09/09/2021

Capítulo 03
Médias Estatísticas de Variáveis Aleatórias

3) Médias estatísticas de variáveis aleatórias

- O resultado de um experimento aleatório não pode ser predito especificamente, mas uma média estatística pode ser determinada.

$X \to$ idade (discreta)

X	Qte
20	5
30	3
40	2
	10

$$E[X] = \overline{X} = \frac{\overset{100}{5 \cdot 20} + \overset{90}{3 \cdot 30} + \overset{80}{2 \cdot 40}}{10} = 27 \text{ anos}$$

$$E[X] = \underbrace{20 \cdot \frac{5}{10}}_{x \cdot f_X(x)} + \underbrace{30 \cdot \frac{3}{10}}_{x \cdot f_X(x)} + \underbrace{40 \cdot \frac{2}{10}}_{x \cdot f_X(x)}$$

$$E[X] = \sum x \cdot \overset{\text{fmp}}{f_X(x)} \qquad E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \overset{\text{fdp}}{f_X(x)} \, dx$$

DISCRETAS CONTÍNUAS

3.1) Média de uma variável aleatória

- Para variáveis aleatórias discretas

$$\overline{X} = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underset{\text{fmp}}{f_X(x_i)}$$

- Para variáveis aleatórias contínuas

$$\overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underset{\text{fdp}}{f_X(x)} dx$$

- **Exemplo 01:** Calcule a média do número de pontos X que se obtém lançando um dado.

$X \to$ resultado de um dado. (discreta)

x	$f_X(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$$E[X] = \sum_{x=1}^{6} x \cdot f_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$E[X] = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

- **Exemplo 02:** Suponha um jogo disputado com um único dado honesto, em que um jogador ganha R$20,00 se aparecer 2, R$40,00 se aparecer 4, perde R$30,00 se aparecer 6, e não ganha nem perde se aparecer qualquer das outras faces. Determine a esperança de seu ganho por jogada.

$X \to$ ganho por jogada. (discreta)

	X	$f_X(x)$
1	0	1/6
2	20	1/6
3	0	1/6
4	40	1/6
5	0	1/6
6	-30	1/6

$$E[X] = \sum x \cdot f_X(x) = 20 \cdot \frac{1}{6} + 40 \cdot \frac{1}{6} - 30 \cdot \frac{1}{6}$$

$E[X] = 5$ reais/jogada

- **Exemplo 03:** Considere agora que o dado é "viciado" e a probabilidade da face com o número seis acontecer é de 50%, sendo os outros resultados equiprováveis. Qual será o novo valor esperado do ganho por jogada, supondo os mesmos ganhos e perdas?

$X \to$ ganho por jogada (discreta)

	X	$f_X(x)$
1	0	0,1
2	20	0,1
3	0	0,1
4	40	0,1
5	0	0,1
6	-30	0,5

$$E[X] = \sum x \cdot f_X(x)$$

$$E[X] = 20 \cdot 0{,}1 + 40 \cdot 0{,}1 - 30 \cdot 0{,}5$$

$E[X] = 2 + 4 - 15 = -9$ reais/jogada

• **Exemplo 04:** Uma loteria instantânea dá 200 prêmios de R$ 5,00; 20 prêmios de R$ 25,00 e 5 prêmios de R$ 100,00. Admitindo-se que sejam emitidos e vendidos 10.000 bilhetes, qual o preço justo de um bilhete?

Qte	X
200	5
20	25
5	100
9775	0
10K	

$X \to$ valor de um bilhete (discreta)

$$E[X] = \sum x \cdot f_X(x)$$

$$E[X] = 5 \cdot \frac{200}{10K} + 25 \cdot \frac{20}{10K} + 100 \cdot \frac{5}{10K} + \underbrace{0 \cdot \frac{9775}{10K}}_{0}$$

$$E[X] = 0{,}2 \quad \text{(20 centavos)}$$

• **Exemplo 05:** Encontre o valor médio da v.a. X, que possui uma fdp gaussiana geral dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\cdot\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$m \to$ média

Dado: $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Fazendo $t = x - m$ $\qquad \frac{dt}{dx} = 1 \qquad dt = dx \qquad x \to -\infty \quad t \to -\infty$

$X = t + m \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \to +\infty \quad t \to +\infty$

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (t+m) \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt}_{0} + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

ímpar · par

ímpar

Par

$$E[X] = \frac{2m}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a = \frac{1}{2\sigma^2}$$

$$E[X] = \frac{\cancel{2}m}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{1/2\sigma^2}} = \frac{m}{\cancel{\sqrt{2\pi}\,\sigma}} \cdot \cancel{\sqrt{\pi \cdot 2\sigma^2}} = m$$

$$E[X] = \frac{\cancel{2}m}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{1/2\sigma^2}} = \frac{m}{\cancel{\sqrt{2\pi\sigma^2}}}\cdot\cancel{\sqrt{\pi\cdot 2\sigma^2}} = m$$

3.2) Média de uma função de uma v.a.

- Deseja-se obter a expressão do valor médio de uma v.a. *Y*, sabendo que

$$Y = g(X)$$

$$E[X] = \sum X \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{fmp}} \quad \text{DISC.}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{fdp}}\,dx \quad \text{CONT.}$$

$$E[X^2+3] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+3)\cdot f_X(x)\,dx$$

- Se *X* é uma v.a. discreta com fmp $f_X(x)$, então

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i).f_X(x_i)$$

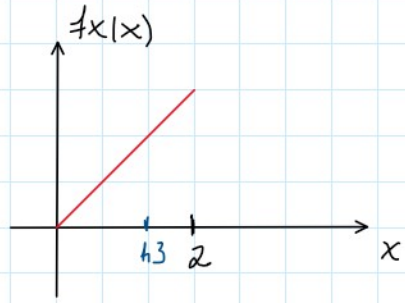
- Se *X* é uma v.a. contínua com fdp $f_X(x)$, então

$$\overline{Y} = E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).f_X(x).dx$$

- **Exemplo 06:** A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória *X* é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}.x & 0 < x < 2 \\ 0 & caso \quad contrário \end{cases}$$

Determine:



a)O valor esperado de X.

$$E[X] = \int_0^2 X \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\frac{1}{2}x}\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_{x=0}^{2} = \frac{8}{6} - 0 = \frac{4}{3} \cong 1{,}3$$

b) $E\left[\underbrace{3X^2 - 2X}_{Y}\right]$.

b) $E[3X^2 - 2X]$.

$$E[3x^2-2x] = \int_0^2 (3x^2-2x)\cdot\frac{1}{2}x\,dx = \int_0^2 \left(\frac{3x^3}{2} - x^2\right)dx = \frac{3x^4}{8} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{2} = 6 - \frac{8}{3}$$

$$E[3x^2-2x] = \frac{18-8}{3} = \frac{10}{3} \cong 3{,}3$$

• **Exemplo 07:** Encontre o valor quadrático médio ($E[X^2]$) da distribuição gaussiana do exemplo 05.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2.\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dado: $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Fazendo $t = x - m$ $\quad \frac{dt}{dx} = 1 \quad dt = dx \quad x \to -\infty \;\; t \to -\infty$

$x = t + m \quad\quad x \to +\infty \;\; t \to +\infty$

$$E[x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (t+m)^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt$$

1 2

$$(t^2 + 2tm + m^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

3

1) Por partes → $u = t \quad dv = t\,e^{-t^2/2\sigma^2}dt$

2) Função ímpar → resultado é zero.

3) Função par → formulário

$$\boxed{E[x^2] = \sigma^2 + m^2}$$