

**Exercice 1.** (Résolution graphique de systèmes)(a) Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  muni des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , dessiner les droites d'équations

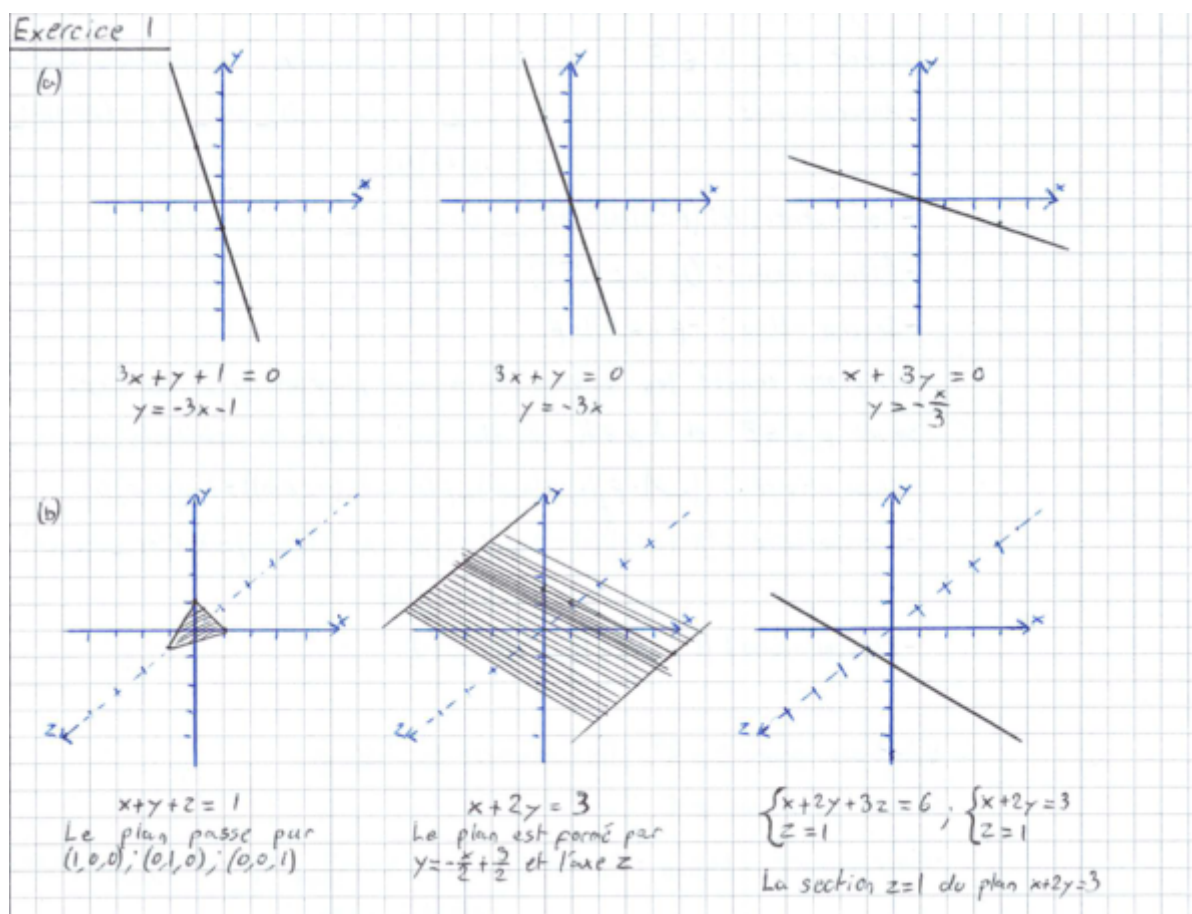
$$3x + y + 1 = 0, \quad 3x + y = 0, \quad \text{et} \quad x + 3y = 0$$

(b) Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , dessiner les plans d'équations

$$x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad x + 2y = 3$$

ainsi que l'intersection des deux plans d'équations

$$x + 2y + 3z = 6 \quad \text{et} \quad z = 1$$



**Exercice 2.** (Résolution algébrique de systèmes)

Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y &= 0 \\ x - 2y &= 6 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 & (-L_2) \\ x &= \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y + z &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - z \\ z = z \end{matrix}$$

$$Sol = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x - 2y &= 6 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (-L_1) \\ (-2L_1) \end{matrix} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -3y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ y = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$L_2$  et  $L_3$  présentent une contradiction, donc  $Sol = \emptyset$

**Exercice 3.** (Espaces vectoriels des fonctions)

1. Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), & \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x), & \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où le  $+$  et le  $\cdot$  du côté droit dénotent l'addition et la multiplication usuelles dans  $\mathbb{R}$ , forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifions pour  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  les axiomes de l'addition :

Soient  $f, g, h \in E$

— Associativité :

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) \\ &= ((f + g) + h)(x) \end{aligned}$$

— Commutativité :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

— L'élément neutre additif  $0_E$  est la fonction constante  $f(x) = 0$ .

— L'inverse additif est la fonction  $-f := (-1) \cdot f$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient  $f, g \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

— Associativité :

$$((\lambda \cdot \mu) \cdot f)(x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot f(x) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)) = \lambda \cdot (\mu \cdot f)(x)$$

— Distributivité :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot (f + g))(x) &= \lambda \cdot (f + g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) \\ &= ((\lambda \cdot f) + (\lambda \cdot g))(x) \end{aligned}$$

— Élément neutre :  $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot (f(x)) = f(x)$ .  $-f := (-1) \cdot f$

2. Soit  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble de toutes les suites de scalaires  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{R}$ , qui peut aussi être vu comme l'ensemble des fonctions  $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ . Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned}(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \alpha \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (\alpha \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifions pour  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  les axiomes de l'addition :

Soient  $u, v, w \in E$

— Associativité :

$$\begin{aligned}(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n + w_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (u_n + (v_n + w_n))_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n + w_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= ((u_n + v_n) + w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (w_n)_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

— Commutativité :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n + u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} + (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

— L'élément neutre additif  $0_E$  est la suite constante  $u_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

— L'inverse additif est la suite  $-(u_n)_{n \in \mathbb{N}} := (-1) \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient  $u, v \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

— Associativité :

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot \mu) \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &= ((\lambda \cdot \mu) \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot \mu \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot (\mu \cdot u_n))_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \lambda \cdot (\mu \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

— Distributivité :

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\lambda \cdot (u_n + v_n))_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \cdot u_n + \lambda \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= (\lambda \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (\lambda \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

— Élément neutre :  $1 \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1 \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Exercice 4. (Notion d'espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si c'est un espace vectoriel ou non sur  $\mathbb{R}$ . Si oui, prouver la (les) propriété(s) entre parenthèse demandée(s). Si non, expliquer quel axiome est mis en défaut. Attention, certaines questions n'admettent pas pour réponse juste oui ou non.

1. L'espace  $E = \{0\}$  avec les lois usuelles.  $\rightsquigarrow$  (Neutre de l'addition)
2. L'espace  $E = [0, 1]$  avec les lois usuelles.  $\rightsquigarrow$  (Neutre de la multiplication)
3. L'espace  $E = \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  avec les lois usuelles.  $\rightsquigarrow$  (Commutativité de l'addition)
4. L'espace  $E = \mathbb{R}^2$  avec l'addition  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$  et la multiplication  $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$ .  $\rightsquigarrow$  (Associativité de l'addition)
5. L'espace  $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = b\}$  avec les lois usuelles (définies pour l'exercice 3.1), où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  sont fixés.  $\rightsquigarrow$  (toutes les propriétés)
6. L'espace  $E = \mathbb{R}[x]$  des polynômes  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sans borne sur leur degré, avec les lois usuelles.  $\rightsquigarrow$  (Distributivité à droite)

#### Exercice 4

1. Oui : L'élément neutre additif  $0_E$  est 0, car pour tout élément  $x$  de  $E$  (comme  $E = \{0\}$ ,  $x=0$ )  $0+x=x$ , et  $0 \in E$ .
2. Non :  $E$  n'admet pas d'inverse additif :  $\forall x \in E, [x+(-x)=0_E]$  <sup>n'a</sup> ~~n'admet~~ pas de solution.
3. Non : L'opération de multiplication par un scalaire n'est pas bien définie dans  $\mathbb{R}$  :  
par exemple,  $\underbrace{0.3}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{2}_{\in E} \notin E$
4. Non : Aucun axiome n'est vérifié. Ex: Élément neutre de la multiplication par un scalaire :  
 $1 \cdot (x, y) = (x, 0) \neq (x, y)$
5. Si  $b \neq 0$ , l'élément neutre défini pour l'exercice 3.1 n'appartient pas à  $E$ , et par conséquent  $E$  n'est pas un espace vectoriel.  $\Rightarrow$  Non  
Si  $b=0$  : Soient  $f, g, h \in E$ , et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 
  - $f(a) + (g+h)(a) = 0 + g(a) + h(a) = 0 + 0 + 0 = (f(a) + g(a)) + h(a) = (f+g)(a) + h(a)$
  - $f(a) + g(a) = 0 + 0 = g(a) + f(a)$
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à  $E$
  - $f(a) + (-f(a)) = 0 + (-0) = 0 \neq \cancel{0}$
  - $(\lambda \cdot \mu) \cdot f(a) = (\lambda \cdot \mu) \cdot 0 = \lambda \cdot (\mu \cdot 0) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(a))$
  - $\lambda \cdot (f+g)(a) = \lambda \cdot (f(a) + g(a)) = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot f(a) + \lambda \cdot g(a)$
  - $1 \cdot f(a) = 1 \cdot 0 = 0 = f(a)$

$\Rightarrow$  Oui
6. Oui : Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , Soient  $p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$  et  $p' = \alpha'_0 + \alpha'_1 x + \alpha'_2 x^2 + \dots + \alpha'_n x^n$   
Alors :  $\lambda \cdot (p+p') = \lambda \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \alpha'_0 + \alpha'_1 x + \alpha'_2 x^2 + \dots + \alpha'_n x^n)$   
 $= \lambda \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n) + \lambda \cdot (\alpha'_0 + \alpha'_1 x + \alpha'_2 x^2 + \dots + \alpha'_n x^n)$   
 $= \lambda \cdot p + \lambda \cdot p'$

**Exercice 5.** (Notion de sous-espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si  $F$  est un espace vectoriel de  $E$  ou non, et le prouver. Tous les espaces vectoriels  $E$  sont sur  $\mathbb{R}$ .

1.  $E = M_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  $F = \left\{ A \in E \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2.  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \{ \lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \}$ , où  $u, v \in \mathbb{R}^3$  sont fixés.
3.  $E = \{ f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) \}$ ,  $F = \{ f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) = a \}$ , où  $a \in \mathbb{R}$  est fixé.
4.  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et
  - (a)  $F_1 = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M \}$ , où  $M \in \mathbb{R}$  est fixé,
  - (b)  $F_2$  l'ensemble des fonctions bornées de  $E$ .
5.  $E = \mathbb{R}_4[x]$ ,  $F$  l'ensemble des fonctions impaires de  $E$ .
6.  $E$  un espace vectoriel (quelconque),  $F = \{ u + v \mid u \in U, v \in V \}$ , où  $U, V$  sont deux sous-espaces vectoriels (quelconques) de  $E$  fixés.

### Exercice 5

1. Non: L'élément neutre  $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'appartient pas à  $F$ .

2. Oui:

- Pour  $\lambda = \mu = 0$ ,  $0_E = (0, 0) = (\lambda u + \mu v) \in F$
- $(\lambda u + \mu v) + (\lambda' u + \mu' v) = \lambda u + \mu v + \lambda' u + \mu' v = \underbrace{(\lambda + \lambda') u}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(\mu + \mu') v}_{\in \mathbb{R}} \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \cdot (\lambda u + \mu v) = \alpha \cdot \lambda u + \alpha \cdot \mu v = \underbrace{(\alpha \cdot \lambda) u}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(\alpha \cdot \mu) v}_{\in \mathbb{R}} \in F$

$F$  est donc non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

3. Si  $\alpha \neq 0$ ,  $0_E \in F$ , donc  $F$  n'est sous-espace vectoriel de  $E$ .  $\Rightarrow$  Non

Si  $\alpha = 0$ , Oui:

- $0_E = f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{matrix} \in F$
- $f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ , donc  $(f(0) + g(0)) \in F$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$ , donc  $(\lambda \cdot f(0)) \in F$

$F$  est alors non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

4. (a) Non: Soit  $f, |f(x)| = M$ , et  $g, |g(x)| > 0$ , alors  $f, g \in F$  mais  $f+g \notin F$

(b) Oui:

- $0_E = f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{matrix} \in F$
- Si  $f$  et  $g$  sont bornées, alors  $\min(f), \max(f), \min(g), \max(g)$  existent.  
Par conséquent,  $\min(f+g) = \min(f) + \min(g)$  et  $\max(f+g) = \max(f) + \max(g)$  existent.  
Ainsi,  $(f+g)$  est bornée, et appartient donc à  $F$ .
- Si  $f$  est bornée, alors  $\min(f)$  et  $\max(f)$  existent.  
Par conséquent, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\min(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \min(f)$  et  $\max(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \max(f)$  existent.  
Ainsi,  $(\lambda \cdot f)$  est bornée, et appartient donc à  $F$ .

5. Oui: Fonction impaire:  $f(-x) = -f(x)$  (Dans  $E$ : polynôme de degré  $\alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ )

- $0_E = f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{matrix} \in F$ , car  $f(-0) = 0 = -0 = -f(0)$
- $f(x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x))$ , Donc  $(f+g) \in F$
- $\lambda \cdot f(-x) = \lambda \cdot (-f(x)) = -(\lambda \cdot f(x))$ , Donc  $(\lambda \cdot f) \in F$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Oui:  $F = U + V$ : Somme de sous-espaces vectoriels

- Puisque  $U$  et  $V$  sont sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $0_E \in U$  et  $0_E \in V$ .  
Donc,  $0_E = \underbrace{0_U}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in V} \in F$ .
- $(u+v) + (u'+v') = \underbrace{(u+u')}_{\in U} + \underbrace{(v+v')}_{\in V} \in F$ , car  $U$  et  $V$  sont s.e.v. de  $E$ .
- $\lambda \cdot (u+v) = \underbrace{(\lambda u)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda v)}_{\in V} \in F$ , car  $U$  et  $V$  sont s.e.v. de  $E$ .