26/11/2021

Filas M/G/1

$(M/G/1/\infty/\infty/\infty/FIFO)$

Sistema de Fila M/G/1

- Vamos agora generalizar o processo de atendimento de elementos utilizando o teorema de Khinchin-Pollaczeck.
- Este teorema permite calcular o tamanho médio da fila para um sistema com servidor único para qualquer distribuição de serviço:

$$\boxed{E\{w\} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \cdot \left\{1 + \left[\frac{\sigma_{ts}}{E\{t_s\}}\right]^2\right\} = \frac{\lambda^2 . E\{t_s^2\}}{2(1-\rho)}} \quad (1)$$

σ_{ts} é o desvio padrão do tempo de serviço.
$E\{t_s^2\}$ é o segundo momento do tempo de serviço.

- Do capítulo 3:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

t_s

$$\sigma_{ts}^2 = E[ts^2] - (E[ts])^2$$

$$E[ts^2] = \sigma_{ts}^2 + (E[ts])^2$$

Sistema de Fila M/G/1

- Através do teorema de Little, podemos encontrar o tempo médio de permanência no *buffer*.

$$\boxed{E\{t_w\} = \frac{\rho . E\{t_s\}}{2(1-\rho)} \cdot \left\{1 + \left[\frac{\sigma_{ts}}{E\{t_s\}}\right]^2\right\} = \frac{\lambda . E\{t_s^2\}}{2(1-\rho)}} \quad (2)$$

- Vale a pena lembrar que:

$$\sigma_{ts}^2 = E\{t_s^2\} - (E\{t_s\})^2$$

$$E(w) = \frac{\lambda^2 \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)} \quad (1) \qquad E(t_w) = \frac{\lambda \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)} \quad (2)$$

1) Para o sistema M/M/1: (caso particular de M/G/1)

fdp do tempo de serviço: $f_{ts}(ts) = \begin{cases} \mu e^{-\mu ts} & ts \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

↳ exponencial

$$E[ts] = \frac{1}{\mu} \qquad \sigma_{ts}^2 = \frac{1}{\mu^2} \qquad E[ts^2] = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} = \frac{2}{\mu^2}$$

Substituindo $E[ts^2]$ em (1) e (2), encontramos as expressões da M/M/1:

$$E\{w\} = \frac{\lambda^2 . E\{t_s^2\}}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2 . \frac{2}{\mu^2}}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$E\{q\} = \frac{\rho^2}{1-\rho} + E\{s\} = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho^2 + \rho(1-\rho)}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

→ Atendimento exponencial.

2) Para atendimento constante → M/D/1 (caso particular de M/G/1)

↳ determinístico (constante)

$$\sigma_{ts}^2 = 0 \qquad E[ts] = \frac{1}{}$$

μ

$\cancel{\sigma_{ts}^2}^{\,0} = E[ts^2] - \{E[ts]\}^2 \longrightarrow E[ts^2] = \{E[ts]\}^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$

Substituindo $E[ts^2]$ em (1) e (2), encontramos:

$$E\{w\} = \frac{\lambda^2 . E\{t_s^2\}}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2 . \frac{1}{\mu^2}}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$E\{q\} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + E\{s\} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho$$

3) Para qualquer atendimento (inclusive 1 e 2 acima)

Ver formulário abaixo.

Fila M/G/1/∞/∞/∞/FIFO:

$$E(w) = \frac{\lambda^2 \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)} \qquad E(t_w) = \frac{\lambda \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)} \longrightarrow \text{TODOS OS CASOS}$$

1) **Para atendimento exponencial (M/M/1):** $\sigma_{ts}^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$ $\quad [E(t_s)]^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$ $\quad E(t_s^2) = \dfrac{2}{\mu^2}$

$$E(w) = \frac{\lambda^2 \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad E(q) = \frac{\rho^2}{1-\rho} + E(s) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

2) **Para atendimento constante:** $\sigma_{ts}^2 = 0$ $\quad [E(t_s)]^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$ $\quad E(t_s^2) = \dfrac{1}{\mu^2}$

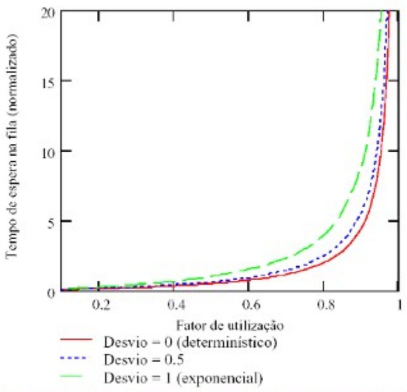
$$E(w) = \frac{\lambda^2 \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \qquad E(q) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + E(s) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho$$

3) **Para qualquer atendimento (incluindo os casos anteriores):**

$$E(t_s) = \sum t_s \cdot f_{T_s}(t_s) \qquad E(t_s^2) = \sum t_s^2 \cdot f_{T_s}(t_s) \longrightarrow \text{TODOS OS CASOS}$$

$E[x^2] = \sum x^2 \cdot f_x(x)$

Sistema de Fila M/G/1



O que é a tecnologia ATM?

ATM (abreviação de Asynchronous Transfer Mode) é uma tecnlogia de rede baseada na transferência de pacotes relativamente pequenos chamados de células de tamanho definido. O tamanho pequeno e constante da célula permite a transmissão de áudio, vídeo e dados pela mesma rede.

https://www.gta.ufrj.br › grad › marta › definicao_atm

A tecnologia ATM oferece vários benefícios, quando comparada com outras tecnologias:

- Emprega a multiplexação estatística, que otimiza o uso de banda;
- Faz o gerenciamento dinâmico de banda;
- O custo de processamento das suas células de tamanho fixo é baixo;
- Integra vários tipos diferentes de tráfego (dados, Voz e vídeo);
- Garante a alocação de banda e recursos para cada serviço;
- Possui alta disponibilidade para os serviços;
- Suporta múltiplas classes de Qualidade de Serviço (QoS);
- Atende a aplicações sensíveis ou não a atraso e perda de pacotes;
- Aplica-se indistintamente a redes públicas e privadas;
- Pode compor redes escaláveis, flexíveis e com procedimentos de recuperação automática de falhas;
- Pode interoperar com outros protocolos e aplicações, tais como Frame Relay, TCP/IP, DSL, Gigabit Ethernet. tecnologia wireless, SDH / SONET, entre outros.

Diferentemente dos protocolos X.25 e Frame Relay, entre outros, o ATM utiliza um pacote de tamanho fixo denominado célula (cell). Uma célula possui 53 bytes, sendo 48 para a informação útil e 5 para o cabeçalho.

Exemplo 23:

Um nó de uma rede de comutação de pacotes recebe em média 3600 pacotes por minuto de acordo com o processo de chegadas Markoviano. Essa porta de saída é servida por um enlace de taxa 300 kbps. O tamanho dos pacotes é fixo e igual a 4000 bits. Considere que o buffer dessa porta de saída do comutador possui capacidade infinita. Determine:

a) O tempo médio de serviço e a taxa média de serviço.
b) A probabilidade de que o sistema esteja vazio e a utilização do sistema.
c) O número médio de elementos no sistema e o tempo médio que um pacote permanece no sistema.
d) Calcule os mesmos valores dos itens anteriores considerando uma sistema M/M/1 e compare os resultados.

$\lambda = 3600$ pac/min $= 60$ pac/s   Tamanho fixo $\rightarrow$ 4.000 bits

FIXO

a) $\mu = \frac{300.000}{4.000} = 75$ pac/s $E[ts] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{75} = 13,3$ ms

b) $P_0 = 1 - \rho$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{60}{75} = 0,8$ $P_0 = 0,2$ $U = 1 - P_0 = 0,8$

c) $E[Q] = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho = \frac{0,64}{0,4} + 0,8 = 2,4$ pacotes $E[tq] = \frac{2,4}{60} = 40$ ms

d) $E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,8}{0,2} = 4$ pacotes $E[tq] = \frac{4}{60} = 66,7$ ms

Exemplo 24:

Considere temos três sistemas de filas de transmissão de dados. Todos utilizam linhas de saída de 56 kbps. Todos tem fator de utilização de 70%. Todos tem mensagens com comprimento médio de 1400 bits. No primeiro (a) o comprimento das mensagens é exponencialmente distribuído. No segundo (b) as mensagens tem um comprimento constante (1400 bits). No terceiro (c) metade das mensagens tem um comprimento de 400 bits e a outra metade tem um comprimento de 2400 bits. Compare o tempo de permanência no sistema de uma mensagem para os três casos.

a) M/M/1
b) M/D/1
c) M/G/1

Saída de 56 Kbps $\rho = 0,7$ média de 1400 bits

$\mu = \frac{56.000}{1400} = 40$ msg/s $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ $0,7 = \frac{\lambda}{40}$ $\lambda = 28$ msg/s

a) M/M/1 $\rightarrow E[tq] = \frac{1}{\mu - \lambda}$

$E[tq] = \frac{1}{40-28} = \frac{1}{12} = 83,3$ ms

b) M/D/1 $\rightarrow E[Q] = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho$ $E[Q] = \frac{0,49}{0,6} + 0,7 = 1,517$

$E[tq] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{1,517}{28} = 54,2$ ms

c) M/G/1 $\rightarrow$ 56 Kbps

	Tamanho	$f_{ts}(ts)$	μ	$E[ts] = 1/\mu$
1)	400	1/2	140	7,1 ms
2)	2400	1/2	23,33	42,9 ms

$\mu_1 = \frac{56.000}{400} = 140$ msg/s $\mu_2 = \frac{56000}{2400} = 23,33$ msg/s

$\mu_1 = \frac{56.000}{400} = 140$ msg/s $\quad \mu_2 = \frac{56000}{2400} = 23,33$ msg/s

$E[ts^2] = \sum ts^2 \cdot f_T(ts) = (7,1 \times 10^{-3})^2 \cdot \frac{1}{2} + (42,9 \times 10^{-3})^2 \cdot \frac{1}{2} = 9,4388 \times 10^{-4}\ s^2$

$\mu = 40 \quad E[ts] = \frac{1}{40} = 25$ ms

$$E(t_w) = \frac{\lambda \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)}$$

$E[tw] = \frac{28 \cdot 9,4388 \cdot 10^{-4}}{0,6} = 44$ ms

$E[tq] = E[tw] + E[ts] = 44 + 25 = 69$ ms

a) M/M/1 83,3 ms
b) M/D/1 54,2 ms
c) M/G/1 69 ms

2ª Avaliação – 19/12/2020 – 10h

5ª Questão (20 pontos): Suponha que mensagens de e-mail cheguem a um servidor de e-mails a partir de um processo de Poisson à taxa de 1.2 mensagens por segundo. Suponha também que 30% das mensagens sejam processadas em 100 ms, 50% em 300 ms e 20% em 2 s. Pede-se:

a) (5 pontos) O tempo médio de processamento de uma mensagem.
b) (5 pontos) O número médio de mensagens esperando na fila para serem processadas.
c) (5 pontos) Qual o tempo médio que uma mensagem em todo o sistema?
d) (5 pontos) Qual o número médio de mensagens em todo o sistema?

$\lambda = 1,2$ msg/s

ts	$f_{ts}(ts)$
0,1	0,3
0,3	0,5
2	0,2

a) $E[ts] = \sum ts \cdot f_{ts}(ts) = 0,1 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,2 \quad E[ts] = 0,58\ s = 580$ ms

b) $E[ts^2] = \sum ts^2 \cdot f_{ts}(ts) = (0,1)^2 \cdot 0,3 + (0,3)^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,2 \quad E[ts^2] = 0,848$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot E[ts] = 1,2 \cdot 0,58 \quad \rho = 0,696$

$$E(w) = \frac{\lambda^2 \cdot E(t_s^2)}{2(1-\rho)}$$

$E[w] = \frac{1,2^2 \cdot 0,848}{2 \cdot (1 - 0,696)} = 2,008$ msg

c) $E[tw] = \frac{E[w]}{\lambda} = \frac{2,008}{1,2} \quad E[tw] = 1,673\ s \quad E[ts] = 0,58\ s$

$E[tq] = 1,673 + 0,58 = 2,253\ s$

d) $E[Q] = E[tq] \cdot \lambda = 2,253 \cdot 1,2 = 2,704$ msg