Logique et Théorie des Ensembles
Série 07-B

Automne 2024 — Buff Mathias

Exercice 1. Calculer les applications réciproques des applications suivantes :

— $f : \begin{array}{ll} [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (\theta, r) & \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$

— $\chi : \begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \to \{0,1\}^E \\ A & \mapsto \chi_A \end{array}$

— $g \circ f$ pour $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives (en fonction des réciproques de f et g)

Exercice 1

- $f^{-1} : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \longmapsto \left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \sqrt{x^2+y^2}\right) \end{array}$

- $\chi^{-1} : \begin{array}{ll} \{0,1\}^E & \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ \chi_A & \longmapsto A := \{x \in E \mid \chi_A(x) = 1\} \end{array}$

- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Exercice 2. Supposons qu'il existe une bijection entre A et B, montrer qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$.

Exercice 2

Soit $f : A \to B$ bijective.

- Soient $E, E' \in \mathcal{P}(A)$ et $F, F' \in \mathcal{P}(B)$ tels que $F = f(E)$ et $F' = f(E')$.
  Si $F = F'$, alors $f(E) = f(E')$. Comme f est injective, $\forall x, x' \in A$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
  Alors, $f(E) = f(E') \Rightarrow E = E'$ donc $f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \\ E \longmapsto f(E) \end{array}$ est injective.

- Soit $F \in \mathcal{P}(B)$. Comme f est surjective, $\forall y \in F$, $\exists x \in A$, $y = f(x)$.
  Alors, $\exists E \in \mathcal{P}(A)$, défini par $E = \{x \in A \mid \exists y \in F, f(x) = y\}$, tel que $f(E) = F$.
  Donc, $f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \\ E \longmapsto f(E) \end{array}$ est surjective.

Comme $f : \begin{array}{l} \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \\ E \longmapsto f(E) \end{array}$ est injective et surjective, on conclut qu'elle est bijective.

Exercice 3. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre.

1. L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ séfini par $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$ ssi $x < a$ ou $x = a$ et $y \leq b$.

Exercice 3

1\. - Réflexivité : $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$ est vraie car $x=x$ et $y \leq y$.

- Transitivité : Soient $(x,y), (a,b), (s,t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ et $(a,b)\mathcal{R}(s,t)$.
Alors $x<a$ ou $x=a$ et $y \leq b$, et $a<s$ ou $a=s$ et $b\leq t$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x<a : \text{Si } a<s \text{ alors } x<s \\ \quad\quad\quad : \text{Si } a=s \text{ et } b\leq t \text{ alors } x<s \\ \text{Si } x=a \text{ et } y\leq b : \text{Si } a<s \text{ alors } x<s \\ \quad\quad\quad \text{Si } a=s \text{ et } b\leq t \text{ alors } x=s \text{ et } y\leq t \end{array}\right\} \text{Donc } (x,y)\mathcal{R}(s,t)$$

- Antisymétrie : Soient $(x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ et $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x<a : \text{Si } a<x \text{ on a une contradiction} \\ \quad\quad\quad \text{Si } a=x \text{ et } b\leq y \text{ on a une contradiction} \\ \text{Si } x=a \text{ et } y\leq b : \text{Si } a<x \text{ on a une contradiction} \\ \quad\quad\quad \text{Si } a=x \text{ et } b\leq y \text{ alors } b=y \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Donc } a=x \text{ et } b=y, \\ \text{donc } (x,y)=(a,b).\end{array}$$

2. La divisibilité sur $\mathbb{N}$.

2\. Divisibilité sur $\mathbb{N}$: $x\mathcal{R}y$ ssi $\exists a \in \mathbb{N}$ t.q. $x \cdot a = y$

- Réflexivité : $x\mathcal{R}x$ car $x \cdot 1 = x$

- Transitivité : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \iff \exists a,b \in \mathbb{N},\ x\cdot a = y$ et $y \cdot b = z$
$\iff \exists c \in \mathbb{N},\ c := a\cdot b,\ x \cdot c = z$
$\iff x\mathcal{R}z$

- Antisymétrie : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \iff \exists a,b \in \mathbb{N},\ x\cdot a = y$ et $y\cdot b = x$
$\iff y\cdot a\cdot b = y$
(car $a,b \in \mathbb{N}$) $\iff a=b=1$
$\iff x=y$

3. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}^*$ définie par $p\mathcal{R}q$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q = p^k$.

Exercice 3 (cont.)

3\. - Réflexivité : $p\mathcal{R}p$, car $p=p^1$

- Transitivité : $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}s \iff q = p^k$ et $s = q^{k'}$
$\iff s = (p^k)^{k'} = p^{(k\cdot k')}$
(car $k\cdot k' \in \mathbb{N}$) $\iff p\mathcal{R}s$

- Antisymétrie : $p\mathcal{R}q$ et $q\mathcal{R}p \iff q=p^k$ et $p=q^{k'}$
$\iff q = q^{(k\cdot k')}$
(car $k,k' \in \mathbb{N}$) $\iff k=k'=1$
$\iff p=q$

4. La relation $\mathcal{R}$ sur $(-\pi/2, \pi/2)$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $\tan x \leq \tan y$.

4\. - Réflexivité : $x\mathcal{R}x$, car $\tan x = \tan x$, donc $\tan x \leq \tan x$

- Transitivité : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \iff \tan x \leq \tan y$ et $\tan y \leq \tan z$.
Comme $\leq$ est transitive, $\tan x \leq \tan z$ donc $x\mathcal{R}z$.

- Antisymétrie : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \iff \tan x \leq \tan y$ et $\tan y \leq \tan x$.
Comme $\leq$ est antisymétrique, $\tan x = \tan y$, donc $x=y$
(puisque nous regardons tan sur $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Exercice 4. Existe-t-il une bijection de $(0,1)$ dans $[0,1]$?

Exercice 4

Soit g une bijection de $(0,1)$ dans $(0,1)$. Soit $f : (0,1) \to [0,1)$ une modification de g telle qu'il existe $\alpha \in (0,1)$, $f(\alpha) = 0$.

Mais, comme g bijective, il existe $\beta \in (0,1)$ tel que $f^{-1}(\beta) = g^{-1}(\beta) = \alpha$. Alors on aurait $f(\alpha) = \beta$ et $f(\alpha) = 0$, donc f associe à un point de $(0,1)$ deux éléments de $[0,1)$ et ainsi f n'est pas une application.

Le même argument peut être utilisé pour $f : (0,1) \to (0,1]$ et on conclut donc que $f : (0,1) \to [0,1]$ ne peut pas être surjective, donc il n'existe pas de bijection entre $(0,1)$ et $[0,1]$.

Exercice 5. (*Détails manquants dans la preuve du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein).
On utilise les notations de la preuve du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein présentée en cours.

1. Montrer que $A \subset B$ implique $h(A) \subset h(B)$.
2. Soit $f : E_1 \to F_1$ et $g : E_2 \to F_2$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Montrer que si f et g sont bijectives, alors

$$h : \begin{array}{ccc} E_1 \cup E_2 & \to & F_1 \cup F_2 \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in E_1 \\ g(x) \text{ si } x \in E_2 \end{cases} \end{array}$$

   est bijective.

Exercice 5

1. Soient $A, B \subset E$. Alors $h(A) = E \setminus g(F \setminus f(A))$ et $h(B) = E \setminus g(F \setminus f(B))$.
Comme f est injective, si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$, donc $F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A)$.
Comme g est injective, si $F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A)$ alors $g(F \setminus f(B)) \subset g(F \setminus f(A))$,
donc $E \setminus g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus g(F \setminus f(B))$, i.e. $h(A) \subset h(B)$.

2. - Montrons que h est surjective :

Soit $y \in F_1 \cup F_2$: Si $y \in F_1$, comme f est surjective $\exists x \in E_1, y = f(x)$
Si $y \in F_2$, comme g est surjective $\exists x \in E_2, y = g(x)$

Donc $\forall y \in F_1 \cup F_2, \exists x \in E_1 \cup E_2, y = h(x)$.

- Montrons que h est injective :

Soient $y, y' \in F_1 \cup F_2$, ~~comme~~ tels que $y = y'$, alors $y \in F_1 \Leftrightarrow y' \in F_1$ et $y \in F_2 \Leftrightarrow y' \in F_2$.

Si $y \in F_1$, comme f est bijective, $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$
Si $y \in F_2$, comme g est bijective, $g^{-1}(y) = g^{-1}(y')$

Donc, $\forall x, x' \in E_1 \cup E_2$, $h(x) = h(x') \Rightarrow h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(h(x')) \Leftrightarrow x = x'$.

On conclut alors que h est bijective.