

10. Dubbelster

Met veel dank aan professor Hans Van Winckel en professor Mieke De Cock.

10.1 Doelstelling

In dit practicum wordt aan de slag gegaan met numerieke methodes om aan de hand van reële astronomische waarnemingen een specifieke onderzoeksvraag te beantwoorden. Observaties van de HERMES spectrograaf zullen gebruikt worden om de snelheid van een ster uit een dubbelster te bepalen. Die snelheid kan dan weer gebruikt worden om de massa van de dubbelster te bestuderen.

10.2 Vereiste voorkennis

Voorkennis: inleidende les NumPy. Voor alle commando's in verband met plotten kan je terecht op de website van Matplotlib: <http://matplotlib.org/index.html>. Hulp bij de NumPy en SciPy functies vind je op <http://cipy.org/>. Je kan ook altijd de helpfunctie gebruiken voor informatie over bepaalde commando's.

10.3 Theoretische achtergrond en relevante literatuur

Hieronder wordt de voornaamste theoretische achtergrond voor dit practicum samengevat. Voor meer informatie over specifieke onderwerpen, wordt er verwezen naar volgende secties in het handboek "Physics for Scientists & Engineers with Modern Physics" van Giancoli, Pearson Education:

Voor spectroscopie en licht:

- 32.1 *The Ray Model of Light*
- 32.6 *Visible Spectrum and Dispersion*
- 34.1 *Waves Versus Particles; Huygens' Principle and Diffraction*
- 37.2 *Photon Theory of Light and the Photoelectric Effect*
- 37.6 *Wave-Particle Duality; the Principle of Complementarity*
- 37.7 *Wave Nature of Matter*

Voor spectraallijnen van sterren:

- 37.1 *Planck's Quantum Hypothesis; Blackbody Radiation*
- 37.10 *Atomic Spectra: Key to the Structure of the Atom*
- 37.11 *The Bohr Model*

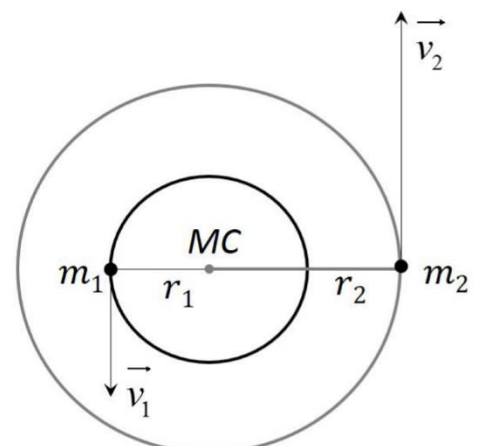
Voor het Dopplereffect:

- 16.7 *Doppler Effect*
- 36.12 *Doppler Shift for Light*

Dit is enkel achtergrondkennis en geen verplichte leerstof.

Dubbelsterren en hun beweging

Een dubbelster bestaat uit twee sterren die samen om hun gemeenschappelijk zwaartepunt heen bewegen. De sterren in de dubbelster die jullie bestuderen maken (bij benadering) een cirkelbeweging: ze bewegen in een vlak volgens een cirkel, met hun gemeenschappelijk massacentrum $x_{mc} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ als middelpunt. De grootte van de snelheid is constant tijdens die beweging, maar de richting van de snelheid verandert voortdurend.



Figuur 11.1 – Illustratie van het dubbelster-systeem en het massacentrum.

Zo'n verandering van snelheid wordt veroorzaakt door een inwerkende kracht. Om de sterren op de cirkelbaan te houden, is een kracht nodig: de aantrekkingskracht tussen de twee sterren. Meer bepaald is dit de gravitatiekracht: $|F_{12}| = |F_{21}| = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2}$.

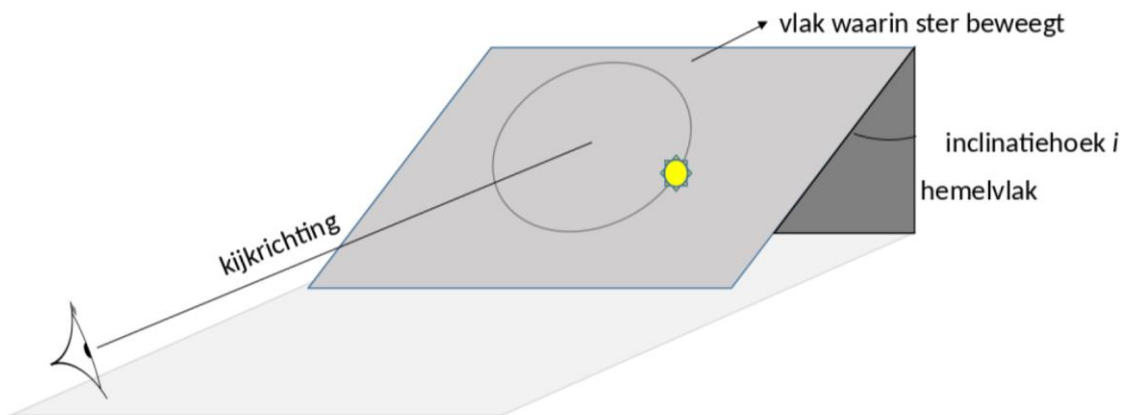
Je kan (maar moet niet) afleiden dat de baan beschreven wordt door volgende uitdrukking:

$$\frac{4\pi^2 R^3}{G} = (m_1 + m_2) P^2.$$

Hier is m_1 de massa van ster 1, m_2 die van ster 2, $R = r_1 + r_2$ de afstand tussen de twee sterren, G de universele gravitatieconstante en $P = 2\pi r_1 / v_1$ de orbitale periode van de cirkelbeweging. Deze vergelijking legt een verband tussen de massa's van beide sterren en wat we experimenteel kunnen bepalen: de orbitale periode.

Rekening houden met de meetomstandigheden en -mogelijkheden

Deze vergelijking is nog niet rechtstreeks bruikbaar omdat R niet zomaar te bepalen is. Daarom is het beter om te herschrijven naar de snelheden van de sterren die we dankzij het Dopplereffect (zie hieronder) wel kunnen meten. Bovendien geldt de vergelijking enkel als het baanvlak samenvalt met de kijkrichting, terwijl het enkel onder uitzonderlijke omstandigheden zo is dat de telescoop toevallig in het vlak van de baanbeweging ligt. We moeten dus rekening houden met de inclinatie i . Dat is de hoek tussen het vlak waarin van de dubbelster zich bevindt en het vlak dat loodrecht op de kijkrichting staat. Dus als $i = 0^\circ$, kijken we loodrecht op het baanvlak, en $i = 90^\circ$ wil zeggen dat we in het baanvlak kijken. De component van de snelheid in de kijkrichting is de radiale component en we schrijven: $v_r = v \sin(i)$.



Figuur 11.2 – De inclinatiehoek i bepaalt hoe we naar het binair systeem kijken.

In de dubbelster die we hier bekijken domineert het licht van de helderste ster. Sterrenkundigen noemen de dominerende ster de 'primary' of 'hoofddcomponent'. Het is nuttig om de vergelijkingen te herschrijven in functie van de snelheid van de ster die we zien, v_1 . Als je met dit alles rekening houdt, kom je uiteindelijk op de volgende vergelijking:

$$\frac{P}{2\pi G} (v_{1r})^3 = \frac{(m_2)^3 \sin^3(i)}{(m_1 + m_2)^2} = f(M).$$

Hierin zijn in het linker lid alleen grootheden opgenomen die we experimenteel kunnen achterhalen: de radiale snelheid en de orbitale periode, die we kunnen bepalen door regelmatig de radiale snelheid van de ster te meten en die uit te zetten als functie van de tijd. Omdat we maar licht van één ster uit de dubbelster detecteren, krijgen we alleen informatie over de beweging van die ster rond het

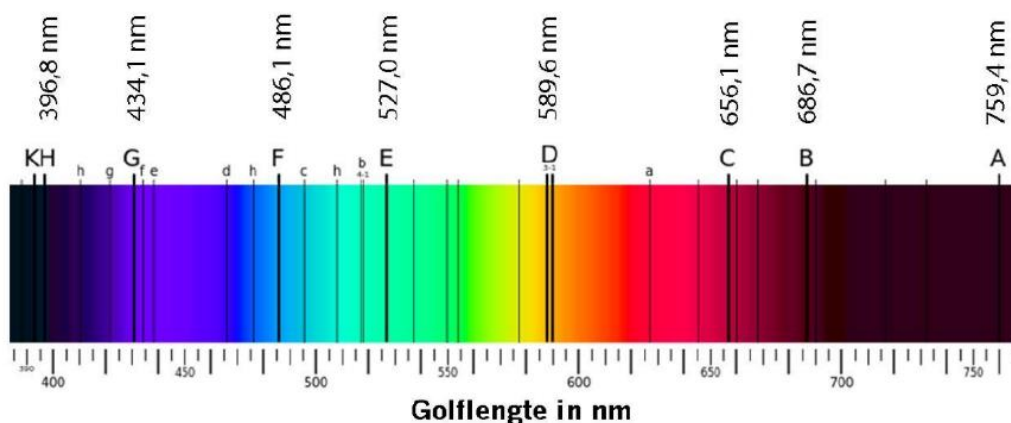
massacentrum. We kunnen dan wel de massafunctie $f(M)$ bepalen, maar niet de individuele massa's. Het kan wel worden aangetoond dat de massafunctie de minimale massa van de ongeziene component geeft. Meestal drukt men de massafunctie uit in eenheden van zonnemassa.

Spectroscopisch onderzoek van (dubbel)sterren

Spectraallijnen van sterren

De data waar jullie mee gaan werken, zijn spectra. Een spectrum van een ster is een meting waarbij we de helderheid van de ster uitzetten als functie van de golflengte waarop die helderheid gemeten is. Een spectrale waarneming vertrekt dus van heel veel kleine golflengtestukjes. Per golflengtestukje geeft een spectrum de helderheid weer van de ster op die bepaalde golflengte.

Een voorbeeld van zo'n sterrenspectrum (namelijk van onze eigen zon, voor het eerst opgemeten door Joseph von Fraunhofer in 1815) zie je in de figuur hieronder. Je ziet dat de helderheid verschilt voor verschillende golflengtes, en wel op een heel specifieke manier: het zonnenspectrum is een continu spectrum, maar op sommige golflengtes is de zon opvallend minder helder en zie je een donkere nauwe band. Het is alsof we van die kleur minder licht zien. Deze donkere nauwe banden zijn ook spectraallijnen maar op die golflengtes is er ergens licht geabsorbeerd. We spreken van absorptielijnen die we zien ten opzichte van de continue straling. Wanneer we spectraallijnen zien doordat de bron helderder is op die specifieke golflengtes, spreken we van emissielijnen.



Figuur 11.3 – Het spectrum van de zon zoals genoteerd door Fraunhofer.

Het continue deel van het spectrum wordt veroorzaakt door zwartelichaamstraling. Meer relevant voor wat we hier willen doen zijn de emissie- en absorptielijnen. Beide types van lijnen ontstaan door dezelfde fysische processen. Het licht van de ster interageert met gasen in zijn omgeving voor het de waarnemer bereikt. Belangrijk daarbij zijn de componenten waaruit die gasen bestaan: atomen.

Zoals jullie weten bestaat een atoom uit een kern met elektronen rond. De elektronen zijn gebonden aan de kern door de Coulombkracht. De straal van de baan waarop het elektron rond de kern beweegt, kan maar bepaalde discrete waarden aannemen: het elektron moet zich steeds op één van die banen bevinden. We spreken ook soms van schillen in plaats van banen. De posities van de discrete atoomschillen bepalen de mogelijke waarden voor de elektrische potentiële energie van een elektron. De elektrische potentiële energie van een gebonden elektron kan dus slechts bepaalde waarden aannemen: we zeggen dat de energieniveaus gekwantiseerd zijn. Hoewel elektronen zich steeds op één van de discrete schillen moeten bevinden, kunnen ze wel springen naar een hogere of lagere schil. Dit proces noemen we excitatie (sprong naar een hogere schil in een minder gebonden toestand) of deëxcitatie (sprong naar een lagere schil dus naar een meer gebonden toestand). Bij zo een sprong zal er energie nodig zijn (excitatie) of energie vrijkomen (deëxcitatie), en wel net zoveel als het

energieverschil tussen de twee niveaus. Deze energie kan worden uitgezonden (of geabsorbeerd) en die hoeveelheid energie noemen we een foton: een stralingspakketje. Met die bepaalde energie komt een golflengte overeen van het uitgestraalde foton en het verband tussen energie en golflengte wordt gegeven door $E = hc/\lambda$, met h de constante van Planck, c de lichtsnelheid en λ de golflengte. De golflengte van de straling is dus ook een maat voor de energie en hoe kleiner de golflengte, hoe energetischer de straling. Belangrijk is dat de excitaties en deëxcitaties dus gebeuren bij heel specifieke golflengtes.

Als het licht van de ster interageert met de atomen in het gas rondom de ster, kan op een specifieke golflengte licht geabsorbeerd worden in de atomen of juist licht geëmitteerd worden. Dat is wat de waarnemer kan zien in het spectrum in figuur 11.3 (hier specifiek absorptie). De energieniveaus die overeenstemmen met elke schil zijn anders voor elk element in de tabel van Mendeljev. Ieder element heeft daardoor een unieke set van energieniveaus waartussen elektronen kunnen springen en dus een unieke set van spectraallijnen. Wanneer we de golflengte van een opgemeten spectraallijn kunnen bepalen, kunnen we meestal de spectraallijn identificeren en dus bepalen van welk element de spectraallijn afkomstig is.

Dopplereffect voor een bewegende lichtbron

Als een golfbron en de waarnemer bewegen ten opzichte van elkaar, dan meet de waarnemer een andere golflengte dan die waarmee de bron golven uitzendt. Dit noemt men het Dopplereffect. Je kent misschien het voorbeeld van een voorbijrijdende ambulance, maar dit effect is ook van toepassing wanneer wij vanop de aarde naar sterren kijken. De ster beweegt namelijk ten opzichte van de aarde. De op aarde waargenomen golflengte λ wordt bepaald door de uitgestuurde golflengte λ_0 en door de relatieve snelheid van het hemellichaam ten opzichte van de waarnemer v_* .

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_*}{c}$$

Met andere woorden: door gebruik te maken van de verschuiving van spectraallijnen met een welbepaalde golflengte kunnen we de snelheid van de ster bepalen. Omdat de lichtsnelheid c heel groot is, zijn de golflengteverschuivingen erg klein en dus zijn er nauwkeurige metingen nodig zijn om ze te meten. Nog belangrijk om te weten: via de Dopplerverschuiving meten we alleen de radiale snelheid, dit wil zeggen dat we de component van de snelheidsvector meten in de kijkrichting. We meten niet de snelheidsvector zelf, alleen de grootte en zin van de radiale component van de snelheidsvector.

10.4 Meetopstelling

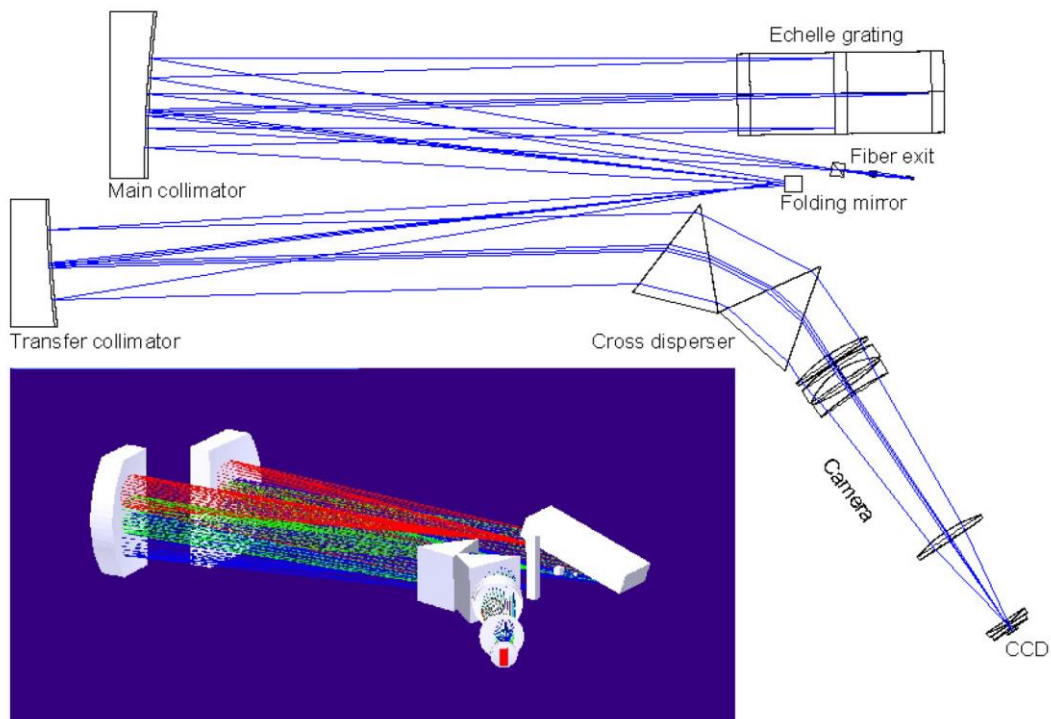
In dit project gebruiken we meetgegevens van de HERMES (High Efficiency and Resolution Mercator Echelle Spectrograph)ⁱ spectrograaf. Dit meetinstrument is gemonteerd op de Vlaamse Mercator telescoopⁱⁱ op het Canarische eiland La Palma. In het volgende filmpje geeft professor Hans Van Winckel van de afdeling sterrenkunde een inleiding in de werking van de telescoop en spectrograaf: <https://videolab.avnet.kuleuven.be/video/?id=1662eb6d770041958dec4276dfc2f95d&height=390&width=640&autoplay=false>.

De spectrograaf zelf krijg je niet te zien omdat die in een donkere sterk geïsoleerde kamer staat. Het licht van de telescoop wordt via een optische vezel naar die spectrograafkamer gebracht. Linksonder in figuur 11.4 zie je het optische ontwerp van de spectrograaf. De verschillende kleuren stellen het lichtpad voor doorheen het instrument van het licht met die bepaalde golflengte (rood, groen en blauw licht). Het doel van de spectrograaf is om het licht van een ster of ander hemellichaam te splitsen

ⁱ <http://www.mercator.iac.es/instruments/hermes/>

ⁱⁱ <http://www.mercator.iac.es/>

volgens golflengte om zo een spectrum te krijgen. De spectrale resolutie is zodanig hoog dat we de individuele spectraallijnen kunnen meten.



Figuur 11.4 – Het optische ontwerp van de HERMES spectrograaf, waarbij de namen van de verschillende componenten worden aangegeven. De stralen in de inset linksonder geven aan hoe rood, groen en blauw licht doorheen het instrument wordt geprojecteerd.

Het zou ons te ver voeren om heel het optische ontwerp in detail te beschrijven, maar we kunnen wel kort het lichtpad in de spectrograaf volgen. In de figuur benoemen we de verschillende optische elementen die samen de spectrograaf vormen. Het licht van de telescoop komt via de optische vezel binnen in de spectrografruimte (Fiber exit op de figuur). Daar wordt de uitwaaiende bundel in het focaal punt van de hoofdcollimator (Main collimator op de figuur) geplaatst. Deze collimator zorgt ervoor dat de bundel evenwijdig wordt geprojecteerd. De lichtbundel heeft een diameter van ongeveer 15 cm. Via de collimator gaat het licht naar het diffractierooster (Echelle grating op de figuur) waar het licht wordt gesplitst in de verschillende golflengtes. Daarna volgen reflecties terug op de hoofdcollimator, de vlakke spiegel (Folding mirror op de figuur) en de transfercollimator (Transfer collimator op de figuur). Na deze reflectie gaat het licht door twee prisma's (Cross disperser op de figuur). Die zullen het licht verder opsplitsen. Via een grote camera wordt het spectrum geprojecteerd op een detector (CCD op de figuur). Bij een meting integreren we voor minuten of zelfs een uur voor we de detector uitlezen. Zoals je in het filmpje zag, worden de ruwe metingen tijdens de nacht door specifieke software gereduceerd tot een spectrum en kan de waarnemer zien of de metingen de juiste signaal-over-ruis verhouding hebben. Wanneer de waarnemer gaat slapen, zal de volledige reductie automatisch opstarten om de finale versie van de gereduceerde spectra te berekenen. De spectrale waarnemingen opgemeten met de HERMES spectrograaf hebben een golflengtebereik van 390 nm tot ongeveer 900 nm. Dit hele bereik is opgesplitst in ongeveer 168000 golflengtestukjes. Per golflengtestukje geven de metingen de helderheid weer van de ster op die bepaalde golflengte.

Digitale data

In deze proef gaan jullie aan de slag met de volledig gereduceerde spectra zoals die ook door professionele onderzoekers worden gebruikt. De spectra zijn opgeslagen in een FITS-bestand (Flexible

Image Transport Systemⁱⁱⁱ). In Python werd de FITS software `pyfits` genoemd. Vanaf versie 3 van Python werd `(py)fits` ondergebracht als submodule van `Astropy` (<http://www.Astropy.org/>). `Astropy` is een initiatief om de software van vele sterrenkundigen te bundelen in een bibliotheek zodat iedereen die kan gebruiken. We maken er hier ook gebruik van. Om FITS commando's te kunnen gebruiken moet je die code importeren:

```
import astropy.io.fits as pf
```

Elk FITS-commando zal dus beginnen met:

```
pf.<commando>
```

Een bestand bestaat uit meta-data (header) van de waarneming en het spectrum zelf als 1-dimensionele lijst van fluxpunten die de helderheid weergeven van de ster op een bepaalde golflengte. In de meta-data staat onder andere waar het spectrum werd opgemeten, welke telescoop werd gebruikt, welk meetinstrument, wanneer de meting werd gedaan, hoelang de meting zelf duurde, wie de waarnemer was enzoverder. De ruwe metingen werden al door specifieke software behandeld en de gegevens die we hier gebruiken, zijn ook de bewerkte data die sterrenkundigen gebruiken. De fluxwaarden zijn relatief, wat wil zeggen dat ze niet in gekalibreerde fysische grootheden zijn uitgedrukt.

Er zijn verschillende datafiles, die allemaal de volgende vorm hebben: `236438_HRF_OBJ_ext_CosmicsRemoved_log_merged_cf.fits`. De verschillende files hebben verschillende observatiedata. De tijd (jaar, maand, dag en uur) aanduiden in sterrenkunde is vervelend omdat tijdreeksen veelal langer zijn dan een jaar en de telling elk jaar opnieuw start bij onze normale tijdsaanduiding (dag, maand, jaar). Daarom wordt de Juliaanse Dag^{iv} gebruikt. Deze kalender loopt door en het beginpunt werd gekozen op 1 januari van het jaar 4713 voor Christus. Daarenboven willen sterrenkundigen een kalender die gedurende de waarneemnacht niet verandert van dag, dus springt de kalender naar een volgende dag om 12 uur 's middags in plaats van 's nachts. Naast `Astropy`, heb je ook `Numpy` nodig om de data te laden:

```
import numpy as np
```

Vervolgens kun je het spectrum en de header laden van een bepaalde FITS-file:

```
spec = pf.getdata('<filenaam>')
header = pf.getheader('<filenaam>')
```

In de variabele met naam `spec` staan nu alle gemeten fluxpunten als een 1-dimensionele rij. Er is nog geen rij die de golflengtes weergeeft. Deze moet je zelf aanmaken met de gegevens uit de meta-data (header). In de FITS standaard hebben sommige delen van de header een speciale betekenis: `CRPIX1`, `CRVAL1`, `CDEL1` zijn respectievelijk de index van de referentiepixel die het begin aangeeft, de waarde van de natuurlijk logaritme van de golflengte van de eerste pixel en de breedte van een pixel in de eenheid van de pixelwaarde. Met behulp van die gegevens, kan je de bijbehorende golflengterij bepalen. Met volgende commando's definieer je de golflengterij en ga je over van de natuurlijk logaritme van de golflengte naar de lineaire vorm. De golflengtes worden dan uitgedrukt in Ångström (Å):

```
# Lees meta-data
ref_pix = int(header['CRPIX1'])-1
ref_val = float(header['CRVAL1'])
ref_del = float(header['CDEL1'])
JD = header['BJD'] # datum van de waarneming in Juliaanse dagen
unitx = header['CTYPE1']
```

iii <https://en.wikipedia.org/wiki/FITS>

iv. [https://nl.wikipedia.org/wiki/Juliaanse dag](https://nl.wikipedia.org/wiki/Juliaanse_dag)


```

numberpoints = spec.shape[0]

# Maak een golflengtegrid aan
wavelengthbegin = ref_val - ref_pix*ref_del
wavelengthend = wavelengthbegin + (numberpoints-1)*ref_del
wavelengths = np.linspace(wavelengthbegin,wavelengthend,numberpoints)
wavelengths = np.exp(wavelengths)

```

Nu heb je twee variabelen gedefinieerd als 1-dimensionele rijen: één met het spectrum (`spec`) en één met de bijhorende golflengtes (`golflengtes`). De datum van de waarneming in Juliaanse dagen staat ook in de header: `BJD`.

Naast de FITS-data hebben jullie ook een bestand genaamd `LijnLijst.txt`. Dit bestand bestaat uit de alle spectraallijnen van de ster.

10.5 Opgaven

Per groepje krijg je een dataset opgestuurd per mail, met daarin spectrale gegevens en een txt.file met spectraallijnen. In de map 'Course Content>Sterrenkundeproef' onder de titel 'Opgaven: Sterrenkundeproef' op Toledo vind je `sterrenkundeproef_dataverwerking.ipynb` waarin je je analyse kan maken. Ook tijdens de voorbereiding kan deze notebook worden gebruikt.

Opgaven ter voorbereiding van de proef

Tijdens de proef ga je een grote hoeveelheid data verwerken, het is dan ook erg belangrijk om de data goed te begrijpen om te voorkomen dat je erin verdwaald raakt. Het is dus handig om één file als voorbeeld te nemen en deze alvast te bestuderen.

1. **Installeer Astropy.** Om de data te laden ga je Astropy gebruiken. Deze package bibliotheek is niet standaard geïnstalleerd met python. Om deze te installeren open je de *anaconda prompt* door te zoeken tussen de geïnstalleerde apps op je computer. Vervolgens type je in de prompt:

```
pip install astropy
```

Deze manier kun je ook gebruiken om andere ontbrekende packages te installeren:

```
pip install <package>
```

2. **Laad de data en maak een figuur.** Laad willekeurig een FITS-dataset en maak een figuur van de intensiteit vs. de golflengte. Welke kenmerken zie je en wat betekenen zij fysisch?
3. **Bestudeer `LijnLijst.txt`.** Naast de FITS-data hebben jullie een bestand genaamd `LijnLijst.txt` gekregen. Welke data is gegeven in de kolommen? Wat stelt deze data voor? Wat is de relatie tussen `LijnLijst.txt` en de FITS-data die je net hebt geplot?

Extra. Denk alvast na over hoe je de radiale snelheid uit deze gegevens kan bepalen.

Hint: wat is de rol van de Dopplerverschuiving?

Opgaven tijdens de proef

- **Tip bij de groepsverdeling:** Je zou opgave 4 eerst kunnen oplossen voor een willekeurig gekozen waarde van de massafunctie en dan later de juiste waarde invullen. Nadat jullie de voorbereiding hebben besproken, kunnen jullie dus het team dus in tweeën verdelen. De ene helft begint dan bij opgave 1 en de andere helft bij opgave 4. Vergeet niet om de andere helft van het team uit te leggen hoe je jouw opgave hebt opgelost!
1. **Bepaal de radiale snelheid.** In de voorbereiding heb je misschien al nagedacht over hoe je de radiale snelheid uit een spectrum kan bepalen. Bespreek met je team hoe je dit zou doen en

pas dit toe op de voorbeeld data uit de voorbereiding. Definieer hiervoor een functie die de data als input neemt en de radiale snelheid als output geeft. Laat in een figuur zien hoe je de radiale snelheid hebt bepaald. Hoe kun je de onzekerheid op de radiale snelheid schatten?

Hint: overloop een reeks van mogelijke radiale snelheden, welke snelheid zorgt voor de beste relatie tussen het spectrum en de spectraallijnen in `LijnLijst.txt`?

2. **Bepaal de periode.** Nu je de data goed begrijpt en weet hoe je de radiale snelheid uit een spectrum bepaald, kun je dit herhalen voor de rest van de spectra, gemeten op verschillende tijdstippen. Je weet dan hoe de radiale snelheid verandert in de tijd. Bepaal hieruit de amplitude van de radiale snelheid. Je kunt nu ook de periode van de cirkelbaan bepalen. Wat zijn de onzekerheden hierop?
3. **Bepaal de massafunctie.** Nu je de amplitude van de radiale snelheid en de periode van de baan kent, kun je ook de massafunctie van de dubbelster berekenen. Deze wordt typisch door sterrenkundigen uitgedrukt in eenheden van de zonnemassa, M_{\odot} . Hoe interpreteer je de massafunctie?
4. **Bespreek de massafunctie.**

Indien deze opgave wordt gemaakt met een willekeurige waarde van de massafunctie, moet je eerst nadenken over de interpretatie van de massafunctie. Kun je deze interpretatie gebruiken om de orde grootte van de massafunctie te schatten en zo een willekeurige waarde te kiezen?

Ten slotte ga je de waarde van de massafunctie gebruiken om informatie over de individuele sterren te verkrijgen. Van de zichtbare hoofdcomponent van deze dubbelster weet men dat het een Witte Dwerg is. Dit is een belangrijk inzicht aangezien de verdeling van de massa's van Witte Dwerfen sterk gepiekt is op $0.6 M_{\odot}$. Je mag daarom aannemen dat $m_1 = 0.6 M_{\odot}$.

Met dit inzicht kun je de massafunctie oplossen voor m_2 bij verschillende waarden van de inclinatie, i ($i = 10^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 70^\circ, 90^\circ$). Plot een figuur van $m_2(i)$. Wat is de interpretatie van m_2 ? Herken je de invloed van de massafunctie in de plot? En van de factor $\sin^3(i)$?

Rapportering

Voor deze proef maak je een uitgetypt verslag, dat dezelfde structuur volgt als de verslagen van de proeven in de practicumzaal (doelstelling – theorie – meetopstelling – data – analyse – discussie – conclusie). Toon in je verslag zeker visueel hoe je de radiale snelheid, de periode en de onzekerheden erop bepaalt.

Wat je moet uploaden op Toledo is het volgende.

- 1) Je verslag (pdf of docx), met daarin zeker:
 - a. De namen van alle teamgenoten;
 - b. Een figuur waarop je toont hoe je de radiale snelheid bepaalt;
 - c. Een figuur waarop je toont hoe je de amplitude van de snelheid en de periode van de baan bepaalt;
 - d. Een figuur waarop je $m_2(i)$ toont.
- 2) Je code. (py of ipynb)

Er hoeft slechts één student van elk team de poster op te laden.