

Wheatstonebruggen

Louis Claeys, Ruben Van der Borght

14 november 2021

1 Inleiding

In dit onderzoek wordt de Wheatstonebrug (C. Wheatstone, 1802-1875) gebruikt om de grootte van een reeks onbekende weerstanden na te gaan. [1] Na een korte theoretische analyse van de optimale techniek hiervoor, wordt deze methode toegepast op zeven weerstanden. Daarna wordt met betrouwbaarheid $\alpha = 5\%$ nagegaan of de gemeten waarde overeenkomt met de waarde aangeduid op de weerstanden.

2 Materialen

Voor alle proeven wordt er gebruikt gemaakt van het meettoestel op Figuur 1a. In het meettoestel zit een ingebouwde galvanometer G . Er wordt aangenomen dat de onzekerheid op G verwaarloosbaar is in vergelijking met de onzekerheden op de andere componenten. Daarom zal in deelparagraaf 3.1 geen rekening worden gehouden met de onzekerheid die G induceert. Verder worden ook gekende weerstanden $R_{1k\Omega}, R_{10k\Omega}$ met elk een nauwkeurigheid van $\delta R = 0.2\% (1\sigma)$ gebruikt. Voor de regelbare weerstand R_4 geldt voor de 1σ -fout dat $s_4 = 0.01R_4 + 0.1\Omega$, zodat de relatieve fout dus gegeven wordt door $\delta R_4 = 1\% + \frac{0.1}{R_4}$. Het doel van het onderzoek is om de groottes van de zeven weerstanden op Figuur 1b te controleren. Deze wordt telkens genoteerd als R_2 . De grootte en de 1σ -fout die op de weerstanden genoteerd staan, zijn gegeven in Tabel 1.



(a)

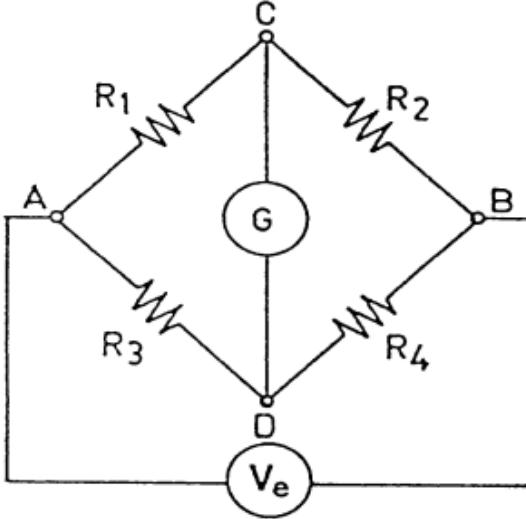


(b)

Figuur 1: De meetapparatuur van het onderzoek. Figuur 1a toont het meettoestel met centraal de Galvano-meter G . In serie met G staat een drukknop S om te hoge stroompieken te vermijden. In het vervolg van het practicum gebruiken we voor de weerstanden de notaties zoals op Figuur 2, zodat $A = R_1$, $X = R_2$, $B = R_3$ en de regelbare weerstand R_4 is. Figuur 1b toont de zeven onbekende weerstanden waarvan de waarde wordt bepaald in paragraaf 4.

3 Theoretische bespreking

Beschouw een Wheatstonebrug zoals gegeven in Figuur 2. Zij R_1, R_3 de gekende weerstanden met respectievelijke 1σ -fout s_1, s_3 (Veronderstel hier dat $s_i = \gamma R_i$ voor een $\gamma \in (0, 1)$, zoals het geval is bij de gebruikte verhoudingsweerstanden). Verder is R_2 de te bepalen weerstand en R_4 de gebruikte potentiometer met 1σ -fout s_4 . Voor de optimalisatie van de meting zijn we geïnteresseerd in zowel de *gevoeligheid* als de *nauwkeurigheid*.



Figuur 2: De Wheatstonebrug. V_e is de spanningsbron, labels $A-D$ zijn knooppunten, R_1-R_4 zijn weerstanden en G de Galvanometer. [2]

3.1 Gevoeligheid

Om de gevoeligheid van de gehanteerde meetmethode te bepalen, wordt gekeken naar de waarde van $\frac{\partial R_2}{\partial R_4}$, geëvalueerd in het punt waar de Galvanometer een waarde van 0 A weergeeft. Theoretisch kan de relatie

$$R_2 = \frac{R_1 R_4}{R_3} \quad (1)$$

voor de weerstanden van een Wheatstonebrug worden afgeleid (zie bijvoorbeeld [3]). Het is onmiddellijk duidelijk dat $\frac{\partial R_2}{\partial R_4} = \frac{R_1}{R_3}$. Als gevoeligheid vinden we dus dat rond het punt waar de stroom door G nul is, de verandering in de berekende waarde van de onbekende weerstand R_2 per eenheid verandering in R_4 gelijk is aan $\frac{R_1}{R_3}$. Aangezien $s_i = \gamma R_i$ voor $i = 1, 3$, vindt men bovendien dat de 1σ -fout op de gevoeligheid gegeven is door

$$\sqrt{\left(\frac{s_1}{R_3}\right)^2 + \left(\frac{R_1 s_3}{R_3^2}\right)^2} = \frac{R_1}{R_3} \sqrt{2\gamma}.$$

Als nauwkeurigheid op de gevoeligheid vindt men dus een constante waarde van $\sqrt{2\gamma}$, wat in het concrete geval van dit experiment overeenkomt met 0.3 %.

3.2 Nauwkeurigheid

De nauwkeurigheid op de berekende waarde van R_2 wordt bepaald via de regels van foutenpropagatie. Zo vindt men uit (1) dat, indien s_2 de 1σ -fout is op de berekende waarde van R_2 :

$$s_2 = \sqrt{\left(\frac{R_4 s_1}{R_3}\right)^2 + \left(\frac{R_1 s_4}{R_3}\right)^2 + \left(\frac{R_1 R_4 s_3}{R_3^2}\right)^2}. \quad (2)$$

Hier kan opnieuw toegepast worden dat $s_i = \gamma R_i$ voor $i = 1, 3$, en zo bekomt men

$$s_2 = \frac{R_1}{R_3} \sqrt{2(R_4\gamma)^2 + s_4^2},$$

zodat ook s_2 lineair schaalt met $\frac{R_1}{R_3}$. Op die manier vindt men samen met (1) volgende waarde voor de relatieve 1σ -fout op R_2 :

$$\delta R_2 = \frac{s_2}{R_2} = \sqrt{2\gamma^2 + (\delta R_4)^2}.$$

Om een maximale nauwkeurigheid te bereiken wordt deze fout geminimaliseerd, en opteert men dus voor een zo klein mogelijke waarde van de relatieve fout op R_4 . Aangezien $\delta R_4 = 1\% + \frac{0.1}{R_4}$ probeert men dus om R_4 te maximaliseren bij het streven naar hogere nauwkeurigheid. Bij een vaste waarde van de onbekende weerstand R_2 impliceert dit samen met (1) dat men $\frac{R_1}{R_3}$ zo *klein* mogelijk wil krijgen.

4 Methoden en Resultaten

Voor de proef wordt de schakeling die te zien is op Figuur 2 één keer voor elke weerstand R_2 geconstrueerd. Zoals besproken in vorige sectie zullen zowel gevoeligheid als onzekerheid op het resultaat lineair toenemen met $\frac{R_1}{R_3}$. Aangezien in dit experiment de nauwkeurigheid belangrijker is dan de gevoeligheid, wordt telkens geopteerd voor een zo *laag* mogelijke waarde van deze verhouding. Concreet wordt voor $\frac{R_1}{R_3}$ de waarde 1 of 10 genomen, om ervoor te zorgen dat het evenwichtspunt zich telkens binnen het bereik van de potentiometer bevindt.

Vervolgens wordt er met de potentiometer gezocht naar een waarde voor R_4 waarvoor G geen stroom meet. Zo bekomt men de meetresultaten in Tabel 1. De weerstand R_3 bedraagt telkens $(1.00 \pm 0.02) \text{ k}\Omega$ (1σ). Met deze metingen wordt de grootte van de onbekende weerstand R_2 via (1) berekend als R'_2 , met fout gegeven door (2).

5 Discussie

Nu wordt nagegaan of de gebruikte weerstanden effectief de grootte hebben die erop vermeld staat. Daarvoor wordt een tweezijdige hypothesetest op niveau $\alpha = 5\%$ uitgevoerd. Er wordt gekozen

Nummer	$R_1[\text{k}\Omega] \pm 0.2\%$	$R_2[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R'_2[\Omega]$
1	1	390 ± 2	392 ± 4	392 ± 4
2	10	2400 ± 12	264 ± 3	2640 ± 30
3	10	2000 ± 12	220 ± 2	2200 ± 20
4	1	150 ± 5	150.3 ± 1.6	150.3 ± 1.7
5	1	620 ± 3	620 ± 6	620 ± 6
6	10	1500 ± 17	165.2 ± 1.8	1652 ± 19
7	1	750 ± 5	748 ± 8	748 ± 8

Tabel 1: De meetresultaten van de proef met de Wheatstonebrug. De waarde van R_1 en de nauwkeurigheid zijn gegeven in [2]. De weerstand R_2 is de weerstand waarvan de waarde met behulp van de regelbare weerstand R_4 werd gezocht. De waarde van R_2 in de tabel is de grootte die op de weerstand zelf staat. In de laatste kolom geeft R'_2 de berekende grootte van de onbekende weerstand. De fout op elke waarde is 1σ .

voor $\alpha = 5\%$ zodat de waarde van R_2 niet onterecht wordt verworpen of aanvaard. De grootte van R_2 is als rechtstreeks gemeten grootheid uniform verdeeld. Uit (1) volgt dat R'_2 is opgebouwd uit uniform verdeelde grootheden R_1 , R_3 en R_4 , zodat R'_2 een driehoeksverdeling volgt. Dan zijn R_2 en R'_2 beide benaderd normaal verdeeld, dus ook $T = R'_2 - R_2$ volgt een normale verdeling. Volgens de nulhypothese H_0 geldt $R_2 = R'_2$, zodat $T \sim \mathcal{N}(0, s_{R'_2}^2 + s_{R_2}^2)$. Voor elke meting wordt de absolute testwaarde $|t|$ en de bijhorende p -waarde berekend in Tabel 2. Daarbij is de p -waarde $2p(T > |t|)$. De groottes die op de weerstanden 1, 4, 5 en 7 staan worden aanvaard en de groottes van weerstanden 2, 3 en 6 worden dus verworpen.

De p -waarden van de aanvaarde weerstanden liggen ver boven het significantieniveau. Dat betekent dat de grootte van de weerstanden dicht bij de gemeten waarde ligt. De waarden van de verworpen weerstanden liggen allen echter ver onder het significantieniveau en zijn afgerond nul. Uit Tabel 1 volgt dat dit exact alle metingen zijn waarvoor $R_1 = (10.0 \pm 0.2) \text{ k}\Omega$. Mogelijks ligt de waarde van deze weerstand dus niet in het aangenomen 95 %-betrouwbaarheidsinterval.

6 Conclusie

De nauwkeurigheid van R_2 is het grootst wanneer R_4 zo groot mogelijk is. Verder staan berekende waarden R'_2 voor de reeks weerstanden opgeliist in Tabel 1. De grootte van weerstanden 1, 4, 5 en 7 komen overeen met de gegeven waarde R_2 op niveau $\alpha = 5\%$. De grootte van 2, 3 en 6 wordt verworpen op dit niveau en alleen voor deze drie weerstanden was $R_1 = (10.0 \pm 0.2) \text{ k}\Omega$.

Nummer	$R_2[\Omega]$	$R'_2[\Omega]$	$ t $	p -waarde [%]
1	390 ± 2	392 ± 4	0.433	66.5
2	2400 ± 12	2640 ± 30	7.47	$< 10^{-5}$
3	2000 ± 12	2200 ± 20	8.66	$< 10^{-5}$
4	150 ± 5	150.3 ± 1.7	0.0610	95.1
5	620 ± 3	620 ± 6	0	100
6	1500 ± 17	1652 ± 19	5.91	$< 10^{-5}$
7	750 ± 5	748 ± 8	0.217	82.9

Tabel 2: De statistische analyse van de meetresultaten. De waarden R_2 en R'_2 zijn resp. de gegeven en de berekende waarde van R_2 . De absolute testwaarde $|t|$ en de bijhorende p -waarde staan in de laatste twee kolommen.

Referenties

- [1] Wikipedia. Charles Wheatstone; 2021. Geraadpleegd op 13 november 2021 via https://nl.wikipedia.org/wiki/Charles_Wheatstone.
- [2] Wheatstonebruggen. Experimentele basistechnieken in de natuurkunde G0P32A. KU Leuven; 2021.
- [3] Teja R. Wheatstone Bridge | Working, Examples, Applications; 2021. Geraadpleegd op 13 november 2021 via <https://www.electronicshub.org/wheatstone-bridge/>.