4.4) Distribuição Uniforme

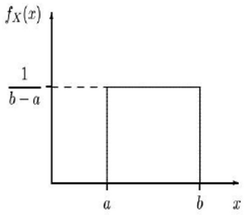
Usos mais frequentes

A variável aleatória uniforme aparece em situações onde todos os valores em um intervalo da reta real são equiprováveis. Esta distribuição é bastante usada em modelamentos de ruído de quantização, e ruído de canal de transmissão.

Domínio: $S_X = [a, b]$

Função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



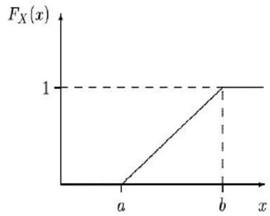
Função distribuição cumulativa

Neste caso, temos 3 situações possíveis:

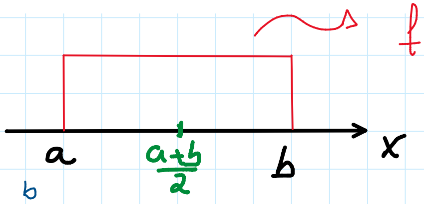
1. $x < a$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dy = 0$
2. $a \le x \le b$ $\quad F_X(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dy = \frac{x-a}{b-a}$
3. $x > b$ $\quad F_X(x) = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\, dy = \frac{b-a}{b-a} = 1$

Portanto, temos:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



- **Exemplo 11:** Calcule a média, variância e desvio padrão para a distribuição uniforme.



$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)} \cdot (b+a)}{2\,\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2}$$

$$E[X^2] = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)} \cdot (b^2+ab+a^2)}{3 \cdot \cancel{(b-a)}}$$

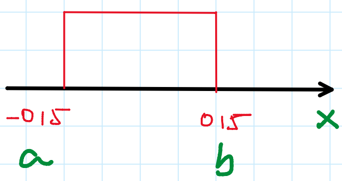
$$E[X^2] = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\underbrace{\sigma_X^2}_{\text{Pot AC}} = \underbrace{E[X^2]}_{\text{Pot Total}} - \underbrace{(E[X])^2}_{\text{Pot DC}}$$

$X \to$ tensão

$$\sigma_X^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$



$$P_x = \frac{1}{12}\ \text{W}$$

4.5) Distribuição Exponencial

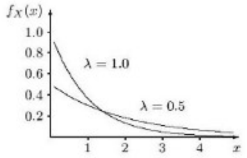
Usos mais frequentes

A variável aleatória exponencial modela o tempo de duração de eventos que ocorrem segundo a distribuição de Poisson.

Domínio: $S_X = [0, \infty)$

Função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \text{ e } \lambda > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

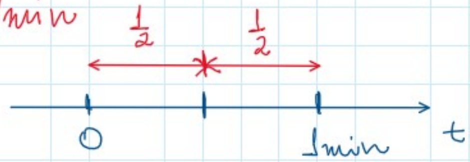


$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- **Exemplo 12:** Determine a função de distribuição cumulativa para a distribuição exponencial.

CAPÍTULO 2 - EXEMPLO 08

QUANTIDADE	TEMPO
Poisson (DISCRETA)	Exponencial (CONTÍNUA)
$f_X(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$	$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$
$E[X] = \lambda$	$E[X] = \frac{1}{\lambda}$
$\lambda = 2$ cl/min	$E[X] = \frac{1}{2}$ min



Cap 7 - Filas $\begin{cases} \text{Entrada} - \lambda \\ \text{Saída} - \mu \end{cases}$

- **Exemplo 13:** Calcule a média, variância e desvio padrão para a distribuição exponencial.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \text{(Por partes)}$$

$$\int u\,dv = +uv - \int v\,du$$

deriva

integra

$$\frac{d}{dx} \qquad \begin{array}{ccc} \lambda x & \xrightarrow{+} & e^{-\lambda x} \\ \lambda & \xrightarrow{-} & \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \\ 0 & & \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \end{array} \qquad \int dx$$

$$E[X] = -x e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{\infty} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_{x=0}^{\infty}$$

$$E[x] = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{e^{\lambda x}} - 0 - 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$E[x] = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} \qquad \to 0$$

$$E[x] = \frac{1}{\lambda}$$

Por partes

$$E[x^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$\lambda x^2 \rightarrow$ deriva

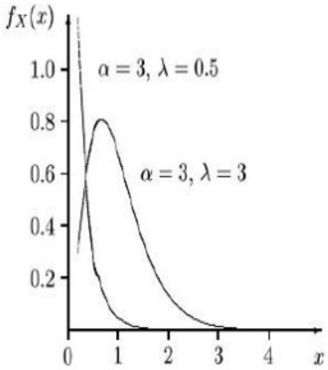
$e^{-\lambda x} \rightarrow$ integra

4.6) Distribuição Gama

Função densidade de probabilidade

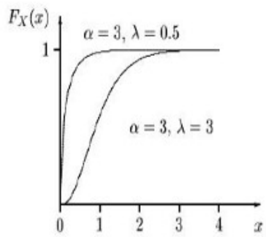
$K = \int$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}}$$



Função distribuição cumulativa

$$\boxed{F_X(x) = \int_0^x \frac{\lambda(\lambda y)^{\alpha-1} e^{-\alpha y}}{\Gamma(\alpha)} dy}$$



- A função gama é definida pela integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}.e^{-x} dx \qquad \alpha > 0$$

e possui as seguintes propriedades:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,, \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha.\Gamma(\alpha) \quad para \ \ \alpha > 0,$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,!$$

Aplicações:

- A fdp Gama pode assumir uma variedade de formas. Por exemplo, a distribuição exponencial é obtida da distribuição Gama fazendo-se $\alpha = 1$.

- Características:

a) Média: $E[X] = \dfrac{\alpha}{\lambda}$

b) Variância: $VAR[X] = \alpha / \lambda^2$

c) Desvio padrão: $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\lambda^2}}$

d) Função característica: $\psi(j.w) = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{j.\omega}{\lambda}\right)^{\alpha}}$