Exercice 1. (Nombres complexes)

1. Écrire en forme algébrique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{i(3+2i)^2}, \quad \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}-i}.$$

2. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$-3i, \quad \sqrt{3}+i, \quad 3i(2+i).$$

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec la formule habituelle pour résoudre les équations générales du second degré. Vérifier les solutions trouvées.
   — $z^2 + 2z + 3 = 0$,
   — $z^2 + 2iz - 3 = 0$.
4. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en remplaçant $z = a + ib$

$$z + 3i + Re(z)(i + (Im(z))^2) = 0$$

5. Calculer le conjugué en forme algébrique $z = a + ib$ des nombres complexes suivants :

$$\frac{5+2i}{1-i}, \quad \frac{\sqrt{2}-i}{2+i}, \quad \frac{2-i}{i}.$$

6. Montrer la proposition suivante : $\forall z \in \mathbb{C}$:
   — si $z \neq 0$: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$;
   — $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$;
   — $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Exercice 2. (Coordonnées polaires)

(a) Montrer que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\big)$$

où $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est l'écriture du nombre complexe z en coordonnées polaires.

(b) Déduire une formule analogue pour $\frac{z_1}{z_2}$ lorsque $z_2 \neq 0$.

(c) Représenter graphiquement les solutions d'équation $z^3 = 1$ (racines cubiques de l'unité).

Exercice 3. (Propriétés d'espace vectoriel)
Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Démontrer que les propriétés suivantes sont satisfaites

1. (a) L'élément neutre pour l'addition est unique ;
   (b) $\forall v \in V$, l'opposé $(-v)$ de v est unique ;
2. (a) $0_K \cdot v = 0_V \quad \forall v \in V$;
   (b) $\lambda \cdot 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in K$;
3. L'opposé de v, noté $-v$, satisfait $-v = (-1) \cdot v$ avec $v \in V$ et $-1 \in K$;
4. $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K$ ou $v = 0_V$.

NB : Cet exercice figure en tant que Proposition 1.1.1 du polycopié, mais vous pouvez essayer de trouver vous-mêmes les preuves avant de regarder le polycopié.

Exercice 4. (Un exemple d'espace vectoriel)
Définir les opérations $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{C}^n$ et vérifier que cela munit $\mathbb{C}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Détailler l'associativité de la multiplication par les scalaires.

Exercice 5. (Est ce un sous-espace vectoriel ? Trouver une famille génératrice.)

1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$? Si oui, trouver une famille génératrice.
   (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$
   (b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - y = 0\}$

   (a) Oui : Il s'agit de la droite dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = x$.
   $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ est une famille génératrice de cette droite.

   (b) Non : $(2, 2) \in E$, mais $2 \cdot (2, 2) = (4, 4) \notin E$, donc E n'est pas clos pour la multiplication par un scalaire (il est également facile de vérifier qu'il n'est pas clos pour l'addition), par conséquent E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$? Si oui, trouver une famille génératrice.
   (a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}$
   (b) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y = 0\}$
   (c) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
   (d) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{C}\}$
   (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y^2 - x^3 = 0\}$

   (a) Non : $0_{\mathbb{C}^3} = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à E

   (b) Oui : Il s'agit du "plan" formé par les "axes" x et z.
   $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}i\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\i\end{smallmatrix}\right)\right\}$ est génératrice de ce sous-espace vectoriel.

   (c) Non : Si $v \in E$, alors $i \cdot v \notin E$, donc E n'est pas clos pour la multiplication par un scalaire dans $\mathbb{C}$.

   (d) Oui : Il s'agit du plan formé par les points $(0, 0, 0), (1, 2, 3), (i, 2i, 3i)$.
   $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}i\\2i\\3i\end{smallmatrix}\right)\right\}$ est génératrice de ce plan.

   (e) Non : $(1, 1, 1) \in E$, mais $(1, 1, 1) + (1, 1, 1) = (2, 2, 2) \notin E$, donc E n'est pas clos pour l'addition. (Il n'est également pas clos pour la multiplication par un scalaire.)

Exercice 6. L'objectif de cet exercice est de vérifier que toutes les propriétés demandées dans la définition de sous-espace vectoriel sont nécessaires.

1. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &\forall u \in U, \forall v \in U, \quad u+v \in U, \\ &\forall u \in U, \quad -u \in U \end{aligned}$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Le sous-ensemble $U = \mathbb{Z}^2$ satisfait les conditions données :
Soient $u = (a, b), v = (c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} &(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in U \\ &- u = (-a, -b) \in U \end{aligned}$$

En revanche, $[\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U]$ n'est pas vérifiée, il suffit de prendre $\lambda = \frac{1}{a}$

2. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Le sous-ensemble $U = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$ satisfait les conditions données :
Soient $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot (x, |x|) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot |x|) = (\lambda x, |\lambda x|) \in U$$

En revanche, $[\forall u \in U, \quad -u \in U]$ n'est pas vérifiée, car $(-x, -|x|) \notin U$.

3. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &\forall u \in U, \forall v \in U, \quad u+v \in U, \\ &\forall u \in U, \forall \lambda > 0, \quad \lambda \cdot u \in U, \end{aligned}$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Le sous-ensemble $U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}_+\}$ satisfait les conditions données :
Soient $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2), \quad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned} &u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in U \\ &\forall \lambda > 0, \quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in U \end{aligned}$$

En revanche, $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ pas un élément de U.

L'exercice suivant est **facultatif**. Il ne sera pas corrigé lors de la séance d'exercices, mais sa solution sera postée sur Moodle.

Exercice 7. (Un corps à 3 éléments)
L'objectif de cet exercice est de construire un corps fini.
Rappelons que le reste de la division d'un entier n par 3 est l'unique entier r entre 0 et $3-1$ (compris) tel que $n-r$ soit divisible par 3. Par exemple, le reste de 5 est 2, le reste de 39 est 0, le reste de -2 est 1, et le reste de votre numéro d'étudiant est votre groupe pour les séances d'exercices.

Considérons $K = \{0, 1, 2\}$ et définissons les opérations

$$a \oplus b = \text{le reste de la division de } a + b \text{ par } 3$$
$$a \otimes b = \text{le reste de la division de } a \cdot b \text{ par } 3$$

Remplir les tables d'addition et de multiplication suivantes.

$\oplus$	0	1	2
0			
1			
2			

$\otimes$	0	1	2
0			
1			
2			

Montrer l'existence des neutres additif et multiplicatif. Montrer que tout élément admet un inverse pour $\oplus$, et tout élément non-nul admet un inverse pour $\otimes$.
Vérifier que l'addition est commutative.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

— 0 est l'élément neutre pour $\oplus$, car $\forall x \in \{0, 1, 2\}, 0 \oplus x = x \oplus 0 = x$.
— 1 est l'élément neutre pour $\otimes$, car $\forall x \in \{0, 1, 2\}, 1 \otimes x = x \otimes 1 = x$.
— On observe que :
  — $0 \oplus 0 = 0$, donc 0 est l'inverse pour $\oplus$ de 0
  — $1 \oplus 2 = 0$, donc 2 est l'inverse pour $\oplus$ de 1
  — $2 \oplus 1 = 0$, donc 1 est l'inverse pour $\oplus$ de 2
— On observe que :
  — $1 \otimes 1 = 1$, donc 1 est l'inverse pour $\otimes$ de 1
  — $2 \otimes 2 = 1$, donc 2 est l'inverse pour $\otimes$ de 2
— Enfin, la table d'addition étant symétrique selon sa diagonale, on peut en déduire que l'addition est commutative (la même observation peut être faite pour la multiplication).