Index-Theorie Notizen WiSe22/23

Matthias Westenfelder

Contents

Chapter 1

Vektorbündel und Chern-Weil Theorie

1.1 Vektorbündel und Differentialformen

1.2 Zusammenhänge

Definition 1.1 (E-wertige Differentialformen). *Wir definieren den Ring der Vektor-wertigen Differentialformen als*

$$\Omega^*(M,E) = \mathrm{C}^\infty(M, \Lambda^* T^* M \otimes E)$$

Definition 1.2 (Zusammenhang). *Sei E ein Vektorbündel auf M dann nenen wir eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung*

$$\nabla : C^\infty(M,E) \longrightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$$

so dass gilt:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

Diese Abbildung lässt sich eindeutig erweitern zu:

$$\Omega^*(M,E) \xrightarrow{\nabla^*} \Omega^{*+1}(M,E)$$

via Leibnitz-Regel:

$$\nabla^k(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge \nabla(s)$$

wobei $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ und

$$\omega \wedge \nabla(\begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \omega \wedge (ds_1 + \sum_i \omega_{i1}) \\ \vdots \\ \omega \wedge (ds_n + \sum_i \omega_{in}) \end{bmatrix} \in \Omega^k(M,E)$$

Dies induziert eine kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} \nabla : \mathrm{C}^\infty(M, TM) \times \mathrm{C}^\infty(M, E) &\longrightarrow \mathrm{C}^\infty(M, E) \\ (X, s) &\longmapsto ev(\nabla(s), X) = \nabla_X(s) \end{aligned}$$

Bemerkung. *REVIEW THIS LATER! Lokal sieht ein Zusammenhang folgender Maßen aus, für lokalen Rahmen* $(b_1, \ldots, b_n)$

$$\nabla(b_j) = \sum_i \omega_{ij} \otimes b_i$$

wobei $\omega_{ij} \in \Omega^1(M)$ *also folgt insgesamt:*

$$\nabla(s) = \nabla(\sum_i s_i b_i) = \sum_i ds_i \otimes b_i + \sum_i \sum_j \omega_{ij} \otimes b_j = \sum_j \big(ds_j + \sum_i \omega_{ij}\big) \otimes b_j$$

was zeigt dass $\nabla \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$ *eine Endomorphismen-Wertige 1-Form ist sowie* $\nabla = d^E + \omega$ *mit* $\omega \in \Omega^1(M) \otimes \mathrm{End}(E)$

Beispiel. $s = s_1 b_1 + s_2 b_2$ *und*

$$\nabla = d + \omega = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ds_1 \\ ds_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{11} s_1 + \omega_{12} s_2 \\ \omega_{21} s_1 + \omega_{22} s_2 \end{bmatrix}$$

Beispiel (Beispiel Rechnung auf $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$)**.** *ADD THIS LATER!!*

Definition 1.3 (Krümmungstensor)**.** *Wir nennen* $R = \nabla^2$ *den Riemannschen Krümmungstensor und nennen* ∇ *flach falls* $\nabla^2 = 0$

Satz 1.1. *Sei* $\nabla : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ *ein Zusammenhang dann ist* R *ein Tensor.*

Proof.

$$\begin{aligned} &\nabla^2(fs) = \nabla(\nabla(fs)) = \nabla(df \otimes s + f\nabla(s)) \\ &= d(df) \otimes s - df \otimes \nabla(s) + df \otimes \nabla(s) + f\nabla^2(s) = f\nabla^2(s) \end{aligned}$$

□

Bemerkung (lokale Darstellung der Krümmung)**.** *Sei* $\nabla = d + \omega \in \Omega^1(M, \mathrm{End}(E))$ *Zusammenhangs 1-Form mit lokalem Rahmen* $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} K(b_i) &= \nabla(\sum_j \omega_{ij} \otimes b_j) = \sum_j d\omega_{ij} \otimes b_j - \sum_j \omega_{ij} \wedge \nabla(b_j) \\ &= \sum_j d\omega_{ij} \otimes b_j - \sum_{jk} w_{ij} \wedge (\omega_{jk} \otimes b_k) \\ &= \big((d\omega) \otimes s - (\omega \wedge \omega)\big)_i = \big((d\omega - \omega \wedge \omega) \otimes b\big)_i \end{aligned}$$

Wir nennen $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$ dann eine ***Krümmungs 2-Form*** *Als Konsequenz dessen: Da*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge d\beta$$

und

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta \wedge \alpha$$

liefern

$$\begin{aligned}\Longrightarrow d\Omega = d(d\omega - \omega \wedge \omega) = d^2\omega - d(\omega \wedge \omega) = -(d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega)\\ = -(d\omega \wedge w - (-1)^{2*1}d\omega \wedge \omega) = -(d\omega \wedge w - d\omega \wedge \omega) = 0\end{aligned}$$

Satz 1.2. *Sei E ein Vektorbündel, M eine Mannigfaltigkeit dann gilt: $\nabla : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ Zusammenhang existiert und*

$$\nabla, A \in \Omega^1(M, End(E)) \Longrightarrow \nabla + A \textit{ ist Zusammenhang}$$

Definition 1.4 (Riemannsche Metrik)**.** *Wir nennen $g \in \mathrm{C}^\infty(M, Sym^2(T^*M))$ eine Riemannsche Metrik falls:*

- $g_{ij} = g_{ji}$
- $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$
- $g(X, X) \geq 0 \forall X$

lokal gilt also $g = \sum_{ij} g_{ij}dx^i \otimes dx^j$

Definition 1.5 (Lie Klammer)**.** *Wir definieren die Lie Klammer als*

$$\begin{aligned}\mathrm{C}^\infty(M, TM) \times \mathrm{C}^\infty(M, TM) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(M, TM)\\ (X, Y) \longmapsto [X, Y]\end{aligned}$$

wobei $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$

Definition 1.6 (metrischer Zusammenhang)**.** *Sei $\nabla : C^\infty(M, TM) \longrightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes TM)$ Zusammenhang, $X \in \mathrm{C}^\infty(M, TM)$ falls gilt:*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

dann nennen wir ∇ metrisch

Definition 1.7 (torsionsfreier Zusammenhang)**.** *Sei $\nabla : C^\infty(M, TM) \longrightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes TM)$ Zusammenhang, $X \in \mathrm{C}^\infty(M, TM)$ falls gilt:*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

dann heißt ∇ torsionsfrei.

Algebraische Konstruktionen von Zusammenhängen

- $\nabla^{E_1 \oplus E_2}(s_1 + s_2) = \nabla^{E_1}(s_1) + \nabla^{E_2}(s_2)$
- $\nabla^{E_1 \otimes E_2}(s_1 \otimes s_2) = \nabla^{E_1}(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^{E_2}(s_2)$

1.3 Bordismen und Charakteristische Klassen

Chern-Klassen

Definition 1.8 (Invariantes Polynom)**.** *Eine Abbildung*

$$P : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt Invariantes Polynom falls: $P \in \mathbb{C}[X_{11} \dots X_{nn}]$ *und*

$$\forall X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n} : P(XY) = P(YX)$$

Diese Definition ist genau das was notwendig ist um eine Basis unabhängige Abbildung von Matrizen zu bekommen:

$$P \textit{ invariant } \Leftrightarrow \forall T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) : P(X) = P(T^{-1}XT)$$

Bemerkung. *P invariantes Polynom $\Longrightarrow$ P induziert wohldefinierte Abbildung*

$$\mathrm{C}^\infty(M, \mathrm{End}(E)) \xrightarrow{P_*} \mathrm{C}^\infty(M, \underline{\mathbb{C}})$$

Definition 1.9 (Elementar Symmetrische Polynome)**.** *$P_i : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \le i \le n$ definiert durch*

$$\det(t + X) = \sum_{i=0}^{n} t^{n-i} P_i(X)$$

heißt ites Elementar Symmetrisches Polynom.

Satz 1.3. *Sei $K = \nabla^2$ Krümmung von ∇ auf $\mathbb{C}$-Vektorbündel und P Invariantes Polynom*

$$\Longrightarrow P(K) \in \Omega^{2*}(M, \mathbb{C}) \textit{ mit } dP(K) = 0 \Longrightarrow \big[P(K)\big] \in H^{2*}(M; \mathbb{C})$$

Definition 1.10 (Chern Klasse)**.** *Sei E $\mathbb{C}$-Vektorbündel, ∇ Zusammenhang auf E, $K = \nabla^2$ Krümmung*

$$c_k(E) = \big[P_k(\frac{i}{2\pi}K)\big] \in H^{2k}(M; \mathbb{C})$$

heißt die kte-Chernklasse von E

Satz 1.4 (Eigenschaften von Chernklassen)**.** *$\phi : M \longrightarrow N$, $E \to N$ dann gilt $\phi^*(E)$ ist Bündel über M*

- $c_k(\phi^* E) = \phi^*(c_k(E))$
- $c_k(E_1 \oplus E_2) = \sum_{i+j=k} c_i(E_1) c_j(E_2)$
- $\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(1)) = 1$

Geschlechter

Definition 1.11 (stabile fast komplexe Struktur)**.** *Eine **stabile fast komplexe Struktur** auf einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit M ist ein Paar (n, J) with $n \in \mathbb{N}$ wobei*

$$J \in \operatorname{End}(TM \oplus \underline{\mathbb{R}^n}) \text{ mit } J^2 = -id_{TM}$$

*Die zu (n, J) **konjugierte Struktur** ist gegeben durch $(n, -J)$ Zwei stabile fast komplexe Strukturen $(n_0, J_0), (n_1, J_1)$ sind **äquivalent** falls:*

$$\exists m_0, m_1 \in \mathbb{N} : \exists \varphi \in \operatorname{Hom}(TM \oplus \underline{\mathbb{R}^{n_0}} \oplus \mathbb{C}^{m_0}, TM \oplus \underline{\mathbb{R}^{n_1}} \oplus \mathbb{C}^{m_1})$$
$$\text{mit } \varphi \circ (J_0 \oplus i) \circ \varphi^{-1} = J_1 \oplus i$$

Oder in Worten die komplexe Stabilisierung von J_0 lässt sich per Konjugation in die komplexe Stabilisierung von J_1 verwandeln.

Beispiel. *komplexe Mannigfaltigkeiten haben durch Faserweise Multiplikation mit i eine komplexe Struktur.*

Bemerkung. *Sei M kompakt, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand dann folgt ∂M ist $(n-1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit mit*

$$TM|_{\partial M} \cong T(\partial M) \oplus \mathbb{R}\nu$$

wobei ν eine äußere Normale ist. Eine stabile fast komplexe Struktur auf M induziert eine stabile fast komplexe Struktur auf ∂M. Wir können also eine Äquivalenz von geschlossenen stabil fast komplexen Mannigfaltigkeiten definieren. Wir definieren:

$$(M, n, J) \sim (M', n', J')$$
$$\Leftrightarrow \exists (N, n_N, J_N) : \partial(N, n_N, J_N) = (M, n, J) \oplus (M', n', -J')$$

*Wir nennen dann (M, n, J) und (M', n', J') **bordant**.*

Definition 1.12 (Bordismen Ringe)**.** *Die Menge der Äquivalenz-Klassen von n dimensionalen stabil fast komplexen Mannigfaltigkeiten wird mit Ω_n^{U} bezeichnet und besitzt Addition sowie graduierte Multiplikation.*

$$[(M, n, J)] + [(M', n', J')] = [(M + M', ...)]$$
$$[(M, n, J)][(M', n', J')] = [(M \times M', ...)]$$

*wir nennen Ω^{U} den **Komplexe Bordismenring** und Ω^{SO} den **orientieren Bordismenring**. (wobei Ω^{SO} das Bild des Vergissfunktors der die stfk Struktur vergisst ist.)*

Definition 1.13 (Hirzebruch-Geschlecht)**.** *Ein **orientiertes/komplexes - Hirzebruch Geschlecht** ist ein Ring-Homomorphismus*

$$\varphi : \Omega^{\mathrm{SO}} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\psi : \Omega^{\mathrm{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Beispiel. *Die Signatur ist ein Geschlecht.* $[M] \longmapsto sign(M)$ *für* $dim(M) = 4n$ *und* $[M] \longmapsto 0$ *sonst*

Satz 1.5.

$$\Omega^{\mathrm{SO}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{C}\mathrm{P}^2, \ldots, \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n}]$$
$$\Omega^{\mathrm{U}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \ldots, \mathbb{C}\mathrm{P}^{n}]$$

Definition 1.14 (Multiplikative Sequenz)**.**

Definition 1.15 (Charakteristische Folge)**.**

Satz 1.6.

Satz 1.7.

Chapter 2

Clifford-Algebras