Exercice 1

(i) Initialisation: Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{n} k = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Induction: Supposons $A := \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ vraie pour n. Alors,

$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Donc A est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, A est montrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Initialisation: Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 = 0 = \left(\frac{0\cdot(0+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Induction: Supposons $A := \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ vraie pour n. Alors,

$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=0}^{n} k^3 = (n+1)(n+1)^2 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (n+1)(n+1)^2 + \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \frac{4\cdot(n+1)+n^2}{4}\cdot(n+1)^2 = \frac{(4+4n+n^2)\cdot(n+1)^2}{4}$

$= \frac{(n+2)^2\cdot(n+1)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2$ Donc A est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, A est montrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Initialisation: Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 = 1 = \frac{1-a}{1-a} = \frac{(1-a^{0+1})}{1-a} = \frac{(1-a^{n+1})}{1-a}$

Induction: Supposons $A := \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{(1-a^{n+1})}{1-a}$ vraie pour n. Alors,

$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} + \frac{(1-a^{n+1})}{1-a} = \frac{a^{n+1}\cdot(1-a)+1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}-a^{n+2}+1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$ Donc A est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, A est montrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Initialisation: Pour $n=0$, $0 < 1 = 2^0 = 2^n$ donc $n < 2^n$, et pour $n=1$ $1 < 2 = 2^1 = 2^n$ donc $n < 2^n$.

Induction: Supposons $A := n < 2^n$ vraie pour n. Alors, avec $n \geq 1$,

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2\cdot n \geq n+1$, ~~car $n+1 \geq 1$~~ donc A est vraie pour $n+1$

Comme A est montrée vraie pour $n=0$ et $n=1$, et par récurrence pour $n>1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

L'énoncé suppose l'existence du plus grand entier naturel strictement positif sans la prouver. Ainsi, la preuve montre que:

"Le plus grand entier naturel ~~positif~~ strictement positif, s'il existe, est 1."

Exercice 4

Initialisation: Pour $n=0$, $(1+x)^n = (1+x)^0 = 1 \geq 1+0\cdot x = 1+nx$.

Induction: Supposons l'inégalité de Bernoulli vraie pour n. Alors,

$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}\cdot(1+x)^n \geq (1+x)\cdot(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$.

Donc, l'inégalité de Bernoulli est vraie pour $n+1$ et par récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

(i)-(iv) Pour chacun de ces ensembles, il est directement explicite que $\inf E = 2$ et $\sup E = 3$.

(i) Comme $2 \in E$, $\min E = \inf E = 2$ et comme $3 \notin E$, l'ensemble n'a pas de maximum.

(ii) Comme $2 \in E$, $\min E = \inf E = 2$ et comme $3 \in E$, $\max E = \sup E = 3$

(iii) Comme $2 \notin E$ et $3 \notin E$, l'ensemble n'a ni minimum ni maximum.

(iv) Comme $2 \notin E$, l'ensemble n'a pas de minimem et comme $3 \in E$, $\max E = \sup E = 3$.

(v) ~~$\inf E = \min([-2,2] \cup (5,8)) = -2 = \min E$~~
~~$\sup E = \max([-2,2]$~~

$\inf E = \min(\inf[-2,2] \cup \inf(5,8)) = -2 = \min E$
$\sup E = \max(\sup[-2,2] \cup \sup(5,8)) = 8$ E n'a pas de maximum.

(vi) $[0,1] + [-3,7] = [-3,8] \Rightarrow \min E = \inf E = -3$; $\max E = \sup E = 8$

(vii) Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$. Donc 1 est majorant de E, et comme $1 \in E$, $\max E = \sup E = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} > 0$ donc 0 est minorant de E, et par le principe d'Archimède, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$ donc 0 est l'infimum de E.

L'ensemble n'a pas de minimum.

(viii) Si $x \in [-1,0)$ alors $x^2 \in (0,1]$
Si $x \in [0,4)$ alors $x^2 \in [0,16)$

Donc, $E = (0,1] \cup [0,16) = [0,16)$.
Il suit que $\min E = \inf E = 0$, $\sup E = 16$, et E n'a pas de maximum.

(ix) Si n est impair : $4 + \frac{1+(-1)^n}{n} = 4 + \frac{0}{n} = 4$
Si n est pair : $4 + \frac{1+(-1)^n}{n} = 4 + \frac{2}{n} > 4$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4 + \frac{1+(-1)^n}{n} \geq 4$ et $4 \in E$, donc $\min E = \inf E = 4$.

$\sup E = \sup(4) + \sup(\{\frac{2}{n} : n \text{ pair}\}) = 4 + 1 = 5$ et $5 \in E$ (pour $n=2$).
Donc $\max E = \sup E = 5$.

Exercice 6

(i) $\boxed{\Longleftarrow}$ est directe : Comme $x \geq 0$, $x = 0 \Rightarrow |x| = x = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $|x| = 0$, alors $x = 0$ ou $-x = 0$, et comme $-0 = 0$, $x = 0$.

(ii) Si :
- $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $x \cdot y \geq 0$ et $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$
- $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $x \cdot y \leq 0$ et $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = |x \cdot y|$
- $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $x \cdot y \leq 0$ et $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = |x \cdot y|$
- $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors $x \cdot y \geq 0$ et $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y = |x \cdot y|$

Donc, $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$.

Exercice 7

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1-k}{k} + \frac{k}{k+1}$. ($a = 1-k$ et $b = k$). Proposition : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Preuve par récurrence :

Initialisation : Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{n+1}$.

Induction : Supposons la proposition vraie pour n. Alors, $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \frac{1-(n+1)}{n+1} + \frac{(n+1)}{n+2} + \frac{n}{n+1} = \frac{1-n-1+n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} = \frac{0}{n+1} + \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$ Donc la proposition est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, la proposition est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8

(i) $\binom{n+1}{p+1}-\binom{n}{p}=\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!}-\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=\frac{(n+1)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!}-\frac{(p+1)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!}=\frac{((n+1)-(p+1))\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!}=\frac{(n-p)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!\cdot(n-p)}=\frac{n!}{(p+1)!\,(n-(p+1))!}$

$=\binom{n}{p+1}$ Donc, $\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p+1}+\binom{n}{p}$.

(ii) Initialisation : Pour $n=0$, $(a+b)^0=1=\binom{0}{0}\cdot a^0\cdot b^{0-0}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Pour $n=1$, $(a+b)^1=a+b=b+a=\binom{1}{0}a^0b^1+\binom{1}{1}a^1b^0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Induction : Supposons $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}$ vraie pour n. Alors,

$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=a\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}+b\cdot\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}$

$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}=a^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$

$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1}$

$=a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}=a^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$

Donc $(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}a^k b^{n+1-k}$ et par récurrence, la formule du binôme est montrée pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 9

$x+y\leqslant x+\sup B\leqslant \sup A+\sup B$ donc $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$, i.e. $\sup(A+B)\leqslant \sup A+\sup B$

$(x+y)\leqslant \sup(A+B)\implies x\leqslant \sup(A+B)-y$ donc $\sup(A+B)-y$ est majorant de A,

$\implies \sup A\leqslant \sup(A+B)-y$

$\implies \sup A+y\leqslant \sup(A+B)$

$\implies y\leqslant \sup(A+B)-\sup A$ donc $\sup(A+B)-\sup A$ est majorant de B,

$\implies \sup B\leqslant \sup(A+B)-\sup A$

$\implies \sup A+\sup B\leqslant \sup(A+B)$

Comme $\sup(A+B)\leqslant \sup A+\sup B$ et $\sup A+\sup B\leqslant \sup(A+B)$, $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Pour avoir $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$, nous devons rajouter l'hypothèse suivante :

$\sup A=\sup\{|x|:x\in A\}$ et $\sup B=\sup\{|y|:y\in B\}$

En d'autres termes, la partie positive de A et B doit être plus grande que leur partie négative.

Exercice 10

$u_n=\frac{6n^2-\sqrt{n}}{2n^2+n}=\frac{6-\frac{\sqrt{n}}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{6-\frac{1}{n\sqrt{n}}}{2-\frac{1}{n}}$ Par conséquent,

$\lim_n u_n=\frac{\lim_n\left(6-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\lim_n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{6-\lim_n\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{2-\lim_n\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{6-0}{2-0}=\frac{6}{2}=3.$ Donc u_n converge vers 3.

Exercice 11

Soit $u:=\lim_n u_n$, soit $\varepsilon>0$:

$||u_n|-|u||\leqslant |u_n+u|=|-(u_n-u)|=|u_n-u|\leqslant\varepsilon$ Donc $|u_n|$ converge et $\lim_n|u_n|=|u|=|\lim_n u_n|$

Exercice 12

Soient (i): $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$ et (ii): $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$

(i) $\Rightarrow$ (ii) est directe : Si $|u_n - l| < \varepsilon$, alors $|u_n - l| \leq \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Comme (ii) est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, alors en particulier elle est vraie pour tout $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, et donc $|u_n - l| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.

Exercice 13

(i) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = \dfrac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})\cdot(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{n+3-(n+1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$

Donc, $\lim\limits_n u_n = \dfrac{2}{\lim\limits_n(\sqrt{n+3}) + \lim\limits_n(\sqrt{n+1})} = \dfrac{2}{\infty + \infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

(ii) b_n oscille entre $-\left(\frac{n+5}{n}\right)$ et $\left(\frac{n+5}{n}\right)$, elle est donc divergente.

Avec $\varphi(n) = 2n$ et $\varphi'(n) = 2n+1$, $\lim\limits_n b_{\varphi(n)} = 1$ et $\lim\limits_n b_{\varphi'(n)} = -1$, donc -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de b_n.

(iii) Montrons que $2^n \geq n^3$ pour $n \geq 10$: Initialisation : pour $n=10$, $10^3 = 1000$, $2^{10} = 1024 > 1000$.

Induction : Supposons que $2^n \geq n^3$ est vraie pour n. Alors,

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \geq 2\cdot n^3 \underset{\uparrow}{\geq} n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$

(Vrai pour $n \geq 4$)

Donc, $\lim\limits_n c_n \leq \lim\limits_n \left(\frac{n(n+1)}{n^3 - 5}\right) = \lim\limits_n \left(\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{5}{n^3}}\right) = \dfrac{\lim\limits_n(\frac{1}{n}) - \lim\limits_n(\frac{1}{n^2})}{1 - \lim\limits_n(\frac{5}{n^3})} = \dfrac{0-0}{1-0} = 0$

De plus, $(n(n+1)) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $2^n - 5 > 0$ pour $n \geq 3$, donc $c_n \geq 0$ pour $n \geq 3$, donc $\lim\limits_n c_n \geq 0$.

Comme $\lim\limits_n c_n \leq 0$ et $\lim\limits_n c_n \leq 0$, on conclut que $\lim\limits_n c_n = 0$.

(iv) $d_n = \left(\frac{2n^3}{n^3 - 7}\right)^2 = \left(\frac{2}{1 - \frac{7}{n^3}}\right)^2$. Donc, $\lim\limits_n d_n = \lim\limits_n \left(\frac{2}{1-\frac{7}{n^3}}\right)^2 = \left(\frac{2}{1 - \lim\limits_n(\frac{7}{n^3})}\right)^2 = \left(\frac{2}{1-0}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 2^2 = 4.$