

Netwerken, de wetten van Kirchhoff en Norton- en Théveninequivalenten

Louis Claeys, Ruben Van der Borcht

24 oktober 2021

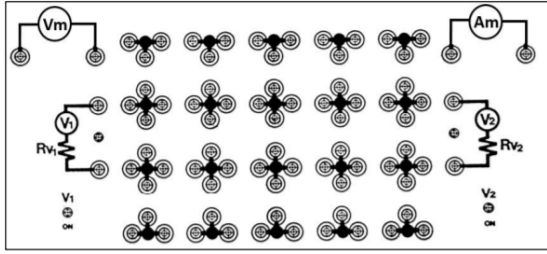
1 Inleiding

In dit onderzoek is het de bedoeling om twee spanningsbronnen en een reeks weerstanden te gebruiken om een 95 %-betrouwbaarheidsinterval op te stellen voor de beveiligingsweerstand van de gebruikte spanningsbronnen. Vervolgens zal met nauwkeurigheid $\alpha = 5\%$ worden nagegaan of de interne weerstand R_{Am} van de gebruikte ampèremeter Am wel degelijk 10Ω is zoals beweerd in [1]. Daarna worden de wetten van Kirchhoff (1824-1887) gecontroleerd voor twee verschillende netwerken (opnieuw met nauwkeurigheid $\alpha = 5\%$). [2] Uiteindelijk worden ook het Norton- en Théveninequivalent van een netwerk onderzocht waarbij specifiek de Nortonspanning en Théveninstroom bepaald worden, die dan gebruikt worden om te vergelijken met de berekende waarde van de equivalente weerstand van het circuit.

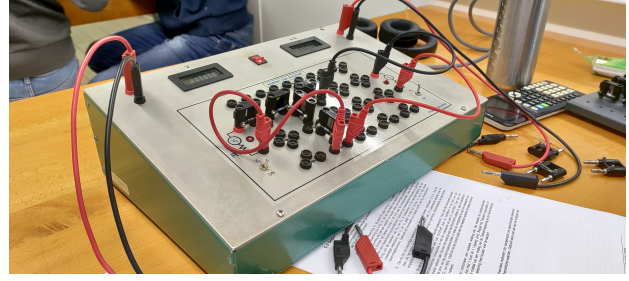
2 Materialen

Voor alle proeven van dit onderzoek wordt hetzelfde meettoestel gebruikt, dat te zien is op Figuur 1. In het toestel bevindt zich een ampèremeter Am met systematische fout $\Delta_{sys} = 0.01\text{ mA} + 1\%$, en een voltmeter Vm met $\Delta_{sys} = 0.01\text{ V} + 1\%$. [1] Verder is het toestel voorzien van twee spanningsbronnen, V_1 en V_2 , die respectievelijk in serie staan met een onbekende beveiligingsweerstand R_{V_1}, R_{V_2} . Daarnaast werden enkele weerstanden $R_{10\Omega}, R_{470\Omega}, R_{500\Omega}, R_{680\Omega}, R_{750\Omega}, R_{1500\Omega}, R_{2000\Omega}$ ¹, $R_{2400\Omega}$ met elks een grootte gelijk aan hun subscript en $\Delta_{sys} = 1\%$ gebruikt. [1] De notatie R_i betekent dat de proef meermaals wordt uitgevoerd met weerstanden uit de lijst hierboven met verschillende grootte. Indien de gebruikte weerstanden niet expliciet vermeld staan in een tabel, werden ze allemaal gebruikt (behalve $R_{10\Omega}$) en staan de gegevens geordend van hoogste naar laagste gebruikte weerstand. Verder werd gebruikgemaakt van verbindingstekabels om de verschillende componenten te verbinden, zoals op Figuur 1 te zien is.

¹De weerstand van $R_{2000\Omega}$ bestaat uit de weerstanden $R_{1500\Omega}$ en $R_{500\Omega}$ in serie.



(a)



(b)

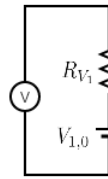
Figuur 1: Het meettoestel van het onderzoek. Figuur 1a [1] toont een schematische voorstelling, met linksboven V_m en rechtsboven A_m . Aan de linker- en rechterkant staan in het midden V_1 en V_2 , respectievelijk in serie met R_{V_1} en R_{V_2} . Figuur 1b toont het toestel bij de proef over de spanningswet van Kirchhoff in deelparagraaf 3.3.

3 Methoden en Resultaten

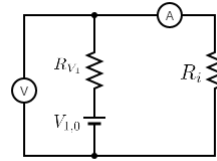
3.1 De grootte van V_1, V_2 en R_{V_1}, R_{V_2}

De openklemspanning van bron V_1 werd gemeten als $V_{1,0} = (4.72 \pm 0.03) \text{ V}$.

Hierna werden de verschillende weerstanden R_i in serie geplaatst met V_1 zoals te zien in Figuur 2.



(a)



(b)

Figuur 2: De twee circuits waarmee de grootte van V_1, V_2 en R_{V_1}, R_{V_2} berekend werden. Met het circuit op Figuur 2a werd de openklemspanning $V_{1,0}$ bepaald en met Figuur 2b werden $V_{1,g}$ en I_1 gemeten. Voor $V_{2,0}$ etc. werd een analoog circuit gebruikt.

De spanning $V_{1,g}$ over de bron met beveiligingsweerstand werd gemeten met V_m en de stroom I_1 door de kring met A_m . De meetresultaten met bijhorende systematische fout zijn te zien in Tabel 1a.

Om de beveiligingsweerstand R_{V_1} te berekenen gebruikt men onderstaande formule:

$$R_{V_1} = \frac{V_{1,0} - V_{1,g}}{I_1} \quad [1].$$

De grootheden $V_{1,0}, V_{1,g}, I_1$ zijn allen rechtstreeks gemeten en dus uniform verdeeld. Als combinatie hiervan volgt R_{V_1} een driehoeksverdeling, die benaderd wordt door een normaalverdeling. Indien de regels van foutenpropagatie toegepast worden, vindt men een standaardafwijking op R_{V_1} van

$$\sigma_{R_{V_1}} = \sqrt{\left(\frac{1}{I_1}\right)^2 \left(\frac{\Delta V_{1,0}}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{I_1}\right)^2 \left(\frac{\Delta V_{1,g}}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{-V_{1,0} + V_{1,g}}{I_1^2}\right)^2 \left(\frac{\Delta I_1}{\sqrt{12}}\right)^2}$$

De resultaten van de berekening van R_{V_1} zijn te zien in Tabel 2a. De spreiding op de berekende waarden van R_{V_1} is $s_{R_{V_1}} = 1.4 \Omega$, wat kleiner is dan de gepropageerde meetfouten $\sigma_{R_{V_1}}$, zodat we verder zullen werken met de meetfouten om het resultaat te bepalen. De gewogen gemiddelde waarde voor de beveiligingsweerstand R_{V_1} die men zo bekomt is

$$R_{V_1} = (21.0 \pm 0.9) \Omega \quad (1\sigma\text{-fout})$$

Deze procedure werd exact herhaald om R_{V_2} te bepalen. De openklemspanning van V_2 werd gemeten als $V_{2,0} = (11.19 \pm 0.06) \text{ V}$. De meetresultaten voor V_2 zijn te zien in Tabel 1b. De berekende waarden van R_{V_2} staan opgelijst in Tabel 2b. Men vindt een spreiding van $s_{R_{V_2}} = 2.2 \Omega$, wat wederom kleiner is dan de meetfouten. De gewogen gemiddelde waarde van R_{V_2} die men bekomt is

$$R_{V_2} = (58.3 \pm 0.8) \Omega \quad (1\sigma\text{-fout})$$

3.2 De inwendige weerstand van Am

In dit deel van het onderzoek wordt de inwendige weerstand van Am berekend met behulp van de twee circuits die te zien zijn op Figuur 2, waarbij de gebruikte spanningsbron V_1 is. De stroom I_a door Am in Figuur 2a en de stroom I_b door Am in Figuur 2b worden gemeten. In Tabel 3 staan de meetresultaten van de proef. Met deze gegevens kan de inwendige weerstand van de ampèremeter R_{Am} nagegaan worden. Deze is gegeven door

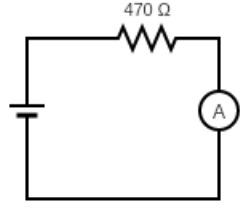
$$R_{Am} = \frac{R_0(I_b - I_a)}{I_a - I_b(1 + \frac{R_0}{R_{10\Omega}})}$$

waarbij R_0 de waarde is van de gebruikte weerstand, vermeerderd met de beveiligingsweerstand van de bron V_1 zoals gemeten in de vorige sectie. Als som van een uniforme verdeling en de benaderde normaalverdeling van R_{V_1} , zullen we R_0 als normaal verdeeld met standaardafwijking σ_{R_0} veronderstellen. I_b, I_a en $R_{10\Omega}$ zijn uniform verdeeld, dus wordt R_{Am} eveneens benaderd door een normale verdeling. De berekende waarden van R_{Am} met bijhorende standaardafwijking $\sigma_{R_{Am}}$ zijn eveneens te zien in Tabel 3. Zo bekomt men een gewogen gemiddelde waarde voor R_{Am} van

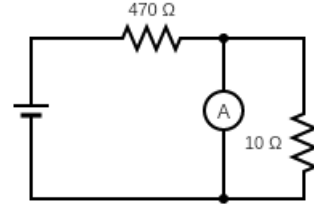
$$R_{Am} = (8.39 \pm 0.08) \Omega \quad (1\sigma\text{-fout}).$$

Tabel 1: Spanning en stroom gemeten in de kring zichtbaar op Figuur 2b voor de verschillende weerstanden bij V_1 en V_2 .

(a) Metingen V_1		(b) Metingen V_2	
$V_{1,g}[\text{V}] \pm 0.03 \text{ V}$	$I_1[\text{mA}]$	$V_{2,g}[\text{V}] \pm 0.06 \text{ V}$	$I_2[\text{mA}]$
4.68	1.64 ± 0.013	10.95	3.83 ± 0.02
4.68	1.96 ± 0.015	10.90	4.57 ± 0.03
4.66	2.61 ± 0.019	10.82	6.06 ± 0.04
4.61	5.16 ± 0.03	10.50	11.75 ± 0.06
4.60	5.55 ± 0.03	10.44	12.83 ± 0.07
4.57	7.44 ± 0.04	10.23	16.68 ± 0.09
4.55	8.05 ± 0.04	10.15	17.96 ± 0.09



(a)



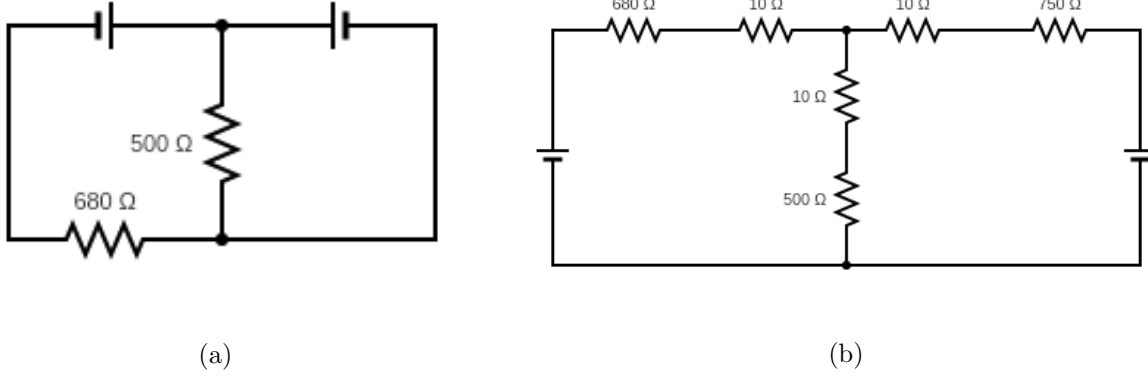
(b)

Figuur 3: De schakelingen die gebruikt werden om de inwendige weerstand van Am te berekenen. De bron op de afbeeldingen is inclusief beveiligingsweerstand.

Tabel 2: Berekende waarde van R_V bij de verschillende weerstanden.

(a) Berekende waarden bij V_1			(b) Berekende waarden bij V_2		
$I_1[\text{mA}]$	$R_{V_1}[\Omega]$	$\sigma_{R_{V_1}}[\Omega]$	$I_2[\text{mA}]$	$R_{V_1}[\Omega]$	$\sigma_{R_{V_2}}[\Omega]$
1.64 ± 0.013	24	7	3.83 ± 0.02	63	6
1.96 ± 0.015	20	6	4.57 ± 0.03	63	5
2.61 ± 0.019	23	5	6.06 ± 0.04	61	4
5.16 ± 0.03	21	2	11.75 ± 0.06	59	2
5.55 ± 0.03	22	2	12.83 ± 0.07	58	1.9
7.44 ± 0.04	20.2	1.6	16.68 ± 0.09	57.6	1.5
8.05 ± 0.04	21.1	1.5	17.96 ± 0.09	57.9	1.4

3.3 De wetten van Kirchhoff



Figuur 4: De circuits die gebruikt werden om de wetten van Kirchhoff na te gaan. Met Figuur 4a werd de spanningswet gecontroleerd en met Figuur 4b de stroomwet. De linkse bron in elk circuit is V_1 en de rechtse is V_2 . De bronnen op de schets zijn inclusief de respectievelijke R_V .

Als eerste wordt de spanningswet gecontroleerd met behulp van het circuit op Figuur 4a. De klemspanning $V_{1,k}$ over V_1 , de klemspanning $V_{2,k}$ over V_2 , de spanning $V_{500\Omega}$ over $R_{500\Omega}$ en de spanning $V_{680\Omega}$ over $R_{680\Omega}$ worden gemeten. De resultaten zijn

$$\begin{aligned} V_{1,k} &= (4.85 \pm 0.03) \text{ V} & V_{2,k} &= (9.90 \pm 0.05) \text{ V} \\ V_{500\Omega} &= (-9.84 \pm 0.05) \text{ V} & V_{680\Omega} &= (4.96 \pm 0.03) \text{ V} \end{aligned}$$

Dat betekent dat de totale spanning V_l over de linkse lus op Figuur 4a en de totale spanning over de rechtse lus V_r

$$\begin{aligned} V_l &= V_{1,k} + V_{500\Omega} + V_{680\Omega} = (-0.03 \pm 0.04) \text{ V} \\ V_r &= V_{2,k} + V_{500\Omega} = (0.06 \pm 0.04) \text{ V} \end{aligned} \tag{1}$$

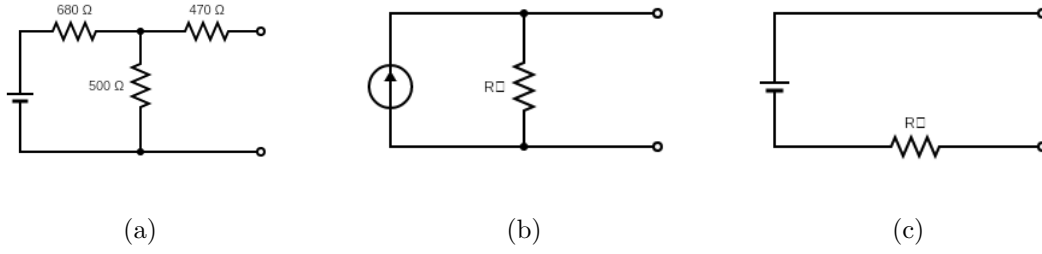
bedragen met beide 1σ -fout. Voor de fouten werden de driehoeksverdelingen benaderd door een normale verdeling.

De stroomwet werd onderzocht met behulp van het circuit op Figuur 3b: de stromen $I_{750\Omega}$, $I_{500\Omega}$ en $I_{680\Omega}$ door de respectievelijke weerstanden werden rechtstreeks gemeten, waarbij in de lussen die niet gemeten werden een weerstand $R_{10\Omega}$ geplaatst werd om te compenseren voor de interne weerstand van Am die er bij elke meting bijkomt. $I_{750\Omega}$ en $I_{680\Omega}$ zijn zo gedefinieerd dat ze aankomen in het bovenste knooppunt op Figuur 3b, $I_{500\Omega}$ loopt van het bovenste knooppunt weg. Ze bedragen

$$I_{750\Omega} = (7.01 \pm 0.04) \text{ mA} \quad I_{500\Omega} = (7.30 \pm 0.04) \text{ mA} \quad I_{680\Omega} = (0.290 \pm 0.006) \text{ mA}.$$

Tabel 3: Gemeten waarden voor de stroom in de kringen gegeven in Figuur 3a en Figuur 3b.

$I_a[\text{mA}]$	$I_b[\text{mA}]$	$R_0[\Omega]$	$\sigma_{R_0}[\Omega]$	$R_{Am}[\Omega]$	$\sigma_{Am}[\Omega]$
8.05 ± 0.05	4.42 ± 0.03	491.0	1.6	8.4	0.1
5.15 ± 0.03	2.82 ± 0.02	771	2	8.35	0.16



Figuur 5: In deelparagraaf 3.4 wordt het Thévenin- en Nortonequivalent berekend van het circuit op Figuur 5a. Figuur 5b beeldt het Nortonequivalent van het circuit af en Figuur 5c het Théveninequivalent.

Het verschil I_{tot} van de aankomende en weglappende stromen in het bovenste knooppunt is dan

$$I_{tot} = I_{750\Omega} + I_{680\Omega} - I_{500\Omega} = (0.00 \pm 0.06) \text{ mA},$$

waarbij opnieuw gebruik wordt gemaakt van een normale benadering.

3.4 Norton- en Théveninequivalent van een netwerk

Aan de hand van de schakeling op Figuur 5a worden het verwachte Nortonequivalent (Figuur 5b) en Théveninequivalent (Figuur 5c) onderzocht. De openklemspanning (Théveninspanning) V_{open} wordt gemeten door Vm met de twee aansluitpunten van het netwerk te verbinden. Verder wordt Am met de aansluitpunten geconnecteerd en zo meet men de kortsluitstroom (Nortonstroom) I_{kort} . De gevonden waarden zijn

$$V_{open} = (1.990 \pm 0.015) \text{ V} \quad I_{kort} = (2.590 \pm 0.018) \text{ mA}.$$

De equivalente weerstand R_{eq} van de schakeling bedraagt

$$R_{eq} = ((R_{V_1} + R_{680\Omega})^{-1} + R_{500\Omega}^{-1})^{-1} + R_{470\Omega} + R_{10\Omega} = (772 \pm 4) \Omega \quad (1\sigma\text{-fout}).$$

Daarvoor werd bij $R_{470\Omega}$ de inwendige weerstand van Am (10Ω) opgeteld want deze staan in serie. Met I_{kort} en V_{open} wordt nogmaals $R_{eq,gemeten}$ berekend

$$R_{eq,gemeten} = \frac{V_{open}}{I_{kort}} = (768 \pm 5) \Omega \quad (1\sigma\text{-fout}) \quad [3].$$

4 Discussie

In de veronderstelling dat de berekende waarden R_{V_1} en R_{V_2} normaal verdeeld zijn, kunnen we dus een betrouwbaarheidsinterval opstellen voor beide grootheden. Gebruikmakend van $z_{95\%} = 1.96$ vindt men volgende intervallen:

$$95\% \text{ CI } R_{V_1} : [19.2 \Omega, 22.8 \Omega]$$

$$95\% \text{ CI } R_{V_2} : [56.7 \Omega, 59.9 \Omega]$$

Op analoge wijze vindt men dat het 95 %-betrouwbaarheidsinterval voor R_{Am} gegeven is door $[8.23 \Omega, 8.55 \Omega]$. Aangezien 10Ω niet in dit interval zit, moet de hypothese dat $R_{Am} = 10 \Omega$ dus verworpen worden op niveau $\alpha = 5\%$ op basis van de uitgevoerde metingen. Er werd gekozen voor $\alpha = 5\%$ zodat de hypothese $R_{Am} = 10 \Omega$ niet onterecht wordt verworpen of aanvaard.

De theorie voorspelt dat de spanning over een gesloten lus 0 V is. [4] Via een tweezijdige hypothesetest op wordt nagegaan of de gemeten waarden (1) overeenkomen met 0 V. Er wordt gekozen voor $CI = 95\%$, zodat $\alpha = 5\%$. Opnieuw wordt de driehoeksverdeling benaderd door een normale verdeling. De teststatistiek $T = \frac{|V_i|}{\sigma_{V_i}}$ is normaal verdeeld en voor deze steekproef is de waarde van T gelijk aan $t = 0.75$. Dan is

$$2p(T > t) = 2(1 - 0.227) = 0.454 > \alpha.$$

Men mag de nulhypothese niet verwerpen, dus de gevonden waarde is compatibel met de spanningswet. Analooog volgt voor V_r dat $t = 1.5$, zodat $2p(T > t) = 0.134 > \alpha$ en deze waarde wordt aanvaard. De gemeten waarde V_r is dus ook compatibel met de spanningswet.

De stroomwet zegt dat $I_{tot} = 0$ mA voor elk knooppunt.[4] Met een tweezijdige hypothesetest wordt de gevonden I_{tot} gecontroleerd. Neem $\alpha = 5\%$. Omdat elke I_{tot} een lineaire combinatie is van uniforme verdelingen, heeft ze een driehoeksverdeling die met een normale verdeling kan benaderd worden. Gebruik de teststatistiek $T = \frac{|I_{tot}|}{\sigma_{I_{tot}}}$ met waarde $t = 0$ voor deze steekproef. Dan is de p -waarde 100 % en groter dan α . De gemeten waarde is compatibel met de stroomwet.

Ten slotte wordt geverifieerd of de waarde R_{eq} , die berekend werd met de theoretische waarden van de weerstanden, overeenkomt met de waarde $R_{eq,gemeten}$, die berekend werd aan de hand van de gemeten waarden van I_{kort} en V_{open} . Er wordt getest of de theoretische waarde inderdaad overeenkomt met de gemeten waarde, ofwel dat hun verschil nul is. Beide waarden zijn benaderd normaal verdeeld, dus de teststatistiek

$$T = \frac{|R_{eq,gemeten} - R_{eq}|}{\sqrt{\sigma_{R_{eq}}^2 + \sigma_{R_{eq,gemeten}}^2}},$$

is ook benaderd normaal verdeeld. Er wordt gewerkt op $\alpha = 5\%$ en met een tweezijdige test. Voor de steekproef is $t = 0.62$, zodat $2p(T > t) = 0.536 > \alpha$. De hypothese wordt aanvaard. Er wordt geconcludeerd dat de theoretische waarde van R_{eq} komt dus overeen met de gemeten waarde.

5 Conclusie

De bepaalde 95 %-betrouwbaarheidsintervallen voor R_{V_1} en R_{V_2} zijn respectievelijk $[19.2 \Omega, 22.8 \Omega]$ en $[56.7 \Omega, 59.9 \Omega]$. Op niveau $\alpha = 5\%$ wordt de hypothese $R_{Am} = 10 \Omega$ verworpen. Voor de geteste schakeling wordt op $\alpha = 5\%$ besloten dat de wetten van Kirchhoff niet verworpen kunnen worden. Ten slotte bedraagt voor het netwerk op Figuur 5a de Théveninspanning (1.990 ± 0.015) V en de Nortonstroom (2.590 ± 0.018) mA. Op niveau $\alpha = 5\%$ wordt besloten dat de theoretische waarde R_{eq} compatibel is met $R_{eq,gemeten}$.

Referenties

- [1] Netwerken en de wetten van Kirchhoff. Experimentele basistechnieken in de natuurkunde G0P32A. KU Leuven; 2021.
- [2] Wikipedia. Gustav Robert Kirchhoff; 2021. Geraadpleegd op 24 oktober 2021 van https://nl.wikipedia.org/wiki/Gustav_Robert_Kirchhoff.
- [3] Wikipedia. Norton's theorem; 2021. Geraadpleegd op 24 oktober 2021 van https://en.wikipedia.org/wiki/Norton%27s_theorem.
- [4] Giancoli D. Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics. 4th ed. Essex: Pearson Education Ltd; 2014.