

# Netwerken en de wetten van Kirchhoff

## A.1 Doelstelling

In een eerste deel van de proef worden de inwendige weerstand van een bron van elektromotorische spanning en van een ampèremeter experimenteel bepaald. In een tweede deel van de proef wordt de geldigheid van de wetten van Kirchhoff nagegaan door gebruik te maken van eenvoudige schakelingen, en de Norton- en Théveninequivalenten bestudeerd.

## A.2 Vereiste voorkennis

stroom, spanning, weerstand, wet van Ohm, serie- en parallelschakeling van weerstanden, wetten van Kirchhoff

## A.3 Literatuur

*Physics for scientists and engineers with Modern Physics*, R.A. Serway, Saunders College Publ.

*Physics for scientists and engineers with Modern Physics*, D.C. Giancoli, Pearson

## B.1 Fysische achtergrond

### B.1.1 Wet van Ohm

Voor een metalen geleider is bij constante temperatuur de verhouding van het potentiaalverschil  $V$  [V] tussen twee punten en de elektrische stroomsterkte  $I$  [A] constant. Deze constante wordt de **elektrische weerstand**  $R$  [ $\Omega$ ] genoemd. De wet van Ohm wordt dan:

$$V/I = R \text{ of } V = RI \quad (1)$$

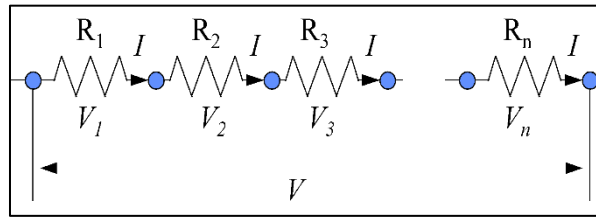
### B.1.2 Serie- en parallelschakeling van weerstanden

Bij een **serieschakeling** van weerstanden (figuur 1) zijn de weerstanden zodanig verbonden dat dezelfde stroomsterkte  $I$  door alle weerstanden loopt. De potentiaalverschillen zijn volgens de wet van Ohm  $V_1 = IR_1$ ,  $V_2 = IR_2, \dots$ ,  $V_n = IR_n$ . Het totale potentiaalverschil  $V$  is dus :

$$V = V_1 + V_2 + \dots V_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n)I \quad (2)$$

Dit stelstel van weerstanden kan door een enkele weerstand  $R$  vervangen worden als  $V = RI$ , dus

$$R = R_1 + R_2 + \dots R_n \quad (3)$$



Figuur 1 : Serieschakeling van weerstanden

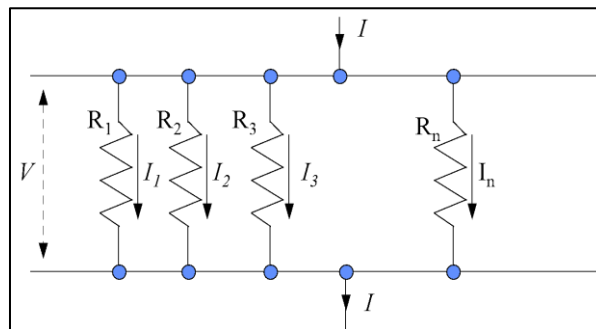
Bij een **parallelschakeling** (figuur 2) worden de weerstanden zodanig verbonden, dat ze alle hetzelfde potentiaalverschil hebben. Volgens de wet van Ohm zijn de stroomsterkten dan  $I_1 = V/R_1$ ,  $I_2 = V/R_2$ , ...,  $I_n = V/R_n$ .

De totale stroomsterkte is dan :

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) V \quad (4)$$

Dit stelsel kan vervangen worden door een enkele weerstand R die voldoet aan  $I = V/R$ . Dus :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (5)$$



Figuur 2 : Parallelschakeling van weerstanden

### B.1.3 Elektromotorische spanning en klemspanning

Een bron van **elektromotorische spanning (ems) of bronspanning**  $V_E$  wordt schematisch voorgesteld in figuur 3, waarbij de stroom buiten de bron van de lange streep of positieve pool naar de korte streep of negatieve pool loopt.

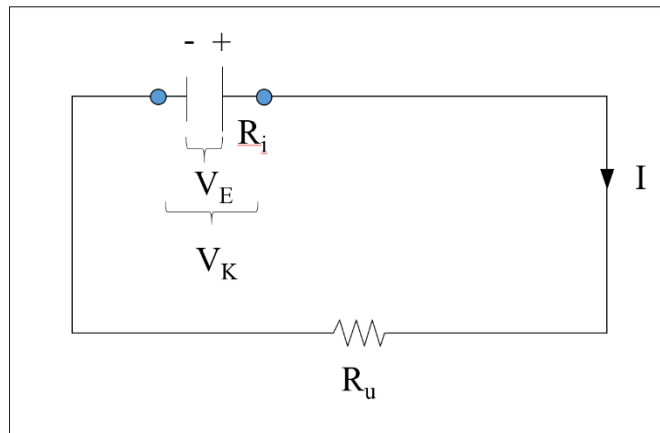
Als we de wet van Ohm toepassen op figuur 3, dan moeten we bedenken dat de totale weerstand R de som is van de inwendige weerstand  $R_i$  van de bron van ems en de uitwendige weerstand  $R_u$  van de geleider die met de bron verbonden is. De wet van Ohm wordt dan :

$$V_E = (R_i + R_u)I \quad (6)$$

Dit kan ook geschreven worden als :

$$V_E - IR_i = IR_u \quad (7)$$

Het linkerlid van deze vergelijking geeft de spanning tussen de klemmen van de bron. Deze spanning, die ten gevolge van het inwendige spanningsverlies kleiner is dan de ems, wordt **klemspanning**  $V_K$  genoemd.



*Figuur 3 : Schema van een kring met ems*

### B.1.4 Wetten van Kirchhoff

De twee wetten van Kirchhoff voor een netwerk luiden als volgt :

1. De algebraïsche som van alle stroomsterkten bij een vertakkingspunt is nul.
2. De algebraïsche som van alle potentiaalverschillen langs een gesloten baan is nul.

De eerste wet volgt uit behoud van lading en de tweede wet uit behoud van energie.

Een praktische regel bij het toepassen van de wetten van Kirchhoff op een netwerk is :

Als een netwerk  $n$  vertakkingspunten heeft, pas dan de eerste wet slechts toe op  $n-1$  punten. Aan de wet is dan ook automatisch voldaan voor het  $n$ -de punt. De tweede wet moet toegepast worden op zoveel gesloten ketens als nodig zijn om iedere geleider minstens een keer te doorlopen.

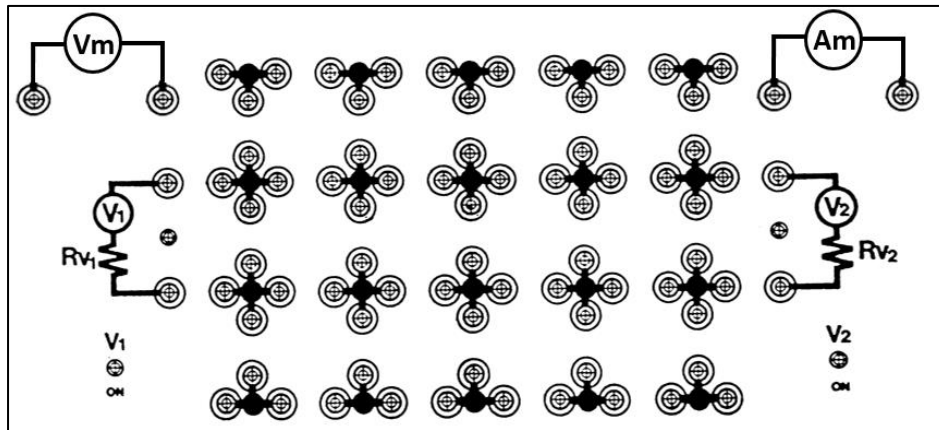
### B.2 Gebruikte apparatuur

Figuur 4 toont het practicumtoestel. Dit bevat een volt- ( $V_m$ ) en een ampèremeter ( $A_m$ ), een raster in groepen van 3 of 4 onderling verbonden aansluitpunten voor weerstanden en/of meettoestellen en twee spanningsbronnen  $V_1$  en  $V_2$ . Een schakelaar laat toe de bijhorende spanningsbron uit een meetkring te nemen zonder meteen de kring te openen. Een beveiligingsweerstand  $R_V$  blijft wel in de kring (figuur 5).

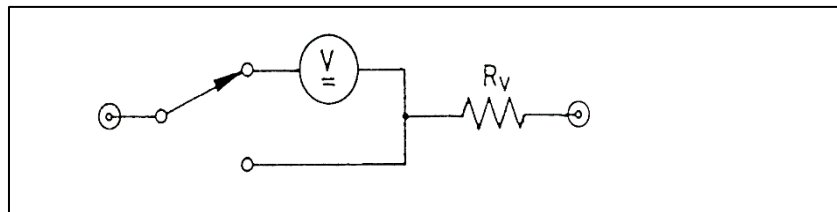
Bij de proef bevindt zich verder een reeks weerstanden en verbindingsdraden waarmee de gewenste kringen geconstrueerd kunnen worden. De weerstandswaarden ( $10\ \Omega$ ,  $500\ \Omega$ ,  $680\ \Omega$ ,  $750\ \Omega$ ,  $1000\ \Omega$ ,  $1500\ \Omega$  of  $2430\ \Omega$ , allen  $\pm 1\%$ ) kunnen van de drager afgelezen worden. De  $10\ \Omega$  weerstanden zijn bedoeld om in de kring opgenomen te worden op de plaats waar naderhand met de ampèremeter de stroom zal gemeten worden. Daar de ampèremeter een inwendige weerstand van  $10\ \Omega$  heeft zal het vervangen van een dergelijke weerstand door het meettoestel, of vice versa, de meetkring onveranderd laten. De ampèremeter meet stromen in milliampère (tot  $20\ \text{mA}$ ).

De **voltmeter** geeft de spanning aan in volt<sup>1</sup>. De ingangsweerstand van de voltmeter is voldoende groot om de meetkring niet te beïnvloeden (i.e. hier loopt een **verwaarloosbare stroom** door). Zowel bij de meettoestellen als bij de ingebouwde spanningsbronnen duidt de **rode klem de positieve zijde** aan.

De aanduiding "1." op een meettoestel geeft aan dat het meetbereik overschreden wordt.



Figuur 4 : Practicumtoestel



Figuur 5 : Beveiligingsweerstand  $R_v$

<sup>1</sup> De (systematische) fout  $\Delta_{\text{syst}}$  op de volt- en ampèremeter wordt bepaald door de **som** van de **resolutie**  $\delta$  en de **nauwkeurigheid**  $\Delta$  (cfr. les 1). Voor de resolutie zitten we hier met een digitale aflezing, en dus is deze gelijk aan **de kleinste digit**. De nauwkeurigheid zegt hoe dicht de meetwaarde de echte waarde benadert en wordt gegeven door de producent. Deze is **1%** voor de gebruikte meters.

Voorbeeld: Een voltmeter (gegeven accuratesse 1%) geeft  $x = 4.76 \text{ V}$  aan.

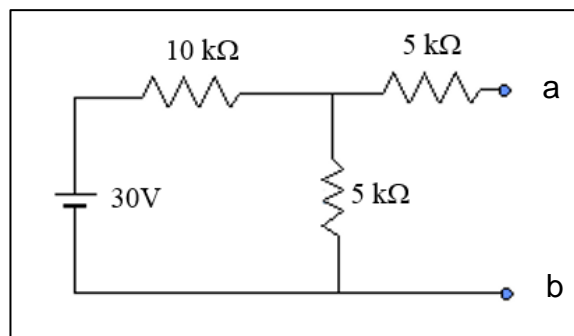
$$\Delta_{\text{syst}} = 0.01 \cdot 4.76 \text{ V} + 0.01 \text{ V} = 0.0576 \text{ V} \approx 0.06 \text{ V}$$

(quoteer 1 beduidend cijfer!)

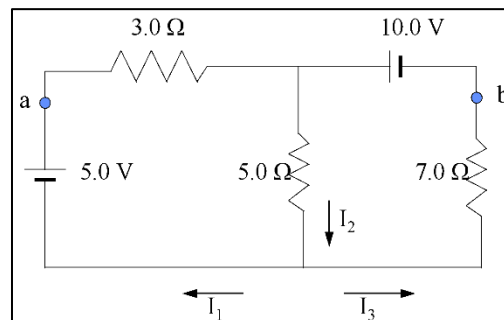
Het meetresultaat wordt dan gegeven als  $x \pm \Delta_{\text{syst}}/2 = (4.76 \pm 0.03) \text{ V}$ . Deze conventie gebruiken we dus voor digitale aflezing.

### C.1 Opgaven ter voorbereiding van de proef <sup>2</sup>

- 1) a) Zoek op wat men bedoelt met het Norton- en Théveninequivalent van een netwerk.  
b) Bepaal en teken het Norton en Thévenin equivalent van onderstaand netwerk <sup>3</sup>.  
c) Beschouw nu een weerstand  $R_L$  die ingevoegd moet worden tussen punten (a) en (b) in de schakeling. Bij welke waarde van  $R_L$  is het vermogen gedissipeerd in  $R_L$  maximaal? Gebruik hiervoor het Thévenin equivalent netwerk, en verklaar waarom in dit geval het maximaliseren van het vermogen neer komt op het zogenaamde 'impedance matching'. Vermeld aan de hand van deze oefening kort wat het nut is van een Théveninequivalent <sup>4</sup>.



- 2) a) Zoek het potentiaalverschil tussen punten a en b in de volgende schakeling (gebruik uiteraard de wetten van Kirchhoff).  
b) Zoek de stromen  $I_1$ ,  $I_2$  en  $I_3$  in de volgende schakeling.



- 3) Het meten van een potentiaalverschil geeft drie keer dezelfde waarde  $x = 8,90 \text{ V}$  aan. Wat kan je besluiten over de systematische en stochastische fouten bij deze metingen? Wat kan je zeggen over de verdeling van  $x$ ? Als de systematische fout  $0,01 \text{ V} + 1\%$  is, bereken dan de standaarddeviatie van  $x$  en het 90% betrouwbaarheidsinterval.

<sup>2</sup> De systematische fout op de weerstanden in het practicum is 1%. Hou hiermee rekening in het uiteindelijke verslag. In deze opgave ter voorbereiding (specifieker opgave 1 en 2) hoef je geen fout te berekenen.

<sup>3</sup> Merk op dat de waarden weergegeven op de afbeeldingen niet altijd met het juiste aantal beduidende cijfers is... . Dit wordt uiteraard wel van jullie verwacht!

<sup>4</sup> Als voorbeeld uit het dagelijks leven kun je denken aan een luidspreker die aangesloten wordt op een voeding. De luidspreker heeft in dit geval de impedantie  $R_L$  (die eventueel regelbaar is, of afhankelijk is van het type stekker dat je eraan zet) en je wilt het maximale vermogen eruit halen, terwijl de details van voeding vrij ingewikkeld kunnen zijn... .

## C.2 Opgaven

- 1) Het verschil tussen bronspanning  $V_E$  en klemspanning  $V_k$  van een spanningsbron (zoals omschreven bij fig. 3) laat zich duidelijk illustreren door de combinatie van de spanningsbron en beveiligingsweerstand " $V_{1,2} + R_{V1,2}$ " (spanning hierover is  $V_k$ ) (fig. 4,5) als "bron" te beschouwen.
- 2) Meet de klemspanning  $V_k$  **(i)** eerst bij open kring ( $I = 0$ ), waar de gemeten spanning  $V_k$  de bronspanning ( $V_E$  in fig. 3) zal zijn. **(ii)** Meet vervolgens  $V_k$  in een zo eenvoudig mogelijke kring die wel een stroom zal sturen door de beveiligingsweerstand. Hou de stroom binnen het bereik (m.a.w.  $< 20$  mA) van de ampèremeter. Doe dit voor een reeks van toenemende stroomsterkten. Gebruik uw meetwaarden bij open en gesloten kring om de waarden van  $R_{V1}$  en  $R_{V2}$  te berekenen in de veronderstelling dat de inwendige weerstand van  $V_1$  en  $V_2$  gelijk is aan nul (m.a.w.,  $V_1$  en  $V_2$  zijn ideale spanningsbronnen). Gebruik het voorbeeld op Toledo om  $R_{V1}$  en  $R_{V2}$  te berekenen.
- 3) Ga na dat de inwendige weerstand van de ampèremeter inderdaad  $10\ \Omega$  is. Doe dit door, bij het meten van een willekeurige stroom, een  $10\ \Omega$  weerstand parallel over de ampèremeter te plaatsen en de verandering in gemeten stroomwaarde te observeren.
- 4) Bedenk en construeer twee verschillende netwerken. Toon aan dat het eerste netwerk voldoet aan de eerste wet van Kirchhoff, door te verifiëren of de som van de stroomsterkten compatibel is met de nulwaarde op een CL van 95%. Toon voor het tweede netwerk aan dat aan de tweede wet van Kirchhoff voldaan is, door te verifiëren of de som van de potentiaalverschillen in elke lus compatibel is met de nulwaarde op een CL van 95%. Gebruik bij de constructie van het tweede netwerk de twee bronnen in één netwerk.
- 5) Bedenk en construeer een netwerk analoog aan het netwerk bij voorbereidende opgave 1, dus met 1 bron en 1 'uitgang' (a-b). Bepaal het Thévenin equivalent en verifieer door middel van een meting van de Théveninspanning en de Nortonstroom. Waar moet je rekening mee houden voor de laatste?

**! Noot:** Merk op dat in de theorieles methoden zijn aangebracht om experimenteel bekomen waarden te vergelijken met theoretische waarden. Gebruikt deze dan ook voor de analyse van de bovenstaande opdrachten.