Logique et Théorie des Ensembles
Série 04-B

Exercice 1. Montrer que $(A \implies B) \implies \big[(C \implies A) \implies (C \implies B) \big]$.

Par table de vérité, avec $\bigstar := (A \implies B) \implies \big[(C \implies A) \implies (C \implies B) \big]$:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$C \Rightarrow A$	$C \Rightarrow B$	$(C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$	$\bigstar$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

On constate donc que $\bigstar$ est VRAIE pour n'importe quelle valeur logique de A, B, C.

Exercice 2. Les assertions $A \implies (B \implies C)$ et $(A \implies B) \implies C$ sont-elles équivalentes ?

La démonstration est directe avec une table de vérité, mais j'aimerais bien essayer une autre approche :

En utilisant $(X \implies Y) \iff (X \wedge Y) \vee \neg X$:

$$\begin{aligned}
[A \implies (B \implies C)] &\iff (A \wedge ((B \wedge C) \vee \neg C)) \vee \neg A \\
&\iff ((A \wedge (B \wedge C)) \vee (A \wedge \neg C)) \vee \neg A \\
&\iff (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg C) \vee \neg A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(A \implies B) \implies C] &\iff (((A \wedge B) \vee \neg A) \wedge C) \vee \neg((A \wedge B) \vee \neg A) \\
&\iff (((A \wedge B) \vee \neg A) \wedge C) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge A) \\
&\iff (((A \wedge B) \wedge C) \vee (\neg A \wedge C)) \vee ((\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge A)) \\
&\iff (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge A)
\end{aligned}$$

Comme $[(A \wedge \neg C) \vee \neg A] \not\Leftrightarrow [(\neg A \wedge C) \vee (\neg B \wedge A)]$, on peut conclure que les deux assertions ne sont pas équivalentes.

Exercice 3. Quelle est la contraposée des implications suivantes ?
Même question avec la négation.

1. p divise ab implique (p divise a ou p divise b)
2. $E \neq \emptyset$ implique qu'il existe a tel que $a = \min(E)$
3. Si f est continue et si I est un segment, alors f est bornée sur I

1. Contraposée : (p ne divise ni a ni b) implique p ne divise pas ab
   Négation : p divise ab et (p ne divise ni a ni b)
2. Contraposée : Il n'existe aucun a tel que $a = \min(E)$ implique que $E = \emptyset$
   Négation : $E \neq \emptyset$ et il n'existe aucun a tel que $a = \min(E)$
3. Contraposée : Si f n'est pas bornée sur I, alors f n'est pas continue ou I n'est pas un segment
   Négation : f est continue et I est un segment, mais f n'est pas bornée sur I

Exercice 4. À la fin du semestre, Sofia, Corentin et Pierre sont tellement soulagés que ce soit terminé qu'ils décident de fêter cela en se faisant tatouer.
Quand ils arrivent à l'atelier, il reste cinq tatouages temporaires : trois marmottes et deux serpents.
Ils ferment les yeux et le tatoueur choisit au hasard un motif pour chacun, qu'il place sur leurs fronts. En sortant du magasin, les trois ouvrent les yeux (chacun découvre donc le tatouage des deux autres, sans savoir ce qu'il a lui-même).

Sofia dit : “Impossible de savoir quel tatouage j'ai”.

Corentin réfléchit : “Je ne peux pas non plus déduire ce que j'ai sur le front”.

Pierre déclare, sans même regarder les deux autres : “Je suis donc certain de mon tatouage”.

Quel est le tatouage de Pierre ? Justifier.

Pour la lisibilité, posons les propositions suivantes :

S_s := "Sofia a un tatouage de serpent",

C_s := "Corentin a un tatouage de serpent",

P_s := "Pierre a un tatouage de serpent",

Par les conditions de l'énoncé, si une de ces propositions est FAUSSE, alors le tatouage de la personne est une marmotte.

Lors de l'observation de Sofia, le tatouage de Sofia serait certain si Corentin et Pierre étaient tatoués tous les deux d'un serpent. En effet, comme l'atelier ne disposait que de deux tatouages de serpent,

$$C_s \wedge P_s \implies \neg S_s$$

Comme Sofia est incertaine, au moins un des deux est tatoué d'une marmotte.

$$\neg(C_s \wedge P_s) \iff \neg C_s \vee \neg P_s$$

Puisque Corentin est conscient de ce fait, il serait donc certain d'être tatoué d'une marmotte s'il voyait Pierre avec un serpent, car

$$(\neg C_s \vee \neg P_s) \wedge P_s \iff \neg C_s$$

L'incertitude de Corentin implique donc $\neg P_s$, et c'est par ce même raisonnement que Pierre peut déduire qu'il est <u>tatoué d'une marmotte</u>.

Exercice 5. On considère le connecteur logique de Sheffer $\Diamond$ défini par
$A \Diamond B = \neg(A \vee B)$. Exprimer $\neg, \vee, \wedge, \implies$ en terme du connecteur $\Diamond$ uniquement.

Au passage, est-ce que le connecteur de Sheffer n'est pas NAND, noté | ou ↑, plutôt que le NOR introduit ici ?

$\neg A = \neg A \wedge \neg A = \neg(A \vee A) = A \Diamond A$

$A \vee B = \neg(\neg(A \vee B)) = \neg(A \Diamond B) = (A \Diamond B) \Diamond (A \Diamond B)$

$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg A \Diamond \neg B = (A \Diamond A) \Diamond (B \Diamond B)$

$A \implies B = (A \wedge B) \vee \neg A = (A \Diamond A) \Diamond (B \Diamond B) \vee (A \Diamond A)$
$= [(A \Diamond A) \Diamond (B \Diamond B) \Diamond (A \Diamond A)] \Diamond [(A \Diamond A) \Diamond (B \Diamond B) \Diamond (A \Diamond A)]$

Et puisqu'il reste de la place sur la page, amusons-nous à continuer :

$A \iff B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) = (A \wedge B) \vee \neg(A \vee B) = ((A \Diamond A) \Diamond (B \Diamond B)) \vee (A \Diamond B)$
$= [((A \Diamond A) \Diamond (B \Diamond B)) \Diamond (A \Diamond B)] \Diamond [((A \Diamond A) \Diamond (B \Diamond B)) \Diamond (A \Diamond B)]$

$A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) = \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg B) = (\neg A \Diamond B) \vee (A \Diamond \neg B)$
$= ((A \Diamond A) \Diamond B) \vee (A \Diamond (B \Diamond B)) = [((A \Diamond A) \Diamond B) \Diamond (A \Diamond (B \Diamond B)] \Diamond [((A \Diamond A) \Diamond B) \Diamond (A \Diamond (B \Diamond B)]$