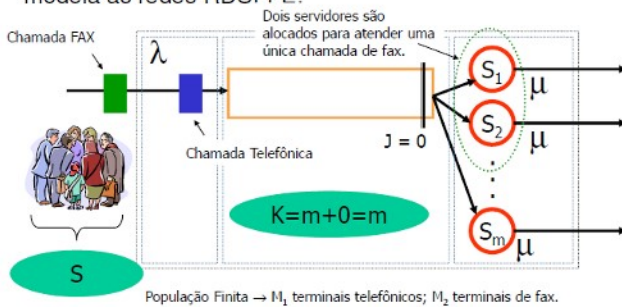


Filas Multidimensionais

Sistemas Multidimensionais

- ✓ São sistemas em que o **diagrama de estados** utiliza mais de uma **variável aleatória discreta** relacionada com o número de elementos no sistema. Um exemplo de sistema é o que modela as redes RDSI-FE:



Sistemas Multidimensionais

- ✓ Para estudarmos o problema, precisaremos das seguintes definições:
 - **L** – L-ésima classe de chamada.
 - Ex: $L = 1$: chamadas telefônicas, $L = 2$ chamadas de fax.
 - **K** – Número total de classes de chamadas no sistema.
 - Ex. $K = 2$: telefone ($L=1$) e fax ($L=2$).
 - **V_L** – Número de canais requeridos para a chamada do tipo L.
 - Ex. $V_1 = 1$: um canal para atender uma chamada telefônica.
 - $V_2 = 2$: dois canais para atender uma chamada de fax.
 - **S_L** – Número de terminais fonte gerando chamadas do tipo L.
 - Ex. $S_1 = 8$: população de terminais gerando chamadas telefônicas.
 - $S_2 = 4$: população de terminais gerando chamadas de fax.

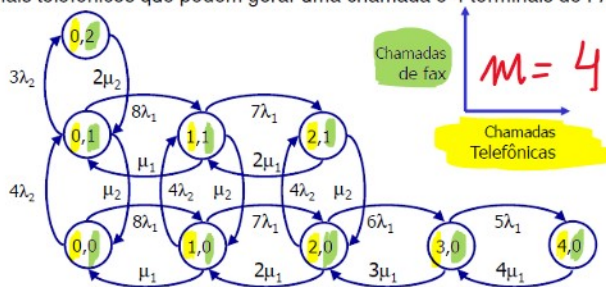
Sistemas Multidimensionais

- **λ_L** – Taxa média de chegada de chamadas (Markoviana) da classe L.
 - Ex: $\lambda_1 = 3$ chamadas telefônica/ hora.
 - $\lambda_2 = 5$ chamadas de fax/ hora.
- **μ_L** – Taxa média de atendimento de chamadas (Markoviana) da classe L.
 - Ex: $\mu_1 = 6$ chamadas telefônica/ hora.
 - $\mu_2 = 12$ chamadas de fax/ hora.

Sistemas Multidimensionais

Diagrama de Estado

Exemplo 31: Considere um sistema de filas com múltiplos servidos, com 4 servidores, em que uma chamada telefônica requer o uso de um servidor e uma chamada de FAX requer o uso de 2 servidores. Existem ao todo 8 terminais telefônicos que podem gerar uma chamada e 4 terminais de FAX.



Equações de Equilíbrio

$$\begin{cases}
 (4\lambda_2 + 8\lambda_1)P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1} + \mu_1 P_{1,0} \\
 (\mu_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_1)P_{1,0} = 8\lambda_1 P_{0,0} + \mu_2 P_{1,1} + 2\mu_1 P_{2,0} \\
 (2\mu_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_1)P_{2,0} = 7\lambda_1 P_{1,0} + \mu_2 P_{2,1} + 3\mu_1 P_{3,0} \\
 (5\lambda_1 + 3\mu_1)P_{3,0} = 6\lambda_1 P_{2,0} + 4\mu_1 P_{4,0} \\
 4\mu_1 P_{4,0} = 5\lambda_1 P_{3,0} \\
 (\mu_2 + 3\lambda_2 + 8\lambda_1)P_{0,1} = 4\lambda_2 P_{0,0} + 2\mu_2 P_{2,0} + \mu_1 P_{1,1} \\
 (\mu_2 + \mu_1 + 7\lambda_1)P_{1,1} = 8\lambda_1 P_{0,1} + 4\lambda_2 P_{1,0} + 2\mu_1 P_{2,1} \\
 (\mu_2 + 2\mu_1)P_{2,1} = 7\lambda_1 P_{1,1} + 4\lambda_2 P_{2,0} \\
 2\mu_2 P_{0,2} = 3\lambda_2 P_{0,1}
 \end{cases}$$

✓ Solução das Equações de Equilíbrio

$$P_{i,j} = P_{0,0} \cdot \binom{S_1}{i} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)^i \cdot \binom{S_2}{j} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^j$$

$$P_{2,1} = P_{0,0} \cdot \binom{8}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} \right)^2 \cdot \binom{4}{1} \left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^1$$

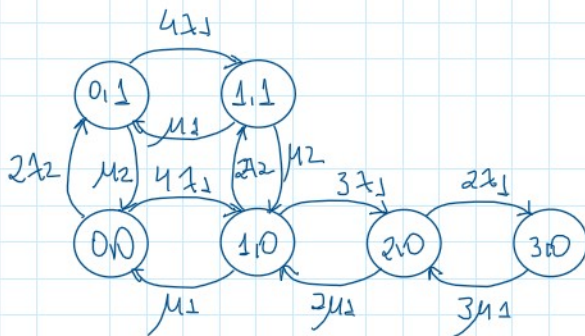
$$P_{a,b,c,\dots,K} = P_{0,0,0,\dots,0} \cdot \prod_{L=1}^K \binom{S_L}{i_L} \left(\frac{\lambda_L}{\mu_L} \right)^{i_L}, \text{ com } i_1 = a, i_2 = b, \dots, i_K = K$$

$$P_{3,2,4} = \underbrace{\binom{S_1}{3} \cdot l_1^3}_{L=1} \cdot \underbrace{\binom{S_2}{2} \cdot l_2^2}_{L=2} \cdot \underbrace{\binom{S_3}{4} \cdot l_3^4}_{L=3} \cdot P_{0,0,0}$$

Exemplo 32:

Considere um sistema em que quatro aparelhos telefônicos e dois aparelhos de FAX disputam três canais de 64 kbps de uma rede RDSI-FE. Cada aparelho telefônico ocupa durante a comunicação um canal de 64 kbps, enquanto um aparelho de FAX ocupa dois canais de 64 kbps. A taxa média de chamadas dos telefones é igual a 1 chamada por hora, enquanto a dos aparelhos de FAX é de 1/3 chamada por hora. A duração média das chamadas telefônicas é de 12 minutos e das chamadas de FAX 6 minutos. Pede-se:

- O diagrama de estado.
- A probabilidade do sistema estar vazio.
- A probabilidade de bloqueio de uma chamada telefônica.
- A probabilidade de bloqueio de uma chamada de FAX.



$$P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0} + P_{3,0} + P_{0,1} + P_{1,1} = 1$$

$$P_{1,0} = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^1 \cdot \binom{2}{0} \cdot \left(\frac{1}{30} \right)^0 \cdot P_{0,0} = 0,8 \cdot P_{0,0}$$

$$P_{2,0} = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{5} \right)^2 \cdot P_{0,0} = 0,24 P_{0,0}$$

$$P_{3,0} = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^3 \cdot P_{0,0} = 0,032 P_{0,0}$$

$$P_{0,1} = \binom{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{30} \right)^1 \cdot P_{0,0} = 0,0667 \cdot P_{0,0}$$

$$P_{1,1} = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{5} \right)^1 \cdot \binom{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{30} \right)^1 \cdot P_{0,0} = 0,0533 P_{0,0}$$

$$P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0} + P_{3,0} + P_{0,1} + P_{1,1} = 1 \quad P_{0,0} = 0,4562$$

$$L=1 (\text{TEL})$$

$$S_1 = 4$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{60} \text{ ch/min}$$

$$E[ts_1] = 12 \text{ min}$$

$$l_1 = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

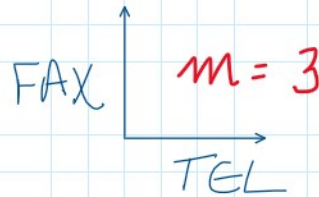
$$L=2 (\text{FAX})$$

$$S_2 = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{180} \text{ ch/min}$$

$$E[ts_2] = 6 \text{ min}$$

$$l_2 = \frac{6}{180} = \frac{1}{30}$$



$$l = \frac{1}{\mu} = \lambda \cdot E[ts]$$

$$P_{i,j} = \binom{4}{i} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^i \cdot \binom{2}{j} \cdot \left(\frac{1}{30} \right)^j \cdot P_{0,0}$$

$$c) P_{B1} = P_{BTEL} = P_{110} + P_{300} = 3,89\%$$

$$d) P_{B2} = P_{BMAX} = 1 - P_{000} - P_{100} = 17,88\%$$

Exemplo 33:

Um *Proxy* de uma rede NGN recebe requisições do tipo X, Y e Z. Toda vez que uma requisição é recebida pelo *Proxy*, ele aloca *threads* específicas para a execução das requisições. A tabela a seguir mostra a taxa de chegada em requisições por segundo para cada tipo de requisição, o número de fontes que geram requisições, o número de *threads* utilizadas por uma requisição no *Proxy* e a duração da execução de cada *thread*. Observe que se duas ou mais *threads* são usadas para atender uma requisição, elas executam simultaneamente e o serviço de ambas dura o mesmo tempo. A capacidade do *Proxy* é 4 *threads* simultâneas. Pede-se:

NGN: Next generation network.

Threads são frentes de execução de um programa.

$$M = 4$$

$$E[ts]$$

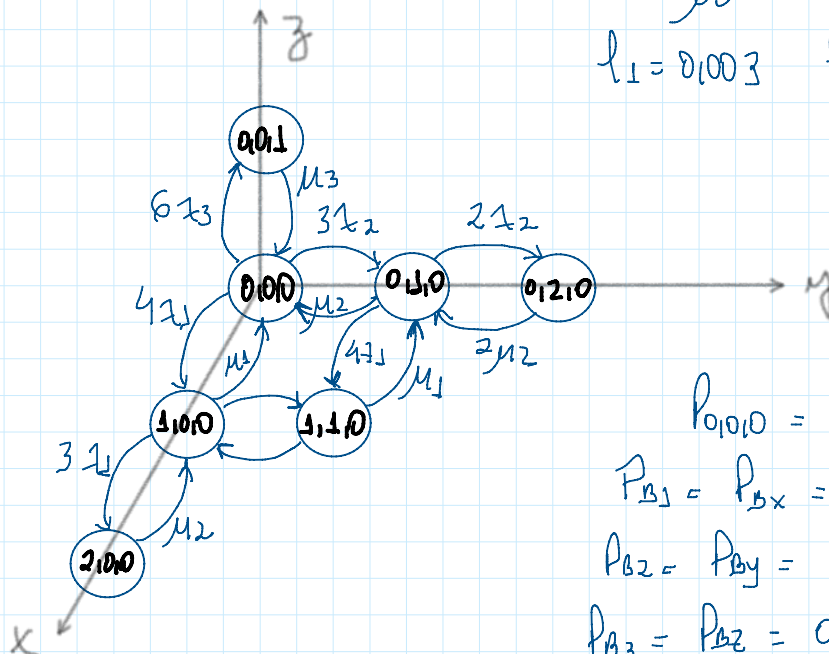
Tipo de Requisição	Taxa de Chegadas em Requisições por Segundo	Número de Fontes de Requisições	Número de Threads Utilizadas por uma Requisição no Proxy	Duração da Execução das Threads para cada Tipo de Requisição
$L=1$ X	1 requisições/segundo	4	2	3 ms
$L=2$ Y	2 requisições/segundo	3	2	5 ms
$L=3$ Z	3 requisições/segundo	6	3	8 ms

Esboce o diagrama de estados do sistema e determine a probabilidade do sistema estar vazio, a probabilidade de bloqueio de requisições do tipo X, do tipo Y e do tipo Z.

$$P_{i,j,k} = \binom{4}{i} \cdot 0,0003^i \cdot \binom{3}{j} \cdot 0,01^j \cdot \binom{6}{k} \cdot 0,024^k \cdot P_{0000}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot E[ts]$$

$$\rho_1 = 0,0003 \quad \rho_2 = 0,01 \quad \rho_3 = 0,024$$



$$P_{0000} = 0,84266$$

$$P_{B1} = P_{BX} = 0,12215$$

$$P_{B2} = P_{BY} = 0,12215$$

$$P_{B3} = P_{BZ} = 0,15734$$