Logique et Théorie des Ensembles
Série 03-B

Buff Mathias

Exercice 1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 1

$\boxed{\subset}$ Montrons que $(A\setminus B)\setminus C \subset A\setminus(B\cup C)$.

Soit $x \in (A\setminus B)\setminus C$, alors $x \in (A\setminus B)$ et $x \notin C$, donc $x \in A$, $x \notin B$, $x \notin C$.
Comme x n'appartient ni à B, ni à C, alors $x \notin (B\cup C)$.
Donc, $x \in A$ et $x \notin (B\cup C)$, i.e. $x \in A\setminus(B\cup C)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $A\setminus(B\cup C) \subset (A\setminus B)\setminus C$.

Soit $x \in A\setminus(B\cup C)$, alors $x \in A$ et $x \notin B\cup C$, donc $x \notin B$ et $x \notin C$.
En particulier, $(x \in A$ et $x \notin B)$ et $x \notin C$, i.e. $x \in (A\setminus B)\setminus C$.

Par $\boxed{\subset}$ et $\boxed{\supset}$, il est montré que $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$.

Note: $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C) = A\setminus(C\cup B) = (A\setminus C)\setminus B$.

Exercice 2. Montrer que $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Exercice 2

$\boxed{\subset}$ Montrons que $(A\cap B)\times(C\cap D) \subset (A\times C)\cap(B\times D)$

Soient $x \in (A\cap B)$, $y \in (C\cap D)$. Alors $x \in A$, $x \in B$, $y \in C$, $y \in D$, donc $(x,y) \in (A\times C)$ et $(x,y) \in (B\times D)$.

Par conséquent, $(x,y) \in (A\times C)\cap(B\times D)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $(A\times C)\cap(B\times D) \subset (A\cap B)\times(C\cap D)$

- Question : Est-ce que " $\boxed{\supset}$ est montré par le raisonnement inverse de $\boxed{\subset}$ " est acceptable ?

Soit $(x,y) \in (A\times C)\cap(B\times D)$. Alors $(x,y) \in (A\times C)$ et $(x,y) \in (B\times D)$, i.e. $x \in A$, $y \in C$, et $x \in B$, $y \in D$.

Donc, $x \in (A\cap B)$, $y \in (C\cap D)$, et par conséquent $(x,y) \in (A\cap B)\times(C\cap D)$.

Par $\boxed{\subset}$ et $\boxed{\supset}$, il est montré que $(A\times C)\cap(B\times D) = (A\cap B)\times(C\cap D)$. $= (A\times D)\cap(B\times C)$

Exercice 3. (Lois de De Morgan généralisées).
Soient $I \neq \emptyset$ un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $A \subset E$. Montrer que

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) = \bigcap_{i\in I} (A \cap A_i)$$

$$A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (A \setminus A_i), \quad A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (A \setminus A_i)$$

Exercice 3

- $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, alors $x \in A$ et $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Alors, il existe $i \in I$, $x \in (A \cap A_i)$.
Donc, $x \in \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$, alors il existe $i \in I$, $x \in (A \cap A_i)$. Comme A n'est pas dépendant de i, $x \in A$ et il existe $i \in I$, $x \in A_i$, donc $x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

- $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cup \left(\bigcap_{i\in A_i} A_i\right)$

-Si $x \in A$, alors pour tout $i \in I$, $x \in (A \cup A_i)$, car $A \subset (A \cup A_i)$. Donc, $x \in \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$.
-Si $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, alors pour tout $i \in I$, $x \in A_i$, et donc $x \in (A \cup A_i)$ car $A_i \subset (A \cup A_i)$. Donc, $x \in \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$, alors pour tout $i \in I$, $x \in (A \cup A_i)$.

-Si $x \in A$, alors comme A est indépendant de A, $x \in A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

-Si $x \notin A$, alors pour tout $i \in I$, $x \in A_i$, donc $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, et $x \in A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

- $A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A \setminus A_i$: $x \in A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i$

$\iff x \in A$ et $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$
$\iff x \in A$ et il n'existe pas de $i \in I$ tel que $x \in A_i$
$\iff x \in A$ et pour tout $i \in I$, $x \notin A_i$
$\iff$ pour tout $i \in I$, $x \in A$ et $x \notin A_i$
$\iff$ pour tout $i \in I$, $x \in A \setminus A_i$
$\iff x \in \bigcap_{i\in I} A \setminus A_i$

- $A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A \setminus A_i$: $x \in A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i$

$\iff x \in A$ et $x \notin \bigcap_{i\in I} A_i$
$\iff x \in A$ et il existe $i \in I$ tel que $x \notin A_i$
$\iff$ il existe $i \in I$ tel que $x \in A$ et $x \notin A_i$
$\iff$ il existe $i \in I$ tel que $x \in A \setminus A_i$
$\iff x \in \bigcup_{i\in I} A \setminus A_i$

Exercice 4. Soient A et B deux ensembles.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A \times B = B \times A$.

Exercice 4

Proposition: $A \times B = B \times A \iff A = B$

Preuve : $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(x,y) \in A \times B$, i.e. $x \in A$ et $y \in B$. Comme $A \times B = B \times A$, $(x,y) \in B \times A$, i.e. $x \in B$ et $y \in A$. Donc, $A \subset B$ et $B \subset A$, i.e. $A = B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $(x,y) \in A \times B$, i.e. $x \in A$ et $y \in B$. Comme $A = B$, $x \in B$ et $y \in A$, donc $(x,y) \in B \times A$, ce qui implique $A \times B \subset B \times A$.

Par le même raisonnement, on peut montrer $B \times A \subset A \times B$, donc $A \times B = B \times A$.

Par $\boxed{\Longrightarrow}$ et $\boxed{\Longleftarrow}$, l'équivalence de la proposition est démontrée.