Exercice 1

$P_{\mathcal{E}',C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, avec $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$: $\left.\begin{matrix} e_1 = 3b_1 - b_2 \\ e_2 = -5b_1 + 2b_2 \end{matrix}\right\}$ $P_{B,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc, $M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(f) = P_{\mathcal{E}',C} \cdot M_{C,B}(f) \cdot P_{B,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2+8 & -3+1+0 \\ 0+2+8 & 0+1+0 \\ 7+0+8 & -3+0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 10 & 1 \\ 15 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 17+2 & -5\cdot 17-4 \\ 3\cdot 10-1 & -5\cdot 10+2 \\ 3\cdot 15+3 & -5\cdot 15-6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 53 & -89 \\ 29 & -48 \\ 48 & -81 \end{pmatrix}}}$

Exercice 2

$P_{\mathcal{E}_1,B_1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\left.\begin{matrix} w_1 = -b_1 - 2b_2 \\ w_2 = b_1 + b_2 \end{matrix}\right\}$ $P_{B_2,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Donc, $M_{B_2,B_1}(f) = P_{B_2,\mathcal{E}_2} \cdot M_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_1}(f) \cdot P_{\mathcal{E}_1,B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & 1+1 & -2-3 \\ -6+4 & 2+1 & -4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6-10 & 1+4+5 & 1+2-5 \\ 10-9-14 & 2+6+7 & 2+3-7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -11 & 9 & -2 \\ -13 & 15 & -2 \end{pmatrix}}}$

Exercice 3

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = (2\,5)(1\,7\,6\,4) = (2\,5)(1\,7)(7\,6)(6\,4)$

2. $(1\,2\,3)(2\,3\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,4)$

3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\,4\,3\,5\,2) = (1\,4)(4\,3)(3\,5)(5\,2)$ donc $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

4. $(1\ 2\ \cdots\ k) = \underbrace{(1\,2)(2\,3)\cdots(k-1\ k)}_{k-1 \text{ termes}}$, donc $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{k-1}$

Exercice 4

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,4\,5)$. Puisque $\operatorname{supp}(1\,2) \cap \operatorname{supp}(3\,4\,5) = \emptyset$, $\sigma^n = (1\,2)^n (3\,4\,5)^n$.

Puisque $(1\,2)$ est un cycle de longueur 2, il faut le composer avec lui-même 2 fois pour revenir à l'identité.
De même, $(3\,4\,5)$ est de longueur 3, donc il doit être composé avec lui-même 3 fois pour revenir à l'identité.

Alors, le k cherché est le plus petit multiplicateur commun de 2 et 3, i.e. 6.

$\Rightarrow \underline{\underline{k = 6}}$

Exercice 5

$$\det(\lambda A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \lambda \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \lambda \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot \lambda \cdot a_{\sigma(n),n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \lambda^n \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}$$

$$= \lambda^n \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}$$

$$= \lambda^n \cdot \det(A)$$

Exercice 6

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \overline{a_{\sigma(1),1}} \cdot \overline{a_{\sigma(2),2}} \cdot \ldots \cdot \overline{a_{\sigma(n),n}}$$

$$= \left(\text{car } \overline{z} \cdot \overline{z'} = \overline{z \cdot z'}\right) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \overline{a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}}$$

$$= \left(\text{car } \overline{z} + \overline{z'} = \overline{z + z'}\right) \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}}$$

$$= \overline{\det(A)}$$

Exercice 7

1. Soit f l'application linéaire associée à A, alors le rang de A est donné par la dimension de l'image de f.
   Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ génère $\text{Im}(f)$.

   $\dim(\text{Im}(f))$ est donc le nombre de vecteurs linéairement indépendants de $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$. Comme ces vecteurs forment également les colonnes de A, on conclut que $\text{rang}(A)$ est égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes de A.

2. Puisque $A \in M_{n,n}$, si une colonne a_j est linéairement dépendante des autres, alors la ligne a_i, $i = j$ est linéairement dépendante des autres.

   Donc, le nombre de lignes et de colonnes linéairement indépendantes de A sont égaux, et il suit de 1. que $\text{rang}(A)$ est égal au nombre de lignes linéairement indépendantes de A.

3. Puisque les opérations élémentaires conservent l'indépendance linéaire des lignes entre elles, le nombre de lignes linéairement indépendantes de A est égal au nombre de lignes linéairement indépendantes de sa forme échelonnée, i.e. de son nombre de pivots.

   Il suit alors de 2. que $\text{rang}(A)$ est égal au nombre de pivots de A.