

Onderzoek mm-golven via diffractie en de Fabry-Perot-interferometer

Louis Claeys, Ruben Van der Borght

1 mei 2022

1 Inleiding

In dit onderzoek worden de interferentiepatronen van mm-golven bestudeerd. Als eerste wordt de golflengte λ van de mm-golven bepaald met een diffractierooster. Vervolgens wordt λ opnieuw berekend met een Fabry-Perot-interferometer (FB-interferometer) en worden ook de contrastfactor ξ , de finesse F en de reflectiecoëfficiënt R bepaald. Als laatste wordt de brekingsindex n van kwarts berekend met een interferometer met kwarts als diëlektricum.

2 Materialen en Methoden

De opstelling van de diffractieroosterproef is te zien op Figuur 1. De generator zendt monochromatisch, lineair gepolariseerde mm-golven uit. De intensiteit van de stralenbundel wordt verzwakt met een attenuator en een absorberend diafragma zorgt ervoor dat de straling gecentreerd blijft. Vervolgens vindt er diffractie plaats bij het diffractierooster van aluminium. De detector vangt de golven op en is de sensor van de opstelling. De conditionering, de verwerking en de display vinden plaats in en op de uitleesseenheid.

De systematische fout van de uitleesseenheid bedraagt $\Delta_{sys} = 0.01$ en dit toestel geeft de transmissiecoëfficiënt T weer. In het vervolg van het document worden de gemeten waarde als intensiteit I genoteerd met arbitraire eenheden (arb. enh.). Dat kan omdat I recht evenredig is met T , en in wat volgt zijn we enkel geïnteresseerd in de verhouding tussen verschillende T . Verder is de systematische fout op de gradenboog $\Delta_{sys} = 1^\circ$ en is de afstand d tussen de spleten van het diffractierooster $d = 1.65$ mm met verwaarloosbare fout. [1]

Voor de proef met de FB-interferometer wordt de interferometer tussen het diafragma en de detector geplaatst, zoals op Figuur 2a getoond wordt. Met een micrometerschroef wordt de afstand d tussen de halfdoorlatende spiegels ingesteld. De systematische fout op d bedraagt $\Delta_{sys} = 0.01$ mm. Ten slotte wordt een andere interferometer met kwarts als diëlektricum in de opstelling geplaatst. Een bovenaanzicht van deze interferometer staat op Figuur 2b. Ook deze interferometer is voorzien van een micrometerschroef. De systematische fout op de dikte d van het diëlektricum bedraagt $\Delta_{sys} = 0.01$ mm.

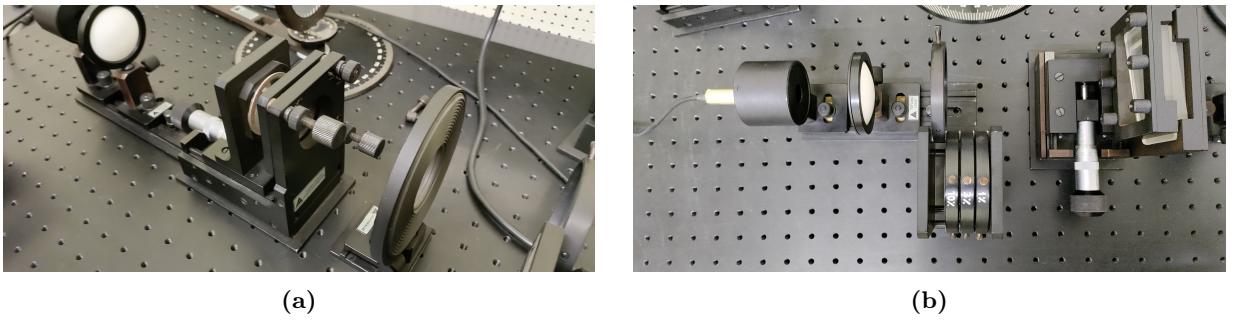
Voor de diffractieroosterproef wordt als eerste de opstelling uit Figuur 1 gebouwd. Vervolgens wordt er gezocht naar het centrale maximum dat zich rond $\theta = 0^\circ$ bevindt door te kijken voor welke hoek



(a)

(b)

Figuur 1: De proefopstelling van de diffractieroosterproef. De golven worden uitgezonden door een generator aan de rechterkant van Figuur 1a. De golven worden door het diffractierooster van aluminium gestuurd, dat te zien valt op Figuur 1b. Op de gradenboog onder het rooster wordt de hoek θ afgelezen waarbij I maximaal is.



(a)

(b)

Figuur 2: De proefopstelling van de proef met de FB-interferometer op Figuur 2a en van de proef met kwarts als diëlektricum op Figuur 2b. Via de micrometerschroeven die op beide afbeeldingen te zien zijn, wordt de afstand tussen de spiegels aangepast.

θ tussen de detector en het diffractierooster de waarde van I maximaal is. Daarna wordt de hoek θ vergroot tot bij de hoek θ van het eerste en tweede maximum.

Daarna wordt de opstelling met de FB-interferometer opgesteld. Eerst wordt er gezocht naar een d waarvoor I maximaal is. Dan wordt de afstand d tussen de spiegels verhoogd tot er opnieuw een maximum wordt gevonden.

Voor de andere twee proeven wordt de opstelling van de FB-interferometer en die van de interferometer met het kwarts gebouwd. Vervolgens wordt de waarde van I gemeten voor verschillende, equidistante waarden van d . Zo worden twee intensiteitsprofielen $I(d)$ van de interferometers gevonden.

3 Resultaten

Als eerste wordt de statistische fout op de uitleesseenheid van I berekend. De waarde die de uitleesseenheid aangaf, varieerde sterk tussen waarden die 0.1 arb. enh. van de gemeten waarde afweken.

De statistische 1σ -fout die deze fluctuaties veroorzaakten is daarom

$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.01^2 + 1 \cdot 0}{2}} = 0.01 \text{ arb. eenh.}$$

De meetresultaten van de proef met het diffractierooster staan in Tabel 1. Bij de hoek θ werd telkens de referentiehoek θ_0 die zich bij het nulde maximum bevindt afgetrokken. Vervolgens werd λ berekend als $\lambda = d \sin(\theta_m)/m$, met m de orde van het maximum en d de afstand tussen de aluminiumstroken. [1] Deze waarden staan ook in Tabel 1. De gemiddelde golflengte van de metingen is $\lambda_{g,dif.} = (2.18 \pm 0.03) \text{ mm}$ met 1σ -fout. De frequentie is dan gelijk aan $f = c/\lambda$, ofwel $f = (137.5 \pm 1.7) \text{ GHz}$ met 1σ -fout.

Met de FB-interferometer wordt eerst de afstand d tussen de maxima gemeten, zoals in Tabel 2 te zien valt. Vervolgens wordt λ berekend voor elke d via $\lambda = 2d$ en wordt hiervan het gemiddelde genomen. Het gemiddelde bedraagt $\lambda_{g,FB} = (2.20 \pm 0.06) \text{ mm}$ met 1σ -fout.

Daarna wordt I voor verschillende afstanden d tussen de spiegels gemeten. De resultaten van de proef met de FB-interferometer zijn te vinden in Tabel 3 in de Bijlagen. De fout op I werd berekend als $\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_{stat}^2 + \sigma_{sys}^2}$, met σ_{stat} en σ_{sys} respectievelijk de statistische en systematische standaardafwijking. De intensiteitsverdeling van de FB-interferometer worden beschreven door een Airy-profiel. [2] De gemeten intensiteitspiek wordt dus gefit volgens het model

$$I = \frac{I_{max}}{1 + A \sin^2 \left(\frac{\pi}{D}(d - d_0) \right)} \quad (1)$$

waarbij I de intensiteit is, d de afstand tussen de spiegels en I_{max} , A , d_0 en D fitparamers zijn. De gevonden waarden zijn

$$I_{max} = (1.866 \pm 0.005) \text{ arb.eenh.}$$

$$A = 0.206 \pm 0.006$$

$$d_0 = (0.991 \pm 0.007) \text{ mm}$$

$$D = (1.11 \pm 0.03) \text{ mm}$$

met kwaliteitswaarden $\chi^2_{red} = 1.179$ en $p = 0.268$. Een grafische weergave van deze fit is te zien in Figuur 3 en een gedetailleerde foutenanalyse wordt gegeven in de Bijlagen.

Vanuit deze fit worden de finesse F en contrast factor ξ bepaald als

$$F = \frac{\Delta d}{\delta d} = \frac{D}{\delta d} = 2.13 \pm 0.07$$

$$\xi = \frac{I_{max}}{I_{min}} = 1 + A = 1.206 \pm 0.006$$

Tabel 1: De hoek θ van de gemeten maxima en de orde van het maximum. De referentiehoek θ_0 is van deze θ afgetrokken. Hiermee wordt de golflengte λ berekend. De fout op θ en λ is de 100 %-fout.

$\theta[\circ] \pm 0.5^\circ$	orde	$\lambda[\text{mm}]$
22.0	1	2.2 ± 0.2
22.0	1	2.2 ± 0.2
48.0	2	2.23 ± 0.15
46.0	2	2.08 ± 0.16

waarbij $\Delta d = D$ de periode is van het profiel en dus de afstand tussen pieken (vergelijk met de waarden in Tabel 2), I_{max} de maximale intensiteitswaarde, $I_{min} = \frac{I_{max}}{1+A}$ de minimale waarde en δd de breedte op halve hoogte van een piek. Deze breedte δd werd bepaald als het verschil tussen de twee punten van de 5000 equidistante punten tussen 0 en 2 in het model waarvoor de fitwaarde van I het dichtst lag bij $(I_{max} + I_{min})/2$. Vanuit de afstand tussen de pieken D kan ook de golflengte van de mm-straling bepaald worden als

$$\lambda = 2D = (2.22 \pm 0.06) \text{ mm} \quad (2)$$

Men heeft de volgende relatie tussen F en de reflectiecoëfficiënt R

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}, [1]$$

zodat men R kan bepalen als

$$R = \frac{1}{4} \left(\frac{-\pi}{F} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{F}\right)^2 + 4} \right)^2 = 0.255 \pm 0.008. \quad (3)$$

Als laatste werd een intensiteitsprofiel gemaakt van twee spiegels met daartussen kwarts als diëlektricum voor verschillende diktes d van het diëlektricum. De gevonden waarden staan in Tabel 4 en Tabel 5 in de Bijlagen. De fout op I is opnieuw σ_{tot} . Deze data werd ook gefit volgens het Airy-profiel (1). De bekomen waarden zijn

$$\begin{aligned} I_{max} &= (8.68 \pm 0.04) \text{ arb.eenh.} \\ A &= 0.42 \pm 0.01 \\ d_0 &= (1.175 \pm 0.003) \text{ mm} \\ D &= (0.593 \pm 0.005) \text{ mm} \end{aligned}$$

met bijhorende kwaliteitswaarden $\chi^2_{red} = 4.726$ en $p = 3.459 \cdot 10^{-22}$. De resultaten van deze fit zijn weergegeven in Figuur 4. Uit [1] weten we dat de brekingsindex n gegeven wordt door

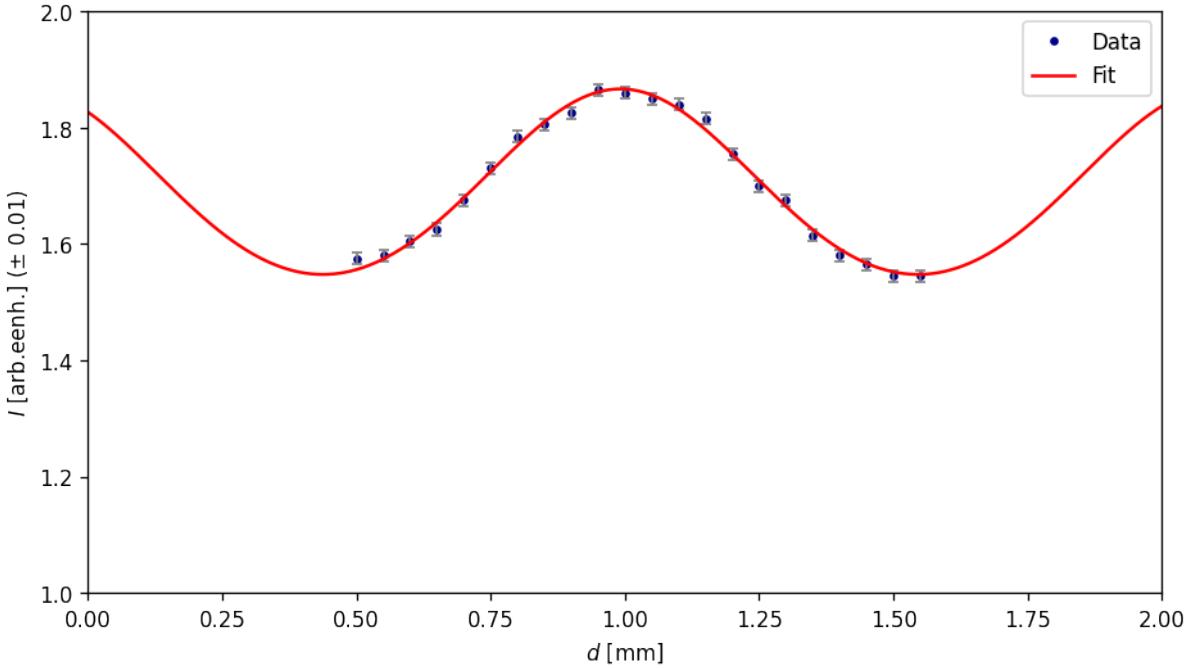
$$n = \frac{\lambda}{2\Delta d}$$

met λ de golflengte van inkomende straling en Δd de afstand tussen pieken. Door de waarde van (2) in te vullen samen met $\Delta d = D$, bekomt men

$$n = 1.87 \pm 0.05 \quad (4)$$

Tabel 2: Het verschil in afstand d tussen afstanden waarop een maximum wordt bereikt met de interferometer. De fout op d is uniform.

$d[\text{mm}] \pm 0.005 \text{ mm}$
1.150
1.050
1.100



Figuur 3: Intensiteitspiek van de Fabry-Perot -interferometer bij variërende spiegelaafstand d , gefit volgens het profiel (1). De fout op de waarden van d is $\sigma_d = 0.003$.

De contrast factor ξ kan op analoge manier als voorheen berekend worden als

$$\xi = 1 + A = 1.42 \pm 0.01$$

Een tweede schatting voor n bekomt men vanuit ξ als volgt

$$n = \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi - 1} = 1.84 \pm 0.03. \quad (5)$$

Deze formule volgt uit de relaties tussen ξ , n en R gegeven in [1].

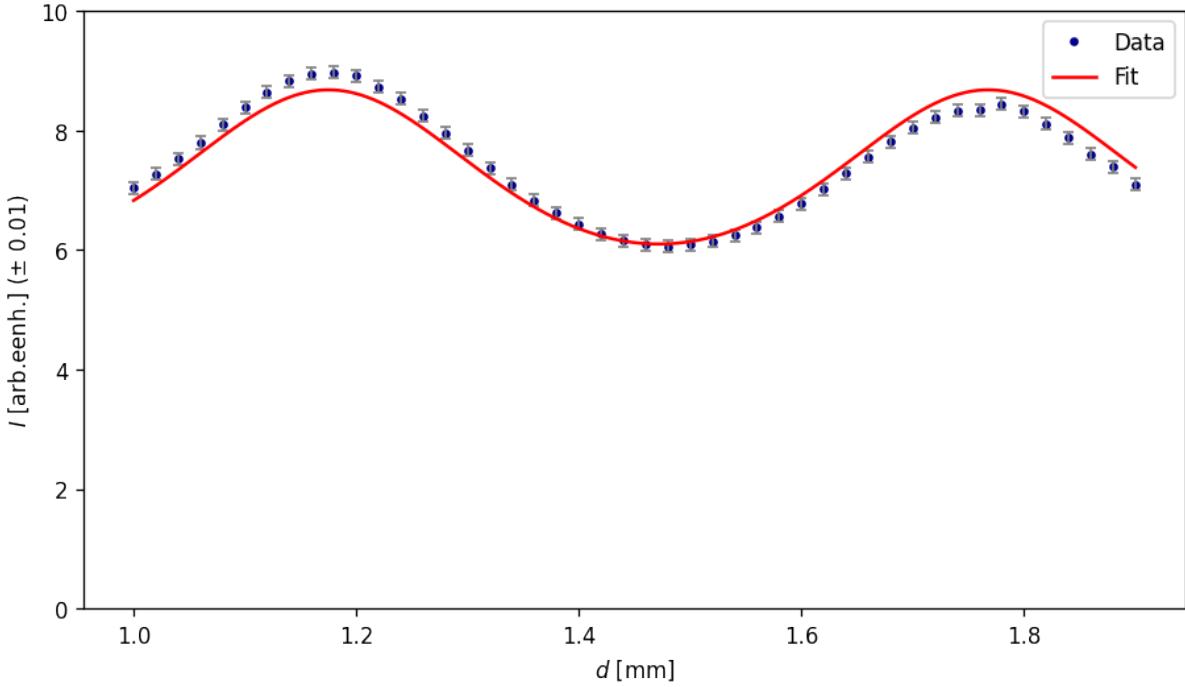
Als laatste wordt nog berekend dat

$$1 + \frac{4F^2}{\pi^2} = 2.84 \pm 0.09.$$

4 Discussie

De gevonden $\lambda_{g,dif}$. voor het diffractierooster bedraagt (2.18 ± 0.03) mm. [1] Via de FB-interferometer wordt een waarde van (2.20 ± 0.06) mm voor $\lambda_{g,FB}$ bekomen. De fout op $\lambda_{g,dif}$. is het kleinst dus het resultaat van het diffractierooster is het nauwkeurigst. Met een hypothesetest wordt er gecontroleerd of deze waarden overeenstemmen.

Er wordt getest of $\lambda_{g,FB}$ en $\lambda_{g,dif}$. overeenkomen, ofwel dat hun verschil nul is. Beide waarden zijn



Figuur 4: Intensiteitspiek van de diëlektrische plaat bij variërende dikte d , gefit volgens het profiel (1). De fout op de waarden van d is $\sigma_d = 0.003$.

benaderd normaal verdeeld, dus de teststatistiek

$$T = \frac{|\lambda_{g,FB} - \lambda_{g,dif.}|}{\sqrt{\sigma_{g,FB}^2 + \sigma_{g,dif.}^2}}$$

is ook benaderd normaal verdeeld. Er wordt gewerkt op het niveau $\alpha = 5\%$ met een tweezijdige test. Voor deze steekproef is $t = 0.306$, zodat $2p(T > t) = 0.757$. De hypothese wordt dus aanvaard en de waarden komen overeen op het betrouwbaarheidsniveau.

Als het diffractierooster in de eerste proef 90° gedraaid wordt, dan verandert het diffractiepatroon mee. Het patroon wordt nauwer doordat de spleten breder worden. Verticaal zal er nog steeds hetzelfde diffractiepatroon zijn als er voordien horizontaal werd waargenomen.

De fit van de intensiteitspiek van de FB-interferometer heeft een p -waarde van 0.268 en $\chi^2_{red} = 1.179$ en wordt bijgevolg aanvaard op het niveau $\alpha = 5\%$. De maximale doorgelaten intensiteit is (1.866 ± 0.005) arb.eenh., wat slechts een factor 1.206 ± 0.006 groter is dan de minimale intensiteit. De doorgelaten intensiteit hangt af van de hoeveelheid constructieve en destructieve interferentie binnen de interferometer. Om de pieken te verhogen en dus een hogere contrastfactor ξ en nauwkeurigere resultaten te bekomen, zou men kunnen werken met een meer geconcentreerde stralingsbundel. Dat kan onder andere door betere calibratie van de lens om verschillen in weglengte te vermijden. Een andere factor is de variatie in golflengte van binnengekomende straling. Door deze te verkleinen zal er minder interferentie zijn tussen verschillende golflengten en dus een scherper patroon afgetekend

worden. De contrastfactor vergroot ook als de spiegels een grotere R hebben. Dan gaat een kleiner deel van de straling direct door de tweede spiegel en vindt er meer interferentie plaats tussen de twee spiegels.

Op basis van de uitgevoerde fit werden de verschillende parameters van de FP-interferometer bepaald als

$$\xi = 1.206 \pm 0.006 \quad F = 2.13 \pm 0.07 \quad R = 0.255 \pm 0.008$$

De onderlinge relatie tussen ξ en F is niet voldaan, aangezien

$$1 + \frac{4F^2}{\pi^2} = 2.84 \pm 0.09$$

niet gelijk is aan de gevonden ξ . Deze extreme discrepantie tussen theorie en experiment is vermoedelijk te wijten aan de suboptimale calibratie van de opstelling, zoals besproken is in de vorige paragraaf.

Via deze fit wordt de waarde (2) van λ gevonden. Deze is opnieuw benaderd normaal verdeeld, dus de teststatistiek T kan opnieuw gebruikt worden. De testwaarde is $t = 0.596$ en de p-waarde $2p(T > t) = 0.549$. Bijgevolg komt ook deze waarde overeen met de andere resultaten.

Voor de diëlektrische plaat leverde een fit volgens hetzelfde profiel als de interferometer een p -waarde van $3 \cdot 10^{-22}$ en $\chi_{red}^2 = 4.726$, dus de fit wordt verworpen. In Figuur 4 is duidelijk dat er een significant verschil is tussen de hoogte van de twee pieken in de data, hoewel het globaal verloop van de intensiteit dezelfde trends vertoont als in de Airy-fit. Deze systematische afwijking verklaart de slechte kwaliteitswaarde van de periodische fit. De bekomen waarden voor de brekingsindex n van 1.87 ± 0.05 en 1.84 ± 0.03 zijn compatibel met elkaar, maar niet met de literatuurwaarde van ongeveer $n = 2.09$. [3] De contrast factor werd berekend als $\xi = 1.42 \pm 0.01$, maar dit resultaat is onbetrouwbaar gezien de lage kwaliteitswaarde van de fit.

5 Conclusie

De golflengte van de gebruikte mm-golven werd bepaald als $\lambda_{g,dif.} = (2.18 \pm 0.09)$ mm voor het diffractierooster en als $\lambda_{g,FB} = (2.20 \pm 0.06)$ mm voor de FB-interferometer en deze waarden stemmen overeen op $\alpha = 5\%$. Voor het intensiteitsprofiel was $\xi = 1.206 \pm 0.006$, $F = 2.13 \pm 0.07$ en $R = 0.255 \pm 0.008$, allen met 1σ -fout. De brekingsindex van het kwarts bedraagt $n = 1.87 \pm 0.05$, maar de fit die hiervoor gebruikt werd, is niet aanvaard op $\alpha = 5\%$.

Referenties

- [1] mm-golven: interferentie en diffractie. Experimentele basistechnieken in de natuurkunde G0P32A. KU Leuven; 2022.
- [2] Thorlabs. Fabry-Perot Interferometer Tutorial;. Geraadpleegd op 30 april 2022 via https://www.thorlabs.com/newgroupage9.cfm?objectgroup_id=9021.
- [3] Davies, C.L., Patel, J.B., Xia, C.Q. et al. Temperature-Dependent Refractive Index of Quartz at Terahertz Frequencies. *J Infrared Milli Terahz Waves* 39, 1236–1248 (2018).

Bijlagen

Tabellen

Tabel 3: De gemeten waarden van I voor de verschillende waarden van de afstand d tussen de spiegels van de Farby-Perot-interferometer. De fout op d is de systematische fout en die op I de totale 1σ -fout.

$d[\text{mm}] \pm 0.005 \text{ mm}$	$I[\text{arb. eenh.}] \pm 0.01$
0.500	1.58
0.550	1.58
0.600	1.61
0.650	1.63
0.700	1.68
0.750	1.73
0.800	1.77
0.850	1.79
0.900	1.81
0.950	1.83
1.000	1.85
1.050	1.87
1.100	1.86
1.150	1.85
1.200	1.84
1.250	1.82
1.300	1.76
1.350	1.68
1.400	1.62
1.450	1.57
1.500	1.55
1.550	1.55

Tabel 4: De gemeten waarden van I voor de verschillende waarden van de dikte d van de diëlektrische plaat (deel 1). De fout op d is de systematische fout en die op I de totale 1σ -fout.

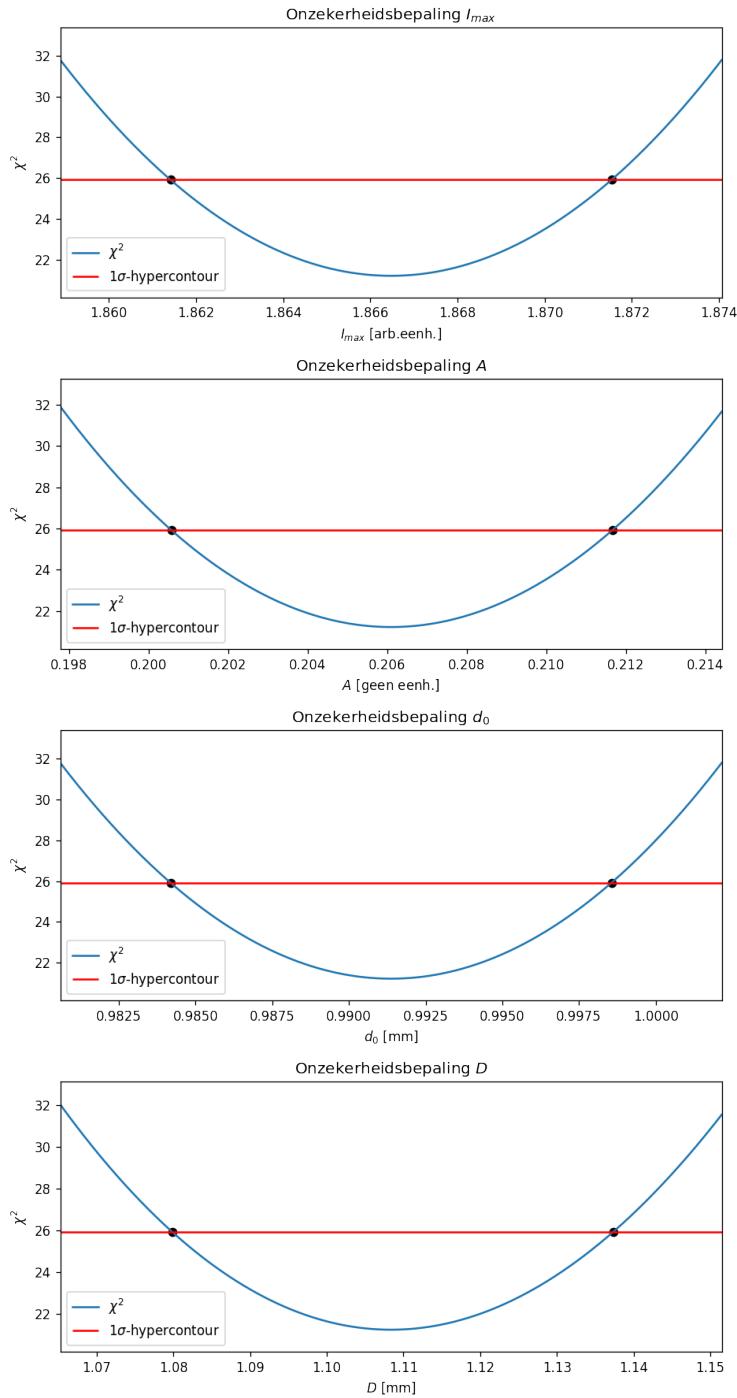
$d[\text{mm}] \pm 0.005 \text{ mm}$	$I[\text{arb. eenh.}] \pm 0.01$
0.880	6.58
0.900	6.55
0.920	6.55
0.940	6.61
0.960	6.70
0.980	6.85
1.000	7.04
1.020	7.28
1.040	7.56
1.060	7.80
1.080	8.10
1.100	8.39
1.120	8.64
1.140	8.83
1.160	8.95
1.180	8.98
1.200	8.91
1.220	8.73
1.240	8.53
1.260	8.25
1.280	7.96
1.300	7.67
1.320	7.37
1.340	7.10
1.360	6.83
1.380	6.62
1.400	6.43
1.420	6.27
1.440	6.16
1.460	6.09
1.480	6.06

Tabel 5: De gemeten waarden van I voor de verschillende waarden van de dikte d van de diëlektrische plaat (deel 2). De fout op d is de systematische fout en die op I de totale 1σ -fout.

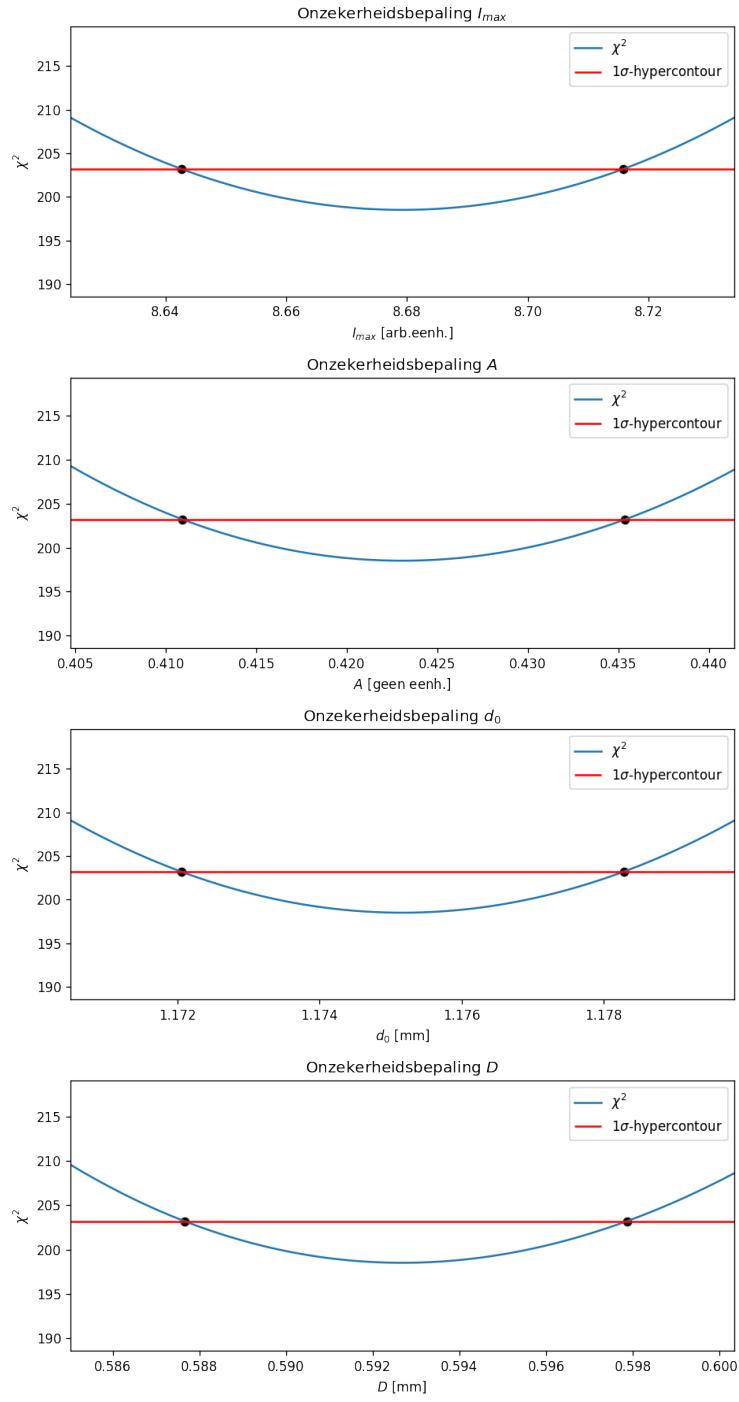
$d[\text{mm}] \pm 0.005 \text{ mm}$	$I[\text{arb. eenh.}] \pm 0.01$
1.500	6.09
1.520	6.15
1.540	6.25
1.560	6.38
1.580	6.56
1.600	6.78
1.620	7.02
1.640	7.28
1.660	7.56
1.680	7.82
1.700	8.04
1.720	8.22
1.740	8.33
1.760	8.35
1.780	8.45
1.800	8.32
1.820	8.12
1.840	7.88
1.860	7.61
1.880	7.39
1.900	7.10

Grafieken

Onderstaande grafieken geven de foutenanalyse weer voor de verschillende fitparameters.



Figuur 5: Fouten voor de fit van de intensiteitspiek van de Fabry-Perot-interferometer volgens het model (1).



Figuur 6: Fouten voor de fit van de intensiteitspiek van de diëlektrische plaat volgens het model (1).