KU LEUVEN

Experimentele basistechnieken in de natuurkunde (G0P32A)

Bachelor fysica

Prof. Riccardo Raabe (raabe@kuleuven.be)

Prof. Joris Van de Vondel (joris.vandevondel@kuleuven.be)

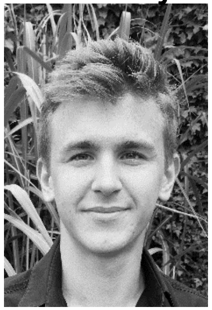
Guillaume Libeert

@fys

Lens dedroog

@fys

Wout Keijers



@fys

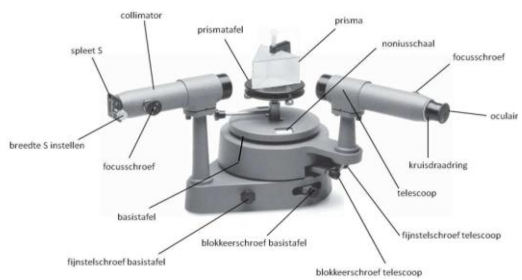
Dmitry Kouznetsov

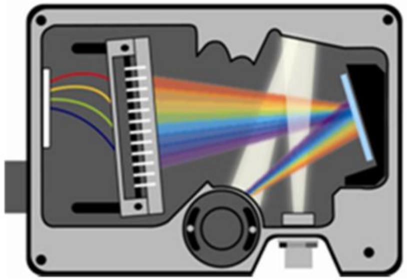
@fys

Patrick Baumans

@fys

Toepassing les: spectrometer (analoog + digitaal)





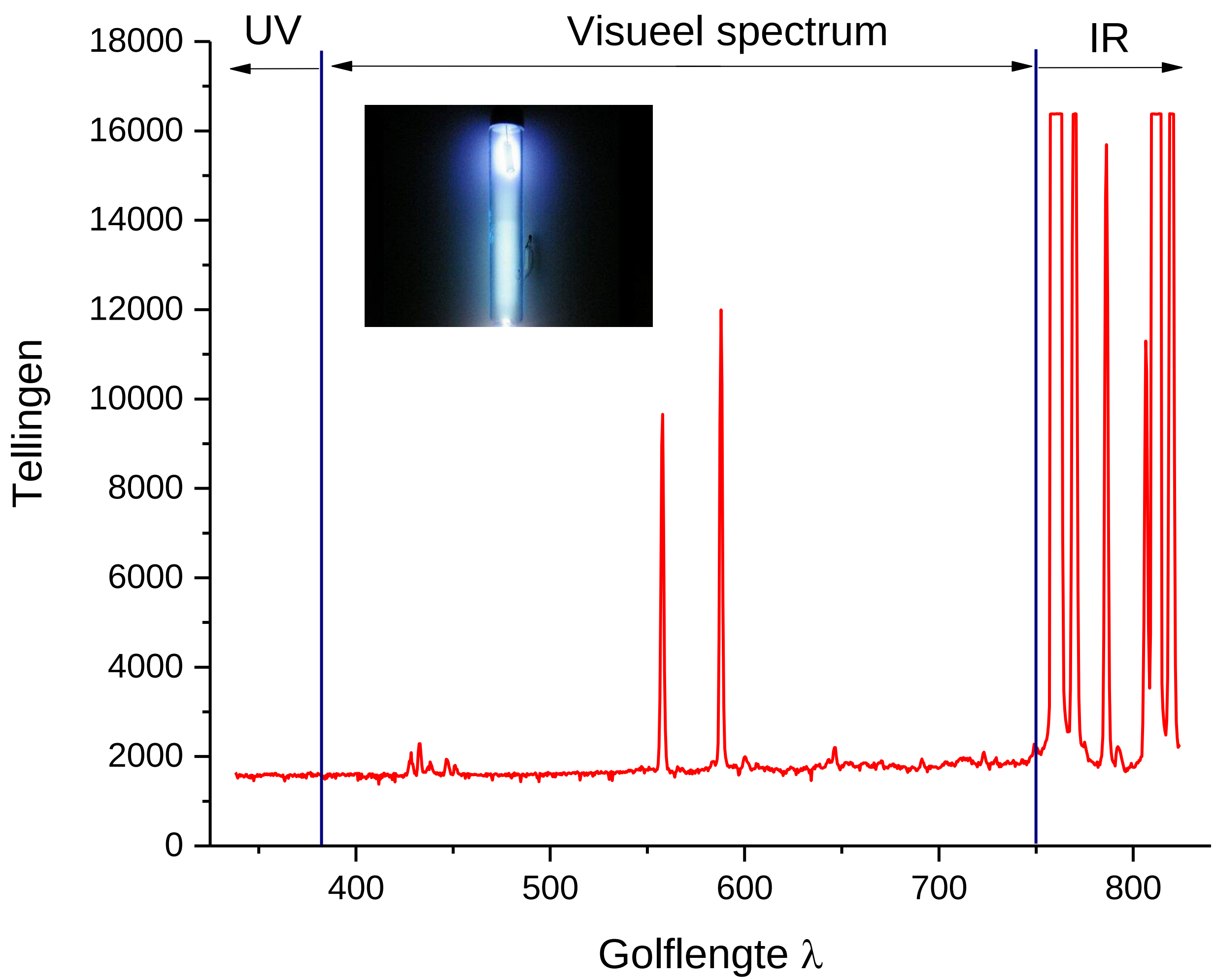
Werkelijke waarde

Invoer → sensor → Signaal conditionering element → Signaal verwerkingselement → Data presentatie element → Uitvoer

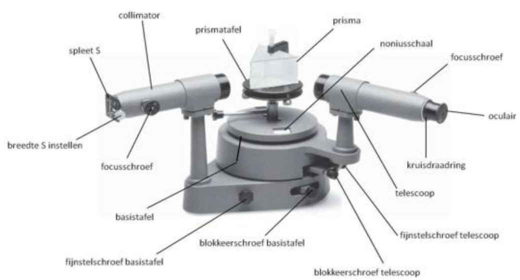
Gemeten waarde

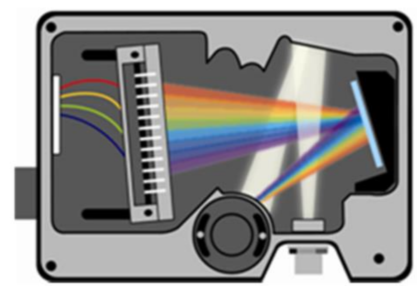
- **Verschil in bereik?**
- Invloed van de omgeving?
- Wat bepaalt de resolutie van de detector?

Toepassing les: spectrometer (analoog + digitaal)



Toepassing les: spectrometer (analoog + digitaal)





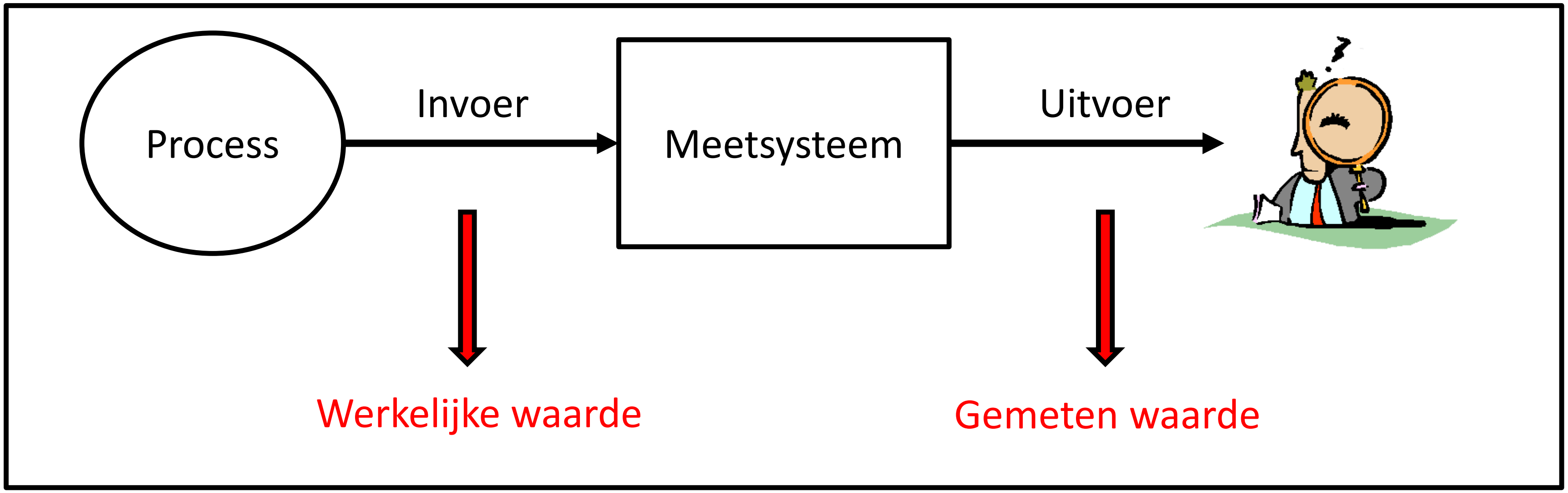
Werkelijke waarde

Invoer → sensor → Signaal conditionering element → Signaal verwerkingsele ment → Data presentatie element → Uitvoer

Gemeten waarde

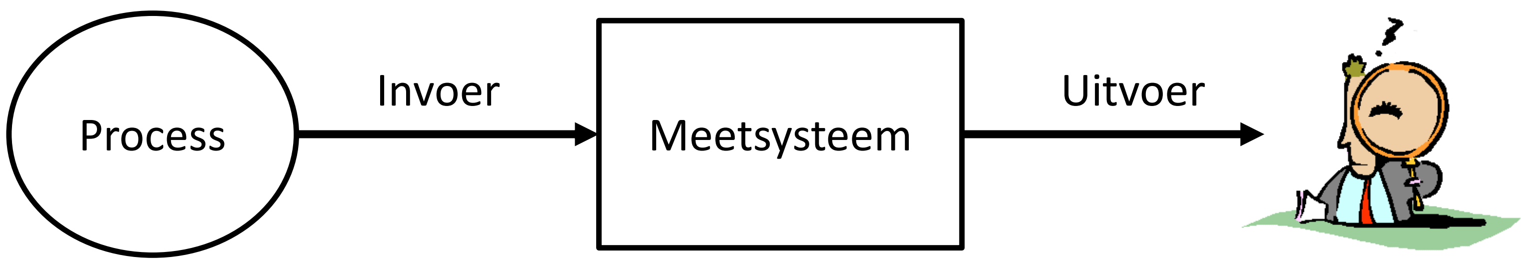
- Verschil in bereik?
- **Invloed van de omgeving?**
- Wat bepaalt de resolutie van de detector?

Les 1: Algemene definitie van een meetsysteem:

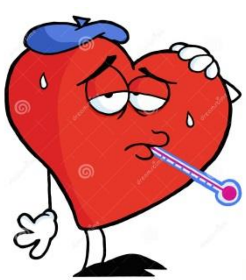


Les 2: Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Meetsysteem: Linkt de observator aan het proces



Vb: Thermometer



T(t), Varieert in de tijd.
Dynamische karakter van een element (sensor) is belangrijk !!!

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

1) Eerste orde elementen

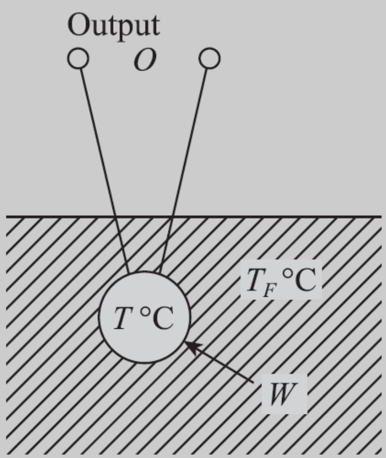


Figure 4.1 Temperature sensor in fluid.

Initieël: t = 0- (juist voor verhoging van bad temperatuur)

$T(0-)=T_F(0-)$ (T_F = temperatuur Vloeistof, T = temperatuur sensor)

Op t = 0 => T_F naar omhoog

Warmte evenwicht vergelijking:

Δwarmte inhoud sensor = Warmte instroom - ~~warmte uitstroom~~

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

"Newton's law of cooling:" Warmte instroom per tijdseenheid =UA(T_F-T) Watts (J/s)

$U\ (Wm^{-2}\ °C^{-1})$=warmte transfer coëfficient

$A\ (m^2\ )$=effectieve warmte transfer oppervlak

Verandering van de verhoging van de Warmte inhoud per tijdseenheid = MC$\frac{d}{dt}[T - T(0-)]$

$C\ (Jkg^{-1}\ °C^{-1})$=specifieke warmte

$M\ (Kg\ )$=massa

Eerste orde lineaire differentiaal vergelijking:

Eenheid ←

$$\frac{MC}{UA}\frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = \Delta T_F$$

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Eerste orde lineaire differentiaal vergelijking:

$$\frac{MC}{UA}\frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = \Delta T_F$$

Perfect, maar niet de meest bruikbare weergave (vooral als we naar meedere elementen gaan kijken)

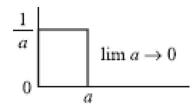
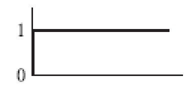
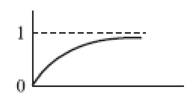
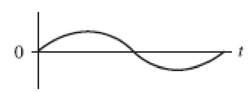
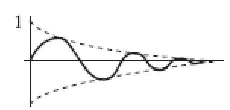
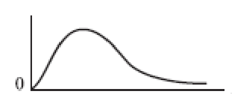
Laplace transformaties:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \qquad s = \sigma + j\omega$$

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Table 4.1 Laplace transforms of common time functions $f(t)$.[a]

$$\mathscr{L}[f(t)] = \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Function	Symbol	Graph	Transform
1st derivative	$\frac{d}{dt} f(t)$		$s\bar{f}(s) - f(0-)$
2nd derivative	$\frac{d^2}{dt^2} f(t)$		$s^2\bar{f}(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-)$
Unit impulse	$\delta(t)$		1
Unit step	$\mu(t)$		$\frac{1}{s}$
Exponential decay	$\exp(-\alpha t)$		$\frac{1}{s+\alpha}$
Exponential growth	$1 - \exp(-\alpha t)$		$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$
Sine wave	$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Phase-shifted sine wave	$\sin(\omega t + \phi)$		$\frac{\omega \cos\phi + s \sin\phi}{s^2+\omega^2}$
Exponentially damped sine wave	$\exp(-\alpha t) \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
Ramp with exponential decay	$t \exp(-\alpha t)$		$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$

[a] Initial conditions are at $t = 0-$, just prior to $t = 0$.

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Eerste orde lineaire differentiaal vergelijking:

$$\frac{MC}{UA}\frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = \Delta T_F$$

Laplace transformatie van deze differentiaal vergelijking:

$$(\tau s + 1)\Delta\bar{T}(s) = \Delta\bar{T}_F(\mathrm{s})$$

Transfer functie G(s):

$$G(s) = \frac{\bar{f}_0\,(\mathrm{s})}{\bar{f}_i(\mathrm{s})}$$

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Transfer functie G(s):

$$G(s) = \frac{\overline{f_0}\,(\mathrm{s})}{\overline{f_i}(\mathrm{s})}$$

Transfer functie G(s) voor een eerste-orde element:

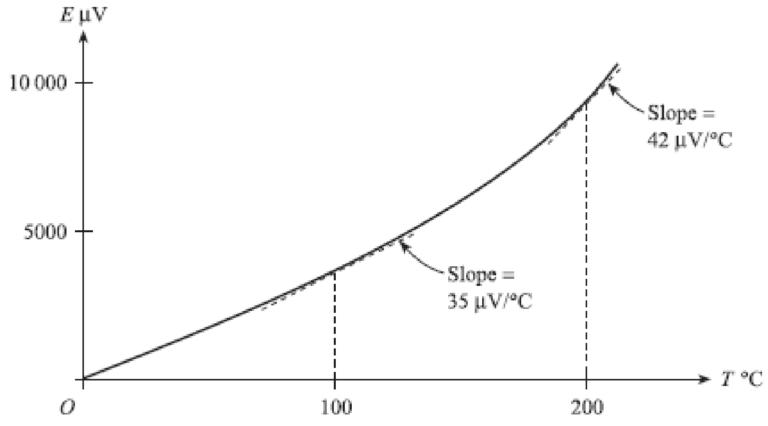
$$G(s) = \frac{\Delta\bar{T}(s)}{\Delta\bar{T}_F(\mathrm{s})} = \frac{1}{1+\tau s}$$

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Transfer functie G(s) voor een eerste-orde element:

$$\frac{\Delta\bar{O}(s)}{\Delta\bar{T}_F(\mathrm{s})} = \frac{\Delta O}{\Delta T}\frac{\Delta\bar{T}(s)}{\Delta\bar{T}_F(\mathrm{s})}$$

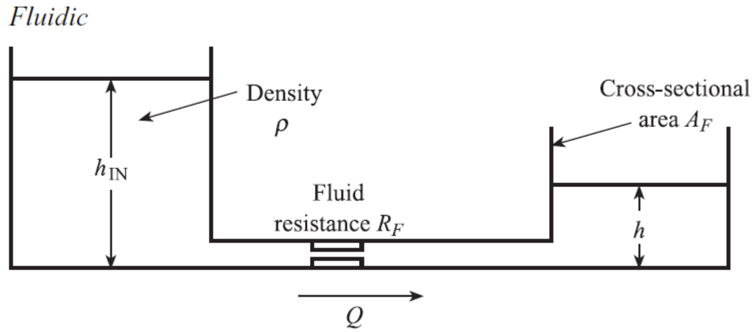
Vb: Thermokoppel

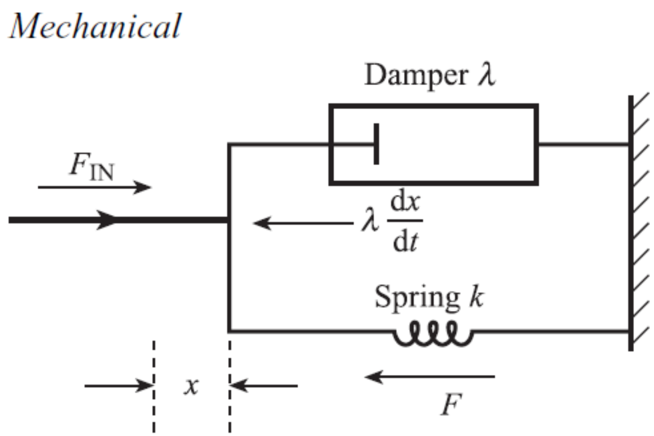


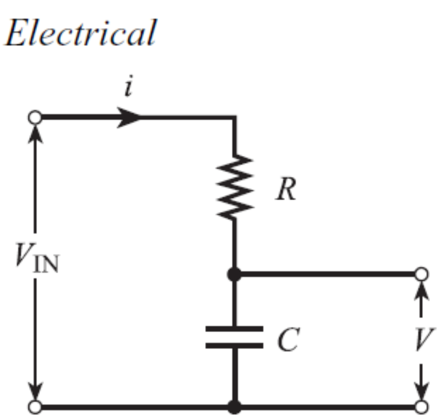
$$\frac{\Delta\bar{E}(s)}{\Delta\bar{T}_F(\mathrm{s})} = 35 \times \frac{1}{1+10s}$$

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Andere eerste orde systemen: Allemaal gekarakteriseerd door een weerstand en capaciteit

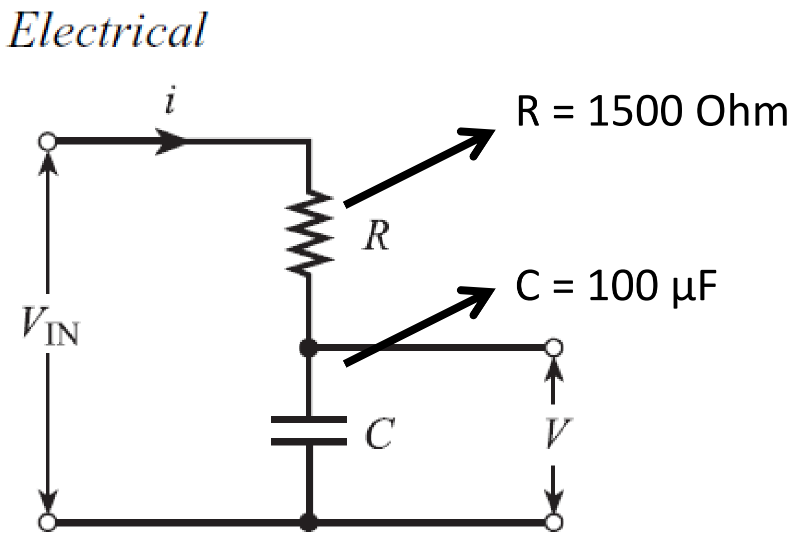






Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Oefening: Bepaal de transferfunctie van volgend systeem



Respons op een stapgewijze verhoging van de invoer

1ste orde element:

Transfer functie G(s) voor een eerste-orde element:

$$G(s) = \frac{\bar{f}(s)}{\bar{f}_i(\mathrm{s})} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Laplace transformatie van een stapfunctie:

$$\bar{f}_i(\mathrm{s}) = \frac{1}{s}$$

Uitdrukking voor de laplace transformatie van het uitgaand signaal

$$\bar{f}(s) = G(s)\bar{f}_i(\mathrm{s}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \frac{1}{\tau})}$$

Respons op een stapgewijze verhoging van de invoer

1ste orde element:

Uitdrukking voor de laplace transformatie van het uitgaand signaal

$$\bar{f}(s) = G(s)\bar{f_i}(\mathrm{s}) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \frac{1}{\tau})}$$

Uitdrukking voor de tijdsvariatie van het uitgaand signaal

$$f(t) = 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

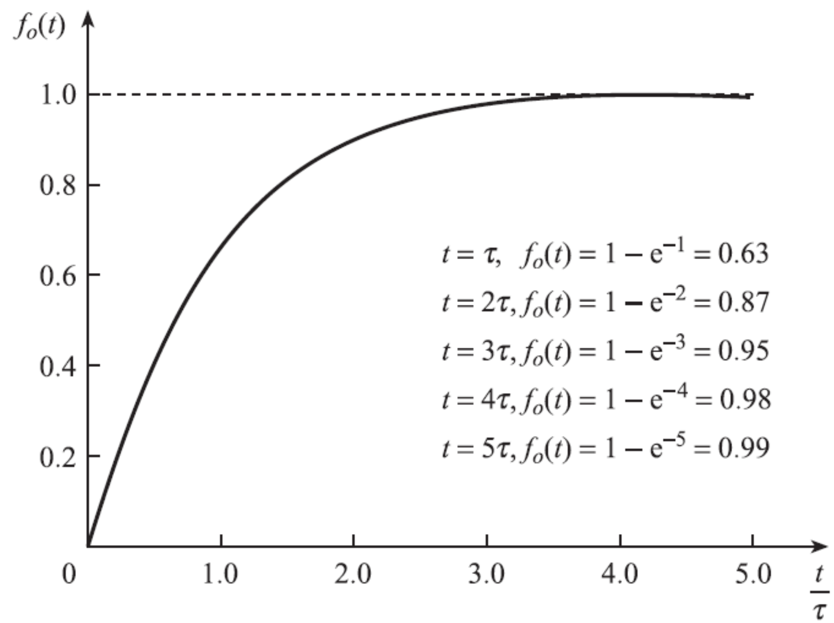
Klopt dit?

Respons op een stapgewijze verhoging van de invoer

Uitdrukking voor de tijdsvariatie van het uitgaand signaal

$$V(t) = 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

Figure 4.6 Response of a first-order element to a unit step.



Respons op een sinusoïdale verandering van de invoer

1ste orde element:

Transfer functie G(s) voor een eerste-orde element:

$$G(s) = \frac{\bar{f}(s)}{\bar{f}_i(\mathrm{s})} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

Laplace transformatie van een sinusfunctie met amplitude $\hat{I}_0$:

$$\bar{f}_i(\mathrm{s}) = \widehat{I_0} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Uitdrukking voor de tijdsvariatie van het uitgaand signaal

Werk dit zelf uit!

$$f(t) = \frac{\omega\tau\widehat{I_0}}{1 + \tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{\widehat{I_0}}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Samenvatting: Bepaal de respons van dit systeem als $V_{in} = \widehat{V_{in}}\sin(\omega t)$

Uitdrukking voor de tijdsvariatie van het uitgaand signaal

$$V(t) = \frac{\omega\tau\widehat{V_{in}}}{1+\tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{\widehat{V_{in}}}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\sin(\omega t + \phi)$$

Met $\tan(\phi) = -\omega\tau$

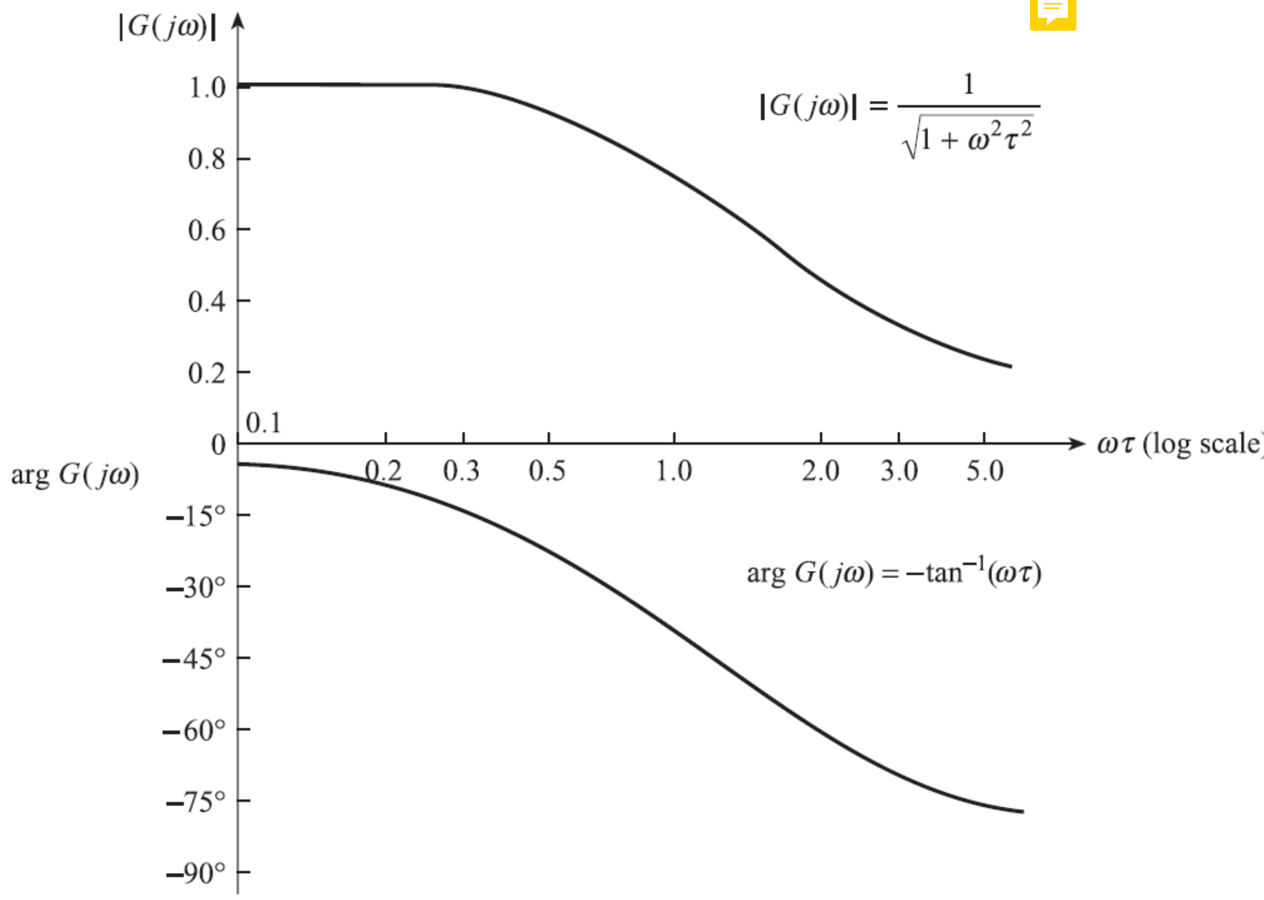
Na voldoende tijd (transiente term dooft uit als t > τ) geldt (toon aan):

(a) V is ook een sinus golf
(b) De frequentie van V is ook ω
(c) De amplitude van V is $\hat{V} = |G(j\omega)|\widehat{V_{in}}$
(d) Het fase verschil tussen O en I is ϕ=arg G(jω)

Respons op een sinusoïdale verandering van de invoer

1ste orde element:

Figure 4.8 Frequency response characteristics of first-order element with $G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$.



Respons op een sinusoïdale verandering van de invoer

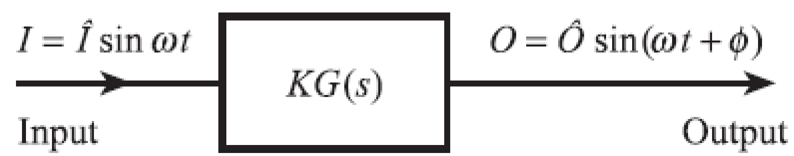
Algemeen geldig voor alle elementen met een transfer functie G(s) en een statische gevoeligheid K:

(a) O is ook een sinus golf
(b) De frequentie van O is ook ω
(c) De amplitude van O is $\hat{O} = K|G(j\omega)|\hat{I}$
(d) Het fase verschil tussen O en I is $\phi = \arg G(j\omega)$

Belangrijk: Voor een lineair systeem is dit uitermate praktisch om de respons te berekenen

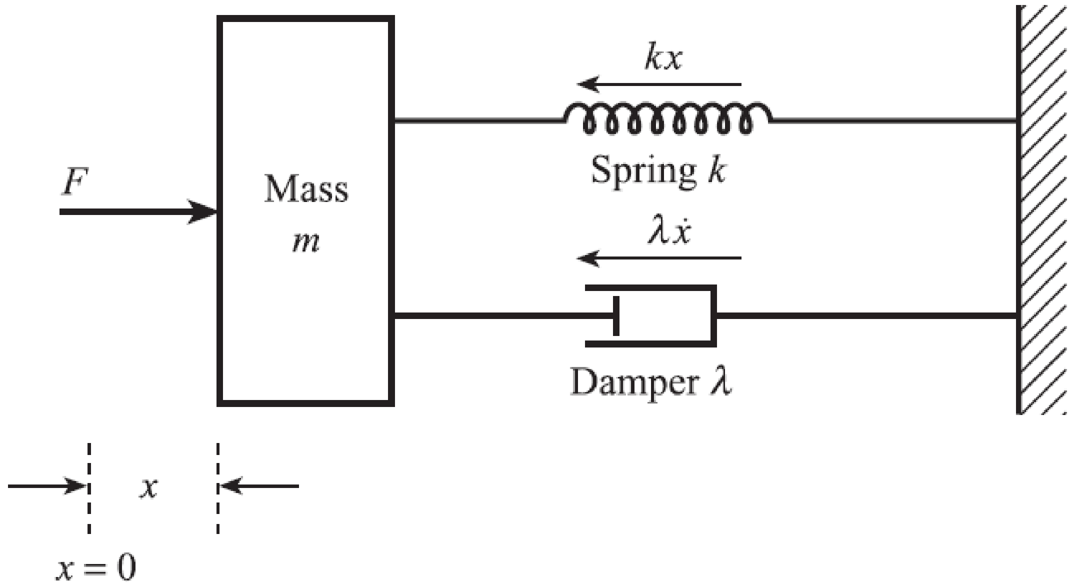
geen Laplace transformaties meer nodig !!!

Figure 4.9 Frequency response of an element with linear dynamics.



Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

1) Tweede orde element (Mechanische resonantie)



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xi = \frac{\lambda}{2\sqrt{km}}$$

Tweede orde lineaire differentiaal vergelijking:

$$\frac{1}{{\omega_n}^2}\frac{d^2\Delta x}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\frac{d\Delta x}{dt} + \Delta x = \frac{1}{k}\Delta F$$

Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Tweede orde lineaire differentiaal vergelijking:

$$\frac{1}{{\omega_n}^2}\frac{d^2\Delta x}{dt^2}+\frac{2\epsilon}{\omega_n}\frac{d\Delta x}{dt}+\Delta x=\frac{1}{k}\Delta F$$

Laplace transformatie van deze differentiaal vergelijking: **Werk dit zelf uit!**

$$\left[\frac{1}{{\omega_n}^2}s^2+\frac{2\epsilon}{\omega_n}s+1\right]\Delta\bar{x}(s)=\frac{1}{k}\Delta\bar{F}\ (\mathrm{s})$$

Transfer functie G(s):

$$G(s)=\frac{1}{\left[\frac{1}{{\omega_n}^2}s^2+\frac{2\epsilon}{\omega_n}s+1\right]}$$

Respons op een sinusoïdale verandering van de input

Algemeen geldig voor alle elementen met een transfer functie G(s) :

(a) O is ook een sinus golf
(b) De frequentie van O is ook ω
(c) De amplitude van O is $\hat{O}=K|G(j\omega)|\hat{I}$
(d) Het fase verschil tussen O en I is $\phi=\arg G(j\omega)$

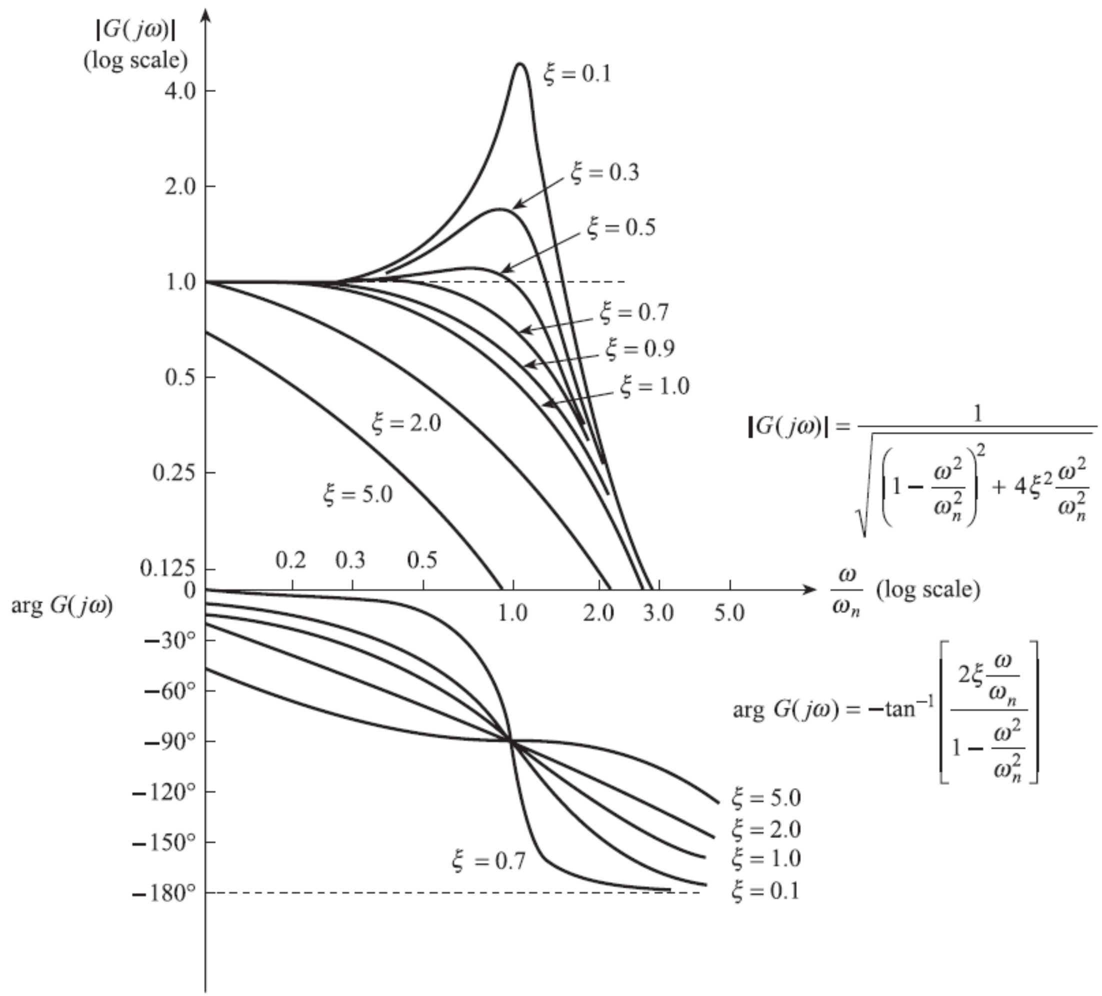
Pas dit toe op een tweede orde element

Respons op een sinusoïdale verandering van de input

Voorbeeld: Bereken de frequentie respons van een tweede orde element

Figure 4.10 Frequency response characteristics of second-order element with

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

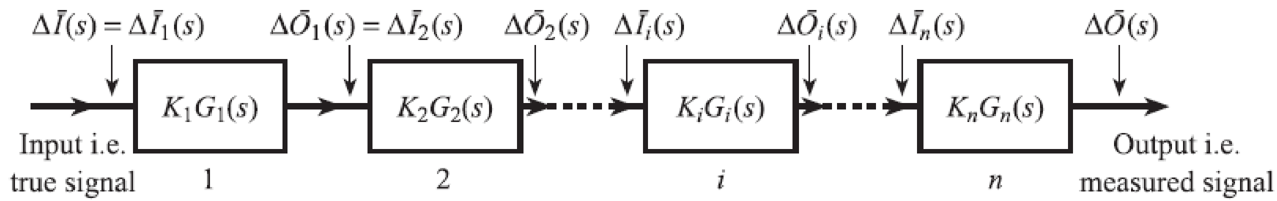


$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xi = \frac{\lambda}{2\sqrt{km}}$$

Dynamische fout van een meetsysteem

Figure 4.11 Complete measurement system with dynamics.



Stel te statische fout = 0, dus

$$K_1\ K_2\ K_3\ K_4 \ldots\ K_n = 1$$

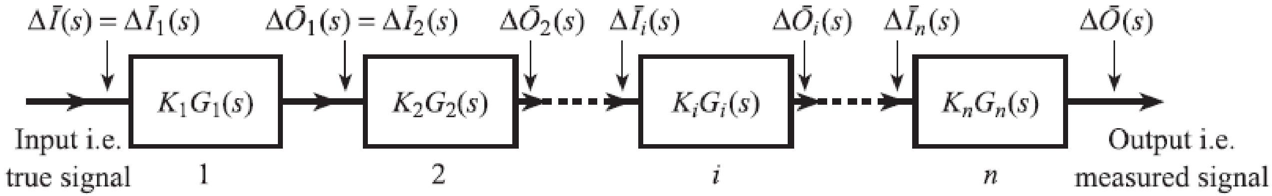
De transformatie functie is product van de inviduele elementen:

Transfer function for complete measurement system

$$\frac{\Delta\bar{O}(s)}{\Delta\bar{I}(s)} = G(s) = G_1(s)G_2(s)\ldots G_i(s)\ldots G_n(s) \qquad [4.41]$$

Dynamische fout van een meetsysteem

Figure 4.11 Complete measurement system with dynamics.



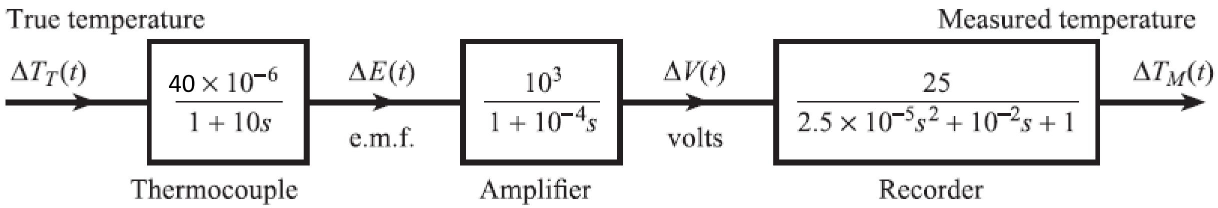
$\Delta O(t) = L^{-1}(G(s)\Delta\bar{I}(s))$ met L^{-1} de inverse Laplace functie

Dus de dynamische fout:

$$\mathrm{E}(t) = \Delta O(t) - \Delta I(t) = L^{-1}(G(s)\Delta\bar{I}(s)) - \Delta I(t)$$

Dynamische fout van een meetsysteem (voorbeeld 1)

Figure 4.12 Simple temperature measurement system with dynamics.



Bereken de dynamische fout bij een sinusoïdale invoer met amplitude van 20°C en periode 6s ($\omega \approx 1 rad/s$)?

Hint:

(a) O is ook een sinus golf
(b) De frequentie van O is ook ω
(c) De amplitude van O is Ô=K|G(jω)|Î
(d) Het fase verschil tussen O en I is ϕ=arg G(jω)

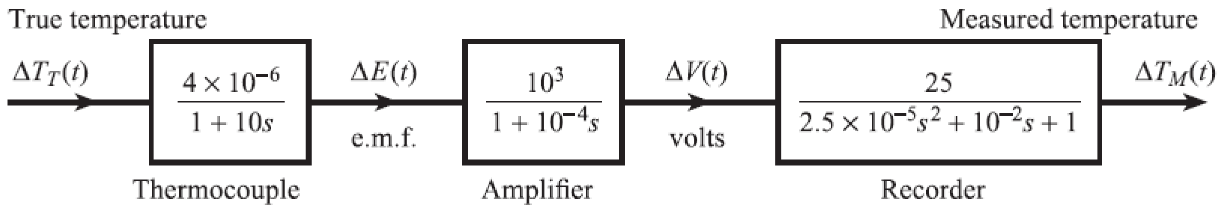
Intermezzo de complexe getallen

Eigenschap 4.1
Het product van twee complexe getallen heeft

- *als argument: de som van de argumenten van de factoren*
- *als modulus: het product van de moduli van de factoren.*

Dynamische fout van een meetsysteem (voorbeeld 1)

Figure 4.12 Simple temperature measurement system with dynamics.

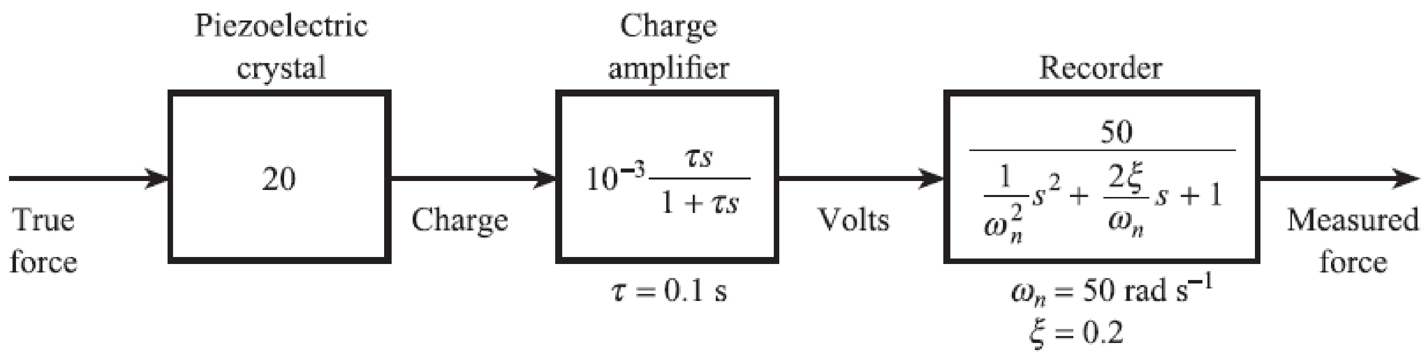


$$\Delta O(t) = |G(j\omega)|\hat{I}\sin(\omega t + \phi)$$

$$\mathrm{E}(t) = \hat{I}\{|G(j\omega)|\sin(\omega t + \phi) - \sin(\omega t)\} \qquad met\ \phi = \arg G(j\omega)$$

Extra oefening (Thuis):

Een krachtmeetsysteem bestaat uit een piëzokristal, ladingsversterker en een recorder zoals weergegeven in onderstaande figuur:



Opgave:

1) Bepaal de frequentie afhankelijke respsonse (sinus invoer) van de ladingsversterker (2de element) aan de hand van de gegeven transferfunctie?

2) Bereken de dynamische fout van het totale systeem voor een invoersignaal:

$$F(t) = 50[\sin(10t) + \frac{1}{3}\sin(30\mathrm{t}) + \frac{1}{5}\sin(50\mathrm{t})]$$

Les 2: Dynamische eigenschappen van een meetsysteem

Welke keten wordt door voorgaande transfer functie beschreven?

A)

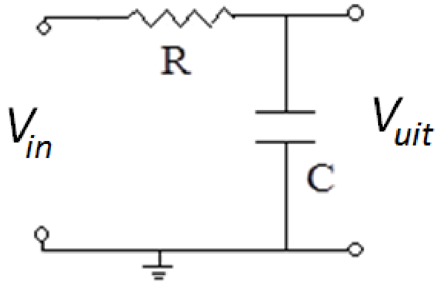


Fig. 2. *RC- keten*

B)

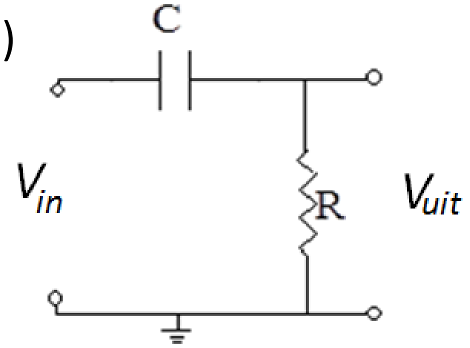


Fig. 3. *CR- keten*

C)

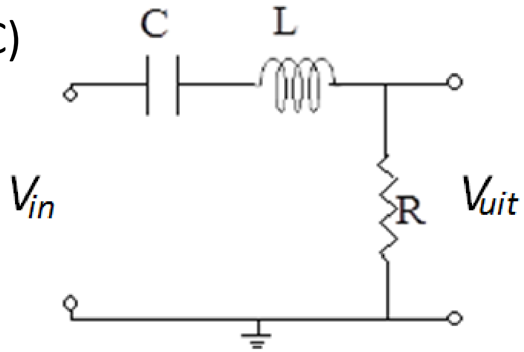


Fig. 3. *RLC- keten*

Eerste orde lineaire differentiaal vergelijking:

$$\frac{MC}{UA}\frac{d\Delta T}{dt} + \Delta T = \Delta T_F$$

Les 2: Respons op een sinus. verandering van de invoer

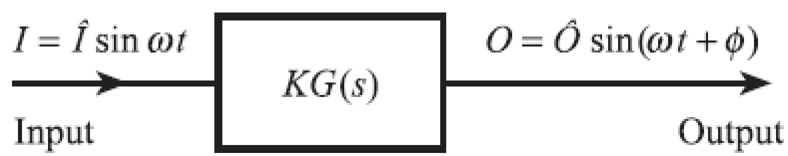
Algemeen geldig voor alle elementen met een transfer functie G(s) en een statische gevoeligheid K:

(a) O is ook een sinus golf
(b) De frequentie van O is ook ω
(c) De amplitude van O is Ô=K|G(jω)|Î
(d) Het fase verschil tussen O en I is ϕ=arg G(jω)

Belangrijk: Voor een lineair systeem is dit uitermate praktisch om de respons te berekenen

geen Laplace transformaties meer nodig !!!

Figure 4.9 Frequency response of an element with linear dynamics.



Pas dit toe op keten 2 en verifieer dat dit een hoogdoorlaat filter is?

Dynamische fout van een meetsysteem

In praktijk veelal periodische signalen: $f(t) = f(t+T) = f(t+2T)$.......

Gebruik van Fourier Analyse:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n\ 1}^{n\ \infty} a_n \cos n\omega_1 t + \sum_{n\ 1}^{n\ \infty} b_n \sin n\omega_1 t \qquad [4.51]$$

where

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos n\omega_1 t\, \mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin n\omega_1 t\, \mathrm{d}t \qquad [4.52]$$

and

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \text{average value of } f(t) \text{ over } T$$

Dynamische fout van een meetsysteem

Stel $\Delta I(t)$ is oneven functie: $f(t) = -f(-t)$ en neem $a_0 = 0$

$$\Delta I(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \widehat{I_n} \sin(n\omega_1 t)$$

Stel $\Delta I(t) = \widehat{I_n} \sin(n\omega_1 t)$, dan

$$\Delta O(t) = \widehat{I_n}\, |G(jn\omega_1)| \sin(n\omega_1 t + \phi_n) \; met \; \phi_n = Arg[G(jn\omega_1)]$$

Dynamische fout van een meetsysteem

Superpositie principe:

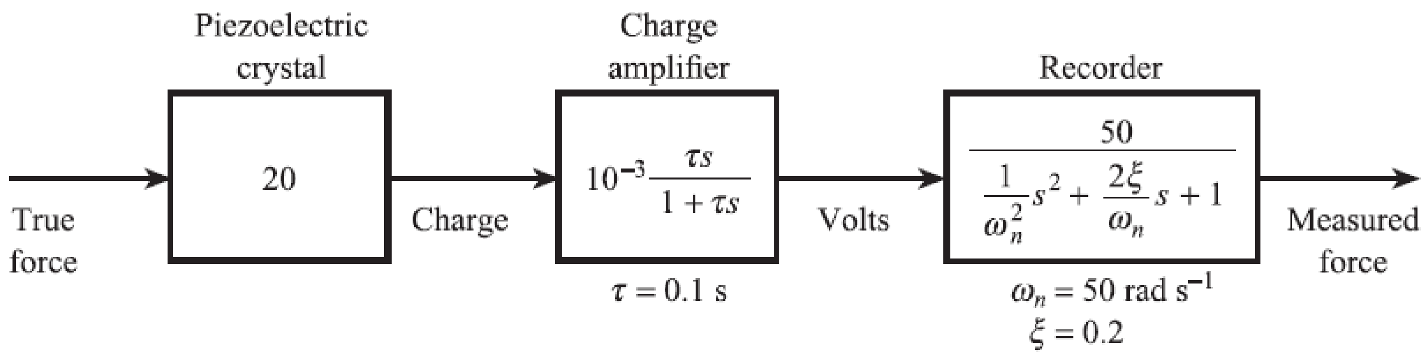
Als Invoer I_1 een uitvoer O_1 veroorzaakt en invoer I_2 een uitvoer O_2 veroorzaakt dan veroorzaakt een invoer $I_1 + I_2$ een uitvoer $O_1 + O_2$.

$$\Delta O(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \widehat{I_n}\,|G(jn\omega_1)|\sin(n\omega_1 t + \phi_n)$$

$$\Delta E(t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{\widehat{I_n}\,|G(jn\omega_1)|\sin(n\omega_1 t + \phi_n) - \sin(n\omega_1 t)\right\}$$

Les 2: Extra oefening:

Een krachtmeetsysteem bestaat uit een piëzokristal, ladingsversterker en een recorder zoals weergegeven in onderstaande figuur:



Opgave:

1) Bepaal de frequentie afhankelijke respsonse (sinus invoer) van de ladingsversterker aan de hand van de gegeven transferfunctie?

2) Bereken de dynamische fout van het totale systeem voor een invoersignaal:

$$F(t) = 50[\sin(10t) + \frac{1}{3}\sin(30\text{t}) + \frac{1}{5}\sin(50\text{t})]$$

Dynamische fout van een meetsysteem

Voorbeeld:

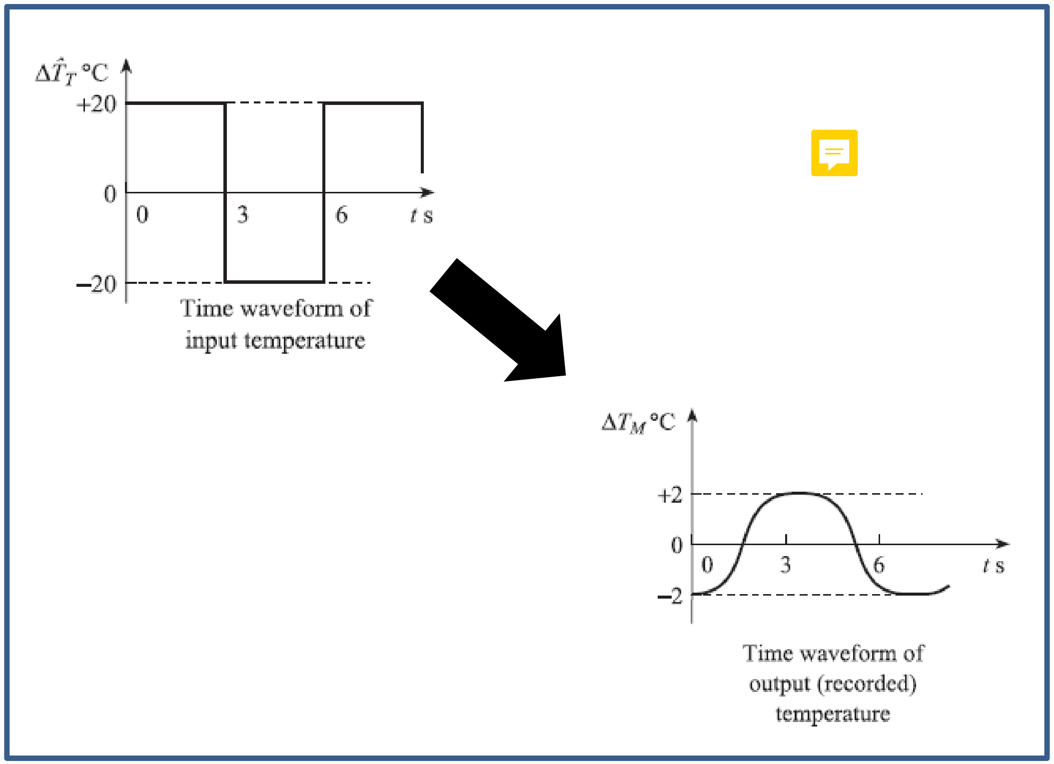
Invoer van het temperatuur meetsysteem is een "square wave" functie met amplitude 20 °C en periode T = 6s. De Fourier series van het invoer signaal zijn:

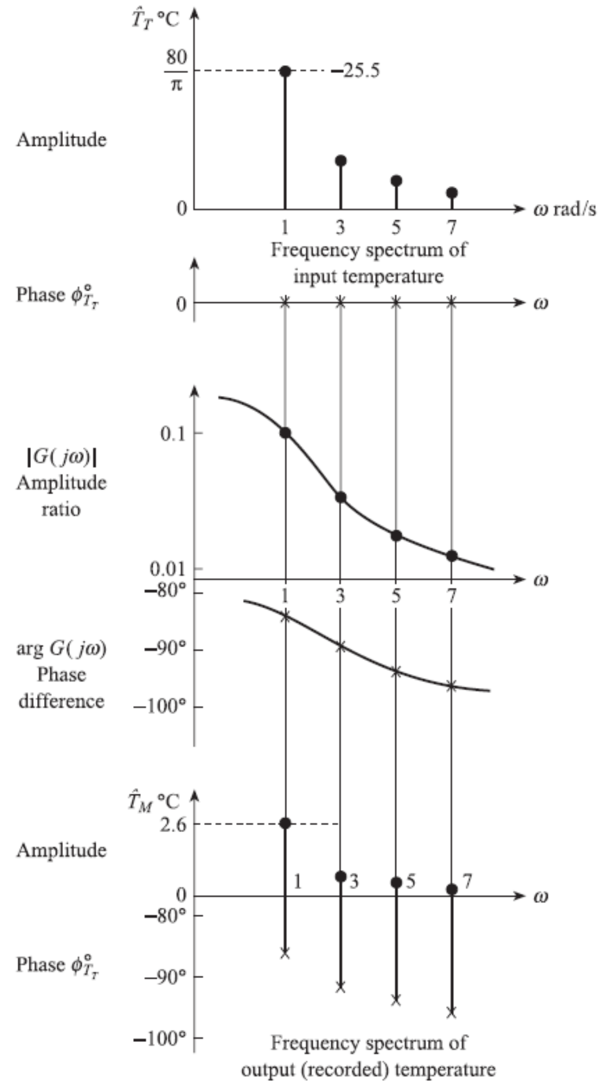
$$\Delta T_r(t) = \frac{80}{\pi}\left[\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \cdots..\right]$$

Bepaal het uitvoer signaal?

Dynamische fout van een meetsysteem

$$\Delta T_M(t) = \frac{80}{\pi}[0.100\ \sin(t - 85°) + 0.011\ \sin(3t - 90°)$$
$$+ 0.004\ \sin(5t - 92°) + 0.002\ \sin(7t - 93°)]$$





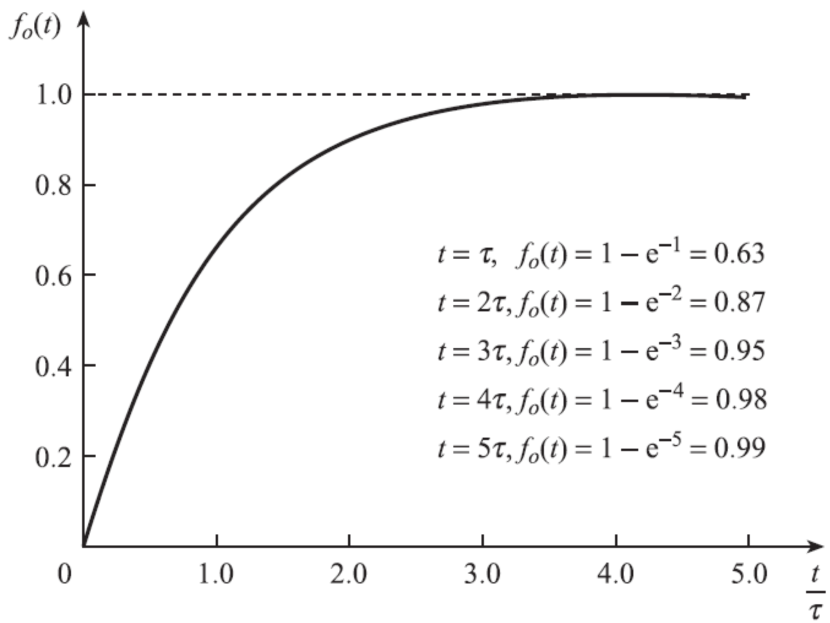
Kunnen we dynamische response nuttig gebruiken?

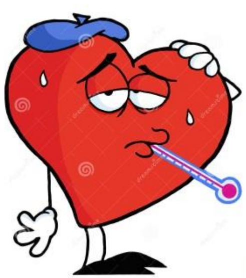
Bepalen van dynamische fout

Uitdrukking voor de tijdsvariatie van het uitgaand signaal

$$V(t) = 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

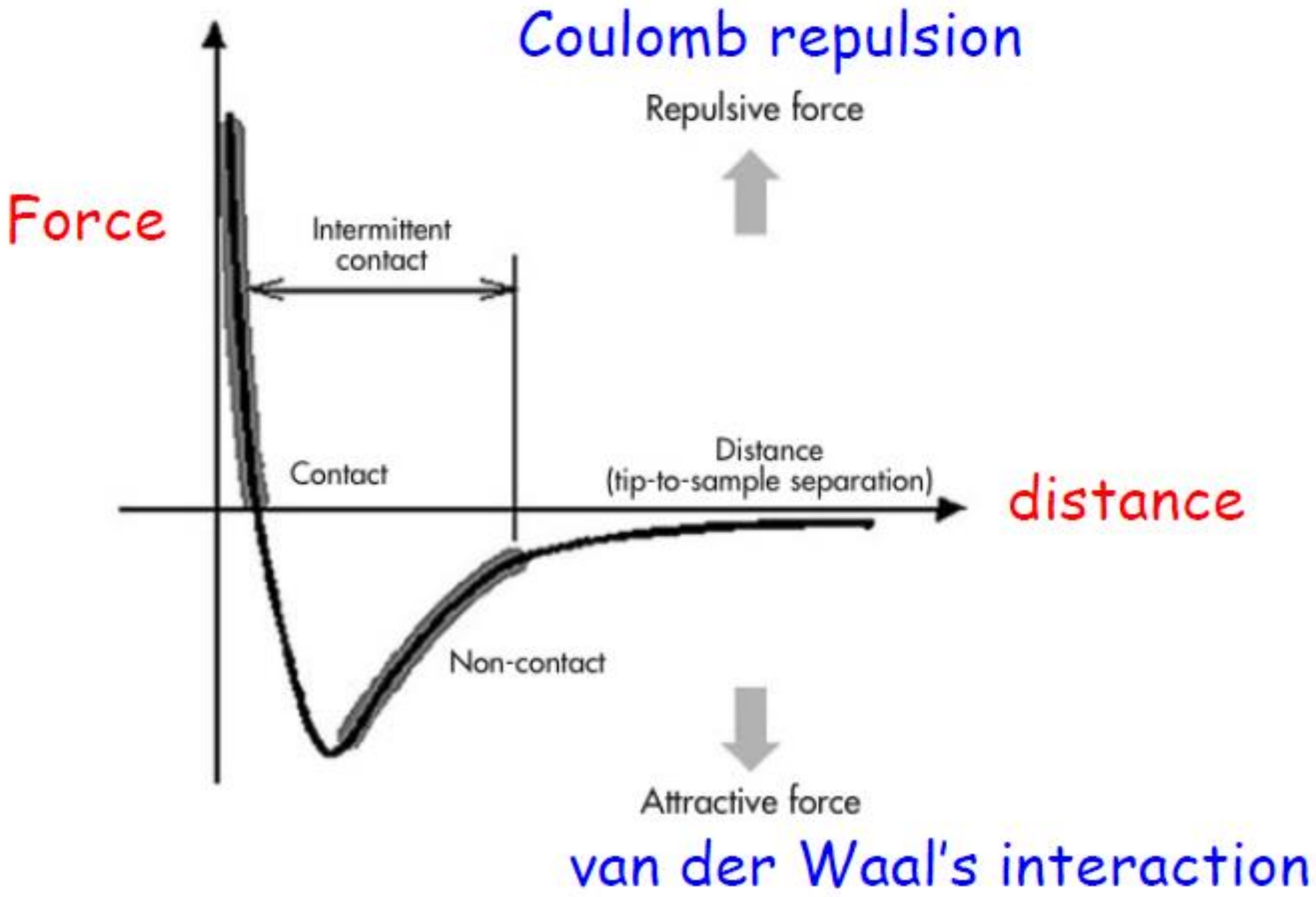
Figure 4.6 Response of a first-order element to a unit step.





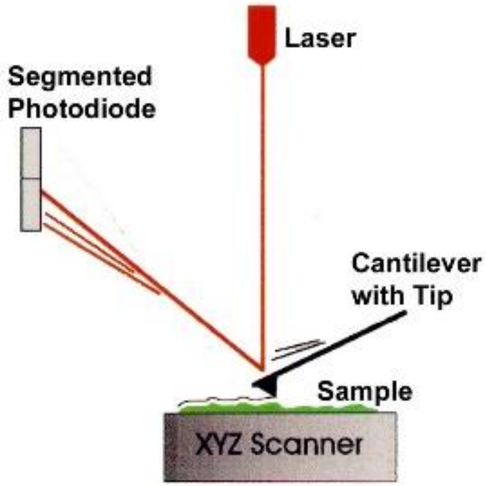
Meetsysteem: Verhoog gevoeligheid van meetsysteem

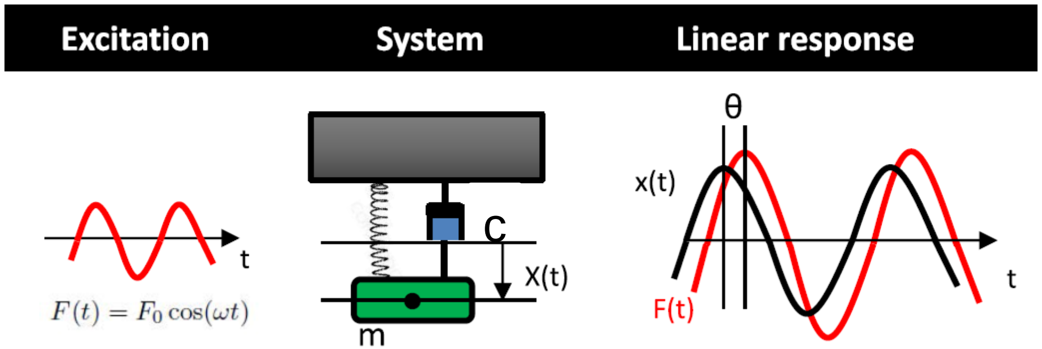
Hoe afstand meten?



Meetsysteem: Verhoog gevoeligheid van meetsysteem

Atomaire krachten microscopie



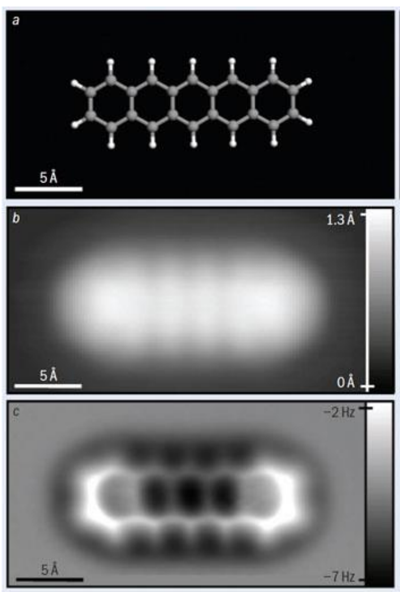


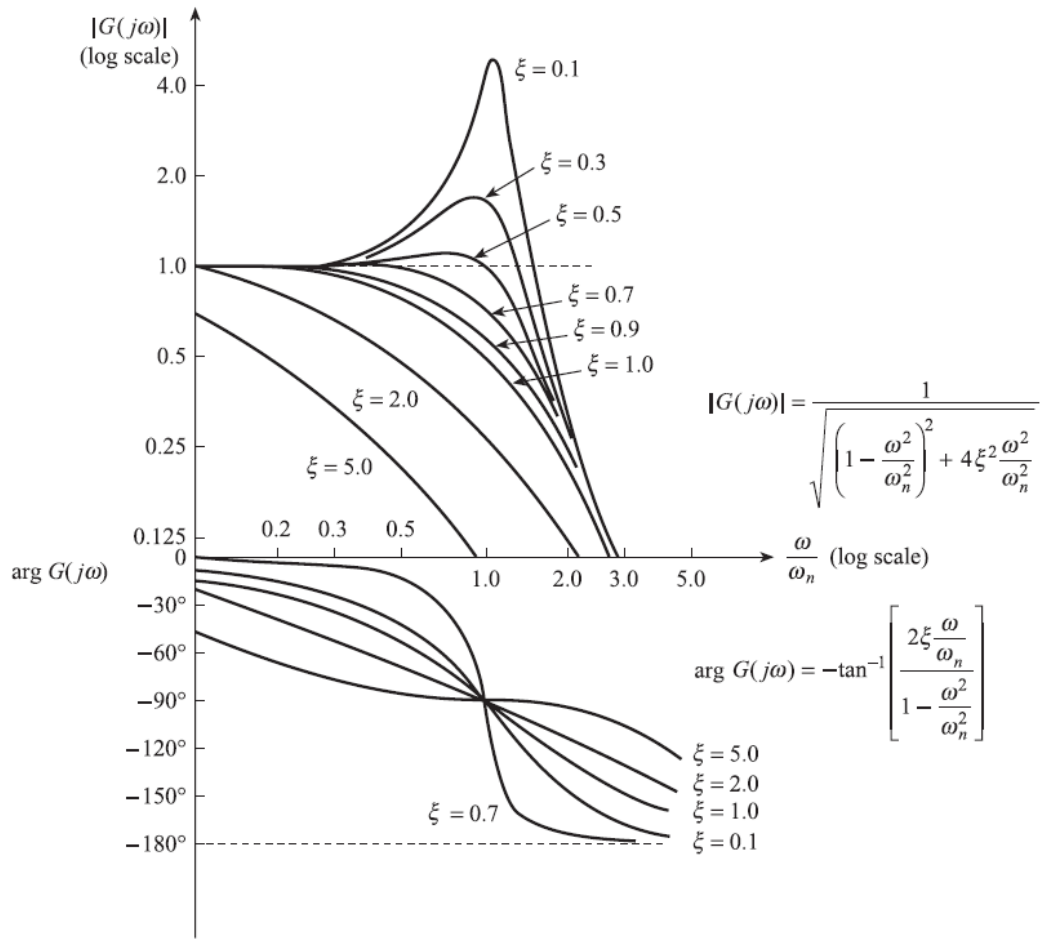
Meetsysteem: Verhoog gevoeligheid van meetsysteem

Atomaire krachten microscopie

Figure 4.10 Frequency response characteristics of second-order element with

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$





Signalen en ruis in metingen

Meetsysteem: - Statische karakteristieken

Aanname: Fluctuaties (ruis) op de invoeren (I, I_M en I_I) zijn normaalverdeeld +

$$O = KI + a + \mathrm{N(I)} + K_M I_M I + K_I I_I$$

$$\bar{O} = K\bar{I} + a + \mathrm{N}(\bar{I}) + K_M \overline{I_M}\bar{I} + K_I \overline{I_I}$$

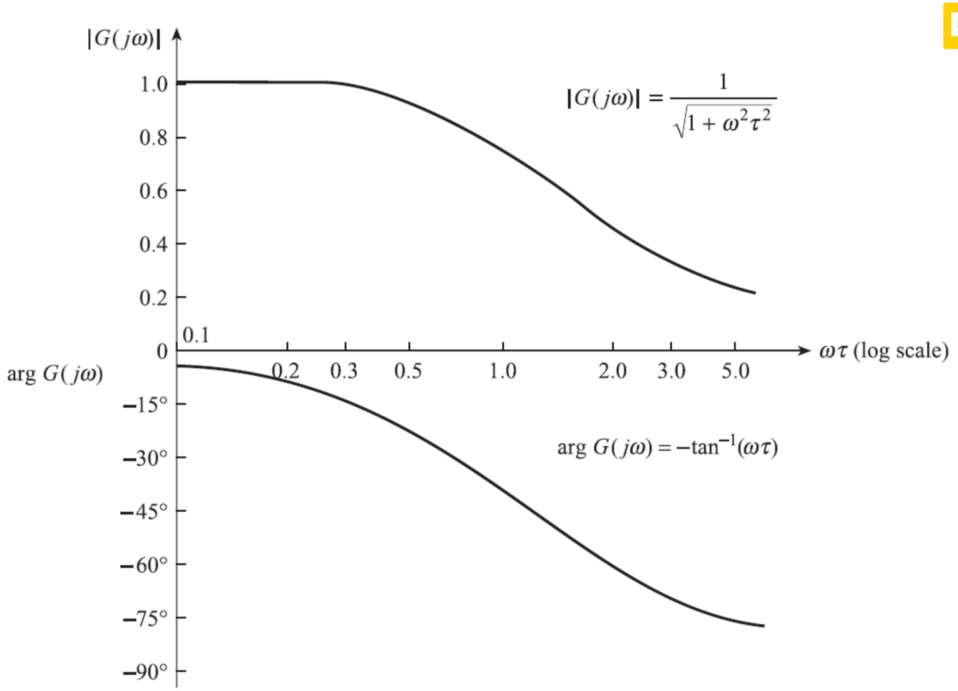
$$p(O) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} exp\left[\frac{-(O-\bar{O})^2}{2{\sigma_0}^2}\right]$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial O}{\partial I}\right)^2 {\sigma_I}^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_M}\right)^2 {\sigma_{I_M}}^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_I}\right)^2 {\sigma_{I_I}}^2 + \cdots}$$

Signalen en ruis in metingen

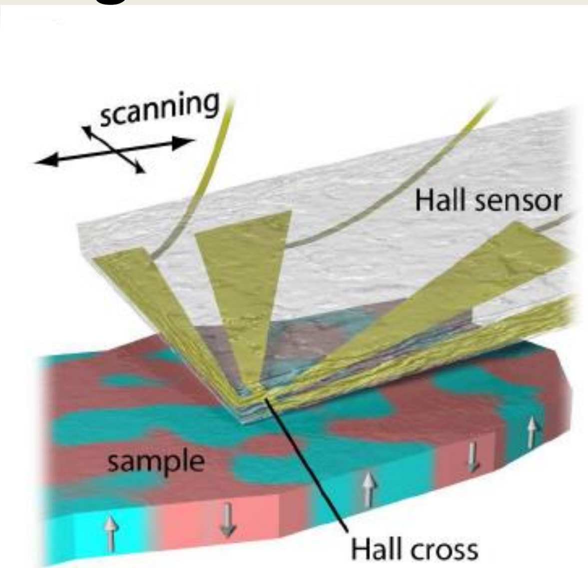
Meetsysteem: - Dynamische karakteristieken

Figure 4.8 Frequency response characteristics of first-order element with $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$.



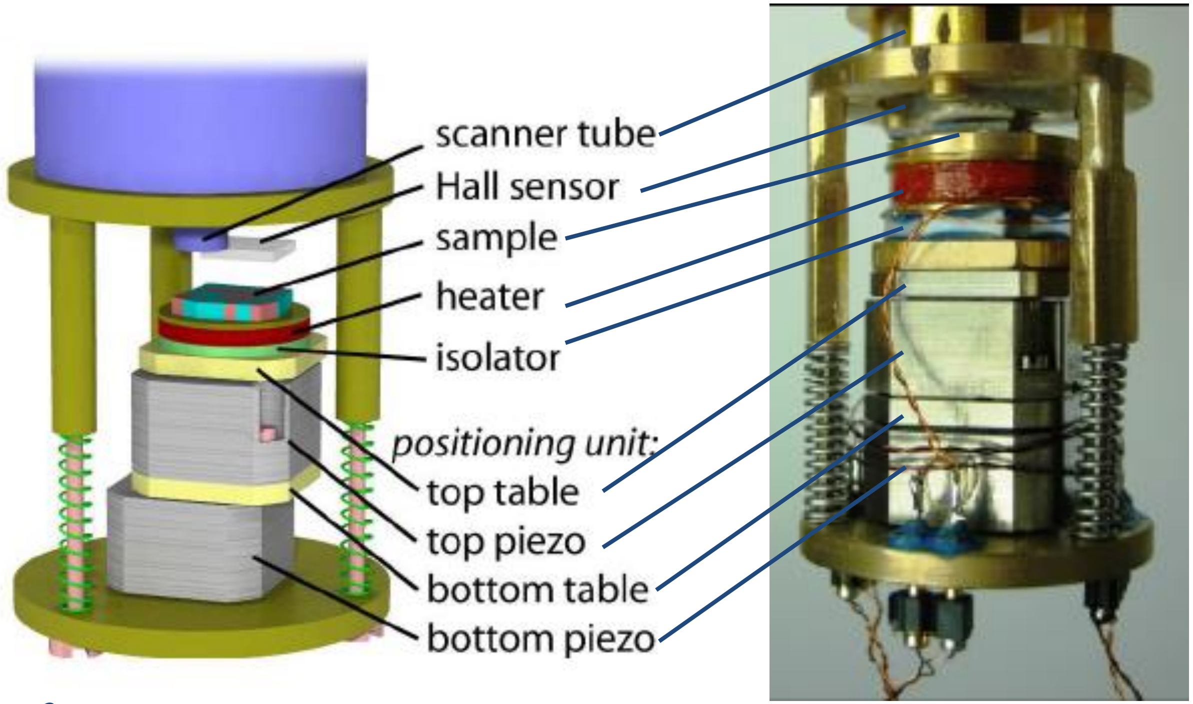
Signalen in meetsystemen: Observabele versus ruis

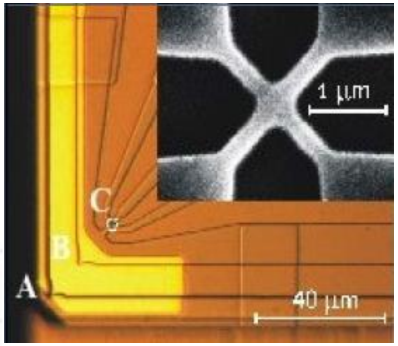
Signalen en ruis in metingen (vb: Hall metingen)

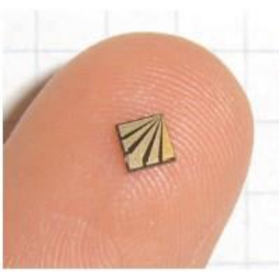


Scanning Hall probe microscopy:
A high resolution magnetic field plotter

$V_{hall}(x,y) \sim B_z(x,y)$







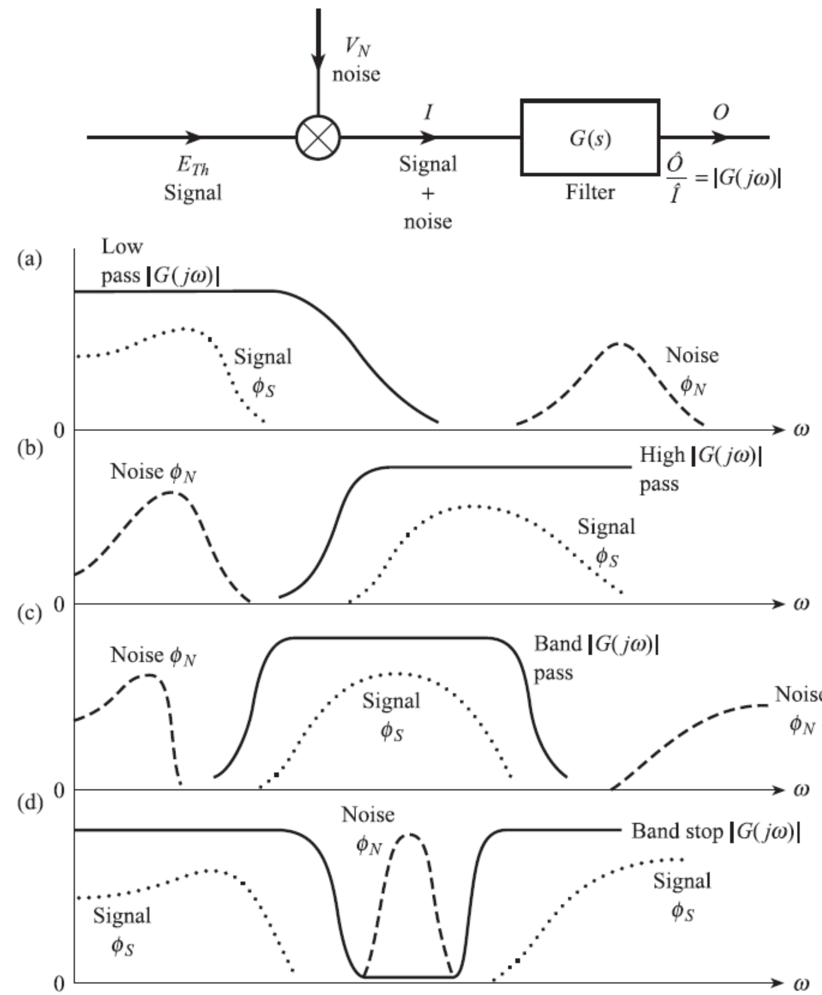
Scan range :16 x 16 µm^2 @ 4.2 K

Field resolution :0.01 mT

Methodes om ruis te reduceren

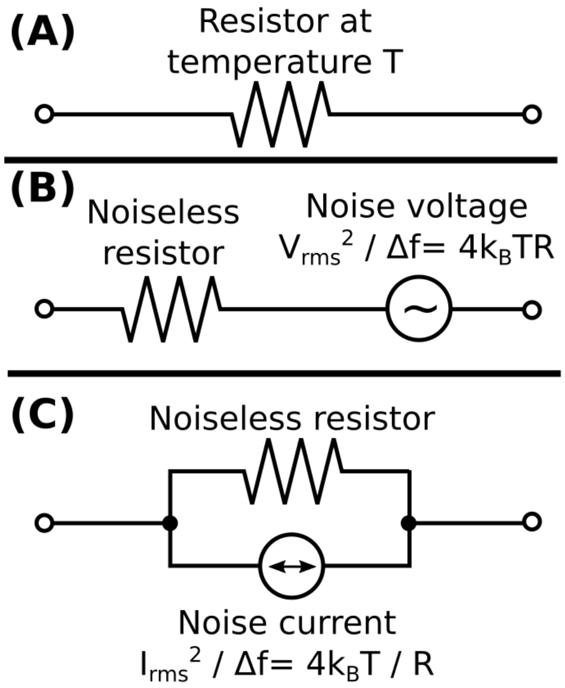
Filteren (analoog en digitaal)

Figure 6.12 Use of filtering to reject noise.



Signals and noise in measurements

Er zit ook Fysica in ruis: ***Johnson–Nyquist ruis (thermische ruis)***



Einde

Respons op een sinusoïdale verandering van de invoer

$$\bar{f}_o(s) = \frac{1}{(1+\tau s)}\frac{\hat{I}\cdot\omega}{(s^2+\omega^2)} \qquad [4.35]$$

Expressing [4.35] in partial fractions we have

$$\bar{f}_o(s) = \frac{A}{(1+\tau s)} + \frac{Bs+C}{s^2+\omega^2} \qquad [4.36]$$

where:

$$A = \frac{\omega\tau^2\hat{I}}{(1+\tau^2\omega^2)},\quad B = \frac{-\omega\tau\hat{I}}{(1+\tau^2\omega^2)},\quad C = \frac{\omega\hat{I}}{(1+\tau^2\omega^2)}$$

so that:

$$\bar{f}_o(s) = \frac{\omega\tau^2\hat{I}}{(1+\tau^2\omega^2)}\frac{1}{(1+\tau s)} + \frac{\hat{I}}{(1+\tau^2\omega^2)}\left\{\frac{-\omega\tau s+\omega}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$= \frac{\omega\tau^2\hat{I}}{(1+\tau^2\omega^2)}\frac{1}{(1+\tau s)} + \frac{\hat{I}}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\left\{\frac{\omega\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} + s\frac{-\omega\tau}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}}{s^2+\omega^2}\right\}$$

$$= \frac{\omega\tau^2\hat{I}}{(1+\tau^2\omega^2)}\frac{1}{(1+\tau s)} + \frac{\hat{I}}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\left\{\frac{\omega\cos\phi + s\sin\phi}{s^2+\omega^2}\right\} \qquad [4.37]$$

where

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}},\quad \sin\phi = \frac{-\omega\tau}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

Using Table 4.1 we have:

$$f_o(t) = \underbrace{\frac{\omega\tau\hat{I}}{1+\tau^2\omega^2}e^{-t/\tau}}_{\text{Transient term}} + \underbrace{\frac{\hat{I}}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)}_{\text{Sinusoidal term}} \qquad [24.38]$$