16/09/2021

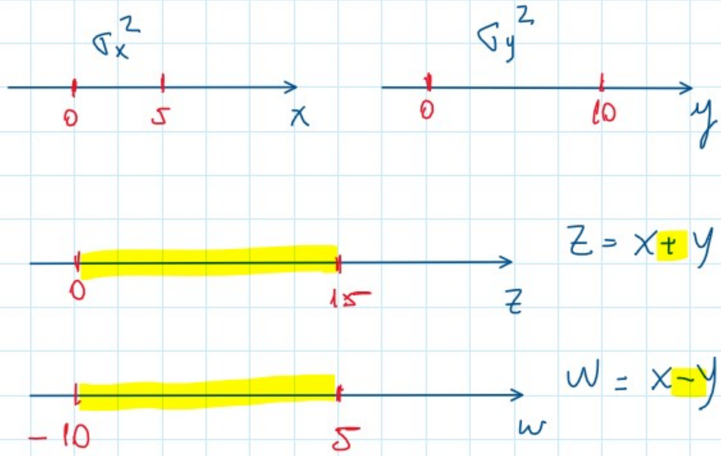
3.5.4) Propriedades da variância

$\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

P1) Se c é uma constante,

$$E\left[(c.(X-m))^2\right] = c^2.E\left[.(X-m)^2\right]$$

$$Var(c.X) = c^2.Var(X)$$



P2) Se X e Y são v.a.'s independentes,

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

$Z = X + Y$

$W = X - Y$

3.5.5) Caso multidimensional

- Para 2 v.a.'s X_1 e X_2 com fdp conjunta $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$, o momento conjunto é definido como

$$E[X_1^k X_2^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k.x_2^n.f_{X_1X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

CONTÍNUAS

- E o momento central conjunto como

$$E\left[(X_1-m_1)^k(X_2-m_2)^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_1)^k(x_2-m_2)^n.f_{X_1X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

- Os momentos conjuntos e momentos centrais conjuntos para $k=n=1$ representam casos particulares de grande importância e são chamados de ***correlação*** e ***covariância*** das v.a.'s X_1 e X_2, respectivamente.

- A correlação entre X_i e X_j é dada pelo momento conjunto

$$\rho_{ij} = E\left[X_iX_j\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_i.x_j.f_{X_iX_j}\left(x_i, x_j\right)dx_idx_j$$

- A covariância X_i e X_j é dada por

$$\mu_{ij} = E[(X_i-m_i)(X_j-m_j)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i).(x_j-m_j).f_{X_iX_j}(x_i,x_j)dx_idx_j$$

$$\mu_{ij} = E\left[\left(X_i - m_i\right)\left(X_j - m_j\right)\right] = E\left[X_iX_j\right] - m_i.m_j$$

$$\mu_{ij} = E\left[\left(X_i - m_i\right)\left(X_j - m_j\right)\right] = E\left[X_i X_j\right] - m_i . m_j$$

3.5.6) Desvio padrão

- É a raiz quadrada da variância

$$\sigma_X = \sqrt{E\left[\left(X - m\right)^2\right]} = \sqrt{\sigma_X^2}$$

- **Exemplo 11:** Determine a variância e o desvio padrão da variável aleatória do Exemplo 06 .

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}.x & 0 < x < 2 \\ 0 & caso \quad contrário \end{cases}$$

$E[x] = \frac{4}{3} \qquad \sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[x^2] = \int_0^2 x^2 . \frac{1}{2} x \, dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left.\frac{x^4}{8}\right|_{x=0}^{2} = 2$

$\sigma_X^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{18 - 16}{9} = \frac{2}{9} \qquad \sigma_X = \frac{\sqrt{2}}{3}$

- **Exemplo 12:** A função de densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c.(2x + y) & 2 \le x \le 6 \; e \; 0 \le y \le 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

X e Y NÃO são independentes

- Determine:

a) $E[X]$

b) $E[Y]$

c) $E[XY] = \rho_{XY}$

d) $E[X^2]$

e) $E[Y^2]$

f) σ_X^2

g) σ_Y^2

h) μ_{XY}

i) σ_X

j) σ_Y

$f_X(x) \qquad f_Y(y)$

CASA

3.7) Função característica

$\Psi_X(\omega)$

$\hookrightarrow$ PSI

- A função característica de uma v.a. X é definida como a média estatística

$$E\left[e^{jwX}\right] \equiv \psi_X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j.w.x}.f_X(x)\,dx$$ CONTÍNUAS

$$\Psi_x(\omega) = E[e^{j\omega x}] = \sum e^{j\omega x} \cdot f_X(x)$$ DISCRETAS

$$\Psi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} \cdot f_X(x)\,dx$$

$$\frac{d\Psi_x}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} jx\, e^{j\omega x} f_X(x)\,dx \qquad \frac{d^2\Psi_x}{d\omega^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (jx)^2 \cdot e^{j\omega x} \cdot f_X(x)\,dx$$

$$\frac{d^n\Psi_x}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (jx)^n \cdot e^{j\omega x} \cdot f_X(x)\,dx = j^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot e^{j\omega x} \cdot f_X(x)\,dx$$

$$\left.\frac{d^n\Psi_x}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} = j^n \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\,dx}_{E[X^n]}$$

$$\boxed{E[X^n] = (-j)^n \cdot \left.\frac{d^n\Psi_x}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}}$$

- **Exemplo 14:** Determine a função característica da variável aleatória X com distribuição exponencial dada por:

$$f_X(x) = \lambda.e^{-\lambda.x} \quad , \quad para \quad x > 0$$

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \rightarrow \text{por partes} \quad \text{(Cap 4)}$$

$$\Psi_x(\omega) = E[e^{j\omega x}] = \int_0^{\infty} e^{j\omega x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-(\lambda - j\omega)x}\,dx$$

$$\Psi_x(\omega) = \left.\frac{\lambda\, e^{-(\lambda - j\omega)x}}{-(\lambda - j\omega)}\right|_{x=0}^{\infty} = 0 - \left(\frac{\lambda}{-(\lambda - j\omega)}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$$

$$\boxed{\Psi_x(\omega) = \lambda \cdot (\lambda - j\omega)^{-1}}$$

$$\frac{d\Psi_x}{dw} = \cancel{-}\lambda \cdot (\lambda - jw)^{-2} \cdot (\cancel{-}j) = \lambda j \cdot (\lambda - jw)^{-2}$$

$$\left.\frac{d\Psi_x}{dw}\right|_{w=0} = \frac{\cancel{\lambda} j}{\lambda^{\cancel{2}}} = \frac{j}{\lambda} \qquad E[X] = -j \cdot \frac{j}{\lambda} \qquad E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{d^2\Psi_x}{dw^2} = \cancel{-}2\lambda j \cdot (\lambda - jw)^{-3} \cdot (\cancel{-}j) = -2\lambda \cdot (\lambda - jw)^{-3}$$

$$\left.\frac{d^2\Psi_x}{dw^2}\right|_{w=0} = \frac{-2\cancel{\lambda}}{\lambda^{\cancel{3}2}} = \frac{-2}{\lambda^2} \qquad E[X^2] = (-j)^2 \cdot \left(-\frac{2}{\lambda^2}\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}$$

- **Exemplo 15:** Uma v.a. contínua X tem densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2.e^{-2.x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \lambda = 2$$

Determine: $E[X]$, $E[X^2]$, $Var(X)$, Desvio padrão.

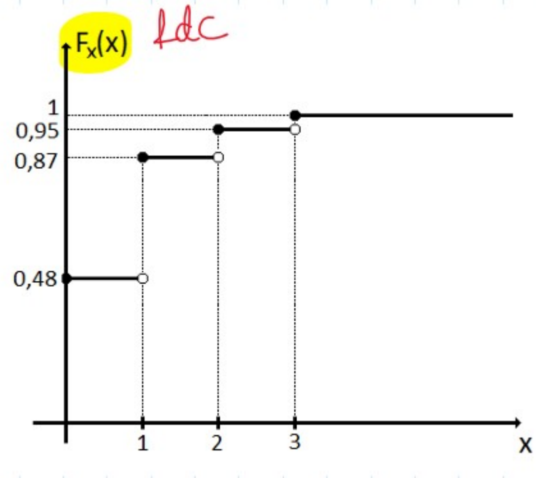
Do exemplo anterior,

$$\Psi_X(w) = \frac{2}{2-jw} \qquad E[X] = \frac{1}{2} \qquad E[X^2] = \frac{1}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{1}{4} \qquad \sigma_X = \frac{1}{2}$$

32) O gráfico a seguir representa a função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória X, que indica o número de defeitos encontrados em um condutor ecolhido aleatoriamente. Pede-se:

$0 \le X \le 3$

fdc



$$E[X] = \sum x \cdot f_X(x)$$

X	0	1	2	3
$f_X(x)$	0,48	0,39	0,08	0,05

fmp

a) A função característica da variável aleatória X.

a) A função característica da variável aleatória X .

$$\psi_X(w) = E[e^{jwx}] = \sum_{x=0}^{3} e^{jwx} \cdot f_X(x) = \cancel{e^{jw0}}^{\,1} \cdot 0,48 + e^{jw1} \cdot 0,39 + e^{jw2} \cdot 0,08 + e^{jw3} \cdot 0,05$$

$$\psi_X(w) = 0,48 + 0,39\, e^{jw} + 0,08\, e^{j2w} + 0,05\, e^{j3w}$$

$$E\left[X^n\right] = (-j)^n \cdot \left.\frac{d^n \psi_X(w)}{dw^n}\right|_{w=0}$$

b) Utilizando a função característica, determine o número médio de defeitos encontrados em um condutor ecolhido aleatoriamente.

$$\left.\frac{d\psi_X}{dw}\right|_{w=0} = \left. 0,39\, e^{jw} \cdot j + 0,08\, e^{j2w} \cdot 2j + 0,05\, e^{j3w} \cdot 3j \right|_{w=0} = 0,39j + 0,16j + 0,15j$$

$$\left.\frac{d\psi_X}{dw}\right|_{w=0} = 0,7j \qquad E[X] = -j \cdot 0,7j \qquad E[X] = 0,7$$

c) Utilizando o método de cálculo que você preferir, determine o desvio padrão do número de defeitos encontrados em um condutor ecolhido aleatoriamente.

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \qquad \sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \qquad E[X] = 0,7$$

X	0	1	2	3
$f_X(x)$	0,48	0,39	0,08	0,05

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_X(x)$$

$$E[X^2] = \cancel{0^2 \cdot 0,48}^{\,0} + 1^2 \cdot 0,39 + 2^2 \cdot 0,08 + 3^2 \cdot 0,05$$

$$E[X^2] = 0,39 + 0,32 + 0,45 = 1,16$$

$$\sigma_X^2 = 1,16 - 0,7^2 = 0,67 \qquad \sigma_X \cong 0,82$$