Exercice 1

(i) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x-y| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$

Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, [|x-y| \leq \delta$ et $f(x) < f(y)]$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon]$

Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, [|x-y| < \delta$ et $|f(x)-f(y)| > \varepsilon]$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N, [n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

Négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists n \geq N, [n \geq N$ et $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon]$

(iv) $\forall E \subset \mathbb{N}, [E \neq \emptyset \Rightarrow (\exists n \in E, \forall m \in E, m \geq n)]$

Négation : $\exists E \subset \mathbb{N}, [E \neq \emptyset$ et $(\forall n \in E, \exists m \in E, m < n)]$

(v) $\forall E \subset \mathbb{R}, [E \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}, ((\forall b \in E : b \leq a)$ et $(\forall \varepsilon > 0, \exists b \in E : b \geq a - \varepsilon))]$

Négation : $\exists E \subset \mathbb{R}, [E \neq \emptyset$ et $(\forall a \in \mathbb{R}, ((\exists b \in E : b > a)$ ou $(\exists \varepsilon > 0, \forall b \in E : b < a - \varepsilon)))]$

Exercice 2

(i) Montrons que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Raisonnement par double inclusion :

$\boxed{\subset}$ Montrons que $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Soit $x \in A \Delta B$, i.e. $x \in (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

- Si $x \in (A \cap B^c)$, alors $x \in A$ et $x \notin B$, donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, donc $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- Si $x \in (B \cap A^c)$, alors $x \in B$ et $x \notin A$, donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, donc $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\boxed{\supset}$ Montrons que $A \Delta B \supset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, i.e. $x \in (A \cup B)$ et $x \notin (A \cap B)$.

- Si $x \in A$, comme $x \notin A \cap B$ alors $x \notin B$, donc $x \in B^c$. Par conséquent, $x \in (A \cap B^c)$.
- Si $x \in B$, comme $x \notin A \cap B$ alors $x \notin A$, donc $x \in A^c$. Par conséquent, $x \in (B \cap A^c)$

Donc, $x \in (A \cap B^c)$ ou $x \in (B \cap A^c)$, i.e. $x \in (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = A \Delta B$.

(ii) Montrons que $(A \Delta B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = B)$. Raisonnement par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons que $(A \Delta B = \emptyset) \Rightarrow (A = B)$. Supposons $A \Delta B = \emptyset$, i.e. $\cancel{(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \emptyset}$ $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \emptyset$

Autrement dit, $(A \cap B^c) = \emptyset$ et $(B \cap A^c) = \emptyset$. Comme $A \cap B^c = \emptyset$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, donc $A \subset B$.
Comme $(B \cap A^c) = \emptyset$, $x \in B \Rightarrow x \in A$, donc $B \subset A$. Puisque $A \subset B$ et $B \subset A$, $A = B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que $(A = B) \Rightarrow (A \Delta B) = \emptyset$. Supposons $A = B$. En particulier, $A \cup B = A \cap B = A$.

Alors, $A \Delta B \overset{(i)}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus A = \emptyset$.

Exercice 3

(i) $\forall n \geq 0,\ u_n < u_{n+1}$: "La suite (u_n) est strictement croissante"

Négation : $\exists n \geq 0,\ u_n \geq u_{n+1}$

(ii) (a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ f(x) = C$: "f est constante en C"

Négation : $\forall C \in \mathbb{R}, \cancel{\forall}\exists x \in E,\ f(x) \neq C$

(b) $\forall x \in E, [f(x) = 0 \Rightarrow x = 0]$: "f ne s'annule qu'en $x=0$"

Négation : $\exists x \in E, [f(x) = 0 \text{ et } x \neq 0]$

(c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in E,\ f(x) = y$: "f est surjective"

Négation : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ f(x) \neq y$

(d) $\forall x \in E, \forall y \in E, [f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$: "f est injective"

Négation : $\exists x \in E, \exists y \in E, [f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y]$

(e) $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ f(x) \leq A$: "f est majorée par A"

Négation : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in E,\ f(x) > A$

Exercice 4

(i) "La fonction f s'annule" $\exists x \in E,\ f(x) = 0$

(ii) "La fonction f est la fonction nulle" $\forall x \in E,\ f(x) = 0$

(iii) "f n'est pas une fonction constante" $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in E,\ f(x) \neq C$

(iv) "f ne prend jamais deux fois la même valeur" $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(v) "La fonction f admet un minimum" $\exists m \in E, \forall x \in E,\ f(x) \geq f(m)$

(vi) "f prend des valeurs arbitrairement grandes" $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in E,\ f(x) \geq M$

(vii) "f ne peut s'annuler qu'une fois" $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow x = y$

Exercice 5

(i) Dire que pour tout $x \in E$ pour tout $y \in F$, $A(x,y)$ est vraie revient à dire que Si $x \in E$ et si $y \in F$, alors $A(x,y)$ est vraie. Il devient alors évident que "Si $x \in E$" et "si $y \in F$" sont interchangeables, et par extension que la proposition est équivalente à dire que pour tout $y \in F$, pour tout $x \in E$, $A(x,y)$ est vraie.

(ii) S'il existe un $x \in E$ pour lequel il existe un $y \in F$ tels que $A(x,y)$ est vraie, alors pour ce y spécifique, il existe au moins le premier x, tels que $A(x,y)$ est vraie.

Ainsi, $\exists x \in E, \exists y \in F\ A(x,y) \Rightarrow \exists y \in F\ \exists x \in E\ A(x,y)$. Par le même raisonnement, la réciproque peut être montrée, et donc les deux propositions sont équivalentes.

(iii) Soient $E, F = \mathbb{N}$ et $A(x,y)$ la proposition "$x \geq y$".

Alors, $\forall y \in F, \exists x \in E,\ A(x,y)$ est VRAIE, mais $\exists x \in E, \forall y \in F,\ A(x,y)$ est FAUSSE.

Démonstration de $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y)$: Il suffit de prendre $x = (y+1) \in \mathbb{N}$.

Démonstration de $\neg(\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists y \in F, \neg A(x,y)$.

$\neg(A(x,y)) = \neg(x \geq y) = x < y$. Il suffit alors de prendre $y = (x+1) \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

(i) Montrons que $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$. Raisonnement par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A = B$. Soit $x \in E$.

- Si $x \in A$, alors $x \in B$, donc $\chi_A = \chi_B = 1$
- Si $x \notin A$, alors $x \notin B$, donc $\chi_A = \chi_B = 0$

Donc, pour tout $x \in E$, $\chi_A = \chi_B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\chi_A = \chi_B$. Soit $x \in E$.

- Si $x \in A$, alors $\chi_A = 1$ donc $\chi_B = 1$ donc $x \in B$. Par conséquent, $A \subset B$.
- Si $x \in B$, alors $\chi_B = 1$, donc $\chi_A = 1$, donc $x \in A$. Par conséquent, $B \subset A$.

Comme $A \subset B$ et $B \subset A$, $A = B$.

(ii) $\chi_A \leq \chi_B$ indique que $\chi_A = 1 \Rightarrow \chi_B = 1$.

Autrement dit, si un élément $x \in E$ appartient à A (donc $\chi_A = 1$) alors il appartient également à B ($\chi_B = 1$).

On peut donc en déduire que $\chi_A \leq \chi_B \Rightarrow A \subset B$.

(iii) • Montrons $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$. Soit $x \in E$:

- Si $\chi_{A \cap B} = 1$, alors $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Par conséquent, $\chi_A = 1$ et $\chi_B = 1$, donc $\chi_A \chi_B = 1$
- Si $\chi_{A \cap B} = 0$, alors $x \notin A \cap B$, donc $x \notin A$ ou $x \notin B$. Par conséquent, $\chi_A = 0$ ou $\chi_B = 0$, donc $\chi_A \chi_B = 0$.

Dans tous les cas, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

• Montrons $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$. Soit $x \in E$:

- Si $\chi_{A^c} = 1$, alors $x \in A^c$, donc $x \notin A$ et $\chi_A = 0$. Par conséquent, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.
- Si $\chi_{A^c} = 0$, alors $x \notin A^c$, donc $x \in A$ et $\chi_A = 1$. Par conséquent, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Dans tous les cas, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

• Montrons $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$. Soit $x \in E$:

- Si $x \in A$ et $x \in B$: Alors $\chi_A = 1$, $\chi_B = 1$, $\chi_{A \cup B} = 1$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1 = \chi_{A \cup B}$.
- Si $x \in A$ et $x \notin B$: Alors $\chi_A = 1$, $\chi_B = 0$, $\chi_{A \cup B} = 1$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1 = \chi_{A \cup B}$.
- Si $x \notin A$ et $x \in B$: Alors $\chi_A = 0$, $\chi_B = 1$, $\chi_{A \cup B} = 1$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 0 + 1 - 0 \cdot 1 = 1 = \chi_{A \cup B}$.
- Si $x \notin A$ et $x \notin B$: Alors $\chi_A = 0$, $\chi_B = 0$, $\chi_{A \cup B} = 0$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0 = \chi_{A \cup B}$.

(iv) Formules de De Morgan : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

• $\chi_{(A \cup B)^c} = 1 - \chi_{A \cup B} = 1 - (\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B) = 1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A \chi_B = (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = \chi_{A^c} \chi_{B^c} = \chi_{(A^c \cap B^c)}$

• $\chi_{(A \cap B)^c} = 1 - \chi_{(A \cap B)} = 1 - \chi_A \chi_B$

$\chi_{(A^c \cup B^c)} = \chi_{A^c} + \chi_{B^c} - \chi_{A^c} \chi_{B^c} = 1 - (\chi_A) + 1 - (\chi_B) - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = 1 - \chi_A + 1 - \chi_B - (1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A \chi_B)$

$= 1 + 1 - 1 - \chi_A + \chi_A - \chi_B + \chi_B - \chi_A \chi_B = 1 - \chi_A \chi_B$.

Comme $\chi_{(A \cap B)^c} = 1 - \chi_A \chi_B$ et $\chi_{(A^c \cup B^c)} = 1 - \chi_A \chi_B$, alors $\chi_{(A \cap B)^c} = \chi_{(A^c \cup B^c)}$

Exercice 7

Soit $f : E \longrightarrow F$ bijective, alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi bijective.

(ii) • Montrons que $(f^{-1})^{-1} = f$. Soit $x \in E$, $y \in F$ tels que $f(x) = y$.

Alors, $f^{-1}(y) = x$, et donc $(f^{-1})^{-1}(x) = y = f(x)$.

• Montrons que $f^{-1} \circ f = I_E$. Soient $x \in E$, $y \in F$ tels que $f(x) = y$.

Alors $f^{-1}(y) = x$, et donc $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, i.e. $f^{-1} \circ f(x) = x = I_E(x)$.

• Montrons que $f \circ f^{-1} = I_F$. Soient $x \in E$, $y \in F$ tels que $f(x) = y$.

Alors $f^{-1}(y) = x$, et donc $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$, i.e. $f \circ f^{-1}(y) = y = I_F(y)$.

(iii) Montrons que $[g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F] \Leftrightarrow g = f^{-1}$. Raisonnement par double implication :

$\boxed{\Leftarrow}$ $g = f^{-1} \Rightarrow [g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F]$ est démontrée au point (ii) de cet exercice.

$\boxed{\Rightarrow}$ ~~Par MoMtro Supposons $g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F$~~

Raisonnement par contraposée : Supposons $g \neq f^{-1}$. Montrons $[g \circ f \neq I_E$ ou $f \circ g \neq I_F]$.

Soient $x \in E$, $y \in F$ tels que $f(x) = y$ et $g(y) \neq x$.

Alors, $g(f(x)) \neq x$ et donc $g \circ f(x) \neq x$, par conséquent $g \circ f \neq I_E$.

Par contraposée, $[g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F] \Rightarrow g = f^{-1}$ est démontrée VRAIE.

(iv) Montrons que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Soient $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$ tels que $f(x) = y$ et $g(y) = z$.

Alors $f^{-1}(y) = x$, et $g^{-1}(z) = y$.

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, donc $g \circ f(x) = z$ et $(g \circ f)^{-1}(z) = x$.

$f^{-1} \circ g^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x = (g \circ f)^{-1}(z)$. Par conséquent, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 8

(i) Soit $A \subset E$ tel que B est l'image directe de A par f, i.e. $f(A) = B$.
Alors l'image réciproque de B est $f^{-1}(B) = A$.

Comme B est l'image directe de A, pour tout $x \in A$ il existe $y \in B$ tel que $f(x) = y$.
Puisque f est bijective, pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $f^{-1}(y) = x$.

Donc, A est également l'image directe de B par f^{-1}, i.e. $f^{-1}(B) = A$.

(ii) $f^{-1}(A \cup B) = \{x \in E : f(x) \in A \cup B\} = \{x \in E : f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B\} = \{x \in E : f(x) \in A\} \cup \{x \in E : f(x) \in B\}$

$= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$f^{-1}(A \cap B) = \{x \in E : f(x) \in A \cap B\} = \{x \in E : f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B\} = \{x \in E : f(x) \in A\} \cap \{x \in E : f(x) \in B\}$

$= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Exercice 8 (cont.)

(iii) Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Raisonnement par double inclusion :

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cup B$. Alors $f(x) \in f(A \cup B)$.

- Si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et $f(A) \subset f(A) \cup f(B)$, donc $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.
- Si $x \in B$, $f(x) \in f(B)$ et $f(B) \subset f(A) \cup f(B)$, donc $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Ainsi $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$, et donc $f(x) \in f(A \cup B)$
- Si $x \in B$, alors $x \in A \cup B$, et donc $f(x) \in f(A \cup B)$

Ainsi, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Comme $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ et $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(v) • Contre exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ et $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

Alors $A \cap B = \{0\}$, et $f(A \cap B) = \{0\}$. Par contre, $f(A) = f(B) = f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$.

• En revanche, si f est injective : $\forall x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, Montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$. Si $f(x) \in f(A) \cap f(B)$, alors $f(x) \in f(B)$ et comme f est injective $x \in B$. Donc, $x \in A \cap B$ et $f(x) \in f(A \cap B)$.

Par conséquent, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ et comme $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (montré au point (iii)),

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 9

(i) Intuition : $f^{-1} : (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$.

• Montrons que f est surjective : Autrement dit, chaque élément $y \in E$ peut être représenté comme $(x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$, avec $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Comme $i = (i+1) - 1$ et que $-1 \in \mathbb{Z}$, alors $i \in \mathbb{Z}$ si $(i+1) \in \mathbb{Z}$, et donc $[\forall f(x) \in E,\ x \in E]$ est vraie.

• Montrons que f est injective : $\forall x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Soient $x, y \in E$. Alors $f((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = f((y_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \iff (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} = (y_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} \overset{(\text{car } i+1 = i+1)}{\iff} (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

Comme f est surjective et injective, elle est bijective. Vérifions la f^{-1} proposée :

$f \circ f^{-1} (x)_{i \in \mathbb{Z}} = f\left(f^{-1}((x_i)_{i \in \mathbb{Z}})\right) = f\left((x_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}\right) = (x_{i-1+1})_{i \in \mathbb{Z}} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

$f^{-1} \circ f\left((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}\right) = f^{-1}\left(f((x_i)_{i \in \mathbb{Z}})\right) = f^{-1}\left((x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}\right) = (x_{i+1-1})_{i \in \mathbb{Z}} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

(ii) f n'est pas surjective, car on ne peut pas trouver de $i \in \mathbb{N}$ tel que $i+1 = 0$.

f est injective, car pour tout $x, y \in \mathbb{N}$ $x+1 = y+1 \Rightarrow x = y$.

(iii) $f(A) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} : x_1 \leq 0\}$; $f(B) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*} : \exists i \in \mathbb{N}, x_{i-1} \geq 0\}$

$f^{-1}(A) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_1 \in [0, 1], x_2 \leq 0\}$; $f^{-1}(B) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \exists i \in \mathbb{N}, x_{i+1} \geq 0\}$