



Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Modelo de regressão para valores extremos bimodais

Mathews de Noronha Silveira Lisboa

Dissertação apresentada ao Departamento
de Estatística da Universidade de Brasília,
como requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Estatística

Brasília
2024

Mathews de Noronha Silveira Lisboa

Modelo de regressão para valores extremos bimodais

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Dissertação apresentada ao Departamento
de Estatística da Universidade de Brasília,
como requisito parcial para obtenção do
título de Mestre em Estatística.

**Brasília
2024**

Resumo

Eventos climáticos extremos resultam da combinação de valores extremos de duas ou mais variáveis climáticas aleatórias. Por outro lado, quando pelo menos uma dessas variáveis apresenta características multimodais, os sistemas climáticos tornam-se mais complexos. A distribuição GEV bimodal, proposta por Otiniano (2023), surge como uma alternativa para a modelagem univariada de extremos em sistemas climáticos complexos.

Neste trabalho, propomos um novo modelo de regressão que descreve a relação entre uma variável resposta de valores extremos bimodais e outras variáveis climáticas explicativas. Esse modelo de regressão é baseado na distribuição GEV bimodal (BGEV). Uma das inovações do novo modelo de regressão BGEV é a reparametrização do parâmetro de localização em termos de sua mediana, o que facilita a interpretação dos resultados.

A performance das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de regressão BGEV foi avaliada por meio de diversos experimentos de simulação de Monte Carlo, e a qualidade do ajuste do modelo foi validada por meio dos resíduos quantílicos. Além disso, o modelo foi aplicado a dados climáticos da estação meteorológica A002, localizada em Goiânia.

Palavras-chave: BGEV; Modelo de regressão; Resíduos quantílicos; dados climáticos; sistemas complexos.

Abstract

Extreme weather events result from the combination of extreme values of two or more random climatic variables. On the other hand, when at least one of these variables exhibits multimodal characteristics, climatic systems become more complex. The bimodal GEV distribution, proposed by Otiniano (2023), emerges as an alternative for univariate extreme value modeling in complex climatic systems.

In this work, we propose a new regression model that describes the relationship between a response variable of bimodal extreme values and other explanatory climatic variables. This regression model is based on the bimodal GEV distribution (BGEV). One of the innovations of the new BGEV regression model is the reparameterization of the location parameter in terms of its median, which facilitates the interpretation of the results.

The performance of the maximum likelihood estimates of the BGEV regression model was evaluated through several Monte Carlo simulation experiments, and the quality of the model fit was validated using quantile residuals. In addition, the model was applied to climatic data from the A002 weather station, located in Goiânia.

Keywords: GEV, Bimodal, Regression, MLE, Quantile residuals, Dew point, Relative humidity, Climate, Meteorology.

Lista de Figuras

1	Curvas para a função de densidade de probabilidade para as distribuições de valores extremos (com $\alpha = 1$)	12
2	$Y \sim F_{BG_{0,\mu,1,1}}$ com μ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.	16
3	$Y \sim F_{BG_{0,0,\sigma,1}}$ com σ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.	16
4	$Y \sim F_{BG_{0,0,1,\delta}}$ com δ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.	17
5	$Y \sim F_{BG_{\xi,0,1,1}}$ com ξ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.	17
6	$Y \sim F_{BG_{-0.5,0,1,\delta}}$ e δ variando. Gráfico superior da FDP. Gráfico inferior da FDA.	18
7	$Y \sim F_{BG_{0.5,0,1,\delta}}$ e δ variando. Gráfico superior da FDP. Gráfico inferior da FDA.	19
8	Boxplots dos parâmetros estimados sob o Cenário 6. A linha tracejada vermelha representa o verdadeiro valor do parâmetro	35
9	Histogramas dos dados diários	38
10	Comparativos entre GEV e BGEV	40
11	Gráfico de dispersão das variáveis explicativas	41
12	Análise de resíduos para os modelos para temperatura do ponto orvalho . .	43
13	Análise de resíduos para os modelos para umidade relativa do ar.	47

Lista de Tabelas

1	Viés, RMSE e ASE sob os Cenários 1, 3 e 5	33
2	Viés, RMSE e ASE sob os Cenários 2, 4 e 6	34
3	Estimativas e erro padrão para TO e U	38
4	Estimativas e erro padrão para TO e U	39
5	Medidas de comparação entre modelos BGEV para temperatura do ponto do orvalho	43
6	Estimativas, erros padrão, estatística z e p -valores para os modelos RBGEV aplicados em temperatura do ponto do orvalho.	44
7	Medidas de comparação entre modelos BGEV para temperatura do ponto do orvalho	46
8	Estimativas, erros padrão, estatística z e p -valores para os modelos RBGEV aplicados em temperatura do ponto do orvalho.	48

Sumário

1 Introdução	8
2 Revisão de Literatura.	11
2.1 Distribuições extremas e distribuição GEV	11
2.2 Distribuição GEV bimodal	14
2.2.1 Quantis	19
3 Algumas propriedades da distribuição BGEV	20
3.1 Momentos	20
3.2 Função geratriz de momentos	23
4 Modelo de regressão BGEV.	25
4.1 Reparametrização e regressão	25
4.2 Inferência, diagnósticos e seleção de modelo.	27
5 Simulação	31
6 Aplicação.	36
6.1 Descrição dos dados	36
6.2 Ajuste dos dados extremos iid do PO e U	38
6.3 Avaliação pelo modelo de regressão BGEV	41
6.3.1 Temperatura do ponto do orvalho	42
6.3.2 Umidade relativa do ar	45
7 Conclusão	49
A Apêndices	54
A.1 A	54

1 Introdução

A teoria dos valores extremos (TVE) trata do estudo assintótico das distribuições de estatísticas extremas. Isto é, estuda as distribuições-limite das estatísticas do máximo ou do mínimo normalizado de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Conforme Fisher e Tippet (1928) e Gnedenko (1943), essas distribuições limite (extremas) podem ser Gumbel, Fréchet, ou Weibull. As principais referências clássicas sobre TVE incluem os livros de Kotz e Nadarajah (2000), Haan e Ferreira (2006) e Resnick (1987). A distribuição de probabilidade contínua, desenvolvida para combinar as três distribuições extremas, foi denominada por Jenkinson (1955) de GEV (*generalized extreme value*). Desde então, a distribuição GEV tem sido amplamente utilizada em diversas áreas, como, por exemplo, em finanças (Embrechts, 1997), confiabilidade (Samorodnitsky, 2014), e ciências da terra e meio ambiente (Raynal Villaseñor, 2021), entre outras.

A família de distribuições GEV acomoda distribuições unimodais com cauda pesada e cauda leve. Diversas generalizações da distribuição GEV foram propostas com a finalidade de capturar maior assimetria e acomodar caudas mais pesadas. Entre as generalizações feitas, pode-se citar a distribuição GEV transmutada proposta por Aryal e Tsokos (2009) e estudada por Otiniano et al. (2019).

Em sistemas climáticos complexos os eventos raros se combinam com eventos extremos (caudas pesadas), assim a distribuição de probabilidade adequada para ajustar esses dados deve ser multimodal. Estudos de caso relativos à velocidade do vento mostram que sua distribuição de probabilidade é bimodal.

Em todos esses trabalhos, a mistura de diversas distribuições de probabilidade foi utilizada para modelar a velocidade do vento. Recentemente, Otiniano et al. (2023) propuseram uma nova generalização da distribuição GEV que admite bimodalidade e a denominaram distribuição BGEV. A distribuição BGEV compete com modelos de mistura de distribuições, porém ela é identificável, o que não ocorre em alguns casos de mistura. Além disso, a inferência dos parâmetros da distribuição BGEV é mais simples do que nos modelos de mistura. Devido às boas propriedades da distribuição BGEV, neste trabalho, utilizamos essa distribuição como base para o desenvolvimento de uma nova classe de modelos de regressão.

A regressão é uma ferramenta essencial para a modelagem estatística, permitindo identificar relações entre variáveis explicativas e variáveis resposta. Ainda são poucas as propostas de modelos de regressão para dados bimodais. Ao utilizar a técnica Marshall-Olkin-odd-loglogistic-G (MOOLL-G), é possível obter uma nova distribuição bimodal. Com base nessa técnica, Cordeiro et al. (2021) propuseram uma nova regressão log-Weibull

estendida, fundamentada no modelo MOOLL-Weibull. Outros modelos de regressão baseados em distribuições bimodais foram propostos por Vasconcelos et al. (2021a), Vasconcelos et al. (2021b), e Vila et al. (2021).

Neste trabalho, propomos um modelo de regressão BGEV, baseado na distribuição BGEV (OTINIANO et al., 2023), útil para a análise de dados de eventos extremos de sistemas complexos, os quais podem ser bimodais. Estudaram-se algumas propriedades da distribuição BGEV, como quantis, momentos e função geratriz de momentos. A performance dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo de regressão BGEV foi testada através de experimentos de simulação Monte Carlo. A aplicabilidade do modelo foi ilustrada por meio de dados climáticos da estação meteorológica de Goiânia (A002), fornecidos pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET).

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos uma revisão de literatura que aborda questões teóricas e técnicas relevantes para a análise subsequente, como a forma da distribuição GEV, a apresentação da GEV bimodal, suas respectivas funções de distribuição acumulada e de probabilidade, bem como seus quantis.

A partir do Capítulo 3, estão os novos resultados deste trabalho. No Capítulo 3, mostramos algumas propriedades da distribuição BGEV, como os momentos e a função geradora de momentos.

No Capítulo 4, apresentamos o modelo de regressão BGEV, começando pela reparametrização da distribuição GEV bimodal, que acomoda a estrutura de regressão na mediana m . Em seguida, apresentamos a função de regressão e a função de ligação escolhida. Discutimos a inferência dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança e calculamos a função score. Por fim, são apresentadas as expressões relativas aos resíduos quantílicos, que serão utilizados para a avaliação do ajuste do modelo, bem como os critérios de informação (AIC e BIC) para a seleção de modelos.

O Capítulo 5 é dedicado a mostrar os resultados das estimativas de máxima verossimilhança, via simulações de Monte Carlo. Foram realizadas 10.000 repetições de Monte Carlo e avaliados 6 diferentes cenários, calculando o viés, o erro quadrático médio e o erro padrão assintótico para cada parâmetro.

A aplicação do modelo de regressão BGEV foi realizada com dados da estação meteorológica A002 de Goiânia, conforme descrito no Capítulo 6. Primeiramente, são apresentados os dados utilizados e a definição de todas as variáveis climáticas envolvidas. Dada a importância dos períodos de estiagem na região de Brasília e a característica bimodal das variáveis, escolhemos como variáveis resposta a temperatura do ponto de orvalho e a umidade relativa do ar. As demais variáveis foram incluídas no modelo como variáveis explicativas.

Para as aplicações, utilizou-se a técnica de blocos máximos e mínimos para extrair subamostras de extremos, com o objetivo de verificar a independência serial dos dados extremos.

A primeira aplicação corresponde à análise da temperatura do ponto de orvalho. Com base em critérios de informação e na análise dos resíduos, foi realizada a seleção do melhor modelo entre diversos cenários que diferem nas variáveis explicativas. Um procedimento semelhante foi adotado para a umidade relativa do ar. Concluimos ambas as aplicações com a interpretação detalhada dos resultados.

Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos a conclusão deste trabalho e as considerações finais, assim como as perspectivas para trabalhos futuros.

2 Revisão de Literatura

A área da Estatística dedicada ao estudo das distribuições de máximos, mínimos e quantis extremos é denominada Teoria de Valores Extremos (TVE). Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados da TVE, como as distribuições extremas e a distribuição generalizada de valores extremos (GEV). Em seguida, abordaremos a distribuição bimodal GEV, que será a base para nosso principal resultado.

2.1 Distribuições extremas e distribuição GEV

A primeira proposta para modelar valores extremos foi apresentada por Fisher e Tippett (1928) por meio do Teorema do Limite para distribuições extremas que foi provado pela primeira vez por Gnedenko (1943). Distribuições de valores extremos são distribuições limite de estatísticas extremas adequadamente normalizadas. Mais precisamente, sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com função de distribuição F e sejam

$$X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \text{ e } X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

as estatísticas extremas do máximo e mínimo, respectivamente. Se existirem sequências de constantes de normalização $a_n > 0$, b_n tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \quad (2.1.1)$$

onde G é uma função de distribuição não degenerada, então G deve ser uma das três distribuições de valores extremos, Weibull, Gumbel, ou Fréchet. Essas distribuições são caracterizadas por sua função de distribuição cumulativa (FDA) padrão, que é definida por:

$$\begin{aligned} \text{Weibull} & : \Psi_\alpha(y) = \begin{cases} \exp(-(-y)^\alpha), & \text{se } y < 0, \alpha > 0, \\ 1, & \text{se } y \geq 0; \end{cases} \\ \text{Gumbel} & : \Upsilon(y) = \exp(-\exp(-y)), \text{ para } y \in \mathbb{R}; \\ \text{Fréchet} & : \Phi_\alpha(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0, \\ \exp(-y^{-\alpha}), & \text{se } y > 0, \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Consequentemente, as respectivas funções densidade de probabilidade (FDP) são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Weibull : } \psi_{\alpha}(y) &= \begin{cases} \alpha \exp(-(-y)^{\alpha})(-y)^{\alpha-1}, & \text{se } y < 0, \alpha > 0; \\ 0, & \text{se } y \geq 0; \end{cases} \\ \text{Gumbel : } v(y) &= \exp(-(\exp(-y) + y)), \text{ para } y \in \mathbb{R}; \\ \text{Fréchet : } \phi_{\alpha}(y) &= \begin{cases} 0, & \text{se } y \leq 0; \\ \alpha \exp(-y^{-\alpha})y^{-(\alpha+1)}, & \text{se } y > 0, \alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Na figura 1 são apresentadas as curvas das funções densidade de probabilidade das três distribuições extremais. É notável a diferença entre as três curvas e que todas as curvas são assimétricas em relação ao eixo vertical. Considerando que a cauda produzida pela distribuição Gumbel possui um decaimento leve, ou suave, semelhante a distribuição normal. Considerando a distribuição Fréchet, a cauda produzida é pesada, sendo está mais amplamente utilizada para aplicações financeiras conforme Jondeau, Poon e Rockinger (

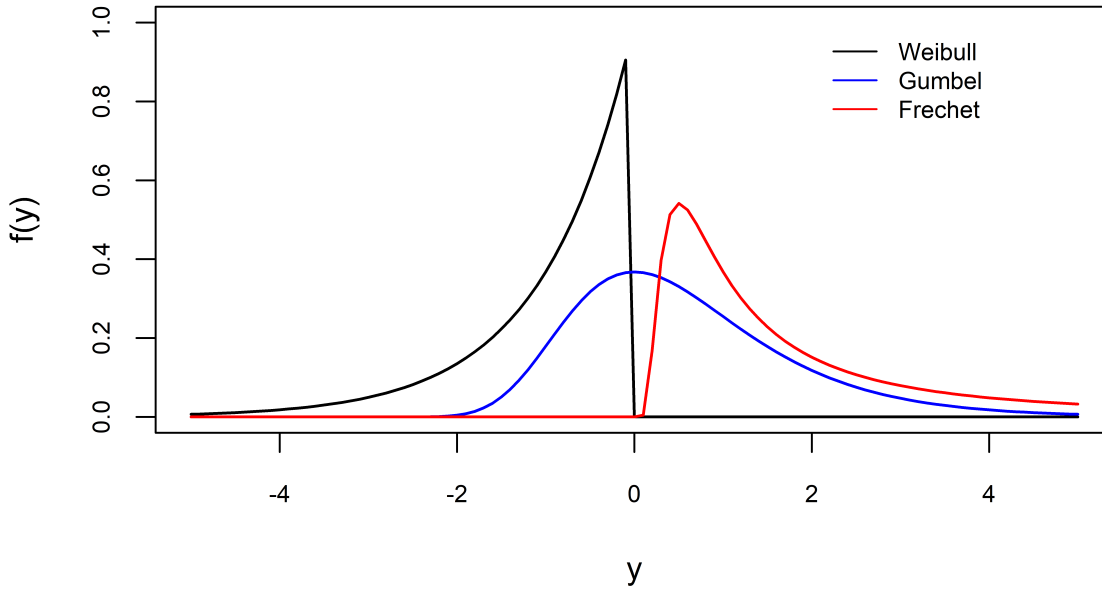


Figura 1: Curvas para a função de densidade de probabilidade para as distribuições de valores extremos (com $\alpha = 1$)

As três distribuições anteriores podem ser acomodadas em uma única família de distribuição mais geral. A família de distribuições generalizada de valores extremos, conhecida como GEV, que foi primeiramente apresentada por Jenkinson (1955), possui

FDP e DFA, respectivamente, definidas por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{(-1/\xi)-1} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left[- \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, & \text{se } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

e

$$F(y) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, & \text{se } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação, $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala, e ξ é o parâmetro de forma. O suporte de F é $\left\{ y : 1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) > 0 \right\}$ e é toda a reta real (\mathbb{R}) quando $\xi \neq 0$.

O parâmetro ξ é conhecido como índice caudal e possui relação direta com o parâmetro de forma das três distribuições extremas. Para a distribuição Fréchet não padronizada tem-se que $\xi = \alpha^{-1} > 0$, para a distribuição Gumbel não padronizada tem-se que $\xi = 0$ e para distribuição Weibull não padronizada $\xi = -\alpha^{-1} > 0$.

Para obter a distribuição Gumbel não padronizada partindo da GEV é uma relação direta, uma vez que $\xi = 0$ considerando que a distribuição Gumbel não depende de um parâmetro α , já para a Gumbel padronizada basta considerar que os parâmetros μ e σ assumem valores 0 e 1 respectivamente. Para se obter a distribuição Fréchet partindo da distribuição GEV, utiliza-se da relação $\xi = \alpha^{-1} > 0$, substituindo na Fréchet não padronizada de tal maneira que $F(y) = \Phi(\alpha^{-1}y + (\mu + \sigma - \alpha^{-1}\mu))$. A transformação para a Weibull é feita de maneira similar, porém a relação é $\xi = -\alpha^{-1} > 0$.

Desde que foi formalizada pela primeira vez, a distribuição GEV tem sido aplicada em diversas áreas. Pode-se observar a aplicação teórica da teoria dos valores extremos e também da distribuição GEV em livros como Haan e Ferreira (2006), Kotz e Nadarajah (2000), Rudd et al. (2017) e entre outros. Apesar da flexibilidade da distribuição GEV para modelar eventos extremos, esta distribuição não contempla eventos raros sem serem extremos (dados heterogêneos multimodais). Em populações heterogêneas pode-se observar dentro de uma mesma população dois ou mais grupos que podem ser considerados distintos, sendo assim, é possível que esses grupos formem mais de uma moda, sendo que o caso mais comum é o comportamento bimodal. Dados com populações que apresentem o comportamento bimodal aparecem em diversas áreas como hidrologia, marketing, finanças, entre outros. Nesse contexto, uma generalização da distribuição GEV foi dada por Otiniano et al. (2021). Essa generalização não apresenta parâmetro de locação, então Otiniano et al. (2023) redefiniram esse modelo a fim de contemplar o parâmetro e locação.

A seguinte subseção trata desse modelo.

2.2 Distribuição GEV bimodal

Para definir novos modelos probabilísticos bimodais existem pelo menos duas metodologias utilizando uma distribuição base, isto é uma distribuição já conhecida que será utilizada de ponto de partida para a obtenção de uma distribuição mais geral. A primeira metodologia é baseada em utilizar uma transformação quadrática em uma distribuição base F . Alguns trabalhos que usaram esta metodologia considerando como base a distribuição normal (Elal-Olivero (2010)), Birnbaum-Saunders (Fonseca e Cribari-Neto (2018); Vila et al. (2021)) e Gamma (Vila et al. (2020)). A segunda abordagem é usar a transformação do tipo $T(x) = (x - \mu)|x - \mu|^\delta$ que foi aplicada sob o modelo log-logístico no trabalho Swamee e Rathie (2007) e também aplicado para a distribuição GEV Otiniano et al. (2021).

O procedimento para obter a distribuição GEV bimodal (BGEV) consiste em compor a distribuição de uma variável aleatória $Y \sim \text{GEV}(\xi, \mu = 0, \sigma)$, que é unimodal com a transformação T . Assim, a função de distribuição acumulada do modelo BGEV é dada por

$$F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(y) = F_{\xi,0,\sigma}(T_{\mu,\delta}(y)), \quad (2.2.1)$$

em que a função $T_{\mu,\delta}(y)$ é definida por:

$$T_{\mu,\delta}(y) = (y - \mu) |y - \mu|^\delta, \quad \delta > -1, \mu \in \mathbb{R}.$$

A função T é inversível e derivável, com a inversa e derivada representadas respectivamente por

$$T_{\mu,\delta}^{-1}(y) = \text{sinal}(y) |y|^{\frac{1}{\delta+1}} + \mu, \quad (2.2.2)$$

em que a $\text{sinal}(y)$ representa a função sinal de y .

$$\frac{T_{\mu,\delta}(y)}{dy} = (\delta + 1) |y - \mu|^\delta. \quad (2.2.3)$$

A partir de (2.2.1), (2.1.3) e (2.2.2) a função de distribuição acumulada da distribuição BGEV é dada por

$$F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(y) = \begin{cases} \exp \left[- \left[1 + \xi \left(\frac{T_{\mu,\delta}(y)}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right], & \xi \neq 0 \\ \exp \left[- \exp \left[- \frac{T_{\mu,\delta}(y)}{\sigma} \right] \right], & \xi = 0, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

e sua função de densidade de probabilidade correspondente é dada por

$$f_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{T_{\mu,\delta}(y)}{\sigma} \right) \right]^{(-1/\xi)-1} \exp \left[- \left[1 + \xi \left(\frac{T_{\mu,\delta}(y)}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right] \frac{T_{\mu,\delta}(y)}{dy}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left(- \frac{T_{\mu,\delta}(y)}{\sigma} \right) \exp \left[- \exp \left(- \frac{T_{\mu,\delta}(y)}{\sigma} \right) \right] \frac{T_{\mu,\delta}(y)}{dy}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

em que $\frac{T_{\mu,\delta}(y)}{dy}$ está definido em (2.2.3). Nota-se que o parâmetro μ é considerado parâmetro de localização. A prova disso tem origem no fato de que $T_{\mu,\delta} = T_{0,\delta}(x - \mu)$ que pode ser verificada de forma direta substituindo os valores em (2.2.2). Logo, em consequência disso $f_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(x) = f_{BG_{\xi,0,\sigma,\delta}}(x - \mu)$. O suporte da distribuição BGEV é

$$Suporte(f_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}) = \begin{cases} \left[\mu - \left(\frac{\sigma}{\xi} \right)^{\frac{1}{\delta+1}}, +\infty \right), & \text{se } \xi > 0, \\ \left(-\infty, \mu + \left| \frac{\sigma}{\xi} \right|^{\frac{1}{\delta+1}} \right], & \text{se } \xi < 0, \\ (-\infty, +\infty), & \text{se } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Para melhor entendimento de como os parâmetros afetam as possíveis formas da distribuição BGEV foram construídos gráficos variando valores para cada dos parâmetros individualmente enquanto os demais parâmetros permanecem fixos. Nas Figuras 2,3 e 4 estão apresentados os gráficos para a função de densidade e função de distribuição acumulada. Para a construção destes gráficos foi fixado $\xi = 0$, enquanto os demais parâmetros μ, σ e δ variam.

Observa-se na Figura 2 que o valor de μ está de fato, ligado diretamente com a posição da curva de distribuição no eixo das abscissas decorrente do fato de ser o parâmetro de localização. Já considerando a Figura 3 nota-se que existe um maior espaçamento de dados conforme os valores de σ aumentam, ou seja, sigma influencia na dispersão dos dados. E por fim, na Figura 4 observa-se que caso $\delta = 1$ a distribuição tem formato unimodal enquanto que para valores de $\delta > 1$ formato bimodal.

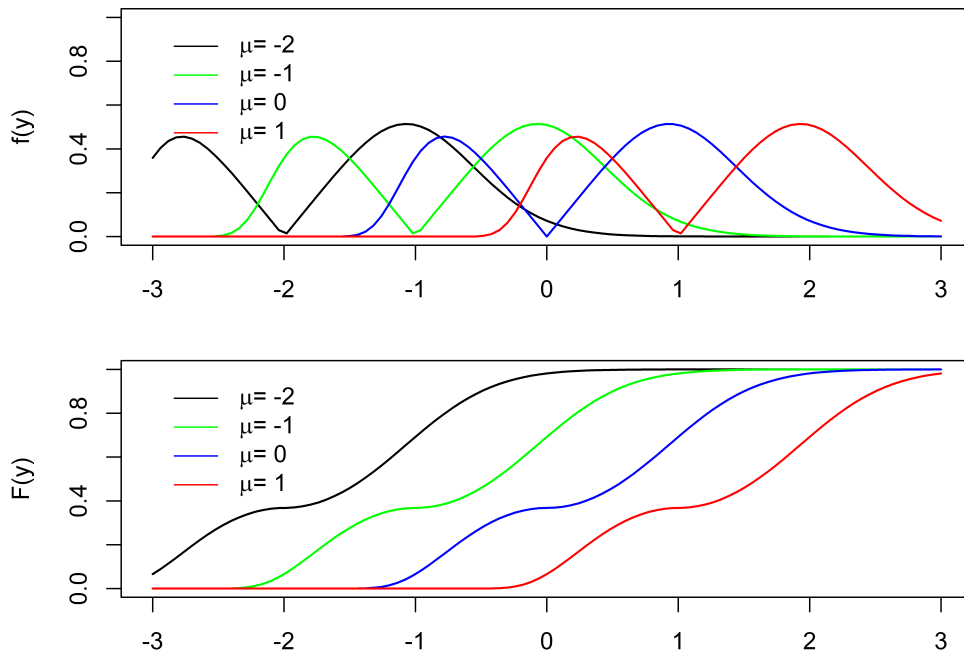


Figura 2: $Y \sim F_{BG_0, \mu, 1, 1}$ com μ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.

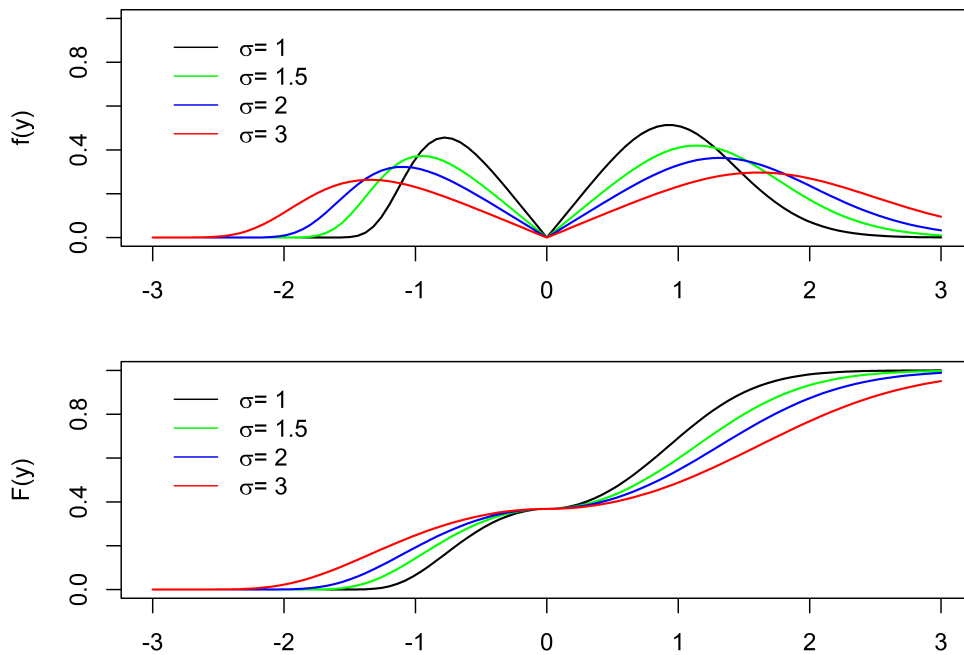


Figura 3: $Y \sim F_{BG_0, 0, \sigma, 1}$ com σ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.

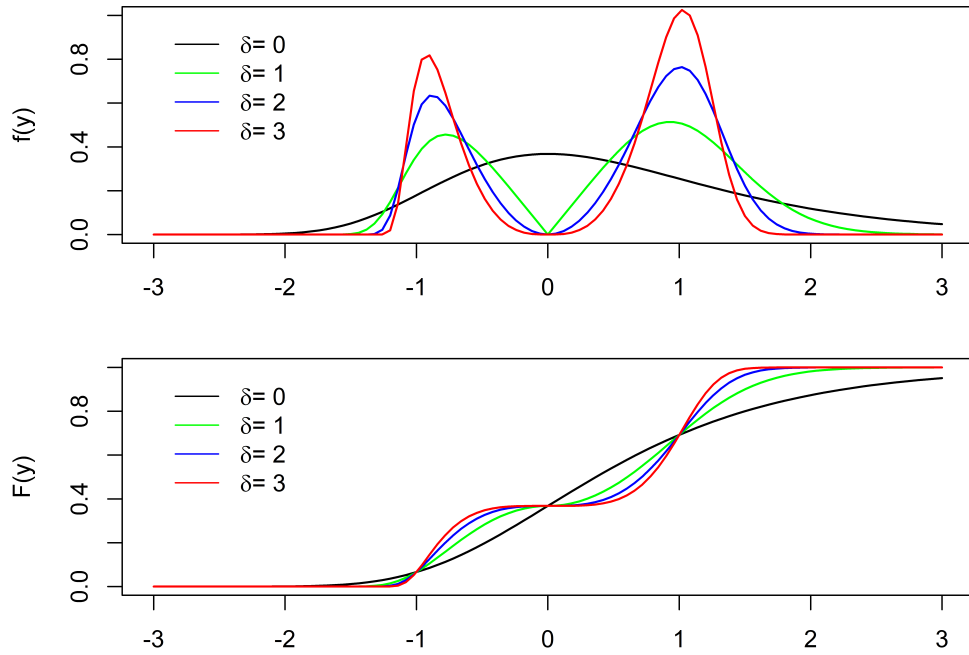


Figura 4: $Y \sim FBG_{0,0,1,\delta}$ com δ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.

Para o caso de $\xi \neq 0$ é preciso fazer uma análise prévia do impacto dos valores de ξ na forma das funções como está representado na Figura 5, no qual ξ varia enquanto $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e $\delta = 1$, pois como dito anteriormente para valores de $\xi \neq 0$ o suporte da distribuição BGEV não compreende toda a reta real. Fica claro ao observar a Figura 5, que o parâmetro ξ influencia na forma da distribuição BGEV.

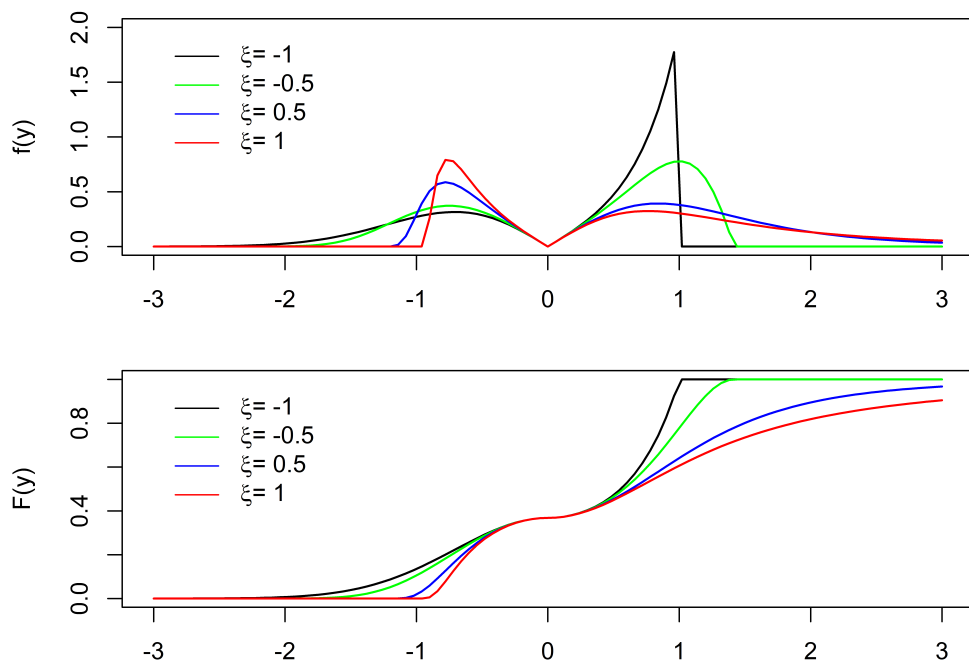


Figura 5: $Y \sim FBG_{\xi,0,1,1}$ com ξ variando. Gráfico superior FDP, gráfico inferior FDA.

Também é de interesse analisar os casos separadamente para $\xi < 0$ e $\xi > 0$, para diferentes valores de δ com o objetivo de observar o comportamento das funções quando os dois parâmetros de forma variam simultaneamente. Como demonstrado nas Figuras 6 e 7 que representam ξ negativo e positivo respectivamente. É interessante observar que para $\xi > 0$ as curva da distribuição BGEV parecem terminar com uma cauda mais pesada se em comparação com $\xi < 0$.

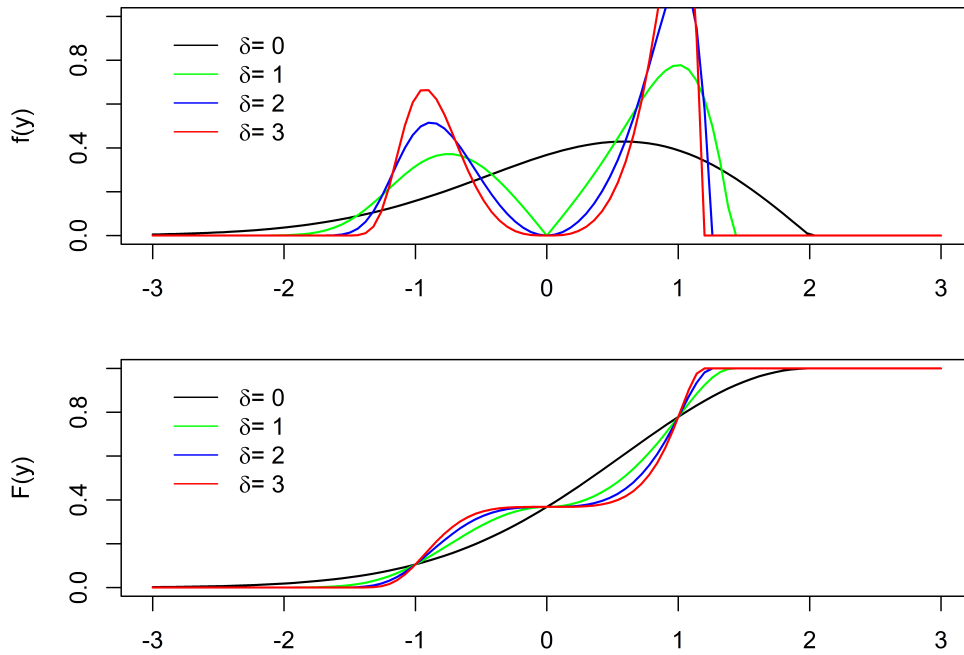


Figura 6: $Y \sim F_{BG-0.5,0,1,\delta}$ e δ variando. Gráfico superior da FDP. Gráfico inferior da FDA.

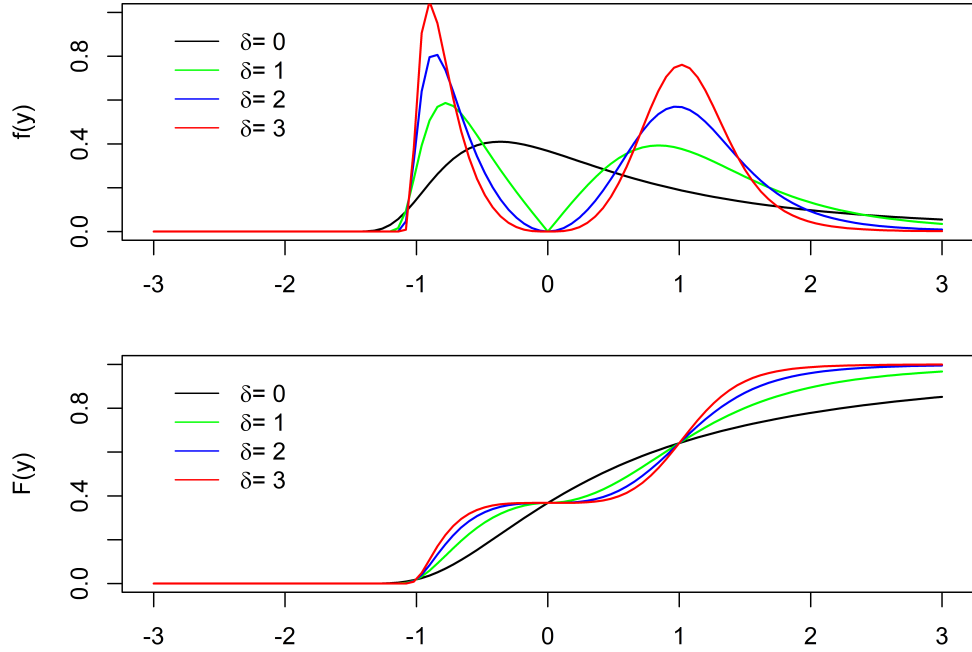


Figura 7: $Y \sim F_{BG_{0.5,0,1,\delta}}$ e δ variando. Gráfico superior da FDP. Gráfico inferior da FDA.

2.2.1 Quantis

Outra função associada a distribuição BGEV que será importante para este trabalho é a função quantil. A função quantil pode ser encontrada através da inversa da função de distribuição acumulada. Então, considere a função da distribuição BGEV é definida por

$$Q_{\xi,\mu,\sigma,\delta}(x) = F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}^{-1}(y) = T^{-1}(G^{-1}(y)),$$

em que T^{-1} é a função inversa da função de transformação definida em (2.2.2) e $G^{-1}(\cdot)$ é a função inversa da distribuição acumulada da distribuição GEV unimodal. Considerando $\xi = 0$ temos que

$$G^{-1}(y) = -\sigma \log(\log(y^{-1})), \xi = 0. \quad (2.2.7)$$

dessa forma, considerando (2.2.2) e (2.2.7), pode-se escrever a função quantil para a BGEV para $\xi = 0$ através de:

$$Q_{\xi,\mu,\sigma,\delta}(y) = \text{sign}(-\sigma \log(\log(y^{-1}))) | -\sigma \log(\log(y^{-1})) |^{\frac{1}{\delta+1}} + \mu. \quad (2.2.8)$$

De forma análoga considerando $\xi \neq 0$ tem-se que

$$G^{-1}(y) = \frac{\sigma}{\xi} \left[(-\log(y))^{-\xi} - 1 \right]. \quad (2.2.9)$$

Sendo assim, considerando as funções (2.2.9) e (2.2.2), para que a função quantil no caso de $\xi \neq 0$ pode ser descrita como

$$Q_{\xi, \mu, \sigma, \delta}(y) = \text{sinal} \left(\frac{\sigma}{\xi} [(-\log(y))^{-\xi} - 1] \right) \left| \frac{\sigma}{\xi} [(-\log(y))^{-\xi} - 1] \right|^{\frac{1}{\delta+1}} + \mu. \quad (2.2.10)$$

3 Algumas propriedades da distribuição BGEV

3.1 Momentos

Conforme Abramowitz, Stegun e Miller (1965), para todo número $a \in \mathbb{R}^+$, As funções gama, gama incompleta superior e gama incompleta inferior são definidas, respectivamente, por

$$\Gamma(a) := \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (3.1.1)$$

$$\Gamma(a, x) := \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (3.1.2)$$

e

$$\gamma(a, x) := \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (3.1.3)$$

Estas funções são algumas das ferramentas que serão utilizadas na seguinte proposição. Em todos os casos a é um parâmetro complexo, tal que a parte real de a é positiva. **Proposição 1.** Seja $X \sim F_{BG_{\xi, \mu, \sigma, \delta}}$. Então o k -ésimo momento inteiro de X é dado por

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{\frac{(k-j)(\delta+2)}{\delta+1}} \left(\frac{\sigma}{\xi} \right)^{\frac{k-j}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor}{i} (-1)^i \gamma \left(1 - \xi \left(\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor - i \right), 1 \right) \right] \\ &+ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{\sigma}{\xi} \right)^{\frac{k-j}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor}{i} (-1)^i \Gamma \left(1 - \xi \left(\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor - i \right), 1 \right) \right], \quad (3.1.4) \end{aligned}$$

para $\xi > 0$, sempre que $\xi < \frac{\delta+1}{k}$ e

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{\frac{(k-j)(\delta+2)}{\delta+1}} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{k-j}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor}{i} (-1)^i \Gamma\left(1 - \xi \left(\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor - i\right), 1\right) \right] \\ &+ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{k-j}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor} \binom{\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor}{i} (-1)^i \gamma\left(1 - \xi \left(\lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor - i\right), 1\right) \right], \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

para $\xi < 0$, sempre que $\xi < \frac{\delta+1}{k}$.

Prova. Por definição

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}(T_{\mu,\delta}(x)) \left(\frac{T_{\mu,\delta}(x)}{dx}\right) dx, \quad (3.1.6)$$

sendo $f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}$ como definida em (2.1.2), T como em (2.2.2), e $\frac{T}{dx}$ em (2.2.3). Ao substituir $y = T_{\mu,\delta}(x)$ em (3.1.6), os momentos são expressos por

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\text{sinal}(y)) |y|^{\frac{1}{\delta+1}} + \mu \right]^k f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}(y) dy. \quad (3.1.7)$$

Como $k \in \mathbb{Z}^+$, utiliza-se a fórmula do Binómio de Newton, então (3.1.7) é atualizada pela integral

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [\text{sinal}(y)]^{k-j} |y|^{\frac{k-j}{\delta+1}} f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}(y) dy \right] \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j (-1)^{\frac{(k-j)(\delta+2)}{\delta+1}} E\left(Y^{\frac{k-j}{\delta+1}} I_{[Y < 0]}\right) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j E\left(Y^{\frac{k-j}{\delta+1}} I_{[Y \geq 0]}\right), \end{aligned}$$

sendo $Y \sim F_{GEV_{\xi,0,\sigma}}$ e I_A é a função indicadora do conjunto A ; $I_A(\omega) = 1$ se $\omega \in A$ e $I_A(\omega) = 0$ caso contrário. Agora precisam-se analisar os casos $\xi > 0$ e $\xi < 0$.

Caso $\xi > 0$. Ao utilizar a expressão (2.1.2) em (3.1.8) e a substituição $t = \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}}$, para $r = \lfloor \frac{k-j}{\delta+1} \rfloor$, segue que

$$\begin{aligned} E(Y^k I_{[Y \geq 0]}) &= \int_0^{+\infty} y^r \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp\left\{-\left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sigma}{\xi} t^{-\xi} - \frac{\sigma}{\xi}\right)^r e^{-t} dt. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Em (3.1.8), novamente, utiliza-se o Binômio de Newton e obtêm-se

$$E(Y^k I_{[Y \geq 0]}) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^i \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^r \int_1^{+\infty} t^{-\xi(r-i)} e^{-t} dt. \quad (3.1.9)$$

Da mesma forma é obtido o k -ésimo momento de Y truncado na parte negativa

$$\begin{aligned} E(Y^k I_{[Y < 0]}) &= \int_{-\frac{\sigma}{\xi}}^0 y^r \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp \left\{ - \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\sigma}{\xi} t^{-\xi} - \frac{\sigma}{\xi}\right)^r e^{-t} dt \\ &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^i \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^r \int_0^1 t^{-\xi(r-i)} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

A função gama incompleta inferior (3.1.3) e gama incompleta superior (3.1.2) são utilizadas para representar as integrais de (3.1.9) e (3.1.10), respectivamente. Com isto, a prova de (3.1.4) segue ao substituir essas atualizações na equação (3.1.7). **Caso $\xi < 0$.** Repete-se o mesmo procedimento que para o caso $\xi > 0$ respeitando o suporte da densidade de $Y \sim F_{GEV_{\xi,0,\sigma}}$ que é dada por (2.1.2) para os valores $\{y : y \in (-\infty - \frac{\sigma}{\xi}]\}$.

Corolário 1. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,0}} = F_{\xi,\mu,\sigma}$. Então o k -ésimo momento inteiro de X é dado por:

$$E(X^k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{k-j} \Gamma(1 - \xi(k-j)). \quad (3.1.10)$$

Prova. De (3.1.8), quando $\delta = 0$, obtêm-se

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j E(Y^{k-j}) \\ &= E \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^j Y^{k-j} \right) \\ &= E(Y + \mu)^k, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

em que $Y + \mu \sim F_{\xi,\mu,\sigma}$, pois $Y \sim F_{xi,0,\sigma}$. A prova é finalizada com as expressões (3.1.9) e (3.1.10) e o fato que $\Gamma(x, s) + \gamma(x, s) = \Gamma(x)$.

Corolário 2. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$. Então, para $\xi > 0$, a esperança de X é dado por:

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1)^{\frac{\delta+2}{\delta+1}} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (-1)^i \gamma(1 - \xi(1-i), 1) \right] \\ &+ \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (-1)^i \Gamma(1 - \xi(1-i), 1) \right] \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

e para $\xi < 0$ a esperança de X é dado por:

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1)^{\frac{\delta+2}{\delta+1}} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (-1)^i \Gamma(1 - \xi(1-i), 1) \right] \\ &+ \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} (-1)^i \gamma(1 - \xi(1-i), 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

3.2 Função geratriz de momentos

Proposição 2. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$, $\xi = 0$. Então a função geratriz de momentos de X é dado por:

$$M_X(t) = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left[(-1)^{\frac{k(\delta+2)}{\delta+1}} E\left(Y^{\frac{k}{\delta+1}} I_{[Y < 0]}\right) + E\left(Y^{\frac{k}{\delta+1}} I_{[Y \geq 0]}\right) \right], \quad (3.2.1)$$

$Y \sim F_{\xi,0,\sigma}$, $\xi = 0$.

Prova. Por definição tem-se que

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \exp\{tx\} \exp\left\{-\frac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma} - \exp\left[-\frac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma}\right]\right\} dx. \quad (3.2.2)$$

Ao usar a substituição $y = T_{\mu,\delta}(x)$ em (3.2.2) e o fato que $x = \text{sn}g(\ln y^{-\sigma})|\ln y^{-\sigma}|^{\frac{1}{\delta+1}} + \mu$ obtem-se

$$M_X(t) = e^{\mu t} \int_0^{+\infty} \exp\left\{\text{sn}g(\ln y^{-\sigma})|\ln y^{-\sigma}|^{\frac{1}{\delta+1}} t\right\} \exp\{-y\} dy. \quad (3.2.3)$$

A nova substituição $s = \ln(y^{-\sigma})$ permite atualizar (3.2.3) por

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \operatorname{sgn}(s) |s|^{\frac{1}{\delta+1}} t \right\} \exp \left\{ -\frac{s}{\sigma} - \exp \left[-\frac{s}{\sigma} \right] \right\} dy. \quad (3.2.4)$$

Para finalizar a prova utiliza-se a representação em série da função exponencial. Assim (3.2.4) é re-escrita pela equação

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{\mu t} \sum_{k=0}^{-\infty} \frac{t^k}{k!} (-1)^{\frac{k(\delta+2)}{\delta+1}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma} s^{\frac{k}{\delta+1}} \exp \left\{ -\frac{s}{\sigma} - \exp \left[-\frac{s}{\sigma} \right] \right\} ds \\ &+ e^{\mu t} \sum_{k=0}^{-\infty} \frac{t^k}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma} s^{\frac{k}{\delta+1}} \exp \left\{ -\frac{s}{\sigma} - \exp \left[-\frac{s}{\sigma} \right] \right\} ds. \end{aligned}$$

Corolário 3. Seja $X \sim F_{BG_{\xi, \mu, \sigma, 0}} = F_{\xi, \mu, \sigma}$. Então a função geratriz de momentos de X é dada por:

$$M_X(t) = e^{\mu t} \Gamma(1 - \sigma t). \quad (3.2.5)$$

Prova. Quando $\delta = 0$ a expressão (3.2.1) se reduz a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E \left(Y^{\frac{k}{\delta+1}} \right) \\ &= e^{\mu t} E \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tY)^k}{k!} \right) \\ &= e^{\mu t} E \left(e^{tY} \right) \\ &= e^{\mu t} \Gamma(1 - \sigma t). \end{aligned}$$

Corolário 4. Seja $X \sim F_{BG_{\xi, \mu, \sigma, \delta}}$, com $\xi > 0$. Então, a esperança de X é dado por:

$$E(X) = \mu E \left(Y^{\frac{1}{\delta+1}} \right) + (-1)^{\frac{\delta+2}{\delta+1}} E \left(Y^{\frac{1}{\delta+1}} I_{[Y < 0]} \right) + E \left(Y^{\frac{1}{\delta+1}} I_{[Y \geq 0]} \right), \quad (3.2.6)$$

$Y \sim F_{\xi, 0, \sigma}$, $\xi = 0$.

Prova. A prova é direta ao avaliar a derivada de (3.2.1) em $t = 0$.

4 Modelo de regressão BGEV

Neste secção será apresentada o novo modelo de regressão baseado em uma reparametrização da distribuição BGEV.

4.1 Reparametrização e regressão

A modelagem de dados usando modelos de regressão é uma das abordagens mais amplamente utilizadas por pesquisadores em diversas áreas. Esses modelos permitem que os pesquisadores identifiquem covariáveis que influenciam o comportamento de uma variável de resposta. Por exemplo, modelos de regressão podem ser usados para explicar os salários dos executivos de uma empresa com base em fatores como experiência e gênero. No entanto, a maioria dos modelos de regressão é baseada em distribuições unimodais, que não conseguem acomodar dados que apresentam comportamento bimodal. Isso é particularmente comum em fenômenos aleatórios que produzem dados extremos, como extremos de temperatura.

De acordo com os resultados de Otiniano et al. (2023), a distribuição BGEV serve como um modelo natural da teoria dos valores extremos e acomoda efetivamente dados que apresentam dois modos. Nesta seção, apresentamos uma nova classe de modelos de regressão baseada na distribuição BGEV, especificamente projetada para acomodar dados que exibem bimodalidade. Essa nova classe de modelos de regressão é chamada de modelo de regressão BGEV, ou então, RBGEV.

Na formulação da distribuição BGEV; $Y \sim F_{BG}(\cdot; \xi, \mu, \sigma, \delta)$, μ é um parâmetro de localização. No entanto, μ não é a média nem qualquer outra característica direta de Y , e, portanto, não possui uma interpretação direta. Na modelagem de regressão, é mais comum modelar diretamente o parâmetro da média ou da mediana da distribuição. Assim, neste trabalho, introduzimos uma reparametrização baseada na mediana da distribuição BGEV.

Da função quantílica da distribuição BGEV em (2.2.10), obtemos

$$\mu = \begin{cases} q_\tau - \operatorname{sgn} \left(\frac{\sigma}{\xi} [(-\log(\tau))^{-\xi} - 1] \right) \left| \frac{\sigma}{\xi} [(-\log(\tau))^{-\xi} - 1] \right|^{1/(\delta+1)}, & \text{se } \xi \neq 0, \\ q_\tau - \operatorname{sgn} (-\log(-\log(\tau))) |-\sigma \log(-\log(\tau))|^{1/(\delta+1)}, & \text{se } \xi = 0. \end{cases}$$

em que $q_\tau = Q(\tau)$ representa o τ -ésimo quantil da distribuição BGEV. Note que se definirmos $\tau = 0,5$, q_τ corresponde para a mediana (m) de uma distribuição BGEV, que

possui como mediana $m = q_{0,5}$. Fixando $\tau = 0,5$ nós temos

$$\mu^* = \begin{cases} m - \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)}, & \xi \neq 0, \\ m - (c_2\sigma)^{1/(\delta+1)}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

em que $c_1 = -\log(0.5)$ e $c_2 = -\log(-\log(0.5))$ são constantes.

A ideia proposta aqui é substituir μ na FDA $F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(\cdot)$ por μ^* apresentado em (4.1.1), e reparametrizar a distribuição BGEV indexando pelos parâmetros ξ , m , σ , e δ , sendo que m denota da mediana. Essa abordagem resultará em um modelo mais simples e mais interpretável baseado na distribuição BGEV, com a estrutura de regressão atribuída ao parâmetro da mediana m .

A FDA reparametrizada da distribuição BGEV é dada por

$$F_{BG_{\xi,m,\sigma,\delta}}^*(y) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{T}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, & \xi \neq 0, \\ \exp \left\{ - \exp \left[-\frac{T}{\sigma} \right] \right\}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

em que

$$T = (y - \mu^*) |y - \mu^*|^\delta, \quad (4.1.3)$$

cujos o suporte é dado por (2.2.6) substituindo μ por μ^* . Denotamos por $Y \sim F_{BG}^*(\cdot; \xi, m, \sigma, \delta)$.

Note que μ^* não é mais um parâmetro que determina a distribuição BGEV. De agora em diante, μ^* é somente uma função que depende de ξ , m , σ , e δ , esses sim, são parâmetros. Além disso, nessa reparametrização, T em (4.1.3) depende de todos os parâmetros da distribuição BGEV, o que diferencia da parametrização original apresentada na Seção 2. A FDP da distribuição reparametrizada da BGEV é dada pela expressão (2.2.5) substituindo T pela expressão em (4.1.3).

Para estabelecer a estrutura de regressão, considere o seguinte. Seja Y_1, \dots, Y_n , são n variáveis aleatórias independentes representando n variáveis respostas, em que $Y_i \sim F_{BG}^*(\cdot; \xi, m_i, \sigma, \delta)$. O modelo é obtido assumido que a mediana de Y_i pode ser escrita como

$$g(m_i) = \eta_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j = \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad (4.1.4)$$

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top \in \mathbb{R}^p$ é um vetor de parâmetros de regressão desconhecidos, $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$ é um vetor de covariáveis de tamanho p ($p < n$), que são assumidos como conhecidos e fixos. Além disso, $g(\cdot)$ é uma função de ligação estritamente monótona e duas vezes diferenciável. Existem várias escolhas possíveis para a função de ligação $g(\cdot)$. Por exemplo, pode-se usar a função identidade, a função inversa e a função logarítmica definidas como $g(x) = x$, $g(x) = 1/x$, e $g(x) = \log(x)$, respectivamente. No modelo de regressão BGEV, a mediana é o único parâmetro que pode variar com as observações. Portanto, os parâmetros ξ , σ , e δ são constantes desconhecidas uma vez que não atribuímos estruturas de regressão a eles.

4.2 Inferência, diagnósticos e seleção de modelo.

O vetor de parâmetros desconhecidos para o modelo de regressão BGEV é representado como $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \xi, \sigma, \delta)^\top \in \mathbb{R}^{p+3}$ quando $\xi \neq 0$ e como $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \sigma, \delta)^\top \in \mathbb{R}^{p+2}$ quando $\xi = 0$. Portanto, $\boldsymbol{\theta}$ deve ser estimado. Seja k o número de parâmetros no modelo. O procedimento de inferência adotado aqui será baseado na estimativa de máxima verossimilhança. A função de log-verossimilhança baseada em uma amostra de n observações independentes é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.2.1)$$

em que $\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = \log(f_{BG_{\xi, m_i, \sigma, \delta}}^*(y_i))$ com $f_{BG_{\xi, m_i, \sigma, \delta}}^*(\cdot)$ denotando a FDP da distribuição BGEV reparametrizada. O estimador de máxima verossimilhança (EMV) é obtido maximizando a função de log-verossimilhança em n (4.2.1) com respeito a $\boldsymbol{\theta}$. O EMV para $\boldsymbol{\theta}$ será denotado por $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

A contribuição da i -ésima observação na função de verossimilhança é dada por

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} -\log(\sigma) + \log(\delta + 1) + \delta \log |y_i - \mu_i^*| - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta}), & \xi \neq 0, \\ -\log(\sigma) + \log(\delta + 1) + \delta \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{T_i}{\sigma} - e^{-T_i/\sigma}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

em que

$$\Psi_i(\boldsymbol{\theta}) = 1 + \frac{\xi T_i}{\sigma}, \quad T_i = (y_i - \mu_i^*) |y_i - \mu_i^*|^\delta.$$

A função score, obtida pela diferenciação da função de log-verossimilhança apre-

sentada em (4.2.1) com respeito a $\boldsymbol{\theta}$ (observe o apêndice A), é dada por

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} (\mathbf{U}_\beta^\top, U_\xi, U_\sigma, U_\delta)^\top, & \text{if } \xi \neq 0, \\ (\mathbf{U}_\beta^\top, U_\sigma, U_\delta)^\top, & \text{if } \xi = 0, \end{cases}$$

com

$$\mathbf{U}_\beta = X^\top H \mathbf{a},$$

$$U_\xi = \mathbf{b}^\top \mathbf{1}_n,$$

$$U_\sigma = \mathbf{d}^\top \mathbf{1}_n,$$

$$U_\delta = \mathbf{e}^\top \mathbf{1}_n,$$

em que X é uma matriz $n \times p$ a qual i -ésima linha é \mathbf{X}_i^\top , $H = \text{diag}\{h_1, \dots, h_n\}$ é uma matriz diagonal $n \times n$ com $h_i = 1/g'(m_i)$, e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^\top$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)^\top$, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^\top$, $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$ são n vetores dimensionais com

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\sigma(y_i - \mu_i^*)} [(\delta + 1)T_i\Omega_i(\boldsymbol{\theta}) - \delta\sigma]; \\ b_i &= \frac{a_i}{\xi(\delta + 1)}(m_i - \mu_i^*) \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right) + \frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) [1 - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})] - \frac{T_i\Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\xi\sigma}; \\ d_i &= -\frac{1}{\sigma} + \frac{\delta}{\sigma(\delta + 1)} \frac{(m_i - \mu_i^*)}{(y_i - \mu_i^*)} + \frac{1}{\sigma^2} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) (y_i - m_i) |y_i - \mu_i^*|^\delta; \\ e_i &= \log |y_i - \mu_i^*| \left(1 - \frac{T_i\Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right) + \frac{1}{\delta + 1} [1 + a_i(m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*)]; \\ \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{cases} \Psi_i^{-1}(\boldsymbol{\theta}) [1 + \xi - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})], & \text{se } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-T_i/\sigma}, & \text{se } \xi = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

O EMV de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido resolvendo o sistema $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$, em que $\mathbf{0}$ representa o vetor nulo em \mathbb{R}^k . No entanto, esse sistema não pode ser resolvido analiticamente, e métodos numéricos iterativos devem ser empregados para obter uma solução aproximada. Neste trabalho, usamos o método de Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) (NOCEDAL; WRIGHT, 1999).

Sob as condições de regularidade habituais para a estimativa de máxima verossimilhança, quando o tamanho da amostra é grande,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{\text{a}}{\sim} N_k(\boldsymbol{\theta}, J^{-1}(\boldsymbol{\theta})),$$

em que $\overset{a}{\sim}$ denota distribuição aproximada, $N_k(\boldsymbol{\theta}, J^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$ denota a distribuição normal de k dimensões com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de variância-covariância $J^{-1}(\boldsymbol{\theta})$. A matriz $J^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ é também a inversa da matriz de informação observada. Neste trabalho, a matriz de informação observada é obtida numericamente.

Considere o interesse em testar $H_0: \theta_j = \theta_j^0$ contra $H_1: \theta_j \neq \theta_j^0$, onde θ_j^0 é um valor específico para o parâmetro desconhecido θ_j , $j = 1, \dots, k$. Sob H_0 ,

$$z_j = \frac{\hat{\theta}_j - \theta_j^0}{\text{se}(\hat{\theta}_j)} \overset{a}{\sim} N(0, 1),$$

em que $\hat{\theta}_j$ é o EMV de θ_j , e $\text{se}(\hat{\theta}_j) = \sqrt{J_{jj}}$ é o erro padrão assintótico de $\hat{\theta}_j$, com J_{jj} sendo o j -ésimo elemento da diagonal de $J^{-1}(\boldsymbol{\theta})$.

A estatística do teste z_j é a raiz quadrada da estatística de Wald (Wald, 1943), que é amplamente utilizada em aplicações práticas com modelos de regressão. Na Seção 6, este teste será empregado para avaliar a significância dos parâmetros no modelo de regressão BGEV, com $\theta_j^0 = 0$.

Para avaliar a adequação do ajuste sob modelos de regressão BGEV, os resíduos introduzidos por Dunn e Smyth (1996) podem ser empregados. O resíduo quantílico r_i , $i = 1, \dots, n$, é dado por

$$r_i = \begin{cases} \Phi^{-1}(F_{BG_{\hat{\xi}, \hat{m}_i, \hat{\sigma}, \hat{\delta}}}^*(y_i)), & \xi \neq 0, \\ \Phi^{-1}(F_{BG_{0, \hat{m}_i, \hat{\sigma}, \hat{\delta}}}^*(y_i)), & \xi = 0, \end{cases}$$

em que $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a PDF da distribuição normal padrão. Se o modelo de regressão BGEV estiver bem ajustado, r_i é aproximadamente distribuído como uma distribuição normal padrão. Para avaliar a distribuição empírica dos resíduos, uma prática comum é utilizar gráficos de probabilidade normal dos resíduos com envelope simulado (Pereira (2019); Espinheira e Silva (2020); Tsuyuguchi et al., 2020). Esta é a abordagem que adotaremos no Capítulo 6 para avaliar a adequação do ajuste dos modelos de regressão BGEV.

Para a seleção do modelo, utilizaremos o Critério de Informação de Akaike (AIC) (Akaike (1974)) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC) (Schwarz (1978)), definidos respectivamente por

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2k, \quad \text{BIC} = -2\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + k \log(n).$$

Dado um conjunto de modelos candidatos para os dados, o modelo de regressão BGEV preferido é aquele com os menores valores de AIC e BIC.

5 Simulação

Para avaliar o desempenho das estimativas de máxima verossimilhança do modelo de regressão BGEV, apresentado no capítulo anterior, foram realizadas simulações de Monte Carlo para vários cenários.

Os tamanhos de amostra considerados são $n = 50, 100, 500$. Para todos os cenários, empregamos a função de ligação identidade na estrutura de regressão mediana (4.1.4). Os modelos incluem interceptos, ou seja, $x_{i1} = 1$, para todos $i = 1, 2, \dots, n$, e as outras covariáveis são retiradas aleatoriamente de uma distribuição uniforme padrão e de uma distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso 0.4. As covariáveis foram mantidas constantes ao longo das amostras simuladas.

Todos os procedimentos computacionais foram realizados no ambiente do R Project, versão 4.33 ((R Core Team, 2022)).

Com 10000 repetições de Monte Carlo, foram obtidas as estimativas médias de θ_t , $\hat{\theta}_t$, para $t = 1, \dots, k, \dots, 10000$ bem como o viés $V(\hat{\theta}_t)$ e a raiz quadrada do erro quadrático médio $RMSE(\hat{\theta}_t)$, definidos, respectivamente, por

$$V(\hat{\theta}_t) = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} (\hat{\theta}_t^j - \theta_t),$$

$$RMSE(\hat{\theta}_t) = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} (\hat{\theta}_t^j - \theta_t)^2},$$

em que $\hat{\theta}_t^j$ é o EMV do t -ésimo elemento do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ na j -ésima repetição de Monte Carlo, com $j \in 1, \dots, 10000$. Além disso, também obtemos a média do erro padrão assintótico (ASE) para cada θ_t , definida por

$$ASE(\hat{\theta}_t) = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} se(\hat{\theta}_t^j),$$

em que $se(\hat{\theta}_t^j)$ é o erro padrão assintótico de t -ésimo elemento de $\boldsymbol{\theta}$ na j -ésima replicação.

Diferentes configurações de parâmetros foram pensadas como descritas abaixo.

Cenário 1: regressão BGEV com ξ igual a zero.

Os valores dos parâmetros foram definidos como $\beta_1 = 1.2, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.5$, que produzem $m_i \in (1.20, 4.68)$ com $mediana(m) \approx 2.8$, $\xi = 0$, $\sigma = 1.0$, e $\delta = 0.5$.

Cenário 2: Regressão BGEV com ξ igual a zero.

Os valores dos parâmetros foram definidos como $\beta_1 = 4.0, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 3.0$, que produzem $m_i \in (4.00, 8.99)$ com $\text{mediana}(m) \approx 5.6$, $\xi = 0$, $\sigma = 1.0$, e $\delta = 1.0$.

Cenário 3: Regressão BGEV com ξ positivo.

Os valores dos parâmetros foram definidos como $\beta_1 = 1.2, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.5$, que produzem $m_i \in (-4.65, 7.77)$ com $\text{mediana}(m) \approx 2.3$, $\xi = 0.25$, $\sigma = 1.0$, e $\delta = 0.5$.

Cenário 4: Regressão BGEV com ξ negativo.

Os valores dos parâmetros foram definidos como $\beta_1 = 4.0, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 3.0$, que produzem $m_i \in (4.00, 8.99)$ com $\text{mediana}(m) \approx 5.6$, $\xi = -0.25$, $\sigma = 1.0$, e $\delta = 1.0$.

Cenário 5: regressão BGEV com ξ negativo.

Os valores dos parâmetros foram definidos como $\beta_1 = 1.2, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 1.5$, que produzem $m_i \in (-4.025, 6.957)$ com $\text{mediana}(m) \approx 1.67$, $\xi = -0.25$, $\sigma = 1.0$, e $\delta = 0.5$.

Cenário 6: Regressão BGEV com ξ positivo.

Os valores dos parâmetros foram definidos como $\beta_1 = 4.0, \beta_2 = 2.0, \beta_3 = 3.0$, que produzem $m_i \in (4.00, 8.99)$ com $\text{mediana}(m) \approx 5.6$, $\xi = 0.25$, $\sigma = 1.0$, e $\delta = 1.0$.

Note que os cenários 1, 3 e 5 são particularmente similares entre si tendo como única diferença o valor de ξ , enquanto o cenário 1 defini valor de $\xi = 0$ enquanto que para o cenário 3 $\xi = 0.25$ com valor positivo e quanto ao cenário 5 $\xi = -0.25$ com valor negativo. Além disso, apenas o cenário 1 obteve apenas valores positivos para medianas m , enquanto os cenários 3 e 5 admitem valores positivos e negativos para mediana. De forma paralela, os cenários 2, 4 e 6 são similares entre si sendo que o único parâmetro que diferente entre os casos é o ξ . No cenário 2 é definido $\xi = 0$, já no cenário 4 $\xi = -0.25$ e no caso 6 $\xi = 0.25$. Diferente do que ocorre nos cenários 1, 3 e 5, valores diferentes de ξ não alteraram a amplitude de medianas possíveis para os cenários 2, 4 e 6.

Tabela 1: Viés, RMSE e ASE sob os Cenários 1, 3 e 5

Scenario 1									
<i>parâmetros</i>	$n = 50$			$n = 100$			$n = 500$		
	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE
β_1	-0.048	0.273	0.136	-0.024	0.192	0.090	-0.029	0.098	0.035
β_2	0.047	0.376	0.184	0.055	0.283	0.126	0.044	0.147	0.046
β_3	0.038	0.236	0.119	0.036	0.183	0.081	0.018	0.086	0.028
σ	-0.025	0.137	0.117	-0.005	0.092	0.082	0.000	0.040	0.036
δ	0.047	0.219	0.177	0.015	0.143	0.122	-0.004	0.060	0.053

Scenario 3									
<i>parâmetros</i>	$n = 50$			$n = 100$			$n = 500$		
	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE
β_1	-0.066	0.239	0.095	-0.044	0.185	0.066	0.013	0.079	0.027
β_2	0.003	0.121	0.049	0.006	0.108	0.041	0.001	0.042	0.013
β_3	0.018	0.274	0.122	0.034	0.185	0.074	0.022	0.089	0.027
ξ	-0.086	0.236	0.151	-0.033	0.130	0.087	-0.001	0.043	0.030
σ	-0.032	0.170	0.123	-0.014	0.103	0.085	-0.001	0.039	0.036
δ	0.117	0.311	0.234	0.028	0.182	0.148	-0.003	0.073	0.061

Cenário 5									
<i>parâmetros</i>	$n = 50$			$n = 100$			$n = 500$		
	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE
β_1	-0.035	0.196	0.104	-0.024	0.150	0.071	0.013	0.079	0.027
β_2	0.003	0.107	0.049	0.002	0.076	0.037	0.001	0.042	0.013
β_3	0.036	0.247	0.119	0.036	0.160	0.076	0.022	0.089	0.027
ξ	-0.049	0.220	0.168	-0.033	0.130	0.087	-0.001	0.043	0.030
σ	-0.038	0.159	0.121	-0.014	0.103	0.085	-0.001	0.039	0.036
δ	0.135	0.330	0.229	0.028	0.182	0.148	-0.003	0.073	0.061

Os resultados das simulações dos para os Cenários 1,3 e 5 estão apresentados na Tabela 1 e pode-se observar que tal qual o esperado o módulo do viés diminui conforme o tamanho de amostra n aumenta. Também é possível notar que o erro quadrático médio diminui para todos os parâmetros conforme o tamanho de amostra aumenta e que o mesmo ocorre para o erro padrão assintótico. Esses resultados indicam a consistência e a eficiência assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança para todos os cenários considerados.

Tabela 2: Viés, RMSE e ASE sob os Cenários 2, 4 e 6

Scenario 2									
parâmetros	$n = 50$			$n = 100$			$n = 500$		
	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE
β_1	-0.035	0.225	0.116	-0.019	0.147	0.083	-0.007	0.060	0.036
β_2	0.033	0.288	0.151	0.032	0.211	0.115	0.010	0.082	0.048
β_3	0.022	0.176	0.098	0.015	0.124	0.070	0.003	0.050	0.029
σ	-0.021	0.136	0.118	-0.007	0.089	0.083	-0.001	0.038	0.036
δ	0.048	0.315	0.235	0.023	0.198	0.163	0.003	0.078	0.071

Scenario 4									
parâmetros	$n = 50$			$n = 100$			$n = 500$		
	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE
β_1	-0.060	0.241	0.119	-0.050	0.165	0.084	-0.036	0.070	0.037
β_2	0.025	0.309	0.144	0.030	0.215	0.113	0.013	0.079	0.047
β_3	0.017	0.188	0.094	0.013	0.120	0.068	0.004	0.045	0.027
ξ	-0.053	0.264	0.185	-0.021	0.140	0.112	-0.003	0.052	0.044
σ	-0.039	0.161	0.126	-0.016	0.104	0.086	-0.002	0.043	0.038
δ	0.115	0.452	0.299	0.048	0.256	0.195	0.008	0.090	0.082

Scenario 6									
parâmetros	$n = 50$			$n = 100$			$n = 500$		
	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE	Viés	RMSE	ASE
β_1	-0.049	0.261	0.111	-0.022	0.183	0.078	0.013	0.073	0.033
β_2	0.023	0.303	0.1423	0.026	0.225	0.111	0.019	0.091	0.045
β_3	0.011	0.199	0.093	0.014	0.135	0.064	0.006	0.055	0.027
ξ	-0.040	0.264	0.158	-0.013	0.124	0.090	0.001	0.042	0.032
σ	-0.028	0.155	0.126	-0.010	0.096	0.085	-0.001	0.037	0.036
δ	0.060	0.420	0.294	0.017	0.264	0.193	-0.001	0.098	0.082

Nota-se, na Tabela 2, que o viés, o erro quadrático médio e o erro padrão assintótico diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta. Esses resultados indicam a eficiência e consistência dos estimadores de máxima verossimilhança nos casos apresentados. Além disso, não foi possível identificar nenhum padrão para o viés nos casos em que $\xi = 0$, $\xi > 0$ e $\xi < 0$.

A Figura 8 ilustra a convergência do estimador de máxima verossimilhança. Observa-se que as estimativas dos parâmetros, obtidas por meio do EMV no Cenário 6, estão concentradas em torno dos valores verdadeiros dos parâmetros. Adicionalmente, verifica-se que a variabilidade das estimativas diminui à medida que o tamanho da amostra aumenta.

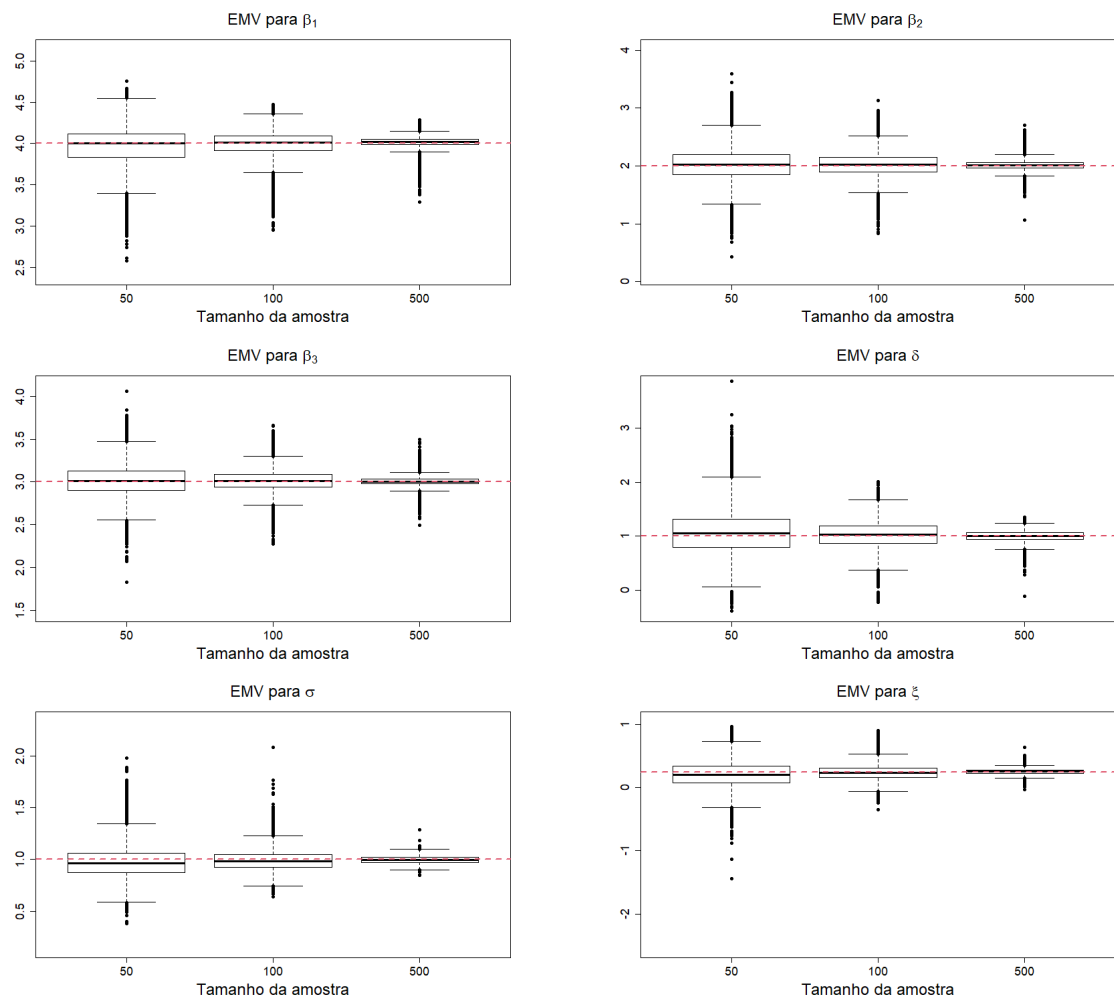


Figura 8: Boxplots dos parâmetros estimados sob o Cenário 6. A linha tracejada vermelha representa o verdadeiro valor do parâmetro

6 Aplicação

Nesta seção, utilizamos dados climáticos de uma região do Brasil para demonstrar a aplicabilidade do modelo (4.1.2). Como mencionado anteriormente, uma das principais áreas de aplicação da teoria dos valores extremos é a climatologia. Esses dados são fundamentais para o monitoramento de biomas, a produção agrícola e o estudo das mudanças climáticas — temas que, atualmente, ocupam um lugar de destaque na grande mídia.

O Brasil, conhecido por sua vasta diversidade ecológica e por ser um dos maiores exportadores agrícolas do mundo, desperta grande interesse no monitoramento climático de suas diversas regiões. Neste capítulo, trabalhamos com os dados de Goiânia (GO).

Segundo o portal da Prefeitura de Goiânia (<https://www.goiania.go.gov.br/>), Goiânia é um município brasileiro e a capital do estado de Goiás. A cidade está localizada a 209 km de Brasília, a capital do Brasil, no Planalto Central, e possui vegetação de cerrado, um dos biomas mais devastados do país. Goiânia e sua região metropolitana fazem parte de uma das áreas de Goiás com menor preservação de sua vegetação original.

6.1 Descrição dos dados

O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), vinculado ao Ministério da Agricultura e Pecuária do Brasil, desempenha um papel crucial nesse processo, sendo responsável pela criação e manutenção de bancos de dados meteorológicos alimentados por estações automáticas espalhadas por todo o país.

Os dados utilizados nesta seção são provenientes da estação automática A002, localizada em Goiânia (GO). Eles estão disponíveis gratuitamente no site do INMET (<https://portal.inmet.gov.br/>) e correspondem ao período de 2011 a 2022.

Do total de 19 variáveis que compõem o banco de dados, neste trabalho utilizamos 4. São elas:

- **TEMPERATURA DO PONTO DE ORVALHO (TO):** O ponto de orvalho é definido como a temperatura até a qual o ar (ou gás) deve ser resfriado para que a condensação de água se inicie, ou seja, para que o ar fique saturado de vapor de água. É medida em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$).
- **UMIDADE RELATIVA DO AR (U):** Medida de vapor de água contida na atmosfera, medida de umidade relativa do ar média ocorrida na última hora antes de cada mensagem de dados. É calculada por porcentagem de vapor de água na atmosfera;

- **PRESSÃO ATMOSFÉRICA (PA):** Medida de pressão atmosférica média que foi da última hora antes da mensagem de dados. É medida em milibares (mb);
- **VELOCIDADE DO VENTO RAJADA MÁXIMA (VVR):** Medida máxima capturada da velocidade do vento na última hora. É medida por metros por segundo (m/s);

Além dessas 4 variáveis, consideramos a variável binária ESTAÇÕES (E). A criação dessa variável se justifica pelas características do clima de Goiânia. Segundo o INMET, Goiânia tem um clima tropical úmido, com duas estações bem definidas: seca e úmida. A estação chuvosa (1) ocorre de outubro a abril, e a estação seca (0) ocorre de maio a setembro.

De todos os eventos climáticos extremos que vêm acontecendo no mundo, a ESTIAGEM é o que mais vem castigando a população de Goiânia. Segundo notícias de sites como Agrolink (23/09/2024), Sociedade Nacional da Agricultura (23/09/2024) e Edição Brasil (04/10/2024), a ESTIAGEM prolongada em Goiás tem causado sérios impactos na produção agrícola em 2024. O fenômeno climático La Niña, que se intensificou neste ano, agravou a escassez de chuvas e aumentou as temperaturas, afetando cultivos essenciais como soja, milho e hortaliças. A pecuária também sofre com a degradação das pastagens e a necessidade de suplementação alimentar, o que eleva os custos de produção.

Das quatro variáveis climáticas citadas acima, A temperatura mínima do ponto de orvalho (TO) e umidade mínima (U) são as variáveis que permitem explicar melhor a estiagem e sua relação com a produção agrícola, Changnon, Sandstrom e Schaffer (2003).

A temperatura do ponto de orvalho está intimamente relacionada à umidade do ar refletindo a quantidade de vapor d'água presente na atmosfera (Talaia e Vigário (2016), Junior (2011)). Quanto maior a umidade relativa do ar, mais alto é o ponto de orvalho, pois há mais vapor d'água disponível para condensar. Em contrapartida, quando o ar é mais seco, o ponto de orvalho é mais baixo, indicando que a quantidade de vapor d'água é menor e a condensação ocorre a uma temperatura mais baixa. Esse cenário favorece a rápida evaporação de umidade das superfícies e da vegetação, tornando a biomassa mais suscetível a ignição e facilitando a propagação de incêndios.

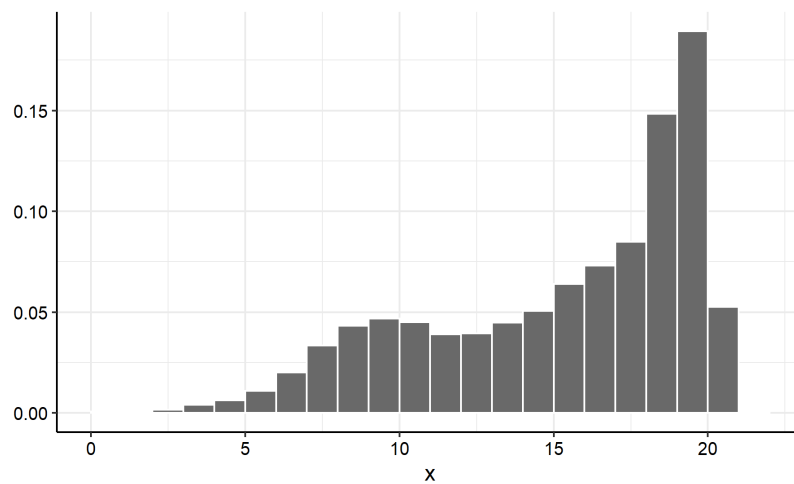
Por essa razão, o modelo de regressão BGEV foi aplicado aos valores mínimos de essas duas variáveis. Na primeira aplicação a TO é considerada a variável resposta e as variáveis U, E, P, VVR consideradas como covariáveis, já na segunda aplicação a variável resposta é a U e as variáveis TO, P, VVR consideradas como covariáveis.

6.2 Ajuste dos dados extremos iid do PO e U

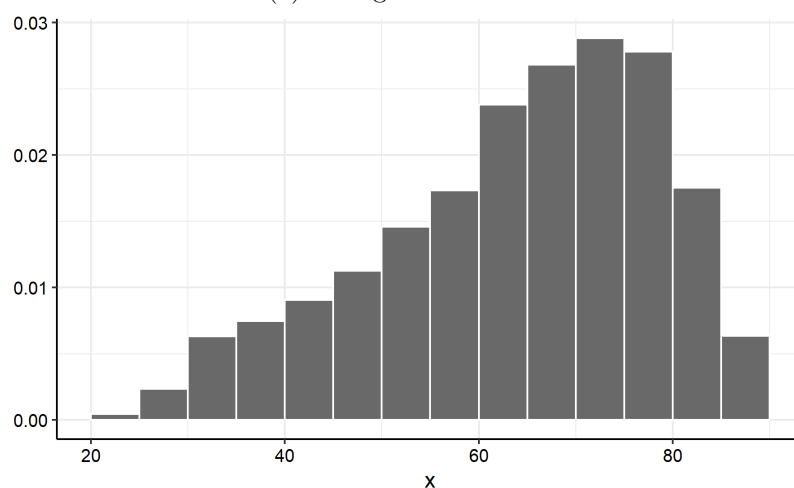
Nesta seção modelamos os dados da TO e U com a distribuição BGEV. Desconsideramos a dependência de TO e U com as variáveis E, P, e VVR.

Tabela 3: Estimativas e erro padrão para TO e U

	TO	U
Média	15.27	64.00
Desvio Padrão	4.35	14.54
Mediana	16.72	66,56
max	21.31	91.12
min	0.53	21.83



(a) Histograma de TO



(b) Histograma de U

Figura 9: Histogramas dos dados diários

Como os dados originais apresentam dependência temporal, primeiro obtemos

subamostras de valores mínimos de blocos de tamanho N de tal forma que os valores dessas subamostras são iid, para cada conjunto de dados.

Para obter cada subamostra de valores mínimos independentes a partir dos dados originais, utilizamos a técnica do bloco mínimo (Jondeau e Rockinger (1999)) combinado com o teste de Ljung-Box de tal forma que a a um nível de 5% os valores de cada subamostra de tamanho $N = 60$ dias são independentes.

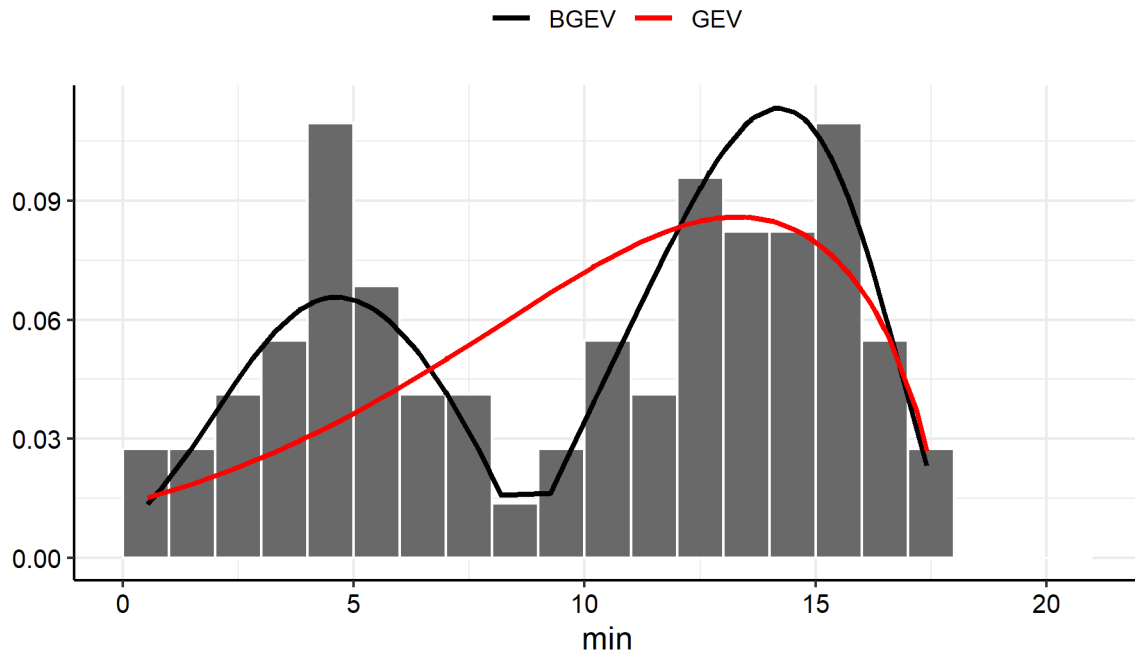
Não tem referência ao pacote BGEV. Com o uso dos pacotes EVD (Stephenson (2002)), obtivemos as estimativas de máxima verossimilhança para os as duas subamostras de mínimos da GEV, enquanto os valores da BGEV foram calculados utilizando as fórmulas apresentadas na Seção 4 O resultados as estimativas, bem como seu erro padrão, estão na Tabela 4.

Tabela 4: Estimativas e erro padrão para TO e U

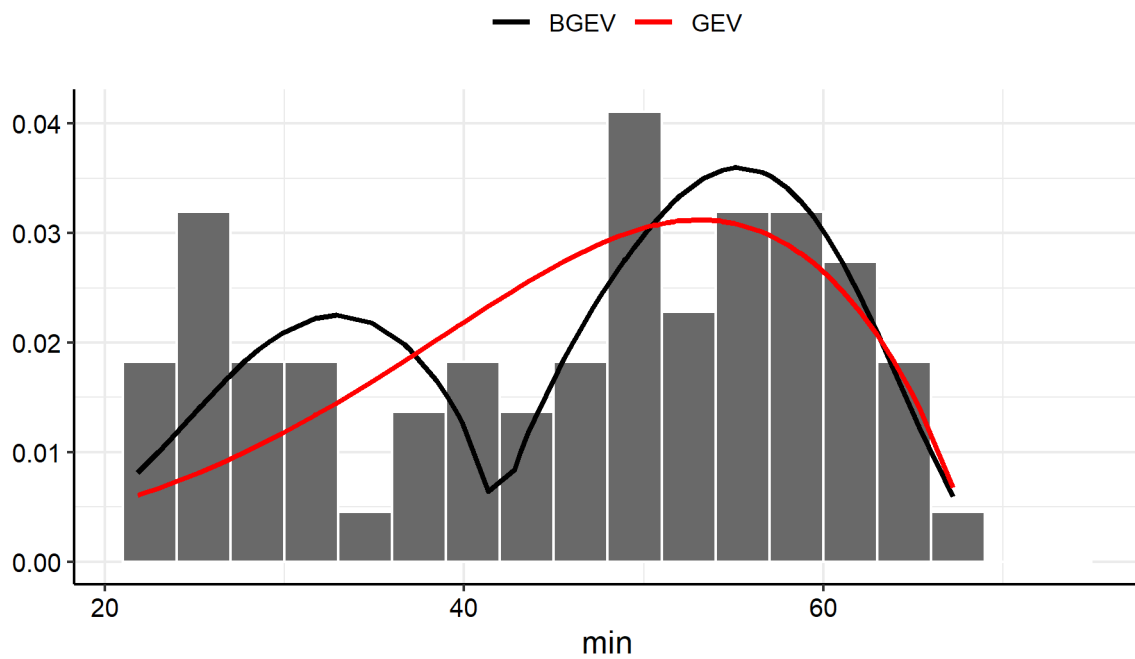
	BGEV		GEV	
	Estimativas	EP	Estimativas	EP
$\hat{\xi}$	-038	0.09	-0.65	0.9
$\hat{\mu}$	8.72	0.23	0.90	0.72
$\hat{\sigma}$	25.10	9.49	5.80	0.63
$\hat{\delta}$	0.86	0.20	-	-
$\hat{\xi}$	-0.37	0.09	-0.58	0.08
$\hat{\mu}$	41.88	0.49	43.07	1.85
$\hat{\sigma}$	64.31	32.92	14.66	1.53
$\hat{\delta}$	0.54	0.18	-	-

Na Tabela 4 são apresentados as estimativas dos parâmetros da densidade ajustada para o modelo BGEV e para a GEV respectivamente para o caso de TO na parte superior da tabela. Já na Figura 10a está apresentado o histograma da temperatura do orvalho média diária a direita e o histograma da temperatura do orvalho em blocos mínimos de tamanho 60 a esquerda com as curvas de densidade do modelo BGEV e modelo GEV. Nota-se, portanto, a partir da Figura 10a que as médias diárias não apresentam um comportamento bimodal claro, porém uma vez retirados os blocos mínimos de tamanho 60 é evidente a bimodalidade. Além disso, ao comparar as curvas ajustadas das distribuições GEV e BGEV, nota-se que o modelo BGEV é capaz de acomodar para duas modas, enquanto o modelo GEV é limitada a unimodalidade.

Na Tabela 4 está apresentado, respectivamente, as estimativas do ajuste de densidade do modelo BGEV e GEV para dados de umidade relativa em blocos mínimos de tamanho 60 na parte inferior da tabela. Já na Figura 10b está representado o histograma da média diária da umidade relativa do ar a direita e a esquerda está o histograma da umidade relativa do ar em blocos mínimos de tamanho 60 sobreposta pelas curvas de



(a) Histograma comparativo entre GEV e BGEV TO



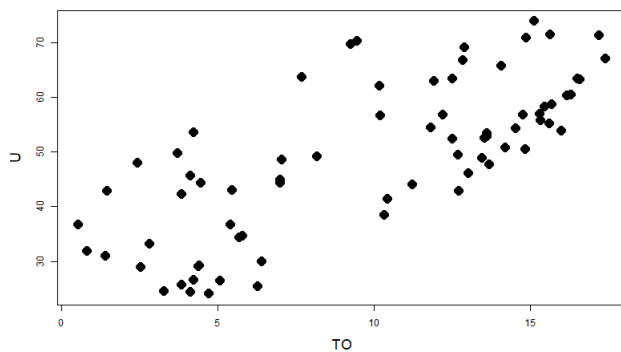
(b) Histograma comparativo entre GEV e BGEV U

Figura 10: Comparativos entre GEV e BGEV

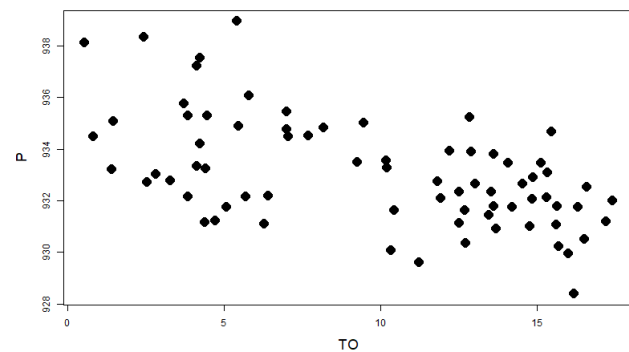
densidade ajustas pelo modelo BGEV e modelo GEV. Considerando a Figura 10b, nota-se novamente que a umidade relativa do ar não apresenta um comportamento bimodal quando se trata das médias diárias. Entretanto, se aplica os blocos mínimos de tamanho 60 a bimodalidade é evidente, novamente, nota-se que existe diferença nas curvas ajustadas para a distribuição BGEV e distribuição GEV, sendo que a distribuição GEV não é capaz de acomodar a bimodalidade dos dados.

6.3 Avaliação pelo modelo de regressão BGEV

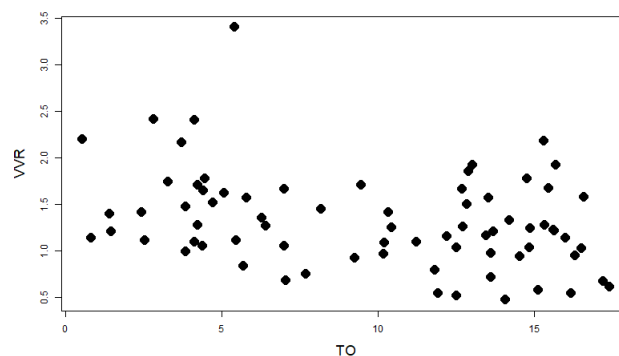
Conforme foi mostrado na seção anterior, a os valores mínimos da temperatura no ponto de orvalho (TO) e os valores mínimos da umidade relativa do ar (U) tiveram um bom ajuste com a distribuição BGEV. Nesta seção, utilizamos o modelo de regressão BGEV para relatar como a mediana dessas variáveis resposta é afetada pelas variáveis explicativas (covariáveis) estação (E), Pressão (P), e velocidade do vento na rajada (VVR).



(a) Temperatura do ponto do orvalho vs Umidade



(b) Temperatura do ponto do orvalho vs Pressão



(c) Temperatura do ponto do orvalho vs Velocidade do vento rajada

Figura 11: Gráfico de dispersão das variáveis explicativas

6.3.1 Temperatura do ponto do orvalho

Sejam Y_1, \dots, Y_n variáveis aleatórias independentes correspondentes à temperatura mínima do ponto do orvalho, em que $Y_i \sim F_{\text{BG}}^*(\cdot; \xi, m_i, \sigma, \delta)$, definida em (4.1.2).

Avaliamos o melhor ajuste dos seguintes modelos encaixados:

- Modelo 1 : $m_i = \beta_1 + \beta_2 U_i$,
- Modelo 2 : $m_i = \beta_1 + \beta_2 U_i + \beta_3 E_i$,
- Modelo 3 : $m_i = \beta_1 + \beta_2 U_i + \beta_3 E_i + \beta_4 P_i$,
- Modelo 4 : $m_i = \beta_1 + \beta_2 U_i + \beta_3 E_i + \beta_4 P_i + \beta_5 VR_i$;

em que m_i representa a mediana da temperatura mínima do ponto do orvalho, na i -ésima posição.

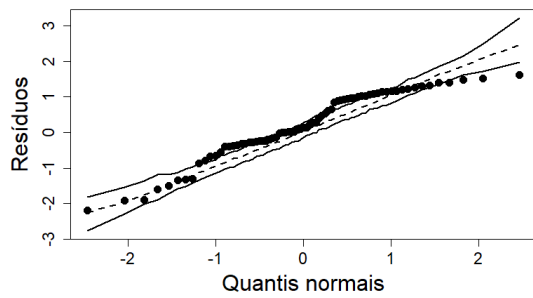
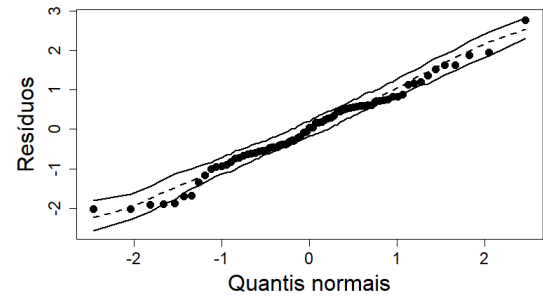
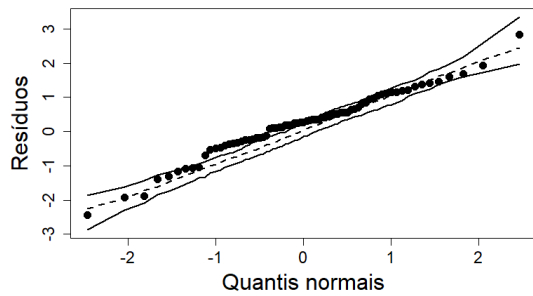
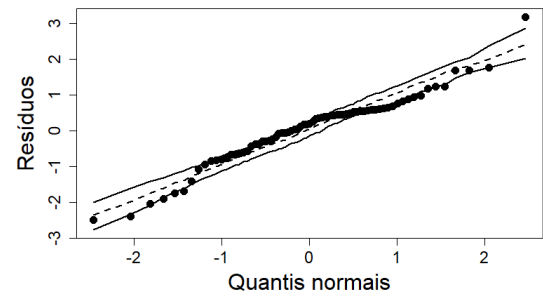
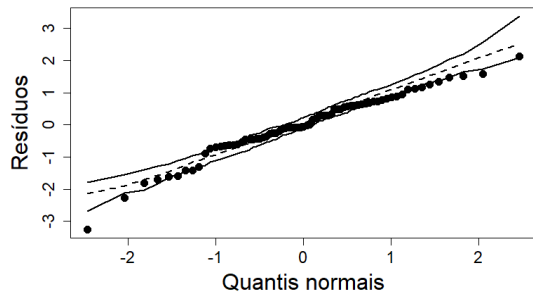
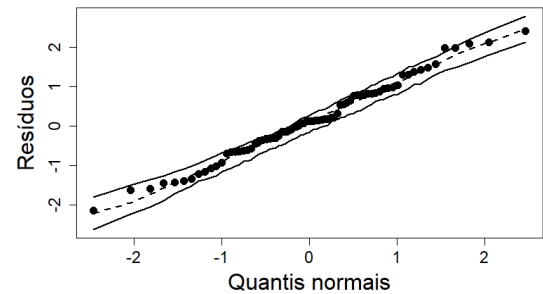
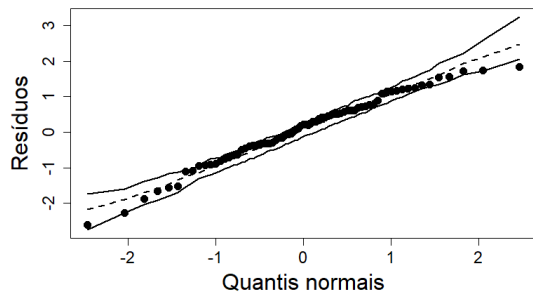
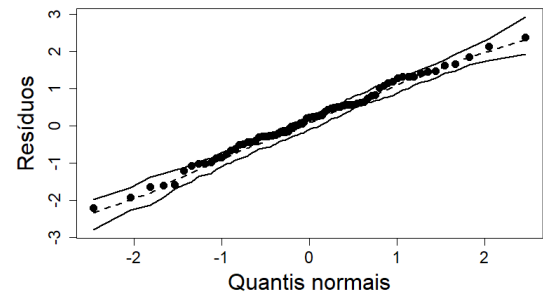
Como a distribuição $F_{\text{BG}}^*(\cdot; \xi, m_i, \sigma, \delta)$ de 4.1.2 possui densidades diferentes para $\xi = 0$ e $\xi \neq 0$, calculamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos quatro modelos para $\xi = 0$ e $\xi \neq 0$. As variáveis numéricas, umidade, pressão e velocidade do vento raja, foram centralizadas na média para melhor ajuste do modelo. Esses modelos foram selecionados por meio do método forward, começando com o modelo mais simples selecionando o melhor modelo com apenas uma variável explicativa, então adicionando uma segunda variável e tomando o melhor modelo com duas variáveis explicativas e assim por diante.

A avaliação da adequação dos modelo de regressão BGEV, para os quatro modelos definidos acima, é verificada pelos valores dos critérios de informação AIC e BIC apresentados na página 31, deste trabalho. Os resultados encontram-se na Tabela 5. Esses resultados indicam que o modelo mais adequado para $\xi = 0$ é o modelo 4, enquanto que para $\xi \neq 0$ é o modelo 3.

Apesar das medidas de comparação serem amplamente utilizadas para seleção de modelos, principalmente no caso de modelos encaixados, a adequação do modelo também pode ser confirmada com o análise de resíduos utilizando os resíduos apresentados em 4.2.3.

Tabela 5: Medidas de comparação entre modelos BGEV para temperatura do ponto do orvalho

Modelo	Parâmetro ξ	AIC	BIC
Modelo 1	$\xi = 0$	392.6367	401.7986
	$\xi \neq 0$	371.7461	383.1984
Modelo 2	$\xi = 0$	316.7746	328.2269
	$\xi \neq 0$	314.8961	328.6389
Modelo 3	$\xi = 0$	300.3726	314.1154
	$\xi \neq 0$	289.292	305.3252
Modelo 4	$\xi = 0$	298.3478	314.381
	$\xi \neq 0$	302.8041	321.1278

(a) Modelo 1 $\xi = 0$ (b) Modelo 1 $\xi \neq 0$ (c) Modelo 2 $\xi = 0$ (d) Modelo 2 $\xi \neq 0$ (e) Modelo 3 $\xi = 0$ (f) Modelo 3 $\xi \neq 0$ (g) Modelo 4 $\xi = 0$ (h) Modelo 4 $\xi \neq 0$

O painel da Figura 12 apresenta os gráficos de envelope para os resíduos quantílicos dos modelos ajustados considerando os diferentes valores de ξ . Observa-se então que o modelo 1 com $\xi = 0$ na sub-figura 12a os resíduos estão praticamente todos fora do envelope enquanto que há uma melhora substancial quando se considera $\xi \neq 0$ apresentado na sub-figura 12b. O mesmo comportamento ocorre com a melhora do ajuste quando se considera $\xi \neq 0$ no modelo 2.

Tabela 6: Estimativas, erros padrão, estatística z e p -valores para os modelos RBGEV aplicados em temperatura do ponto do orvalho.

Modelo 1								
parâmetros	$\xi = 0$				$\xi \neq 0$			
	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor
β_1	9.399	0.244	38.423	< 0.001	11.091	0.288	38.482	< 0.001
β_2	0.255	0.010	25.239	< 0.001	0.331	0.011	29.516	< 0.001
σ	8.275	2.243	3.688	< 0.001	6.796	1.690	4.020	< 0.001
δ	0.598	0.163	3.663	< 0.001	0.388	0.153	2.529	0.011
ξ	-	-	-	-	0.579	0.072	8.003	< 0.001
Modelo 2								
parâmetros	$\xi = 0$				$\xi \neq 0$			
	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor
β_1	7.454	0.213	35.006	< 0.001	7.619	0.217	35.180	< 0.001
β_2	0.260	0.008	17.554	< 0.001	0.210	0.008	25.830	< 0.001
β_3	4.697	0.268	34.171	< 0.001	5.103	0.241	21.194	< 0.001
σ	6.065	1.562	3.882	< 0.001	3.891	0.836	2.333	< 0.001
δ	0.918	0.194	4.738	< 0.001	0.530	0.177	2.999	0.002
ξ	-	-	-	-	0.192	0.067	2.877	0.004
Modelo 3								
parâmetros	$\xi = 0$				$\xi \neq 0$			
	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor
β_1	8.309	0.184	45.093	< 0.001	8.672	0.181	47.814	< 0.001
β_2	0.213	0.007	29.226	< 0.001	0.234	0.006	36.500	< 0.001
β_3	3.396	0.250	13.531	< 0.001	3.262	0.175	18.667	< 0.001
β_4	-0.737	0.056	-13.207	< 0.001	-0.423	0.036	-11.766	< 0.001
σ	2.606	0.433	6.013	< 0.001	3.237	0.613	5.280	< 0.001
δ	0.465	0.148	3.139	0.001	0.442	0.182	2.420	0.015
ξ	-	-	-	-	0.504	0.114	4.435	< 0.001
Modelo 4								
parâmetros	$\xi = 0$				$\xi \neq 0$			
	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor
β_1	7.978	0.171	46.551	< 0.001	7.904	0.194	40.679	< 0.001
β_2	0.239	0.006	38.843	< 0.001	0.249	0.007	31.091	< 0.001
β_3	3.795	0.276	13.751	< 0.001	3.475	0.307	11.305	< 0.001
β_4	-0.690	0.050	-13.758	< 0.001	-0.954	0.068	-13.864	< 0.001
β_5	0.456	0.087	5.254	< 0.001	0.412	0.119	3.448	< 0.001
σ	2.450	0.380	6.435	< 0.001	2.154	0.341	6.315	< 0.001
δ	0.486	0.148	3.282	0.001	0.380	0.192	1.980	0.040
ξ	-	-	-	-	-0.006	0.144	-0.048	0.962

E assim como apresentado na tabela 5 os modelos que apresentam os melhores ajustes são modelo 3 com $\xi \neq 0$ representado o ajuste de resíduos na sub-figura 12f e modelo 4 com $\xi = 0$ na sub-figura 12g. Considerando que o parâmetro ξ apresenta uma diferença de forma, para esse trabalho será considerado o modelo 3 $\xi \neq 0$ como o melhor modelo para ajustar os dados de temperatura do ponto do orvalho.

Na tabela 6 é apresentado as estimativas, erro padrão e estatística z e p -valores dos modelos ajustados. Nota-se que para todos os modelos ajustados os parâmetros β são significativos a um nível de significância de 5%. Um caso em particular que chama atenção é o do modelo 4 com $\xi \neq 0$ no qual o parâmetro ξ não foi significativo apresentando um p -valor de 0.962, dessa forma rejeita-se que $\xi \neq 0$, o que reflete um desempenho pior com essas variáveis em relação ao modelo $\xi = 0$, uma vez que foi acrescentado um parâmetro no modelo redundante ao modelo.

Considerando o melhor modelo ajustado, o modelo 3 $\xi \neq 0$ as variáveis explicativas são respectivamente umidade, estações e pressão atmosférica. Sendo assim, o valor de β_1 apresenta o intercepto, ou seja, o valor da mediana da temperatura do ponto do orvalho quando não se observa o efeito das variáveis explicativas. É de se ressaltar que o efeito de umidade é positivo, ou seja, o aumento de uma unidade em umidade relativa gera o aumento de 0.234 na mediana da temperatura do ponto do orvalho. Em seguida nota-se que a estação, variável binária, também tem efeito positivo na temperatura do ponto do orvalho, pois a estação representada por 1 é justamente o verão mais chuvoso da região, nesse período o efeito na mediana de é 3.262 em relação ao inverno mais seco. Já considerando pressão atmosférica observa-se o efeito negativo em que cada unidade de pressão a mais representa uma alteração de -0.442 na mediana da temperatura do ponto do orvalho.

6.3.2 Umidade relativa do ar

Para além da variável da temperatura do ponto do orvalho, esse trabalho apresenta também a possibilidade de se estimar umidade relativa do ar que é o indicador essencial da quantidade de vapor d'água presente na atmosfera em relação á máxima a ser suportada em determinada temperatura, uma vez que já foi feito a relação entre umidade e temperatura do ponto do orvalho, espera-se que o comportamento da umidade também possa ser ajustado por meio de um modelo BGEV.

A umidade relativa do ar desempenha um papel crucial na dinâmica das queimadas, influenciando tanto a ignição quanto a propagação do fogo. De acordo com o estudo de Ryan (2002), a umidade baixa aumenta a inflamabilidade de vegetações, tornando-as mais suscetíveis a incêndios. Quando a umidade relativa do ar cai abaixo de 30%, o risco de queimadas em áreas florestais e savânicas aumenta significativamente, como observado

em pesquisas de Ganteaume et al. (2013). Esses autores destacam que períodos prolongados de baixa umidade favorecem a secagem da biomassa, criando condições ideais para ignição.

A interconexão entre umidade relativa do ar e queimadas ressalta a necessidade de estratégias integradas de monitoramento e resposta a desastres, enfatizando que a prevenção e o manejo adequado dos ecossistemas são fundamentais para mitigar os impactos das queimadas na saúde humana e no meio ambiente. Para ajustar dados de umidade relativa para a estação automática de Goiânia de código A002 foi feito uma seleção de modelos. Supondo que Y_1, \dots, Y_n são as n variáveis aleatórias independentes representando temperaturas do ponto do orvalho mínimas, em que $Y_i \sim F_{BG}^*(\cdot; \xi, m_i, \sigma, \delta)$, sendo comparado considerando umidade relativa os seguintes modelos.

- Modelo 1 : $m_i = \beta_1 + \beta_2 T_i$,
- Modelo 2 : $m_i = \beta_1 + \beta_2 T_i + \beta_3 VR_i$,
- Modelo 3 : $m_i = \beta_1 + \beta_2 T_i + \beta_3 VR_i + \beta_4 P_i$;

em que m_i representa a mediada da umidade relativa em blocos mínimos na i -ésima posição e possui distribuição tal qual em 2.2.5. Nesse esquema as variáveis T_i , VR_i e P representam respectivamente temperatura do ar, velocidade do vento rajada máxima e pressão atmosférica para a estação de Goiânia A002, cada esquema de modelo foi avaliado considerando $\xi = 0$ e $\xi \neq 0$.

Na Tabela 7 encontra-se as medidas de comparação entre os modelos para diferentes valores do parâmetro ξ . Nota-se que o o melhor modelo considerando $\xi = 0$ é considerando 3 variáveis explicativas no modelo 7, porém para $\xi \neq 0$ o que apresentou melhores resultados para as medidas de comparação é o modelo 6, esse também foi o menor valor de AIC e BIC entre todos os modelos para a mediana da umidade relativa.

Tabela 7: Medidas de comparação entre modelos BGEV para temperatura do ponto do orvalho

Modelo	Parâmetro ξ	AIC	BIC
Modelo 1	$\xi = 0$	560,0423	569,2041
	$\xi \neq 0$	553,6306	565,0829
Modelo 2	$\xi = 0$	556,3689	567,8212
	$\xi \neq 0$	544,1218	557,8646
Modelo 3	$\xi = 0$	552,9676	566,7104
	$\xi \neq 0$	551,1549	567,1881

Deve-se considerar, porém que as medidas de comparação não são definitivas para definir qual o modelo mais bem ajustado, para tanto é necessário fazer análise de resíduos

para todos os modelos. Assim, como feito com os modelos para temperatura de ponto de orvalho, a análise de resíduos foi feita considerando os resíduos quantílicos. Em seguida é apresentado na Tabela 8 para as estimativas, erro padrão, estatística z e p -valor para os parâmetros dos modelos 1, 2 e 3 com umidade como variável independente.

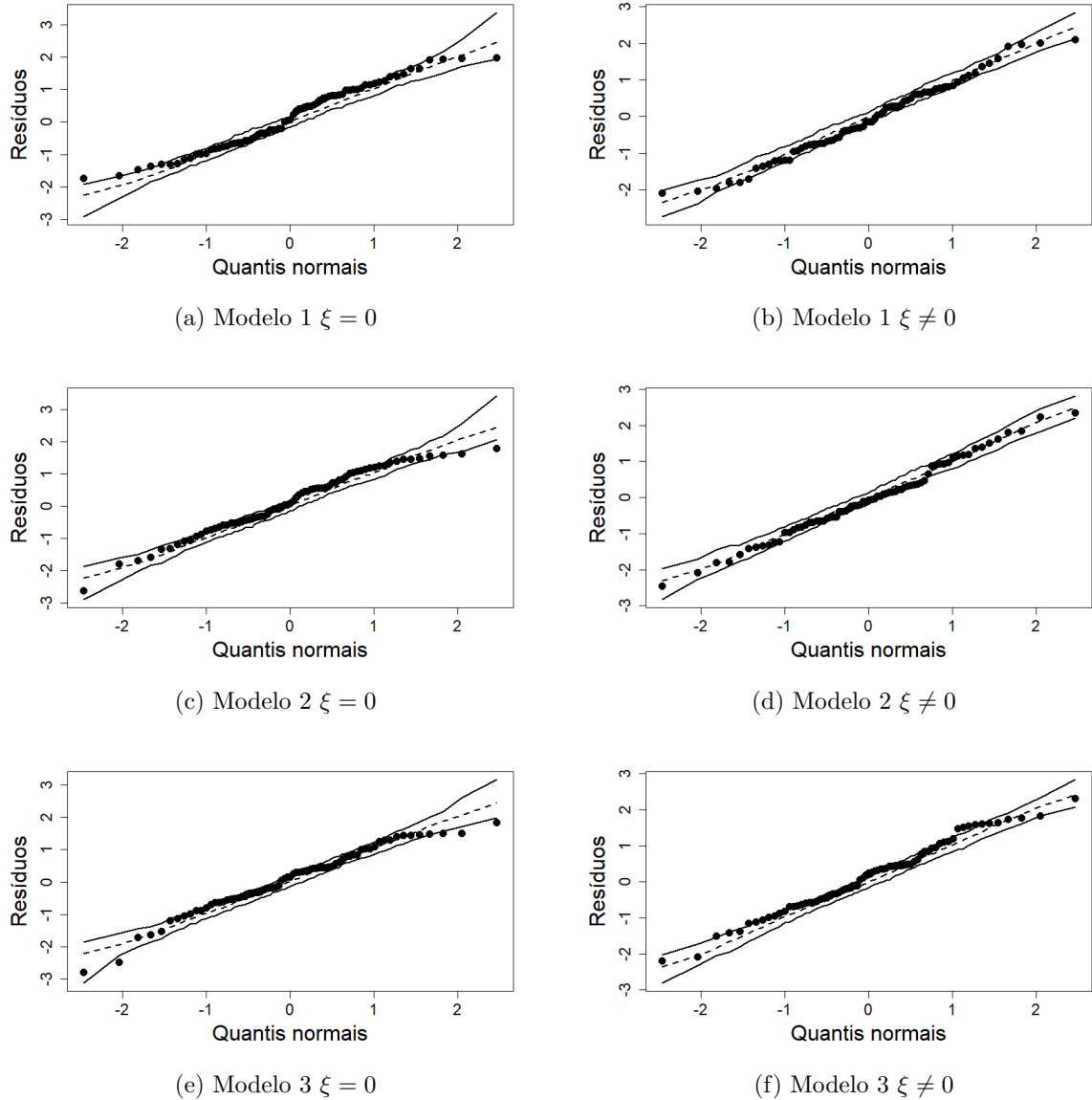


Figura 13: Análise de resíduos para os modelos para umidade relativa do ar.

Observando os gráficos apresentados na Figura 13 é possível identificar que o modelo 2 em 13d é de fato o modelo que melhor ajusta os dados para umidade relativa. Levando em consideração o modelo 2 apresentado na Tabela 8 é importante ressaltar que ambas variáveis numéricas temperatura do ar e velocidade do vento rajada estão centralizadas em relação a suas respectivas médias, dessa forma valor da estimativa para β_1 é de 45.779, portanto, quando as variáveis temperatura do ar e velocidade do vento rajada estão iguais a sua média a mediana m de umidade relativa é de 45.8%. Considerando agora os valores de β_2 que é o parâmetro ligado a variável temperatura do ar, para cada

Tabela 8: Estimativas, erros padrão, estatística z e p -valores para os modelos RBGEV aplicados em temperatura do ponto do orvalho.

Modelo 1								
parâmetros	$\xi = 0$				$\xi \neq 0$			
	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor
β_1	46.500	0.818	56.849	< 0.001	50.035	0.853	58.637	< 0.001
β_2	-1.522	0.159	-9.589	< 0.001	-2.132	0.148	-14.360	< 0.001
σ	75.089	33.917	2.214	0.027	131.886	72.104	1.829	0.067
δ	0.715	0.163	4.461	< 0.001	0.898	0.201	4.475	< 0.001
ξ	-	-	-	-	0.080	0.108	0.739	0.460
Modelo 2								
parâmetros	$\xi = 0$				$\xi \neq 0$			
	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor
β_1	45.389	0.704	64.398	< 0.001	49.241	0.886	55.585	< 0.001
β_2	-1.803	0.143	-12.632	< 0.001	-1.842	0.174	-10.581	< 0.001
β_3	-3.542	0.308	-11.477	< 0.001	-5.146	0.461	-11.158	< 0.001
σ	37.227	14.990	2.483	0.013	35.377	14.920	2.371	0.018
δ	0.507	0.147	3.448	< 0.001	0.452	0.157	2.873	0.004
ξ	-	-	-	-	0.377	0.089	4.224	< 0.001
Modelo 3								
parâmetros	$\xi = 0$				$\xi \neq 0$			
	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor	Estimativa	Erro padrão	z -stat	p -valor
β_1	45.779	0.762	60.032	< 0.001	46.037	0.726	63.433	< 0.001
β_2	-2.372	0.306	-7.754	< 0.001	-2.275	0.349	-6.510	< 0.001
β_3	-3.315	0.567	-5.843	< 0.001	-3.671	0.664	-5.525	< 0.001
β_4	-1.888	0.406	-4.648	< 0.001	-1.787	0.426	-4.199	< 0.001
σ	36.658	14.968	2.449	0.014	27.831	11.685	2.382	0.017
δ	0.512	0.150	3.416	< 0.001	0.380	0.162	2.340	0.019
ξ	-	-	-	-	0.224	0.117	1.915	0.055

unidade de temperatura a mais ocorre uma diminuição de -1.803 no valor da mediana de umidade relativa, dessa forma, quanto maior a temperatura menor será a umidade relativa fixa as demais variáveis. Também possível observa que para o caso de velocidade do vento rajada relacionada ao β_3 , para cada unidade a mais nessa variável ocorre um decaimento de -3.542 na mediana da umidade relativa. Ambas interpretações estão de acordo com o que já é documentado na literatura.

7 Conclusão

Neste trabalho, propõe-se uma nova classe de modelos de regressão para dados extremos que podem ser bimodais, modelo de regressão BGEV. O novo modelo foi baseado na distribuição BGEV (*Bimodal Generalized Extreme Values*) proposto por Otiniano et al. (2023).

Dada a formulação da distribuição BGEV, $Y \sim F_{BG}(\cdot; \xi, \mu, \sigma, \delta)$, μ é um parâmetro de localização. No entanto, μ não representa a média é um parâmetro de localização que não é a média de Y , portanto, não possui uma interpretação direta no modelo de regressão.

Dessa forma, a distribuição BGEV foi reparametrizada pela mediana (m) e a estrutura de regressão foi atribuída a esse parâmetro. O que torna mais simples a interpretação dos resultados. A inferência dos parâmetros do modelo de regressão BGEV foi realizada pelo método de máxima verossimilhança.

Na aplicação, os critérios AIC, BIC e o cálculo dos resíduos quantílico foram utilizados para a avaliação da qualidade do ajuste do modelo.

Considerando sempre o melhor modelo para ajuste de dados extremos, o modelo de regressão BGEV se mostrou ser uma boa proposta para a modelagem da temperatura mínima do ponto do orvalho e a umidade relativa do ar mínima para estação meteorológica automática da região de Goiânia, região que historicamente sofre com secas. Para os dois conjuntos de dados, o modelo de regressão foi capaz de se aderir aos dados de forma satisfatória, tornando possível a análise e interpretação da dependência entre a temperatura do ponto do orvalho e as variáveis estação, pressão, e umidade, bem como a dependência entre a umidade relativa do ar com as variáveis temperatura no ponto de orvalho, pressão e velocidade do vento.

A metodologia pode ser aplicada a dados bimodais de outras.

Portanto, este trabalho apresenta um novo modelo de regressão capaz de ajustar dados com comportamento bimodal, ampliando assim a totalidade de técnicas disponíveis para modelagem de dados extremos, uma aplicação em um dado relevante para a região considerando que mudanças climáticas estão cada vez mais recorrentes e há a perspectiva que eventos extremos ocorram cada vez mais, daí a importância de ferramentas como a apresentada nesse modelo para auxiliar na análise e previsão de eventos climáticos extremos.

Esperamos os resultados de este trabalho motive a comunidade científica a levar em consideração que atualmente há diversos sistemas climáticos que são complexos por algumas das variáveis climáticas extremas.

O cálculo das estimativas foram satisfatórios para os casos descritos nas si-

mulações e aplicações, porém como o suporte da densidade da BGEV depende de alguns parâmetros, os estimadores dos parâmetros podem não convergir, especialmente para $x_i < 1/2$. Em um trabalho futuro, seria interessante utilizar outra abordagem para o cálculo das estimativas e comparar elas com as de máxima verossimilhança.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A.; MILLER, D. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables (national bureau of standards applied mathematics series no. 55). *Journal of Applied Mechanics*, ASME International, v. 32, n. 1, p. 239–239, 1965. 20
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, Ieee, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974. 29
- ARYAL, G. R.; TSOKOS, C. P. On the transmuted extreme value distribution with application. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 71, n. 12, p. e1401–e1407, 2009. 8
- CHANGNON, D.; SANDSTROM, M.; SCHAFFER, C. Relating changes in agricultural practices to increasing dew points in extreme chicago heat waves. *Climate Research*, v. 24, n. 3, p. 243–254, 2003. 37
- CORDEIRO, G. M. et al. A new extended log-weibull regression: Simulations and applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, v. 50, n. 3, p. 855–871, 2021. 8
- DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and graphical statistics*, Taylor & Francis, v. 5, n. 3, p. 236–244, 1996. 29
- ELAL-OLIVERO, D. Alpha-skew-normal distribution. *Proyecciones (Antofagasta)*, SciELO Chile, v. 29, n. 3, p. 224–240, 2010. 14
- EMBRECHTS, P. et al. Risk theory. *Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance*, Springer, p. 21–57, 1997. 8
- ESPINHEIRA, P. L.; SILVA, A. de O. Residual and influence analysis to a general class of simplex regression. *Test*, Springer, v. 29, n. 2, p. 523–552, 2020. 29
- FISHER, R. A.; TIPPETT, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. [S.l.], 1928. v. 24, n. 2, p. 180–190. 8, 11
- FONSECA, R. V.; CRIBARI-NETO, F. Bimodal birnbaum–saunders generalized autoregressive score model. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 45, n. 14, p. 2585–2606, 2018. 14
- GANTEAUME, A. et al. A review of the main driving factors of forest fire ignition over europe. *Environmental management*, Springer, v. 51, p. 651–662, 2013. 46
- GNEDENKO, B. Sur la distribution limite du terme maximum d’une serie aleatoire. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 423–453, 1943. 8, 11
- GRIGORIU, M.; SAMORODNITSKY, G. Reliability of dynamic systems in random environment by extreme value theory. *Probabilistic engineering mechanics*, Elsevier, v. 38, p. 54–69, 2014. 8

- HAAN, L.; FERREIRA, A. *Extreme value theory: an introduction*. [S.l.]: Springer, 2006. v. 3. 8, 13
- JENKINSON, A. F. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Wiley Online Library, v. 81, n. 348, p. 158–171, 1955. 8, 12
- JONDEAU, E.; POON, S.-H.; ROCKINGER, M. *Financial modeling under non-Gaussian distributions*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. 12
- JONDEAU, E.; ROCKINGER, M. The tail behavior of stock returns: Emerging versus mature markets. Banque de France Working Paper, 1999. 39
- JUNIOR, J. S. da C. *Sensor de umidade microeletrônico fabricado em substrato de alumina e baseado na detecção do ponto de orvalho*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2011. 37
- KOTZ, S.; NADARAJAH, S. *Extreme value distributions: theory and applications*. [S.l.]: world scientific, 2000. 8, 13
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer, 1999. 28
- OTINIANO, C. E. et al. A bimodal model for extremes data. *Environmental and Ecological Statistics*, Springer, p. 1–28, 2023. 4, 5, 8, 9, 13, 25, 49
- OTINIANO, C. E. et al. The transmuted gev distribution: properties and application. *Communications for Statistical Applications and Methods*, Korean Statistical Society, v. 26, n. 3, p. 239–259, 2019. 8
- OTINIANO, C. E. et al. A bimodal model for extremes data. *arXiv preprint arXiv:2109.12738*, 2021. 13, 14
- PEREIRA, G. H. On quantile residuals in beta regression. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 48, n. 1, p. 302–316, 2019. 29
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2022. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. 31
- RESNICK, S. *Extreme values, regular variation and weak convergence*. Springer Verlag, New York, 1987. 8
- RUDD, E. M. et al. The extreme value machine. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, IEEE, v. 40, n. 3, p. 762–768, 2017. 13
- RYAN, K. C. Dynamic interactions between forest structure and fire behavior in boreal ecosystems. *Silva Fennica*, THE FINNISH SOCIETY OF FOREST SCIENCE, v. 36, n. 1, p. 13–39, 2002. 45
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, JSTOR, p. 461–464, 1978. 29
- STEPHENSON, A. G. evd: Extreme value distributions. *R News*, v. 2, n. 2, p. 31–32, June 2002. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>. 39

- SWAMEE, P. K.; RATHIE, P. N. Invertible alternatives to normal and lognormal distributions. *Journal of Hydrologic Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 12, n. 2, p. 218–221, 2007. 14
- TALAIA, M.; VIGÁRIO, C. Temperatura de ponto de orvalho: um risco ou uma necessidade. Imprensa da Universidade de Coimbra, 2016. 37
- VASCONCELOS, J. C. S. et al. A new regression model for bimodal data and applications in agriculture. *Journal of Applied Statistics*, Taylor & Francis, v. 48, n. 2, p. 349–372, 2021. 9
- VASCONCELOS, J. C. S. et al. A regression model for extreme events and the presence of bimodality with application to energy generation data. *IET Renewable Power Generation*, Wiley Online Library, v. 15, n. 2, p. 452–461, 2021. 9
- VILA, R. et al. A bimodal gamma distribution: Properties, regression model and applications. *Statistics*, Taylor & Francis, v. 54, n. 3, p. 469–493, 2020. 14
- VILA, R. et al. On a bimodal birnbaum–saunders distribution with applications to lifetime data. 2021. 9, 14
- VILLASEÑOR, J. A. R.; VILLASEÑOR, J. A. R. General extreme value distribution for the minima. *Frequency Analyses of Natural Extreme Events: A Spreadsheets Approach*, Springer, p. 363–396, 2021. 8
- WALD, A. Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the American Mathematical society*, JSTOR, v. 54, n. 3, p. 426–482, 1943. 29

A Apêndices

A.1 A

Diferenciando a função de log-verossimilhança $\ell(\boldsymbol{\theta})$ dada em (4.2.1) em relação a β_j , $j = 1, 2, \dots, p$:

$$U_{\beta_j} = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} \frac{dm_i}{d\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} \frac{x_{ij}}{g'(m_i)},$$

em que $m_i = g^{-1}(\eta_i)$, $dm_i/d\eta_i = [g'(m_i)]^{-1}$ with $g'(z) = dg(z)/dz$, e $\partial \eta_i / \partial \beta_j = x_{ij}$, $i = 1, \dots, n$.

Para $\xi \in \mathbb{R}$, $d\mu_i^*/dm_i = 1, \forall i$, e

$$\frac{dT_i}{dm_i} = \frac{dT_i}{d\mu_i^*} \frac{d\mu_i^*}{dm_i} = \frac{dT_i}{d\mu_i^*} = -|y_i - \mu_i^*|^\delta - \delta(y_i - \mu_i^*)|y_i - \mu_i^*|^{\delta-1} \text{sgn}(y_i - \mu_i^*) = -|y_i - \mu_i^*|^\delta(\delta + 1).$$

Para $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} &= \frac{\delta \text{sgn}(y_i - \mu_i^*)}{|y_i - \mu_i^*|} - \frac{d\mu_i^*}{dm_i} - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \frac{1}{\Psi_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} + \frac{1}{\xi} \Psi_i^{-1/\xi-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} \\ &= -\frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} - \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} \frac{\Psi_i^{-1}(\boldsymbol{\theta})}{\xi} \left[1 + \xi - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})\right] \end{aligned}$$

com

$$\frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} = \frac{\xi}{\sigma} \frac{dT_i}{dm_i} = -\frac{\xi}{\sigma}(\delta + 1)|y_i - \mu_i^*|^\delta.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} &= -\frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} + \frac{\xi}{\sigma}(\delta + 1)|y_i - \mu_i^*|^\delta \frac{\Psi_i^{-1}(\boldsymbol{\theta})}{\xi} \left[1 + \xi - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})\right] \\ &= -\frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} + \frac{(\delta + 1)}{\sigma} |y_i - \mu_i^*|^\delta \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{1}{\sigma(y_i - \mu_i^*)} [(\delta + 1)T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) - \delta\sigma], \end{aligned}$$

em que $\Omega_i(\boldsymbol{\theta})$ é definida na Subseção 4.2 e varia dependendo de ser $\xi = 0$ ou $\xi \neq 0$.

Para $\xi = 0$,

$$\frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{dm_i} = -\frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} + \frac{(\delta + 1)}{\sigma} |y_i - \mu_i^*|^\delta \left(1 - e^{-\frac{T_i}{\sigma}}\right) = \frac{1}{\sigma(y_i - \mu_i^*)} [(\delta + 1)T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) - \delta\sigma].$$

Fixando $a_i = d\ell_i(\boldsymbol{\theta})/dm_i$,

$$\mathbf{U}_\beta = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta} = X^\top H \mathbf{a},$$

em que X , H , e \mathbf{a} são definidos na subseção 4.2.

Diferenciando $\ell(\boldsymbol{\theta})$ em relação a ξ ($\xi \neq 0$):

$$U_\xi = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\xi},$$

com

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\xi} &= -\frac{\delta \operatorname{sgn}(y_i - \mu_i^*)}{|y_i - \mu_i^*|} \frac{d\mu_i^*}{d\xi} + \frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \frac{1}{\Psi_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\xi} \\ &\quad - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) - \frac{1}{\xi} \frac{1}{\Psi_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\xi} \right] \\ &= -\frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{d\mu_i^*}{d\xi} + \frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) [1 - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})] - \frac{1}{\xi} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\xi} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

De (3.1.6),

$$\mu_i^* = m_i - \left[\frac{\sigma}{\xi} (e^{c_2 \xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_i^*}{d\xi} &= -\frac{\sigma}{(\delta+1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (e^{c_2 \xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)-1} \left[-\frac{1}{\xi^2} (e^{c_2 \xi} - 1) + \frac{c_2}{\xi} e^{c_2 \xi} \right] \\ &= \frac{1}{\xi(\delta+1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)-1} \frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) - \frac{1}{\xi(\delta+1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)-1} \sigma c_2 c_1^{-\xi} \\ &= \frac{1}{\xi(\delta+1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)} - \frac{1}{\xi(\delta+1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)-1} \sigma c_2 c_1^{-\xi} \\ &= \frac{1}{\xi(\delta+1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)} \left\{ 1 - \sigma c_2 c_1^{-\xi} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{-1} \right\} \\ &= \frac{1}{\xi(\delta+1)} (m_i - \mu_i^*) \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right). \end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\frac{dT_i}{d\xi} = \frac{dT_i}{d\mu_i^*} \frac{d\mu_i^*}{d\xi} = -\frac{1}{\xi} (m_i - \mu_i^*) |y_i - \mu_i^*|^\delta \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right),$$

e

$$\frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\xi} = \frac{1}{\sigma} \left[T_i + \xi \frac{dT_i}{d\xi} \right] = \frac{1}{\sigma} \left[T_i - (m_i - \mu_i^*) |y_i - \mu_i^*|^\delta \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right) \right].$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\xi} &= -\frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{1}{\xi(\delta + 1)} (m_i - \mu_i^*) \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right) + \frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) [1 - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})] \\
&\quad - \frac{1}{\xi} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) \frac{1}{\sigma} \left[T_i - (m_i - \mu_i^*) |y_i - \mu_i^*|^\delta \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\xi} (m_i - \mu_i^*) \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right) \left(\frac{|y_i - \mu_i^*|^\delta \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} - \frac{\delta}{(\delta + 1)(y_i - \mu_i^*)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) [1 - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})] - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma \xi} \\
&= \frac{1}{\xi \sigma (\delta + 1)} \frac{(m_i - \mu_i^*)}{(y_i - \mu_i^*)} \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right) [(\delta + 1) T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) - \delta \sigma] \\
&\quad + \frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) [1 - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})] - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\xi \sigma} \\
&= \frac{a_i}{\xi(\delta + 1)} (m_i - \mu_i^*) \left(1 + \frac{\xi c_2 c_1^{-\xi}}{1 - c_1^{-\xi}} \right) + \frac{1}{\xi^2} \log(\Psi_i(\boldsymbol{\theta})) [1 - \Psi_i^{-1/\xi}(\boldsymbol{\theta})] - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\xi \sigma}
\end{aligned}$$

Portanto, fixando $b_i = d\ell_i(\boldsymbol{\theta})/d\xi$,

$$U_\xi = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \xi} = \mathbf{b}^\top \mathbf{1}_n,$$

em que \mathbf{b} e $\mathbf{1}_n$ são definidos na Subseção 4.2.

Diferenciando $\ell(\boldsymbol{\theta})$ com relação a σ :

$$U_\sigma = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma}.$$

Para $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma} &= -\frac{1}{\sigma} - \frac{\delta \operatorname{sgn}(y_i - \mu_i^*)}{|y_i - \mu_i^*|} \frac{d\mu_i^*}{d\sigma} - \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \frac{1}{\Psi_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma} + \frac{1}{\xi} \Psi_i^{-1/\xi-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma} \\
&= -\frac{1}{\sigma} - \frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{d\mu_i^*}{d\sigma} - \frac{1}{\xi} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}$$

com

$$\frac{d\mu_i^*}{d\sigma} = -\frac{1}{(\delta + 1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)-1} \frac{1}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) = -\frac{1}{\sigma(\delta + 1)} \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)} = -\frac{(m_i - \mu_i^*)}{\sigma(\delta + 1)},$$

desde que $\left[\frac{\sigma}{\xi}(c_1^{-\xi} - 1)\right]^{1/(\delta+1)} = m_i - \mu_i^*$, e

$$\frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma} = \xi \left[-\frac{1}{\sigma^2} T_i + \frac{1}{\sigma} \frac{dT_i}{d\sigma} \right] = -\frac{\xi}{\sigma^2} (y_i - m_i) |y_i - \mu_i^*|^\delta.$$

Para $\xi = 0$,

$$\frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma} = -\frac{1}{\sigma} - \frac{\delta \operatorname{sgn}(y_i - \mu_i^*)}{|y_i - \mu_i^*|} \frac{d\mu_i^*}{d\sigma} + \frac{T_i}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{dT_i}{d\sigma} - e^{-T_i/\sigma} \left(\frac{T_i}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{dT_i}{d\sigma} \right),$$

com

$$\frac{d\mu_i^*}{d\sigma} = -\frac{c_2}{(\delta+1)} (c_2\sigma)^{1/(\delta+1)-1} = -\frac{(c_2\sigma)^{1/(\delta+1)}}{\sigma(\delta+1)} = -\frac{(m_i - \mu_i^*)}{\sigma(\delta+1)},$$

desde que $(c_2\sigma)^{1/(\delta+1)} = m_i - \mu_i^*$, e

$$\frac{dT_i}{d\sigma} = \frac{dT_i}{d\mu_i^*} \frac{d\mu_i^*}{d\sigma} = |y_i - \mu_i^*|^\delta (\delta+1) \frac{(m_i - \mu_i^*)}{\sigma(\delta+1)} = \frac{1}{\sigma} (m_i - \mu_i^*) |y_i - \mu_i^*|^\delta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\sigma} &= -\frac{1}{\sigma} + \frac{\delta}{\sigma(\delta+1)} \frac{(m_i - \mu_i^*)}{(y_i - \mu_i^*)} + \frac{T_i}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} (m_i - \mu_i^*) |y_i - \mu_i^*|^\delta \\ &\quad - e^{-T_i/\sigma} \left[\frac{T_i}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} (m_i - \mu_i^*) |y_i - \mu_i^*|^\delta \right] \\ &= -\frac{1}{\sigma} + \frac{\delta}{\sigma(\delta+1)} \frac{(m_i - \mu_i^*)}{(y_i - \mu_i^*)} + \frac{T_i}{\sigma^2} \frac{(1 - e^{-T_i/\sigma})}{(y_i - \mu_i^*)} [y_i - \mu_i^* - (m_i - \mu_i^*)] \\ &= -\frac{1}{\sigma} + \frac{\delta}{\sigma(\delta+1)} \frac{(m_i - \mu_i^*)}{(y_i - \mu_i^*)} + \frac{1}{\sigma^2} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) |y_i - \mu_i^*|^\delta (y_i - m_i). \end{aligned}$$

Fixando $d_i = d\ell_i(\boldsymbol{\theta})/d\sigma$,

$$U_\sigma = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma} = \mathbf{d}^\top \mathbf{1}_n,$$

em que \mathbf{d} é definido na Subseção 4.2.

Finalmente, diferenciando $\ell(\boldsymbol{\theta})$ em relação a δ :

$$U_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta}.$$

Para $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} &= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{\delta \operatorname{sgn}(y_i - \mu_i^*)}{|y_i - \mu_i^*|} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \frac{1}{\Psi_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} \\ &+ \frac{1}{\xi} \Psi_i^{-1/\xi-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} \\ &= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} - \frac{1}{\xi} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} &= \frac{d}{d\delta} \left\{ m_i - \exp \left\{ \frac{1}{\delta+1} \log \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right] \right\} \right\} \\ &= - \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right]^{1/(\delta+1)} \log \left[\frac{\sigma}{\xi} (c_1^{-\xi} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{\delta+1} (m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\delta} [\Psi_i(\boldsymbol{\theta})] = \frac{\xi}{\sigma} \frac{dT_i}{d\delta},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{d\delta} &= -|y_i - \mu_i^*|^\delta \frac{d\mu_i^*}{d\delta} + (y_i - \mu_i^*) \frac{d}{d\delta} \left\{ e^{\delta \log |y_i - \mu_i^*|} \right\} \\ &= -|y_i - \mu_i^*|^\delta \frac{d\mu_i^*}{d\delta} + (y_i - \mu_i^*) \left\{ |y_i - \mu_i^*|^\delta \left[\log |y_i - \mu_i^*| - \delta \frac{\operatorname{sgn}(y_i - \mu_i^*)}{|y_i - \mu_i^*|} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} \right] \right\} \\ &= -|y_i - \mu_i^*|^\delta \frac{d\mu_i^*}{d\delta} + T_i \left[\log |y_i - \mu_i^*| - \frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} \right] \\ &= T_i \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{d\mu_i^*}{d\delta} \left(|y_i - \mu_i^*|^\delta + \frac{\delta T_i}{(y_i - \mu_i^*)} \right) \\ &= T_i \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{d\mu_i^*}{d\delta} \frac{T_i(\delta+1)}{(y_i - \mu_i^*)}. \end{aligned}$$

Isso implica em

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} [\Psi_i(\boldsymbol{\theta})] &= \frac{\xi}{\sigma} \left[T_i \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{d\mu_i^*}{d\delta} \frac{T_i(\delta+1)}{(y_i - \mu_i^*)} \right] \\ &= \frac{\xi}{\sigma} \left[T_i \log |y_i - \mu_i^*| - |y_i - \mu_i^*|^\delta (m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*) \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} &= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} - \frac{1}{\xi} \frac{d\Psi_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{\delta}{(\delta+1)(y_i - \mu_i^*)} (m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*) \\
&\quad - \frac{\Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} [T_i \log |y_i - \mu_i^*| - |y_i - \mu_i^*|^\delta (m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*)] \\
&= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| \left(1 - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right) \\
&\quad - (m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*) \left[\frac{\delta}{(\delta+1)(y_i - \mu_i^*)} - \frac{|y_i - \mu_i^*|^\delta \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right] \\
&= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| \left(1 - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right) + \frac{(m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*)}{\sigma(\delta+1)(y_i - \mu_i^*)} [(\delta+1)T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) - \delta\sigma] \\
&= \log |y_i - \mu_i^*| \left(1 - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right) + \frac{1}{\delta+1} [1 + a_i(m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*)].
\end{aligned}$$

Para $\xi = 0$,

$$\frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} = \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} - \frac{1}{\sigma} \frac{dT_i}{d\delta} \Omega_i(\boldsymbol{\theta}),$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_i^*}{d\delta} &= \frac{d}{d\delta} \left\{ m_i - \exp \left\{ \frac{1}{\delta+1} \log(c_2\sigma) \right\} \right\} \\
&= \frac{1}{\delta+1} (c_2\sigma)^{1/(\delta+1)} \log [(c_2\sigma)^{1/(\delta+1)}] \\
&= \frac{1}{\delta+1} (m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell_i(\boldsymbol{\theta})}{d\delta} &= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{\delta}{(y_i - \mu_i^*)} \frac{d\mu_i^*}{d\delta} - \frac{1}{\sigma} \left[T_i \log |y_i - \mu_i^*| - \frac{d\mu_i^*}{d\delta} \frac{T_i(\delta+1)}{(y_i - \mu_i^*)} \right] \Omega_i(\boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{1}{\delta+1} + \log |y_i - \mu_i^*| \left(1 - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right) \\
&\quad - (m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*) \left[\frac{\delta}{(\delta+1)(y_i - \mu_i^*)} - \frac{|y_i - \mu_i^*|^\delta \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right] \\
&= \log |y_i - \mu_i^*| \left(1 - \frac{T_i \Omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\sigma} \right) + \frac{1}{\delta+1} [1 + a_i(m_i - \mu_i^*) \log(m_i - \mu_i^*)].
\end{aligned}$$

Fixando $e_i = d\ell_i(\boldsymbol{\theta})/d\delta$,

$$U_\delta = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta} = \mathbf{e}^\top \mathbf{1}_n,$$

em que \mathbf{e} é definido na Subseção 4.2.