Exercice 1. (Calcul de déterminant)
En développant par rapport à une ligne ou une colonne, calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1

$$\det(A) = a_{31} \cdot \det(A_{31}) - a_{32} \cdot \det(A_{32}) + a_{33} \cdot \det(A_{33}) - a_{34} \cdot \det(A_{34})$$
$$= \det(A_{31}) + 4 \cdot \det(A_{33})$$

Définissons $B = A_{31} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A_{33} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\det(A) = [b_{13} \cdot \det(B_{13}) - b_{23} \cdot \det(B_{23}) + b_{33} \cdot \det(B_{33})] + 4 \cdot [c_{13} \cdot \det(C_{13}) - c_{23} \cdot \det(C_{23}) + c_{33} \cdot \det(C_{33})]$$
$$= \det(B_{13}) - \det(B_{23}) + \det(B_{33}) + 4 \cdot \det(C_{13}) - 4 \cdot \det(C_{23}) + 4 \cdot \det(C_{33})$$
$$= (2-3) - (5+2) + (15+4) + 4 \cdot (0+4) - 4 \cdot (3+10) + 4 \cdot (6-0)$$
$$= -1 - 7 + 19 + 16 - 52 + 24$$
$$= 16 + 19 + 24 - (1 + 7 + 52)$$
$$= 59 - 60$$
$$= -1$$

Exercice 2.(Méthode de Gauss)
En utilisant l'élimination de Gauss, calculer le déterminant et l'inverse des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication : Considérer la matrice augmentée par une matrice identité à droite.

Exercice 2

$$A: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3+2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\det\cdot(-1)}{\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\det\cdot(-1)}{\underset{L_3\cdot(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+2L_3 \\ L_1-3L_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\det\cdot 4}{\underset{L_2\cdot\frac{1}{4}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1-2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(A) = 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4$

$$B: \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2-L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\det\cdot(-1)}{\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4-L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2-L_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2-L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det(B) = -1$

Exercice 3. (Comatrice et cofacteurs)
Calculer l'inverse des matrices suivantes en passant par les cofacteurs

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

A: $m_{11} = \det(A_{11}) = 0$ $\quad m_{12} = -\det(A_{21}) = -(-16) = 16$ $\quad m_{13} = \det(A_{31}) = \cancel{0}\,-2$ $\quad$ Par Ex. 2, $\det(A) = 4$.

$m_{21} = -\det(A_{12}) = -(-2) = 2$ $\quad m_{22} = \det(A_{22}) = -2$ $\quad m_{23} = -\det(A_{32}) = \cancel{-4}\,-(-1) = 1$

$m_{31} = \det(A_{13}) = 0$ $\quad m_{32} = -\det(A_{23}) = -\overset{-4}{\cancel{(-1)}} = 1$ $\quad m_{33} = \det(A_{33}) = 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot M = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 16 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B: $m_{11} = 1$ $\quad m_{12} = -x$ $\quad m_{13} = xy - z$ $\quad \det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$m_{21} = 0$ $\quad m_{22} = 1$ $\quad m_{23} = -y$

$m_{31} = 0$ $\quad m_{32} = 0$ $\quad m_{33} = 1$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot M = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x & xy-z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy-z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (cont.)

C: $m_{11} = 0$ $\quad m_{12} = 0$ $\quad m_{13} = 0$ $\quad m_{14} = -1$

$m_{21} = -1$ $\quad m_{22} = 0$ $\quad m_{23} = 0$ $\quad m_{24} = 0$

$m_{31} = 0$ $\quad m_{32} = -1$ $\quad m_{33} = 0$ $\quad m_{34} = 0$

$m_{41} = 0$ $\quad m_{42} = 0$ $\quad m_{43} = -1$ $\quad m_{44} = 0$

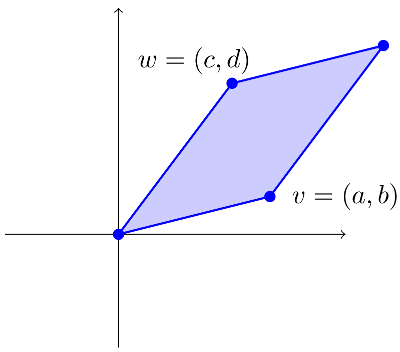
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\det\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\det\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\det\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\det(C) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot M = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

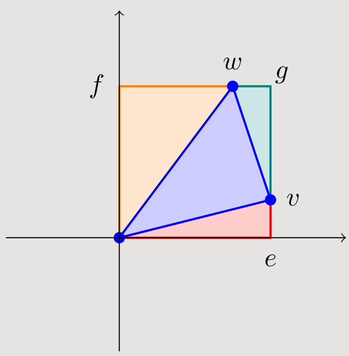
Exercice 4.(Interprétation géométrique du déterminant)

(a) Montrer que l'aire du parallélogramme engendré par deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^2$ (*i.e.* le parallélogramme dont les sommets sont $0, v, v+w, w$) est égale au déterminant de la matrice 2×2 dont les lignes sont données par les vecteurs v, w.



$$\text{Aire} \stackrel{?}{=} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Indice : Étudiez comment la figure / l'aire évolue quand on remplace w par $w - \lambda v$.



Observons que l'aire du triangle $0vw$ est égale à la moitié de celle du parallélogramme. Soient les points $e = (a, 0), f = (0, d), g = (a, d)$. Alors

$$\begin{aligned} A(0vw) &= A(0egf) - A(0ev) - A(0wf) - A(vgw) \\ &= ad - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} - \frac{(d-b)(a-c)}{2} \\ &= ad - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} - \frac{ad}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} - \frac{bc}{2} \\ &= \frac{ad}{2} - \frac{bc}{2} \\ &= \frac{ad - bc}{2} \end{aligned}$$

On conclut que l'aire du parallélogramme est égale à $2 \cdot \frac{ad-bc}{2} = ad - bc$.

(b) En déduire que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \iff \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} < 2$$

Donner une condition géométrique qui est également équivalente à ces deux conditions.

Si $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 0$, alors l'aire du parallélogramme correspondant est nulle. On en déduit que l'image formée par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est une ligne ou un point, ainsi la dimension de cette image est inférieure à la dimension du plan. Comme le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée, on conclut que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \iff \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} < 2$$

On observe qu'une telle image est formée si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

(c) Comment pourrait-on généraliser les énoncés (a) et (b) en dimension supérieure ?

Observons que l'aire du parallélogramme vaut 1 dans la base formée par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Alors le déterminant représente le facteur à appliquer pour convertir une aire dans cette base à une aire dans la base canonique.
Par analogie, pour un espace de dimension n, le déterminant d'une matrice carrée de même dimension est égal au n-volume unitaire de la base formée par les lignes de cette matrice, exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. S'il est nul, alors l'espace formé est de dimension inférieure.

Exercice 5.(Déterminant de matrice à paramètre)
Considérons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) En utilisant la méthode du pivot, déterminer le rang de C. Cette valeur dépend de $m \in \mathbb{R}$.

(b) Calculer le déterminant de C. La valeur obtenue permet-elle de trouver la réponse à la question (a) ?

Exercice 5

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-mL_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} \underset{L_3+L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2-m^2-m \end{pmatrix}$

Si $m=1$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{rang}(C) = 1$

Si $m=-2$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{rang}(C) = 2$

Sinon, $\text{rang}(C) = 3$.

(b) $\det(C) = 1 \cdot (m-1)(-m^2-m+2) = 0$ ssi $x=1$ ou $x=-2$.

La valeur de $\det(C)$ permet donc de dériver une partie de la réponse de (a), à savoir les cas où $\text{rang}(C) < 3$, mais pas ~~le~~ ~~du~~ rang exact de C dans ces cas.

Exercice 6.(Déterminant de matrices particulières)
Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Exercice 6

$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = (1 \cdot 4 \cdot 6) \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3}$.