem para o exemplo 02.

- **Exemplo 07:** Um sistema wireless de comunicações por pacotes está sujeito a erros na recepção dos pacotes, de forma que quando um pacote contém erros, o próximo pacote conterá erros com 90% de probabilidade. Quando um pacote é recebido corretamente, o mesmo ocorrerá com o próximo pacote com uma probabilidade de 99%. Represente a cadeia de Markov para esta situação, assim como a matriz de probabilidades de transições de estados.

ERRO - 0
ACERTO - 1



$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$$

6.3) Probabilidades de transições de passo n

$$P_{ij}(n) = P[X_{m+n} = j \mid X_m = i]$$

- O elemento P_{ij} de $P_{ij}(n)$ representa a probabilidade de partir de um estado *i* para um estado *j* em *n* passos.

- Para *n=1*, obtemos a matriz de probabilidades de transições de passo 1.

- Para uma cadeia de Markov finita de *K* estados, a matriz de transições de passo *n* é dada por

$$P(n) = P^n$$

$$P(2) = P^2 = P \cdot P$$

$$P(8) = P(6) \cdot P(2) = P^6 \cdot P^2 = P^8$$

Por exemplo,

$$P(3) = P(1) \times P(2) = P^3$$

$$P(5) = P(2) \times P(3) = P^5$$

em que ***P*** é a matriz de probabilidades de transições de passo 1.

- A matriz de transições de passo *n* traz uma descrição completa da evolução das probabilidades em uma cadeia de Markov.

- **Exemplo 08:** Obtenha a matriz de probabilidades

- **Exemplo 08:** Obtenha a matriz de probabilidades de transições de passo 2 para a cadeia de Markov do exemplo 01.

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

$$P(2) = P \cdot P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00}(2) & P_{01}(2) \\ P_{10}(2) & P_{11}(2) \end{pmatrix}$$

$$P_{00}(2) = (1-p)^2 + pq \qquad P_{10}(2) = q(1-p) + (1-q)q = 2q - q^2 - pq$$

$$P_{01}(2) = 2p - p^2 - pq \qquad P_{11}(2) = pq + (1-q)^2$$

- **Exemplo 09:** Idem para o exemplo 02.

$$P = \begin{pmatrix} 139/140 & 1/140 \\ 1/100 & 99/100 \end{pmatrix}$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 139/140 & 1/140 \\ 1/100 & 99/100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 139/140 & 1/140 \\ 1/100 & 99/100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9858 & 0.0142 \\ 0.0198 & 0.9802 \end{pmatrix}$$

- **Exemplo 10:** Para o exemplo 07, assuma que o primeiro pacote transmitido contenha erros. Qual a probabilidade do segundo pacote transmitido conter erros? Qual a probabilidade do terceiro pacote transmitido conter erros, sabendo que o primeiro pacote continha erros?

ERRO - 0
ACERTO - 1

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$$

$$P_{00}(1) = 0{,}9$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00}(2) & P_{01}(2) \\ P_{10}(2) & P_{11}(2) \end{pmatrix}$$

$$P_{00}(2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}81 + 0{,}001 = 0{,}811$$