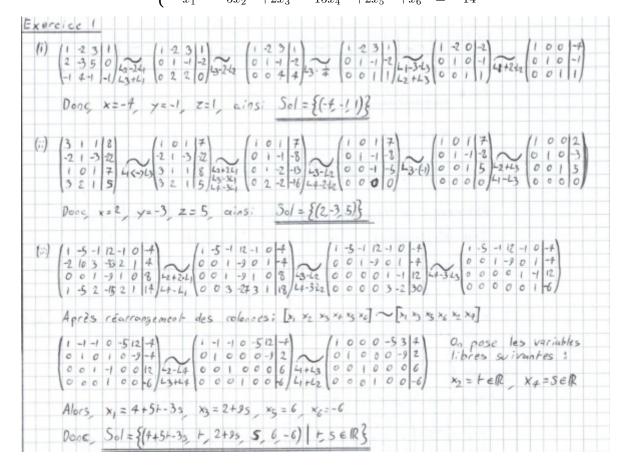
Exercice 1.

Résoudre les systèmes linéaires suivants, en travaillant avec les matrices correspondantes et leur forme échelonnée :

$$(i) \begin{cases} x & -2y & +3z & = 1 \\ 2x & -3y & +5z & = 0 \\ -x & +4y & -z & = 1 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} 3x & +y & +z & = 8 \\ -2x & +y & -3z & = -22 \\ x & +z & = 7 \\ 3x & +2y & +z & = 5 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x_1 & -5x_2 & -x_3 & +12x_4 & -x_5 & = -4 \\ -2x_1 & +10x_2 & +3x_3 & -33x_4 & +2x_5 & +x_6 & = 4 \\ x_3 & -9x_4 & +x_5 & = 8 \\ x_1 & -5x_2 & +2x_3 & -15x_4 & +2x_5 & +x_6 & = 14 \end{cases}$$



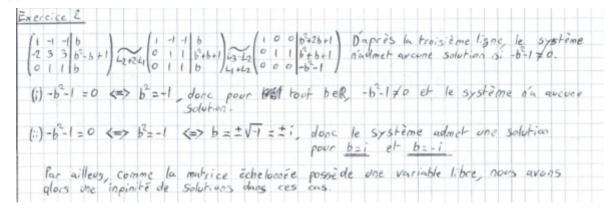
Exercice 2.

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x & -y & -z = b \\ -2x & +3y & +3z = b^2 - b + 1 \\ y & +z = b \end{cases}$$

où x,y,z sont les inconnues et b est un paramètre.

- (i) Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{R}$ le système admet-il une solution?
- (ii) Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{C}$ le système admet-il une solution?

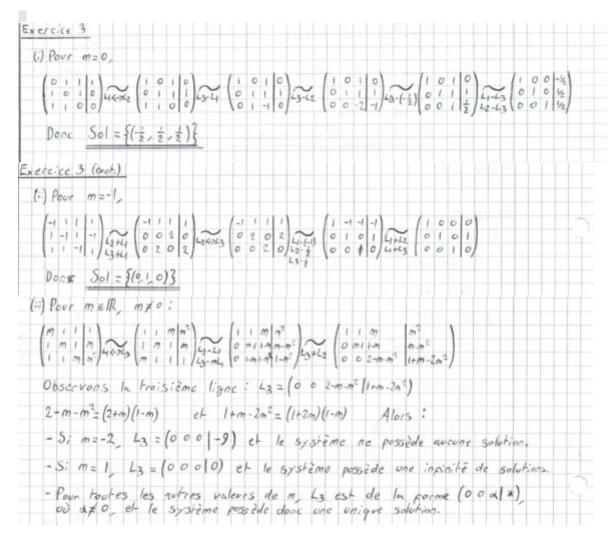


Exercice 3.

Considérons le système d'équations linéaires suivant pour les inconnues x, y et z:

$$\begin{cases} mx & +y & +z & = & 1\\ x & +my & +z & = & m\\ x & +y & +mz & = & m^2 \end{cases}$$

- (i) Résoudre ce système linéaire pour le cas particulier m=0
- (ii) Résoudre ce système linéaire pour le cas particulier m=-1
- (iii) Plus généralement, pour quelles valeur de $m \in \mathbb{R}$ ce système possède-t-il une solution? Dans le cas où une solution existe, est-elle unique?



Exercice 4.

Considérons les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 :

$$u_1 = (1, 2, 3), \quad u_1 = (4, 5, 6), \quad u_1 = (1, -1, 0)$$

- (i) À l'aide de la méthode du pivot, montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3
- (ii) À l'aide de la méthode du pivot, écrire (1,3,-6) dans la base $\{u_1,u_2,u_3\}$
- (iii) On note F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par u_1 et u_2 . Écrire F sous la forme

$$F = \{(x_1 x_2 x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$$

où a, b, c, d sont des réels à préciser.

Indications: Un sous-espace de \mathbb{R}^3 généré par deux vecteurs non-colinéaires forme un plan. Un plan peut être décrit par son équation cartésienne ax + by + cz = d. Ici, par définition d'un sous-espace vectoriel, $(0,0,0) \in F$. Par définition de F, on a également $u_1, u_2 \in F$. Avec ces informations, peut-on déterminer les coefficients a, b, c et d?

(i) Observons la matrice $A = (u_1 \ u_2 \ u_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On constate que la forme échelonnée de A met en évidence 3 pivots. Ainsi, le système linéaire $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=b$ admet une unique solution pour n'importe quel vecteur $b\in\mathbb{R}^3$.

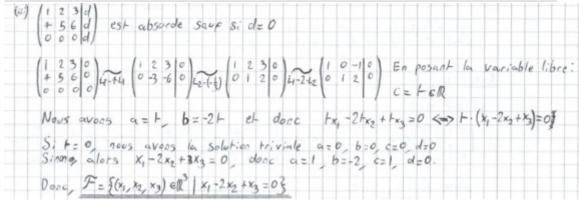
On en conclut que les vecteurs colonne de A (i.e. $\{u_1, u_2, u_3\}$) forment une base de \mathbb{R}^3 .

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & 1 \\ 2 & 5 & -1 & | & 3 \\ 3 & 6 & 0 & | & -6 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 3L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -3 & | & 1 \\ 0 & -6 & -3 & | & -9 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 3 & | & -11 \end{pmatrix} \underset{L_2 \cdot (-\frac{1}{3})}{\sim} \underset{L_3 \cdot \frac{1}{3}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de (1, 3, -6) dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ sont donc $(-\frac{26}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{11}{3})$.



Exercice 5.

Considérons $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

- (i) À l'aide de la méthode du pivot, montrer que $\mathcal{B} = \{1 + 2x + 3x^2, 4 + 5x + 6x^2, 1 x\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$
- (ii) À l'aide de la méthode du pivot, écrire $1+3x-6x^2$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal B$
- (iii) On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ engendré par $1+2x+3x^2$ et $4+5x+6x^2$. Écrire F sous la forme

$$F = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a\alpha_0 + b\alpha_1 + c\alpha_2 = d\}$$

où a,b,c,d sont des réels à préciser.

Est-ce qu'il y a un point que je ne remarque pas, où c'est exactement le même exercice que Exercice 4?

- (i) Même démonstration que 4.(i)
- (ii) $1 + 3x 6x^2 = -\frac{26}{3} \cdot (1 + 2x + 3x^2) + \frac{10}{3} \cdot (4 + 5x + 6x^2) \frac{11}{3} \cdot (1 x)$
- (iii) $F = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid \alpha_0 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0\}$