

Onderzoek RC-, CR- en RLC-circuits

Louis Claeys, Ruben Van der Borcht

4 april 2022

1 Inleiding

In dit onderzoek worden RC-, CR- en RLC-circuits bestudeerd. Eerst wordt de respons van een RC-keten gefit om zo de tijdsconstante τ van het systeem op verschillende manieren te bepalen. Vervolgens wordt de doorlatendheid van een CR-keten onderzocht via een fase- en amplitudeplot en worden opnieuw de tijdsconstanten vergeleken. Als laatste wordt er gecontroleerd of de resonantiepieken van twee verschillende RLC-ketens vergeleken kunnen worden met een model dat gebaseerd is op de mechanische oscillator.

2 Materialen en Methoden

De elektrische circuits werden gebouwd met volgende componenten:

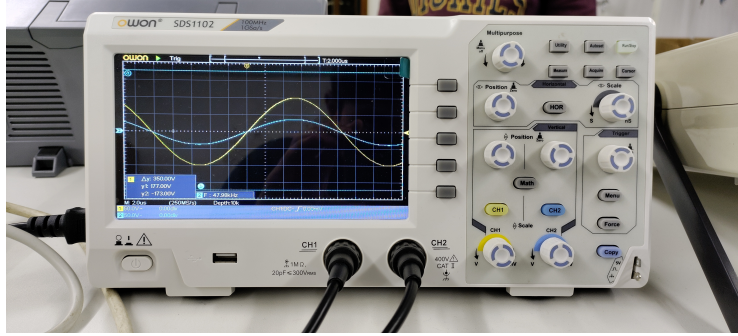
- Een weerstand R met een grootte van $R = 10.00 \pm 0.10 \text{ k}\Omega$;
- Condensatoren met een grootte van $C = 3.30 \pm 0.17 \text{ nF}$, $C = 15.0 \pm 0.8 \text{ nF}$ en $C = 10.0 \pm 1.0 \text{ }\mu\text{F}$;
- Een spoel met een grootte van $L = 2.20 \pm 0.11 \text{ mH}$.

Deze waarden zijn allen gegeven met systematische fout volgens de fabrikant, behalve voor $C_{15 \text{ nF}}$ en $C_{3.3 \text{ nF}}$ waar de systematische fout op $\pm 5\%$ werd genomen.

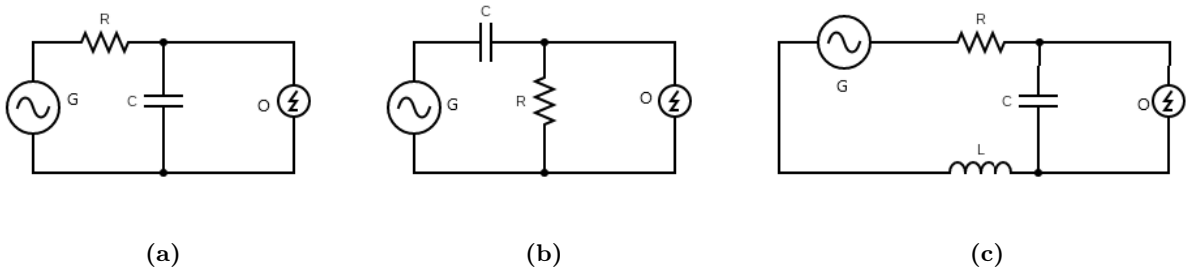
De sinusoidale en blokvormige stroom werd opgewekt door een generator G met instelbare frequentie. De fout op de frequentie wordt als 10% van de grootte-orde waarop gewerkt wordt genomen. Voor een meting van 1 kHz is dan $\Delta_{sys} = 0.10 \text{ kHz}$. De fout is groter dan de resolutie $\Delta = 5\%$ per grootte-orde van G omdat de ijk niet duidelijk zichtbaar was.

De uitgaande spanning werd gemeten met twee verschillende digitale oscilloscopen O_1 en O_2 omwille van de bovengrens van 500 Hz waarboven O_1 de signalen niet correct meer kan verwerken. [1] De eerste, O_1 , bestaat uit de Logger Pro interface die verbonden is met een PC. Op deze PC wordt de verworven data weergegeven met de software Logger Pro. De fout op het voltage werd als $\sigma = 0.006 \text{ V}$ genomen en de fout op de tijd werd verwaarloosd. De andere oscilloscoop O_2 valt te zien op Figuur 1. De fout op de metingen van O_2 hangt af van de divisie waarop gewerkt wordt en wordt telkens vermeld.

Voor het RC-circuit werd $C_{10 \text{ }\mu\text{F}}$ en $R_{10 \text{ k}\Omega}$ gebruikt met O_1 en de metingen worden uitgevoerd bij $f = 1.30 \pm 0.12 \text{ Hz}$. De componenten van het CR-circuit waren $C_{15 \text{ nF}}$ en $R_{10 \text{ k}\Omega}$ met O_2 . Experiment 1 met het RLC-circuit werd met $C_{15.0 \text{ nF}}$ uitgevoerd en experiment 2 met $C_{3.3 \text{ nF}}$. Voor beide



Figuur 1: De oscilloscoop O_2 die gebruikt werd voor een de metingen met CR- en RLC-keten.



Figuur 2: De circuits die tijdens de proeven gebruikt worden. Figuur 2a toont het RC-circuit, Figuur 2b het CR-circuit en Figuur 2c het RLC-circuit. Op deze schema's staan een capaciteit C , weerstand R en spoel L . De stroombron is de generator G en de spanning wordt gemeten met de gebruikte oscilloscoop O . Naast de getekende aansluiting van O , werd O met een tweede kanaal parallel met de generator aangesloten.

werden $L_{2.2\text{mH}}$ en O_2 gebruikt. De interne weerstand van het circuit realiseert R .

Met behulp van de componenten worden de circuits geconstrueerd zoals op Figuur 2 te zien valt. Beide oscilloscopen hebben twee channels waarvan met één de inkomende spanning en met de andere de uitgaande spanning wordt gemeten. Vervolgens wordt de gebruikte oscilloscoop gecalibreerd en worden de metingen uitgevoerd. Bij O_1 wordt het bereik van de assen ingesteld en vervolgens de data verzameld en opgeslagen. De Logger Pro calibreert automatisch. De assen van het toestel O_2 worden met de autosetfunctie op de juiste divisies gebracht. Met de triggerknop wordt het beeld tot stilstand gebracht en via de cursor worden de waarden afgelezen.

3 Theorie

3.1 RC-circuit

De transferfunctie van een RC-circuit wordt gegeven door

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

waarbij $\tau = RC$ de tijdsconstante is van het circuit. [2] Stel dat men een blokgolf-invoer heeft van het periodische signaal

$$V_{in}(t) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq t < T/2 \\ -V_0 & T/2 \leq t < T \end{cases}$$

dat periodische uitgebreid wordt (periode T). Met de transferfunctie kan men aantonen dat indien $T \gg \tau$, de respons van het systeem benaderd wordt door een volledige oplading gevolgd door volledige oplading met tegengestelde polarisatie:

$$V_{uit}(t) = \begin{cases} V_0(1 - 2e^{-t/\tau}) & 0 \leq t < T/2 \\ -V_0(1 - 2e^{-(t-T/2)/\tau}) & T/2 \leq t < T \end{cases} \quad (1)$$

Deze formule is zeker niet exact aangezien er geen continuïteit is, maar als $T \gg \tau$ is de benadering zeer nauwkeurig aangezien op de grenspunten de exponentiële snel verwaarloosbaar klein wordt.

3.2 CR-circuit

Voor het CR-circuit wordt de spanning gemeten over de weerstand i.p.v. over de condensator, en krijgt men een transferfunctie van

$$G(s) = \frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

waarbij opnieuw $\tau = RC$. [3] [2] Voor een sinusvormige invoer is de amplituderrespons dus gegeven door

$$|G(j\omega)| = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad (2)$$

en de faserespons door

$$\arg G(j\omega) = \frac{1}{\tau\omega}.$$

Het systeem zal stroom met een hoge frequentie dus meer doorlaten dan stroom met een lage frequentie. [4]

3.3 RLC-circuit

Het RLC-circuit voldoet aan een gelijkaardige differentiaalvergelijking als de harmonische oscillator, namelijk

$$CV_{in} = LC \frac{d^2 Q}{dt^2} + RC \frac{dQ}{dt} + Q, \quad (3)$$

waarbij Q de lading op de condensator en C de capaciteit van de condensator is, R de weerstand van het circuit, L de inductantie van de spoel en V_{in} de inkomende spanning. [2] [5] Overeenkomstig met het harmonische geval volgt

$$f_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (4)$$

met f_n de resonantiefrequentie en ξ de dempingsfactor. Voor kringen 1 & 2 met dezelfde L geldt dat

$$\frac{f_{n,1}}{f_{n,2}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}. \quad (5)$$

4 Resultaten

4.1 RC-circuit

Over de condensator in het RC-circuit wordt de genormaliseerde spanning $v = \frac{V_{uit}}{|V_{in}|}$ bij een blokgolf-invoer gefit voor het op- en ontladen gedurende één periode. Voor het opladen wordt de fit

$$v = 1 - e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (6)$$

gebruikt, waarbij t de tijd voorstelt en τ, t_0 de fitparameters zijn. De fitparameter t_0 dient om de tijdsas te ijken. Deze bevat ook de factor 2 van (1) en is van geen verdere interesse, dus zullen in wat volgt enkel de resultaten over τ weergegeven worden.

Voor het ontladen wordt dan de fit

$$v = -1 + e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (7)$$

gehanteerd, met dezelfde interpretatie als in vorige vergelijking. De fout op V_{in} wordt verwaarloosd, zodat $\sigma_v = 0.006$. De gevonden fitwaarden met 1σ -fout zijn

$$\tau = 107.6 \pm 0.9 \text{ ms (opladen)} \quad (8)$$

$$\tau = 107.50 \pm 0.12 \text{ ms (ontladen)} \quad (9)$$

Als kwaliteitswaarden bekoment men $\chi_{red}^2 = 1.0763$ en $p = 0.063$ voor de oplading, $\chi_{red}^2 = 1.0708$ en $p = 0.074$ voor de ontlading. De metingen met deze fits ernaast zijn weergegeven in Figuur 3 en Figuur 4.

Uit de gemeten datapunten voor op- en ontlading kan men ook het tijdstip zoeken waar de genormaliseerde spanning het dichtst ligt bij $1 - e^{-1}$ resp. $-1 + e^{-1}$ om een eerste schatting te vinden voor τ . Op die manier bekomt men zowel bij het opladen als het ontladen een waarde van

$$\tau = 107.1 \pm 1.4 \text{ ms} \quad (10)$$

met 1σ -fout. Uit de gegeven waarden van C en R volgt dat de theoretische tijdsconstante $\tau = RC = 100 \pm 3 \text{ ms}$ bedraagt.

4.2 CR-circuit

Over de weerstand in het CR-circuit werden zowel de spanningsamplitude V_A en fasehoek ϕ gemeten bij verschillende frequenties f en een vaste amplitude van een sinusoïdale invoer. De meetresultaten zijn te zien in Tabel 1. De amplitude wordt gefit aan

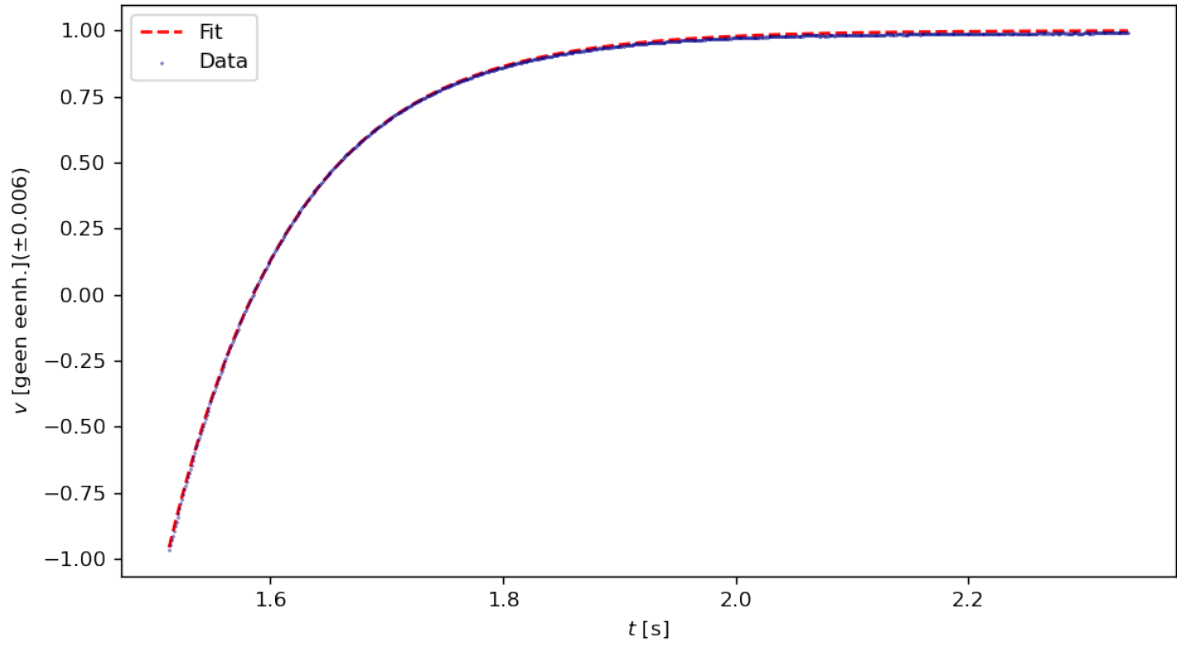
$$V_A = \frac{2\pi\tau f}{\sqrt{1 + (2\pi\tau f)^2}} V_0 \quad (11)$$

waarbij τ, V_0 de fitparameters zijn. Dit model wordt bekomen via (2). De resultaten van de fit zijn

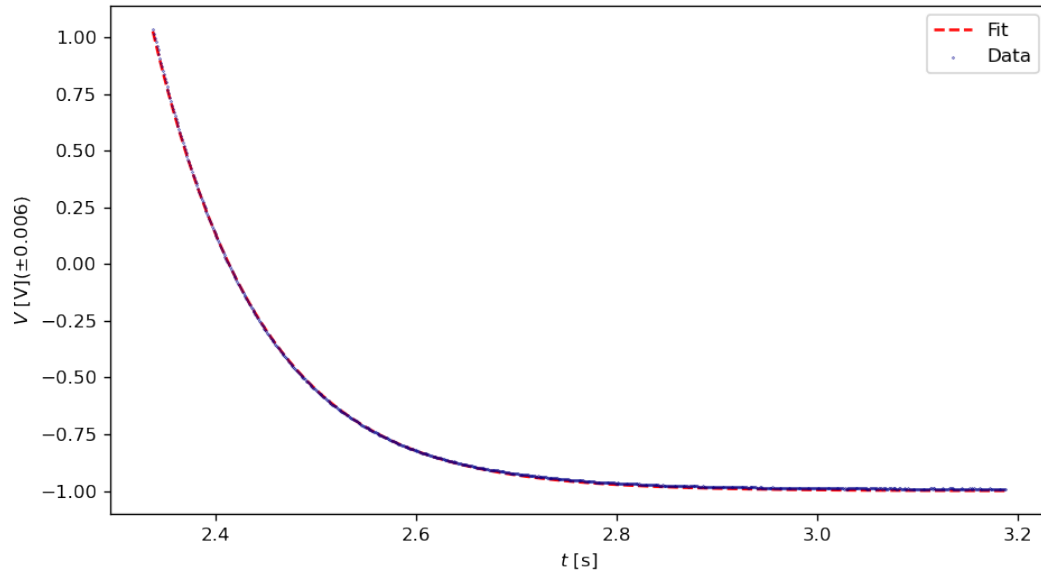
$$\tau = 157.0 \pm 1.1 \mu\text{s} \quad (12)$$

$$V_0 = 45.70 \pm 0.19 \text{ V} \quad (13)$$

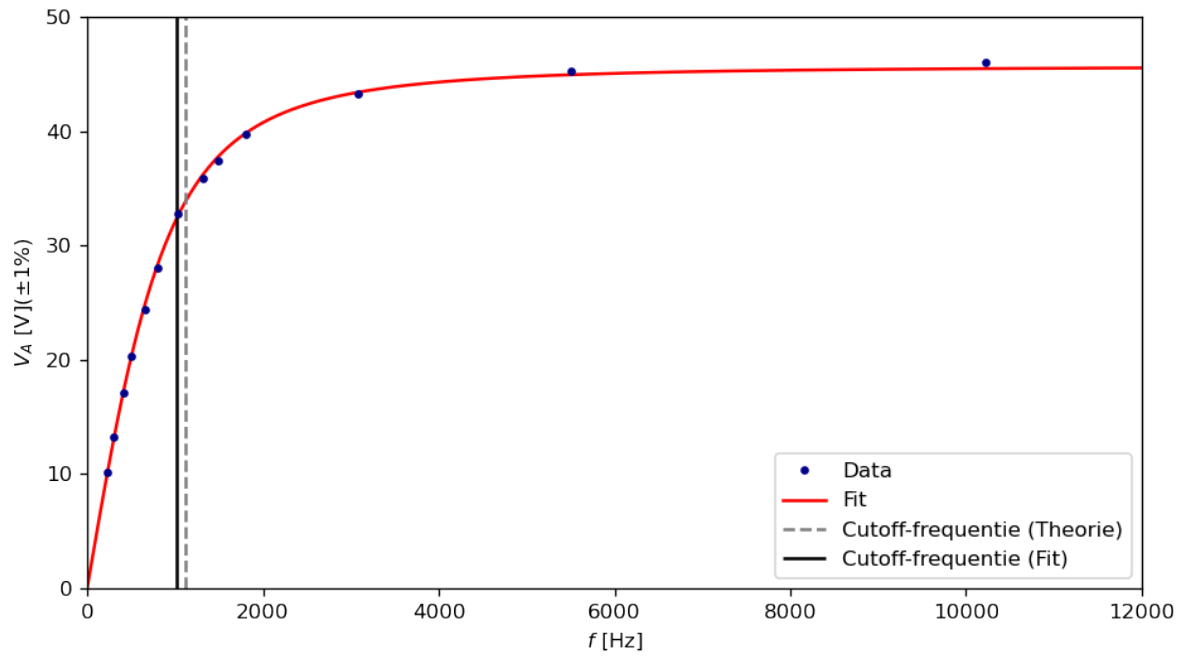
gegeven met 1σ -fout en met kwaliteitswaarden $\chi_{red}^2 = 1.0923$ en $p = 0.362$. Een grafiek van de data met deze fit is zichtbaar in Figuur 5. Voor een gedetailleerde foutenanalyse verwijzen we naar de



Figuur 3: De genormaliseerde spanning v bij het opladen van de condensator gedurende een halve periode van een inkomende blokgolf met bijhorende fit volgens (6). De fout op v is de 1σ -fout.



Figuur 4: De genormaliseerde spanning v bij het ontladen van de condensator gedurende een halve periode van een inkomende blokgolf met bijhorende fit volgens (7). De fout op v is de 1σ -fout.



Figuur 5: De amplitude van de spanning V_A in het CR-circuit bij variërende frequentie van de invoerspanning met bijhorende fit volgens (11) met 1σ -fout. Ook weergegeven zijn de theoretische en werkelijke 'cut-off' frequentie waarbij de invoerspanning met een factor $\sqrt{2}$ wordt verminderd.

Bijlagen.

De fasehoek wordt gefit aan

$$\phi = \arctan\left(\frac{1}{2\pi\tau f}\right) \quad (14)$$

waarbij τ de enige fitparameter is. [3] De resulterende fitwaarde met 1σ -fout is

$$\tau = 143 \pm 4 \mu s$$

met kwaliteitswaarden $\chi^2_{red} = 1.106$ en $p = 0.352$. De data met deze fit zijn zichtbaar in Figuur 6. Een gedetailleerde foutenanalyse is te vinden in de Bijlagen.

Als τ wordt berekend via de gegeven waarden van C en R , dan vinden we $\tau = 150 \pm 2 \mu s$ met 1σ -fout.

4.3 RLC-circuit

Als laatste werd de spanningsamplitude gemeten voor twee verschillende configuraties van een RLC-circuit bij variërende frequentie en vaste amplitude van een sinusoïdale invoer. De meetresultaten staan in Tabel 2. Deze werden beiden analoog aan de harmonische oscillator gefit volgens het model

$$V_A = \frac{V_0}{\sqrt{(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\xi f/f_n)^2}} \quad (15)$$

waarbij f_n, ξ, V_0 fitparameters zijn. [5] Omdat de fitmethode de fout op f niet in rekening brengt, wordt de fout op f en V samen in rekening gebracht als $\sigma_V = 5 \text{ V}$. Voor de eerste configuratie bekomt men

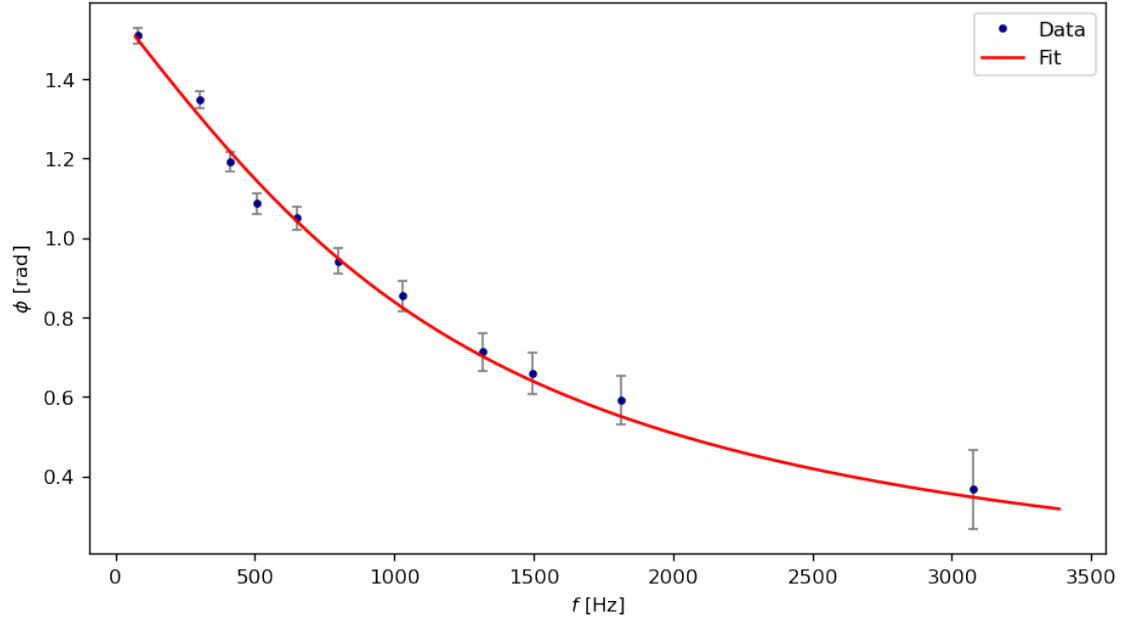
$$f_n = 27.27 \pm 0.09 \text{ kHz} \quad (16)$$

$$\xi = 0.104 \pm 0.002 \quad (17)$$

$$V_0 = 75 \pm 1 \text{ V} \quad (18)$$

Tabel 1: De gemeten waarden van ϕ en V_{max} voor de verschillende waarden van f voor het CR-circuit. Alle waarden zijn gegeven met 1σ -fout.

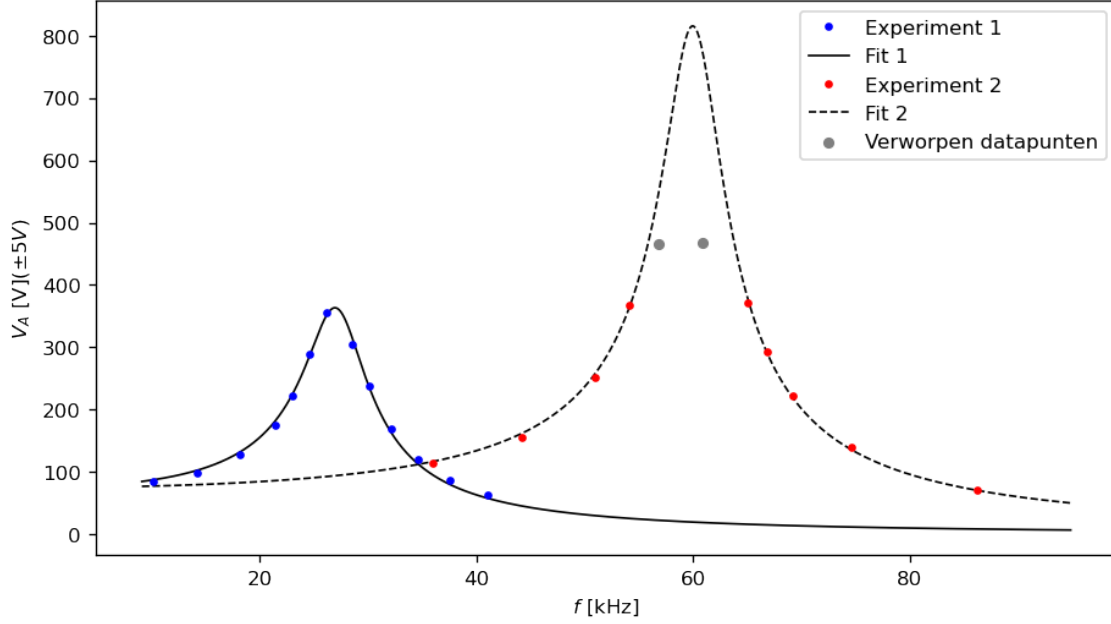
$f[\text{Hz}]$	$\phi[\text{rad}] \pm 0.002 \text{ rad}$	$V_{max}[\text{V}] \pm 0.03 \text{ V}$
78.99 ± 0.03	3.040	3.60
154.8 ± 0.3	1.520	9.31
226.8 ± 0.3	1.030	10.11
302.1 ± 0.3	0.710	13.23
412.1 ± 0.3	0.460	17.14
508.5 ± 0.3	0.340	20.26
652.7 ± 0.3	0.256	24.37
797.4 ± 0.3	0.188	28.08
1029 ± 3	0.132	32.80
1319 ± 3	0.086	35.89
1497 ± 3	0.070	37.45
1812 ± 3	0.052	39.79
3077 ± 7	0.019	43.31



Figuur 6: De fasehoek van de spanning in het CR-circuit bij variërende frequentie van de invoerspanning met bijhorende fit volgens (14). De fout op ϕ schaalt met de fout op f omdat deze dominant was en anders verwaarloosd zou worden.

Tabel 2: De gemeten waarden van V_{max} in functie van f voor het RLC-circuit met 1σ -fout. Tabel 2a geeft de waarden van experiment 1 met $C_{15.0\text{ nF}}$ en $L_{2.2\text{ mH}}$. Voor experiment 2 op Tabel 2b werden $C_{3.30\text{ nF}}$ en $L_{2.2\text{ mH}}$ gebruikt. De metingen die aangeduid zijn met '*' hadden een grote onnauwkeurigheid en werden voor de fits niet in rekening genomen.

(a)		(b)	
$f[\text{kHz}] \pm 0.10 \text{ kHz}$	$V_{max}[\text{V}] \pm 3 \text{ V}$	$f[\text{kHz}] \pm 0.10 \text{ kHz}$	$V_{max}[\text{V}] \pm 3 \text{ V}$
10.18	84	36.04	113
18.25	127	44.17	156
21.46	175	50.92	252
23.08	223	54.11	367
24.59	289	56.82	465*
26.18	356	60.83	467*
26.99	357	65.10	371
28.57	305	66.84	293
30.17	238	69.25	223
32.15	170	74.63	141
34.67	119	86.21	70
41.10	63		
37.54	85		
14.22	98		



Figuur 7: Datapunten met bijhorende fits volgens (15) voor amplitude in functie van frequentie bij het RLC-circuit in de twee verschillende configuraties. De grijze (verworpen) datapunten hebben betrekking op experiment 2.

met 1σ -fout en met kwaliteitswaarden $\chi_{red}^2 = 1.714$ en $p = 0.071$. Een bespreking van de fouten op de fitparameters is te vinden in de Bijlagen. Voor de tweede configuratie krijgt men

$$\begin{aligned} f_n &= 60.1 \pm 0.1 \text{ kHz} \\ \xi &= 0.046 \pm 0.003 \\ V_0 &= 75 \pm 1 \text{ V} \end{aligned} \tag{19}$$

met 1σ -fout en kwaliteitswaarden $\chi_{red}^2 = 0.979$ en $p = 0.438$. De verantwoording voor deze fouten is opnieuw gegeven in de Bijlagen. Een samenvattende grafiek van de amplitudemetingen en -fits van de twee configuraties is weergegeven in Figuur 7. Bij twee datapunten van het tweede experiment bleek de spanningsamplitude hoger te zijn dan de bovengrens van de oscilloscoop, en dus werden deze gegevens verworpen (zie ook Figuur 7).

De verhouding van de resonantiefrequenties van het eerste en tweede experiment bedraagt $f_{n,1}/f_{n,2} = 0.456 \pm 0.002$. De verhouding $\sqrt{C_2/C_1}$ van de condensatoren van resp. beide experimenten bedraagt 0.469 ± 0.017 .

5 Discussie

Er wordt voor alle fits op niveau $\alpha = 5\%$ gewerkt.

5.1 RC-circuit

De fits van het opladen en ontladen hebben resp. p-waarden 0.063 en 0.074 en worden dus aanvaard op het betrouwbaarheidsniveau. Omdat voor beide $\chi_{red}^2 \approx 1$, volgt dat beide fits van goede kwaliteit

zijn.

Het RC-circuit van de metingen is opgebouwd uit $R_{10\text{ k}\Omega}$ en $C_{10\text{ }\mu\text{F}}$. Hieruit volgt dat theoretisch $\tau = 100 \pm 3\text{ ms}$ met 1σ -fout. Omdat de onzekerheid op de gegeven waarde van τ groot is en de 2σ -intervallen overlappen, worden de waarde 'opgeladen' en die bekomen via ' $\pm 1 \pm e^{-1}$ ' consistent beschouwd met de theoretische waarden. Er is geen overlap bij het interval van het ontladen, dus deze waarde is niet in overeenkomst met de verwachting.

Er werd gekozen voor $f = 1.30 \pm 0.12\text{ Hz}$ zodat de condensator volledig op- en ontladen wordt tijdens elke periode. Door de spanning van de spanningsbron via het tweede kanaal te vergelijken met de spanning over de condensator werd gecontroleerd wanneer de condensator zijn maximale spanning bereikte. De maximale spanning is namelijk gelijk aan de amplitude van de blokgolf.

5.2 CR-circuit

De fit van het amplitudeplot heeft een p-waarde van 0.362 en wordt geaccepteerd. De fit is van goede kwaliteit met $\chi_{red}^2 \approx 1$. Ook de fit aan de faseplot wordt aanvaard met $p = 0.352$. Dit is een lichte onderfit met $\chi_{red}^2 = 1.106$. Er wordt besloten dat (11) en (14) geschikt zijn om het gedrag van de keten te beschrijven.

Omdat de onzekerheid op de gefitte τ voor de faseplot groot is en de 2σ -intervallen overlappen, worden de waardes consistent beschouwd. De onzekerheid op de gefitte τ voor de amplitudeplot is echter klein en het 2σ -interval overlapt niet met het theoretische interval. Deze waarden komen dus niet overeen.

Zoals op Figuur 5 te zien is, is de theoretische cut-off frequentie consistent met de cut-off frequentie van de fit.

5.3 RLC-circuit

Kwalitatief vertoont de dataset het gedrag dat werd verwacht. Er bevindt zich een piek bij de resonantiefrequentie. Verder zorgt een condensator met een lagere capaciteit ervoor dat de resonantiefrequentie verhoogt en de amplitudeplot verschuift naar hogere frequenties.

Ook kwantitatief sluit de dataset goed aan bij het model, dat gebaseerd is op het mechanische model. We hebben voor het eerste experiment $p = 0.071$ dus de fit wordt aanvaard. Toch is $\chi_{red}^2 = 1.714$ en is dit dus een overfit. Ook de tweede fit wordt aanvaard met $p = 0.438$ en hiervoor is $\chi_{red}^2 \approx 1$. Voor de laatste fit werden twee datapunten buiten beschouwing gebracht omdat de oscilloscoop aangaf dat hier een grote fout op zat.

Het doel van deze proef was om de verhouding van resonantiefrequentie te vergelijken bij verschillende condensatoren, waarbij L en R constant worden gehouden. De gefitte waarde $f_{n,1}/f_{n,2} = 0.456 \pm 0.002$ is verenigbaar met de theoretische waarde $\sqrt{C_2/C_1} = 0.469 \pm 0.017$ aangezien ze binnen elkaars onzekerheidsinterval liggen. Bijgevolg wordt er besloten dat de vergelijking (3) met bijhorende parameters (4) goed kunnen gebruikt worden om verschillende RLC-circuits met elkaar te vergelijken.

6 Conclusie

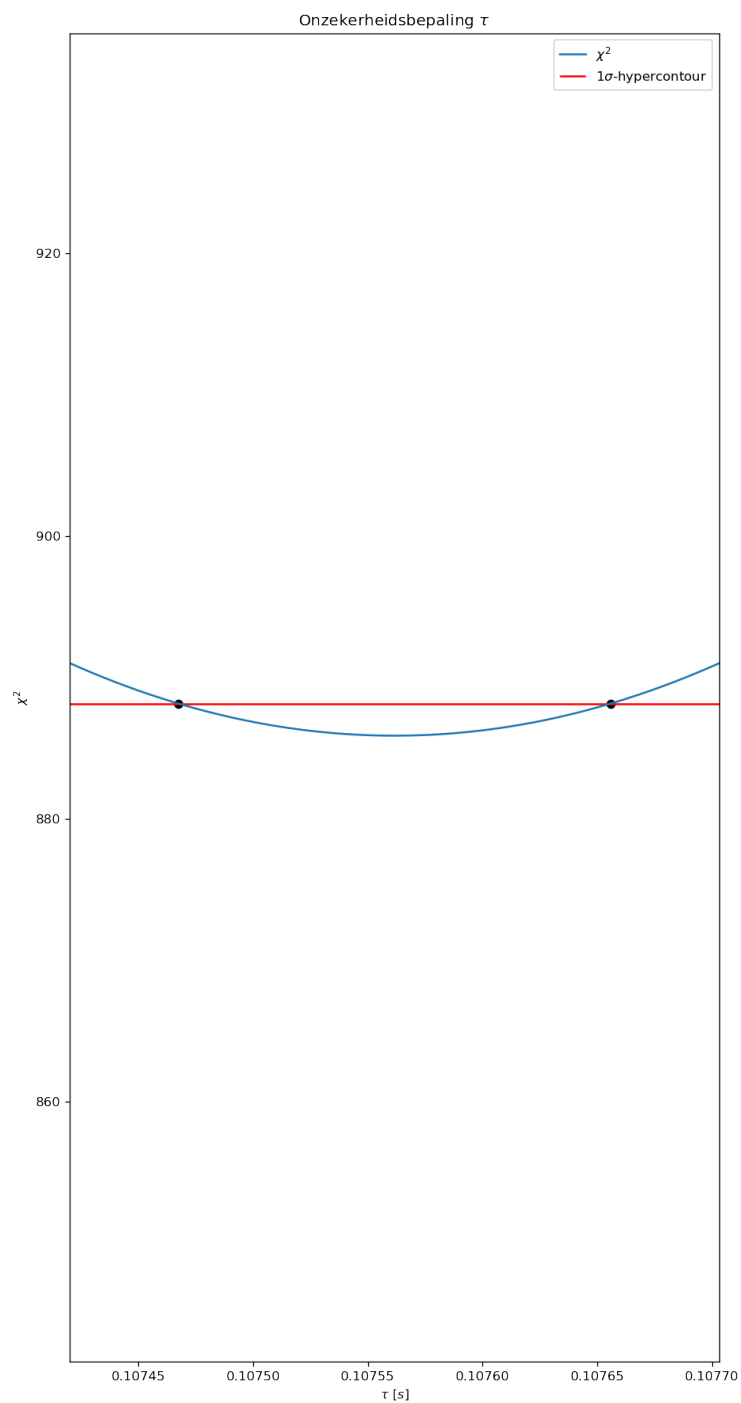
De gefitte τ voor het RC-circuit komt voor drie van de vier methoden overeen met de berekende waarde. Vervolgens beschrijft het verband (11) de amplitudeplot en de gevonden τ is niet consistent

met de gegeven waarden. Het verband (14) beschrijft de amplitudeplot en deze τ komt wel overeen met de gegevens. Als laatste volgt uit de fits van de RLC-ketens dat (3) de RLC-keten goed beschrijft. De verhouding tussen de resonantiefrequenties uit de gegevens is consistent met de gefitte waarde.

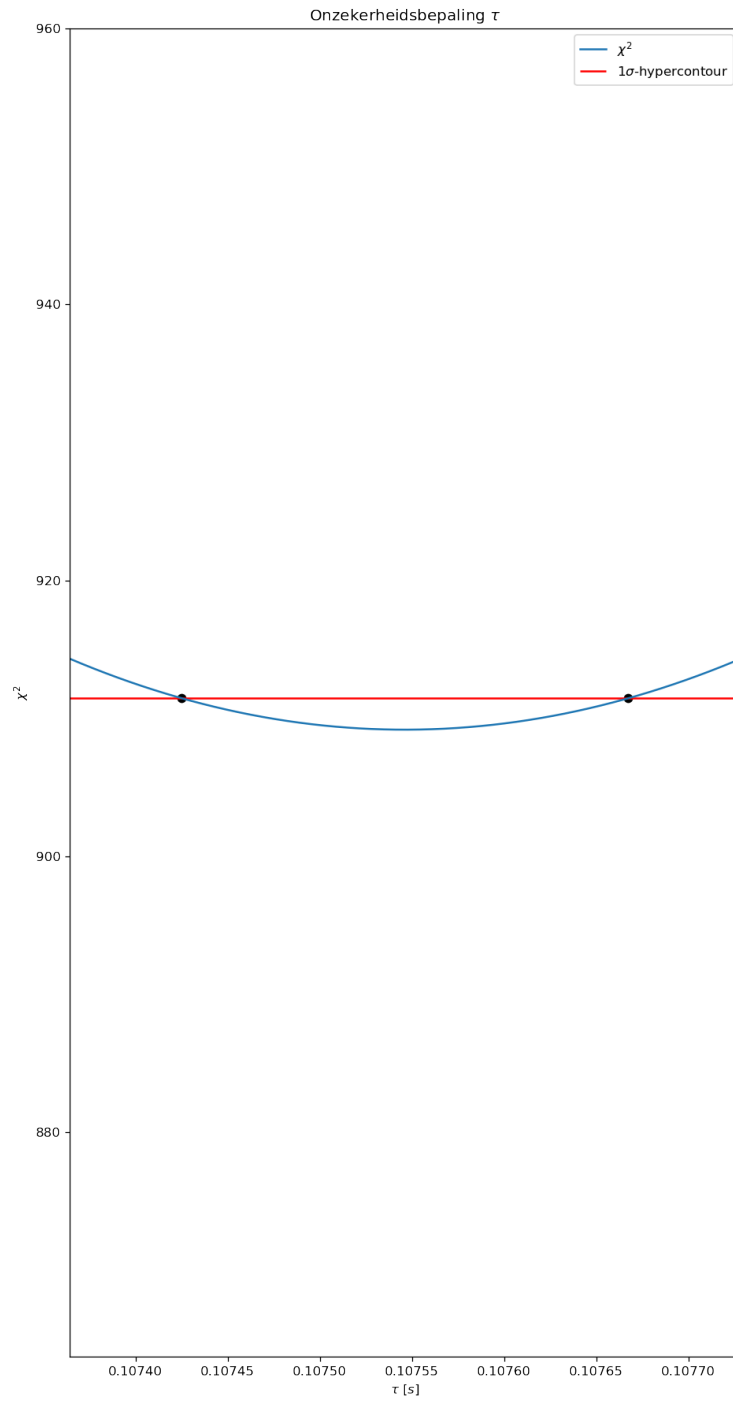
Referenties

- [1] Dynamische eigenschappen van een meetsysteem: De RC en RLC keten. Experimentele basistechnieken in de natuurkunde G0P32A. KU Leuven; 2022.
- [2] Claeys L, Van der Borght R. Voorbereiding proef De RC en RLC keten. Experimentele basistechnieken in de natuurkunde G0P32A. KU Leuven; 2022.
- [3] Wikipedia. RC circuit; 2022. Geraadpleegd op 4 april 2022 via https://en.wikipedia.org/wiki/RC_circuit.
- [4] Wikipedia. High-pass filter; 2022. Geraadpleegd op 4 april 2022 via https://en.wikipedia.org/wiki/High-pass_filter.
- [5] Gedwongen oscillaties en resonantie. Experimentele basistechnieken in de natuurkunde G0P32A. KU Leuven; 2022.

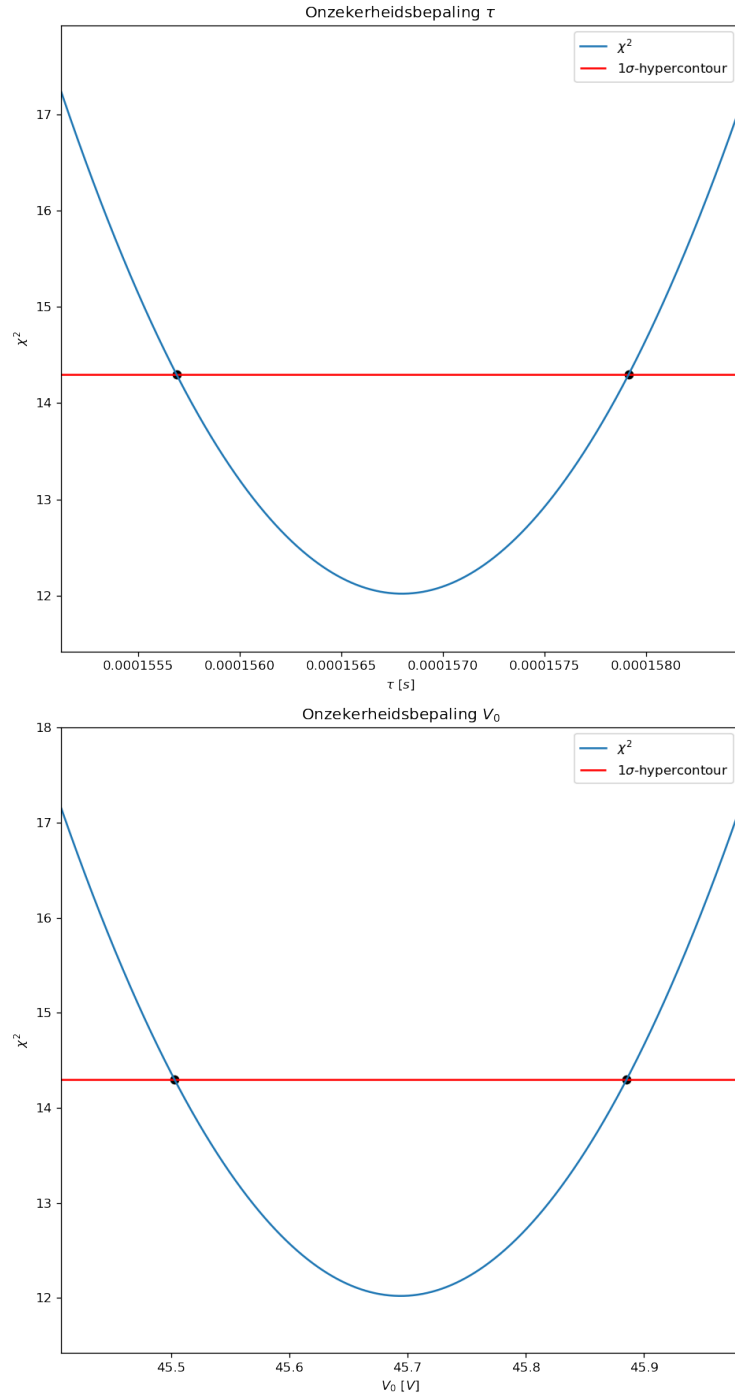
Bijlagen



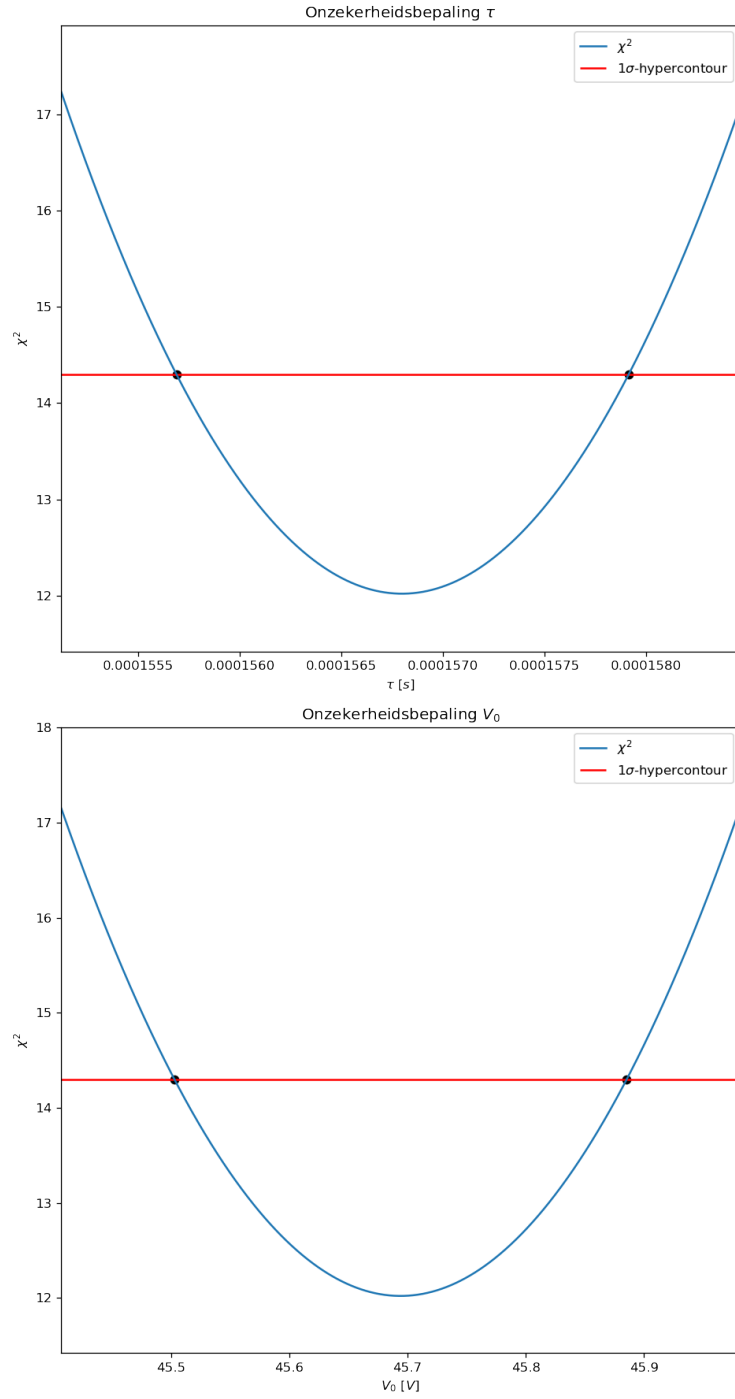
Figuur 8: Foutenanalyse voor de fitparameter τ van de spanningsfit voor het opladen in het RC-circuit (8).



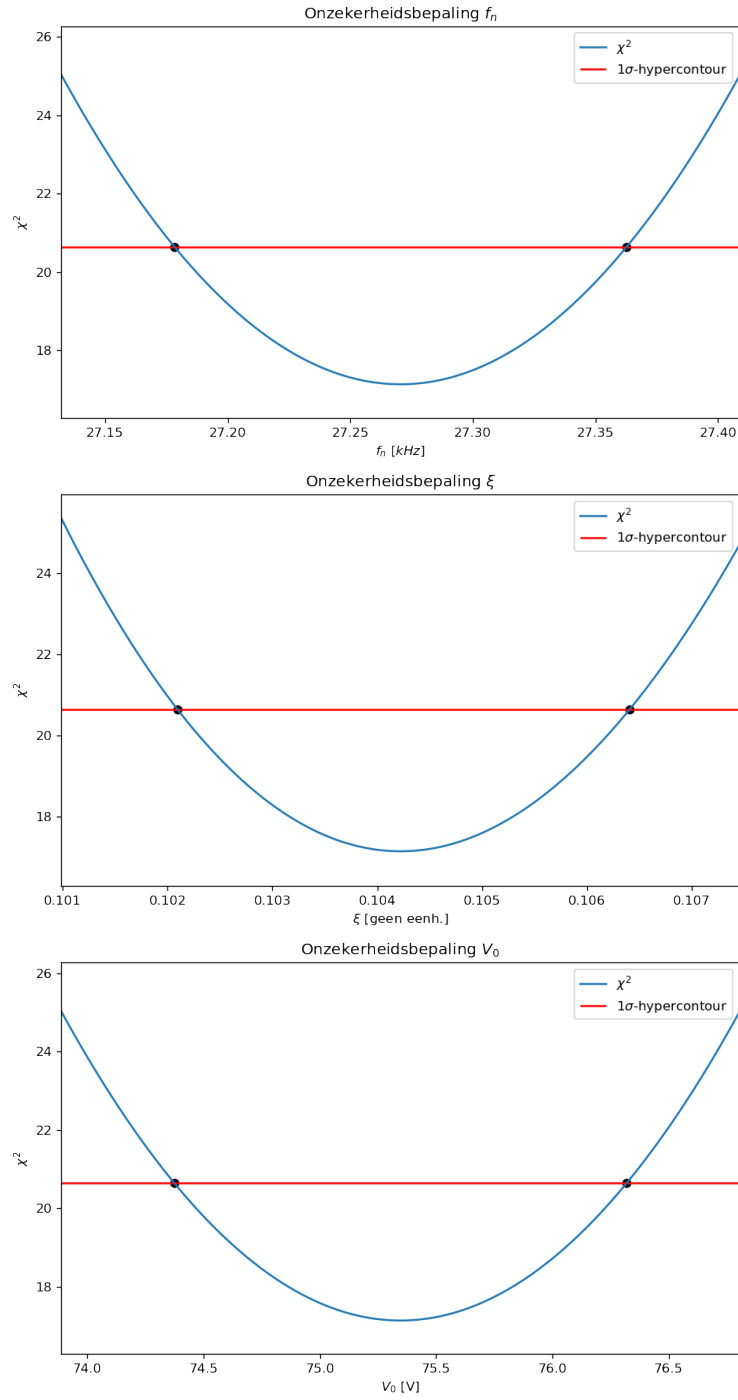
Figuur 9: Foutenanalyse voor de fitparameter τ van de spanningsfit voor het ontladen in het RC-circuit (8).



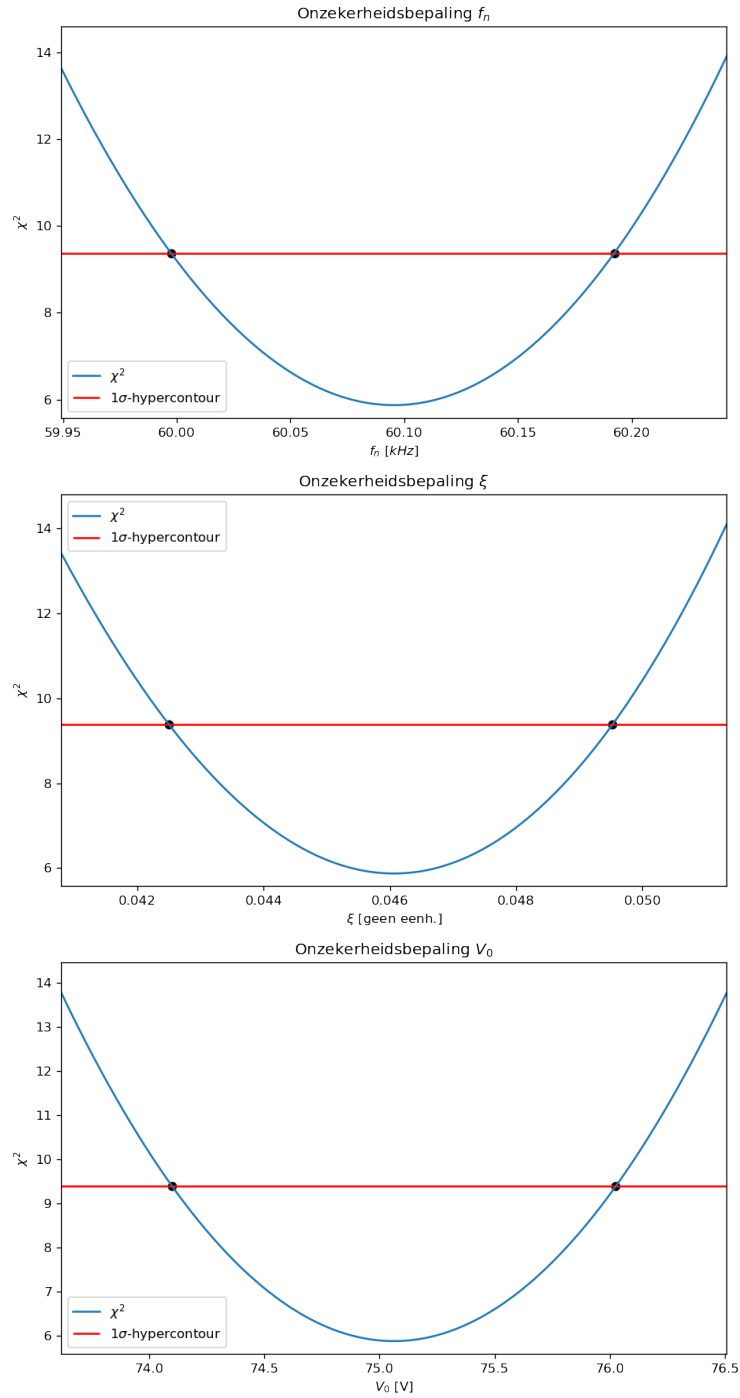
Figuur 10: Foutenanalyse voor de fitparameters van de amplitudefit voor het CR-circuit (12).



Figuur 11: Foutenanalyse voor de fitparameter van de fasefit voor het CR-circuit (12).



Figuur 12: Foutenanalyse voor de fitparameters van de amplitude voor het RLC-circuit in de eerste configuratie (16).



Figuur 13: Foutenanalyse voor de fitparameters van de amplitude voor het RLC-circuit in de tweede configuratie (19).