10/09/2021

3.3) Médias para v.a.'s múltiplas

- Considere Z uma v.a. dada por $Z = g(X,Y)$. Então:

- $E[Z]$ é calculada por:

$$\overline{Z} = E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y).f_{XY}(x,y)dxdy \quad \text{(contínuas)}$$

$$E[g(x)] = \sum g(x) \cdot f_X(x)$$

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) .\ f_X(x) dx$$

quando X e Y são v.a.'s contínuas

- Generalizando para $Z = g(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$, tem-se

$$E[g(x_1,x_2,\ldots,x_n)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,x_2,\ldots,x_n).f_{X_1X_2\ldots X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

3.4) Propriedades da média

3.4.1) Soma de v.a.'s

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \longrightarrow \text{Para TODOS os casos.}$$

- Este resultado é válido para n v.a.'s.

$$E[X+Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) .\ f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

$$E[X+Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{x}\, f_{xy}(x,y)\, dy}_{f_X(x)}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y . \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{y} .\ f_{xy}(x,y)\, dx}_{f_Y(y)}\, dy$$

$$E[X+Y] = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x .\ f_X(x)\, dx}_{E[X]} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y .\ f_Y(y)\, dy}_{E[Y]}$$

	1/36	6/36	1/36
		3,4	
		4,3	
		5,2	
		2,5	
		6,1	
	1,1	1,6	6,6
s	2	7	12

$X \to$ 1º dado $\quad Y \to$ 2º dado

$E[X] = E[Y] = 3{,}5$

$$E[S] = \sum_{s=2}^{12} s \,.\, f_S(s)$$

$$E(S] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 7$$

3.4.2) Produto de 2 v.a.'s independentes

- Se $Z = X.Y$, então

$$E[Z] = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x.y.f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

- Mas se X e Y são independentes

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

- Assim, é possível escrever:

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x.f_X(x)dx.\int_{-\infty}^{\infty} y.f_Y(y)dy$$

- Finalmente,

$$E[Z] = \overline{X}.\overline{Y} \quad \text{ou} \quad \overline{XY} = \overline{X}.\overline{Y} \quad \text{ou} \quad E\left[XY\right] = E\left[X\right].E\left[Y\right]$$

- Esse resultado é válido para um produto de n v.a.'s. independentes.

3.4.3) Multiplicação de uma constante por uma v.a.

- Se c é uma constante real, então

$$E\left[c.X\right] = c.E\left[X\right].$$

$$E[cX] = c . \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x)\, dx}_{E[X]}$$

- **Exemplo 08:** A função densidade de probabilidade conjunta de duas va's X e Y é dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{96} & 0 < x < 4 \;,\; 1 < y < 5 \end{cases}$$

- **Exemplo 08:** A função densidade de probabilidade conjunta de duas va's X e Y é dada por

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x.y}{96} & 0<x<4\ ,\ 1<y<5\\ 0 & caso\ contrário\end{cases}$$

Calcule:

e) Verifique se as v.a.'s são independentes.

$$f_X(x)=\int_1^5 \frac{xy}{96}\,dy=\frac{x}{96}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{5}=\frac{x}{2\cdot\cancel{96}_{4}}\cancel{(25-1)}=\begin{cases}\dfrac{x}{8} & 0<x<4\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^4 \frac{xy}{96}\,dx=\frac{y}{96}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{4}=\frac{y}{2\cdot\cancel{96}_{6}}\cancel{(16-0)}=\begin{cases}\dfrac{y}{12} & 1<y<5\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=\frac{x}{8}\cdot\frac{y}{12}=\frac{x.y}{96}=f_{XY}(x,y)\longrightarrow$$ X e Y são independentes.

a) E(X)
b) E(Y)
c) E(XY)
d) E(2X+3Y)

$$a)\ E[X]=\int_0^4 x\cdot \underbrace{f_X(x)}_{x/8}\,dx=\int_0^4\frac{x^2}{8}\,dx=\frac{x^3}{24}\Big|_{x=0}^{4}=\frac{64}{24}=\frac{8}{3}\cong 2{,}67$$

$$b)\ E[Y]=\int_1^5 y\cdot \underbrace{f_Y(y)}_{y/12}\,dy=\int_1^5\frac{y^2}{12}\,dy=\frac{y^3}{36}\Big|_{y=1}^{5}=\frac{125-1}{36}=\frac{124}{36}=\frac{31}{9}\cong 3{,}44$$

$$c)\ E[XY]=\int_1^5\int_0^4 xy\cdot\frac{xy}{96}\,dx\,dy=E[X]\cdot E[Y]=\frac{8}{3}\cdot\frac{31}{9}=\frac{248}{27}$$

$$d)\ E[2X+3Y]=\int_1^5\int_0^4 (2x+3y)\cdot\frac{xy}{96}\,dx\,dy$$

$$E[2X+3Y]=E[2X]+E[3Y]=2E[X]+3E[Y]=2\cdot\frac{8}{3}+\cancel{3}^{1}\cdot\frac{31}{\cancel{9}_{3}}=\frac{47}{3}$$

3.5) Momentos

3.5.1) N-ésimo momento

- Para uma v.a. contínua:

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n . f_X(x) . dx$$

- Para uma v.a. discreta:

$$E\left[X^n\right] = \sum x^n . f_X(x)$$

3.5.2) Momentos centrais

- O n-ésimo momento central da v.a. contínua X é seu momento ao redor de seu valor médio m:

$$E\left[\left(X-m\right)^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-m\right)^n . f_X(x) . dx$$

$m = E[X]$

$$E\left[\left(X-m\right)^n\right] = \sum \left(x-m\right)^n . f_X(x)$$

$E[X]$, $E[X^2]$

$E[(X-m)^2] = \sigma_X^2$ (VARIÂNCIA)

3.5.3) Variância

- É o segundo momento central, representado por σ_X^2.

$$\sigma_X^2 = E\left[\left(X-m\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-m\right)^2 . f_X(x) . dx$$ → V.A. contínua

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - m^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2$$

Exemplo: X → resultado de um dado (discreta)

X	$f_X(x)$	$m = E[X]$	$X-m$	$(X-m)^2$	X^2
1	1/6	3,5	-2,5	6,25	1
2	1/6	3,5	-1,5	2,25	4
3	1/6	3,5	-0,5	0,25	9
4	1/6	3,5	0,5	0,25	16
5	1/6	3,5	1,5	2,25	25
6	1/6	3,5	2,5	6,25	36

$E[X^2] = \sum_{x=1}^{6} x^2 . f_X(x)$

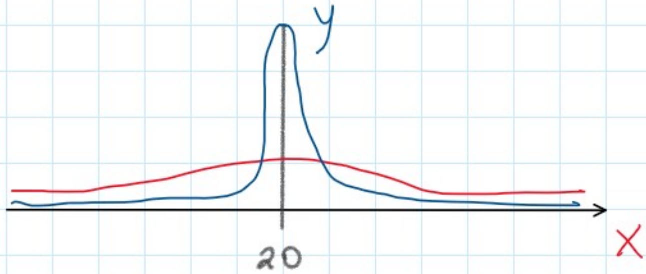
$E[X^2] = 15,167$ $E[X] = 3,5$

$\sigma_X^2 = 15,167 - (3,5)^2 = 2,917$

$E[X-m] = E[X] - E[m] = m - m = 0$

$E[(X-m)^2] = 2,917 = \sigma_X^2$ $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{2,917} \cong 1,71$ (Desvio padrão)

$X \begin{cases} f_X(x) \text{ fmp ou fdp} \\ E[X] \to \text{tendência} \\ \left.\begin{matrix}\sigma_X^2 \\ \sigma_X\end{matrix}\right\} \text{dispersão} \end{cases}$



M008-A → Y $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$

Shopping $\rightarrow X$ $\quad \sigma_x > \sigma_y$

$$\sigma_x^2 = E[(x-m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_x(x)\,dx \qquad m = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)\,dx$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2 - 2xm + m^2] = E[x^2] - E[2mx] + E[m^2]$$

$$= E[x^2] - 2m\,\underbrace{E[x]}_{m} + m^2$$

$$= E[x^2] - 2m^2 + m^2 = E[x^2] - m^2$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = E[x^2] - (E[x])^2}$$

3.5.4) Propriedades da variância

P1) Se *c* é uma constante,

$$E\left[(c.(X-m))^2\right] = c^2.E\left[(X-m)^2\right]$$

$$Var(c.X) = c^2.Var(X)$$

$$\sigma_x^2 = Var(x)$$

$$E[cx] = c \cdot E[x]$$

$$Var(cx) = c^2 . Var(x)$$

P2) Se *X* e *Y* são v.a.'s independentes,

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

- **Exemplo 09:** Encontre a variância de uma variável aleatória gaussiana.

Exemplo 05: $E[x] = m$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2.\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

média

variância

desvio padrão

Exemplo 07: $E[x^2] = m^2 + \sigma^2$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$\sigma_x^2 = \cancel{m^2} + \sigma^2 - \cancel{m^2} \qquad \sigma_x^2 = \sigma^2$$

AG: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}}$ $E[X^2] = 29 \text{ Km}^2$

$\sigma_X^2 = 29 - 25 = 4 \text{ Km}^2$

$\sigma_X = 2 \text{ Km}$