Uma Análise Abrangente da Função de Partição:
Das Identidades de Euler à Fórmula Assintótica de Hardy-Ramanujan

Matheus Sales dos Santos

15 de setembro de 2025

Abstract

Este trabalho oferece uma exploração detalhada da função de partição de inteiros, $p(n)$, um dos objetos mais fascinantes na intersecção da combinatória e da teoria dos números. Iniciamos com as definições fundamentais e representações visuais, como os diagramas de Ferrers, para construir uma base intuitiva. Em seguida, mergulhamos no trabalho pioneiro de Leonhard Euler, que introduziu a poderosa ferramenta das funções geradoras, transformando um problema de contagem discreta em uma questão de análise de produtos infinitos. Investigamos o célebre Teorema dos Números Pentagonais de Euler e demonstramos como ele leva a uma elegante e eficiente fórmula de recorrência para $p(n)$. A análise se aprofunda com o estudo de partições restritas, explorando como modificações na função geradora permitem enumerar partições com propriedades específicas. O clímax do trabalho é a apresentação da fórmula assintótica de Hardy e Ramanujan, um marco da teoria analítica dos números que descreve o crescimento de $p(n)$ com precisão notável e revela a profunda conexão entre a teoria dos números e a análise complexa. Concluímos com uma reflexão sobre o legado e o impacto dessas descobertas, que continuam a inspirar a pesquisa matemática contemporânea.

Contents

1 Introdução: A Simplicidade Enganosa das Partições

A matemática é repleta de problemas cuja formulação é tão simples que podem ser explicados a uma criança, mas cuja solução exige ferramentas de extraordinária sofisticação. A função de partição de inteiros, $p(n)$, é um exemplo paradigmático desse fenômeno.

Definição 1.1 (Partição de um Inteiro)**.** Uma **partição** de um inteiro positivo n é uma maneira de escrever n como uma soma de inteiros positivos, chamados de **partes**. A ordem das partes não importa. A função de partição, $p(n)$, conta o número de partições distintas de n.

Exemplo 1.2. Vamos encontrar as partições de $n = 5$:

- 5
- $4 + 1$
- $3 + 2$
- $3 + 1 + 1$
- $2 + 2 + 1$
- $2 + 1 + 1 + 1$
- $1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Contamos 7 partições, portanto, $p(5) = 7$. Por convenção, define-se $p(0) = 1$, representando a "partição vazia" do zero.

A aparente simplicidade da sequência de valores de $p(n)$ ($p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, \dots$) rapidamente se desfaz. O crescimento da função é superpolinomial e seu comportamento não é capturado por uma fórmula fechada simples. Por exemplo, $p(10) = 42$, enquanto $p(100) = 190.569.292$. Essa explosão combinatória torna a enumeração direta um método impraticável para valores moderados de n.

Este trabalho se propõe a traçar a jornada histórica e conceitual para desvendar os mistérios de $p(n)$. Nossa investigação seguirá os passos dos grandes matemáticos que abordaram o problema, revelando uma tapeçaria de conexões inesperadas entre diferentes áreas da matemática.

2 Visualizando Partições: Diagramas de Ferrers

Antes de mergulharmos nas ferramentas analíticas, é útil ter uma representação visual para as partições. Os diagramas de Ferrers (ou gráficos de Ferrers) oferecem essa intuição.

Definição 2.1 (Diagrama de Ferrers)**.** Um **diagrama de Ferrers** representa uma partição de n como um padrão de n pontos (ou quadrados) organizados em linhas, onde o comprimento de cada linha corresponde a uma parte da partição. As linhas são alinhadas à esquerda e dispostas em ordem não crescente de comprimento.

Exemplo 2.2. A partição $10 = 4 + 3 + 3 + 1$ é representada pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \end{array}$$

Essa representação visual é surpreendentemente poderosa. Uma operação simples no diagrama, a **conjugação**, nos dá um teorema combinatório gratuitamente. A conjugação de um diagrama consiste em transpor suas linhas e colunas.

Definição 2.3 (Partição Conjugada)**.** A **partição conjugada** de uma partição λ, denotada por λ', é a partição correspondente ao diagrama de Ferrers conjugado de λ.

Exemplo 2.4. Tomando o diagrama anterior para $10 = 4 + 3 + 3 + 1$, sua conjugação (ler as colunas) nos dá um novo diagrama:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \end{array} \xrightarrow{\text{conjugar}} \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \\ \bullet & \bullet & \\ & & \\ \bullet & & \end{array}$$

O novo diagrama corresponde à partição $10 = 4 + 3 + 2 + 1$.

A operação de conjugação cria uma bijeção entre dois tipos de partições aparentemente diferentes, o que nos leva ao seguinte teorema.

Teorema 2.5. *O número de partições de n em no máximo k partes é igual ao número de partições de n onde nenhuma parte é maior que k.*

Proof. Seja λ uma partição de n em no máximo k partes. Seu diagrama de Ferrers terá no máximo k linhas. A partição conjugada, λ', terá sua maior parte igual ao número de linhas de λ, que é no máximo k. Portanto, a maior parte de λ' é no máximo k. O mapeamento é uma involução, provando a bijeção. $\square$

3 A Ferramenta Revolucionária: A Função Geradora de Euler

O primeiro grande salto conceitual no estudo de $p(n)$ foi dado por Leonhard Euler no século XVIII. Ele introduziu a ideia de encapsular toda a sequência infinita $p(0), p(1), p(2), \ldots$ nos coeficientes de uma única série de potências, uma **função geradora**.

Teorema 3.1 (Função Geradora para $p(n)$)**.** *A função geradora para a sequência de partições $p(n)$ é dada pelo produto infinito:*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \tag{1}$$

Derivação da Identidade. A prova dessa identidade é um dos argumentos mais elegantes da combinatória. Começamos expandindo cada fator do produto como uma série geométrica:

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots$$

Este polinômio infinito representa as escolhas para a parte k: podemos não usá-la (termo $1 = x^{0k}$), usá-la uma vez (termo x^k), duas vezes (termo x^{2k}), e assim por diante.

O produto completo é, portanto:

$$P(x) = (1 + x^1 + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots)\cdots$$

Para encontrar o coeficiente de x^n na expansão deste produto, devemos escolher um termo de cada fator, digamos $x^{m_1 \cdot 1}$ do primeiro, $x^{m_2 \cdot 2}$ do segundo, e assim por diante, de tal forma que o produto deles seja x^n. Isso requer que a soma dos expoentes seja n:

$$x^{m_1 \cdot 1} x^{m_2 \cdot 2} x^{m_3 \cdot 3} \cdots = x^n \quad \Longrightarrow \quad m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 2 + m_3 \cdot 3 + \cdots = n$$

Esta última equação é precisamente a definição de uma partição de n, onde m_k é o número de vezes que a parte k aparece na soma. Cada conjunto de soluções $\{m_k\}_{k \geq 1}$ em inteiros não-negativos corresponde a uma única partição de n. Portanto, o coeficiente de x^n na expansão de $P(x)$ é exatamente o número de tais soluções, que é $p(n)$. $\square$

Essa identidade é um marco, pois transforma um problema de contagem discreta em um problema da análise, relacionado à manipulação de séries de potências.

4 Partições com Restrições

A beleza da abordagem de função geradora é sua flexibilidade. Ao modificar o produto de Euler, podemos encontrar funções geradoras para partições com várias restrições.

Exemplo 4.1 (Partes Ímpares)**.** Qual é o número de partições de n em partes que são todas ímpares? Para construir a função geradora, simplesmente removemos do produto os fatores correspondentes às partes pares:

$$P_{\text{ímpar}}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k-1}} = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$$

Exemplo 4.2 (Partes Distintas)**.** Qual é o número de partições de n em partes distintas? Para cada inteiro k, só temos duas escolhas: não usar k como parte (termo 1) ou usá-lo exatamente uma vez (termo x^k). A função geradora é:

$$P_{\text{distintas}}(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k)$$

Euler provou uma identidade notável que conecta esses dois tipos de partições.

Teorema 4.3 (Euler)**.** *O número de partições de n em partes ímpares é igual ao número de partições de n em partes distintas.*

Proof. Provamos isso mostrando que suas funções geradoras são idênticas.

$$\begin{aligned}
P_{\text{distintas}}(x) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - x^{2k})}{(1 - x^k)} \\
&= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots} \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots} \\
&= P_{\text{ímpar}}(x)
\end{aligned}$$

Como as funções geradoras são iguais, os coeficientes de x^n em suas expansões também devem ser iguais para todo n. □

5 O Teorema dos Números Pentagonais e a Recorrência de Euler

Euler não parou na função geradora de $p(n)$. Ele também investigou seu inverso, $\frac{1}{P(x)}$, e descobriu uma das identidades mais belas da matemática.

Teorema 5.1 (Teorema dos Números Pentagonais de Euler)**.** *O inverso da função geradora de partições é dado pela série:*

$$\frac{1}{P(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j x^{g_j} \tag{2}$$

onde $g_j = \frac{j(3j-1)}{2}$ *são os* ***números pentagonais generalizados***.

Os primeiros números pentagonais generalizados são para $j = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$:

$$g_0 = 0, \quad g_1 = 1, \quad g_{-1} = 2, \quad g_2 = 5, \quad g_{-2} = 7, \quad g_3 = 12, \quad \ldots$$

A identidade de Euler afirma que o produto infinito se expande para uma série com pouquíssimos termos não-nulos:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots$$

A prova combinatória original de Franklin para esta identidade é um tour de force, mas aqui focaremos em sua consequência mais importante: uma fórmula de recorrência para $p(n)$.

Da identidade $P(x) \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)\right) = 1$, temos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j x^{g_j}\right) = 1$$

O lado direito é $1 + 0x + 0x^2 + \ldots$. Para $n > 0$, o coeficiente de x^n no produto do lado esquerdo deve ser zero. O coeficiente de x^n é obtido somando os produtos $p(n-k)c_k$, onde c_k é o coeficiente de x^k na série pentagonal. Isso nos dá:

$$p(n) \cdot 1 + p(n-1) \cdot (-1) + p(n-2) \cdot (-1) + p(n-5) \cdot 1 + p(n-7) \cdot 1 + \cdots = 0$$

Isolando $p(n)$, obtemos a célebre recorrência de Euler.

Proposição 5.2 (Recorrência de Euler para $p(n)$)**.** *Para* $n \geq 1$*,*

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \cdots \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq 0} (-1)^{j-1} p(n - g_j) \end{aligned}$$

A soma é finita, pois consideramos $p(k) = 0$ *para* $k < 0$.

Esta fórmula é extremamente eficiente. Para calcular $p(n)$, precisamos apenas dos valores anteriores de p, tornando o cálculo de $p(100)$ ou mesmo $p(1000)$ uma tarefa computacionalmente viável.

6 A Análise Assintótica de Hardy e Ramanujan

A recorrência de Euler é exata, mas não nos dá uma sensação intuitiva sobre a magnitude de $p(n)$. Qual é a sua taxa de crescimento? A resposta a esta pergunta teve que esperar até o século XX e exigiu uma mudança de paradigma: da análise real e combinatória para a análise complexa.

Em um trabalho monumental de 1918, G.H. Hardy e Srinivasa Ramanujan desenvolveram o **método do círculo** para encontrar uma fórmula assintótica para $p(n)$. A ideia central é tratar a função geradora $P(x)$ como uma função de uma variável complexa z e usar o Teorema dos Resíduos de Cauchy para extrair seus coeficientes. A fórmula integral de Cauchy para os coeficientes de uma série de Laurent nos diz que:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{P(z)}{z^{n+1}} dz$$

onde C é um contorno simples em torno da origem.

A função $P(z)$ tem uma singularidade em cada raiz da unidade na fronteira do disco unitário $|z| = 1$. O método do círculo consiste em escolher um contorno C que passa muito perto dessas singularidades. A intuição é que a contribuição principal para a integral vem das singularidades "mais fortes", em particular de $z = 1$.

A análise é extremamente intrincada e envolve o estudo do comportamento de $P(z)$ perto das raízes da unidade, utilizando a teoria das formas modulares (especificamente, a transformação da função eta de Dedekind, que está intimamente relacionada a $P(z)$). O resultado final, no entanto, é uma fórmula de beleza e precisão surpreendentes.

Teorema 6.1 (Fórmula Assintótica de Hardy-Ramanujan)**.** *Para valores grandes de n, a função de partição $p(n)$ é assintoticamente equivalente a:*

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \tag{3}$$

Esta fórmula revela que o crescimento de $p(n)$ é dominado por um termo exponencial em $\sqrt{n}$. Vamos analisar sua precisão.

Exemplo 6.2 (Precisão da Fórmula)**.** Para $n = 100$, o valor exato é $p(100) = 190.569.292$. A fórmula assintótica nos dá:

$$p(100) \sim \frac{1}{400\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{200}{3}}} \approx \frac{1}{692.82} e^{\pi \cdot 8.165} \approx \frac{e^{25.65}}{692.82} \approx \frac{1.37 \times 10^{11}}{692.82} \approx 197.752.156$$

O valor previsto tem um erro relativo de apenas cerca de 3.7%. Para $n = 1000$, o erro relativo cai para cerca de 1%.

O trabalho de Hardy e Ramanujan foi posteriormente generalizado por Hans Rademacher, que encontrou uma série convergente exata para $p(n)$, da qual a fórmula de Hardy-Ramanujan é o primeiro e dominante termo.

7 Conclusão e Legado

A jornada para entender a função de partição $p(n)$ é uma história emblemática do progresso matemático. O que começa com uma simples questão de contagem nos leva a uma viagem através de:

1. **Combinatória Visual:** A elegância dos diagramas de Ferrers e as provas bijetivas que eles permitem.
2. **Álgebra Formal:** A genialidade de Euler ao introduzir as funções geradoras, transformando o problema em manipulação de séries.
3. **Identidades Notáveis:** A descoberta do Teorema dos Números Pentagonais, que forneceu uma ferramenta computacional inesperadamente eficiente.
4. **Análise Complexa:** O poder do método do círculo de Hardy e Ramanujan para extrair o comportamento assintótico de uma sequência a partir das singularidades de sua função geradora.

Essa progressão demonstra como a matemática avança, construindo novas camadas de abstração e conectando campos que pareciam distantes. A teoria das partições hoje continua a ser uma área de pesquisa ativa, com conexões com a física estatística (modelos de gases de Bóson), representações de grupos de Lie e ciência da computação.

O estudo de $p(n)$ nos ensina que, por trás de uma pergunta simples, pode haver um universo de estrutura matemática esperando para ser descoberto, um universo que unifica o discreto e o contínuo, a álgebra e a análise, de maneiras profundas e belas.

References

[1] Andrews, G. E. (1976). *The Theory of Partitions*. Addison-Wesley.

[2] Apostol, T. M. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer.

[3] Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.

[4] Hardy, G. H., & Ramanujan, S. (1918). Asymptotic Formulæ in Combinatory Analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-17(1), 75–115.