Logique et Théorie des Ensembles Série 07-B

Automne 2024 Série 07-B Buff Mathias

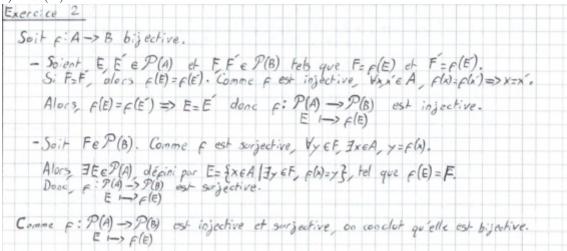
Exercice 1. Calculer les applications réciproques des applications suivantes :

$$- f: \begin{bmatrix} [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (\theta, r) & \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{bmatrix}$$

$$-\chi: \frac{\mathcal{P}(E)}{A} \xrightarrow{\to \{0,1\}^E}$$

— $g \circ f$ pour $f: E \to F$ et $g: F \to G$ bijectives (en fonction des réciproques de f et g)

Exercice 2. Supposons qu'il existe une bijection entre A et B, montrer qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$.



Exercice 3. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordre.

1. L'ordre lexicographique sur \mathbb{R}^2 séfini par $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ ssi x < a ou x = a et $y \le b$.

2. La divisibilité sur N.

3. La relation \mathcal{R} sur \mathbb{N}^* définie par $p\mathcal{R}q$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q = p^k$



4. La relation \mathcal{R} sur $(-\pi/2,\pi/2)$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $\tan x \leq \tan y$.

```
4. - Réclexivité: x Rx car tanx = toox docc tonx & toox

- Transitivité: x Ry et y Rz => tonx & tony et tony & tonz.

(comme & est transitive, tonx & tonz docc x Rz.

- Antisymétrie: x Ry et y Rx => tonx & tony et tony & tonx.

(comme & est outisymétrique tonx = tony, deac x=y

(puisque nous regardos ton xm (-7, 1).
```

Exercice 4. Existe-t-il une bijection de (0,1) dans [0,1]?

Exercise #

Soit of one bijection de (e) dons (0,1). Soit \(\varphi : (e) \rangle > [0,1) \) one modification de \(\varphi = 0 \) de \(\varphi = 0 \) telle \(\varphi = 1 \) existe \(\varphi = 0 \), \(\varphi = 0 \).

Mais comme \(\varphi = \varphi = \varphi (\varphi) = 0 \), \(\varphi = 0

Exercice 5. (*Détails manquants dans la preuve du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein). On utilise les notations de la preuve du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein présentée en cours.

- 1. Montrer que $A \subset B$ implique $h(A) \subset h(B)$.
- 2. Soit $f: E_1 \to F_1$ et $g: E_2 \to F_2$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Montrer que si f et g sont bijectives, alors

$$\begin{array}{ccc} E_1 \cup E_2 & \to & F_1 \cup F_2 \\ h: & & \mapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in E_1 \\ g(x) \text{ si } x \in E_2 \end{cases} \end{array}$$

est bijective.

Exercice 5 1. Soignt ABCE. Alors h(A) = E\g(F\F(A)) et h(B) = E\g(F\F(B)). Comme F est injective Si ACB alors F(A) = F(B), donc F\F(B) = F\F(A). Comme g est injective Si F\F(B) = F\F(B) alors g(F\F(B)) = g(F\F(B)), donc E\g(F\F(B)) = E\g(F\F(B)) i.e. h(A) ch(B).	
	1
2 Montrons que h est surjective:	
Soit y & F, UFz; Si y & F, comme & est surjective Ix & E, y = f(x) Si y & Fz, come & est surjective Ix & Ez, y = g(x)	
Donc Yy & FIUFZ, Ax & EIUEZ, y=h(x).	
- Montrons que hest injective:	
Soient y, y & Fiutz, amore tels que y = y, dors y & Fi (=> y & Fi et y & Fi (=> y & Fi)	
Si y & Fi , comme & est bijective, f'(y) = f'(y) Si y & Fi , comme & est bijective, f'(y) = g'(y)	
Donc $\forall x, x' \in E_1 \cup E_2 / f_1(x) = f_1(x') \Rightarrow f_1'(f_1(x)) = f_1'(f_1(x)) < > x = x'$.	
On conclut alors que h est bijective.	