5.4.3) Processos ergódicos

- $\overline{X(t)}$ é a média de conjunto das amplitudes das funções amostra em *t*.
- $R_X(t_1,t_2)=\overline{X_1.X_2}$ é a média de conjunto do produto das amplitudes das funções amostras *X(t₁)* e *X(t₂)*.

- **Médias temporais**

- Média temporal $\overline{\overline{X(t)}}$ de uma função amostra *X(t)*

$$\overline{\overline{X(t)}}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t).dt$$

- Função de autocorrelação temporal $\Re_X(\tau)$

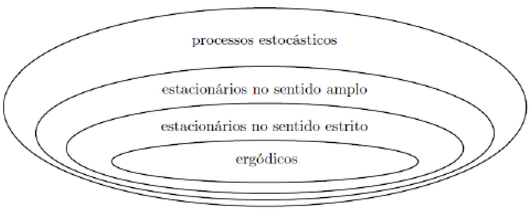
$$\Re_X(\tau)=\overline{\overline{X(t).X(t+\tau)}}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t).X(t+\tau)dt$$

- Processos ergódicos: as médias de conjunto são iguais às médias temporais de qualquer função amostra.

$$\overline{X(t)}=\overline{\overline{X(t)}}$$

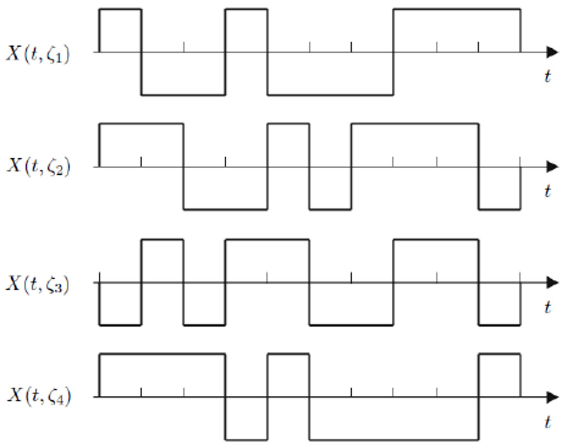
$$R_X(\tau)=\Re_X(\tau)$$

- Para um processo ergódico, todas as possíveis médias de conjunto são iguais às médias temporais de uma de suas funções amostras.



- Na prática muitos dos processos estacionários são usualmente ergódicos com relação pelo menos às estatísticas de primeira e segunda ordem.

- Saída de um gerador de sinais binários (sobre um período de *0* a *10T*).



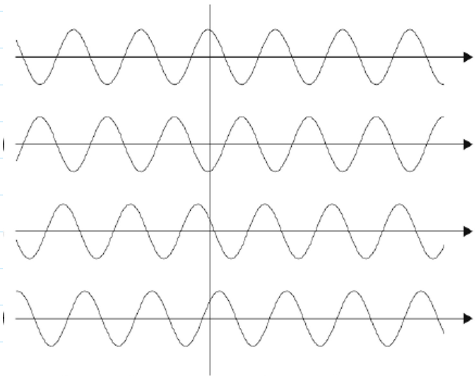
- **Exemplo 04:** Mostre que o processo do exemplo anterior é ergódico para estatísticas de até segunda ordem.

APOSTILA → Exemplo 05

- **Exemplo 03**: Mostre que o processo aleatório

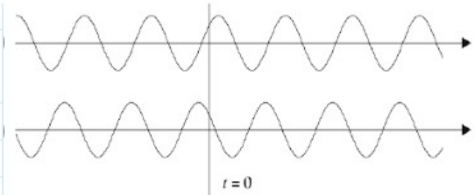
$$X(t)=A.\cos(\omega_c t+\theta)$$

em que θ é uma v.a. uniformemente distribuída no intervalo $[0,2\pi]$ é um processo estacionário no sentido amplo.



$\overline{X(t)} = 0$ (CTE)

$\overline{X(t)} = 0 \quad (CTE)$

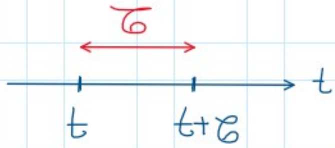


$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(w_c\tau)$$

$$R_X(0) = \frac{A^2}{2} = P_X$$

5.5) Propriedades da função de autocorrelação

P1) $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ (função par)



$$R_X(\tau) = \overline{X(t)\cdot X(t+\tau)} = \overline{X(a)\cdot X(a-\tau)} = R_X(-\tau)$$

$a = t+\tau$

$t = a-\tau$

P2) $R_X(0) = \overline{X^2}$ $\qquad R_X(0) = \overline{X(t)\cdot X(t+0)} = \overline{X^2} = P_X$

P3) Se $Z(t) = X(t) + Y(t)$ então

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau)$$

$$R_Z(\tau) = \overline{Z(t)\cdot Z(t+\tau)} = \overline{[X(t)+Y(t)]\cdot[X(t+\tau)+Y(t+\tau)]}$$

$$R_Z(\tau) = \overline{X(t)\cdot X(t+\tau)} + \overline{X(t)Y(t+\tau)} + \overline{Y(t)X(t+\tau)} + \overline{Y(t)\cdot Y(t+\tau)}$$

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_Y(\tau)$$

P4) Se um processo estocástico tem componentes periódicas, então a função de autocorrelação também é periódica

$$X(t) = X(t+nT) \Rightarrow R_X(\tau) = R_X(\tau+nT)$$

P5) $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

5ª Lista de exercícios

10) Para um sinal aleatório dado por $X(t) = M(t)\times\cos(w_c t+\theta)$, em que θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0,\pi]$ e o sinal $M(t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo, independente de θ, de média 2 e função de autocorrelação dada pela expressão $R_M(\tau) = e^{-|\tau|}$, pede-se:

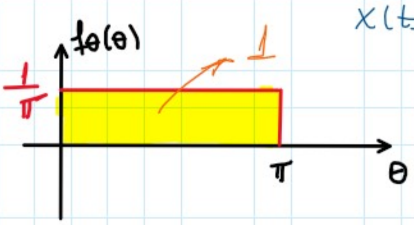
a) O valor médio do processo estocástico $X(t)$.
b) A expressão da função de autocorrelação do processo estocástico $X(t)$.
c) O gráfico da função de autocorrelação do processo estocástico $X(t)$.
d) O processo estocástico $X(t)$ é estacionário no sentido amplo? Justifique.

c) O gráfico da função de autocorrelação do processo estocástico $X(t)$.

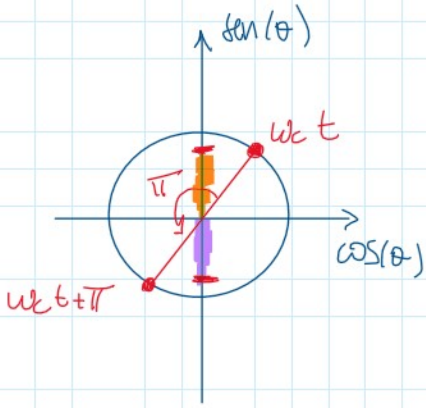
d) O processo estocástico $X(t)$ é estacionário no sentido amplo? Justifique.

a) $\overline{X(t)} = \overline{M(t)\cdot\cos(w_c t+\theta)} = \overline{M(t)}\cdot\overline{\cos(w_c t+\theta)}$

$$\overline{X(t)} = 2\cdot\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(w_c t+\theta)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot d\theta$$



$$\overline{X(t)} = \frac{2}{\pi}\, sen(w_c t+\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi}$$



$$\overline{X(t)} = \frac{2}{\pi}\left\{\overbrace{sen(w_c t+\pi)}^{-sen(w_c t)} - sen(w_c t)\right\}$$

$\overline{X(t)} = -\frac{4}{\pi}\, sen(w_c t) \rightarrow$ não é constante

b) $R_X(t,t+\tau) = \overline{X(t)\cdot X(t+\tau)} = \overline{M(t)\cdot\cos(w_c t+\theta)\cdot M(t+\tau)\cdot\cos(w_c t+w_c\tau+\theta)}$

$R_X(t,t+\tau) = \overline{M(t)\cdot M(t+\tau)}\cdot\overline{\cos(w_c t+\theta)\cdot\cos(w_c t+w_c\tau+\theta)}$

$$R_X(t,t+\tau) = \frac{R_M(\tau)}{2}\cdot\left\{\cos(w_c\tau) + \underbrace{\overline{\cos(2w_c t+w_c\tau+2\theta)}}_{0}\right\}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x-y)+\frac{1}{2}\cos(x+y)$$

$$\overline{\cos(2w_c t+w_c\tau+2\theta)} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2\cos(2w_c t+w_c\tau+2\theta)\cdot\frac{1}{\pi}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, sen(2w_c t+w_c\tau+2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi} = 0$$

$R_X(\tau) = \frac{R_M(\tau)}{2}\cos(w_c\tau) = \frac{e^{-|\tau|}}{2}\cdot\cos(w_c\tau) \rightarrow$ não depende de t

d) Não, pois $\overline{X(t)}$ depende de t.

13) Considere $p(t)$ um pulso dente de serra definido como

$$p(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

O processo estocástico $X(t)$ é definido por $X(t) = A\cdot p(t)$, no qual A assume os valores ± 1 com probabilidades iguais (observe que A é uma variável aleatória discreta que assume apenas dois valores). Pede-se:

a) Esboce pelo menos 4 funções amostras do processo $X(t)$, dizendo se o mesmo é discreto ou contínuo no tempo e nas amplitudes.

DISCRETA

A	$f_A(A)$
$+1$	0,5
-1	0,5

13) Considere $p(t)$ um pulso dente de serra definido como

$$p(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

O processo estocástico $X(t)$ é definido por $X(t) = A \cdot p(t)$, no qual A assume os valores ± 1 com probabilidades iguais (observe que A é uma variável aleatória discreta que assume apenas dois valores). Pede-se:

a) Esboce pelo menos 4 funções amostras do processo $X(t)$, dizendo se o mesmo é discreto ou contínuo no tempo e nas amplitudes.

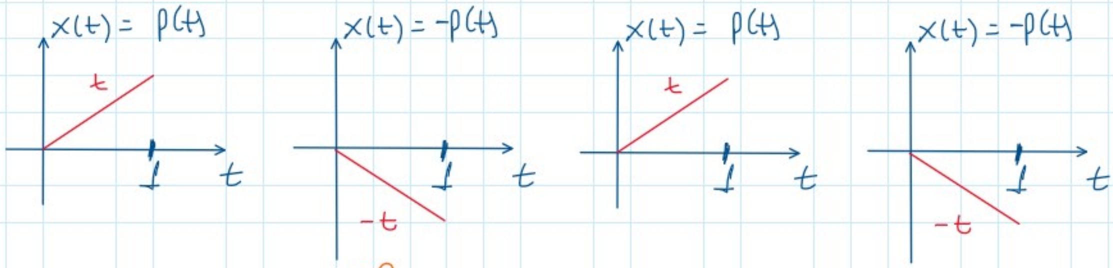
b) Calcule a média do processo estcástico $X(t)$.

c) Calcule a função de autocorrelação do processo estocástico $X(t)$.

d) De acordo com os resultados encontrados nos itens anteriores, o processo estocástico $X(t)$ é estacionário para estatísticas de que ordens?

A	$f_A(A)$
$+1$	$0{,}5$
-1	$0{,}5$

a)



b) $\overline{X(t)} = \overline{A \cdot p(t)} = \overset{0}{\cancel{\overline{A}}} \cdot p(t)$ $\qquad \overline{x(t)} = 0$ é CTE

$\overline{A} = \sum A \cdot f_A(A) = -1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$

c) $R_x(t, t+\tau) = \overline{X(t) \cdot X(t+\tau)} = \overline{A \cdot p(t) \cdot A\, p(t+\tau)}$

$$p(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$R_x(t, t+\tau) = \overset{1}{\cancel{\overline{A^2}}} \cdot p(t) \cdot p(t+\tau) = t \cdot (t+\tau) \rightarrow$ depende de t

$\overline{A^2} = \sum A^2 \cdot f_A(A) = (-1)^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}5 = 1$

d) De 1ª ordem apenas.