Algèbre I - Série 03

Exercice 1. (Familles libres et génératrices de vecteurs)
Les familles suivantes sont-elles libres ou génératrices ? Si oui le prouver, sinon donner un contre-exemple.

1. $\{(1,1),(1,-i)\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$
2. $\{(1,2,2),(-2,0,2),(-2,2,-1)\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$
3. $\{(1,2,2),(-2,0,2),(-2,2,-1)\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{R}$
4. Donner une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Et sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2. (Indépendance linéaire de fonctions)
Dans l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les familles ci-dessous sont-elles libres ?

1. $\{3x^2, 2x^4\}$
2. $\{3^x, 3^{x+3}\}$
3. $\{1m\sin^2(x), \cos^2(x)\}$
4. $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(4x)\}$
5. La famille infinie $\{1, \sin(x), \sin(2x), \sin(4x), \sin(8x), \sin(16x), \dots\}$

Exercice 3. (Sous-famille libre)
Montrer l'affirmation suivante :
Si $\{v_1,\dots,v_n\}$ est une famille libre dans un espace vectoriel V,
Alors toute sous-famille $\{v_i\}_{i\in I}$ indexée par $I \subset \{1,\dots,n\}$ est aussi libre.

Exercice 4. (Dimension d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$)
On note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension de l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
(b) En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$.
(c) Montrer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. En déduire $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$.

Exercice 5. (Base, famille libre maximale et famille génératrice minimale)
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{v_1,\dots,v_n\} \subset V$.

(a) En cours, nous avons vu que les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) $\mathcal{F}$ est une base de V
  (ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre maximale de V
  (iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale de V
  L'équivalence $(i) \iff (ii)$ a été montrée en cours. Montrer l'équivalence $(i) \iff (iii)$.
(b) Montrer que

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } V \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice et } \operatorname{card}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$$

Indication : card$(\mathcal{F})$ est le nombre d'éléments de la famille $\mathcal{F}$.