Exercice 1. Soient $E, f \subset \mathbb{R}$ et $f : e \to F$ une fonction bijective et monotone. Est-ce que f^{-1} est monotone ?

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ? bijectives ?

(i) $\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$

(ii) $\begin{aligned} b : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$

(iii) $\begin{aligned} c : [0,\infty) &\to (-\infty, 0] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

(iv) $\begin{aligned} d : \mathbb{N} &\to \{-1, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$

(v) $\begin{aligned} e : \mathbb{N} &\to \{-1, 1\} \\ n &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$

Exercice 3. Soit $E \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\sup E$, s'il existe, est unique.

Exercice 4. Trouver le supremum et infimum dans $\mathbb{R}$ de :

(i) $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^*\}$

(ii) $E = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

(iii) $E = \{x \in \mathbb{R} : -8 \leq x^3 \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x+1 < 6\}$

Est-ce que ce sont des maximums et des minimums ?

Exercice 5. Déterminer quelles sont les fonctions injectives, surjectives, et bijections parmi la liste suivante. Justifier vos affirmations.

(i) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$

(ii) $g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto$ le plus petit nombre premier divisant n

(iii) Soit E un ensemble,

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$$

où χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Exercice 6. Déterminer quelles sont les fonctions croissantes et décroissantes parmi la liste suivante. Justifier vos affirmations.

(i) $\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ même question avec $\begin{aligned} i : [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

(ii) $\begin{aligned} \pi : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \pi(n) \end{aligned}$ où $\pi(n)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Exercice 7. Soient $E \subset F \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\sup E \leq \sup F$ et $\inf E \geq \inf F$.

Exercice 8. Soit $f : E \to F$. Montrer que

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$$

Exercice 9. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

(i) Supposons que $g \circ f$ est injective, est-ce que f est injective ? Même question avec g ?

(ii) Supposons que $g \circ f$ est surjective, est-ce que f est surjective ? Même question avec g ?

(iii) Est-ce que $g \circ f$ bijective implique f et g bijectives ?

Pour chaque question, si la réponse est oui, le prouver. Sinon, exhiber un contre-exemple.