Exercice 1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et définissons

$$\overline{E} := \{a \in \mathbb{R} : \exists (u_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ convergeant vers } a\}$$

(i) Montrer que $E \subset \overline{E}$

(ii) Montrer que $\overline{(0,1)} = \overline{[0,1]} = [0,1]$

(iii) Montrer que $\overline{E}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ qui se situent à une distance arbitrairement proche d'un point de E, c'est-à-dire

$$\overline{E} = \{a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, |a - x| < \varepsilon\}$$

Exercice 2. Étudier les points de continuité des fonctions suivantes.

(i) La fonction $f(x) = \frac{x-5}{x+3}$ de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ dans $\mathbb{R}$

(ii) La fonction $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

(iii) La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. La fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^n-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 3. (Théorème des suites alternées)

Soit (u_n) une suite décroissante qui converge ver 0, et posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

(i) Montrer que (S_{2n}) est décroissante et (S_{2n+1}) croissante. En déduire que (S_n) converge.

(ii) Montrer que pour tout $m \geq n, |S_n - S_m| \leq u_{n+1}$ (*Indication :* utiliser le fait que $u_k - u_{k+1} \geq 0$). En déduire que si $S = \lim S_n$, alors $|S_n - S| \leq u_{n+1}$.

(iii) Montrer que la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.
(Vous montrerez durant le second semestre que la limite vaut $\log 2$.)

Exercice 4. Soit $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ une fonction continue en 0 telle que $g(0) = 0$.
Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $a \in E$. Montrer que f est continue en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq g(\varepsilon)$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $|f|$ est continue.

(ii) Donner un exemple de fonction f telle que $|f|$ est continue mais f est discontinue en tout point.

(iii) Exprimer $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$ en utilisant la valeur absolue.

(iv) Montrer que si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont également continues.

Exercice 6. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer qu'il existe une racine $c \in \mathbb{R}$ telle que $P(c) = 0$ (*Indication :* on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires). Pour tout $d \in \mathbb{N}$, donner un exemple de polynôme de degré $2d$ qui n'admet pas de racine sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (Théorème du point fixe)
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
Indication : utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.