Exercice 1

Soit $\varepsilon > 0$, et prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$. ~~Sans perte supposons~~ Alors,
$|f(x)-f(y)| = |ax+b-ay-b| = |ax-ay| = |a||x-y| < |a|\delta = \varepsilon$.

$|f(x)-f(y)| = |a||x-y| \leq k|x-y|$ si $k \geq |a|$.

Donc, f est k-lipschitzienne pour $k \in [a, \infty)$.

Exercice 2

(i) Soit $\varepsilon > 0$, et prenons $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$. Alors, comme f est α-Höldecienne,
$|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} < C\delta^{\alpha} = \varepsilon$ donc f est uniformément continue.

(ii) Sans perte de généralité, supposons $x > y$. Prenons $C = 1$.
Alors, $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{1/2} \iff |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq |\sqrt{x-y}| \iff x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - y \iff 2y - 2\sqrt{xy} \leq 0$ (*)
Et (*) est vraie car $x > y$, donc $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^{1/2}$ est vraie.

(iii) $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq C|x-y|^{\alpha-1}$ et comme $\alpha > 1$, $\alpha - 1 > 0$.
Donc, quand x tend vers y, $C|x-y|^{\alpha-1}$ tend vers 0, donc
$\lim_{x \to y} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, donc $|f'(x)| = 0$ et f est constante.

Exercice 3

(i) f tend vers 0 en ∞ et $-\infty$, i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists M_1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > M_1 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ et
$\forall \varepsilon > 0, \exists M_2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < M_2 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Donc, en posant $M = \max(M_1, -M_2)$, $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M] \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ et en particulier, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(ii) Puisque f est continue et que $[-(M+1), M+1]$ est un intervalle fermé, elle est uniformément continue sur cet intervalle.

(iii) Par (i), $\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R} \setminus [-M, M]$. Par (ii), elle est uniformément continue sur $[-(M+1), M+1]$. Comme $\mathbb{R} \setminus [-M, M] \cup [-(M+1), M+1] = \mathbb{R}$, on conclut que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(iv) Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il n'y a aucun point de $\mathbb{R}$ pour lequel elle adopte un comportement asymptotique. Donc, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq A$.

Exercice 4

(i) Puisque $f \in C(I, \mathbb{R})$ et $[a,b] \subset I$, alors $f([a,b])$ est un intervalle.

Procédons par l'absurde : Sans perte de généralité, supposons $f(b) > f(a)$.

Supposons qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,x]$ tel que $f(c) = f(b)$, mais $c \neq b$ donc f n'est pas injective. $\Rightarrow\Leftarrow$.

Donc, si $f(a) > f(b)$, alors $f(x) \in [f(b), f(a)]$ et si $f(b) > f(a)$, $f(x) \in [f(a), f(b)]$

(ii) $\forall a, b \in I$, $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. Alors, soit $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
soit $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Et on conclut que f est monotone.

Exercice 5

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - x, \frac{1}{x^2+1}\right) = \left(\frac{d}{dx} x^3 - x, \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2+1}\right) = \left(2x - 1, \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1}\right)$$

Exercice 6

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$ est continue mais pas uniformément continue.

Exercice 7

Puisque f est périodique de période 1, alors $f([0,1]) = f([1,2]) = f([2,3]) \ldots$
i.e., $f([0,1]) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]\right) = f(\mathbb{R})$, donc il suffit de montrer que f est bornée et uniformément continue sur $[0,1]$.

Comme $[0,1]$ est un intervalle fermé et que f est continue, alors f est uniformément continue sur cet intervalle.

De plus, comme $[0,1]$ est un intervalle et que f est continue, alors $f([0,1])$ est un intervalle, donc f est bornée par $\min(f([0,1]))$ et $\max(f([0,1]))$.

Exercice 8

f est mal définie en 0 : puisque 0 est rationnel, alors $f(0) = \frac{1}{q}$ où $0 = \frac{p}{q}$, ~~sa~~ mais $\frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ donc $f(0)$ ne résulte pas en un unique élément de $\mathbb{R}$.