Exercice 1. (Résolution graphique de systèmes)

(a) Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes(x, y), dessiner les droites d'équations

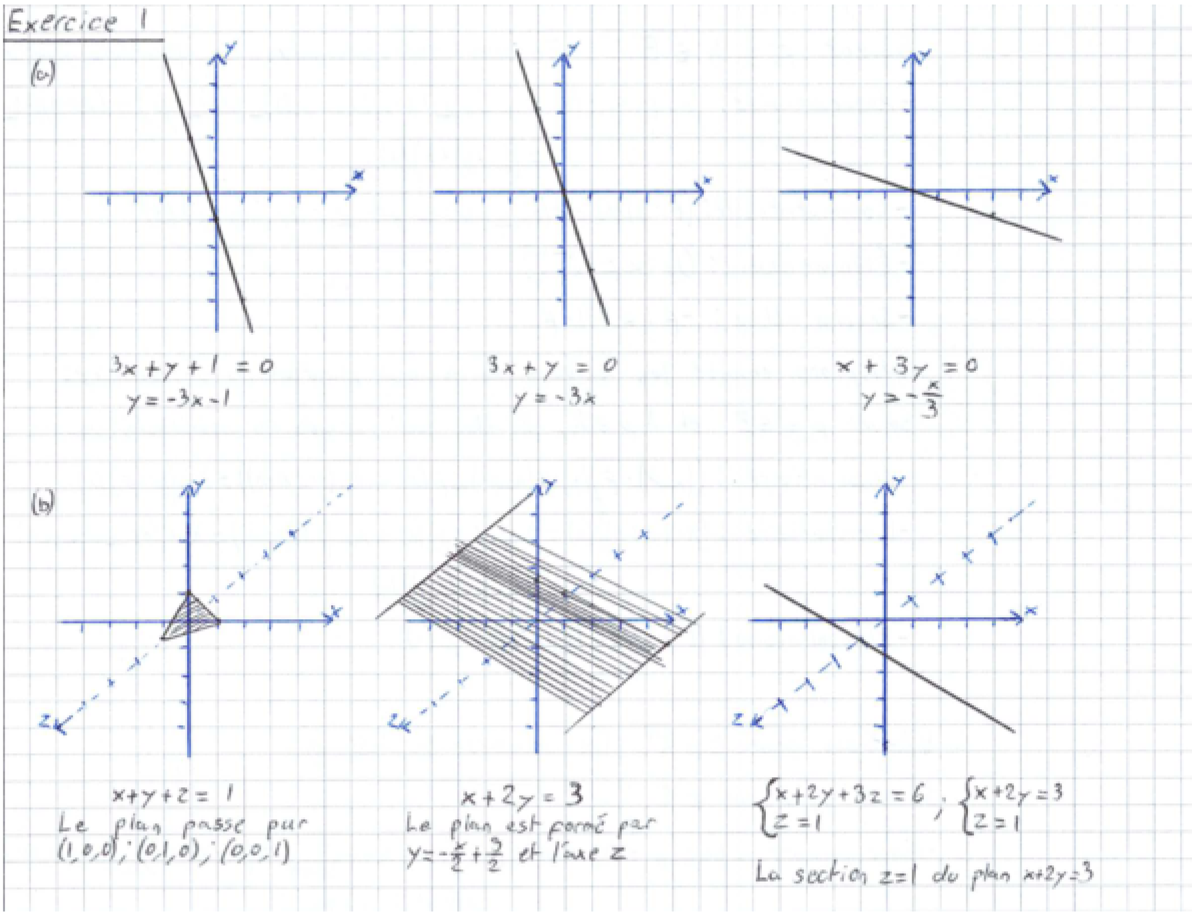
$$3x + y + 1 = 0, \quad 3x + y = 0, \quad \text{et} \quad x + 3y = 0$$

(b) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y, z), dessiner les plans d'équations

$$x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad x + 2y = 3$$

ainsi que l'intersection des deux plans d'équations

$$x + 2y + 3z = 6 \quad \text{et} \quad z = 1$$



Exercice 2. (Résolution algébrique de systèmes)

Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y &= 0 \\ x-2y &= 6 \\ 2x+3y &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \quad (-L_2) \\ x &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z &= \dfrac{1}{2} \\ x &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - z \\ z = z \end{matrix}$$

$$Sol = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x-2y &= 6 \quad (-L_1) \\ 2x+3y &= 0 \quad (-2L_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 0 \\ -3y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 0 \\ y = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

L_2 et L_3 présentent une contradiction, donc $Sol = \emptyset$

Exercice 3. (Espaces vectoriels des fonctions)

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), && \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x), && \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où le $+$ et le $\cdot$ du côté droit dénotent l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Vérifions pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les axiomes de l'addition :
Soient $f, g, h \in E$

— Associativité :

$$\begin{aligned} (f + (g+h))(x) &= f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f+g)(x) + h(x) \\ &= ((f+g)+h)(x) \end{aligned}$$

— Commutativité :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

— L'élément neutre additif 0_E est la fonction constante $f(x) = 0$.

— L'inverse additif est la fonction $-f := (-1) \cdot f$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :
Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

— Associativité :

$$((\lambda \cdot \mu) \cdot f)(x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot f(x) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)) = \lambda \cdot (\mu \cdot f)(x)$$

— Distributivité :

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot (f+g)(x) &= \lambda \cdot (f+g)(x) = \lambda \cdot (f(x) + g(x)) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) \\ &= ((\lambda \cdot f) + (\lambda \cdot g))(x) \end{aligned}$$

— Élément neutre : $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot (f(x)) = f(x)$. $-f := (-1) \cdot f$

2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites de scalaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{R}$, qui peut aussi être vu comme l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Montrer que cet ensemble, muni des lois
$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}},\\ \alpha \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\alpha \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\end{aligned}$$
forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Vérifions pour $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les axiomes de l'addition :
Soient $u, v, w \in E$
- Associativité :
$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (u_n + (v_n + w_n))_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= ((u_n + v_n) + w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$
- Commutativité :
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
- L'élément neutre additif 0_E est la suite constante $u_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- L'inverse additif est la suite $-(u_n)_{n\in\mathbb{N}} := (-1)\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :
Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Associativité :
$$\begin{aligned}(\lambda\cdot\mu)\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}} &= ((\lambda\cdot\mu)\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot\mu\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot(\mu\cdot u_n))_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \lambda\cdot(\mu\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$
- Distributivité :
$$\begin{aligned}\lambda\cdot(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (\lambda\cdot(u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot u_n + \lambda\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= (\lambda\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\lambda\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$
- Élément neutre : $1\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. (Notion d'espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si c'est un espace vectoriel ou non sur $\mathbb{R}$. Si oui, prouver la (les) propriété(s) entre parenthèse demandée(s). Si non, expliquer quel axiome est mis en défaut. Attention, certaines questions n'admettent pas pour réponse juste oui ou non.

1. L'espace $E = \{0\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Neutre de l'addition)
2. L'espace $E = [0, 1]$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Neutre de la multiplication)
3. L'espace $E = \mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, 2, ...\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Commutativité de l'addition)
4. L'espace $E = \mathbb{R}^2$ avec l'addition $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ et la multiplication $\lambda\cdot(x, y) = (\lambda x, 0)$. $\rightsquigarrow$ (Associativité de l'addition)
5. L'espace $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(a) = b\}$ avec les lois usuelles (définies pour l'exercice 3.1), où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont fixés. $\rightsquigarrow$ (toutes les propriétés)
6. L'espace $E = \mathbb{R}[x]$ des polynômes $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans borne sur leur degré, avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Distributivité à droite)

Exercice 4

1. Oui : L'élément neutre additif 0_E est 0, car pour tout élément x de E (Comme $E = \{0\}$, $x = 0$) $0 + x = x$, et $0 \in E$.

2. Non : E n'admet pas d'inverse additif : $\forall x\ \exists x \in E,\ [x + (-x) = 0_E]$ ~~admet~~ n'a pas de solution

3. Non : L'opération de multiplication par un scalaire n'est pas bien définie dans $\mathbb{R}$: par exemple, $\underbrace{0.3}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{2}_{\in E} \notin E$

4. Non : Aucun axiome n'est vérifié. Ex : Élément neutre de la multiplication par un scalaire :

$$1 \cdot (x, y) = (x, 0) \neq (x, y)$$

5. Si $b \neq 0$, l'élément neutre défini pour l'exercice 3.1 n'appartient pas à E, et par conséquent E n'est pas un espace vectoriel. $\Longrightarrow$ Non

Si $b = 0$: Soient $f, g, h \in E$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- $f(a) + (g+h)(a) = 0 + g(a) + h(a) = 0 + 0 + 0 = (f(a) + g(a)) + h(a) = (f+g)(a) + h(a)$
- $f(a) + g(a) = 0 + 0 = g(a) + f(a)$
- $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{matrix}$ appartient à E
- $f(a) + (-f(a)) = 0 + (-0) = 0 \cancel{= 0_E}$
- $(\lambda \cdot \mu) \cdot f(a) = (\lambda \cdot \mu) \cdot 0 = \lambda \cdot (\mu \cdot 0) = \lambda \cdot (\mu \cdot f(a))$
- $\lambda \cdot (f+g)(a) = \lambda \cdot (f(a) + g(a)) = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot f(a) + \lambda \cdot g(a)$
- $1 \cdot f(a) = 1 \cdot 0 = 0 = f(a)$

$\Longrightarrow$ Oui

6. Oui : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soient $p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$ et $p' = \alpha_0' + \alpha_1' x + \alpha_2' x^2 + \dots + \alpha_n' x^n$

Alors : $\lambda \cdot (p + p') = \lambda \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n + \alpha_0' + \alpha_1' x + \alpha_2' x^2 + \dots + \alpha_n' x^n)$

$= \lambda \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n) + \lambda \cdot (\alpha_0' + \alpha_1' x + \alpha_2' x^2 + \dots + \alpha_n' x^n)$

$= \lambda \cdot p + \lambda \cdot p'$

Exercice 5. (Notion de sous-espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si F est un espace vectoriel de E ou non, et le prouver. Tous les espaces vectoriels E sont sur $\mathbb{R}$.

1. $E = M_{2,2}(\mathbb{R}), F = \left\{ A \in E \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2. $E = \mathbb{R}^3, F = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$, où $u, v \in \mathbb{R}^3$ sont fixés.
3. $E = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi)\}, F = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) = a\}$, où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.
4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et
   (a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M\}$, où $M \in \mathbb{R}$ est fixé,
   (b) F_2 l'ensemble des fonctions bornées de E.
5. $E = \mathbb{R}_4[x], F$ l'ensemble des fonctions impaires de E.
6. E un espace vectoriel (quelconque), $F = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$, où U, V sont deux sous-espaces vectoriels (quelconques) de E fixés.

Exercice 5

1. Non : L'élément neutre $0_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F.

2. Oui :

- Pour $\lambda = \mu = 0$, $0_E = (0,0,0) = (\lambda u + \mu v) \in F$
- $(\lambda u + \lambda v) + (\lambda' u + \mu' v) = \lambda u + \mu v + \lambda' u + \mu' v = \left[\overbrace{(\lambda+\lambda')}^{\in\mathbb{R}} u + \overbrace{(\mu+\mu')}^{\in\mathbb{R}} v\right] \in F$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot (\lambda u + \mu v) = \alpha \cdot \lambda u + \alpha \cdot \mu v = \left[\underbrace{(\alpha\cdot\lambda)}_{\in\mathbb{R}} u + \underbrace{(\alpha\cdot\mu)}_{\in\mathbb{R}} v\right] \in F$

F est donc non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

3. Si $a \neq 0$, $0_E \in F$, donc F n'est sous-espace vectoriel de E. $\Longrightarrow$ Non

Si $a = 0$, Oui :

- $0_E = f : \begin{matrix} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{matrix} \in F$
- $f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, donc $(f(0) + g(0)) \in F$
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$, donc $(\lambda \cdot f(0)) \in F$

F est alors non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

4. (a) Non : Soit f, $|f(x)| = M$, et g, $|g(x)| > 0$, alors $f, g \in F$ mais $f + g \notin F$

(b) Oui :

- $0_E = f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{matrix} \in F$
- Si f et g sont bornées, alors $\min(f)$, $\max(f)$, $\min(g)$, $\max(g)$ existent.
  Par conséquent, $\min(f+g) = \min(f) + \min(g)$ et $\max(f+g) = \max(f) + \max(g)$ existent.
  Ainsi, $(f+g)$ est bornée, et appartient donc à F.
- Si f est bornée, alors $\min(f)$ et $\max(f)$ existent.
  Par conséquent, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\min(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \min(f)$ et $\max(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \max(f)$ existent.
  Ainsi, $(\lambda \cdot f)$ est bornée, et appartient donc à F.

5. Oui : Fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$ (Dans E : ~~polynômes de degré~~ $\alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

- $0_E = f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{matrix} \in F$, car $f(-0) = 0 = -0 = -f(0)$
- $f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x))$, Donc $(f+g) \in F$
- $\lambda \cdot f(-x) = \lambda \cdot (-f(x)) = -(\lambda \cdot f(x))$, Donc $(\lambda \cdot f) \in F$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Oui : $F = U + V$: Somme de sous-espaces vectoriels

- Puisque U et V sont sous-espaces vectoriels de E, $0_E \in U$ et $0_E \in V$.
  Donc, $0_E = \left(\overset{\in U}{0_E} + \overset{\in V}{0_E}\right) \in F$.
- $(u + v) + (u' + v') = \left[\underbrace{(u+u')}_{\in U} + \underbrace{(v+v')}_{\in V}\right] \in F$, car U et V sont s.e.v. de E.
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot (u+v) = \left[\underbrace{(\lambda u)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda v)}_{\in V}\right] \in F$, car U et V sont s.e.v. de E.

4