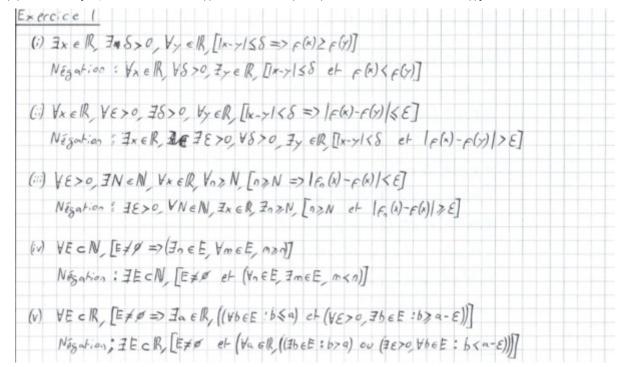
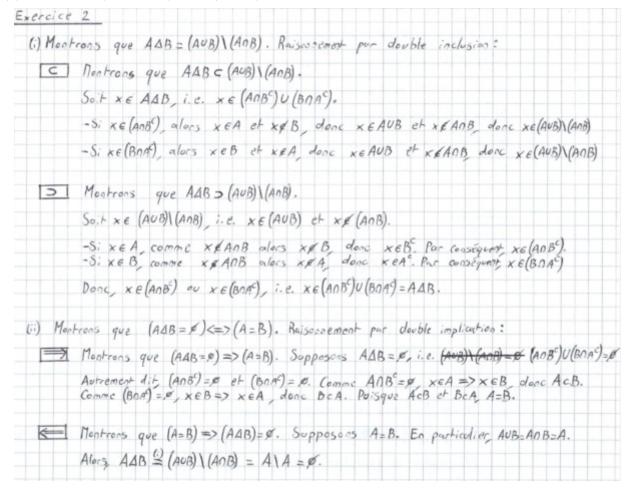
## Exercice 1. Écrire la négation des assertions suivantes.

- (i)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x y| \le \delta \implies f(x) \ge f(y)]$ (où f est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x y| < \delta \implies |f(x) f(y)| \le \epsilon]$  (où f est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (iii)  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N, [n \geq N \implies |f_n(x) f(x)| \leq \epsilon]$  (où f est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (iv)  $\forall E \subset \mathbb{N}, [E \neq \emptyset \implies (\exists n \in E, \forall m \in E, m \geq n)]$
- (v)  $\forall E \subset \mathbb{R}, [E \neq \emptyset \implies \exists a \in \mathbb{R}, ((\forall b \in E : b \leq a) \text{ et } (\forall \epsilon > 0, \exists b \in E : b \geq a \epsilon))]$



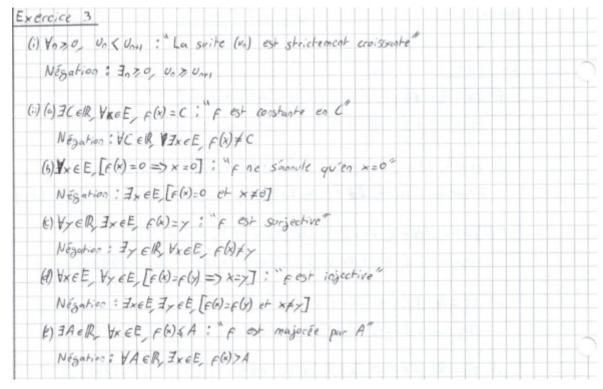
**Exercice 2.** (Différence symétrique). L'opération  $\triangle$  est définie sur les ensembles  $A, B \subset E$  par  $A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$ .

- (i) Montrer que  $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- (ii) Vérifier que  $(A \triangle B = \emptyset) \iff (A = B)$



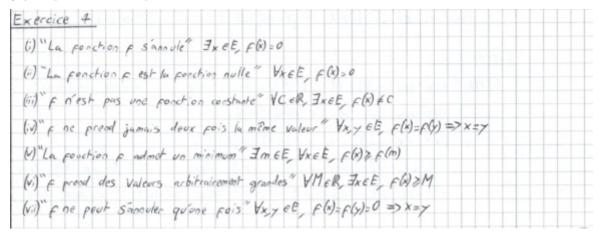
Exercice 3. Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

- (i)  $\forall n \geq 0, u_n < u_{n+1}$  (où  $(u_n)$  est une suite réelle)
- (ii) Soit  $f: E \to \mathbb{R}$  une fonction :
  - (a)  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = C$
  - (b)  $\forall x \in E, [f(x) = 0 \implies x = 0]$
  - (c)  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) = y$
  - (d)  $\forall x \in E, \forall y \in E, [f(x) = f(y) \implies x = y]$
  - (e)  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq A$



**Exercice 4.** Soit  $f: E \to \mathbb{R}$  une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

- (i) La fonction f s'annule.
- (ii) La fonction f est la fonction nulle.
- (iii) f n'est pas une fonction constante.
- (iv) f ne prend jamais deux fois la même valeur.
- (v) La fonction f admet un minimum.
- (vi) f prend des valeurs arbitrairement grandes.
- (vii) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.



**Exercice 5.** Soient E et F deux ensembles et A(x,y) des assertions indexées par  $(x,y) \in E \times F$ .

- (i) Montrer que  $\forall x \in E, \forall y \in F, A(x,y) \iff \forall y \in F, \forall x \in E, A(x,y).$
- (ii) Montrer que  $\exists x \in E, \exists y \in F, A(x,y) \iff \exists y \in F, \exists x \in E, A(x,y).$
- (iii) Montrer en donnant un exemple que  $\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)$  n'est pas nécessairement équivalent à  $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y)$ .

On dira que l'on peut échanger les quantificateurs  $\forall$  adjacents (ou les  $\exists$  adjacents), mais que l'on ne peut pas échanger les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ .

Exerc	ice 5
(-)	Dire que pour tout xe E pour tout y EF A(x,y) est vraie revient à d're que S: x e E et si y EF alors A(x,y) est vraie. Il devient alors évident que "S: x e E" et "si y e F" sont interspanseables, et par extension que la proposition est équivalente à dire que pour tout y e F pour tout x e E A(x,y) est vraie.
	Sil existe un xEE pour lequel il existe un yEF tels que A(x,y) est vraie alors pour co y spécifique, il existe au moins le premier x, tels que A(x,y) est vraie.  Ainsi, JxEE JyEF A(x,y) => JyEF JxEE A(x,y). Par le même raisonnement, la réciproque peut être montrée, et donc les deux propositions sont équivalentes.
(ii)	Soient E, F = IN et $A(x,y)$ lu proposition "x > y".  Alors, $\forall y \in F, \exists x \in ME, A(x,y)$ est $\forall RAJE, mois \exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y) \in SF, FAUSSE.$ Démonstration de $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y) : Il s'uppit de prendre x = (y+1) \in N.  Démonstration de \neg (\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)) <=> \forall x \in E, \exists y \in F, \neg A(x,y).  \neg (A(x,y)) = \neg (x \ge y) = x < y \text{ . Il suppit alors de prendre } y = (x+1) \in N.$

**Exercice 6.** (Fonctions caractéristiques  $\chi_A$ ). Soient E un ensemble et  $A \subset E$ . La fonction caractéristique de A est définie par  $\chi_A : E \to \{0,1\}$  et

$$\chi_A: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Montrer que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont la même fonction caractéristique.

Exercice	6
(i) Mont	rons que A=B <=> XA = XB. Raisonnement par double implication:
$\Rightarrow$	Supposons A= B. Soit x E.
	-SixEA alors XEB donc XA = XB = 1 -SixEA, alors XEB donc XA = XB = 0
	Dorc, pour hout x EE, AA = AB.
<b>=</b>	Supposons NA=NB. SoitxEE.
	- Si XEA, alors XA=1 done XB=1 done XEB. Par consequent ACB Si XEB alors XB=1, done XA=1, done XEA. Par consequent BCA.
	Comme AcB et BcA, A=B.

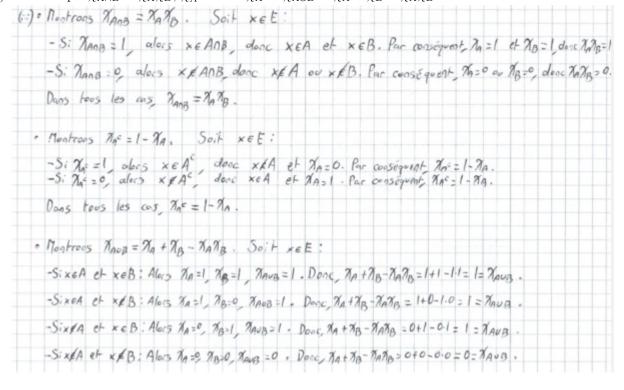
(ii) Que peut-on dire sur A et B si  $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$  pour tout  $x \in E$ ?

```
(i) \chi_A \leq \chi_B indique que \chi_A = 1 \Rightarrow \chi_B = 1.

Autrement dit, S: un élément xEE appartient à A (donc \chi_A = 1) alors il appartient également à B (\chi_B = 1).

On peut donc en déduire que \chi_A \leq \chi_B \Rightarrow A \in B.
```

(iii) Montrer que  $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ ,  $\chi_{A^C} = 1 - \chi_A$  et  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$ .



(iv) Montrer que les formules de De Morgan pour  $(A \cup B)^C$  et  $(A \cap B)^C$  en utilisant les fonctions caractéristiques.

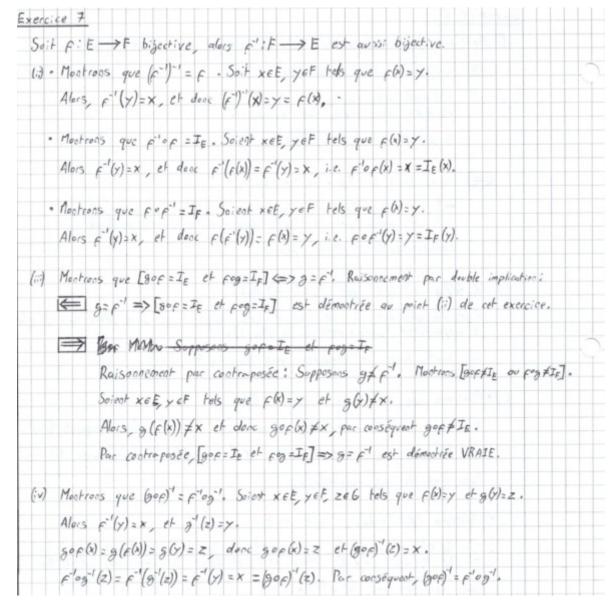
[v) Formules de De Morgan: 
$$(AUB)^c = A^c O B^c$$
;  $(ADB)^c = A^c U B^c$ 

•  $\mathcal{N}(AUB)^c = 1 - \mathcal{N}_{AUB} = 1 - (\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_D - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B) = 1 - \mathcal{N}_A - \mathcal{N}_B + \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B = (1 - \mathcal{N}_A) \cdot (1 - \mathcal{N}_B) = \mathcal{N}_{A^c} \cdot \mathcal{N}_{B^c} = \mathcal{N}_{(A^c O B^c)}$ 

•  $\mathcal{N}(ADB)^c = 1 - \mathcal{N}_{ADB} = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_A$ 

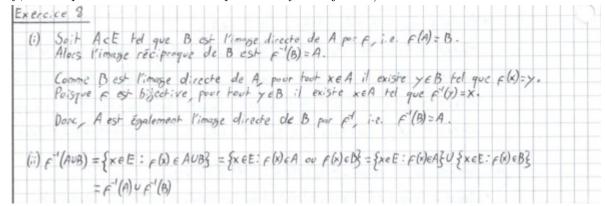
**Exercice 7.** Soit  $f: E \to F$  une fonction bijective. Démontrer les propriétés suivantes énoncées mais pas démontrées en classe (Proposition 1.23).

- (i)  $(f^{-1})^{-1} = f$ ,  $f^{-1} \circ f = I_E$ ,  $f \circ f^{-1} = I_F$ .
- (ii) (unicité de l'inverse) Si  $g: F \to E$  tel que  $g \circ f = I_E$  et  $f \circ g = I_F$ , alors  $g = f^{-1}$ .
- (iii) (composition des inverses) Soit  $g: F \to G$  une autre fonction bijective. Alors  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .



**Exercice 8.** Soit  $f: E \to F$  une fonction.

(i) Soit  $B \subset F$ . Dans le cas où f est bijective, montrer que l'image réciproque  $f^{-1}(B)$  de B est égale à l'image directe de B par la fonction inverse  $f^{-1}$ . (Notons que l'image réciproque existe pour tout f, tandis que la fonction inverse uniquement si f est bijective.)



(ii) Montrer que pour tout  $A, B \subset F$  on a

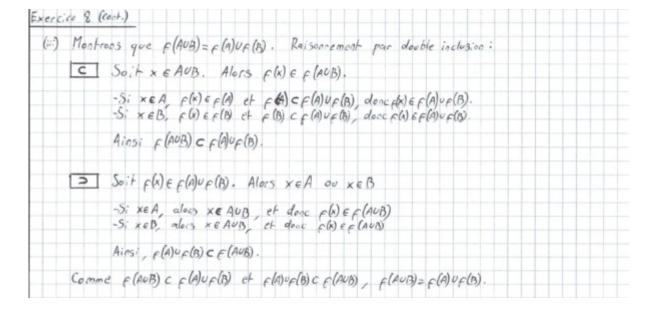
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

(ii) 
$$e^{-t}(A \cup B) = \{x \in E : e(x) \in A \cup B\} = \{x \in E : e(x) \in A : o \in e(x) \in B\} = \{x \in E : e(x) \in A\} \cup \{x \in E : e(x) \in B\} = e^{-t}(A) \cup e^{-t}(B)$$

$$e^{-t}(A \cap B) = \{x \in E : e(x) \in A \cap B\} = \{x \in E : e(x) \in A : e \in e(x) \in B\} = \{x \in E : e(x) \in A\} \cap \{x \in E : e(x) \in B\} = e^{-t}(A) \cap e^{-t}(B)$$

(iii) Montrer que pour tout  $A, B \subset F$  on a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$



(iv) Montrer qu'en général  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  est fausse. Montrer aussi qu'elle est vraie si f est injective.

(V) · Contre exemple: F: |R -> |R, x | -> x2 et A = {xe|R: x > 0}, B = {xe|R: x < 0}.

Alors ANB = {o}, et F (ANB) = {o}. Par contre, F(A) = F(B) = F(A) \(\text{A}\) \(\text{C}\) \(\text{B}\).

En revanche, si F est injective: \(\nabla\_{xy} \in E, F(x) = F(y) = > x = y\), Montrons que \(\text{F}(A) \cap F(B) \cap F(A) \cap F(A) \\

Soit x \in A, alors F(x) \in F(A). S: F(x) \in F(A) \cap F(A) \cap F(B), alors F(x) \in F(B) \in F(B) \in F(B) \in F(B) \in F(B) \\

\text{X \in B. Done, x \in Anb \in F(X) \in F(A) \in F(A) \in F(A) \in F(A) \in F(A) \in F(A) \in F(B) \in F(A) \in F(B) \in F(A) \in F(B).

\[
\text{Par consequent, F(A) \in F(B) \in F(A) \in F(B) \in F(A) \in F(B) \in F(A) \in F(B).
\]

## Exercice 9.

(i) Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ . Les éléments de E sont des familles  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  indexées par  $\mathbb{Z}$ . Définissons la fonction  $f: E \to E$  par

$$f:(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$$

Montrer que f est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

(ii) Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Les éléments de E sont des familles  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  indexées par  $\mathbb{N}$  (aussi appelées suites). Définissons la fonction  $f : E \to E$  par

$$f:(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$$

Est-ce que f est injective? Surjective?

(iii) Soit f la fonction de (ii). Définissons les ensembles  $A,B\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  par

$$A = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_0 \in [0, 1], x_1 \le 0\}, \quad B = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \exists i \in \mathbb{N}, x_i \ge 0\}$$

Déterminer les images directes f(A) et f(B) ainsi que les images réciproques  $f^{-1}(A)$  et  $f^{-1}(B)$ .

	(e 9
	trition: p": (xi); EZ -> (xi-1); EZ.
	ntrons que q est sonjective : Autrement dit, chaque élément ye E pout être représenté none (X;H); ez , avec (Xi); ez .
Co	mme $i=(i+1)-1$ et que $-1e\mathbb{Z}$ , alors $i\in\mathbb{Z}$ si $(i+1)\in\mathbb{Z}$ , et donc $[\forall_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\in\mathbb{E}]$ est $\forall_{\mathbf{r}\in\mathbb{E}}$ .
- Mo	ntrons que & est injective: \xxy \in E, \x(x) = \x(x) = \xxy.
So	ert x, y & IE. Alors f((x):ex) = f((x):ex) (xin):ex = (yin):ex (xi):ex = (yin):ex
Co	mme e est sorgective et injective, elle est bijective. Véripions la é' proposée:
F	$P \in \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{R})_{i \in \mathbb{Z}} = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}([\mathbb{R}]_{i \in \mathbb{Z}})\right) = \mathcal{F}\left(\mathbb{R}_{i-1}\right)_{i \in \mathbb{Z}} = (\mathbb{R}_{i-1+1})_{i \in \mathbb{Z}} = (\mathbb{R}_{i})_{i \in \mathbb{Z}} = (\mathbb{R}_{i})_{i \in \mathbb{Z}}$
É'	$\mathcal{E}_{\mathcal{E}}\left((\mathbf{x}_{i})_{i\in\mathbb{Z}}\right)=\mathcal{E}_{\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}_{\mathcal{E}}\left((\mathbf{x}_{i})_{i\in\mathbb{Z}}\right)=\mathcal{E}_{\mathcal{E}}\left((\mathbf{x}_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}\right)=\left(\mathbf{x}_{i+1-1}\right)_{i\in\mathbb{Z}}=\left(\mathbf{x}_{i}\right)_{i\in\mathbb{Z}}$
(i) F	n'est pas surjective, car on ne peut pas trouver de ien tel que i+1 =0.
F	est injective, car pour tout x, y ∈ N x+1=7+1=> x=y.
(ii) f	(A) = {(xi):∈Nix: xi ≤ of ; ∈(B) = {(xi):∈Nix: ∃i∈N, ( xi) > of
E	(A)={(x):∈N : x1∈[0] x2≤0} / F-1(D) = {(x:);∈N : ∃; ∈N, x:+170}