

Exercice 1. (Résolution graphique de systèmes)(a) Dans l'espace \mathbb{R}^2 muni des coordonnées cartésiennes (x, y) , dessiner les droites d'équations

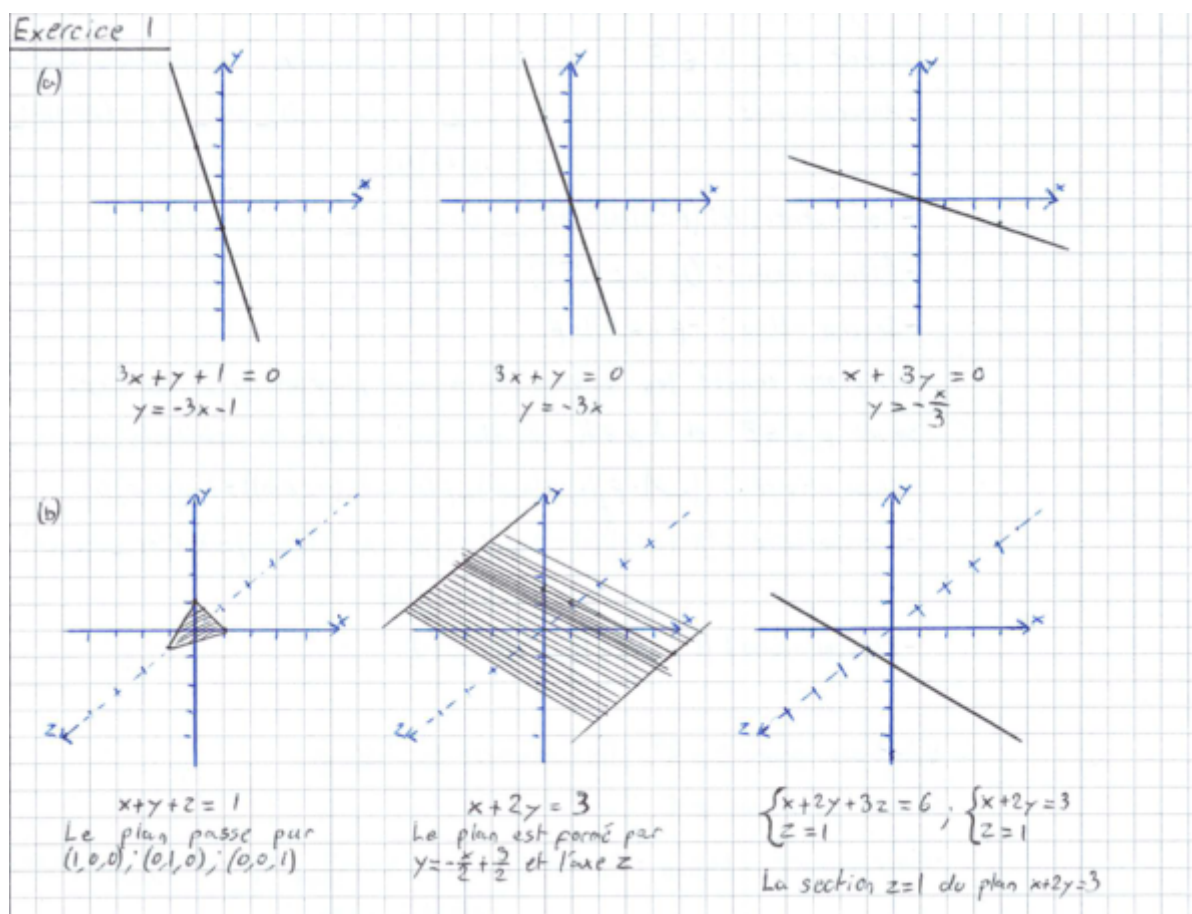
$$3x + y + 1 = 0, \quad 3x + y = 0, \quad \text{et} \quad x + 3y = 0$$

(b) Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , dessiner les plans d'équations

$$x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad x + 2y = 3$$

ainsi que l'intersection des deux plans d'équations

$$x + 2y + 3z = 6 \quad \text{et} \quad z = 1$$



Exercice 2. (Résolution algébrique de systèmes)
Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 6 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{(-L_2)} \begin{cases} y + z = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \text{Sol} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 6 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-1L_1)} \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y = 6 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-2L_1)} \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

L_2 et L_3 présentent une contradiction.
Sol = \emptyset

Exercice 3. (Espaces vectoriels des fonctions)

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), & \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x), & \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où le $+$ et le \cdot du côté droit dénotent l'addition et la multiplication usuelles dans \mathbb{R} , forme un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites de scalaires $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{R}$, qui peut aussi être vu comme l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \alpha \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (\alpha \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

forme un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Exercice 3

1. Vérifions pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les axiomes de l'addition :

Soient $f, g, h \in E$. En bleu sont soulignées les opérateurs usuels dans \mathbb{R}

$$\text{- Associativité : } (f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ = ((f + g) + h)(x)$$

$$\text{- Commutativité : } (f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

$$\text{- Élément neutre : } 0_E := f : x \mapsto 0$$

$$\text{- Inverse additif : } -f := (-1) \cdot f$$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En bleu sont soulignées les opérateurs usuels dans \mathbb{R}

$$\text{- Associativité : } ((\lambda \cdot \mu) \cdot f)(x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot f(x) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)) = \lambda \cdot (\mu \cdot f)(x)$$

$$\text{- Distributivité : } (\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \cdot (f + g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) \\ = ((\lambda \cdot f) + (\lambda \cdot g))(x)$$

$$\text{- Élément neutre : } (1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

2. Vérifions pour $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les axiomes de l'addition :

Soient $u, v, w \in E$.

$$\text{- Associativité : } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n + w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + (v_n + w_n))_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n + w_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((u_n + v_n) + w_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{- Commutativité : } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n + u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{- } \cancel{0_E} \text{ L'élément neutre est la suite } u \text{ où, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

$$\text{- L'inverse additif est } (-u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1) \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\text{- Associativité : } (\lambda \cdot \mu) \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\lambda \cdot \mu) \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot \mu \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot (\mu \cdot u_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ = \lambda \cdot (\mu \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{- Distributivité : } \lambda \cdot (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot (u_n + v_n))_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot u_n + \lambda \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (\lambda \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{- Élément neutre : } 1 \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1 \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Exercice 4. (Notion d'espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si c'est un espace vectoriel ou non sur \mathbb{R} . Si oui, prouver la (les) propriété(s) entre parenthèse demandée(s). Si non, expliquer quel axiome est mis en défaut. Attention, certaines questions n'admettent pas pour réponse juste oui ou non.

1. L'espace $E = \{0\}$ avec les lois usuelles. \rightsquigarrow (Neutre de l'addition)
2. L'espace $E = [0, 1]$ avec les lois usuelles. \rightsquigarrow (Neutre de la multiplication)
3. L'espace $E = \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ avec les lois usuelles. \rightsquigarrow (Commutativité de l'addition)

4. L'espace $E = \mathbb{R}^2$ avec l'addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et la multiplication $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$. \leadsto (Associativité de l'addition)
5. L'espace $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = b\}$ avec les lois usuelles (définies pour l'exercice 3.1), où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont fixés. \leadsto (toutes les propriétés)
6. L'espace $E = \mathbb{R}[x]$ des polynômes $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sans borne sur leur degré, avec les lois usuelles. \leadsto (Distributivité à droite)

Exercice 4

1. Oui : L'élément neutre additif 0_E est 0, car pour tout élément x de E (comme $E = \{0\}$, $x = 0$) $0 + x = x$, et $0 \in E$.

2. Non : E n'admet pas d'inverse additif : $\forall x \exists x \in E, [x + (-x) = 0_E]$ ^{n'a} ~~n'admet~~ pas de solution

3. Non : L'opération de multiplication par un scalaire n'est pas bien définie dans \mathbb{R} : par exemple, $\underbrace{0.3}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{2}_{\in E} \notin E$

4. Non : Aucun axiome n'est vérifié. Ex : Élément neutre de la multiplication par un scalaire : $1 \cdot (x, y) = (x, 0) \neq (x, y)$

5. Si $b \neq 0$, l'élément neutre défini pour l'exercice 3.1 n'appartient pas à E , et par conséquent E n'est pas un espace vectoriel. \Rightarrow Non

Si $b = 0$: Soient $f, g, h \in E$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\bullet f(a) + (g+h)(a) = 0 + g(a) + h(a) = 0 + 0 + 0 = (f(a) + g(a)) + h(a) = (f+g)(a) + h(a)$$

$$\bullet f(a) + g(a) = 0 + 0 = g(a) + f(a)$$

$$\bullet f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ appartient à } E$$

$$\bullet f(a) + (-f(a)) = 0 + (-0) = 0 \neq 0$$

$$\bullet (\lambda \cdot \mu) \cdot f(a) = (\lambda \cdot \mu) \cdot 0 = \lambda \cdot (\mu \cdot 0) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(a))$$

$$\bullet \lambda \cdot (f+g)(a) = \lambda \cdot (f(a) + g(a)) = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot f(a) + \lambda \cdot g(a)$$

$$\bullet 1 \cdot f(a) = 1 \cdot 0 = 0 = f(a)$$

\Rightarrow Oui

6. Oui : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soient $p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$ et $p' = \alpha'_0 + \alpha'_1 x + \alpha'_2 x^2 + \dots + \alpha'_n x^n$

$$\text{Alors : } \lambda \cdot (p+p') = \lambda \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \alpha'_0 + \alpha'_1 x + \alpha'_2 x^2 + \dots + \alpha'_n x^n)$$

$$= \lambda \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n) + \lambda \cdot (\alpha'_0 + \alpha'_1 x + \alpha'_2 x^2 + \dots + \alpha'_n x^n)$$

$$= \lambda \cdot p + \lambda \cdot p'$$

Exercice 5. (Notion de sous-espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si F est un espace vectoriel de E ou non, et le prouver. Tous les espaces vectoriels E sont sur \mathbb{R} .

1. $E = M_{2,2}(\mathbb{R})$, $F = \left\{ A \in E \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ \lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \}$, où $u, v \in \mathbb{R}^3$ sont fixés.
3. $E = \{ f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) \}$, $F = \{ f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) = a \}$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.
4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et
 - (a) $F_1 = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M \}$, où $M \in \mathbb{R}$ est fixé,
 - (b) F_2 l'ensemble des fonctions bornées de E .
5. $E = \mathbb{R}_4[x]$, F l'ensemble des fonctions impaires de E .
6. E un espace vectoriel (quelconque), $F = \{ u + v \mid u \in U, v \in V \}$, où U, V sont deux sous-espaces vectoriels (quelconques) de E fixés.

Exercice 5

1. Non: L'élément neutre $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F .

2. Oui:

- Pour $\lambda = \mu = 0$, $0_E = (0, 0) = (\lambda u + \mu v) \in F$
- $(\lambda u + \mu v) + (\lambda' u + \mu' v) = \lambda u + \mu v + \lambda' u + \mu' v = \underbrace{(\lambda + \lambda')}_{\in \mathbb{R}} u + \underbrace{(\mu + \mu')}_{\in \mathbb{R}} v \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (\lambda u + \mu v) = \alpha \cdot \lambda u + \alpha \cdot \mu v = \underbrace{(\alpha \cdot \lambda)}_{\in \mathbb{R}} u + \underbrace{(\alpha \cdot \mu)}_{\in \mathbb{R}} v \in F$

F est donc non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

3. Si $\alpha \neq 0$, $0_E \in F$, donc F n'est sous-espace vectoriel de E . \Rightarrow Non

Si $\alpha = 0$, Oui:

- $0_E = f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{matrix} \in F$
- $f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, donc $(f(0) + g(0)) \in F$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$, donc $(\lambda \cdot f(0)) \in F$

F est alors non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

4. (a) Non: Soit $f, |f(x)| = M$, et $g, |g(x)| > 0$, alors $f, g \in F$ mais $f+g \notin F$

(b) Oui:

- $0_E = f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{matrix} \in F$
- Si f et g sont bornées, alors $\min(f), \max(f), \min(g), \max(g)$ existent.
Par conséquent, $\min(f+g) = \min(f) + \min(g)$ et $\max(f+g) = \max(f) + \max(g)$ existent.
Ainsi, $(f+g)$ est bornée, et appartient donc à F .
- Si f est bornée, alors $\min(f)$ et $\max(f)$ existent.
Par conséquent, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\min(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \min(f)$ et $\max(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \max(f)$ existent.
Ainsi, $(\lambda \cdot f)$ est bornée, et appartient donc à F .

5. Oui: Fonction impaire: $f(-x) = -f(x)$ (Dans E : polynôme de degré $\alpha \cdot x^\alpha + \beta \cdot x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

- $0_E = f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{matrix} \in F$, car $f(-0) = 0 = -0 = -f(0)$
- $f(x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x))$, Donc $(f+g) \in F$
- $\lambda \cdot f(-x) = \lambda \cdot (-f(x)) = -(\lambda \cdot f(x))$, Donc $(\lambda \cdot f) \in F$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Oui: $F = U + V$: Somme de sous-espaces vectoriels

- Puisque U et V sont sous-espaces vectoriels de E , $0_E \in U$ et $0_E \in V$.
Donc, $0_E = \underbrace{0_U}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in V} \in F$.
- $(u+v) + (u'+v') = \underbrace{(u+u')}_{\in U} + \underbrace{(v+v')}_{\in V} \in F$, car U et V sont s.e.v. de E .
- $\lambda \cdot (u+v) = \underbrace{(\lambda u)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda v)}_{\in V} \in F$, car U et V sont s.e.v. de E .