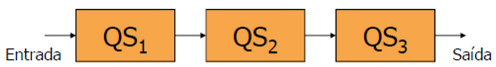
Redes de Filas

Redes de Sistemas de Filas

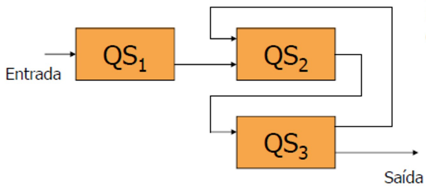
- ✓ Muitos problemas reais são compostos de mais de um sistema de fila.
- ✓ Para modelar estes problemas, vários sistemas de fila (também chamados de nós) devem ser conectados.
- ✓ Exemplos de redes de filas são: redes de telecomunicações, sistemas de computação e sistemas de transito.

Redes de Sistemas de Filas

- ✓ Existem basicamente três tipos de redes de filas:
  - Redes Abertas

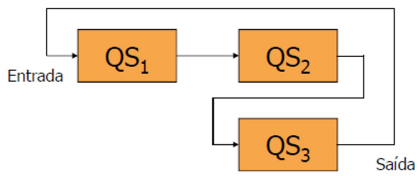


  - Redes Abertas com Realimentação



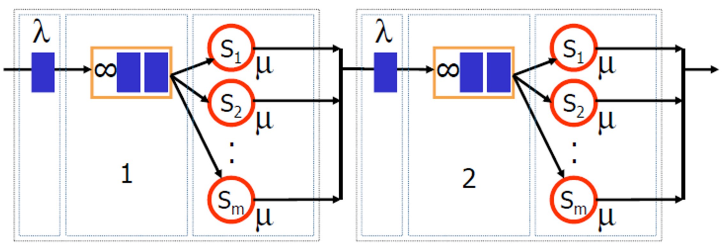
Ambas possuem número de elementos variável.

  - Redes Fechadas



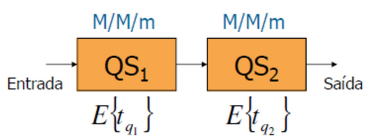
Possui número de elementos constante.

- ✓ Redes Abertas Sem Realimentação
  - Teorema de Burke (1956)
    - O processo de saída de uma rede de sistemas M/M/m é um processo Poissoniano estatisticamente independente do processo de entrada.



- ✓ Redes Abertas Sem Realimentação
  - Conseqüências do Teorema de Burke
    - Cada nó da rede é considerado independente dos demais.
    - O número médio de elementos e o atraso em cada nó também é independente dos demais.
    - O número médio de elementos na rede é igual a soma do número médio de elementos em cada nó.
    - O tempo médio de permanência dos elementos na rede é igual a soma do tempo médio de permanência dos elementos em cada nó.

Exemplo 34:



$$\boxed{E\{t_q\} = E\{t_{q_1}\} + E\{t_{q_2}\}}$$

✓ Redes Abertas Com Realimentação

▫ Teorema de Jackson (1957)

- Considere uma rede de filas aberta com M nós que satisfaz as seguintes condições:

a) Cada nó i é um sistema de filas M/M/m.
b) O nó i tem n_i servidores e tempo médio de serviço $1/\mu_i$ para todos os servidores.
c) Elementos chegam de "fora" do sistema para o nó i de acordo com um processo Markoviano de intensidade média γ_i.
d) Um elemento servido no nó i vai instantaneamente ao nó j (j = 1,2,...,M) com probabilidade r_{ij} ou deixa a rede com probabilidade:

$$1-\sum_{j=1}^{M} r_{ij}$$

$$\text{Entrada}\begin{cases}\lambda_i \text{ (interno)}\\ \gamma_i \text{ (externo)}\end{cases}$$

✓ Redes Abertas Com Realimentação

▫ Teorema de Jackson (cont.)

- Para cada nó i (i = 1,2,...,M), a taxa média de chegada λ_i é dada por:

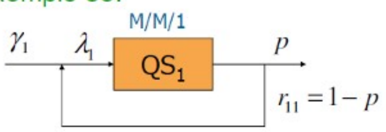
$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{M} r_{ji}\lambda_j$$

- Seja $p(q_1, q_2, q_3, \dots, q_M)$ a probabilidade de que haja q_i elementos no nó i, então Jackson afirma que:

$$p(q_1, q_2, q_3, \dots, q_M) = p(q_1)p(q_2)p(q_3)\dots p(q_M)$$

$$\boxed{p(q_1, q_2, q_3, \dots, q_M) = \prod_{i=1}^{M} p(q_i)}$$

Exemplo 35:



$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{M} r_{ji}\lambda_j \qquad \lambda_1 = \gamma_1 + r_{11}\lambda_1 = \gamma_1 + (1-p)\lambda_1$$

$$\cancel{\lambda_1} = \gamma_1 + \cancel{\lambda_1} - p\lambda_1 \qquad \lambda_1 - \lambda_1 = \gamma_1 - p\lambda_1 \qquad \lambda_1 = \frac{\gamma_1}{p}$$

$$\gamma_1 - p\lambda_1 = 0$$

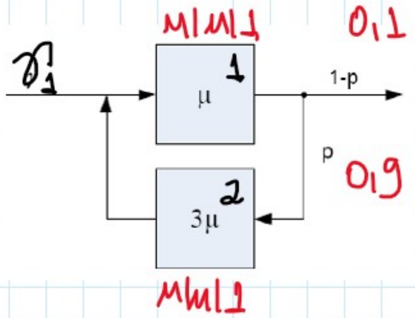
$$p\lambda_1 = \gamma_1 \qquad \lambda_1 = \frac{\gamma_1}{p}$$

λ_1, μ_1

Exemplo 36:

Considere a rede de sistemas de filas da figura abaixo. A chegada de pacotes na rede obedece um processo Markoviano de taxa γ = 0,075 pacotes/segundo. A taxa de atendimento μ é de 1 pacote/segundo (exponencial negativa). Sabendo que p = 0.9, calcule:

a) O número médio de pacotes na rede de sistema de filas.
b) O tempo médio de permanência dos pacotes em cada sistema de fila.



$\gamma_1 = 0{,}075$ pac/s

$\mu_1 = 1$ pac/s $\qquad \lambda_1 = ?$

$\mu_2 = 3$ pac/s $\qquad \lambda_2 = ?$

$M = 2$

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \sum^{2} r_{i1}\cdot\lambda_i \qquad \lambda_1 = \gamma_1 + \cancel{r_{11}}^{\,0}\lambda_1 + r_{21}\cdot\lambda_2$$

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \sum_{j=1}^{2} r_{j1} \cdot \lambda_j \qquad \lambda_1 = \gamma_1 + \cancel{r_{11} \cdot \lambda_1}^{0} + r_{21} \cdot \lambda_2$$

$$\lambda_1 = 0{,}075 + \lambda_2$$

$$\lambda_2 = \cancel{\gamma_2}^{0} + \sum_{j=1}^{2} r_{j2} \cdot \lambda_j \qquad \lambda_2 = r_{12} \cdot \lambda_1 + \cancel{r_{22}}^{0} \cdot \lambda_2$$

$$\lambda_2 = 0{,}9 \cdot \lambda_1$$

$$\lambda_1 = 0{,}075 + 0{,}9\,\lambda_1 \qquad 0{,}1\,\lambda_1 = 0{,}075$$

M|M|1 $\longrightarrow$ $\lambda_1 = 0{,}75$ pac/s $\quad \mu_1 = 1$ pac/s

M|M|1 $\longrightarrow$ $\lambda_2 = 0{,}675$ pac/s $\quad \mu_2 = 3$ pac/s

a) $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = 0{,}75 \qquad \rho_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = \dfrac{0{,}675}{3} = 0{,}225$

a) M|M|1 $\rightarrow$ $E[Q] = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

$E[Q_1] = \dfrac{0{,}75}{0{,}25} = 3$ pac

$E[Q_2] = \dfrac{0{,}225}{1-0{,}225} \cong 0{,}29$ pac

$E[Q] = 3{,}29$ pac

b) $E[t_Q] = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$

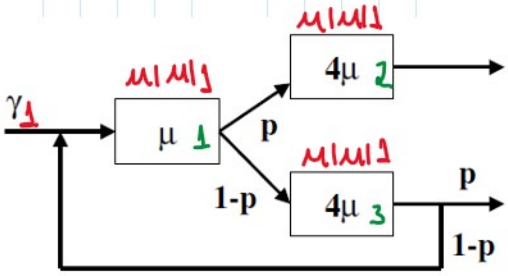
$E[t_{Q1}] = \dfrac{1}{1-0{,}75} = 4\,s$

$E[t_{Q2}] = \dfrac{1}{3-0{,}675} = 0{,}43\,s$

Exemplo 37: Um nó de comutação de pacotes é modelado por uma rede de sistemas de filas tal qual mostrado a seguir. Após uma verificação inicial dos cabeçalhos no nó a esquerda, uma parte p dos pacotes não tem erro e é enviada para emissão na taxa 4μ, seguindo adiante na rede. Na outra parte do tráfego é feita uma correção de erro no sistema a direita abaixo. Pacotes cujo erro foi possível corrigir (1-p) passam por uma nova verificação de cabeçalho no sistema a esquerda. Pacotes com erro impossível de corrigir são descartados com probabilidade p no sistema a direita abaixo. A chegada de pacotes na rede obedece um processo Markoviano de taxa γ = 1 pacote/segundo. A taxa de atendimento μ é igual a 2 pacotes/segundo (exponencial negativa). Sabendo que p = 0,7, calcule:

a) O número médio de pacotes na rede de sistema de filas.

b) O tempo médio de permanência de pacotes em cada um dos sistemas de filas da rede.



$\gamma_1 = 1$ pac/s $\quad \mu = 2$ pac/s

$\mu_1 = 2$

$\mu_2 = 8 \quad \mu_3 = 8 \quad p = 0{,}7$

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{M} r_{ji}\lambda_j$$

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \cancelto{0}{r_{11}} \cdot \lambda_1 + \cancelto{0}{r_{21}}\, \lambda_2 + r_{31} \cdot \lambda_3$$

$$\lambda_1 = 1 + 0{,}3\, \lambda_3$$

$$\lambda_2 = \cancelto{0}{\gamma_2} + r_{12} \cdot \lambda_1 + \cancelto{0}{r_{22}} \cdot \lambda_2 + \cancelto{0}{r_{32}} \cdot \lambda_3$$

$$\lambda_2 = 0{,}7\, \lambda_1$$

$$\lambda_3 = \cancelto{0}{\gamma_3} + r_{13} \cdot \lambda_1 + \cancelto{0}{r_{23}} \cdot \lambda_2 + \cancelto{0}{r_{33}} \cdot \lambda_3$$

$$\lambda_3 = 0{,}3 \cdot \lambda_1$$

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1{,}0989 & \mu_1 = 2 & \rho_1 = 0{,}54945 \\ \lambda_2 = 0{,}7692 & \mu_2 = 8 & \rho_2 = 0{,}09615 \\ \lambda_3 = 0{,}3297 & \mu_3 = 8 & \rho_3 = 0{,}0412125 \end{array}\right\} M|M|1$$

a) $E[Q] = \dfrac{\rho}{1-\rho}$ $\quad E[Q_1] = 1{,}22 \quad E[Q_2] = 0{,}106 \quad E[Q_3] = 0{,}043$

$E[Q] = 1{,}369$ pa

b) $E[t_Q] = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$ $\quad E[t_{Q_1}] = 1{,}11$ s $\quad E[t_{Q_2}] = 0{,}138$ s $\quad E[t_{Q_3}] = 0{,}13$ s