Exercice 1. Soient deux réels a et b. Montrer que la fonction $x \mapsto ax + b$ est uniformément continue. Déterminer l'ensemble des $k > 0$ pour lesquels cette fonction est k-Lipschitzienne.

Exercice 1

Soit $\varepsilon > 0$, et prenons $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$. ~~[illegible] supposons~~ Alors,

$|f(x) - f(y)| = |ax + b - ay - b| = |ax - ay| = |a||x - y| < |a|\delta = \varepsilon$.

$|f(x) - f(y)| = |a||x - y| \leqslant k|x - y|$ si $k \geqslant |a|$.

Donc, f est k-lipschitzienne pour $k \in [a, \infty)$.

Exercice 2. (Fonctions α-Hölderiennes)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non nécessairement borné. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est α-Hölderienne (où $\alpha > 0$) s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$.

(i) Montrer qu'une fonction Hölderienne est uniformément continue.

(ii) Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est $1/2$-Hölderienne sur $I = \mathbb{R}_+$. (En revanche, en classe nous avons montré que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est k-Lipschitzienne pour aucun k.)

(iii) Montrer qu'une fonction α-Hölderienne est constante si $\alpha > 1$.

Exercice 2

(i) Soit $\varepsilon > 0$, et prenons $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$. Alors, comme f est α-Hölderienne,

$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha < C\delta^\alpha = \varepsilon$ donc f est uniformément continue.

(ii) Sans perte de généralité, supposons $x > y$. Prenons $C = 1$.

Alors, $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^{1/2} \Leftrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant |\sqrt{x - y}| \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \leqslant x - y \Leftrightarrow 2y - 2\sqrt{xy} \leqslant 0$ $(*)$

Et $(*)$ est vraie car $x > y$, donc $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^{1/2}$ est vraie.

(iii) $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha \Rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqslant C|x - y|^{\alpha - 1}$ et comme $\alpha > 1$, $\alpha - 1 > 0$.

Donc, quand x tend vers y, $C|x - y|^{\alpha - 1}$ tend vers 0, donc

$\lim_{x \to y} \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, donc $|f'(x)| = 0$ et f est constante.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Supposons que f tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, on a $|f(x)| < \varepsilon/2$.

(ii) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [-(M+1), M+1]$ tels que $|x - y| < \delta$ on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(iii) Déduire des deux questions précédentes que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(iv) Montrer que f est bornée.

Exercice 3

(i) f tend vers 0 en ∞ et $-\infty$, i.e. $\forall \varepsilon>0, \exists M_1>0, \forall x \in \mathbb{R}, x>M_1 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$ et
$\forall \varepsilon>0, \exists M_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x<M_2 \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$

Donc, en posant $M = \max(M_1, -M_2)$, $x \in \mathbb{R}\setminus[-M, M] \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$ et en particulier, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(ii) Puisque f est continue et que $[-(M+1), M+1]$ est un intervalle fermé, elle est uniformément continue sur cet intervalle.

(iii) Par (i), $\forall \varepsilon>0, \forall x,y \in \mathbb{R}\setminus[-M,M]$, $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)|+|f(y)| = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}\setminus[-M,M]$. Par (ii), elle est uniformément continue sur $[-(M+1), M+1]$. Comme $\mathbb{R}\setminus[-M,M] \cup [-(M+1), M+1] = \mathbb{R}$, on conclut que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(iv) Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il n'y a aucun point de $\mathbb{R}$ pour lequel elle adopte un comportement asymptotique. Donc, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq A$.

Exercice 4. soit I un intervalle et $f \in C(I, \mathbb{R})$ injective. Le but de cet exercice est de montrer que f est monotone.

(i) Soient $a < x < b$ dans I. Montrer que $f(x)$ est strictement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. (*Indication :* théorème des valeurs intermédiaires.)

(ii) Conclure que f est monotone.

Exercice 4

(i) Puisque $f \in C(I,\mathbb{R})$ et $[a,b] \subset I$, alors $f([a,b])$ est un intervalle.

Procédons par l'absurde : Sans perte de généralité, supposons $f(b) > f(a)$.

Supposons qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) > f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, x]$ tel que $f(c) = f(b)$, mais $c \neq b$ donc f n'est pas injective. $\Rightarrow\Leftarrow$.

Donc, si $f(a) > f(b)$, alors $f(x) \in [f(b), f(a)]$ et si $f(b) > f(a)$, $f(x) \in [f(a), f(b)]$

(ii) $\forall a, b \in I$, $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. Alors, soit $a<b \Rightarrow f(a) > f(b)$
soit $a<b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Et on conclut que f est monotone.

Exercice 5. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \left(x^3 - x, \frac{1}{x^2+1} \right)$$

Exercice 5

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3-x, \frac{1}{x^2+1}\right) = \left(\frac{d}{dx}x^3-x, \frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}\right) = \left(2x-1, \frac{2x}{x^4+2x^2+1}\right)$$

Exercice 6. Donner une fonction $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ continue qui n'est pas uniformément continue.

Exercice 6

$f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue mais pas uniformément continue.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et *périodique*, c'est-à-dire que $f(x + 1) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

Exercice 7

Puisque f est périodique de période 1, alors $f([0,1]) = f([1,2]) = f([2,3]) \dots$

i.e., $f([0,1]) = f(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]) = f(\mathbb{R})$, donc il suffit de montrer que f est bornée et uniformément continue sur $[0,1]$.

Comme $[0,1]$ est un intervalle fermé et que f est continue, alors f est uniformément continue sur cet intervalle.

De plus, comme $[0,1]$ est un intervalle et que f est continue, alors $f([0,1])$ est un intervalle, donc f est bornée par $\min(f([0,1])$ et $\max(f([0,1]))$.

Exercice 8. On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel,} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \text{ est rationnel et s'écrit } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel.

Exercice 8

f est mal définie en 0 : puisque 0 est rationnel, alors $f(0) = \frac{1}{q}$ où $0 = \frac{p}{q}$, ~~sa~~ mais $\frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ donc $f(0)$ ne résulte pas en un unique élément de $\mathbb{R}$.