Exercice 1. Étudier les fonctions suivantes en trouvant leurs asymptotes et extremums locaux :

(i) La fonction $x \mapsto 5x^2 - 10x + 15$.

(ii) La fonction $x \mapsto \frac{x^2-5x}{x^2-1}$.

Exercice 1

(i) $\frac{d}{dx}(5x^2 - 10x + 15) = 10x - 10 \Rightarrow f'(x) = 0$ ssi $x = 1$
$f'(x) \to \infty$ ssi $x \to \infty$

Donc f admet une asymptote verticale en $+\infty$, et un point critique en $x = 1$

$\frac{d^2}{dx^2}(5x^2 - 10x + 15) = 10 > 0$ donc $f^{(2)}(1) > 0$ alors $f(1)$ est un minimum local strict.

(ii) $\frac{x^2-5x}{x^2-1} = \frac{x^2-1-(5x-1)}{x^2-1} = 1 - \frac{5x-1}{x^2-1}$

$\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{5x-1}{x^2-1}\right) = 0 - \frac{5(x^2-1) - 2x(5x-1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{5x^2-5-10x^2+2x}{(x^2-1)^2} = \frac{5x^2-2x+5}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow f'(x) = 0$ ssi $5x^2-2x+5 = 0$
$f'(x) \to \infty$ ssi $(x^2-1)^2 \to 0$

$(x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = -96 < 0$ donc $5x^2 - 2x + 5 = 0$ n'a pas de solution Réelle.

Donc f admet des asymptotes verticales en $x = -1$ et $x = 1$, et elle n'a pas d'extremum local.

Exercice 2. En décomposant l'intervalle $[0, b]$ en n intervalles de longueurs égales, montrer à l'aide de l'Exercice 4.1.(ii) que

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$$

Exercice 2

Décomposons $[0,b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-0}{n}$. En prenant $x_i := \frac{ib}{n}$, nous avons

$$\int_0^b x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^3 \cdot \frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{b^4}{n^4} \cdot i^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{n^4} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{b^4}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4} \cdot 1 = \frac{b^4}{4}.$$

Exercice 3. Montrer que

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \tag{1}$$

pour tout $b \geq a \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$, comme suit.

(i) Montrer qu'il suffit de considérer $a > 0$.

(ii) Trouver la décomposition de $[a, b]$ en n intervalles $I_1, \ldots, I_n$, où I_i a les bords a_i et a_{i+1}, tels que le *quotient* a_{i+1}/a_i ne dépend pas de i.

(iii) En utilisant la décomposition de (ii) et l'expression pour la série géométrique, conclure (1) pour $b > a > 0$.

Exercice 3

(i) Soit $\phi(a) = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$. Alors $\lim_{a \to 0} \phi(a) = \frac{b^{p+1}}{p+1} = \phi(0)$ Donc ϕ est continue en 0.

Alors, si la proposition $\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$ est vraie pour $a > 0$, elle sera vraie pour $a = 0$.

(ii) Nous pouvons décomposer $[a, b]$ en n intervalles I_i de bords a_i et a_{i+1}, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Comme suit : $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}$. Alors le quotient $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$

et la longueur de l'intervalle I_i est $a_{i+1} - a_i = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}} - a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}$

$$= a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{i/n} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

(iii)
$$\int_a^b x^p dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot |I_i| = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\right)^{p} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\right) \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\right)^{p+1} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} a^{p+1} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^i$$

$$= \lim_{n \to \infty} -a^{p+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}\right) \cdot \frac{1 - \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^n}{1 - \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} -a^{p+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{p+1}\right) \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}}$$

$$= b^{p+1} - a^{p+1} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}}$$

$$= b^{p+1} - a^{p+1} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{p} \left(\frac{b}{a}\right)^{k/n}}$$

$$= b^{p+1} - a^{p+1} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{p} 1} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

1/

Exercice 4. Déterminer si les fonctions f suivantes définies sur $[0, 1]$ sont intégrables. Justifier la réponse.

(i)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |2^{k+1}(x - 2^{-k}) - 1| & \text{si } x \in [2^{-k}, 2^{-k+1}] \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commencer par dessiner le graphe de f.

Exercice 4

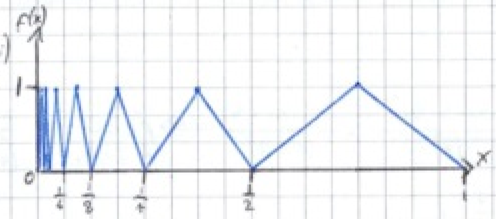
(i) Pour tout intervalle $I \subset [0,1]$ tel que $|I| > 0$, on a $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et $I \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
Par conséquent, $0 = \inf_I f < x = \sup_I f$.

Alors, pour toutes fonctions en escalier e, g tq $e \leqslant f \leqslant g$, on a

$\int_0^1 e \leqslant 0$ et $\int_0^1 g \geqslant x$, donc $\underline{\int_0^1} f \leqslant 0 \leqslant x \overline{\int_0^1} f$ et comme l'égalité $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f$

n'est vraie qu'en un seul point : $x = 0$, on conclut que f n'est pas intégrable.

(ii)



Constatons que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - |2^k x - 3| & \text{pour } x \in [2^{-k}, 2^{-k+1}] \end{cases}$

avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Décomposons $[0,1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{2^k}$, $k = \{1, \dots, n\}$.

Observons que $f(x)$ forme sur un intervalle I_k un triangle isocèle de hauteur 1

et de base $\frac{1}{2^k}$, donc son aire vaut $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Alors nous pouvons construire la somme de Riemann $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$, et on a

$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.$

Exercice 5. Montrer que la suite

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2}$$

converge et exprimer sa limite comme une intégrale.

Exercice 5

Soit (v_n^i) une suite, $v_n^i = \frac{n}{(n+i)^2} = \frac{n}{n^2 + 2ni + i^2} = \frac{1}{n + 2i + \frac{i^2}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Alors $(u_n) = \sum_{i=1}^{n} v_n^i$ est une somme de suites convergentes, donc (u_n) converge.

$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n+i)^2} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{n + \frac{ni}{n}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{n}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(1+x_i)^2}\right) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx.$

Exercice 6. (Études de suites définies par récurrence)
Soit f une fonction C^1 et soit ℓ un point fixe de f, *i.e.* $f(\ell) = \ell$. Définissons la suite (u_n) par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) Supposons $|f'(\ell) < 1|$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\ell) < 1 - \varepsilon < 1|$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(\ell) \leq 1 - \varepsilon|$ pour tout $x \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$. Nous fixons maintenant δ possédant cette propriété.

   (b) Montrer que si $u_N \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$, alors $|u_{n+1} - \ell| \leq (1 - \varepsilon)|u_n - \ell|$ pour tout $n \geq N$.

   (c) Montrer que $|u_n - \ell| \leq (1 - \varepsilon)^n |u_0 - \ell|$ si u_0 est assez proche de ℓ. En déduire que pour u_0 assez proche de $\ell, (u_n)$ tend vers ℓ. On dit que le point fixe est *attractif.*

(ii) Supposons $|f'(\ell) > 1|$. Montrer en raisonnant par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ ssi $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = \ell$. Dans ce cas, le point fixe est dit *répulsif.*