Exercice 1. (Matrice de rotation)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note ρ_θ l'application linéaire qui à un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ associe sa rotation par un angle trigonométrique θ.
On note aussi Pr_θ l'application linéaire qui à un vecteur $\vec{v}$ associe sa projection orthogonale sur la droite d_θ (la droite du plan passant par l'origine et formant un angle trigonométrique θ avec le vecteur $e_1 = (1,0)$).

1. Calculer directement les matrices associées à ces applications linéaires, $M(\rho_\theta)$ et $M(\mathrm{Pr}_\theta)$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que $M(\rho_{\theta+\theta'}) = M(\rho_\theta)M(\rho'_\theta)$
3. En déduire que l'application ρ_θ est inversible et calculer son inverse.
   L'application Pr_θ est-elle inversible ?

Exercice 1

1. $\rho_\theta(e_1) = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $\rho_\theta(e_2) = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$ donc $\underline{\underline{M(\rho_\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}}$

Soit C la base de $\mathbb{R}^2$ formée par $\{\rho_\theta(e_1), \rho_\theta(e_2)\}$.
On observe alors que d_θ est générée par $\left\{\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}\right\}$ dans C, et donc que $M_{C,C}(\mathrm{Pr}_\theta) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Considérons les matrices de passage :

$P_{can,C} = M(\rho_\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ et $P_{C,can} = M(\rho_{-\theta}) = \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Alors $M(\mathrm{Pr}_\theta) = P_{can,C} \cdot M_{C,C}(\mathrm{Pr}_\theta) \cdot P_{C,can} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\cdot\cos\theta + 0(-\sin\theta) & 1\cdot\sin\theta + 0\cdot\cos\theta \\ 0\cdot\cos\theta + 0\cdot(-\sin\theta) & 0\cdot\sin\theta + 0\cdot\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta + (-\sin\theta)\cdot 0 & \cos\theta\sin\theta + (-\sin\theta)\cdot 0 \\ \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\cdot 0 & \sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cdot 0\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}}}$$

2.
$$M(\rho_\theta)M(\rho_{\theta'}) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta' + (-\sin\theta)\sin\theta' & \cos\theta\cdot(-\sin\theta') + (-\sin\theta)\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \sin\theta\cdot(-\sin\theta') + \cos\theta\cos\theta'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}$$

$$= M(\rho_{\theta+\theta'})$$

3. Puisque pour $\theta = 0$, $M(\rho_0) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = Id_{\mathbb{R}^2}$, alors $M(\rho_{\theta-\theta}) = M(\rho_\theta)\cdot M(\rho_{-\theta}) = Id_{\mathbb{R}^2}$.

On conclut que $M(\rho_{-\theta}) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = M(\rho_\theta)^{-1}$.

Puisque Pr_θ est une projection, elle n'est pas injective et donc elle n'est pas inversible.

Exercice 2. (Endomorphisme de dérivation)
Considérons l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré au plus n en une variable à coefficients réels (noté aussi $\mathbb{R}_n[x]$). Soit D l'application de dérivation, qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

1. Calculer la matrice $M(D)$ associée à l'endomorphisme D dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$
2. Calculer $\mathrm{Im}(D)$ et $\mathrm{Ker}(D)$, puis vérifier le théorème du rang.
   Remarque : *Comparer à l'exemple de l'endomorphisme D de dérivation opérant dans l'espace* $\mathcal{P}$↕ *de polynômes de tout degré, vu au cours (§1, Chap. III).*

Exercice 2

1. $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $\ldots$, $D(x^n) = nx^{n-1}$

Ainsi, $M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

2. La dérivée d'un polynôme vaut 0 ssi le polynôme est de degré 0, donc $\mathrm{Ker}(D) = \langle \{1\} \rangle = \mathbb{R}_0[x]$ et $\dim \mathrm{Ker}(D) = 1$.

Tout polynôme de degré $n \neq 0$ aura par dérivée un polynôme de degré $n-1$, donc $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $\mathrm{rang}(D) = n$.

Ainsi, $\dim \mathrm{Ker}(D) + \mathrm{rang}(D) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 3. (Un changement de base)
Rappel : *On note* $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ *la matrice de l'application linéaire* $f : E \to F$*, où* $\mathcal{B}$ *est la base de départ (pour l'espace vectoriel E) et* $\mathcal{C}$ *est la base d'arrivée (pour l'espace vectoriel F).*

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Vérifier que ces deux matrices sont bien inverses l'une de l'autre.

Exercice 3

$|\mathcal{C}| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc il suffit de montrer que C est libre :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La matrice réduite obtenue ne contient pas de variable libre, donc C est libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Prenons $\{e_1, e_2, e_3\} := \mathrm{Can}(\mathbb{R}^3)$ et $\{c_1, c_2, c_3\} := C$.

$\left.\begin{array}{l} c_1 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ c_2 = e_2 + 2e_3 \\ c_3 = e_1 + e_2 - e_3 \end{array}\right\}$ donc, $M_{CB}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} e_1 = -\frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{2}c_3 \\ e_2 = c_1 - c_3 \\ e_3 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \end{array}\right\}$ donc, $M_{B,C}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Vérifions que $M_{B,C}(Id_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{CB}(Id_{\mathbb{R}^3}) = Id_{\mathbb{R}^3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+0+\frac{5}{2} & 1+0-1 & -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \\ -\frac{6}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2} & 2+0-1 & -\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}+\frac{2}{2}-\frac{5}{2} & -1+0+1 & \frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4. (L'image d'un vecteur)
Soient $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ et $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ deux bases de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$.
Considérons l'application linéaire

$$f : \quad \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$$
$$p(x) \mapsto p(x+1)$$

1. Pour le polynôme $p(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3$, calculer $f(p)$ dans la base $\mathcal{B}$
2. Pour le même polynôme, calculer $f(p)$ dans la base $\mathcal{C}$
3. Calculer la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$
4. Utiliser la question précédente pour déduire $f(p)$ dans la base $\mathcal{C}$

Exercice 4

1. $f(1+2x+4x^2+8x^3) = 1+2(x+1)+4(x+1)^2+8(x+1)^3 = 1+2(x+1)+4(x^2+2x+1)+8(x^3+3x^2+3x+1)$
$= 1+2x+2+4x^2+8x+4+8x^3+24x^2+24x+8$
$= 8x^3+28x^2+34x+15$

Donc $f(p) = (15, 34, 28, 8)$ dans B.

2. $(8x^3+28x^2+34x+15)$ ~~cond~~ $= 8\cdot(x^3+x^2+x+1)+20\cdot(x^2+x+1)+6\cdot(x+1)-19\cdot 1$

Donc $f(p) = (-19, 6, 20, 8)$ dans C.

3. Prenons $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} := B$. ~~Alors~~ et $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} := C$. Alors,

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= c_1 \\ b_2 &= -c_1 + c_2 \\ b_3 &= -c_2 + c_3 \\ b_4 &= -c_3 + c_2 \end{aligned}\right\} \text{Donc, } M_{CB}(Id_{P_3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} f(b_1) &= b_1 \\ f(b_2) &= b_1 + b_2 \\ f(b_3) &= b_1 + 2b_2 + b_3 \\ f(b_4) &= b_1 + 3b_2 + 3b_3 + b_4 \end{aligned}\right\} \text{Donc, } M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $M_{CB}(f) = M_{CB}(Id_{P_3}) \cdot M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $f(p)$ en base $C = M_{CB}(f) \cdot p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-4-16 \\ 0+2+4+0 \\ 0+0+4+16 \\ 0+0+0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 6 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$

Exercice 5. (Matrices de passage)
Considérons les bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Trouver les matrices de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, puis vérifier que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$

Exercice 5

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad b_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \tfrac{1}{2} b_1' + \tfrac{1}{2} b_2' \\ b_2 &= -\tfrac{1}{2} b_1' + \tfrac{1}{2} b_2' \end{aligned}\right\} P_{B,B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} b_1' &= b_1 - b_2 \\ b_2' &= b_1 + b_2 \end{aligned}\right\} P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{B,B'} \cdot P_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

Exercice 6. (Rang, noyau et image d'une matrice)
Déterminer le rang, le noyau et l'image de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On observe alors que : - la matrice réduite contient 3 pivots, donc $\mathrm{rang}(M) = 3$
- la matrice réduite contient 1 variable libre, donc $\dim \mathrm{Ker}(M) = 1$

L'image de M est formée par les colonnes des variables liées, donc

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Le noyau de M correspond aux solutions du système d'équations linéaires homogène associé à M, donc

$x_1 = -2s$, $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$ et $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$