Gedwongen oscillaties en resonantie

A.1 Doelstelling van de proef

- Het bestuderen van mechanische gedempte oscillaties en resonantie.
- Het inlezen van data via ADC conversie.
- Het fitten van de bekomen data.

A.2 Vereiste voorkennis

Wetten van Newton, gedwongen oscillatie en resonantie.

A.3 Literatuur

"Physics for scientists and engineers with Modern Physics" 5th ed. R.A. Serway, Sounders College Publ.,

D.C. Giancoli, " Physics for scientists and Engineers", Pearson Ed. Inc.

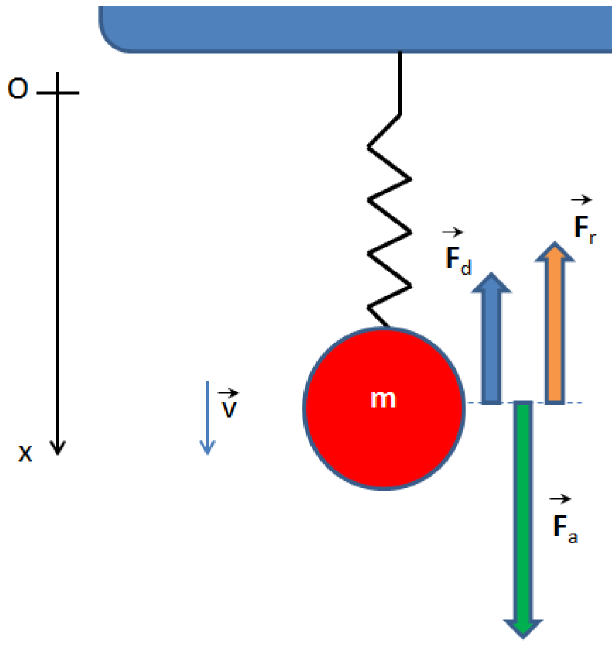
B.1 Fysische achtergrond

In dit practicum beschouwen we de gedempte harmonische oscillator met gedwongen sinusoïdale aandrijving. Meer concreet zullen we de frequentierespons van het systeem onderzoeken. Zowel de amplitude van de oscillatoruitwijking, als de fase ten opzichte van de aandrijving worden gemeten in functie van frequentie. De harmonische oscillator voor dit practicum zal bestaan uit een massa-veersysteem, aangedreven door een motor. Het dempen van dit systeem zal gebeuren door de massa onder water te laten oscilleren (zie sectie B.2).

Voor de theoretische berekening van de frequentierespons maken we gebruik van de tweede wet van Newton. In figuur 1 staat het krachtendiagramma voor een model van het massa-veersysteem. Hier is de x-as parallel met de richting van de beweging, *m* de massa en ***v*** de snelheid. De krachten die inwerken op de massa zijn: $\mathbf{F_a}$ de aangelegde kracht, $\mathbf{F_r}$ de kracht die de veer uitoefent wanneer deze uit de evenwichtspositie is, en $\mathbf{F_d}$ de dempingskracht *. Toepassen van de tweede wet van Newton geeft voor de totale kracht $\mathbf{F_{tot}}$:

$$\boldsymbol{F}_{tot} = \boldsymbol{F}_r + \boldsymbol{F}_d + \boldsymbol{F}_a \qquad (1)$$

** merk op dat de zwaartekracht (en e.v. de archimedeskracht in water) niet is getekend. Wanneer de massa in rust is, zal de evenwichtspositie (' DC uitwijking') bepaald zijn door het evenwicht van de zwaartekracht, (de archimedeskracht) en de uitwijking van de veer ten opzichte van de veer in rust. Deze spelen echter geen rol bij het berekenen van de frequentierespons (in ieder geval voor kleine uitwijkingen), aangezien we een oscillatie beschouwen rond de evenwichtspositie van de massa.*



Figuur 1: krachtendiagram massa-veersysteem

Voor de veer gebruiken we de wet van Hooke: $\boldsymbol{F_r} = -kx$ met *k* de veerconstante en *x* de uitwijking t.o.v. de evenwichtspositie van de massa. We veronderstellen dat de dempingskracht evenredig is met de snelheid van de massa: $\boldsymbol{F_d} = -\eta\dot{x}$ met η de dempingscoëfficiënt **. De aandrijvingskracht is sinuoïdaal en kan dus geschreven worden als $\boldsymbol{F_a} = F_o \exp(i\omega t)$, met F_o de amplitude, i de imaginaire eenheid, ω de hoekfrequentie en t de tijd. Zo kan vergelijking (1) herschreven worden als:

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + F_0 \exp(i\omega t) \tag{2}$$

Deze differentiaalvergelijking kan eenvoudig opgelost worden door een oplossing van de vorm $x(t) = C\exp(i\omega t)$ aan te nemen. Invullen hiervan in (2) levert:

$$C = \frac{F_o}{(k-\omega^2 m+i\omega\eta)} \tag{3}$$

Door gebruik te maken van de de eigenschappen van complexe getallen, kan x herschreven worden in poolcoördinaten $(z = r\exp(i\theta))$:

$$x = \frac{F_o}{m\left(\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2 + (\omega\frac{\eta}{m})^2}\right)} \exp[i\omega t + i\phi(\omega)] \tag{4}$$

De amplitude van de uitwijking is |x(ω)| (wat overeenkomt met de prefactor van de exponentiële in (4) uiteraard).

** *Hier wordt gebruikt gemaakt van de puntnotatie van Newton voor afgeleiden om de notatie wat te verlichten. Dus:*

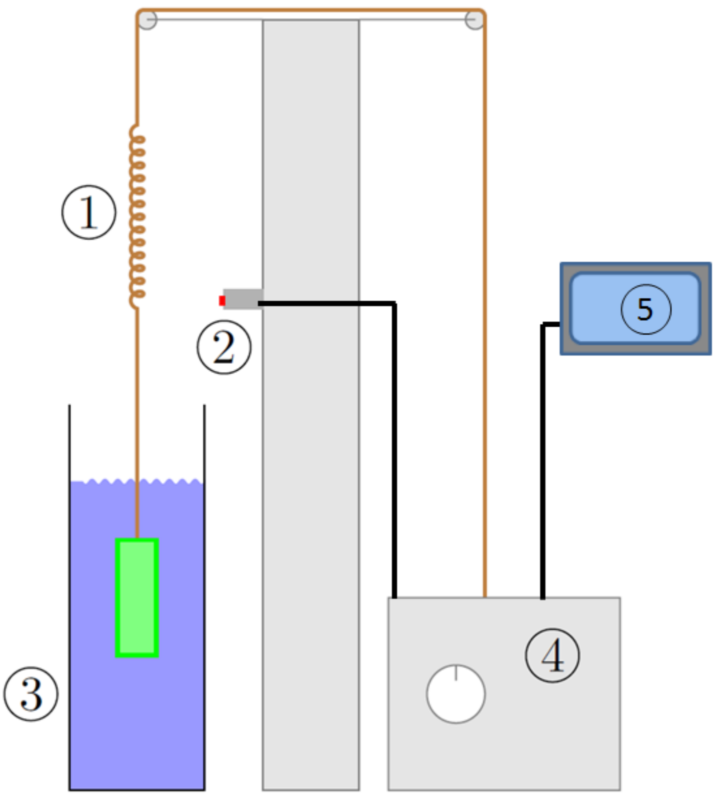
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{en} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Verder is $\omega_o = \sqrt{k/m}$ en $\phi(\omega)$ het faseverschil (t.o.v. de aandrijving):

$$\phi(\omega) = -\mathrm{Bgtan}\left(\frac{\omega\frac{\eta}{m}}{\omega_o^2 - \omega^2}\right) \tag{5}$$

B.2 Gebruikte meetopstelling

In figuur 2 staat een schema van de meetopstelling afgebeeld. De gedempte oscillator bestaat uit een massa (*m*) opgehangen aan een veer (veerconstante *k*). De massa zelf is in een met water gevulde beker ondergedompeld zodat een hydrodynamische dempingskracht op de oscillator wordt uitgeoefend. Twee blokken met dezelfde massa maar met verschillende afmetingen worden gebruikt in dit practicum. Het verschil in oppervlakte zal ervoor zorgen dat de dempingsconstante verschillend is.



Figuur 2: Schema van de proefopstelling.
1: veer met massa 2: optische beweginsdetector, 3: beker met water, 4: mechanische aandrijving met frequentiegenerator, 5: PC

De oscillator is verbonden met een drijfwiel (op de achterkant van het bakje gelabeld met ‘4’ in figuur 2) dat het bovenste uiteinde van de veer zal doen oscilleren met een bepaalde aandrijfamplitude en –frequentie. De aandrijfamplitude kan mechanisch gevarieerd worden door het bevestigingspunt van de draad op het drijfwiel te verschuiven. De metingen met minimale demping dienen te gebeuren met de kleine aandrijfamplitude; de metingen met grotere demping dienen te gebeuren met een grote aandrijfamplitude. Wanneer gewisseld wordt van massa dient dit dus te worden aangepast.

De frequentie van het aandrijfsysteem wordt geregeld met een frequentiegenerator ('4' in figuur 2). De beweging van de gedwongen gedempte oscillator wordt geregistreerd met een bewegingsdetector (optische poort). Voor het oog van deze poort, is er een soort meetlat bevestigd (tussen de veer en de massa). Wanneer deze oscilleert, zal het verschil tussen de zwarte en transparante vlakken voor signaal zorgen. Wanneer de ledlamp niet gelijktijdig knippert met de oscillatie, is er iets mis met de positie van deze lat: hij zal dan hoger of lager gehangen moeten worden. Vooralleer je begint te meten check je best even of het midden van de schaal bij de bewegingsdetector op dezelfde hoogte zit als de lichtgevende diode. Is dit niet zo dan moet je de lengte van het koordje bijregelen.

De frequentiegenerator en de bewegingsdetector zijn verbonden met een PC, via een bakje met het opschrift ' National Instruments' . Voor de metingen wordt het LabView programma "Gedempte Trilling met gemiddelde" gebruikt. (*C:\Users\MyStuff\Desktop\LabView Experimenten\GedempteTril_Jeroen_3.vi*). In het algemeen is LabView een softwarepakket dat toelaat om via een grafische interface metingen te doen (commando's sturen naar en het uitlezen van apparatuur). In dit geval is een interface gemaakt waarin de amplitude en fase in functie van de aandrijffrequentie grafisch en numeriek worden weergegeven. De aandrijffrequentie zal echter manueel moeten worden ingesteld. Verdere uitleg over de software zal gegeven worden tijdens het practicum zelf.

B.3 Python: functies, plotten en fitten

Uiteindelijk is de bedoeling van dit practicum om uw verkregen data te analyseren door middel van een fit van het theoretisch model aan uw bekomen experimentele waarden. Hiervoor wordt Python te gebruiken. Dit is freeware; een handige verzameling van programeer-omgevingen voor de programmeertaal is te vinden op: https://www.anaconda.com/download/
Ook is dit altijd aanwezig in de PC-klassen.

Voor een woordje uitleg over Python, toegespitst op de functionaliteiten die je nodig hebt voor de practica, verwijzen we naar de extra Pythonsessie, waarvan de documenten op Toledo staan.

C.2 Opgaven

Ter voorbereiding op het experiment (hoeft niet van tevoren afgegeven te worden, verwerk het wel in het verslag!), die helpen bij het visualiseren van de proef en dus de uitvoering en analyse.

1. Herschrijf de uitdrukking voor |x(ω)| en $\phi(\omega)$ in termen van $X = F_o/k$, een dimensieloze frequentie $w = \omega/\omega_o$ en van een dimensieloze dempingssterkte $b = \eta/\sqrt{2km}$. Bij welke frequentie is er (amplitude)resonantie?

2. Plot (met Python) het (theoretische) amplitude- en fasespectrum (i.e. in functie van frequentie) van een massa-veersysteem voor 10 verschillende waardes van *b* tussen 0 en 1. Merk op dat indien gewenst, je het faseverschil altijd met een factor 2π mag verschuiven. Dit helpt om de gemeten spectra en wat je verwacht in functie van de dempingsfactor, te visualiseren.

Tijdens het experiment:

1. Bepaal experimenteel het amplitude- en fasespectrum van het massa-veersysteem (dit is dus een tabel met frequentie, amplitude en fase). In **eerste instantie** kun je de data visualiseren met Excel of Graphical Analysis (*Deze Computer – C:\Program Files (x86)\Vernier Software\Graphical Analysis 3\Graphical Analysis.exe).*
   Zorg ervoor dat je duidelijke spectra bekomt. Doe eerst een **ruwe frequentiescan** (grote stappen in frequentie) om de resonantie te zoeken om vervolgens een mooi bereik af te bakenen waarin je een meer gedetaileerde frequentiescan zult doen. Wees kritisch: de opstelling heeft wellicht wat **'fine-tuning'** nodig. Begin pas aan een gedetailleerde sweep als de opstelling optimaal is! Vergelijk bijvoorbeeld met wat je verwacht (vb. Aan de hand van de theoretische plots, zie C2) en zorg voor voldoende datapunten (rond de resonatiefrequentie): toch zeker 25 punten. Probeer ook punten te hebben bij 'heel hoge en heel lage' frequenties (in the limiet van ω gaande naar oneindig en nul, voor zover de opstelling het toelaat).
   Het is wellicht gemakkelijk om de tabel ook digitaal te hebben: stuur hem naar uzelf door of gebruik een USB-stick.
   Denk ook na over de meetonzekerheid! Het programma doet wat statistiek met herhaalde metingen. Weet je ook iets over de systematische fout?

2. Herhaal dit voor de massa met een andere dempingssterkte. Hiervoor moet ook de aandrijfamplitude voor veranderd worden. Ga (achteraf) na hoe de dempingsgrootte de resonantiefrequentie beïnvloedt (theoretisch en experimenteel).

Na het experiment:

Vergelijk de experimentele waarden met de theorie, aan de hand van fits aan de data. Het is best om dit voor amplitude en fase apart te behandelen.

1. Fit de amplitude $|x(\omega)|$ met als te bepalen fitparameters F_o/m ,η/m en ω_o. Doe dit uiteraard voor beide dempingssterktes.

2. Fit de fase $\phi(\omega)$ ook voor beide dempingssterktes. Doe dit voor fitparameters η/m en ω_o.

   ! Merk op dat bij het fitten van de fase misschien enige datamanipulatie nodig is. Het teken van de experimentele fase kan misschien verkeerd geinterpreteerd zijn. Merk ook op de boogtangens functie in principe maar een beperkt beeld, en dat er misschien op een of andere manier voor gezorgd moet worden dat ϕ in het juiste kwadrant ligt... . Motiveer de datamanipulatie!

3. Bespreek volgende zaken zeker in het verslag:
   - Heb oog voor de kwaliteit van de fit en de fout op de fitparameters (zie extra sessie Python).
   - Vergelijk de oscillatoren met verschillende dempingssterkte. Zie je in het resultaat het verschil tussen de dempingsterkten? En de andere fitparameters?
   - Ga na of de amplitude- en fasefit consistent zijn met elkaar (voor beide bekom je bijvoorbeeld een waarde voor ω_o).
   - Ga ook na in hoeverre de gevonden fitparameters consistent zijn met de systeemparameters die je visueel kunt afleiden uit de grafiek (bijvoorbeeld de limit voor ω gaande naar 0).

Tip: *Wees duidelijk m.b.t. de eenheid van de (hoek)frequentie (Hz vs. rad/s) en waar je ze gebruikt!*