Exercice 1

1. $P_\theta(e_1) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$, $P_\theta(e_2) = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ donc $\underline{\underline{M(P_\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}}$

Soit C la base de $\mathbb{R}^2$ formée par $\{P_\theta(e_1), P_\theta(e_2)\}$.

On observe alors que d_θ est générée par $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ dans C, et donc que $M_{C,C}(Pr_\theta) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Considérons les matrices de passage:

$P_{can,C} = M(P_\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ et $P_{C,can} = M(P_{-\theta}) = \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Alors $M(Pr_\theta) = P_{can,C} \cdot M_{C,C}(Pr_\theta) \cdot P_{C,can} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\cdot\cos\theta + 0\cdot(-\sin\theta) & 1\cdot\sin\theta + 0\cdot\cos\theta\\ 0\cdot\cos\theta + 0\cdot(-\sin\theta) & 0\cdot\sin\theta + 0\cdot\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta + (-\sin\theta)\cdot 0 & \cos\theta\sin\theta + (-\sin\theta)\cdot 0\\ \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\cdot 0 & \sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cdot 0\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \begin{pmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}}}$$

2.
$$M(P_\theta)M(P_{\theta'}) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta' + (-\sin\theta)\sin\theta' & \cos\theta\cdot(-\sin\theta') + (-\sin\theta)\cos\theta'\\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \sin\theta\cdot(-\sin\theta') + \cos\theta\cos\theta'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}$$

$$= M(P_{\theta+\theta'})$$

3. Puisque pour $\theta = 0$, $M(P_\theta) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = Id_{\mathbb{R}^2}$, alors $M(P_{\theta-\theta}) = M(P_\theta)\cdot M(P_{-\theta}) = Id_{\mathbb{R}^2}$.

On conclut que $M(P_{-\theta}) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = M(P_\theta)^{-1}$.

Puisque Pr_θ est une projection, elle n'est pas injective et donc elle n'est pas inversible.

Exercice 2

1. $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $\dots$, $D(x^n) = nx^{n-1}$

Ainsi, $M(D) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

2. La dérivée d'un polynôme vaut 0 ssi le polynôme est de degré 0, donc $Ker(D) = \langle\{1\}\rangle = \mathbb{R}_0[x]$ et $\dim Ker(D) = 1$.

Tout polynôme de degré $n \neq 0$ aura pour dérivée un polynôme de degré $n-1$, donc $Im(D) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $rang(D) = n$.

Ainsi, $\dim Ker(D) + rang(D) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 3

$|C| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc il suffit de montrer que C est libre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice réduite obtenue ne contient pas de variable libre, donc C est libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Prenons $\{e_1, e_2, e_3\} := Can(\mathbb{R}^3)$ et $\{c_1, c_2, c_3\} := C$.

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ c_2 = e_2 + 2e_3 \\ c_3 = e_1 + e_2 - e_3 \end{array}\right\} \text{ donc } M_{C,B}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = -\frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{2}c_3 \\ e_2 = c_1 - c_3 \\ e_3 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \end{array}\right\} \text{ donc } M_{B,C}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Vérifions que $M_{B,C}(Id_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{C,B}(Id_{\mathbb{R}^3}) = Id_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}+0+\frac{5}{2} & 1+0-1 & -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \\ -\frac{6}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2} & 2+0-1 & -\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}+\frac{2}{2}-\frac{5}{2} & -1+0+1 & \frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. $f(1+2x+4x^2+8x^3) = 1+2(x+1)+4(x+1)^2+8(x+1)^3 = 1+2(x+1)+4(x^2+2x+1)+8(x^3+3x^2+3x+1)$

$= 1+2x+2+4x^2+8x+4+8x^3+24x^2+24x+8$

$= 8x^3+28x^2+34x+15$

Donc $f(p) = (15, 34, 28, 8)$ dans B.

2. $(8x^3+28x^2+34x+15) = 8\cdot(x^3+x^2+x+1)+20\cdot(x^2+x+1)+6\cdot(x+1)-19\cdot 1$

Donc $f(p) = (-19, 6, 20, 8)$ dans C.

3. Prenons $\{b_1, b_2, b_3, b_4\} := B$. ~~Alors~~ et $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} := C$. Alors,

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = c_1 \\ b_2 = -c_1 + c_2 \\ b_3 = -c_2 + c_3 \\ b_4 = -c_3 + c_2 \end{array}\right\} \text{ Donc } M_{C,B}(Id_{P_3}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(b_1) = b_1 \\ f(b_2) = b_1 + b_2 \\ f(b_3) = b_1 + 2b_2 + b_3 \\ f(b_4) = b_1 + 3b_2 + 3b_3 + b_4 \end{array}\right\} \text{ Donc } M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $M_{C,B}(f) = M_{C,B}(Id_{P_3}) \cdot M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $f(p)$ en base $C = M_{C,B}(f) \cdot p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-4-16 \\ 0+2+4+0 \\ 0+0+4+16 \\ 0+0+0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 6 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$

Exercice 5

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \tfrac{1}{2} b_1' + \tfrac{1}{2} b_2' \\ b_2 &= -\tfrac{1}{2} b_1' + \tfrac{1}{2} b_2' \end{aligned}\right\} P_{B,B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} b_1' &= b_1 - b_2 \\ b_2' &= b_1 + b_2 \end{aligned}\right\} P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{B,B'} \cdot P_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_{\mathbb{R}^2}$$

Exercice 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On observe alors que : - la matrice réduite contient 3 pivots, donc $\text{rang}(M) = 3$

- la matrice réduite contient 1 variable libre, donc $\dim \text{Ker}(M) = 1$

L'image de M est formée par les colonnes des variables liées, donc

$Im(M) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Le noyau de M correspond aux solutions du système d'équations linéaires homogène associé à M, donc.

$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t, \quad x_4 = u \quad$ et $\text{Ker}(M) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$