Signal Processing

190483865

Date of exam: January 8, 2024

Problem 1

Butterworth lavpasfilter

Problem 2

$$\frac{2000}{1000} = 2$$

6. order

Problem 3

Ja polerne er indenfor endhedcirklen.

Problem 4

2 poler og 2 nulpunkter

Problem 5

$$\frac{2}{3}$$

Problem 6

For at opfylde Nyquist Shanon kan x_2 rekonstrueres.

Problem 7

Transform:

$$\frac{3 + 2z^{-2}}{2 + 3z^{-2}}$$

The one matching:

$$2y(n) + 3y(n-2) = 3x(n) + 2x(n-2)$$

Problem 8

Fra tabelopslag: $G_3(z) = 1$

Problem 9

Barlett vindue der har 0.1 dB

Problem 10

b)

Problem 11

Udregn en 8-punkts DFT af $x(n)$. Bestem $X(1)$ og $X(4)$

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ 2 & n = 2 \\ 0 & n = 3 \\ 3 & n = 4 \\ 0 & n = 5 \\ 4 & n = 6 \\ 0 & n = 7 \end{cases}$$

Using:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{j2\pi mn}{N}}$$

$$N = 8$$

$$n = 0: \quad 1e^{\frac{j2\pi m0}{8}} = 1$$

$$n = 1: \quad 0e^{\frac{j2\pi m1}{8}} = 0$$

$$n = 2: \quad 2e^{\frac{j2\pi m2}{8}}$$

$$n = 3: \quad 0e^{\frac{j2\pi m3}{8}} = 0$$

$$n = 4: \quad 3e^{\frac{j2\pi m4}{8}} = 3e^{j\pi m}$$

$$n = 5: \quad 0e^{\frac{j2\pi m5}{8}} = 0$$

$$n = 6: \quad 4e^{\frac{j2\pi m6}{8}}$$

$$n = 7: \quad 0e^{\frac{j2\pi m7}{8}} = 0$$

$$X(m) = 1 + 2e^{\frac{j2\pi m2}{8}} + 3e^{j\pi m} + 4e^{\frac{j2\pi m6}{8}}$$

Find $X(1)$ og $X(4)$:

$$X(1) = 1 + 2e^{\frac{j2\pi(1)2}{8}} + 3e^{j\pi(1)} + 4e^{\frac{j2\pi(1)6}{8}}$$

$$= 1 + 2i - 3 - 4i = -2 - 2i$$

$$X(4) = 1 + 2e^{\frac{j2\pi(4)2}{8}} + 3e^{j\pi(4)} + 4e^{\frac{j2\pi(4)6}{8}} = 10$$

Problem 12

Betragt

$$3y(n+1) - 5y(n-1) = 3x(n) + 5x(n-3) - 5x(n-5)$$

a) Bestem overføringsfunktionen med positive eksponenter.

b) Er overføringsfunktionen stabil?

---

a)

$$3Y(z)z - 5Y(z)z^{-1} = 3X(z) + 5X(z)z^{-3} + 5X(z)z^{-5}$$

Faktoriser:

$$Y(z)(3z - 5z^{-1}) = X(z)(3 + 5z^{-3} + 5z^{-5})$$

Find $G(z)$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 5z^{-3} + 5z^{-5}}{3z - 5z^{-1}}$$

Forlæng med $\frac{z^5}{z^5}$:

$$\boxed{G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^5 + 5z^2 + 5}{3z^6 - 5z^4}}$$

b) Er den stabil?

Find polerne for funktionen:

$$3z^6 - 5z^4 = 0$$

$$p_1 = 0 \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = 0 \qquad p_4 = 0 \qquad p_5 = -\sqrt{5/3} = -1.29099 \qquad p_6 = \sqrt{5/3} = 1.29099$$

Alle polerne er ikke indenfor enhedscirklen, derfor er overføringsfunktionen $G(z)$ ikke stabil.

Problem 13

Benyt invers z-transformation til at finde $y(n)$ for overføringsfunktionen når $x(n) = \delta(n)$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,7z + 0,06}$$

Fra ZT1:

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = 1$$

$$Y(z) = 1 \cdot \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,7z + 0,06} = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,7z + 0,06}$$

Find polerne for funktionen:

$$p_1 = 0.1 \qquad p_2 = 0.6$$

Opstil de partielle brøker:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{k_1}{z - 0.1} + \frac{k_2}{z - 0.6} = \frac{z - 0.2}{(z - 0.1)(z - 0.6)}$$

Find koefficienterne ved brug af:

$$k_i = (z - p_i)\frac{Y(z)}{z}|_{z=p_i}$$

$$k_1 = (z - 0.1)\frac{z - 0.2}{(z - 0.1)(z - 0.6)}|_{z=0.1} = \frac{z - 0.2}{z - 0.6}|_{z=0.1}$$

$$= \frac{0.1 - 0.2}{0.1 - 0.6} = \frac{-0.1}{-0.5} = \frac{1}{5}$$

$$k_2 = (z - 0.6)\frac{z - 0.2}{(z - 0.1)(z - 0.6)}|_{z=0.6} = \frac{z - 0.2}{z - 0.1}|_{z=0.6}$$

$$= \frac{0.6 - 0.2}{0.6 - 0.1} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$$

Inset i $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1/4}{z - 0.1} + \frac{1/5}{z - 0.6}$$

Gang med z:

$$Y(z) = \frac{1/4z}{z-0.1} + \frac{1/5z}{z-0.6}$$

Invers z-transformation (ZT4):

$$y(n) = \frac{1}{4}0.1^n + \frac{4}{5}0.6^n$$

Problem 14

Betragt følgende 1. ordens Bessel lavpasfilter:

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

a) Transformer Bessel lavpasfiltret til et frekvensnormeret båndpasfilter med frekvensnormeret pasbåndsbredde $W_a = 0.1$

b) Design et lavpasfilter $H(z)$ ved brug af bilineær z-transformation med afskæringsfrekvens 2 kHz og samplefrekvens på 20 kHz.

---

a) Erstat s med $s = \frac{1}{W_a}(s + \frac{1}{s})$

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{0.1}(s+\frac{1}{s}) + 1}$$

For rigtig opstilling bruges:

$$H_{lp}(s) = \frac{A_0}{s+B_0}$$

$$H_{bp}(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

hvor

$$a_1 = W_a \cdot A_0 = 0.1 \qquad b_0 = 1 \qquad b_1 = W_a \cdot B_0 = 0.1$$

Båndpassfilteret bliver derfor:

$$H_{bp}(s) = \frac{0.1s}{s^2 + 0.1s + 1}$$

b) Find prewarping konstanten:

$$C = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) = \cot\left(\frac{2000 \cdot 1/20000}{2}\right) = 19.9833$$

Ud fra:

$$H(s) = \frac{A_1 s + A_0}{B_1 s + B_0}$$

Fåes den digitale bilineære 1. ordens overføringsfunktionen som:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

hvor

$$a_0 = \frac{A_0 + A_1 C}{B_0 + B_1 C} = \frac{1}{1 + 19.9833} = 0.04765$$

$$a_1 = \frac{A_0 - A_1 C}{B_0 + B_1 C} = \frac{1}{1 + 19.9833} = 0.04765$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{B_0 - B_1C}{B_0 + B_1C} = \frac{1 - 19.9833}{1 + 19.9833} = -0.90468$$

Det digitale lavpass filter bliver:

$$H(z) = \frac{0.04765 + 0.04765z^{-1}}{1 - 0.90468z^{-1}}$$

Problem 15

Bestem filterkoefficienterne for et FIR båndpasfilter med et rektangulært-vindue. Båndpassfiltret skal have en afskæringsfrekvenser $f_{a_1} = 1$ kHz og $f_{a_2} = 5$ kHz samt samplefrekvens 50 kHz. Filtret skal have 3 samples.

Hej der er både nævnt et båndpassfilter og et båndstopfilter i opgaven. Her laves et båndpass:

Find M:

$$N = 3 \qquad M = \frac{N-1}{2} = 1$$

For et båndpass

$$c_0 = 2T(f_{a_2} - f_{a_1}) \qquad c_m = \frac{1}{m\pi}\big(\sin(2\pi mTf_{a_2}) - \sin(2\pi mTf_{a_1})\big)$$

Rektangulært vindue:

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Med en vinduesfunktion er $c' = c_m w_m$

$$c_0 = 2 \cdot \frac{1}{50000}(5000 - 1000) = \frac{8000}{50000} = \frac{4}{25}$$

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{1\pi}\big(\sin(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{50000}5000) - \sin(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{50000}1000)\big)$$
$$= \frac{1}{\pi}\big(\sin(2\pi \cdot 0.1) - \sin(2\pi \cdot 0.02)\big) = 0.147203$$

Siden $w_m = 1$ når $-M \leq m \leq M$, vil $c'_m = c_m$.

Filterkoefficienterne kan nu findes ved $a_i = c'_{M-i}$:

$$a_0 = 0.147203$$
$$a_1 = \frac{4}{25}$$
$$a_2 = 0.147203$$