

Onderzoek Gedwongen oscillaties

Louis Claeys, Ruben Van der Borght

12 december 2021

1 Inleiding

In dit experiment wordt onderzocht hoe een massa-veersysteem met externe aandrijving beweegt bij aanwezigheid van demping. Voor twee verschillende massa's worden de amplitude $|x|$ en fasinhoek ϕ van de beweging onderzocht bij verschillende aandrijfingsfrequenties. De bekomen data wordt gefit en vergeleken met het theoretisch voorspelde model op niveau $\alpha = 5\%$. Ten slotte wordt de invloed van demping op het systeem bekeken.

2 Materialen

Voor de proeven wordt gebruik gemaakt van de meetapparatuur die schematisch is voorgesteld op Figuur 1. Enkele afbeeldingen van het echte toestel vallen te zien op Figuur 2. Een massa m wordt aan een veer met veerconstante k gehangen en ondergedompeld in een glas water. Een roterend drijfwiel dat verbonden is met de veer zorgt voor een sinusoïdale kracht met grootte F_0 en instelbare hoekfrequentie ω .

De beweging van de veer wordt geregistreerd door een optische bewegingsdetector. Die stuurt de gegevens door naar een PC die de data verwerkt. De output van de PC zijn de gemiddelde frequentie f , de gemiddelde amplitude $|x|$ en de gemiddelde fasinhoek ϕ van lineaire uitwijking x van de veer over N metingen, inclusief de standaardafwijkingen s_f , $s_{|x|}$ en s_ϕ van de gemiddeldes. De systematische fouten per meting bedragen $\Delta_{sys} = 1 \text{ Hz}$ voor f , $\Delta_{sys} = 1 \text{ mm}$ voor $|x|$ en $\Delta_{sys} = 0.1^\circ$ voor ϕ .

Het experiment wordt tweemaal uitgevoerd voor verschillende massa's: een cilindervormige massa m_C en een massa m_S met de vorm van een schijf met gaten in.

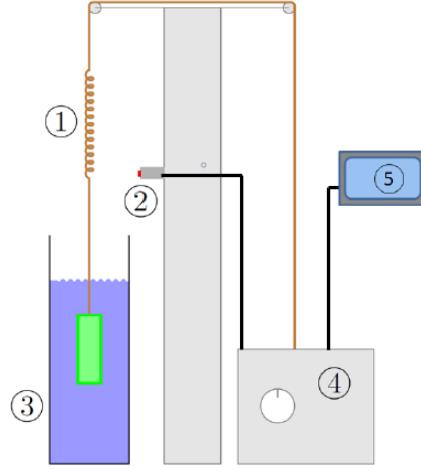
3 Theorie

Uit [1] volgt dat de uitwijking x ten opzichte van het evenwichtspunt van de veer waarop een sinusoïdale aandrijfkracht inwerkt te schrijven is als

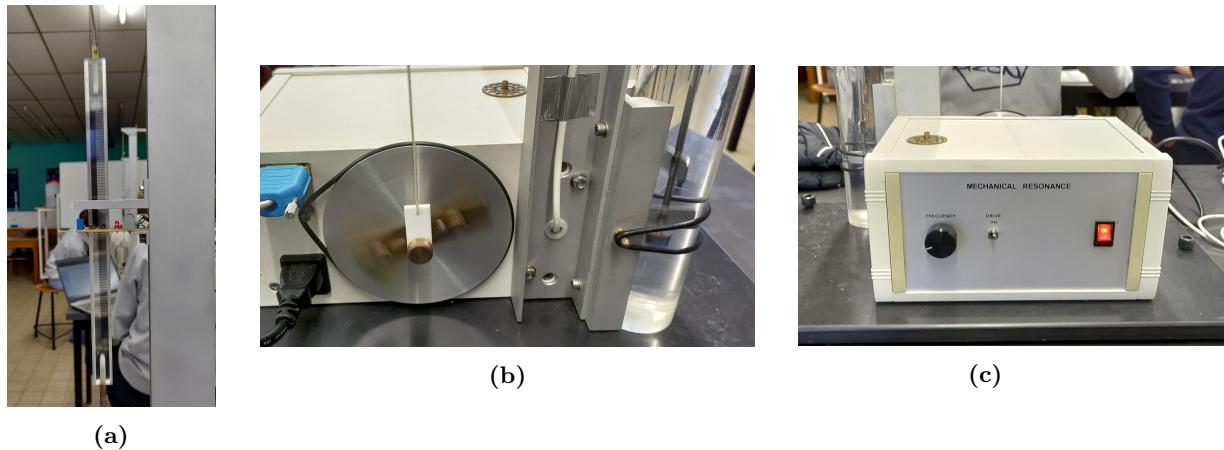
$$x = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega\eta}{m})^2)^{\frac{1}{2}}} \exp(i(\omega t + \phi(\omega))), \quad (1)$$

waarbij $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ en

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega\eta}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right). \quad (2)$$



Figuur 1: Een schematische voorstelling [1] van de meetapparatuur. ① is de veer met constante k , ② is de optische detector en ③ het glas water waarin m oscilleert. ④ is de mechanische aandrijving en ⑤ de PC die de data verwerkt.



Figuur 2: Enkele afbeeldingen van de meetapparatuur. Figuur 2a toont de optische bewegingssensor in het midden van de afbeelding. Op Figuur 2b is de kracht van de aandrijfmachine aan het inwerken op de veer. Aan de rechterkant van de afbeelding beweegt m_C in het water. Verder ligt m_S rechtsboven op de aandrijfmachine. Figuur 2c laat de voorkant van de aandrijfmachine zien, waarop een draaiknop is gemonteerd waarmee men de frequentie f mee kan veranderen.

De amplitude $|x|$ van x wordt gegeven door de factor voor de exponentiële. In wat volgt wordt $|x|$ herschreven als functie van de parameters

$$X = \frac{F_0}{k} \quad w = \frac{\omega}{\omega_0} \quad b = \frac{\eta}{\sqrt{2km}}.$$

Als eerste worden w en X in (1) ingevoerd, zodat

$$|x| = \frac{X}{((1-w^2)^2 + (\frac{w\eta}{\sqrt{km}})^2)}.$$

Als vervolgens ook b gesubstitueerd wordt, dan

$$|x| = \frac{X}{((1-w^2)^2 + 2(bw)^2)}. \quad (3)$$

De amplitude is maximaal wanneer de noemer van (3) haar minimum bereikt. Dat minimum ligt bij $w = \sqrt{1 - \frac{b^2}{2}}$. Alleen de positieve oplossing wordt in rekening genomen omdat $w \geq 0$. Bijgevolg is er resonantie wanneer

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\eta}{2m}\right)^2}. \quad (4)$$

Bij meer wrijving en grotere η zal f_0 dus een kleinere waarde aannemen.

Nu wordt (2) nog omgezet in een formule in functie van de nieuwe parameters. Substitueer achtereenvolgens w en b zodat

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{wb\sqrt{2}}{1-w^2}\right). \quad (5)$$

Om inzicht te krijgen in de modellen (3) en (5) worden ze geplot ten opzichte van verschillende waarden van $b \in [0, 1]$. De grafieken zijn te zien in Figuur 7 respectievelijk Figuur 8 in de Bijlagen.

4 Methode en Resultaten

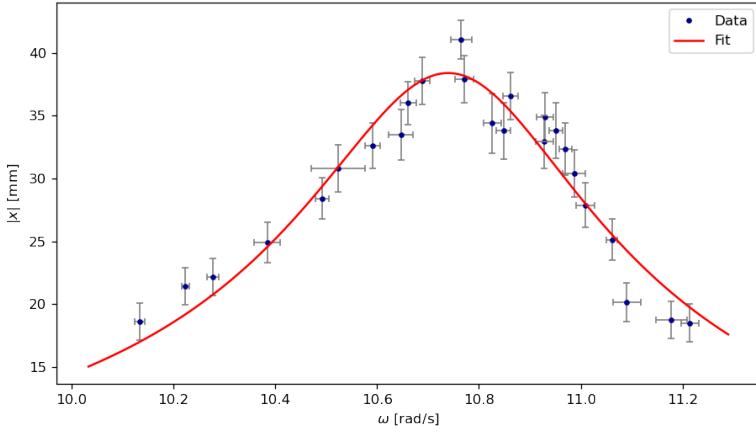
Beide massa's m_C en m_S worden achtereenvolgens aan de veer gehangen. De frequentie f wordt ingesteld op verschillende waarden die het hele spectrum overspannen en per f wordt het gemiddelde van $N = 10$ oscillaties berekend. Rondom de resonantiefrequentie worden meer metingen uitgevoerd. Voor elke frequentie worden de fasehoek ϕ en de amplitude $|x|$ berekend. Tabel 2 en Tabel 3 in de Bijlagen geven respectievelijk de meetresultaten voor m_C en m_S . Vervolgens zullen we deze data fitten met de LS-methode. Een gedetailleerde analyse van de fouten op de parameters is te zien in paragraaf 6 in de Bijlagen.

In de sectie Theorie is de theoretisch verwachte waarde van amplitude in functie van hoeksnelheid weergegeven (zie (1)), dus wordt de amplitude gefit volgens het model

$$|x(\omega)| = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega\eta}{m})^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

met fitparameters $\frac{F_0}{m}$, ω_0 en $\frac{\eta}{m}$. Voor m_C bekomt men

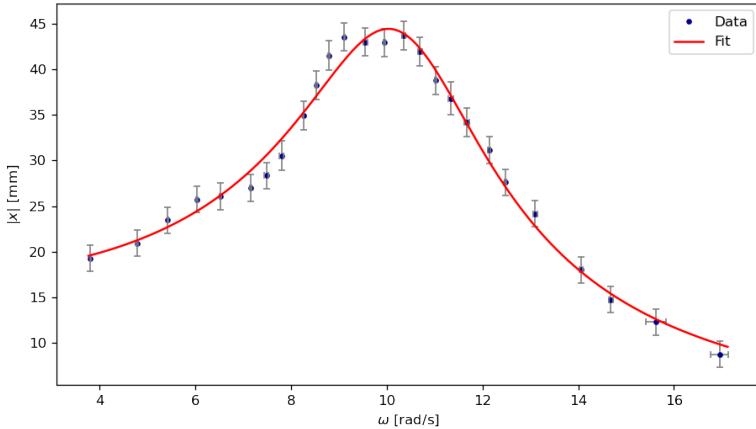
$$\frac{F_0}{m} = (240 \pm 6) \text{ m/s}^2 \quad \omega_0 = (10.75 \pm 0.02) \text{ rad/s} \quad \eta/m = (0.58 \pm 0.02) \text{ rad/s.}$$



Figuur 3: Fit van de amplitude voor m_C volgens het model (6). De bekomen parameters zijn zichtbaar in de sectie Methode en Resultaten.

Een grafiek van deze fit naast de data is zichtbaar in Figuur 3. De fit heeft een gereduceerde χ^2 -waarde van 1.34 en $p = 0.13$. Voor m_S is

$$\frac{F_0}{m} = (1880 \pm 40) \text{ m/s}^2 \quad \omega_0 = (10.5 \pm 0.1) \text{ rad/s} \quad \eta/m = 4.1^{+0.12}_{-0.13} \text{ rad/s.}$$



Figuur 4: Fit van de amplitude voor m_S volgens het model (6). De bekomen parameters zijn zichtbaar in de sectie Methode en Resultaten.

Een grafiek van deze fit naast de data is zichtbaar in Figuur 4. De fit heeft een gereduceerde χ^2 -waarde van 0.729 en $p = 0.82$.

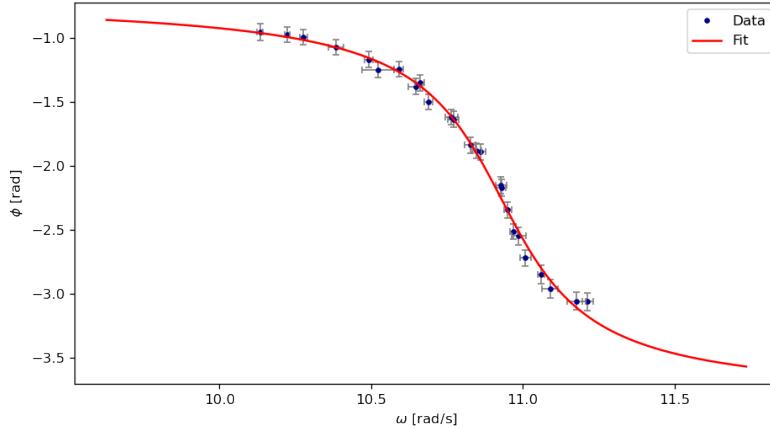
Voor de fasinhoek wordt een fit uitgevoerd volgens het model

$$\phi(\omega) = C - \arctan\left(\frac{\omega\eta}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \quad (7)$$

met fitparameters η/m , ω_0 en C . Dit is analoog aan (2) maar met toevoeging van een constante factor C . Als deze niet toegevoegd wordt zijn de fits niet zinvol (met p -waarden kleiner dan 10^{-30}). Deze constante valt te interpreteren als een mogelijke systematische calibratiefout waardoor de fasinhoek weergegeven door de gebruikte software er telkens met een vaste constante naast zit. Bij de verwerking werd het teken van de fasinhoek telkens omgewisseld, aangezien de meetsoftware een andere definitie hanteert. Een eventuele factor π zal verwerkt zijn in de constante C .

Bij m_C bekomen men

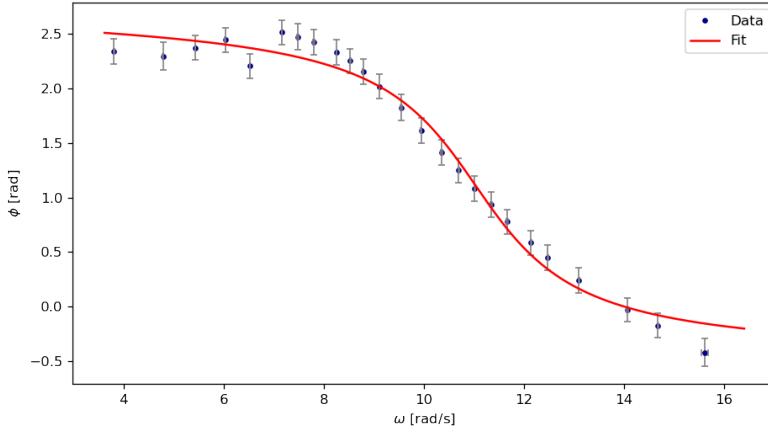
$$\eta/m = (0.44 \pm 0.03) \text{ rad/s} \quad \omega_0 = (10.93 \pm 0.01) \text{ rad/s} \quad C = (-0.70 \pm 0.03) \text{ rad.}$$



Figuur 5: Fit van de fasinhoek voor m_C volgens het model (7). De bekomen parameters zijn zichtbaar in de sectie Methode en Resultaten.

Een grafiek van deze fit naast de data is zichtbaar in Figuur 5. De fit heeft een gereduceerde χ^2 -waarde van 0.865 en $p = 0.64$. Voor m_S bekomen men

$$\eta/m = (3.0 \pm 0.4) \text{ rad/s} \quad \omega_0 = (11.10 \pm 0.15) \text{ rad/s} \quad c = (2.61 \pm 0.05) \text{ rad.}$$



Figuur 6: Fit van de fasinhoek voor m_C volgens het model (7). De bekomen parameters zijn zichtbaar in de sectie Methode en Resultaten.

Een grafiek van deze fit naast de data is zichtbaar in Figuur 6. De fit heeft een gereduceerde χ^2 -waarde van 1.251 en $p = 0.19$.

5 Discussie

Bij elke fit is $\chi^2_{red} \approx 1$. De fits zijn dus van goede kwaliteit. Aangezien de p-waarde van elke fit groter is dan $\alpha = 5\%$ kunnen alle fits aanvaard worden op dit betrouwbaarheidsniveau. Na de aanpassing van het model voor ϕ is $\chi^2_{red} \approx 1$, dus dit model benaderd de dataset goed en de constante C is een mogelijke verklaring voor de afwijking op de datapunten.

Via het fitten werden voor elk van de massa's twee uitkomsten voor η/m en ω_0 bekomen. Als de verdeling van de parameters normaal wordt benaderd en er met een tweezijdige test wordt nagegaan of $\mu_1 = \mu_2$ met teststatistiek $T = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$, dan zijn de p-waarden gegeven in Tabel 1. Deze zijn telkens niet compatibel met elkaar op betrouwbaarheidsniveau $\alpha = 5\%$.

Aangezien de gebruikte massa's een vergelijkbare grootte hebben en de bekomen waarde van η/m voor m_S veel groter is dan voor m_C , blijkt dat de dempingscoëfficiënt η voor de schijf met gaten (en dus een groter contactoppervlak) groter is dan bij de volle cilinder. Dit komt overeen met de gekende trend van grotere demping in water bij een groter contactoppervlak.

Voor de $|x|$ -fit is ω_0 inderdaad kleiner voor m_S dan voor m_C . Dit is de daling die de theorie

Tabel 1: De p-waarden van de tweezijdige hypothesetest $\mu_1 = \mu_2$. De gebruikte teststatistiek is T .

	ω_0	η/m
m_C	10^{-5}	0.00011
m_S	0.00102	0.00906

voorspelt wanneer er meer wrijving is. Voor de ϕ -fit is er echter een stijging. Deze metingen geven dus geen uitsluitsel over de correctheid van (4).

6 Conclusie

Via de twee fits werden verschillende waarden voor de fitparameters η/m , ω_0 en F/m bekomen voor beide massa's. Deze waarden van de fit van $|x|$ en ϕ waren echter niet compatibel met elkaar op niveau $\alpha = 5\%$. Verder bevestigt dit experiment de toename in demping bij groter contactoppervlak van een voorwerp.

Referenties

- [1] Gedwongen oscillaties en resonantie. Experimentele basistechnieken in de natuurkunde G0P32A. KU Leuven; 2021.

Bijlagen

Tabellen

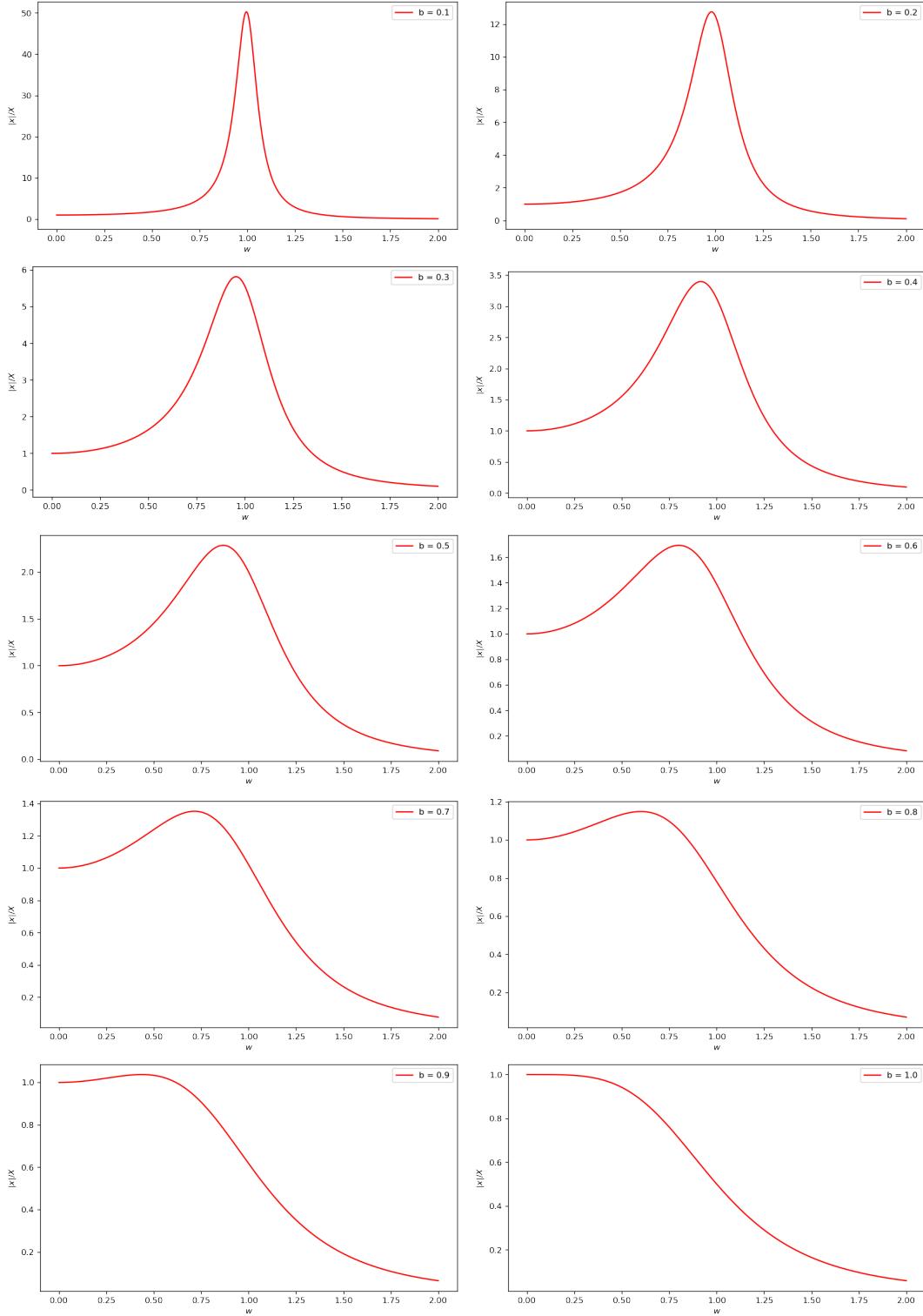
Tabel 2: De gemiddelde waarden van $|x|$ en ϕ voor de verschillende waarden van f voor de massa m_C . Al de waarden in de tabel zijn de gemiddeldes van 10 metingen.

f [Hz]	$ x $ [mm]	ϕ [°]
1.613 ± 0.0016 ± 0.005	18.6 ± 0.4 ± 0.5	54.5 ± 0.6 ± 0.05
1.627 ± 0.0013 ± 0.005	21.4 ± 0.4 ± 0.5	55.6 ± 0.4 ± 0.05
1.636 ± 0.0018 ± 0.005	22.1 ± 0.4 ± 0.5	56.8 ± 0.5 ± 0.05
1.653 ± 0.004 ± 0.005	24.9 ± 0.8 ± 0.5	61.4 ± 0.4 ± 0.05
1.670 ± 0.002 ± 0.005	28.4 ± 0.8 ± 0.5	66.8 ± 0.5 ± 0.05
1.675 ± 0.008 ± 0.005	30.8 ± 1.2 ± 0.5	71.5 ± 0.5 ± 0.05
1.686 ± 0.002 ± 0.005	32.6 ± 1.1 ± 0.5	71.2 ± 0.4 ± 0.05
1.695 ± 0.004 ± 0.005	33.5 ± 1.5 ± 0.5	78.8 ± 0.6 ± 0.05
1.697 ± 0.002 ± 0.005	36.0 ± 1.0 ± 0.5	77.2 ± 0.5 ± 0.05
1.701 ± 0.002 ± 0.005	37.8 ± 1.2 ± 0.5	85.6 ± 0.4 ± 0.05
1.713 ± 0.003 ± 0.005	41.1 ± 0.6 ± 0.5	92.6 ± 0.2 ± 0.05
1.714 ± 0.003 ± 0.005	37.9 ± 1.2 ± 0.5	93.6 ± 0.6 ± 0.05
1.723 ± 0.003 ± 0.005	34.4 ± 1.9 ± 0.5	105.2 ± 0.6 ± 0.05
1.727 ± 0.002 ± 0.005	33.8 ± 1.8 ± 0.5	107.6 ± 0.5 ± 0.05
1.729 ± 0.002 ± 0.005	36.6 ± 1.2 ± 0.5	108.1 ± 0.6 ± 0.05
1.739 ± 0.003 ± 0.005	32.9 ± 1.6 ± 0.5	123.0 ± 0.7 ± 0.05
1.740 ± 0.003 ± 0.005	34.9 ± 1.4 ± 0.5	124.2 ± 0.6 ± 0.05
1.743 ± 0.002 ± 0.005	33.8 ± 1.7 ± 0.5	134.2 ± 0.6 ± 0.05
1.746 ± 0.0019 ± 0.005	32.3 ± 1.5 ± 0.5	143.9 ± 0.4 ± 0.05
1.749 ± 0.004 ± 0.005	30.4 ± 1.3 ± 0.5	145.8 ± 0.8 ± 0.05
1.752 ± 0.003 ± 0.005	27.9 ± 1.1 ± 0.5	155.8 ± 0.6 ± 0.05
1.761 ± 0.0017 ± 0.005	25.1 ± 0.8 ± 0.5	163.1 ± 0.8 ± 0.05
1.765 ± 0.004 ± 0.005	20.1 ± 0.7 ± 0.5	169.5 ± 0.8 ± 0.05
1.779 ± 0.005 ± 0.005	18.7 ± 0.4 ± 0.5	175.0 ± 0.8 ± 0.05
1.785 ± 0.003 ± 0.005	18.5 ± 0.5 ± 0.5	175.4 ± 0.7 ± 0.05

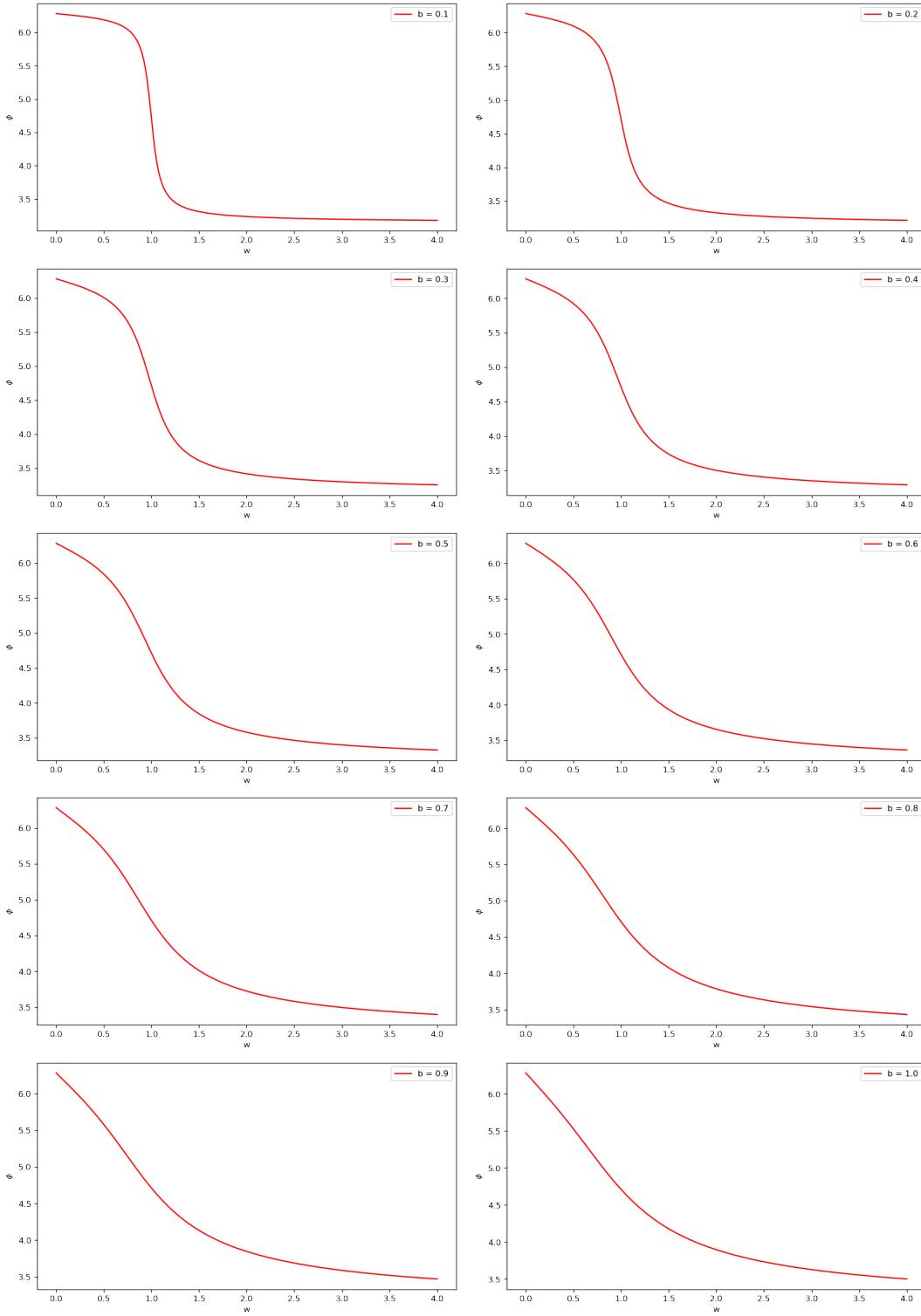
Tabel 3: De gemeten waarden van $|x|$ en ϕ voor de verschillende waarden van f voor de massa m_S . Al de waarden in de tabel zijn de gemiddeldes van 10 metingen.

$f[\text{Hz}]$	$ x [\text{mm}]$	$\phi[\text{°}]$
$0.606 \pm 0.0004 \pm 0.005$	$19.3 \pm 0.2 \pm 0.5$	$225.8 \pm 0.3 \pm 0.05$
$0.762 \pm 0.0006 \pm 0.005$	$20.93 \pm 0.19 \pm 0.5$	$228.3 \pm 0.5 \pm 0.05$
$0.864 \pm 0.0004 \pm 0.005$	$23.5 \pm 0.3 \pm 0.5$	$223.9 \pm 0.3 \pm 0.05$
$0.960 \pm 0.0007 \pm 0.005$	$25.7 \pm 0.3 \pm 0.5$	$219.7 \pm 0.2 \pm 0.05$
$1.038 \pm 0.0009 \pm 0.005$	$26.1 \pm 0.4 \pm 0.5$	$230.3 \pm 0.2 \pm 0.05$
$1.140 \pm 0.0007 \pm 0.005$	$27.0 \pm 0.5 \pm 0.5$	$215.72 \pm 0.18 \pm 0.05$
$1.191 \pm 0.002 \pm 0.005$	$28.3 \pm 0.4 \pm 0.5$	$218.2 \pm 0.4 \pm 0.05$
$1.242 \pm 0.0018 \pm 0.005$	$30.5 \pm 0.8 \pm 0.5$	$221.1 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.314 \pm 0.0006 \pm 0.005$	$34.9 \pm 0.8 \pm 0.5$	$226.4 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.357 \pm 0.0007 \pm 0.005$	$38.3 \pm 0.7 \pm 0.5$	$230.9 \pm 0.2 \pm 0.05$
$1.399 \pm 0.0010 \pm 0.005$	$41.5 \pm 0.7 \pm 0.5$	$236.4 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.450 \pm 0.0006 \pm 0.005$	$43.5 \pm 0.6 \pm 0.5$	$244.3 \pm 0.2 \pm 0.05$
$1.520 \pm 0.002 \pm 0.005$	$43.0 \pm 0.6 \pm 0.5$	$255.3 \pm 0.4 \pm 0.05$
$1.583 \pm 0.0009 \pm 0.005$	$42.9 \pm 0.6 \pm 0.5$	$267.4 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.648 \pm 0.0017 \pm 0.005$	$43.7 \pm 0.7 \pm 0.5$	$279.1 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.703 \pm 0.002 \pm 0.005$	$41.9 \pm 0.7 \pm 0.5$	$288.4 \pm 0.2 \pm 0.05$
$1.754 \pm 0.0011 \pm 0.005$	$38.8 \pm 0.6 \pm 0.5$	$298.1 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.805 \pm 0.003 \pm 0.005$	$36.8 \pm 1.1 \pm 0.5$	$306.4 \pm 0.2 \pm 0.05$
$1.857 \pm 0.003 \pm 0.005$	$34.2 \pm 0.6 \pm 0.5$	$315.4 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.932 \pm 0.0013 \pm 0.005$	$31.1 \pm 0.4 \pm 0.5$	$326.5 \pm 0.3 \pm 0.05$
$1.986 \pm 0.0010 \pm 0.005$	$27.6 \pm 0.3 \pm 0.5$	$334.3 \pm 0.3 \pm 0.05$
$2.085 \pm 0.0019 \pm 0.005$	$24.1 \pm 0.2 \pm 0.5$	$346.4 \pm 0.3 \pm 0.05$
$2.239 \pm 0.0019 \pm 0.005$	$18.0 \pm 0.2 \pm 0.5$	$1.72 \pm 0.16 \pm 0.05$
$2.336 \pm 0.002 \pm 0.005$	$14.7 \pm 0.3 \pm 0.5$	$10.0 \pm 0.3 \pm 0.05$
$2.486 \pm 0.011 \pm 0.005$	$12.27 \pm 0.15 \pm 0.5$	$24.2 \pm 0.6 \pm 0.05$
$2.698 \pm 0.009 \pm 0.005$	$8.7 \pm 0.3 \pm 0.5$	$52.4 \pm 0.9 \pm 0.05$

Grafieken theorie

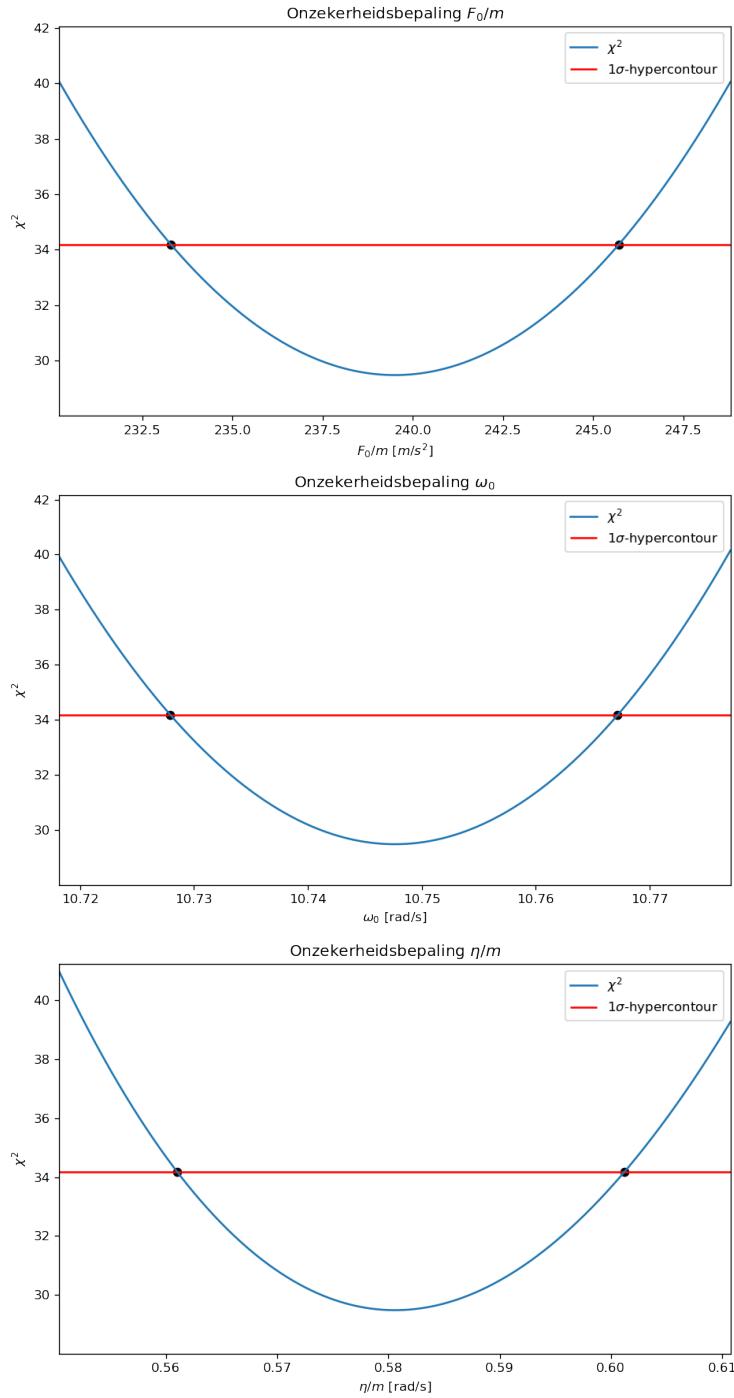


Figuur 7: Theoretische curves voor de dimensieloze amplitude $|x|/X$ in functie van de dimensieloze frequentie $w = \omega/\omega_0$ bij verschillende dempingsconstantes b .

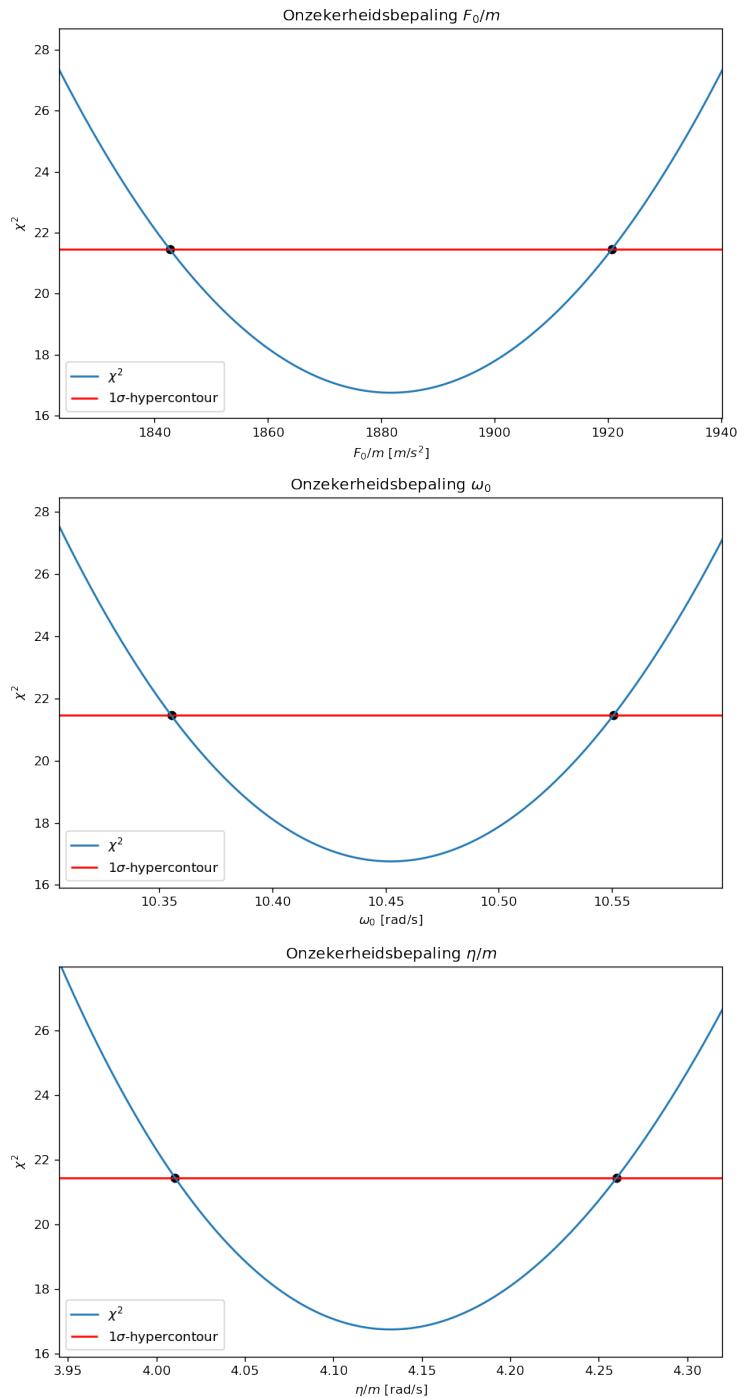


Figuur 8: Theoretische curves voor het faseverschil ϕ in functie van de dimensioze frequentie $w = \omega/\omega_0$ bij verschillende dempingsconstantes b .

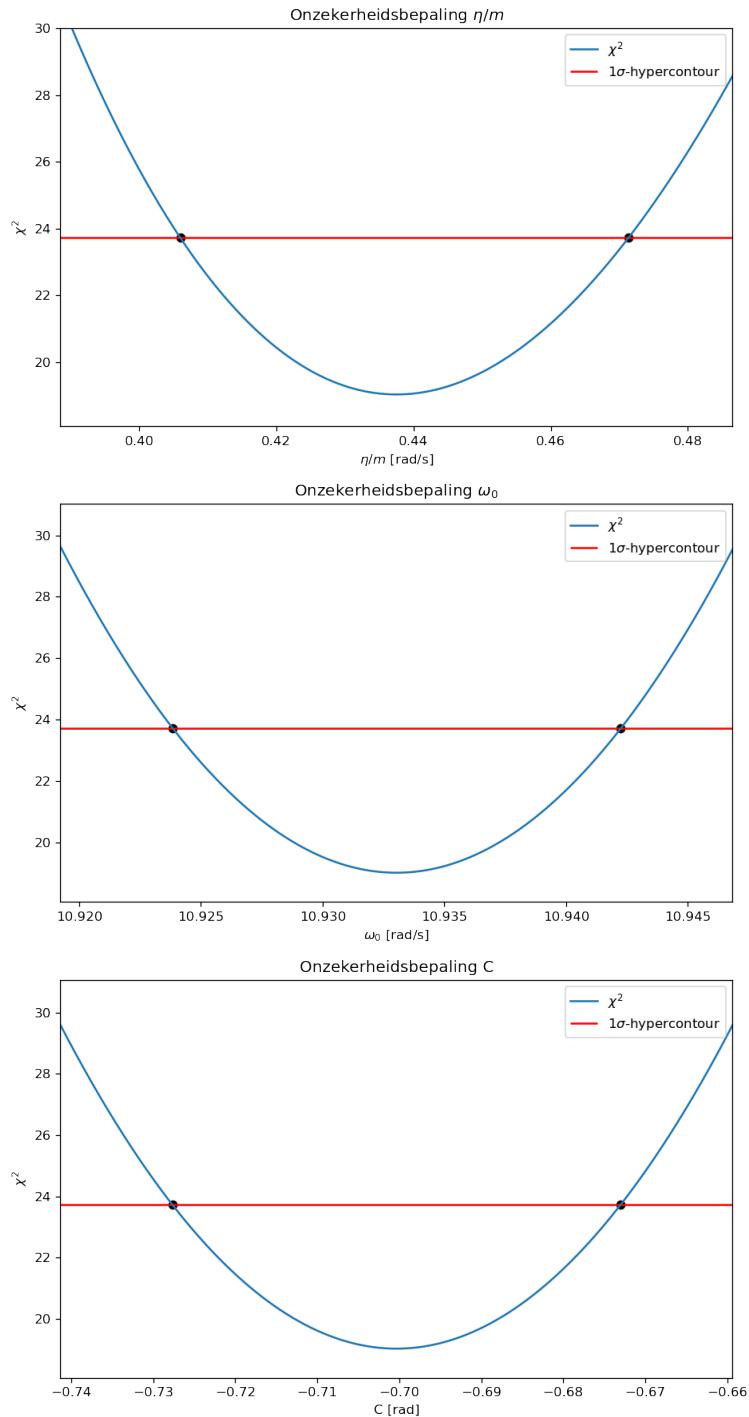
Grafieken fitfouten



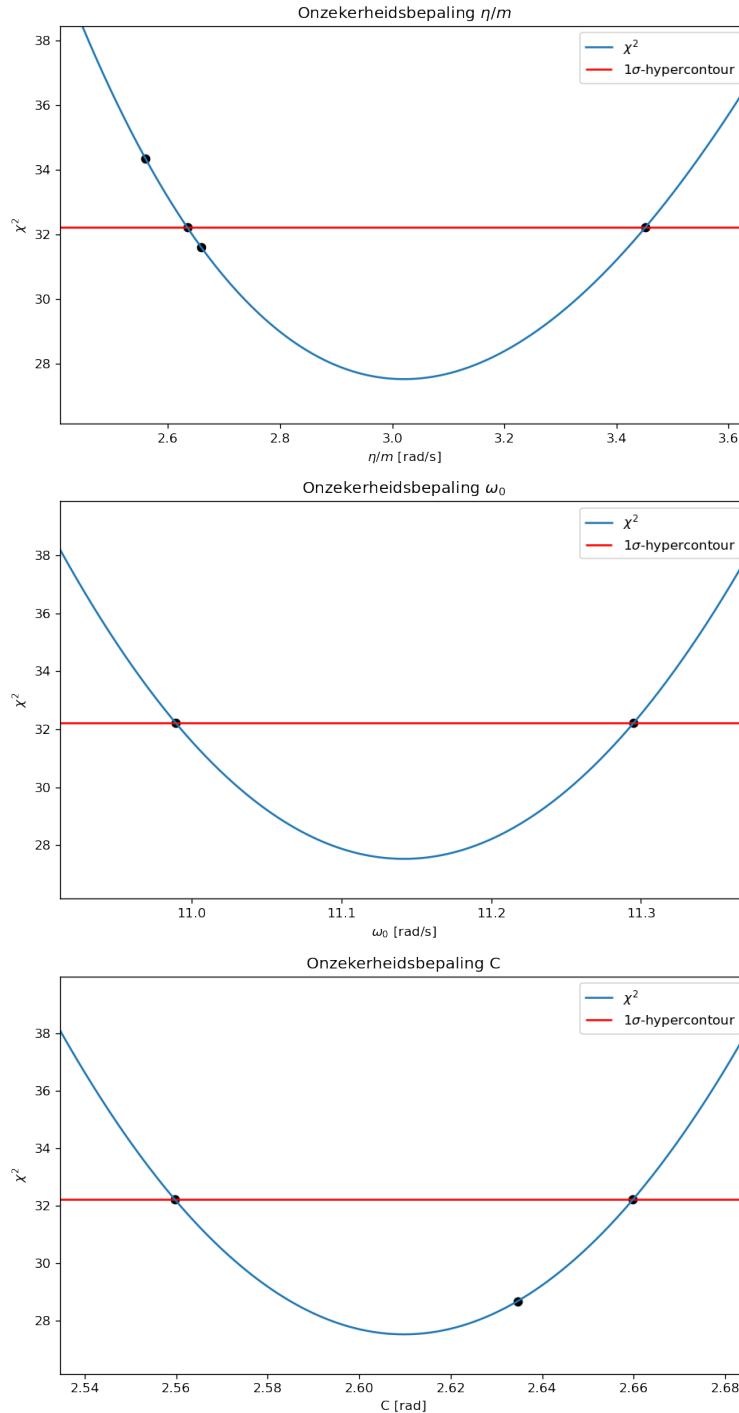
Figuur 9: Foutenbepaling van de fitparameters bij het bepalen van $|x|$ van m_C .



Figuur 10: Foutenbepaling van de fitparameters bij het bepalen van $|x|$ van m_S .



Figuur 11: Foutenbepaling van de fitparameters bij het bepalen van ϕ van m_C .



Figuur 12: Foutenbepaling van de fitparameters bij het bepalen van ϕ van m_S .

Gebruikte code

Alle grafieken en fits werden gemaakt via Python (Jupyter Notebook) met onderstaande code.

```
1 import sympy as sp
2 from scipy.optimize import minimize, fsolve
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from IPython.display import display, Latex
5 sp.init_printing()
6
7 # THEORETISCH VERLOOP AMPLITUDE
8 w = np.linspace(0,2,1000)
9 X = 1
10 def A(b,w):
11     return 1/((1-w**2)**2+2*(b*w)**2)
12
13 for i in range(1,11):
14     b = i*0.1
15     fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, dpi=120, figsize=(9, 5))
16     amp = A(b,w)
17     ax.plot(w,amp,color='red',label='b = '+str(round(b,1)))
18     ax.legend()
19     ax.set_xlabel('$w$')
20     ax.set_ylabel('$|x|/X$')
21     plt.savefig('Theorie-amplitude'+str(round(b,1))+'.png',bbox_inches='tight')
22
23 # THEORETISCH VERLOOP FASE
24 w = np.linspace(0,4,1000)
25 def phi(b,w):
26     return -np.arctan2(w*b*np.sqrt(2),(1-w**2))
27
28 for i in range(1,11):
29     b = i*0.1
30     fig, ax = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, dpi=120, figsize=(9, 5))
31     fase = phi(b,w)
32     ax.plot(w,fase,color='red',label='b = '+str(round(b,1)))
33     ax.legend()
34     ax.set_xlabel('w')
35     ax.set_ylabel('$\phi$')
36     plt.savefig('Theorie-faseverschil'+str(round(b,1))+'.png',bbox_inches='tight')
37
38
39 # INVOEREN VAN DE DATA
40 data1 = np.loadtxt("GO_amplitudes1.txt", delimiter="\t")
41 f1 = np.flip(data1[:,0])
42 df1 = np.flip(data1[:,1])
43 A1 = np.flip(data1[:,2])
44 dA1 = np.flip(data1[:,3])
45 phi1 = np.flip(data1[:,4])
46 dphi1 = np.flip(data1[:,5])
47 N1 = np.flip(data1[:,6])
48
49 data2 = np.loadtxt("GO_amplitudes2.txt", delimiter="\t")
50 f2 = data2[:,0]
51 df2 = data2[:,1]
52 A2 = data2[:,2]
53 dA2 = data2[:,3]
```

```

54 phi2 = data2[:,4]
55 dphi2 = data2[:,5]
56 N2 = data2[:,6]
57
58 # AMPLITUDE (uitcommenten als fasehoek gewenst is)
59 x = 2*np.pi*f1
60 y = A1
61 dy = np.sqrt(dA1**2/10+2)
62 dx = df1*2*np.pi/np.sqrt(10)
63
64 # FASEHOEK (uitcommenten als amplitude gewenst is)
65 x = 2*np.pi*f2
66 y = -phi2*np.pi/180
67 dy = np.sqrt(dphi2**2/10+20)*np.pi/180
68 dx = 2*np.pi*df2/np.sqrt(10)
69
70 # Defini ren van het gebruikte model (PAS AAN VOLGENS GEWENSTE FIT):
71 # AMPLITUDE
72 def model(x,theta):
73     F0, w0, eta = theta
74     return F0*((w0**2-x**2)**2+(x*eta)**2)**(-1/2)
75
76 parameters = ['$F_0/m$', '$\omega_0$','$\eta/m$']
77 parameters_eenheden = ['$m/s^2$','rad/s','rad/s']
78
79 # FASEHOEK
80 def model(x,theta):
81     eta,w0,c = theta
82     return -np.arctan2(x*eta,(w0*w0-x*x))+c
83
84 parameters = ['$\eta/m$','$\omega_0$','C']
85 parameters_eenheden = ['rad/s','rad/s','rad']
86
87 # Defini ren van de te minimaliseren LS-functie
88 def LS(theta):
89     LS_res = 0
90     for i in range(len(x)):
91         LS_res += (y[i]-model(x[i],theta))**2/dy[i]**2
92     return LS_res
93
94 # Minimaliseren van de LS-functie
95 LS_mintheta = minimize(LS,(1,10,1))['x']
96 for i in range(len(parameters)):
97     display(Latex(parameters[i] + " = " + str(LS_mintheta[i]) + " " + str(
98         parameters_eenheden[i])))
99
100 # plotten van de data met error bars, samen met de beste fit.
101 fig1, ax1 = plt.subplots(nrows=1, ncols=1, dpi=120, figsize=(9, 5))
102 x_model = np.linspace(x[0]*0.95,x[-1]*1.05,5000)
103
104 ax1.plot(x,y,'.',color='darkblue',label='Data')
105 ax1.errorbar(x,y,xerr=dx,yerr=dy,color='gray',elinewidth=1,capsize=2.5,fmt='none')
106 ax1.plot(x_model,model(x_model,LS_mintheta),label='Fit',color='red')
107 ax1.set_xlabel(meting_grootheden[0] + " [" + meting_eenheden[0] + "]")
108 ax1.set_ylabel(meting_grootheden[1] + " [" + meting_eenheden[1] + "]")

```

```

109 ax1.legend()
110
111 # Berekenen van de fouten op de beste fitwaarden a.d.h.v. de snijpunten met de 1
112 # sigma-hypercontour
113 from scipy.stats import chi2
114 s = chi2.ppf(0.68, df=4)
115
116 def chi2partieelfunctie(t, theta0, i):
117     theta = list(theta0)
118     theta[i] = t
119     return LS(tuple(theta))
120
121 fig2, ax2 = plt.subplots(nrows=len(parameters), ncols=1, dpi=120, figsize=(8, 15))
122
123 def afstandminchi2(t,i):
124     return chi2partieelfunctie(t,LS_mintheta,i)-LS(LS_mintheta)-s
125
126 def vind_snijpunten(i):
127     delta = 0.1*abs(LS_mintheta[i])
128     j = 1
129     punten = fsolve(afstandminchi2,[LS_mintheta[i]-delta,LS_mintheta[i]+delta],
130                     args=(i))
131     display(delta)
132     while punten[0] - punten[1] < 1e-8:
133         punten = fsolve(afstandminchi2,[LS_mintheta[i]+j*delta,LS_mintheta[i]-j*
134                                         delta],args=(i))
135         j += 1
136     display(punten)
137     return np.sort(punten)
138
139 snijpunten = [vind_snijpunten(i) for i in range(len(parameters))]
140 delta = [snijpunten[i][1] - snijpunten[i][0] for i in range(len(parameters))]
141
142 omgevingen = [np.linspace(LS_mintheta[i]-0.75*delta[i],LS_mintheta[i]+0.75*delta[i],
143                           1000) for i in range(len(parameters))]
144 chi2waarden = [np.array([chi2partieelfunctie(t,LS_mintheta,i) for t in omgevingen[i]]) for i in range(len(parameters))]
145
146 for i in range(len(parameters)):
147     ax2[i].set_xlim(omgevingen[i][0],omgevingen[i][-1])
148     ax2[i].set_ylim(0.95*LS(LS_mintheta),1.05*chi2partieelfunctie(max(omgevingen[i][0],omgevingen[i][-1]),LS_mintheta,i))
149     ax2[i].set_xlabel(parameters[i] + '[' + parameters_eenheden[i] + ']')
150     ax2[i].set_ylabel('$\chi^2$')
151     ax2[i].plot(omgevingen[i],chi2waarden[i],label='$\chi^2$')
152     ax2[i].hlines(LS(LS_mintheta)+s,omgevingen[i][0],omgevingen[i][-1],color='red',
153                   label='1$\sigma$-hypercontour')
154     ax2[i].scatter(snijpunten,np.array([chi2partieelfunctie(j,LS_mintheta,i) for j
155                                         in snijpunten]),color='black')
156     ax2[i].legend()
157     ax2[i].set_title("Onzekerheidsbepaling " + parameters[i])
158
159 plt.tight_layout()
160
161 # Weergeven van de uiteindelijke fouten
162 sigmarechts = [snijpunten[i][1]-LS_mintheta[i] for i in range(len(parameters))]

```

```

157 sigmalinks = [-snijpunten[i][0]+LS_mintheta[i] for i in range(len(parameters))]
158 for i in range(len(parameters)):
159     display(Latex("Fout op " + parameters[i] + ": " + str(round(sigmalinks[i],4)) +
160                 " links en " + str(round(sigmarechts[i],4)) + " rechts."))
161 # Berekenen van chi2_red en p-waarde
162 N = len(x)
163 p = len(parameters)
164 display(LS(LS_mintheta)/(N-p),chi2.sf(LS(LS_mintheta), df=N-p))
165

```