Exercice 1.
Résoudre les systèmes linéaires suivants, en travaillant avec les matrices correspondantes et leur forme échelonnée :

$$\text{(i)}\ \begin{cases} x & -2y & +3z & = & 1 \\ 2x & -3y & +5z & = & 0 \\ -x & +4y & -z & = & 1 \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\ \begin{cases} 3x & +y & +z & = & 8 \\ -2x & +y & -3z & = & -22 \\ x & & +z & = & 7 \\ 3x & +2y & +z & = & 5 \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\ \begin{cases} x_1 & -5x_2 & -x_3 & +12x_4 & -x_5 & & = & -4 \\ -2x_1 & +10x_2 & +3x_3 & -33x_4 & +2x_5 & +x_6 & = & 4 \\ & & x_3 & -9x_4 & +x_5 & & = & 8 \\ x_1 & -5x_2 & +2x_3 & -15x_4 & +2x_5 & +x_6 & = & 14 \end{cases}$$

Exercice 1

(i)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3+L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3-2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{L_3\cdot\frac{1}{4}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1-3L_3 \\ L_2+L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1+2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc, $x=-4$, $y=-1$, $z=1$, ainsi $\underline{Sol=\{(-4,-1,1)\}}$

(ii)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & -3 & -22 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -3 & -22 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4-3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -13 \\ 0 & 2 & -2 & -16 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3-L_2 \\ L_4-2L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+L_3 \\ L_1-L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc, $x=2$, $y=-3$, $z=5$, ainsi $\underline{Sol=\{(2,-3,5)\}}$

(iii)
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ -2 & 10 & 3 & -33 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & -5 & 2 & -15 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_4-L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -27 & 3 & 1 & 18 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3-L_2 \\ L_4-3L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 30 \end{array}\right) \underset{L_4-3L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Après réarrangement des colonnes : $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6] \sim [x_1\ x_3\ x_5\ x_6\ x_2\ x_4]$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -5 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2-L_4 \\ L_3+L_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -5 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1+L_3 \\ L_1+L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

On pose les variables libres suivantes :

$x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_4 = s \in \mathbb{R}$

Alors, $x_1 = 4+5t-3s$, $x_3 = 2+9s$, $x_5 = 6$, $x_6 = -6$

Donc, $\underline{Sol = \{(4+5t-3s,\ t,\ 2+9s,\ s,\ 6,\ -6) \mid t, s \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 2.
Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x & -y & -z & = & b \\ -2x & +3y & +3z & = & b^2 - b + 1 \\ & y & +z & = & b \end{cases}$$

où x, y, z sont les inconnues et b est un paramètre.

(i) Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{R}$ le système admet-il une solution ?

(ii) Pour quelles valeurs de $b \in \mathbb{C}$ le système admet-il une solution ?

Exercice 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b \\ -2 & 3 & 3 & b^2-b+1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{L_2+2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b^2+b+1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{\substack{L_3-L_2 \\ L_1+L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b^2+2b+1 \\ 0 & 1 & 1 & b^2+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -b^2-1 \end{array}\right)$$

D'après la troisième ligne, le système n'admet aucune solution si $-b^2-1 \neq 0$.

(i) $-b^2-1=0 \iff b^2=-1$, donc pour ~~[illegible]~~ tout $b \in \mathbb{R}$, $-b^2-1 \neq 0$ et le système n'a aucune solution.

(ii) $-b^2-1=0 \iff b^2=-1 \iff b=\pm\sqrt{-1}=\pm i$, donc le système admet une solution pour $b=i$ et $b=-i$

Par ailleurs, comme la matrice échelonnée possède une variable libre, nous avons alors une infinité de solutions dans ces cas.

Exercice 3.
Considérons le système d'équations linéaires suivant pour les inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} mx & +y & +z & = & 1 \\ x & +my & +z & = & m \\ x & +y & +mz & = & m^2 \end{cases}$$

(i) Résoudre ce système linéaire pour le cas particulier $m = 0$

(ii) Résoudre ce système linéaire pour le cas particulier $m = -1$

(iii) Plus généralement, pour quelles valeur de $m \in \mathbb{R}$ ce système possède-t-il une solution ? Dans le cas où une solution existe, est-elle unique ?

Exercice 3

(i) Pour $m=0$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{L_3 \cdot (-\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Donc $\text{Sol} = \{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

Exercice 3 (cont.)

(ii) Pour $m=-1$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 + L_1 \\ L_3 + L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \cdot (-1) \\ L_2 \cdot \frac{1}{2} \\ L_3 \cdot \frac{1}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 + L_2 \\ L_1 + L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Donc $\text{Sol} = \{(0, 1, 0)\}$

(iii) Pour $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - mL_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^2 \end{array}\right) \underset{L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-2m^2 \end{array}\right)$$

Observons la troisième ligne : $L_3 = (0 \;\; 0 \;\; 2-m-m^2 \,|\, 1+m-2m^2)$

$2-m-m^2 = (2+m)(1-m)$ et $1+m-2m^2 = (1+2m)(1-m)$ Alors :

- Si $m=-2$, $L_3 = (0 \; 0 \; 0 \,|\, -9)$ et le système ne possède aucune solution.
- Si $m=1$, $L_3 = (0 \; 0 \; 0 \,|\, 0)$ et le système possède une infinité de solutions.
- Pour toutes les autres valeurs de m, L_3 est de la forme $(0 \; 0 \; \alpha \,|\, *)$, où $\alpha \neq 0$, et le système possède donc une unique solution.

Exercice 4.
Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 2, 3), \quad u_1 = (4, 5, 6), \quad u_1 = (1, -1, 0)$$

(i) À l'aide de la méthode du pivot. montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

(ii) À l'aide de la méthode du pivot, écrire $(1, 3, -6)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$

(iii) On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2.
Écrire F sous la forme

$$F = \{(x_1 x_2 x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$$

où a, b, c, d sont des réels à préciser.
Indications : Un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ généré par deux vecteurs non-colinéaires forme un plan. Un plan peut être décrit par son équation cartésienne $ax + by + cz = d$. Ici, par définition d'un sous-espace vectoriel, $(0, 0, 0) \in F$. Par définition de F, on a également $u_1, u_2 \in F$.
Avec ces informations, peut-on déterminer les coefficients a, b, c et d ?

(i) Observons la matrice $A = (u_1\ u_2\ u_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On constate que la forme échelonnée de A met en évidence 3 pivots. Ainsi, le système linéaire $a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = b$ admet une unique solution pour n'importe quel vecteur $b \in \mathbb{R}^3$.

On en conclut que les vecteurs colonne de A (*i.e.*$\{u_1, u_2, u_3\}$) forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -9 \end{array}\right) \underset{L_3 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \cdot (-\frac{1}{3}) \\ L_3 \cdot \frac{1}{3}}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \underset{L_1 - 4L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array}\right)$$

Les coordonnées de $(1, 3, -6)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ sont donc $(-\frac{26}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{11}{3})$.

(iii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & d \\ 4 & 5 & 6 & d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right)$ est absorde sauf si $d = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 - 4L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \cdot (-\frac{1}{3})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

En posant la variable libre : $c = t \in \mathbb{R}$

Nous avons $a = t$, $b = -2t$ et donc $tx_1 - 2tx_2 + tx_3 = 0 \iff t \cdot (x_1 - 2x_2 + x_3) = 0$

Si $t = 0$, nous avons la solution triviale $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$
Sinon, alors $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, donc $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = 0$.

Donc, $\underline{F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}}$

Exercice 5.
Considérons $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

(i) À l'aide de la méthode du pivot. montrer que $\mathcal{B} = \{1+2x+3x^2, 4+5x+6x^2, 1-x\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$

(ii) À l'aide de la méthode du pivot, écrire $1+3x-6x^2$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$

(iii) On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ engendré par $1+2x+3x^2$ et $4+5x+6x^2$.
Écrire F sous la forme

$$F = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a\alpha_0 + b\alpha_1 + c\alpha_2 = d\}$$

où a, b, c, d sont des réels à préciser.

Est-ce qu'il y a un point que je ne remarque pas, où c'est exactement le même exercice que Exercice 4 ?

(i) Même démonstration que 4.(i)

(ii) $1+3x-6x^2 = -\frac{26}{3} \cdot (1+2x+3x^2) + \frac{10}{3} \cdot (4+5x+6x^2) - \frac{11}{3} \cdot (1-x)$

(iii) $F = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid \alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0\}$