Série 7.B

Exercice 1

- $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+^*$
  $(x,y) \longmapsto \left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \sqrt{x^2+y^2}\right)$

- $\chi^{-1}: \{0,1\}^E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$
  $\chi_A \longmapsto A := \{x \in E \mid \chi_A(x) = 1\}$

- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Exercice 2

Soit $f: A \to B$ bijective.

- Soient $E, E' \in \mathcal{P}(A)$ et $F, F' \in \mathcal{P}(B)$ tels que $F = f(E)$ et $F' = f(E')$.
  Si $F = F'$, alors $f(E) = f(E')$. Comme f est injective, $\forall x, x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
  Alors, $f(E) = f(E') \Rightarrow E = E'$ donc $f: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $E \mapsto f(E)$ est injective.

- Soit $F \in \mathcal{P}(B)$. Comme f est surjective, $\forall y \in F, \exists x \in A, y = f(x)$.
  Alors, $\exists E \in \mathcal{P}(A)$, défini par $E = \{x \in A \mid \exists y \in F, f(x) = y\}$, tel que $f(E) = F$.
  Donc, $f: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $E \mapsto f(E)$ est surjective.

Comme $f: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $E \mapsto f(E)$ est injective et surjective, on conclut qu'elle est bijective.

Exercice 3

1. - Réflexivité : $(x,y) \mathcal{R} (x,y)$ est vraie car $x = x$ et $y \leq y$.

   - Transitivité : Soient $(x,y), (a,b), (s,t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ et $(a,b)\mathcal{R}(s,t)$.
     Alors $x < a$ ou $x = a$ et $y \leq b$, et $a < s$ ou $a = s$ et $b \leq t$.

     Si $x < a$: Si $a < s$ alors $x < s$
     : Si $a = s$ et $b \leq t$ alors $x < s$
     Si $x = a$ et $y \leq b$: Si $a < s$ alors $x < s$
     Si $a = s$ et $b \leq t$ alors $x = s$ et $y \leq t$
     Donc $(x,y)\mathcal{R}(s,t)$

   - Antisymétrie : Soient $(x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ et $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$.

     Si $x < a$: Si $a < x$ on a une contradiction
     Si $a = x$ et $b \leq y$ on a une contradiction
     Si $x = a$ et $y \leq b$: Si $a < x$ on a une contradiction
     Si $a = x$ et $b \leq y$ alors $b = y$
     Donc $a = x$ et $b = y$, donc $(x,y) = (a,b)$.

2. Divisibilité sur $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y$ ssi $\exists a \in \mathbb{N}$ t.q. $x \cdot a = y$
   - Réflexivité : $x\mathcal{R}x$ car $x \cdot 1 = x$

   - Transitivité : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \iff \exists a, b \in \mathbb{N}, x \cdot a = y$ et $y \cdot b = z$
     $\iff \exists c \in \mathbb{N}, c := a \cdot b, x \cdot c = z$
     $\iff x\mathcal{R}z$

   - Antisymétrie : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \iff \exists a, b \in \mathbb{N}, x \cdot a = y$ et $y \cdot b = x$
     $\iff y \cdot a \cdot b = y$
     (car $a, b \in \mathbb{N}$) $\iff a = b = 1$
     $\iff x = y$

Exercice 3 (cont.)

3. - Réflexivité : $p\mathcal{R}p$, car $p=p^1$.

- Transitivité : $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}s \iff q=p^k$ et $s=q^{k'}$
$\iff s=(p^k)^{k'}=p^{(k\cdot k')}$
(car $k\cdot k'\in\mathbb{N}$) $\iff p\mathcal{R}s$

- Antisymétrie : $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p \iff q=p^k$ et $p=q^{k'}$
$\iff q=q^{(k\cdot k')}$
(car $k,k'\in\mathbb{N}$) $\iff k=k'=1$
$\iff p=q$

4. - Réflexivité : $x\mathcal{R}x$, car $\tan x=\tan x$, donc $\tan x\leqslant \tan x$

- Transitivité : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \iff \tan x\leqslant\tan y$ et $\tan y\leqslant \tan z$.
Comme $\leqslant$ est transitive, $\tan x\leqslant\tan z$ donc $x\mathcal{R}z$.

- Antisymétrie : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \iff \tan x\leqslant\tan y$ et $\tan y\leqslant\tan x$.
Comme $\leqslant$ est antisymétrique, $\tan x=\tan y$, donc $x=y$
(puisque nous regardons tan sur $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$).

Exercice 4

Soit g une bijection de $(0,1)$ dans $(0,1)$. Soit $f:(0,1)\to[0,1)$ une modification de g telle qu'il existe $\alpha\in(0,1)$, $f(\alpha)=0$.

Mais, comme g bijective, il existe $\beta\in(0,1)$ tel que $f^{-1}(\beta)=g^{-1}(\beta)=\alpha$. Alors on aurait $f(\alpha)=\beta$ et $f(\alpha)=0$, donc f associe à un point de $(0,1)$ deux éléments de $[0,1)$ et ainsi f n'est pas une application.

Le même argument peut être utilisé pour $f:(0,1)\to(0,1]$ et on conclut donc que $f:(0,1)\to[0,1]$ ne peut pas être surjective, donc il n'existe pas de bijection entre $(0,1)$ et $[0,1]$.

Exercice 5

1. Soient $A,B\subset E$. Alors $h(A)=E\setminus g(F\setminus f(A))$ et $h(B)=E\setminus g(F\setminus f(B))$.
Comme f est injective, si $A\subset B$ alors $f(A)\subset f(B)$, donc $F\setminus f(B)\subset F\setminus f(A)$.
Comme g est injective, si $F\setminus f(B)\subset F\setminus f(A)$ alors $g(F\setminus f(B))\subset g(F\setminus f(A))$,
donc $E\setminus g(F\setminus f(A))\subset E\setminus g(F\setminus f(B))$, i.e. $h(A)\subset h(B)$.

2. - Montrons que h est surjective :

Soit $y\in F_1\cup F_2$: Si $y\in F_1$, comme f est surjective $\exists x\in E_1, y=f(x)$
Si $y\in F_2$, comme g est surjective $\exists x\in E_2, y=g(x)$

Donc $\forall y\in F_1\cup F_2$, $\exists x\in E_1\cup E_2$, $y=h(x)$.

- Montrons que h est injective :

Soient $y,y'\in F_1\cup F_2$, ~~comme~~ tels que $y=y'$, alors $y\in F_1\iff y'\in F_1$ et $y\in F_2\iff y'\in F_2$.

Si $y\in F_1$, comme f est bijective, $f^{-1}(y)=f^{-1}(y')$
Si $y\in F_2$, comme g est bijective, $g^{-1}(y)=g^{-1}(y')$

Donc, $\forall x,x'\in E_1\cup E_2$, $h(x)=h(x')\Rightarrow h^{-1}(h(x))=h^{-1}(h(x'))\iff x=x'$.

On conclut alors que h est bijective.