Série 2.B

Exercice 1

Partons de Ø: Oéléments

Par l'axiome de puissance P(0) = 203 : l'élément

A = P ({ B}) = { p, { B}} : 2 eléments

B=P(A)={0, {0}}, {{0}}, {{0}}; {\$\phi, {\phi}, {\phi}, {\phi}, {\phi}} \cdots

l'ar l'axiome de compréhension: C= {x ∈ P(B) tel que x € B et x € {{ se} } {{ se} } }

C: 24-4-2 = 10 éléments

Alors, 9(c) possède 2' éléments.

On peut remarquer que l'axiome de puissance permet de construire des ensembles de grande taille et l'axiome de compréhension permet de restreindre librement le nombre d'éléments d'un ensemble. On en déduit donc qu'il est possible de construire des ensembles de taille pinie quelconque.

Exercice 2

1. AAB = (AUB) \ (AOB)

[] Montrons que AAB = (AUB) (ANB)

Soit x & AAB, i.e. x & (An(EVB)) U (Bn(EVA))

- Si x & (An(E1B)), along x & A et x & E1B, donc x & B.

Par conséquent x & (AUB) mais x x (ANB). Donc x & (AUB) (ANB).

- Six E (Bn(EVA)) alors XEB et X E EVA, donc XXA.

Par conséquent x e (AUB) mais x & (ANB). Donc x e (AUB) (ANB).

D Montrons que AAB > (AUB) \ (AOB)

Soit xe (AUB) (ANB), i.e. XEA ou XEB, mais XEANB.

- Si xEA; alors X & B, dooc XEEB (car xEE, puisque ACE)

Par conséquent x E(An(EVB))

- SixeB, alors XXA, donc XEE (A (car XEE, puisque BEE)

Par conséquent x (BN(EVA))

Il est donc montré que pour tout xe (AUB) \((AnB) xe (An(E\B)) ou

× E (BO(EVA)) i.e. × E ADB.

Ayant montré cet 5 il est montré que AAB = (AUB) (ANB)

```
Exercice 2 (cont.)
 2. (AAB) = Ø <=> (A=B)
   Supposons AAB= N
         Par le point 1. de cet exercice, (AUB) (ANB) = Ø.
         Donc, tous les éléments de AUB est conten appartiennent à ANB.
         i.e. (AUB)=(AnB).
         Comme AcAUBCANBCB, ACB. De la même mapière BCA.
         Alors, A=B.
   Supposons A=B
         Par le point 1. de cet exercice ADB = (AUB) (ADB)
                                               = (AUA) \ (ADA)
                                               =A\A
   Ayant mostré = et = il est mostré que (AAB # = 9) <=> (4=B).
Exercice 3
 1. EU (FAG) = (EUF) A (EUG)
   C Mostrons que EU(FAG) C(EUF) n(EUG)
        Soit X & EU (FAG). Alors:
        - S. XE E alors XE(EUF) et XE(EUG) donc XE ((EUF) n (EUG))
        -SixeFOG alors xeF dooc xe(EUF) et xeG dooc xe(EUG)
        Par conséquent x d(EUF) n(EUG)
   > Montrons que EU(FNG) > (EUF) n(EUG)
         Soit x e ((EUF) n (EUG)). Donc x e (EUF) et x e (EUG).
          -S: XEE alors XE (EU(FAG)).
         - SixEE alors XEF our XE(EUF) et XEG car XE(EUG).
           Donc xe (FOG) et x EU (FOG).
 2. E\(FUG)=(E\F)n(E\G)
         Montrons que EN(FUG) C (ENF) N(ENG). Soit x EEN (FUG)
         Alors XEE mais XX FUG door XX F et XX G. Autrement dit

XEE et XX F. door Xe(ENF) et XEE et XX G. door XE (ENG). Pour conséquent

XX (ENF) n (ENG).
         Montrons que El (FUG) > (ELF) n (ELG). Soit x e (ELF) n (ELG)
          Alors XEE mais XEF et XEE mais XEG . Donc XEE et XE FAG.
```

Exercice 3 (coot.) 3. E\ (FAG) = (EXF) U (EXG) Montrons que El (FnG) = (ELF) U(ELG). Soit x E El (FnG). Alors XEE mais XX(FAG). - SixEF alors x & G, et comme x EE, x E(E/G) - Sixe G alors X & F et commexeE x E(EIF) Done, xe(EIF) ou xe(EIG), i.e. xe(EIF)U(EIG). 3 . Montrons que EN(ENG) > (ENF)U(ENG). Soit x e ((ENF)U(ENG)). - Sixe(EIF), alors XEE et XEF -SixE(ELG), word XEE et XEG Done x EE mais x & (FOG), par conséquent x E(E) (FOG). Exercice 4 E = F <=> P(E) = P(F) Sopposons E=F. En particulier EcF donc toute partie de E est également partie de F. Donc P(E) c P(F). Par le même raisonnement puisque FeE alors P(F) c P(E). Comme P(E) c P(F) et P(F) c P(E) P(E) = P(F). Supposas P(E) = P(F). Soit A une partie de E. Comme ACE alors AEP(E) et puisque P(E)=P(F) AeP(F) donc ACF. Puisque A est général, ECF. Par le même raisonnement il peut être montré que Fct. Comme Ecf et FCE E=F. Exercice 5 Les éléments de {0} sont : 0 Les éléments de P(fos) sont : 0, fos Les éléments de P(P(303)) = P(30, 3033) sont : 0, 503 , 5033 , 50 5033. Done, P(P(303) = 10, 503, 5033, 50, 50334. Exercice 6 Preuve par labsorde: Supposons F l'ensemble de tous les ensembles et AcF la partie de F composée des ensembles ne sappartenant pas. Si A s'appartient, alors A n'est pas un élément de A donc A ne s'appartient pas et par conséquent A est un élément de A, donc A s'appartient. Cette situation mène done à un paradoxe et l'ensemble de tous les ensembles ne peut pas exister.