Logique et Théorie des Ensembles

Automne 2024 **Série 05-B** Buff Mathias

Exercice 1. Nier la proposition : "Tous les étudiants de la faculté des Sciences qui ont les yeux marron auront 6 à tous leurs examens et prendront leur retraite avant 50 ans."

> "Il existe un étudiant de la faculté des Sciences qui a les yeux marron et qui n'aura pas 6 à un de ses examens ou qui prendra sa retraite après 50 ans."
> *(C'est sûrement Philippe)*

Exercice 2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

> 1. FAUSSE.
>   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$
> 2. VRAIE.
>   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$
> 3. FAUSSE.
>   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$
> 4. VRAIE.
>   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

Exercice 3. Écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x, y \in E, xy = yx$
2. $\exists x \in E, \forall y \in E, xy = yx$
3. $\forall a, b \in A, [ab = 0 \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0)]$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, [x < y \implies f(x) < f(y)]$
5. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon]$
6. $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon]$

> 1. $\exists x, y \in E, xy \neq yx$
> 2. $\forall x \in E, \exists y \in E, xy \neq yx$
> 3. $\exists a, b \in A, [ab = 0 \text{ et } (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)]$
> 4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, [x < y \text{ et } f(x) \geq f(y)]$
> 5. $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, [n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| \geq \varepsilon]$
> 6. $\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, [n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| \geq \varepsilon]$

Exercice 4. Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

1. $\forall n \geq 0, u_n < u_{n+1}$ (où (u_n) est une suite réelle)
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction :
   (a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = C$
   (b) $\forall x \in E, [f(x) = 0 \implies x = 0]$
   (c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) = y$
   (d) $\forall x \in E, \forall y \in E, [f(x) = f(y) \implies x = y]$
   (e) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq A$

1. "(u_n) es strictement croissante"
   Négation : $\exists n \geq 0, u_n \geq u_{n+1}$
2. (a) "f est constante (en C)"
   Négation : $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) \neq C$
   (b) "$f(x) = 0$ uniquement pour $x = 0$"
   Négation : $\exists x \in E, [f(x) = 0$ et $x \neq 0]$
   (c) "f est surjective"
   Négation : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \neq y$
   (d) "f est injective"
   Négation : $\exists x \in E, \exists y \in E, [f(x) = f(y)$ et $x \neq y]$
   (e) "f est majorée (par A)"
   Négation : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) > A$

Exercice 5. Soit E un ensemble et $P(x)$ des prédicats indexés par $x \in E$. Écrire l'assertion $\exists! x \in E, P(x)$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$. Puis écrire la négation de cette assertion.

$\exists! x \in E, P(x)$: *Il existe un x pour lequel $P(x)$ sont vrais, et ce x est unique*
$\iff \exists x \in E, P(x)$ et $[\forall y \in E, P(y) \implies x = y]$

Négation : *Soit il n'existe aucun x pour lequel $P(x)$ sont vrais, soit x n'est pas unique*
$\iff \forall x \in E, \neg P(x)$ ou $[\exists y \in E, P(y)$ et $x = y]$