## Exercice 1

(i) $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$

Donc, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{2} \geq \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} = xy \Longrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leq y_{n+1}$, i.e. $x_n \leq y_n$.

(ii) Comme $y_n \geq x_n$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n$, donc $x_{n+1} \geq x_n$, i.e. $(x_n)$ est croissante.

Comme $x_n \leq y_n$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \leq \frac{y_n+y_n}{2} = y_n$, donc $y_{n+1} \leq y_n$, i.e. $(y_n)$ est décroissante.

(iii) Puisque $(x_n)$ est croissante, $(y_n)$ est décroissante, et $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_0 \leq x_n \leq y_n \leq y_0$.

Donc $(x_n)$ et $(y_n)$ sont bornées, et comme elles sont monotones, elles convergent.

Notons $l = \lim_n (x_n)$ et $l' = \lim_n (y_n)$. Comme $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$,

$\lim_n (y_n) = \frac{\lim_n (x_n) + \lim_n (y_n)}{2}$ donc $l' = \frac{l+l'}{2}$. Donc, $\frac{l+l'-2l'}{2} = 0 \Rightarrow l - l' = 0 \Rightarrow l = l'$.

## Exercice 2

Preuve par récurrence : Comme $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq 0$ et en particulier $\varphi(0) \geq 0$.

Supposons que $\varphi(n) \geq n$. Alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, et comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(n+1) > n \Longleftrightarrow \varphi(n+1) \geq n+1.$$

Par récurrence, $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Exercice 3

Soit $(u_n)$ une suite convergente vers $l$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$

Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite extraite de $(u_n)$, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Comme $\varphi$ est strictement croissante, $\varphi(n) \geq n$ et donc $\forall n \geq N$, $\varphi(n) \geq N$, ainsi $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$, donc $\lim_n u_{\varphi(n)} = l$.

## Exercice 4

Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \leq j$. Alors, $v_i = \sup_{k \geq i} u_k$ et $v_j = \sup_{k \geq j} u_k$

Si $v_i = \sup_{k \in [i,j)} u_k$, alors $v_i \geq v_j$, et si $v_i = \sup_{k \geq j} u_k$, alors $v_i = v_j$.

Donc, $i \leq j \Rightarrow v_i \geq v_j$, donc $(v_n)$ est décroissante.

## Exercice 5

Montrons que "$(u_n)$ converge" $\Longleftrightarrow \limsup_n u_n = \liminf_n u_n = \lim_n u_n$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Par la Proposition 3.22, $\limsup_n u_n$ et $\liminf_n u_n$ sont des valeurs d'adhérence de $u_n$. Comme $(u_n)$ converge, par la Proposition 3.17 elle possède une unique valeur d'adhérence, sa limite. Donc $\limsup_n u_n = \liminf_n u_n = \lim_n u_n$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Par la Proposition 3.22, $\limsup_n u_n$ est le maximum des valeurs d'adhérence de $u_n$, et $\liminf_n u_n$ est le minimum des valeurs d'adhérence, donc pour toute valeur d'adhérence $a$, $\liminf_n u_n \leq a \leq \limsup_n u_n$, donc $a = \limsup_n u_n = \liminf_n u_n$.

$u_n$ possède donc une unique valeur d'adhérence, et par la Proposition 3.17 elle est convergente vers $a$.

## Exercice 6

(i) $U_n = \frac{1}{n}$, $\limsup_n U_n = \liminf_n U_n = \lim_n U_n = 0$

$V_n = (-1)^n$, $\limsup_n V_n = 1$, $\liminf_n V_n = -1$

$W_n = n \bmod (3)$, $\limsup_n W_n = 2$, $\liminf_n W_n = 0$

(ii) $U_n = n \bmod (m)$, $\limsup_n U_n = m-1$, $\liminf_n W_n = 0$

(iii) $U_0 = 0$, $U_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } U_n = \sup_{k\leq n} U_k \\ U_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$, $\liminf_n U_n = 0$, $(\limsup_n U_n = \infty)$

## Exercice 7

(i) Soit $l = \lim_n U_n$. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |U_n - l| < \varepsilon$. Par définition, $\exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant K, U_n = V_n$.

Alors, prenons $M = \max\{K, N\}$ et on obtient que $\forall n \geqslant M$, $|V_n - l| < \varepsilon$.
Donc $\lim_n V_n = l = \lim_n U_n$.

(ii) $\limsup_n U_n = \lim_n (\sup_{k\geqslant n} U_k)$. En particulier, $\limsup_n U_n = \lim_n (\sup_{k \geqslant n \geqslant K} U_k)$
$= \lim_n (\sup_{k\geqslant n \geqslant K} V_k)$
$= \limsup_n V_n$

Le même raisonnement peut être appliqué pour montrer que $\liminf_n U_n = \liminf_n V_n$.

## Exercice 8

(i) Comme $U_n$ converge vers $l$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |U_n - l| < \varepsilon$. Alors,
$\sum_{k=N}^{n} |U_k - l| < \sum_{k=N}^{n} \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, $\left|\sum_{k=N}^{n} U_k - \sum_{k=N}^{n} l\right| \leqslant \sum_{k=N}^{n} |U_k - l| < \sum_{k=N}^{n} \varepsilon$.
Donc, $\left|\sum_{k=N}^{n} U_k - (n-N+1) l\right| < (n-N+1)\varepsilon$

(ii) $\left|\sum_{k=1}^{N-1} U_k\right| \leqslant N \cdot |\max\{U_1, U_2, \dots, U_{N-1}\}|$. Alors, avec $N' = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \cdot (N \cdot |\max\{U_1, U_2, \dots, U_{N-1}\}|)\right\rfloor + 1$
nous avons $\frac{1}{N'} \cdot \left|\sum_{k=1}^{N-1} U_k\right| < \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N'$, $\frac{1}{n} \cdot \left|\sum_{k=1}^{N-1} U_k\right| \leqslant \frac{1}{N'} \cdot \left|\sum_{k=1}^{N-1} U_k\right| < \varepsilon$

(iii) Soit $n \geqslant N'$. Prenons $\varepsilon = \frac{(1+N)}{n} \cdot l$. Alors,
$\left|\frac{1}{n} S_n - l\right| = \frac{1}{n} |S_n - nl| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} U_k - nl\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} U_k + \sum_{k=N}^{n} U_k - nl\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} U_k\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N}^{n} U_k - nl\right|$
$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N}^{n} U_k - (n-N+1) l\right| + \frac{1}{n}|(n-N+1) l - nl| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \frac{|(-N+1)|}{n} \cdot l \leqslant 2\varepsilon + \frac{(1+N)}{n} l \leqslant 3\varepsilon.$
Donc, $\frac{1}{n} S_n$ converge vers $l$.