Exercice 1. Montrer par récurrence que

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ pour tout $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$

Exercice 1

(i) Initialisation: Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Induction: Supposons $A := \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ vraie pour n. Alors,

$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Donc A est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, A est montrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Initialisation: Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = \left(\frac{0\cdot(0+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Induction: Supposons $A := \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ vraie pour n. Alors,

$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=0}^{n} k^3 = (n+1)(n+1)^2 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (n+1)(n+1)^2 + \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = \frac{4\cdot(n+1)+n^2}{4}\cdot(n+1)^2 = \frac{(4+4n+n^2)\cdot(n+1)^2}{4}$

$= \frac{(n+2)^2\cdot(n+1)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right)^2$ Donc A est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, A est montrée vraie pourtout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Initialisation: Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{0} a^k = a^0 = 1 = \frac{1-a}{1-a} = \frac{(1-a^{0+1})}{1-a} = \frac{(1-a^{n+1})}{1-a}$

Induction: Supposons $A := \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{(1-a^{n+1})}{1-a}$ vraie pour n. Alors,

$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} + \frac{(1-a^{n+1})}{1-a} = \frac{a^{n+1}\cdot(1-a)+1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}-a^{n+2}+1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$ Donc A est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, A est montrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n < 2^n$.

Exercice 2

Initialisation: Pour $n=0$, $0<1=2^0=2^n$ donc $n<2^n$, et pour $n=1$ $1<2=2^1=2^n$ donc $n<2^n$.

Induction: Supposons $A := 0<2^n$ vraie pour n. Alors, avec $n \geq 1$,

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2\cdot n \geq n+1$, ~~car n+1 ≥ 1~~ donc A est vraie pour $n+1$

Comme A est montrée vraie pour $n=0$ et $n=1$, et par récurrence pour $n>1$, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Où est la faute de raisonnement dans la preuve suivante ?
"Montrons que le plus grand entier naturel strictement positif est 1.
En effet, soit n le plus grand entier positif. Comme $n \geq 1$, nous trouvons $n^2 \geq n$. Mais puisque n est le plus grand entier naturel, $n^2 \leq n$ de sorte que $n^2 = n$ et donc $n = 1$ (puisque $n \neq 0$).
Donc 1 est le plus grand entier naturel strictement positif."

Exercice 3

L'énoncé suppose l'existence du plus grand entier naturel strictement positif sans la prouver. Ainsi, la preuve montre que :

"Le plus grand entier naturel ~~positif~~ strictement positif, s'il existe est 1."

Exercice 4. (Inégalité de Bernoulli)
Montrer par récurrence que pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 4

Initialisation : Pour $n=0$, $(1+x)^n = (1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \cdot x = 1 + nx$.

Induction : Supposons l'inégalité de Bernoulli vraie pour n. Alors,

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \cdot (1+x)^n \geqslant (1+x) \cdot (1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geqslant 1 + (n+1)x .$$

Donc, l'inégalité de Bernoulli est vraie pour $n+1$ et par récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Trouver le supremum et l'infimum pour chacun des ensembles suivants. Préciser lorsqu'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Justifier chaque réponse.

(i) $[2,3)$

(ii) $[2,3]$

(iii) $(2,3)$

(iv) $(2,3]$

(v) $[-2,2]\cup(5,8)$

(vi) $[0,1]+[-3,7]=\{x+y : x\in[0,1], y\in[-3,7]\}$

(vii) $\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^*\}$

(viii) $\{x^2 : x\in[-1,4)\}$

(ix) $\{4+\frac{1+(-1)^n}{n} : n\in\mathbb{N}^*\}$

Exercice 5

(i)-(iv) Pour chacun de ces ensembles, il est directement explicite que $\inf E = 2$ et $\sup E = 3$.

(i) Comme $2\in E$, $\min E = \inf E = 2$ et comme $3\notin E$, l'ensemble n'a pas de maximum.

(ii) Comme $2\in E$, $\min E = \inf E = 2$ et comme $3\in E$, $\max E = \sup E = 3$

(iii) Comme $2\notin E$ et $3\notin E$, l'ensemble n'a ni minimum ni maximum.

(iv) Comme $2\notin E$, l'ensemble n'a pas de minimum et comme $3\in E$, $\max E = \sup E = 3$.

(v) $\cancel{\inf E = \min([-2,2]\cup(5,8)) = -2 = \min E}$
$\cancel{\sup E = \max([-2,2]}$

$\inf E = \min(\inf[-2,2]\cup\inf(5,8)) = -2 = \min E$
$\sup E = \max(\sup[-2,2]\cup\sup(5,8)) = 8$ E n'a pas de maximum.

(vi) $[0,1]+[-3,7]=[-3,8] \Rightarrow \min E = \inf E = -3$; $\max E = \sup E = 8$

(vii) Pour $n\geq 1$, $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{1}=1$. Donc 1 est majorant de E, et comme $1\in E$, $\max E = \sup E = 1$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n}>0$ donc 0 est minorant de E, et par le principe d'Archimède, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{N}\leq\varepsilon$ donc 0 est l'infimum de E.

L'ensemble n'a pas de minimum.

(viii) Si $x\in[-1,0)$ alors $x^2\in(0,1]$
Si $x\in[0,4)$ alors $x^2\in[0,16)$

Donc, $E=(0,1]\cup[0,16)=[0,16)$.
Il suit que $\min E = \inf E = 0$, $\sup E = 16$, et E n'a pas de maximum.

(ix) Si n est impair : $4+\frac{1+(-1)^n}{n} = 4+\frac{0}{n} = 4$
Si n est pair : $4+\frac{1+(-1)^n}{n} = 4+\frac{2}{n} > 4$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $4+\frac{1+(-1)^n}{n}\geq 4$ et $4\in E$, donc $\min E = \inf E = 4$.

$\sup E = \sup(4) + \sup(\{\frac{2}{n} : n \text{ pair}\}) = 4+1 = 5$ et $5\in E$ (pour $n=2$).
Donc $\max E = \sup E = 5$.

Exercice 6. (Proposition 2.4) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

(i) $|x| = 0 \iff x = 0$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Exercice 6

(i) $\boxed{\Longleftarrow}$ est directe : Comme $x \geqslant 0$, $\not x = 0 \Rightarrow |x| = x = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $|x| = 0$, alors $x = 0$ ou $-x = 0$, et comme $-0 = 0$, $x = 0$.

(ii) Si :
- $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $x \cdot y \geqslant 0$ et $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$
- $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $x \cdot y \leqslant 0$ et $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = |x \cdot y|$
- $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$, alors $x \cdot y \leqslant 0$ et $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = |x \cdot y|$
- $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors $x \cdot y \geqslant 0$ et $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y = |x \cdot y|$

Donc, $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$.

Exercice 7. Trouver a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire ce que vaut

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Exercice 7

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1-k}{k} + \frac{k}{k+1}$. $(a = 1-k$ et $b = k)$. <u>Proposition</u> : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Preuve par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{n+1}$.

Induction : Supposons la proposition vraie pour n. Alors, $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \frac{1-(n+1)}{n+1} + \frac{(n+1)}{n+2} + \frac{n}{n+1} = \frac{1-n-1+n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} = \frac{0}{n+1} + \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$ Donc la proposition est vraie pour $n+1$.

Par récurrence, la proposition est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. (Formule du binôme)
Pour $p, n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $0 \leq p \leq n$ on définit le coefficient binomial

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(On utilise la convention habituelle $0! := 1$).

(i) Pour $p < n$ montrer que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

(ii) Montrer par récurrence la *formule du binôme* : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 8

(i) $\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} - \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!} - \frac{(p+1)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{((n+1)-(p+1))\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{(n-p)\cdot n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!\cdot(n-p)} = \frac{n!}{(p+1)!\,(n-(p+1))!}$

$= \binom{n}{p+1}$ Donc, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

(ii) Initialisation : Pour $n=0$, $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}\cdot a^0 \cdot b^{0-0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Pour $n=1$, $(a+b)^1 = a+b = b+a = \binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

Induction : Supposons $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ vraie pour n. Alors,

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} = a\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} + b\cdot\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1} = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}$

$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^kb^{n-k+1}$

$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} = a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}$

Donc, $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^kb^{n+1-k}$ et par récurrence, la formule du binôme est montrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ et définissons

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$$

Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
Quelle hypothèse faut-il rajouter à A, B pour qu'on ait $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?

Exercice 9

$x + y \leqslant x + \sup B \leqslant \sup A + \sup B$ donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$, i.e. $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$

$(x+y) \leqslant \sup(A+B) \Rightarrow x \leqslant \sup(A+B) - y$ donc $\sup(A+B) - y$ est majorant de A,
$\Rightarrow \sup A \leqslant \sup(A+B) - y$
$\Rightarrow \sup A + y \leqslant \sup(A+B)$
$\Rightarrow y \leqslant \sup(A+B) - \sup A$ donc $\sup(A+B) - \sup A$ est majorant de B,
$\Rightarrow \sup B \leqslant \sup(A+B) - \sup A$
$\Rightarrow \sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B)$

Comme $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$ et $\sup A + \sup B \leqslant \sup(A+B)$, $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Pour avoir $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$, nous devons rajouter l'hypothèse suivante :

$\sup A = \sup\{|x| : x \in A\}$ et $\sup B = \sup\{|y| : y \in B\}$

En d'autres termes, la partie positive de A et B doit être plus grande que leur partie négative.

Exercice 10. Montrer que $u_n = \dfrac{6n^2 - \sqrt{n}}{2n^2 + n}$ converge vers 3.

Exercice 10

$u_n = \dfrac{6n^2 - \sqrt{n}}{2n^2 + n} = \dfrac{6 - \frac{\sqrt{n}}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \dfrac{6 - \frac{1}{n\sqrt{n}}}{2 - \frac{1}{n}}$ Par conséquent,

$\lim\limits_n u_n = \dfrac{\lim\limits_n (6 - \frac{1}{n\sqrt{n}})}{\lim\limits_n (2 - \frac{1}{n})} = \dfrac{6 - \lim\limits_n (\frac{1}{n\sqrt{n}})}{2 - \lim\limits_n (\frac{1}{n})} = \dfrac{6 - 0}{2 - 0} = \dfrac{6}{2} = 3.$ Donc u_n converge vers 3.

Exercice 11. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente.
Montrer que $(|u_n|)$ est une suite convergente et

$$\lim_n |u_n| = |\lim_n u_n|$$

Exercice 11

Soit $u := \lim\limits_n u_n$, soit $\varepsilon > 0$:

$||u_n| - |u|| \leqslant |u_n + u| = |-(u_n - u)| = |u_n - u| \leqslant \varepsilon$ Donc $|u_n|$ converge et $\lim\limits_n |u_n| = |u| = |\lim\limits_n u_n|$

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \epsilon$$

et

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

sont équivalentes.

Exercice 12

Soient (i): $\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n-\ell|<\varepsilon$ et (ii): $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N, |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

(i) $\Rightarrow$ (ii) est directe : Si $|u_n-\ell|<\varepsilon$, alors $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Comme (ii) est vraie pour tout $\varepsilon>0$, alors en particulier elle est vraie pour tout $\frac{1}{2}\varepsilon>0$, et donc $|u_n-\ell|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$.

Exercice 13. Déterminer le caractère de convergence de chacune des suites suivantes et calculer leur limite lorsqu'elle existe.

(i) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$
(Il est souvent utile de multiplier les expressions de la forme $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$)

(ii) $b_n = (-1)^n \left(\dfrac{n+5}{n}\right)$

(iii) $c_n = \dfrac{n(n-1)}{2^n - 5}$
(On peut montrer que $2^n \geq n^3$ pour $n \geq 10$ en raisonnant par récurrence puis utiliser ce résultat).

(iv) $d_n = \left(\dfrac{2n^3}{n^3 - 7}\right)^2$

Exercice 13

(i) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = \dfrac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})\cdot(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{n+3-(n+1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$

Donc, $\lim_n u_n = \dfrac{2}{\lim_n(\sqrt{n+3})+\lim_n(\sqrt{n+1})} = \dfrac{2}{\infty+\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

(ii) b_n oscille entre $-\left(\frac{n+5}{n}\right)$ et $\left(\frac{n+5}{n}\right)$, elle est donc divergente.
Avec $\varphi(n)=2n$ et $\varphi'(n)=2n+1$, $\lim_n b_{\varphi(n)}=1$ et $\lim_n b_{\varphi'(n)}=-1$, donc -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de b_n.

(iii) Montrons que $2^n\geqslant n^3$ pour $n\geqslant 10$: Initialisation pour $n=10$, $10^3=1000$, $2^{10}=1024>1000$.
Induction : Supposons que $2^n\geqslant n^3$ est vraie pour n. Alors,
$2^{n+1}=2\cdot 2^n\geqslant 2\cdot n^3 \geqslant n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$
(Vrai pour $n\geqslant 4$)
Donc, $\lim_n c_n \leqslant \lim_n\left(\frac{n(n+1)}{n^3-5}\right) = \lim_n\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{5}{n^3}}\right) = \frac{\lim_n(\frac{1}{n})-\lim_n(\frac{1}{n^2})}{1-\lim_n(\frac{5}{n^3})} = \frac{0-0}{1-0} = 0$

De plus, $(n(n-1))\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $2^n-5>0$ pour $n\geqslant 3$, donc $c_n\geqslant 0$ pour $n\geqslant 3$, donc $\lim_n c_n\geqslant 0$.
Comme $\lim_n c_n\leqslant 0$ et $\lim_n c_n\leqslant 0$, on conclut que $\lim_n c_n=0$.

(iv) $d_n=\left(\frac{2n^3}{n^3-7}\right)^2=\left(\frac{2}{1-\frac{7}{n^3}}\right)^2$. Donc, $\lim_n d_n=\lim_n\left(\frac{2}{1-\frac{7}{n^3}}\right)^2=\left(\frac{2}{1-\lim_n(\frac{7}{n^3})}\right)^2=\left(\frac{2}{1-0}\right)^2=\left(\frac{2}{1}\right)^2=2^2=4.$