A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória GEV; $Y \sim F_{\xi,\sigma,\mu}$ é dada por:

$$f_{\xi,\mu,\sigma}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\left[1+\xi\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{(-1/\xi)-1} \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sigma}\exp\left\{-\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)-\exp\left[-\left(\dfrac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}, & \text{se } \xi = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

sendo ξ parâmetro de forma, μ de locação e σ de escala.

O modelo GEV bimodal, denotado por BGEV, consiste em compor a distribuição de uma variável aleatória GEV com parâmetro de locação $\mu = 0$, $Y \sim F_{\xi,0,\sigma}$, com a transformação $T_{\mu,\delta}$ definida abaixo. Assim a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória BGEV; $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$, é dada por:

$$F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(x) = F_{\xi,0,\sigma}(T_{\mu,\delta}(x)), \tag{0.2}$$

em que a função $T_{\mu,\delta}$ é definida por:

$$T_{\mu,\delta}(x) = (x-\mu)\left|x-\mu\right|^{\delta}, \delta > -1, \mu \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

Além disso a função T é inversível, com a inversa dada por:

$$T^{-1}_{\mu,\delta}(x) = sng(x)|x|^{\dfrac{1}{(\delta+1)}} + \mu. \tag{0.4}$$

E também derivável sendo que a derivada tem a seguinte forma:

$$T'_{\mu,\delta}(x) = (\delta+1)|x-\mu|^{\delta}. \tag{0.5}$$

A função de densidade de probabilidade de $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$ é dada por

$$f_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\left[1+\xi\left(\dfrac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma}\right)\right]^{(-1/\xi)-1} \exp\left[-\left[1+\xi\left(\dfrac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right] T'_{\mu,\delta}(x), & \xi \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sigma}\exp\left(-\dfrac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma}\right)\exp\left[-\exp\left(-\dfrac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma}\right)\right] T'_{\mu,\delta}(x), & \xi = 0. \end{cases} \tag{0.6}$$

Neste modelo são parâmetros de forma ξ, δ e σ já μ é parâmetro de locação. Note que σ na distribuição base GEV é de escala, porém na distribuição BGEV não satisfaz a condição $f_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(x) = \frac{1}{\sigma} f_{BG_{\xi,\mu,1,\delta}}(\frac{1}{\sigma})$, pois $\frac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma} \neq T_{\mu,\delta}(\frac{x}{\sigma})$. A prova que μ na distribuição BGEV é um parâmetro de locação segue do fato que $T_{\mu,\delta}(x) = T_{0,\delta}(x-\mu)$ e em consequência $f_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}(x) = f_{BG_{\xi,0,\sigma,\delta}}(x-\mu)$.

Observação 1. Note que quando $\delta = 0$ em (0.2) a distribuição BGEV retorna para a distribuição base GEV, $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,0}} = F_{\xi,\mu,\sigma}$. De fato

$$
\begin{aligned}
F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,0}}(x) &= F_{\xi,0,\sigma}(x-\mu) \\
&= F_{\xi,\mu,\sigma}(x).
\end{aligned} \tag{0.7}
$$

Momentos

Conforme Abramowitz e Stegun (1965), para todo número $a \in \mathrm{R}^+$, As funções gamma, gamma incompleta superior e gamma incompleta inferior são definidas, respectivamente, por

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt \tag{0.8}$$

$$\Gamma(a,x) := \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt \tag{0.9}$$

e

$$\gamma(a,x) := \int_0^x t^{a-1}e^{-t}dt. \tag{0.10}$$

Estas funções são algumas das ferramentas que serão utilizadas na seguinte proposição. Em todos os casos a é um parâmetro complexo, tal que a parte real de a é positiva.

Abramowitz, M., Stegun, I.A.(1965) Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Edição 9th Edição.

Proposição 1. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$. Então o k é-simo momento inteiro de X é dado por:

$$
\begin{aligned}
E(X^k) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{\frac{(k-j)(\delta+2)}{\delta+1}}\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{k-j}{\delta+1}}\left[\sum_{i=0}^{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}\binom{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}{i}(-1)^i\gamma\left(1-\xi\left([|\frac{k-j}{\delta+1}|]-i\right),1\right)\right] \\
&+ \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{k-j}{\delta+1}}\left[\sum_{i=0}^{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}\binom{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}{i}(-1)^i\Gamma\left(1-\xi\left([|\frac{k-j}{\delta+1}|]-i\right),1\right)\right],
\end{aligned} \tag{0.11}
$$

para $\xi > 0$, sempre que $\xi < \frac{\delta+1}{k}$ e

$$
\begin{aligned}
E(X^k) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{\frac{(k-j)(\delta+2)}{\delta+1}}\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{k-j}{\delta+1}}\left[\sum_{i=0}^{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}\binom{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}{i}(-1)^i\Gamma\left(1-\xi\left([|\frac{k-j}{\delta+1}|]-i\right),1\right)\right] \\
&+ \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{k-j}{\delta+1}}\left[\sum_{i=0}^{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}\binom{[|\frac{k-j}{\delta+1}|]}{i}(-1)^i\gamma\left(1-\xi\left([|\frac{k-j}{\delta+1}|]-i\right),1\right)\right],
\end{aligned} \tag{0.12}
$$

para $\xi < 0$, sempre que $\xi < \frac{\delta+1}{k}$.

Prova. Por definição

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}\left(T_{\mu,\delta}(x)\right)T'_{\mu,\delta}(x)dx, \tag{0.13}$$

sendo $f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}$ como definida em (0.1), T como em (0.3), e T' em (0.5). Ao substituir $y = T_{\mu,\delta}(x)$ em (0.13), os momentos são expressos por

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} [sng(y)|y|^{\frac{1}{\delta+1}} + \mu]^k f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}(y)dy. \tag{0.14}$$

Como $k \in \mathrm{Z}^+$, utiliza-se a fórmula do Binómio de Newton, então (0.14) é atualizada pela integral

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j \left[\int_{-\infty}^{+\infty} [sng(y)]^{k-j} |y|^{\frac{k-j}{\delta+1}} f_{GEV_{\xi,0,\sigma}}(y)dy \right] \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j (-1)^{\frac{(k-j)(\delta+2)}{\delta+1}} E\left(Y^{\frac{k-j}{\delta+1}} I_{[Y<0]} \right) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j E\left(Y^{\frac{k-j}{\delta+1}} I_{[Y \geq 0]} \right), \end{aligned} \tag{0.15}$$

sendo $Y \sim F_{GEV_{\xi,0,\sigma}}$ e I_A é a função indicadora do conjunto A; $I_A(\omega) = 1$ se $\omega \in A$ e $I_A(\omega) = 0$ caso contrário. Agora precisam-se analisar os casos $\xi > 0$ e $\xi < 0$.

Caso $\xi > 0$. Ao utilizar a expressão (0.1) em (0.15) e a substituição $t = \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}}$, para $r = [|\frac{k-j}{\delta+1}|]$, segue que

$$\begin{aligned} E(Y^k I_{[Y \geq 0]}) &= \int_{0}^{+\infty} y^r \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp\left\{ - \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} dy \\ &= \int_{1}^{+\infty} \left(\frac{\sigma}{\xi} t^{-\xi} - \frac{\sigma}{\xi} \right)^r e^{-t} dt. \end{aligned} \tag{0.16}$$

Em (0.16), novamente, utiliza-se o Binómio de Newton e obtem-se

$$E(Y^k I_{[Y \geq 0]}) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i \left(\frac{\sigma}{\xi} \right)^r \int_{1}^{+\infty} t^{-\xi(r-i)} e^{-t} dt. \tag{0.17}$$

Da mesma forma é obtido o k-ésimo momento de Y truncado na parte negativa

$$\begin{aligned} E(Y^k I_{[Y<0]}) &= \int_{-\frac{\sigma}{\xi}}^{0} y^r \frac{1}{\sigma} \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp\left\{ - \left[1 + \frac{\xi}{\sigma} y\right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} dy \\ &= \int_{0}^{1} \left(\frac{\sigma}{\xi} t^{-\xi} - \frac{\sigma}{\xi} \right)^r e^{-t} dt \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i \left(\frac{\sigma}{\xi} \right)^r \int_{0}^{1} t^{-\xi(r-i)} e^{-t} dt. \end{aligned} \tag{0.18}$$

A função gamma incompleta inferior (0.10) e gamma incompleta superior (0.9) são utilizadas para representar as integrais de (0.17) e (0.18), respectivamente. Com isto, a prova de (0.11) segue ao substituir essas atualizações na equação (0.14).

Caso $\xi < 0$. Repete-se o mesmo procedimento que para o caso $\xi > 0$ respeitando o suporte da densidade de $Y \sim F_{GEV_{\xi,0,\sigma}}$ que é dada por (0.1) para os valores $\{y : y \in (-\infty - \frac{\sigma}{\xi}]\}$.

Corolário 1. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,0}} = F_{\xi,\mu,\sigma}$. Então o k é-simo momento inteiro de X é dado por:

$$E(X^k) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{k-j} \Gamma(1 - \xi(k-j)). \tag{0.19}$$

Prova. De (0.15), quando $\delta = 0$, obtem-se

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j E\left(Y^{k-j}\right) \\ &= E\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j Y^{k-j}\right) \\ &= E(Y+\mu)^k, \end{aligned} \tag{0.20}$$

em que $Y + \mu \sim F_{\xi,\mu,\sigma}$, pois $Y \sim F_{xi,0,\sigma}$. A prova é finalizada com as expressões (0.17) e (0.18) e o fato que $\Gamma(x,s) + \gamma(x,s) = \Gamma(x)$.

Corolário 2. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$. Então, para $\xi > 0$, a esperança de X é dado por:

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1)^{\frac{\delta+2}{\delta+1}} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (-1)^i \gamma\left(1 - \xi\left(1-i\right), 1\right)\right] \\ &+ \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (-1)^i \Gamma\left(1 - \xi\left(1-i\right), 1\right)\right] \end{aligned} \tag{0.21}$$

e para $\xi < 0$ a esperança de X é dado por:

$$\begin{aligned} E(X) &= (-1)^{\frac{\delta+2}{\delta+1}} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (-1)^i \Gamma\left(1 - \xi\left(1-i\right), 1\right)\right] \\ &+ \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{\frac{1}{\delta+1}} \left[\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (-1)^i \gamma\left(1 - \xi\left(1-i\right), 1\right)\right]. \end{aligned} \tag{0.22}$$

Proposição 2. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$, $\xi = 0$. Então a função geratriz de momentos de X é dado por:

$$M_X(t) = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left[(-1)^{\frac{k(\delta+2)}{\delta+1}} E\left(Y^{\frac{k}{\delta+1}} I_{[Y<0]} \right) + E\left(Y^{\frac{k}{\delta+1}} I_{[Y\geq 0]} \right) \right], \tag{0.23}$$

$Y \sim F_{\xi,0,\sigma}$, $\xi = 0$.
Prova. Por definição tem-se que

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \exp\{tx\} \exp\left\{ -\frac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma} - \exp\left[-\frac{T_{\mu,\delta}(x)}{\sigma} \right] \right\} dx. \tag{0.24}$$

Ao usar a substituição $y = T_{\mu,\delta}(x)$ em (0.24) e o fato que $x = sng(\ln y^{-\sigma})|\ln y^{-\sigma}|^{\frac{1}{\delta+1}} + \mu$ obstem-se

$$M_X(t) = e^{\mu t} \int_0^{+\infty} \exp\left\{ sng(\ln y^{-\sigma})|\ln y^{-\sigma}|^{\frac{1}{\delta+1}} t \right\} \exp\{-y\} dy. \tag{0.25}$$

A nova substituição $s = \ln(y^{-\sigma})$ permite atualizar (**??**) por

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ sng(s)|s|^{\frac{1}{\delta+1}} t \right\} \exp\left\{ -\frac{s}{\sigma} - \exp\left[-\frac{s}{\sigma} \right] \right\} dy. \tag{0.26}$$

Para finalizar a prova utiliza-se a representação em série da função exponencial. Assim (0.26) é re-escrita pela equação

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{\mu t} \sum_{k=0}^{-\infty} \frac{t^k}{k!} (-1)^{\frac{k(\delta+2)}{\delta+1}} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sigma} s^{\frac{k}{\delta+1}} \exp\left\{ -\frac{s}{\sigma} - \exp\left[-\frac{s}{\sigma} \right] \right\} ds \\ &+ e^{\mu t} \sum_{k=0}^{-\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} s^{\frac{k}{\delta+1}} \exp\left\{ -\frac{s}{\sigma} - \exp\left[-\frac{s}{\sigma} \right] \right\} ds. \end{aligned}$$

Corolário 3. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,0}} = F_{\xi,\mu,\sigma}$. Então a função geratriz de momwntoa de X é dada por:

$$M_X(t) = e^{\mu t} \Gamma(1 - \sigma t). \tag{0.27}$$

Prova. Quando $\delta = 0$ a expressão (0.23) se reduz a

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E\left(Y^{\frac{k}{\delta+1}} \right) \\ &= e^{\mu t} E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tY)^k}{k!} \right) \\ &= e^{\mu t} E\left(e^{tY} \right) \\ &= e^{\mu t} \Gamma(1 - \sigma t). \end{aligned}$$

Corolário 4. Seja $X \sim F_{BG_{\xi,\mu,\sigma,\delta}}$,com $\xi > 0$. Então, a esperança de X é dado por:

$$E(X) = \mu E\left(Y^{\frac{1}{\delta+1}}\right) + (-1)^{\frac{\delta+2}{\delta+1}} E\left(Y^{\frac{1}{\delta+1}} I_{[Y<0]}\right) + E\left(Y^{\frac{1}{\delta+1}} I_{Y\geq 0}\right), \tag{0.28}$$

$Y \sim F_{\xi,0,\sigma}$, $\xi = 0$.

Prova. A prova é direta ao avaliar a derivada de (0.23) em $t = 0$.