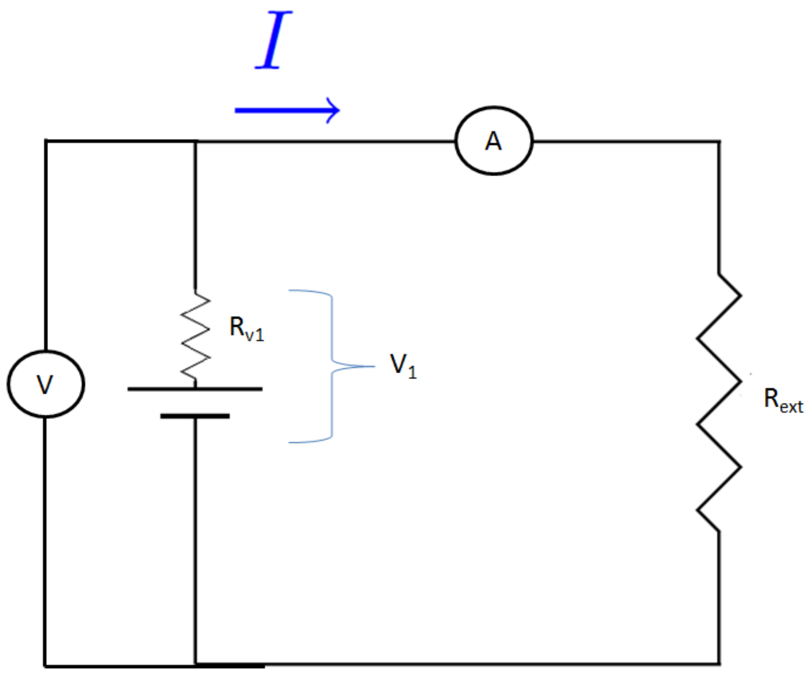
Om de interne weerstand R_{V1} van spanningsbron V_1 te bepalen, gaan we als volgt te werk:
Voor bron V_1 wordt voor de open klemspanning gemeten: V_o =(4.79 ± 0.03) V

Merk op dat op zowel de spannings- als stroommeter een nauwkeurigheid van 1% hebben, en dat de resolutie respectivelijk 0.01 V en 0.01mA is. Voor de volledigheid, de systematische fout voor de open klemspanning is dus:

$\Delta_{syst}(V_o) = 0.01V + 0.01 \cdot 4.76V = 0.06V$
(en dus quoteren we: $V_o = 4.79V \pm \Delta_{syst}(V_o)/2 = (4.79 \pm 0.03)$ V, waarbij de direct gemeten waarde V_o uniform verdeeld is, en Δ_{syst} de het 100% CI aanduidt.)



Figuur 1: *Circuit voor het meten van de interne weerstand R_{v1}. Bron V_1 wordt aangesloten op een weerstand R_{ext}. De spanning V_g wordt gemeten door middel van spanningsmeter Ⓥ. Met stroommeter Ⓐ wordt de stroom I door de kring gemeten.*

Vervolgens wordt voor de kring gesloten door verschillende weerstanden in serie met bron V_1 te setten, zie figuur 1. De gesloten klemspanning V_g (gemeten over de bron V_1) en de gemeten stroom I door de kring zijn staan in tabel 1.

Tabel 1: *Meting van de stroom I door de kring, en de gemeten klemspanning V_g bij gesloten kring.*

I [mA]	Δ_{syst}(I) [mA]	V_g [V]	$\Delta_{syst}(V_g)$ [V]
1.77	0.03	4.76	0.06
2.87	0.04	4.74	0.06
4.24	0.05	4.71	0.06
5.64	0.07	4.68	0.06
6.19	0.07	4.67	0.06
8.31	0.09	4.63	0.06
8.91	0.10	4.62	0.06

De interne weerstand kan worden berekend als:

$$R_{v1} = (V_o - V_g)/ I$$

Merk op dat R_{v1} een grootheid is, die afgeleid wordt uit direct gemeten waarden (V_o, V_g en I) die uniform verdeeld zijn. De afgeleide R_{v1} is een combinatie en uniforme verdelingen wat resulteert in een driehoeksverdeling, die benaderd kan worden met een normale verdeling [1]. Om dus de fout op R_{v1} te berekenen, gebruiken we de foutpropagatieregels, waar we de standdaardeviates van V_o, V_g en I in rekening brengen – waarvoor we gebruik maken van (zie les 2 slide 6):

$$\sigma^2 = \frac{{\Delta_{syst}}^2}{12}$$

Dus, de meetfout op R_{v1} wordt gegeven door:

$$\sigma_{Rv1} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 \sigma_{Vo}^2 + \left(-\frac{1}{I}\right)^2 \sigma_{Vg}^2 + \left(\frac{-V_0 + V_g}{I^2}\right)^2 \sigma_I^2}$$

De berekende interne weerstand bij iedere stroom staat opgelijst in tabel 2.

Tabel 2: *Meting van de stroom I door de kring, en de afgeleide interne weerstand* R_{v1}

I [mA]	R_{v1} [Ω]	σ_{Rv1} [Ω]
1.77 ± 0.01	17	13
2.87 ± 0.02	17	8
4.24 ± 0.03	19	6
5.64 ± 0.04	20	4
6.19 ± 0.03	19	4
8.31 ± 0.05	19	3
8.91 ± 0.05	18	3

Nu hebben we in totaal N=7 onafhankelijke metingen van dezelfde grootheid R_{v1}. We kunnen de spreiding van de meetresultaten in tabel 2 bepalen (standaardafwijking s_N):

$$s_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(z_i - m')^2} \quad \text{met m' het gemiddelde: } m' = \frac{1}{N}\sum_{i=2}^{N} z_i$$

We vinden dan dat m'= 18.4 Ω en s_N=1.1 Ω (dit zou 'een fout' op het gemiddelde m' geven van $\frac{s_n}{\sqrt{N}} = 0.4\Omega$ (i.e. de standaarddeviatie op het gemiddelde)). Merk op dat deze standaardafwijking s_N van de steekproef kleiner is dan (of ten zeerste vergelijkbaar met) de fouten op elke meting σ_{Rv1} . Dat verwachten we, omdat de betekenis van de fout op elke meting is: een andere meting zal in 68% van de gevallen binnen dat interval vallen. Dus we verwachten nooit een veel grotere spreiding (s_N) te heben dan die fouten. We werken dus verder met de meetfouten $\sigma_{Rv1,}$ aangezien die groter zijn dan de spreiding (zie b.v. les 1 slide 9)

Toch is het belangrijk dit (s_N vs σ_{Rv1}) te verifiëren; het kan bijvoorbeeld duiden op een fout in de meting (Δ_{syst} is dan bijvoorbeeld onderschat). Anderszijds, kan het zijn dat de meetapparatuur heel gevoelig is ('kleine Δ_{syst} '), maar de metingen (en/of de meetprocedure) zelf moeilijk reproduceerbaar zijn, en dit zorgt voor een spreiding die groter is dan de meetfout.

Om nu de echte waarde van de interne weerstand af te schatten, moeten we gebruik maken van het gewogen gemiddelde (zie les 1 slide 9 of formularium pagina 8), aangezien de verschillende metingen een verschillende fout hebben. Het gewogen gemiddelde is gegeven door:

$$m = \frac{\sum_i g_i z_i}{\sum_i g_i}$$

Waar bij de som loopt over i = 1..7, met z_i de i-de gemeten waarden, en $g_i = 1/\sigma^2_{Rv1i}$ het gewicht van de i-de meting. De fout op het gewogen gemiddelde is:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\sum_i g_i}}$$

Voor de metingen van de beveiligingsweerstand in tabel 2, krijgen we voor het gewogen gemiddelde:

$$m \pm \epsilon = (18.8 \pm 1.5)\ \Omega$$

De fout ϵ, berekend uit de σ_{Rv1} van tabel 2, is zelf ook een sigma (standaarddeviatie) De betrouwbaarheidsintervallen hierop zijn normaal verdeeld: $(18.8 \pm 1.5)\ \Omega$ dekt de echte waarde in 68% van de gevallen, en we kunnen de standaard normale verdeling gebruiken om de CL's te bepalen. Bijvoorbeeld, voor het 95% betrouwbaarheidsinterval te bepalen, gebruiken we[1] (zie les 2 slide 17):

$$\mu = m \pm z \cdot \epsilon \text{ met } z = 2 \text{ voor het } 95\% \text{ CI}$$

Dus:

$$95\% \text{ CI: } [15.8\ \Omega\ ;\ 21.8\ \Omega]$$

<u>**Conclusie:**</u>

- **Voor het afleiden ('berekenen') van grootheden door middel van direct gemeten grootheden (met typisch een systematische fout Δ_{syst} , die de grenzen van het 100% CI aangeeft), wordt voor de foutenpropagatie de standaarddeviatie $\sigma^2 = \Delta^2_{syst}/12$ gebruikt.**
- **In geval van N onafhankelijke metingen, moet de spreiding van de resultaten vergeleken worden met de (gepropageerde) meetfouten. De grootste hiervan wordt gebruikt voor verdere analyse (zie bijvoorbeeld formularium pagina 8). (Indien ze heel vergelijkbaar zijn, dienen ze allebei meegenomen te worden...)**
- **Bij herhaalde metingen waar de fout verschillend is voor de verschillende metingen, gebruiken we het gewogen gemiddelde.**

[1] We nemen aan dat m/ϵ (van het gewogen gemiddelde) normaal verdeeld is.

[1] Voor meer uitleg, zie bijvoorbeeld: '*Sums of random variables*', C. Annis, http://www.statisticalengineering.com/sums_of_random_variables.htm, laatst geraadpleegd op 16-11-2016