Formularium fouten- en schattingstheorie

Meetfouten

Meetresultaat weergeven

- Rechtstreeks gemeten grootheid z, een keer gemeten, met nauwkeurigheid (systematische fout) van het instrument gelijk aan Δ: de werkelijke waarde z_w bevindt zich in het interval

  $z_w \in z \pm \dfrac{\Delta}{2}$ met betrouwbaarheidsniveau (CL) 100%, uniforme verdeling.

- Rechtstreeks gemeten grootheid z, N keer gemeten, m gemiddelde van de metingen:

  - systematische fout $\Delta \gg$ statistische fout (standaarddeviatie) s:

    $z_w \in m \pm \Delta/2$, CL = 100%, uniforme verdeling;

  - systematische fout $\Delta \ll$ statistische fout (standaarddeviatie) s:

    $z_w \in m \pm s/\sqrt{N}$ als $N > 30 \rightarrow$ CL = 68%, normale verdeling;
    als $N < 30 \rightarrow$ niveau's volgens Student-verdeling met $\nu = N - 1$ vrijheidsgraden.

  - waarden z_i gemeten met verschillende nauwkeurigheden Δ_i of uit verdelingen met verschillende standaarddeviaties s_i:

    $z_w \in m_g \pm \epsilon$ met m_g gewogen gemiddelde $m_g = \sum_i g_i z_i / \sum_i g_i$,
    $\epsilon = 1/\sqrt{\sum_i g_i}$, $g_i = 1/s_i^2$ of $g_i = 12/\Delta_i^2$

Foutenpropagatie

- Algemeen:

  $$z = f(x,y) \rightarrow s_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2}$$

- Rekenregels:

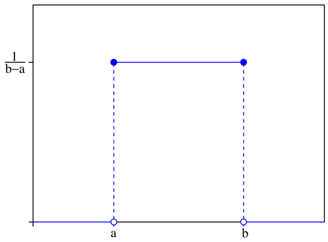
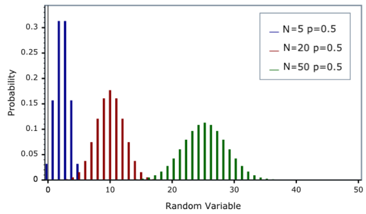
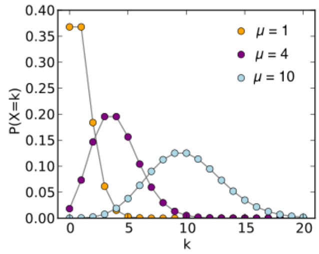
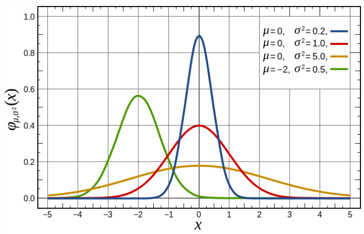
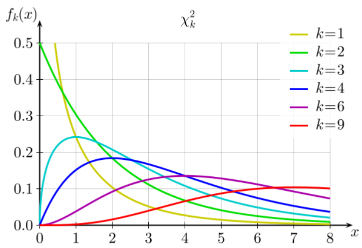
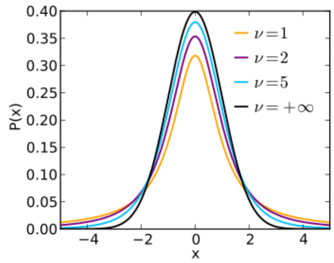
  $$z = ax + by \rightarrow s_z = \sqrt{a^2 s_x^2 + b^2 s_y^2}\,; \quad z = x^p y^q \rightarrow \frac{s_z}{z} = \sqrt{p^2\left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + q^2\left(\frac{s_y}{y}\right)^2}$$

- Verdeling en betrouwbaarheidsniveau's: bij het optellen van fouten van grootheden uit twee of meer verdelingen, wordt de samengestelde fout altijd als normaal verdeeld beschouwd!

Parameters van kansverdelingen

Parameter	Operator	Discrete verdeling p_k kans op elke klasse k	Continue verdeling $p(x)$
Gemiddelde	$\langle X \rangle$, $\mathrm{E}[X]$	$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k$	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx$
Variantie	$\mathrm{Var}[X]$	$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (x_k - \mu)^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k^2 \right) - \mu^2$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x)\, dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx \right) - \mu^2$
Momenten		$\Delta_n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (x_k - \mu)^n$	$\Delta_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n\, p(x)\, dx$
Covariantie	$\mathrm{Cov}[X, Y]$	$\sigma(X,Y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl} (x_k - \mu_x)(y_l - \mu_y) = \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl} x_k y_l \right) - \mu_x \mu_y$	$\sigma(X,Y) = \int (x-\mu_x)(y-\mu_y)\, p(x,y)\, dx\, dy = \left(\int xy\, p(x,y)\, dx\, dy \right) - \mu_x \mu_y$
Correlatie-coëfficiënt	$\rho[X, Y]$	$\rho_{x,y} = \dfrac{\sigma(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$	

Kansverdelingen

Verdeling	Functie	Gemiddelde	Variantie	Figuur
Uniforme (continue)	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{voor } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Binomale (discrete)	$f(k;\, N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ met $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$	Np	$Np(1-p)$	
Poisson (discrete)	$f(k;\, \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$	μ	μ	
Normale (continue)	$f(x;\, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	
χ^2 (continue)	$f(x;\, k) = \frac{x^{(k/2-1)} e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ voor $(x \geq 0)$	k	$2k$	
Student (continue)	$f(x;\, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}$	

Parameters van steekproeven

Parameter	Operator	Steekproef N tellingen, K klassen met frequentie $f_k = n_k/N$
Gemiddelde	$\langle X \rangle$, $\mathrm{E}[X]$	$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{N}x_k$
Variantie	$\mathrm{Var}[X]$	echte gemiddelde gekend: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 = \sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{N}(x_k-\mu)^2$ echte gemiddelde niet gekend: $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-m)^2 = \frac{N}{N-1}\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{N}(x_k-m)^2 =$ $= \frac{1}{N-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right) - Nm^2\right] = \frac{N}{N-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{N}x_k^2\right) - m^2\right]$
Momenten		$D_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^n = \sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{N}(x_k-\mu)^n$
Covariantie	$\mathrm{Cov}[X,Y]$	$s(x,y) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-m_x)(y_i-m_y) = \frac{N}{N-1}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{N}(x_k-m_x)(y_k-m_y)\right)$ $= \frac{1}{N-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\right) - Nm_xm_y\right] = \frac{N}{N-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{n_k}{N}x_ky_k\right) - m_xm_y\right]$
Correlatie-coëfficiënt	$\rho[X,Y]$	$r_{x,y} = \frac{s(x,y)}{s_xs_y}$

Intervallen en betrouwbaarheidsniveaus

	X_i normaal verdeeld		X_i algemeen	
	Interval	CL	Interval	CL
kans				
$Nf < 30$	—	—	$p \in \dfrac{f + \frac{b^2}{2N}}{1 + \frac{b^2}{N}} \pm \dfrac{b\sqrt{\frac{b^2}{4N^2} + \frac{f(1-f)}{N}}}{1 + \frac{b^2}{N}}$	binomiaal
$Nf > 30$ $N(1-f) > 30$	—	—	$p \in f \pm z\sqrt{f(1-f)/N}$	normaal
gemiddelde				
$N < 30$	$\mu \in m \pm t\dfrac{s}{\sqrt{N}}$	student $\nu = N - 1$	$\mu \simeq m \pm v\dfrac{s}{\sqrt{N}}$	?
$N > 30$	$\mu \in m \pm z\dfrac{s}{\sqrt{N}}$	normaal	$\mu \in m \pm z\dfrac{s}{\sqrt{N}}$	normaal
variantie				
$N < 100$	$\dfrac{s^2}{\chi^2_{R1}} \leq \sigma^2 \leq \dfrac{s^2}{\chi^2_{R2}}$	$\chi^2_R(N-1)$	$\sigma^2 \simeq s^2 \pm v\sqrt{\dfrac{D_4 - s^4}{N-1}}$	?
$N > 100$	$\sigma^2 \in \dfrac{s^2}{1 \pm z\sqrt{2/(N-1)}}$	normaal	$\sigma^2 \in s^2 \pm z\sqrt{\dfrac{D_4 - s^4}{N-1}}$	normaal
standaard deviatie				
$N < 100$	$\sqrt{\dfrac{s^2}{\chi^2_{R1}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\dfrac{s^2}{\chi^2_{R2}}}$	maxwell	$\sigma \simeq s \pm v\sqrt{\dfrac{D_4 - s^4}{4s^2(N-1)}}$	?
$N > 100$	$\sigma \in \dfrac{s}{1 \pm z\sqrt{1/[2(N-1)]}}$	normaal	$\sigma \in s \pm z\sqrt{\dfrac{D_4 - s^4}{4s^2(N-1)}}$	normaal
correlatie coëfficiënt				
$N > 10$ $\to Z = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+R}{1-R}\right)$ $\to R = \dfrac{e^{2Z}-1}{e^{2Z}+1}$	$\langle Z \rangle \in \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right) \pm z\sqrt{\dfrac{1}{N-3}}$	normaal	$\langle Z \rangle \approx \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right) \pm z\sqrt{\dfrac{1}{N-3}}$	normaal
tellingen klasse steekproef				
N constant	$\mu_k \in n_k \pm z\sqrt{n_k\left(1 - \dfrac{n_k}{N}\right)}$, $\quad p_k \in f_k \pm z\sqrt{\dfrac{f_k(1-f_k)}{N}}$	binomiaal voor $N \leq 5$ normaal voor $N > 5$		
N variabel	$\mu_k \in n_k \pm z\sqrt{n_k}$, $\quad p_k \in f_k \pm z\sqrt{\dfrac{f_k}{N}}$	Poisson voor $N \leq 5$ normaal voor $N > 5$		

Testen van hypothese

1. Bepaal de nul-hypothese: welke parameter θ en waarde ervan θ_0 (θ_0 is een gegeven) wordt getoetst op welk niveau, eenzijdig (rechts of links) of tweezijdig. Het niveau is klein (5%, 1%) om te vermijden dat een correcte hypothese te makkelijk wordt verworpen.
2. Kies een goede schatter: een variabele T die de parameter θ benadert bij grote steekproeven.
3. Bepaal de variantie σ_T^2 (of s_T^2) en bouw de standaard variabele op: $V = \dfrac{T - \theta_0}{\sigma_T}$.
4. Bepaal de verdeling ervan: binomiaal, Poisson, Student, normaal, χ^2.
5. Bereken de waargenomen waarde v van V: $v = \dfrac{t - \theta_0}{\sigma_t}$; t is de waargenomen waarde van T.
6. Bereken de p-waarde m.b.v. de tabellen van integralen van de verdelingen:
   eenzijdig links $p\{V < v\}$,
   enzijdig rechts $p\{V > v\}$,
   tweezijdig $p\{|V| > v\}$.
7. Vergelijk de p-waarde met het gekozen nuiveau: als $p <$ niveau, wordt de nul-hypothese verworpen.

Voorbeelden

Parameter	Schatter	Variantie	Standaard variabele	Verdeling
Gemiddelde μ	m	s^2/N (σ^2/N als bekend)	$\dfrac{m-\mu_0}{s/\sqrt{N}}$ of $\dfrac{m-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}$	met s: $N < 30$ Student($N-1$) $N \geq 30 \rightarrow$ normaal met σ: normaal
Kans p	f	$\dfrac{p_0(1-p_0)}{N}$	$\dfrac{f-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/N}}$	binomiaal $Np_0,\ N(1-p_0) > 10 \rightarrow$ normaal
Compatibiliteit twee metingen x_1, x_2 normaal verdeeld	$x_1 - x_2$	$s_1^2 + s_2^2$	$\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}$	normaal
Compatibiliteit twee tellingen x_1, x_2	$x_1 - x_2$	$x_1 + x_2$	$\dfrac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1+x_2}}$	Poisson $x_1,\ x_2 > 30 \rightarrow$ normaal
Grote steekproeven: compatibiliteit twee frequenties f_1, f_2	$f_1 - f_2$	$\frac{f_1(1-f_1)}{N_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{N_2}$	$\dfrac{m_1-m_2}{\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{N_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{N_2}}}$	normaal
Grote steekproeven: compatibiliteit twee gemiddelden m_1, m_2	$m_1 - m_2$	$\dfrac{s_1^2}{N_1} + \dfrac{s_2^2}{N_2}$	$\dfrac{m_1-m_2}{\sqrt{s_1^2/N_1 + s_2^2/N_2}}$	normaal
Kleine steekproeven: compatibiliteit twee gemiddelden m_1, m_2, normale verdelingen met dezelfde σ	$m_1 - m_2$	$s_{12}^2\left(\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}\right)$ met $s_{12}^2 = \frac{(N_1-1)s_1^2 + (N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2}$	$\dfrac{m_1-m_2}{s_{12}\sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$	Student($N_1 + N_2 - 2$)

χ^2-toets

- Om de vorm van een steekproef met $k = 1, 2 \ldots, K$ klassen te toetsen t.o.v. een verdeling:

  $$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(n_k - \mu_k)^2}{\sigma_k^2}$$

  n_k tellingen in elke klasse van de steekproef ($n_k > 5$)
  μ_k tellingen in elke klasse van de verdeling
  discrete verdeling: $\mu_k = Np_k$
  continue verdeling $\mu_k = Np(x_k)\,\Delta_k$, met Δ_k breedte van de klasse
  σ_k^2 variantie binnen de klasse; voor Poisson tellingen binnen de klasse: $\sigma_k^2 = \mu_k$
  vrijheidsgraden $\nu = K - 1$ als N constant, $\nu = K$ als N variabel

- Om de compatibiliteit tussen $m = 1, 2 \ldots M$ steekproeven met $k = 1, 2 \ldots, K$ klassen te toetsen:

  $$\chi^2 = \sum_{m,k=1}^{M\times K} \frac{(n_{mk} - N_m\hat{p}_k)^2}{N_m\hat{p}_k} = \left(\sum_{m,k=1}^{M\times K} \frac{n_{mk}^2}{N_m\hat{p}_k}\right) - \sum_{m=1}^{M} N_m$$

  n_{mk} tellingen in elke klasse van de steekproef m ($n_{mk} > 5$)
  N_m totaal aantal tellingen van de steekproef m
  p_k kans van de klasse k, geschat als $\hat{p}_k = \sum_m n_{mk} / \sum_m N_m$
  vrijheidsgraden $\nu = (K - 1)(M - 1)$

- rechts-enzijdige toets:
  hypothese verwerpen als $p\left\{Q_\nu^2 > \chi_\nu^2\right\} <$ niveau (ν is het aantal vrijheidsgraden)

- tweezijdige toets:
  als $p\left\{Q_\nu^2 > \chi_\nu^2\right\} < 50\%$, dan hypothese verwerpen als $2p\left\{Q_\nu^2 > \chi_\nu^2\right\} <$ niveau
  als $p\left\{Q_\nu^2 > \chi_\nu^2\right\} > 50\%$, dan hypothese verwerpen als $2p\left\{Q_\nu^2 < \chi_\nu^2\right\} <$ niveau

Fitten

Meest aannemelijke schatter (Maximum Likelihood ML)

- Aannemelijkheidsfunctie L: kans om een steekproefuitkomst te hebben met precies de waargenomen waarden x_1,x_2,$\ldots x_N$. Als $p(x_i, \theta_k)$ de verdeling van x_i is (afhankelijk van de parameters θ_k), dan is het:

  $$L(\theta_k, x_i) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i, \theta_k)$$

- De meeste aannemelijke schatter $\hat{\theta}_k$ van de parameter θ_k is de waarde waarvoor L maximaal is.

- Meestal vinden we het minimum van:

  $$\mathcal{L}(\theta_k, x_i) = -\ln L(\theta_k, x_i) = -\sum_{i=1}^{N} \ln p(x_i, \theta_k)$$

- Berekening van $\hat{\theta}_k$:

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\theta_k, x_i)}{\partial\theta_k}\right)_{\theta_k=\hat{\theta}_k} = 0 \quad \rightarrow \quad -\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{p(x_i,\hat{\theta}_k)}\frac{\partial p(x_i,\hat{\theta}_k)}{\partial\theta_k}\right] = 0$$

- Variantie:

$$\mathrm{Var}\left[\hat{\theta}_k\right] = \left(\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\theta_k^2}\right)_{\theta_k=\theta_{k,0}}\right]\right)^{-1} ,$$

waar $\theta_{k,0}$ de echte waarde van θ_k is; die is meestal onbekend, dus gebruiken we $\hat{\theta}_k$ i.p.v. $\theta_{k,0}$.

- Op dezelfde manier kan de ML methode gebruikt worden voor grootheden uit verschillende verdelingen $p_1(x_{1,i}, \theta_{1,k})$, $p_2(x_{2,i}, \theta_{2,k})\ldots$

Kleinste-kwadratenmethode (Least-Square LS)

- Wordt gebruikt wanneer de varianties σ_i^2 van de verschillende verdelingen bekend zijn, of wanneer we de steekproefvarianties s_i^2 gebruiken. De LS-functie is:

$$\chi^2(\theta_k) = \sum_{i=1}^{N}\frac{[x_i - \mu_i(\theta_k)]^2}{s_i^2}$$

- De LS schatter $\hat{\theta}_k$ van de parameter θ_k is de waarde waarvoor χ^2 minimaal is.
We hoeven de verdelingen $p_i(x_i, \theta_k)$ niet te kennen, alleen hoe de gemiddelden μ_i afhankelijk zijn van de parameters θ_k.
Als de μ_i lineair zijn in de parameters θ_k, dan geeft de LS methode dezelfde resultaten als de ML methode.
Als de x_i normaal verdeeld zijn, dan is de LS functie als een χ^2_{N-p} verdeeld (met $\nu = N - p$ vrijheidsgraden, waar p het aantal parameters is).

- Berekening van $\hat{\theta}_k$ en variantie:

$$\left(\frac{\partial\chi^2}{\partial\theta_k}\right)_{\theta_k=\hat{\theta}_k} = 0\ ; \quad \mathrm{Var}\left[\hat{\theta}_k\right] = 2\left(\frac{\partial^2\chi^2}{\partial\theta_k^2}\right)^{-1}_{\theta_k=\hat{\theta}_k}$$

- Als de μ_i functie zijn van een onafhankelijke variabele:

$$\chi^2(\theta_k) = \sum_{i=1}^{N}\frac{[y_i - f(x_i,\theta_k)]^2}{s_i^2}$$

(nu zijn y_i de waargenomen waarden, en x_i de waarden van de onafhankelijke variabele).

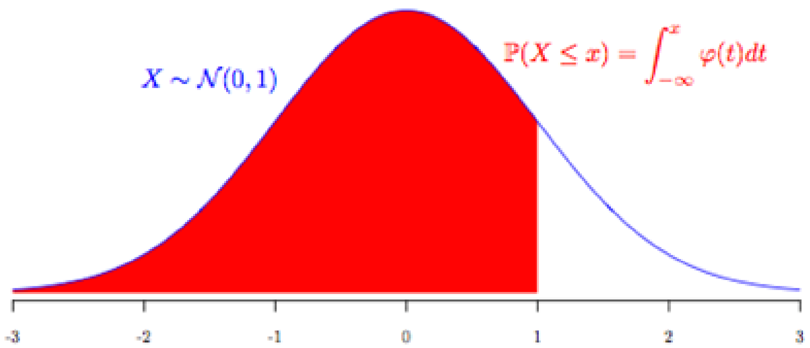
- Voorbeeld lineaire regressie: $f(x, \theta) = ax + b$ (met $\theta_1 \equiv a$, $\theta_2 \equiv b$)

$$a = \frac{EB - CA}{BD - A^2}\ ,\ \sigma_a^2 = \frac{B}{BD - A^2}\ ;\ b = \frac{DC - EA}{BD - A^2}\ ,\ \sigma_b^2 = \frac{D}{BD - A^2}$$

met $A = \sum x_i/s_i^2\ ,\ B = \sum 1/s_i^2\ ,\ C = \sum y_i/s_i^2\ ,\ D = \sum x_i^2/s_i^2\ ,\ E = \sum x_i y_i/s_i^2$

Kwantielen en integralen

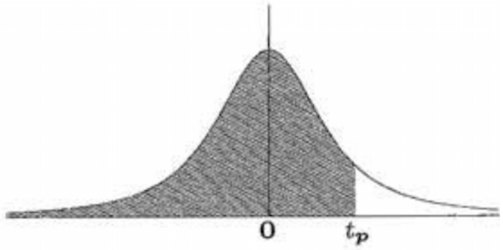
Integralen van de normale verdeling



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Kwantielen van de Student verdeling

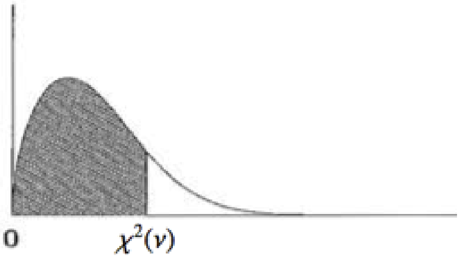
$$t_P : \int_{-\infty}^{t_P} f(t;\nu)\, dt = P$$



ν \ P	0.60	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	0.325	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.65	632.0
2	0.289	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.60
3	0.277	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.92
4	0.271	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.267	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.265	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.263	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.262	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.261	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.260	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.260	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.259	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.259	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.258	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.258	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.258	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.257	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.257	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.257	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.257	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.849
21	0.257	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.256	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.256	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.256	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.256	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.256	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.256	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.256	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.256	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.256	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.255	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
50	0.255	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60	0.254	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70	0.254	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80	0.254	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90	0.254	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100	0.254	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
∞	0.253	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Kwantielen van de $\chi^2(\nu)$ verdeling

$$\chi^2(\nu): \quad \int_{-\infty}^{\chi^2(\nu)} f(q;\nu)\, dq = P$$



ν \ P	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.06	0.15	0.27	0.45	0.71	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.45	0.71	1.02	1.39	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	1.00	1.42	1.87	2.37	2.95	3.67	4.64	6.25	7.82	9.35	11.34	12.84
4	1.65	2.19	2.75	3.36	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	2.34	3.00	3.66	4.35	5.13	6.06	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	3.07	3.83	4.57	5.35	6.21	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	3.82	4.67	5.49	6.35	7.28	8.38	9.80	12.02	14.07	16.01	18.47	20.28
8	4.59	5.53	6.42	7.34	8.35	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	5.38	6.39	7.36	8.34	9.41	10.66	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	6.18	7.27	8.30	9.34	10.47	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	6.99	8.15	9.24	10.34	11.53	12.90	14.63	17.27	19.68	21.92	24.72	26.76
12	7.81	9.03	10.18	11.34	12.58	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	8.63	9.93	11.13	12.34	13.64	15.12	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	9.47	10.82	12.08	13.34	14.69	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	10.31	11.72	13.03	14.34	15.73	17.32	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	11.15	12.62	13.98	15.34	16.78	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	12.00	13.53	14.94	16.34	17.82	19.51	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	12.86	14.44	15.89	17.34	18.87	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	13.72	15.35	16.85	18.34	19.91	21.69	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	14.58	16.27	17.81	19.34	20.95	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	15.44	17.18	18.77	20.34	21.99	23.86	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	16.31	18.10	19.73	21.34	23.03	24.94	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	17.19	19.02	20.69	22.34	24.07	26.02	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	18.06	19.94	21.65	23.34	25.11	27.10	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	18.94	20.87	22.62	24.34	26.14	28.17	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	19.82	21.79	23.58	25.34	27.18	29.25	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	20.70	22.72	24.54	26.34	28.21	30.32	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	21.59	23.65	25.51	27.34	29.25	31.39	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	22.48	24.58	26.48	28.34	30.28	32.46	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	23.36	25.51	27.44	29.34	31.32	33.53	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	32.34	34.87	37.13	39.34	41.62	44.16	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	41.45	44.31	46.86	49.33	51.89	54.72	58.16	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	50.64	53.81	56.62	59.33	62.13	65.23	68.97	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	59.90	63.35	66.40	69.33	72.36	75.69	79.71	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	69.21	72.92	76.19	79.33	82.57	86.12	90.41	96.58	101.88	106.6	112.3	116.3
90	78.56	82.51	85.99	89.33	92.76	96.52	101.1	107.6	113.2	118.1	124.1	128.3
100	87.95	92.13	95.81	99.33	103.0	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2