Inatel Instituto Nacional de Telecomunicações	**3º Relatório**	**Turma:** C213__	**Data:**
	Controle de sistemas dinâmicos		
Nome:			

Resposta típica de sistemas de primeira ordem

A partir de um modelo matemático é possível analisar o desempenho de um dado sistema. A resposta de um sistema à um determinado estímulo de entrada pode ser dividido em duas partes: resposta transitória e resposta estacionária.

A **resposta transitória** se refere ao estado inicial do sistema, ao qual tende à um estado final chamado de **resposta estacionária ou permanente**, pois nesse regime o comportamento do sinal de saída não varia com o tempo.

O modelo matemático de um sistema pode ser representado através de uma função de transferência por uma equação diferencial linear invariante no tempo, que relaciona o sinal de entrada e o de saída por meio da transformada de Laplace. Com esse modelo, o comportamento do sistema pode ser previsto, como sua estabilidade, erro, entre outros parâmetros.

Para um sistema de **primeira ordem**, a função de transferência na forma canônica é dada pela equação a seguir, em que:

$$\boxed{\boldsymbol{H(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}}}$$

$k \rightarrow$ ganho estástico em malha aberta

$\tau \rightarrow$ constante de tempo do sistema

Nota:

Na transformada de Laplace, tem-se as seguintes mudanças do domínio do tempo para o domínio da frequência:

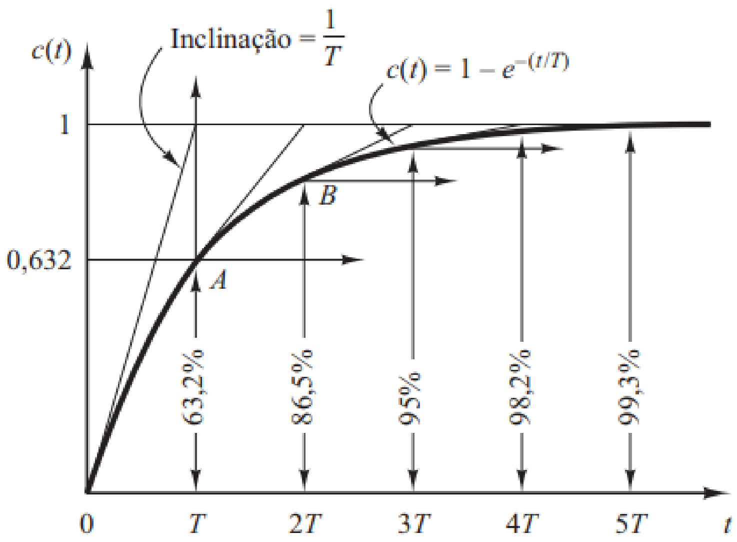
Para os componentes dos sistemas:

Resistor: $X_R = R$ **Capacitor:** $X_C = \frac{1}{sC}$ **Indutor:** $X_L = sL$

Para as formas dos sinais de entrada:

Impulso: 1 **Degrau:** $\frac{A}{s}$

Para um sistema de primeira ordem, o regime permanente acontece a partir do instante em que o sistema atinge 98% do seu valor final, o que acontece após 4τ. Esse tempo em que o sistema demora para atingir o regime permanente é chamado de **tempo de acomodação**. O gráfico a seguir ilustra o comportamento típico de um sistema de primeira ordem:



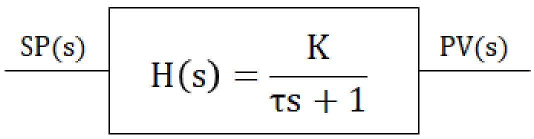
Em uma constante de tempo, a resposta do sistema, de forma exponencial, vai de 0 à 63,21% do valor final. Após a segunda constante de tempo, atinge 86,47% do valor final. Para instantes de tempo $t = 3\tau, 4\tau\ e\ 5\tau$ o sistema alcança, respectivamente $95{,}02\%, 98{,}17\%\ e\ 99{,}33\%$ do valor final. Assim, para $t \geq 4\tau$ a resposta do sistema entra em regime permanente, considerando o critério dos 2% (98% do valor final).

O valor do sistema em regime permanente pode ser calculado através do teorema do valor final:

$$Teorema\ do\ valor\ final: \boldsymbol{v_o}(\boldsymbol{s}) = \lim_{\boldsymbol{s}\to\boldsymbol{0}} \boldsymbol{s} * \boldsymbol{H}(\boldsymbol{s}) * \boldsymbol{v_i}(\boldsymbol{s})$$

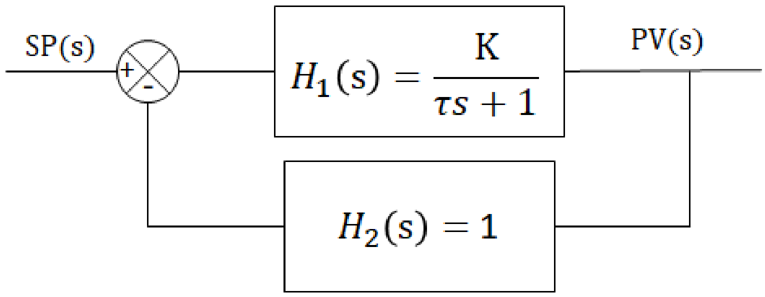
1) Sistemas de controle em malha aberta

Os chamados sistemas de controle em malha aberta são aqueles em que o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema, ou seja, o sinal de saída não é medido para ser comparado com o valor estabelecido (*Set Point)* na entrada. Como exemplo prático tem-se uma máquina de lavar roupas, em que as etapas de lavagem são executadas de forma sequencial baseadas no tempo, mas, ao final, a lavadora não verifica se as roupas estão bem lavadas (comparar o sinal de saída com a referência).



2) Sistemas de controle em malha fechada

Um sistema de controle em malha fechada estabelece uma relação de comparação entre o valor medido na saída e o valor definido como referência na entrada, utilizando essa comparação como meio de controle. Como exemplo, tem-se um sistema de controle de temperatura em um ambiente. Quando uma temperatura é definida (*Set Point)*, o sistema compara a temperatura ambiente com a referência, e ativa ou desativa o equipamento de aquecimento ou de resfriamento, de modo a assegurar que a temperatura ambiente permaneça na referência, independentemente de condições exteriores.

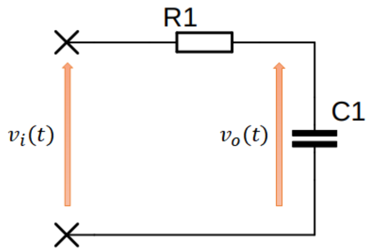


Para um sistema em malha fechada, a equação de saída PV pode ser dada em função das funções de transferência equivalentes à H_1 e H_2, da forma:

$$\frac{PV(s)}{SP(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

O sinal no denominador ser positivo ou negativo depende de como a realimentação da malha acontece. A realimentação sendo na entrada negativa o denominador terá sinal positivo, e vice-versa.

Exemplo 1: Considere um circuito RC, com $R = 1\,k\Omega$ e $C = 1\,mF$.



Encontre a resposta do sistema nos domínios do tempo e da frequência considerando um degrau unitário aplicado na entrada.

Solução:

Pela fórmula apresentada para um sistema de primeira ordem, a função de transferência do sistema será dada por:

$$H(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)}$$

Como a entrada é um degrau unitário, no domínio do tempo $v_i(t) = 1, t \geq 0$. Repare que a tensão na saída do sistema será a mesma sobre o capacitor. Por um divisor de tensão:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{sRC + 1}{sc}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{H(s) = \frac{1}{sRC + 1}}}$$

Pela forma canônica de um sistema de primeira ordem, para esse sistema tem-se $k = 1$ e $\tau = RC$, ganho estático em malha aberta e constante de tempo do sistema, respectivamente.

No domínio da frequência, como a entrada é um degrau unitário, $v_i(s) = \frac{1}{s}$. Com os valores do resistor e do capacitor:

$$v_o(s) = v_i(s) * H(s) = \frac{1}{sRC + 1} * \frac{1}{s} = \frac{1}{s * 1 * 10^3 * 1 * 10^{-3} + 1} * \frac{1}{s} = \frac{1}{s + 1} * \frac{1}{s}$$

Como deve ser encontrada a equação no domínio do tempo, tem-se que fazer a transformada inversa da função de transferência do sistema. Nessa situação, é necessário fazer expansão em frações parciais, pois não há uma transformada direta para essa expressão:

$$v_o(s) = \frac{1}{s*(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \rightarrow A(s+1) + Bs = 1$$

Para $s = -1$:

$$A(-1+1) + B*(-1) = 1 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{B = -1}}$$

Para s = 0:

$$A(0+1) * B * 0 = 1 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = 1}}$$

Logo, pela transformada inversa de Laplace, $v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{v_o(s)\}$:

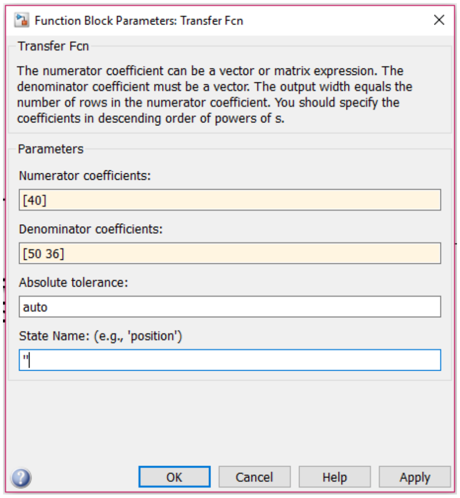
$$v_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{v_o(t) = 1 - e^{-t}}}$$

Perceba que adotando $\tau = 1$ para um sistema de primeira ordem, substituindo os valores para $t = \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau\ e\ 5\tau$ é possível encontrar os valores correspondentes ao gráfico que ilustra a parcela do valor final ao longo do tempo.

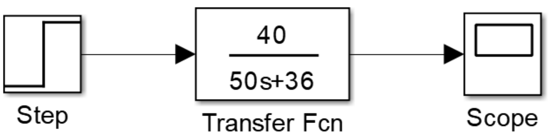
3) Funções de transferência no *Simulink* e no *SciLab*

No *Simulink*, ao ser inserido um bloco referente à uma função de transferência na janela de simulação, os parâmetros desse bloco podem ser configurados de acordo com a necessidade. Clique duas vezes sobre o bloco e a janela de configuração dos parâmetros é aberta. Altere os coeficientes do numerador e do denominador para que representem o polinômio característico da função. A função que é representada pelo bloco sempre vem escrita nele no ambiente de simulação, então é possível conferir se a função está correta.

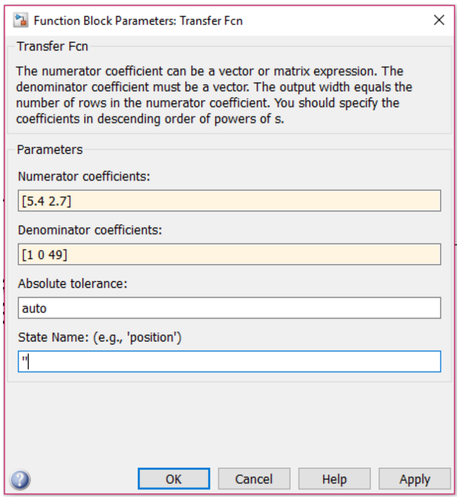
Exemplo 2: O exemplo a seguir mostra a configuração de um bloco para que ele represente a função de transferência $H(s) = \frac{40}{50s+36}$.



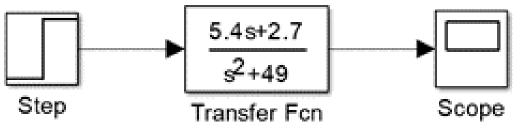
A seguinte representação vem na janela de simulação para conferência da função:



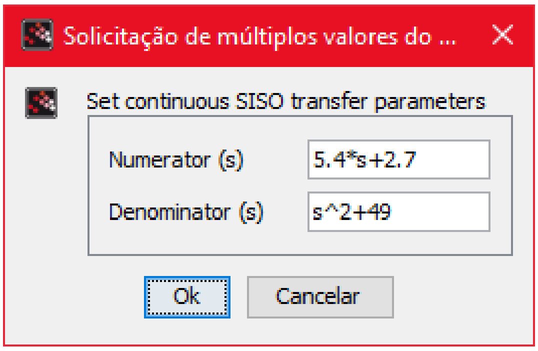
Exemplo 3: O exemplo a seguir mostra a configuração de um bloco para que ele represente a função de transferência $H(s) = \frac{5,4s+2,7}{s^2+49}$.



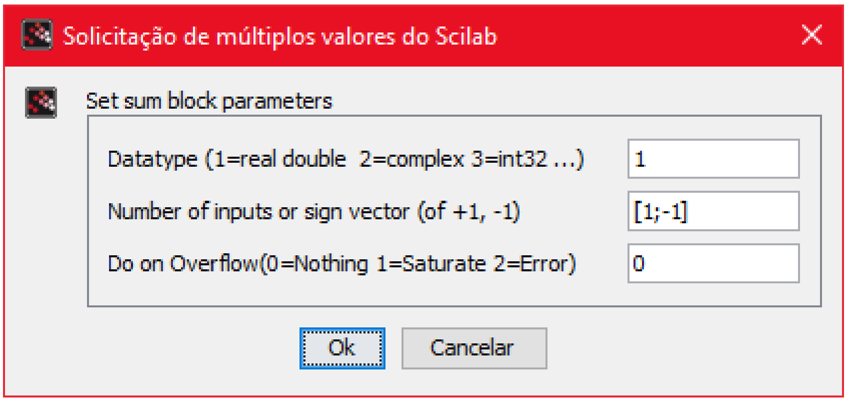
Perceba que sempre que o polinômio seja incompleto é necessário colocar 0 no coeficiente do termo que falta no polinômio. A seguinte representação vem na janela de simulação para conferência da função:



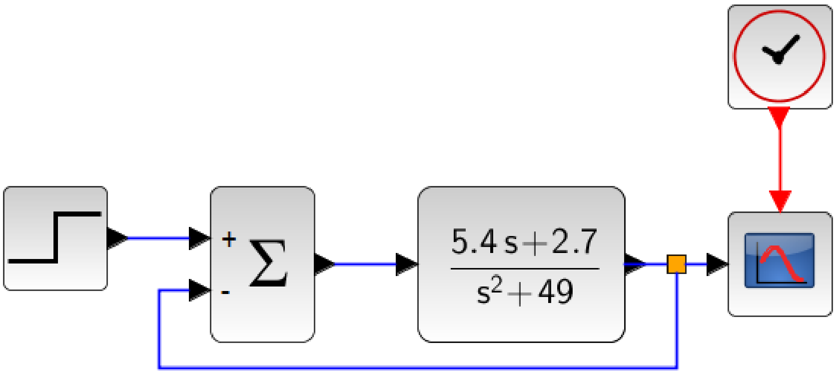
Já no *SciLab* a configuração da função de transferência no bloco se dá por meio da escrita direta do polinômio na janela de seleção de múltiplos valores:



Inserindo um bloco somador no sistema (*Summation*), é possível fechar a malha e simular o sistema operando em malha fechada. O bloco somador pode ter sua entrada alterada de negativa para positiva na sua configuração:



No segundo parâmetro das entradas, o elemento -1 significa que a realimentação acontece na entrada negativa. Caso seja necessário, basta trocar para 1 que a entrada será alterada para positiva. E assim tem-se o sistema em malha fechada:



4) Funções de transferência no *MatLab* e no *Octave* pela janela de comandos

Para criar uma função de transferência no *MatLab* ou no *Octave* são necessárias as funções de controle. No *MatLab* essas funções já vem instaladas no portifólio das funções, então nenhuma ação é necessária. No *Octave* é necessária fazer a instalação da biblioteca de controle para que se consiga fazer uso dessas funções. Para instalar a biblioteca de controle digite o comando:

```
>> pkg install -forge control
```

Espere que a instalação seja concluída e teste o seu funcionamento digitando o comando para carregar a biblioteca:

```
>> pkg load control
```

Ao digitar esse comando nenhum erro deve acontecer. Se der erro repita o processo de instalação, senão a biblioteca está pronta para uso.

Para se criar a função de transferência o comando é a função tf → *transfer function*, que segue a sintaxe:

```
>> tf([coeficientes_numerador],[coeficientes_denominador])
```

Perceba que o comando para se criar a função de transferência pela janela de comandos segue os mesmos passos que devem ser configurados nos blocos dentro do ambiente de simulação.

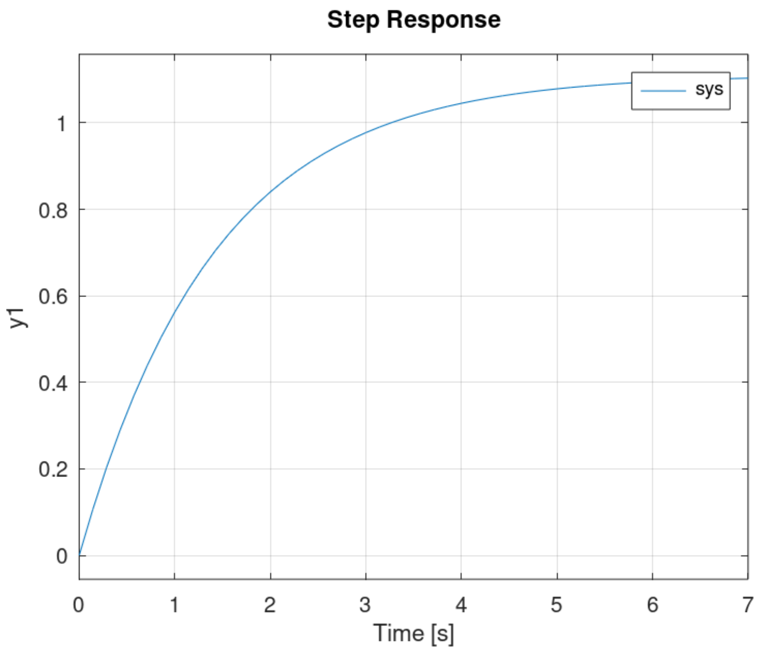
Para se aplicar um degrau na função de transferência deve-se utilizar a função `step`. O único parâmetro obrigatório para a função `step` é a função de transferência, mas outros parâmetros são facultativos, como, por exemplo, o estilo do gráfico, os tempos (inicial e final ou total) de simulação etc.

```
>> step(sys*A)
```

Em que *sys* representa a função de transferência e *A* é a amplitude do degrau de entrada.

Exemplo 4: O exemplo a seguir mostra a configuração da função de transferência $H(s) = \frac{40}{50s+36}$ submetida a um degrau unitário.

```
>> pkg load control
>> sys = tf([40], [50 36])

Transfer function 'sys' from input 'u1' to output ...

          40
 y1:  ---------
      50 s + 36

Continuous-time model.
>>
>> step(sys)
```

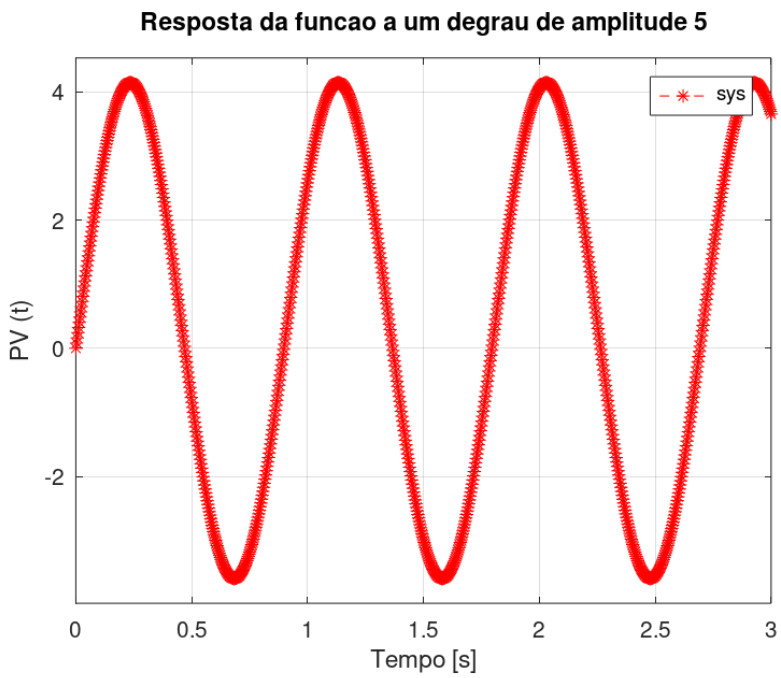


Observação 1: não é necessário carregar a biblioteca de controle para todas as funções de transferência. Uma vez carregada a biblioteca, as funções podem ser utilizadas normalmente até que o *Octave* seja fechado. Quando o *software* for aberto novamente será necessário carregar a biblioteca outra vez.

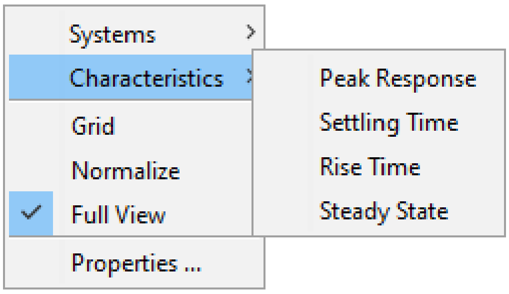
Observação 2: todas as configurações de formato de gráfico, assim como os textos e anotações vistos no relatório 3 podem ser aplicadas na janela de visualização que é aberta para o gráfico de resposta ao degrau.

Exemplo 5: O exemplo a seguir mostra a configuração da função de transferência $H(s) = \frac{5,4s+2,7}{s^2+49}$ submetida a um degrau de amplitude 5. O estilo do gráfico foi alterado para uma linha de cor vermelha, marcada por estrelas e com traçado tracejado. O tempo total de simulação foi ajustado para 3 segundos.

```
>> pkg load control
>> sys = tf([5.4 2.7],[1 0 49])

Transfer function 'sys' from input 'u1' to output ...

       5.4 s + 2.7
 y1:  -----------
        s^2 + 49

Continuous-time model.
>>
>> step(sys*5, 'r*--',3)
>> xlabel("Tempo [s]")
>> ylabel("PV (t)")
>> title("Resposta da funcao a um degrau de amplitude 5")
```



Uma das vantagens em se realizar a simulação pela janela de comandos do *MatLab* é que é possível selecionar com o botão direito do *mouse* algumas características desse gráfico para serem visualizadas de forma rápida, como, por exemplo, o valor do máximo pico e do tempo de acomodação, o tempo de subida, o valor final etc. Dependendo do tipo de sistemas, alguns desses parâmetros não são válidos.



Para um sistema em malha fechada tem-se a função feedback. Pela sintaxe da função:

```
>> malha_fechada = feedback(H₁,H₂)
```

Sendo que H_2 é a função da realimentação. Caso seja unitária não é necessário escrevê-la:

```
>> pkg load control
>> sys = tf([5.4 2.7], [1 0 49])

Transfer function 'sys' from input 'u1' to output ...

       5.4 s + 2.7
 y1:   -----------
        s^2 + 49

Continuous-time model.
>>
>> malha_fechada = feedback(sys)

Transfer function 'malha_fechada' from input 'u1' to output ...

          5.4 s + 2.7
 y1:   ------------------
       s^2 + 5.4 s + 51.7

Continuous-time model.
```

Se a análise em malha fechada fosse feita pela fórmula:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)} = \frac{\frac{5{,}4s + 2{,}7}{s^2 + 49}}{1 + \frac{5{,}4s + 2{,}7}{s^2 + 49} * 1}$$

$$H(s) = \frac{\frac{5{,}4s + 2{,}7}{\cancel{s^2 + 49}}}{\frac{s^2 + 5{,}4s + 51{,}7}{\cancel{s^2 + 49}}} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{H(s) = \frac{5{,}4s + 2{,}7}{s^2 + 5{,}4s + 51{,}7}}}$$

Exercícios

(1) Um termômetro precisa de um minuto para indicar 98% da resposta do seu sistema à uma medida. Considere que esse termômetro seja um sistema de primeira ordem. Determine a sua constante de tempo e plote a sua saída considerando um degrau unitário aplicado à sua entrada.

(2) Um determinado sistema é modelado pela seguinte função de transferência:

$$\xrightarrow{SP(s)} \boxed{H(s) = \frac{0{,}5}{10s + 0{,}5}} \xrightarrow{PV(s)}$$

Considere um degrau de amplitude 2 aplicado à sua entrada. Plote o gráfico da saída e indique os valores pedidos a seguir:

Ganho estático em malha aberta:

Constante de tempo:

Tempo de acomodação:

(3) Seja um sistema com função de transferência dada por:

$$H(s) = \frac{6}{450s + 3}$$

Considere que o sistema opera em malha fechada com realimentação unitária. Plote o sinal de saída do sistema quando submetido a um degrau unitário e indique os valores pedidos a seguir:

Ganho estático em malha aberta:

Constante de tempo:

Tempo de acomodação:

(4) Considere que o gráfico a seguir represente a resposta de um sistema de primeira ordem operando em malha aberta a um degrau unitário aplicado na entrada. Determine a função de transferência desse sistema.