04/11/2021

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \dots \end{array}$$

6.2) Matriz de probabilidades de transições de passo 1

$$P = P(1) = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots & P_{0K} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1K} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{K0} & P_{K1} & P_{K2} & \dots & P_{KK} \end{bmatrix}$$

$P \to$ matriz

$p \to$ vetor

6.3) Probabilidades de transições de passo n

$$P_{ij}(n) = P[X_{m+n} = j \mid X_m = i]$$

$$P(n) = P^n$$

Por exemplo,

$$P(3) = P(1) \times P(2) = P^3$$

$$P(5) = P(2) \times P(3) = P^5$$

6.4) Vetor de probabilidade de estados

- Dado $p_j(n) = P[X_n = j]$, o vetor de probabilidade de estados é dado por

$$p(n) = [\,p_0(n) \quad p_1(n) \quad \dots \quad p_K(n)]'$$

se

$$\sum_{j=0}^{K} p_j = 1$$

$$p(0) = [\,0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1\,]$$

- Cálculo do vetor de probabilidade de estados:

$$p(n) = p_i(0)P^n \text{ ou}$$

$$p_j(n) = p_i(n-1)P$$

$$p(6) = p(0) \cdot P^6$$

$$p(6) = p(2) \cdot P^4$$

$$p(6) = p(5) \cdot P$$

- **Exemplo 11:** O estado do uso da terra no ano de 2008 em uma cidade de 50 quilômetros quadrados de área era:

I – Uso residencial – 30%
II – Uso comercial – 20%
III – Uso industrial – 50%

Assumindo que as probabilidades de transição para intervalos de 5 anos são dadas pela tabela a seguir

	para I	para II	para III
de I	0,8	0,1	0,1
de II	0,1	0,7	0,2
de III	0	0,1	0,9

1 2

3

Estime a porcentagem de uso das terras para os anos de 2013 e 2018.

Início (2008): $p(0) = [\,0{,}3 \quad 0{,}2 \quad 0{,}5\,]$ $\quad P(1) = P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

1 salto a cada 5 anos

• Para 2013 (após 1 salto):

$$p(1) = p(0).P = [0{,}3 \quad 0{,}2 \quad 0{,}5].\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = [0{,}26 \quad 0{,}22 \quad 0{,}52]$$

• Para 2018 (após 2 saltos):

$$p(2) = p(0).P^2 \quad \text{ou} \quad p(2) = p(1).P = [0{,}26 \quad 0{,}22 \quad 0{,}52].\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$p(2) = [0.2300 \quad 0.2320 \quad 0.5380]$$

6.5) Limite da Probabilidade dos estados para uma cadeia de Markov finita

- Para uma cadeia de Markov finita de vetor de probabilidade de estados iniciais $p(0)$, o limite da probabilidade dos estados é dado pelo vetor

$$\pi = \lim_{n\to\infty} p(n)$$

1 2 3

$$p(n) = [p_1(n) \quad p_2(n) \quad p_3(n)]$$

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3]$$

- **Vetor de probabilidade de estados estacionário:**

$$\pi \cdot P = \pi$$

Voltando ao exemplo 11, vamos determinar $\pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3]$

$$[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3].\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3]$$

$0{,}8\pi_1 + 0{,}1\pi_2 = \pi_1 \times (10)$ $\quad 8\pi_1 + \pi_2 = 10\pi_1$

$0{,}1\pi_1 + 0{,}7\pi_2 + 0{,}1\pi_3 = \pi_2 \times (10)$ $\quad \pi_1 + 7\pi_2 + \pi_3 = 10\pi_2$

$$\begin{cases} 2\pi_1 - \pi_2 = 0 \\ \pi_1 - 3\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \\ \pi_1 - 3\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ 2\pi_1 - \pi_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 = L_1 - L_2 \\ L_3 = 2L_1 - L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} L_3 = 4L_3 - 3L_2$$

$$8\pi_3 = 5 \qquad \pi_3 = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$4\pi_2 = 1 \qquad \pi_2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \qquad \pi_1 = 1 - 0{,}25 - 0{,}625 = 0{,}125 \qquad \pi = [0{,}125 \quad 0{,}25 \quad 0{,}625]$$

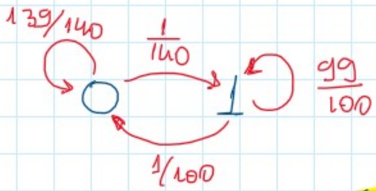
$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}625 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}625 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}625 \end{pmatrix}$$

- **Vetor de probabilidade de estados estacionário:**

$$\pi = \pi P(n) = \pi P$$

- **Exemplo 12:** Encontre o vetor de probabilidade de estados estacionário para a cadeia do exemplo 02.

SILÊNCIO - 0
FALA - 1



$$\pi \cdot P = \pi$$

$$[\pi_0 \quad \pi_1] \cdot \begin{pmatrix} \frac{139}{140} & \frac{1}{140} \\ \frac{1}{100} & \frac{99}{100} \end{pmatrix} = [\pi_0 \quad \pi_1]$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{139}{140} & \frac{1}{140} \\ \frac{1}{100} & \frac{99}{100} \end{pmatrix}$$

$$\frac{139}{140}\pi_0 + \frac{1}{100}\pi_1 = \pi_0 \qquad \frac{695\pi_0 + 7\pi_1}{700} = \pi_0$$

$$695\pi_0 + 7\pi_1 = 700\pi_0 \qquad \begin{cases} 5\pi_0 - 7\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \quad \times(-5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cancel{5\pi_0} - 7\pi_1 &= 0 \\ \cancel{-5\pi_0} - 5\pi_1 &= -5 \\ \hline -12\pi_1 &= -5 \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \frac{5}{12} \cong 0{,}42 \qquad \pi_0 = \frac{7}{12} \cong 0{,}58$$

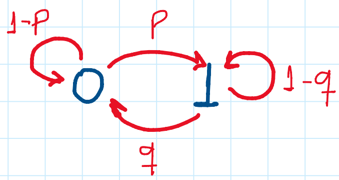
$$\pi_1 = \frac{5}{12} = 0{,}42 \qquad \pi_0 = \frac{7}{12} = 0{,}58$$

$$\pi = [\,0{,}58 \quad 0{,}42\,]$$

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}42 \\ 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix}$$

• **Exemplo 13:** Idem para o exemplo 01.

OFF - 0
ON - 1



$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \qquad [\pi_0 \quad \pi_1] \cdot \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = [\pi_0 \quad \pi_1]$$

CASA