

 Instituto Nacional de Telecomunicações	5ª Aula de exercícios de M008	Turma: M008 A
	M008 – Probabilidade e Processos Estocásticos	
Professor: Renan Stel Duque		Monitor: Igor Gonçalves de Souza
Assunto(s): Funções de variáveis aleatórias e funções com limites dependentes		
Conteúdo: Enunciado para as questões		
Nome:		Data:

- 1) Um determinado produto é composto por uma mistura de diversas substâncias, dentre elas as substâncias A e B . Para um item selecionado aleatoriamente, considere X e Y , respectivamente, às quantidades em kg das substâncias A e B utilizadas, de função de distribuição cumulativa conjunta dada pela função a seguir. Pede-se:

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, y \leq 0 \\ k(x^2y + 2xy^2), & 0 \leq x \leq 0,1 \\ & 0 \leq y \leq 0,2 \\ 1, & x \geq 0,1, y \geq 0,2 \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante k .

Resposta: $k = 100$

- (b) A função de distribuição cumulativa da quantidade da substância B presente no produto. Utilizando essa função, determine a probabilidade de um item selecionado aleatoriamente conter de 80 a 100 gramas da substância B .

Resposta: 9,2%, $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ 20y^2 + y, & 0 \leq y \leq 0,2 \\ 1, & y \geq 0,2 \end{cases}$

- (c) A função densidade de probabilidade da quantidade da substância B presente no produto.

Resposta: $f_Y(y) = \begin{cases} 40y + 1, & 0 \leq y \leq 0,2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- (d) A probabilidade de um item selecionado aleatoriamente conter exatamente 90 gramas da substância B .

- (e) Se o preço de venda de uma unidade deste produto depende da quantidade da substância B utilizada e é dado por $P = 100 \cdot Y + 10$, determine a função densidade de probabilidade do preço de venda de uma unidade deste produto.

Resposta: $f_P(p) = \begin{cases} \frac{2p-15}{500}, & 10 \leq p \leq 30 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- 2) Duas variáveis aleatórias contínuas X e Y representam, respectivamente, os tempos de envio de duas mensagens A e B (em segundos) por um mesmo transmissor. A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k \cdot e^{-(4x+5y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante k .

Resposta: $k = 20$

- (b) Verifique se os tempos de envio das mensagens A e B são independentes e **justifique**.
- (c) A função de distribuição cumulativa marginal de X . Em seguida, utilize esta função para determinar a probabilidade de o tempo de envio da mensagem A ser maior do que 100 milissegundos.

Resposta: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-4x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$; 67,03%

- (d) Encontre a função densidade de probabilidade da variável aleatória Z , definida por $Z = e^X$.

Resposta: $f_Z(z) = \begin{cases} 4/z^5, & z \geq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

- 3) As variáveis aleatórias contínuas X e Y representam, respectivamente, a renda e o consumo por mês, em milhares de reais, dos trabalhadores de uma pequena empresa. A função densidade de probabilidade conjunta das duas variáveis aleatórias é dada por:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c \sqrt{xy}, & 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Verifique se as variáveis aleatórias X e Y são independentes e **justifique**.
- (b) Determine $P[Y > 1]$.

Resposta: 65,213%

- (c) Determine $P[1/2 < X < 1, Y \geq 1]$.