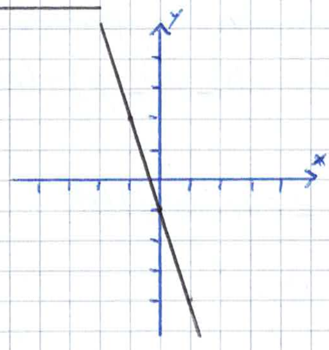
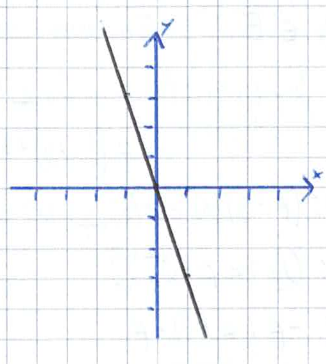
Exercice 1

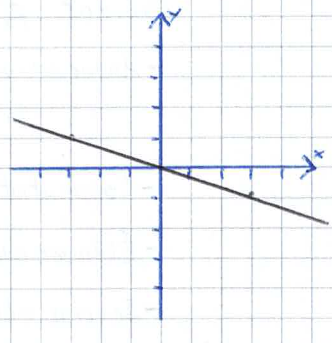
(a)



$3x + y + 1 = 0$
$y = -3x - 1$

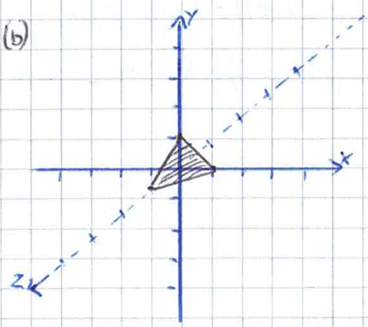


$3x + y = 0$
$y = -3x$

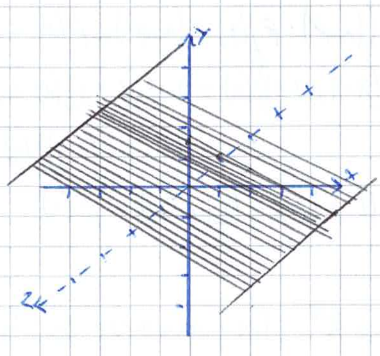


$x + 3y = 0$
$y = -\frac{x}{3}$

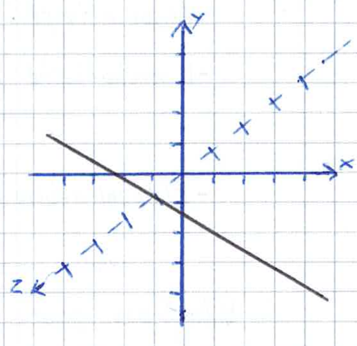
(b)



$x + y + z = 1$
Le plan passe par $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$



$x + 2y = 3$
Le plan est formé par $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ et l'axe z



$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ z = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

La section $z=1$ du plan $x+2y=3$

Exercice 2

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (-L_2) \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - z \\ z = z \end{array}$$

$\underline{Sol = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - z, z), z \in \mathbb{R}\}}$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 6 & (-L_1) \\ 2x + 3y = 0 & (-2 \cdot L_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

L_2 et L_3 présentent une contradiction.

$\underline{Sol = \emptyset}$

Exercice 3

1. Vérifions pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ les axiomes de l'addition :

Soient $f, g, h \in E$. En bleu sont soulignées les opérateurs usuels dans $\mathbb{R}$

- Associativité : $(f+(g+h))(x) = f(x) \underline{+} (g+h)(x) = f(x) \underline{+} g(x) \underline{+} h(x) = (f+g)(x) \underline{+} h(x)$
$= ((f+g)+h)(x)$
- Commutativité : $(f+g)(x) = f(x) \underline{+} g(x) = g(x) \underline{+} f(x) = (g+f)(x)$
- Élément neutre : $0_E := f : \begin{matrix}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0\end{matrix}$
- Inverse additif : $-f := (-1) \cdot f$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En bleu sont soulignés les opérateurs usuels dans $\mathbb{R}$

- Associativité : $((\lambda \underline{\cdot} \mu) \cdot f)(x) = (\lambda \underline{\cdot} \mu) \underline{\cdot} f(x) = \lambda \underline{\cdot} (\mu \underline{\cdot} f(x)) = \lambda \underline{\cdot} (\mu \cdot f)(x)$
- Distributivité : $(\lambda \cdot (f+g))(x) = \lambda \underline{\cdot} (f+g)(x) = \lambda \underline{\cdot} (f(x) \underline{+} g(x)) = \lambda \underline{\cdot} f(x) \underline{+} \lambda \underline{\cdot} g(x)$
$= ((\lambda \cdot f) + (\lambda \cdot g))(x)$
- Élément neutre : $(1 \cdot f)(x) = 1 \underline{\cdot} (f(x)) = f(x)$

2. Vérifions pour $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les axiomes de l'addition :

Soient $u, v, w \in E$.

- Associativité : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + (v_n + w_n))_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((u_n + v_n) + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$= (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Commutativité : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\cancel{0_E = u}$ L'élément neutre est la suite u où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$
- L'inverse additif est $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1) \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Associativité : $(\lambda \cdot \mu) \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\lambda \cdot \mu) \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot \mu \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot (\mu \cdot u_n))_{n\in\mathbb{N}}$
$= \lambda \cdot (\mu \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Distributivité : $\lambda \cdot (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot (u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot u_n + \lambda \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\lambda \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Élément neutre : $1 \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4

1. **Oui :** L'élément neutre additif 0_E est 0, car pour tout élément x de E (Comme $E=\{0\}$, $x=0$) $0+x=x$, et $0\in E$.

2. **Non :** E n'admet pas d'inverse additif : $\cancel{\forall x}\ \exists x\in E,\ [x+(-x)=0_E]$ ~~n'admet~~ n'a pas de solution

3. **Non :** L'opération de multiplication par un scalaire n'est pas bien définie dans $\mathbb{R}$: par exemple, $\underbrace{0.3}_{\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{2}_{\in E}\notin E$

4. **Non :** Aucun axiome n'est vérifié. Ex: Élément neutre de la multiplication par un scalaire :

$$1\cdot(x,y)=(x,0)\neq(x,y)$$

5. Si $b\neq 0$, l'élément neutre défini pour l'exercice 3.1 n'appartient pas à E, et par conséquent E n'est pas un espace vectoriel. $\Longrightarrow$ **Non**

Si $b=0$: Soient $f,g,h\in E$, et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

- $f(a)+(g+h)(a)=0+g(a)+h(a)=0+0+0=(f(a)+g(a))+h(a)=(f+g)(a)+h(a)$
- $f(a)+g(a)=0+0=g(a)+f(a)$
- $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 0\end{array}$ appartient à E
- $f(a)+(-f(a))=0+(-0)=0\ \cancel{=0_E}$
- $(\lambda\cdot\mu)\cdot f(a)=(\lambda\cdot\mu)\cdot 0=\lambda\cdot(\mu\cdot 0)=\lambda\cdot(\mu\cdot f(a))$
- $\lambda\cdot(f+g)(a)=\lambda\cdot(f(a)+g(a))=\lambda\cdot(0+0)=\lambda\cdot 0+\lambda\cdot 0=\lambda\cdot f(a)+\lambda\cdot g(a)$
- $1\cdot f(a)=1\cdot 0=0=f(a)$

$\Longrightarrow$ **Oui**

6. **Oui :** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, Soient $p=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n$ et $p'=\alpha_0'+\alpha_1'x+\alpha_2'x^2+\ldots+\alpha_n'x^n$

Alors : $\lambda\cdot(p+p')=\lambda\cdot(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n+\alpha_0'+\alpha_1'x+\alpha_2'x^2+\ldots+\alpha_n'x^n)$

$=\lambda\cdot(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\ldots+\alpha_nx^n)+\lambda\cdot(\alpha_0'+\alpha_1'x+\alpha_2'x^2+\ldots+\alpha_n'x^n)$

$=\lambda\cdot p+\lambda\cdot p'$

Exercice 5

1. Non : L'élément neutre $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F.

2. Oui :

- Pour $\lambda = \mu = 0$, $0_E = (0,0,0) = (\lambda u + \mu v) \in F$
- $(\lambda u + \lambda v) + (\lambda' u + \mu' v) = \lambda u + \mu v + \lambda' u + \mu' v = \Big[\underbrace{(\lambda + \lambda')}_{\in \mathbb{R}} u + \underbrace{(\mu + \mu')}_{\in \mathbb{R}} v\Big] \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot (\lambda u + \mu v) = \alpha \cdot \lambda u + \alpha \cdot \mu v = \Big[\underbrace{(\alpha \cdot \lambda)}_{\in \mathbb{R}} u + \underbrace{(\alpha \cdot \mu)}_{\in \mathbb{R}} v\Big] \in F$

F est donc non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

3. Si $a \neq 0$, $0_E \notin F$, donc F n'est sous-espace vectoriel de E. $\Longrightarrow$ Non

Si $a = 0$, Oui :

- $0_E = f : \begin{array}{l} [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \in F$
- $f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, donc $(f(0) + g(0)) \in F$
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$, donc $(\lambda \cdot f(0)) \in F$

F est alors non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

4. (a) Non : Soit f, $|f(x)| = M$, et g, $|g(x)| > 0$, alors $f, g \in F$ mais $f + g \notin F$

(b) Oui :

- $0_E = f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \in F$
- Si f et g sont bornées, alors $\min(f)$, $\max(f)$, $\min(g)$, $\max(g)$ existent.

  Par conséquent, $\min(f+g) = \min(f) + \min(g)$ et $\max(f+g) = \max(f) + \max(g)$ existent.

  Ainsi, $(f+g)$ est bornée, et appartient donc à F.
- Si f est bornée, alors $\min(f)$ et $\max(f)$ existent.

  Par conséquent, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\min(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \min(f)$ et $\max(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \max(f)$ existent.

  Ainsi, $(\lambda \cdot f)$ est bornée, et appartient donc à F.

5. Oui : Fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$ (Dans E : ~~polynômes de degré~~ $\alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

- $0_E = f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array} \in F$, car $f(-0) = 0 = -0 = -f(0)$
- $f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x))$, Donc $(f+g) \in F$
- $\lambda \cdot f(-x) = \lambda \cdot (-f(x)) = -(\lambda \cdot f(x))$, Donc $(\lambda \cdot f) \in F$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Oui : $F = U + V$: Somme de sous-espaces vectoriels

- Puisque U et V sont sous-espaces vectoriels de E, $0_E \in U$ et $0_E \in V$.

  Donc, $0_E = (\overset{\in U}{0_E} + \overset{\in V}{0_E}) \in F$.
- $(u + v) + (u' + v') = \Big[\underbrace{(u + u')}_{\in U} + \underbrace{(v + v')}_{\in V}\Big] \in F$, car U et V sont s.e.v. de E.
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (u + v) = \Big[\underbrace{(\lambda u)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda v)}_{\in V}\Big] \in F$, car U et V sont s.e.v. de E.