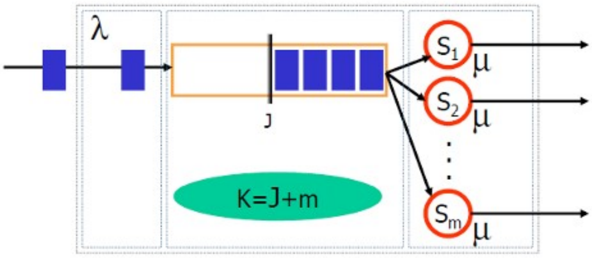
25/11/2021

Sistema $M/M/m/J/K/\infty/FCFS \longrightarrow K = J + m$

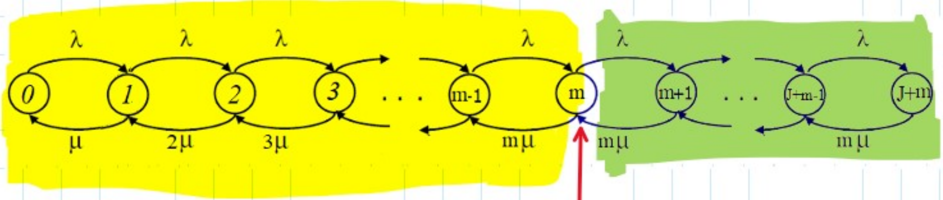
Sistema de Fila com Vários Servidores e Buffer Finito

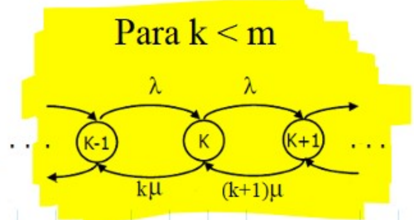
- ✓ O que acontece a um sistema M/M/1, se aumentarmos o número de servidores e limitarmos o espaço de armazenamento?
- ✓ Teremos um sistema M/M/m/J/K/∞/FCFS.

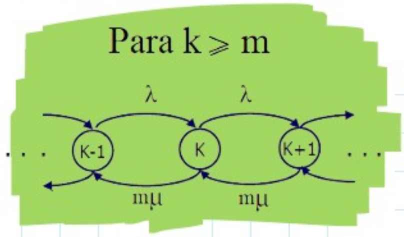


$$P_B = P_{m+J}$$

✓ Diagrama de Estado







✓ Equações de Equilíbrio

$$
\begin{cases}
\lambda P_0 = \mu . P_1 & K = 0 \quad (1) \\
(\lambda + K\mu) P_K = \lambda . P_{K-1} + (K+1)\mu . P_{K+1} & K < m \quad (2) \\
(\lambda + m\mu) P_K = \lambda . P_{K-1} + m\mu . P_{K+1} & m \le K \le J + m - 1 \quad (3) \\
\lambda . P_{J+m-1} = m\mu . P_{J+m} & K = J + m \quad (4) \\
\sum_{K=0}^{J+m} P_K = 1 \quad (5) &
\end{cases}
$$

Esta fila assume um comportamento idêntico à fila anterior (M/M/m/inf/inf/inf/FIFO). Logo,

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0 \, , \, k \le m \quad (6) \qquad P_k = \frac{\rho^k}{m^{k-m} \cdot m!} \cdot P_0 \, , \, m \le k \le J + m \quad (7)$$

Substituindo (6) e (7) em (5):

$$\sum_{K=0}^{J+m} P_K = 1 \qquad \sum_{K=0}^{m} P_K + \sum_{K=m+1}^{J+m} P_K = 1 \qquad \sum_{K=0}^{m} \frac{\rho^K}{K!}.P_0 + \sum_{K=m+1}^{J+m} \frac{\rho^K}{m^{K-m}m!}.P_0 = 1$$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{J+m} \frac{\rho^k}{m!\cdot m^{k-m}}}}$$

✓ Número Médio de Elementos no Sistema

$$\boxed{E\{q\} = \sum_{K=0}^{J+m} K.P_K = \sum_{K=1}^{m} \frac{K.\rho^K}{K!}P_0 + \sum_{K=m+1}^{J+m} \frac{K.\rho^K}{m^{K-m}m!}P_0}$$

$E[S] = \rho\cdot(1-P_B)$ $\qquad E[w] = E[Q] - E[S]$

✓ Tempo Médio de Permanência no Sistema

$$\boxed{E\{t_q\} = \frac{E\{q\}}{\lambda.(1-P_B)}} \qquad \boxed{P_B = P_{J+m}}$$

$E[t_s] = \frac{1}{\mu}$ $\qquad E[t_w] = E[t_q] - E[t_s]$

Exemplo 17:

Um nó de uma rede de comutação de pacotes recebe em média 3600 pacotes por minuto. A taxa de chegada segue um modelo Markoviano. Para servir esta fila o nó utiliza dois enlaces de saída, com taxa de 300 Kbps cada um. A distribuição do tamanho dos pacotes é de Poisson com média de 4000 bits. Considerando o buffer desta saída do comutador com capacidade limitada a 2 pacotes. Determine:

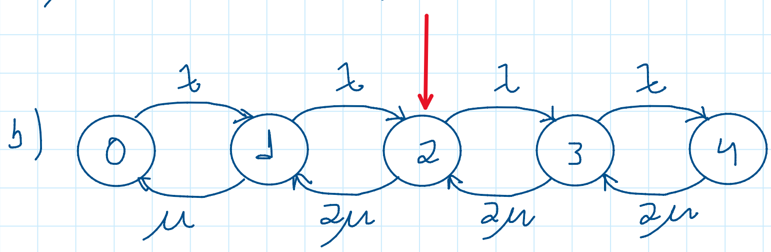
a) A notação de Kendall expandida.
b) O diagrama de estados do sistema.
c) O tempo médio de serviço e a taxa de serviço.
d) O fator de utilização.
e) A probabilidade de que o sistema esteja vazio e a utilização do sistema.
f) A probabilidade de bloqueio do sistema.
g) O número médio de pacotes no sistema.
h) O número médio de pacotes na fila.
i) O tempo médio que um pacote permanece no sistema.
j) O tempo médio que um pacote permanece no buffer.

$\lambda = 3600$ pac/min $= 60$ pac/s $\quad m = 2 \quad$ Saída de 300Kbps $\quad J = 2$

Pacotes de 4000 bits (média)

a) M / M / 2 / 2 / 4 / ∞ / FCFS

b)



c) $\mu = \frac{300.000}{4.000} = 75$ pac/s $\qquad E[t_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{75} = 13,33$ ms

d) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{60}{75} = 0,8$

d) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{60}{75} = 0,8$

e) $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \qquad 1 \cdot P_0 + \rho \cdot P_0 + \frac{\rho^2}{2} P_0 + \frac{\rho^3}{4} P_0 + \frac{\rho^4}{8} P_0 = 1$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^4}{8}} = \frac{1}{1 + 0,8 + 0,32 + \frac{0,8^3}{4} + \frac{0,8^4}{8}} = 0,4349$$

$U = 1 - P_0 = 0,5651$

f) $P_B = P_4 = \frac{\rho^4}{8} \cdot P_0 = \frac{0,8^4}{8} \cdot 0,4349 = 0,0223$

g) $E[Q] = \sum_{k=0}^{4} k \cdot P_k = \cancel{0 \cdot P_0}^{\,0} + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = 0,8823$ pac

h) $E[W] = E[Q] - E[S] \qquad E[S] = \rho \cdot (1 - P_B) = 0,8 \cdot (1 - 0,0223) = 0,7822$

$E[W] = 0,8823 - 0,7822 \cong 0,1$ pac

i) $E[t_Q] = \frac{E[Q]}{\lambda(1-P_B)} = \frac{0,8823}{60 \cdot (1 - 0,0223)} = 14,7$ ms

j) $E[t_W] = \frac{E[W]}{\lambda(1-P_B)}$ ou $E[t_W] = E[t_Q] - E[t_S] = 14,7 - 13,33 = 1,37$ ms

Exemplo 18:

Um nó de uma rede de comutação de pacotes recebe em média 3600 pacotes por minuto que alimentam uma fila única atendida por três enlaces de saída, de acordo com o processo de chegadas Markoviano. Cada enlace de saída possui taxa de 100 kbps. A distribuição do tempo de atendimento dos pacotes é exponencial negativa e os pacotes tem tamanho médio de 4000 bits. O serviço modela o tempo de emissão dos pacotes. Considerando que a fila não suporta o armazenamento de nenhum pacote, determine:

a) A notação de Kendall expandida.
b) O diagrama de estados do sistema.
c) O tempo médio de serviço e a taxa de serviço.
d) O fator de utilização.
e) A probabilidade de que o sistema esteja vazio e a utilização do sistema.
f) A probabilidade de haver 1, 2, 3, 4 ou 5 pacotes no sistema.
g) A probabilidade de bloqueio do sistema.
h) O número médio de pacotes no sistema.
i) O número médio de pacotes na fila.
j) O tempo médio que um pacote permanece no sistema.
k) O tempo médio que um pacote permanece no buffer.

$m = 3 \quad 100$ Kbps $\quad J = 0$

$M/M/3/0/3/\infty/FCFS$

Exemplo 19:

Refaça o exemplo 18, considerando que o buffer possui capacidade infinita.

M/M/3/∞/∞/∞/FCFS 100Kbps

Exemplo 20:

Refaça o exemplo 18, considerando que o buffer possui capacidade de armazenamento limitada a 2 pacotes.

M/M/3/2/5/∞/FCFS 100Kbps

Exemplo 21:

Refaça o exemplo 18, considerando um único enlace de saída de taxa 300 kbps e um buffer de capacidade de armazenamento infinita.

M/M/1/∞/∞/∞/FCFS 300Kbps

Exemplo 22:

Refaça o exemplo 18, considerando um único enlace de saída de taxa 300 kbps e um buffer de capacidade de armazenamento limitada a 2 pacotes.

M/M/1/2/3/∞/FCFS 300Kbps