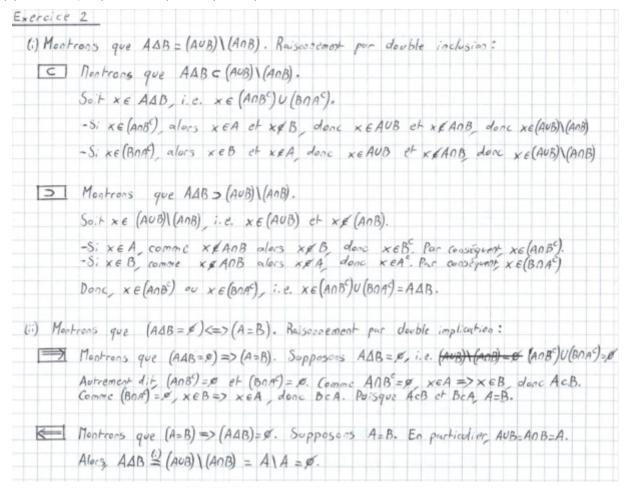
Exercice 1. Écrire la négation des assertions suivantes.

- (i)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x y| \le \delta \implies f(x) \ge f(y)]$ (où f est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x y| < \delta \implies |f(x) f(y)| \le \epsilon]$  (où f est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (iii)  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N, [n \geq N \implies |f_n(x) f(x)| \leq \epsilon]$  (où f est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (iv)  $\forall E \subset \mathbb{N}, [E \neq \emptyset \implies (\exists n \in E, \forall m \in E, m \geq n)]$
- $(\mathbf{v}) \ \forall E \subset \mathbb{R}, [E \neq \emptyset \implies \exists a \in \mathbb{R}, ((\forall b \in E : b \leq a) \text{ et } (\forall \epsilon > 0, \exists b \in E : b \geq a \epsilon))]$ 
  - (i)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, [|x y| \le \delta \text{ et } f(x) < f(y)]$
  - (ii)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, [|x y| < \delta \text{ et } |f(x) f(y)| > \epsilon]$
  - (iii)  $\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists n \geq N, [n \geq N \text{ et } |f_n(x) f(x)| > \epsilon]$
  - (iv)  $\exists E \subset \mathbb{N}, [E \neq \emptyset \text{ et } (\forall n \in E, \exists m \in E, m < n)]$
  - (v)  $\exists E \subset \mathbb{R}, [E \neq \emptyset \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}, ((\exists b \in E : b > a) \text{ ou } (\exists \epsilon > 0, \forall b \in E : b < a \epsilon))]$

**Exercice 2.** (Différence symétrique). L'opération  $\triangle$  est définie sur les ensembles  $A, B \subset E$  par  $A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$ .

- (i) Montrer que  $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- (ii) Vérifier que  $(A \triangle B = \emptyset) \iff (A = B)$



Exercice 3. Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

- (i)  $\forall n \geq 0, u_n < u_{n+1}$  (où  $(u_n)$  est une suite réelle)
- (ii) Soit  $f: E \to \mathbb{R}$  une fonction :
  - (a)  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = C$
  - (b)  $\forall x \in E, [f(x) = 0 \implies x = 0]$
  - (c)  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) = y$
  - (d)  $\forall x \in E, \forall y \in E, [f(x) = f(y) \implies x = y]$
  - (e)  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq A$
  - (i) "La suite  $(u_n)$  est strictement croissante" Négation :  $\exists n \geq 0, u_n \geq u_{n+1}$
  - (ii) (a) "f est constante en C"

Négation :  $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) \neq C$ 

(b) "f ne s'annule qu'en x = 0"

Négation :  $\exists x \in E, [f(x) = 0 \text{ et } x \neq 0]$ 

(c) "f est surjective"

Négation :  $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \neq y$ 

(d) "f est injective"

Négation :  $\exists x \in E, \exists y \in E, [f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y]$ 

(e) "f est majorée par A"

Négation :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) > A$ 

**Exercice 4.** Soit  $f: E \to \mathbb{R}$  une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

- (i) La fonction f s'annule.
- (ii) La fonction f est la fonction nulle.
- (iii) f n'est pas une fonction constante.
- (iv) f ne prend jamais deux fois la même valeur.
- (v) La fonction f admet un minimum.
- (vi) f prend des valeurs arbitrairement grandes.
- (vii) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.
  - (i)  $\exists x \in E, f(x) = 0$
  - (ii)  $\forall x \in E, f(x) = 0$
  - (iii)  $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) \neq C$
  - (iv)  $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y$
  - (v)  $\exists m \in E, \forall x \in E, f(m) \leq f(x)$
  - (vi)  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) \geq M$
  - (vii)  $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) = 0 \implies x = y$

**Exercice 5.** Soient E et F deux ensembles et A(x,y) des assertions indexées par  $(x,y) \in E \times F$ .

- (i) Montrer que  $\forall x \in E, \forall y \in F, A(x, y) \iff \forall y \in F, \forall x \in E, A(x, y).$
- (ii) Montrer que  $\exists x \in E, \exists y \in F, A(x,y) \iff \exists y \in F, \exists x \in E, A(x,y).$
- (iii) Montrer en donnant un exemple que  $\exists x \in E, \forall y \in F, A(x, y)$  n'est pas nécessairement équivalent à  $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x, y)$ .

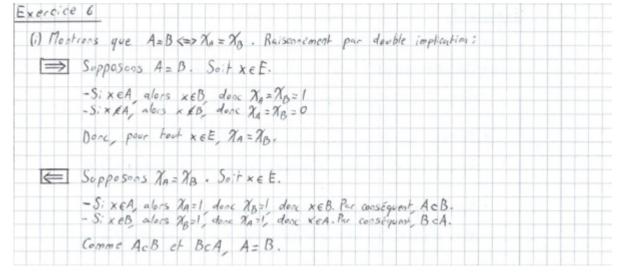
On dira que l'on peut échanger les quantificateurs  $\forall$  adjacents (ou les  $\exists$  adjacents), mais que l'on ne peut pas échanger les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ .

Exercice 5	
(-)	Dire que pour tout xe E pour tout y EF A(x,y) est vraie revient à dire que Si x E E et si y EF alors A(x,y) est vraie. Il devient alors évident que "S; x e E et "si y e F sont interspangeables, et par extension que la proposition est équivalente à dire que pour tout y e F pour tout x e E A(x,y) est vraie.
	Sil existe un xEE pour lequel il existe un yEF tels que A(xy) est vraie, alors pour co y specifique, il existe au moins le premier x, tels que A(xy) est vraie.  Ainsi, IxEE IyEF A(xy) => IyEF IXEE A(xy). Par le même raisonnement, la réciproque peut être montrée, et donc les deux propositions sont équivalentes.
(iii)	Soient E, $F = IN$ et $A(x,y)$ lu proposition " $x \ge y$ ".  Alors, $\forall y \in F, \exists x \in ME$ , $A(x,y)$ est $\forall RAJE$ , mois $\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)$ est $FAUSSE$ .  Démonstration de $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y)$ : Il s'uppit de prendre $x = (y+1) \in N$ .  Démonstration de $\forall (\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)) \iff \forall x \in E, \exists y \in F, \forall A(x,y)$ .

**Exercice 6.** (Fonctions caractéristiques  $\chi_A$ ). Soient E un ensemble et  $A \subset E$ . La fonction caractéristique de A est définie par  $\chi_A : E \to \{0,1\}$  et

$$\chi_A: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Montrer que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont la même fonction caractéristique.



- (ii) Que peut-on dire sur A et B si  $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$  pour tout  $x \in E$ ?
  - (i)  $\chi_A \le \chi_B$  indique que  $\chi_A = 1 \Rightarrow \chi_B = 1$ .

    Autrement dit, si un élément xEE appartient à A (donc  $\chi_A = 1$ ) alors il appartient également à B ( $\chi_B = 1$ ).

    On peut donc en dédoire que  $\chi_A \le \chi_B \Rightarrow A \in B$ .
- (iii) Montrer que  $\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B,\,\chi_{A^C}=1-\chi_A$  et  $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B$ .
  - (ii) \* Nortrons NAMB = NAMB. Soit xEE:

     Si NAMB = 1, alors xEANB, donc XEA et xEB. Par conséquent, Na = 1 et NB = 1, donc NAMB = 1

     Si NAMB = 0, alors xEANB, donc xEA ou xEB. Par conséquent, Na = 0 ou NB = 0, donc NAMB = 0.

    Dans toos les cas, NAMB = NAMB.

     Montrons NAC = 1 NA. Soit xEE:

     Si NA = 1, alors xEA et NA = 0. Par conséquent NAC = 1-NA.

     Si NAC = 1, alors xEA et NA = 1. Par conséquent NAC = 1-NA.

    Dans tous les cos, NAC = 1-NA.

    Dans tous les cos, NAC = 1-NA.

    Ones tous les cos, NAC = 1-NA.

    Ones tous les cos, NAC = 1-NA.

     SixeA et xEB: Alors NA = 1, NB = 1, NAUB = 1. Donc, NA + NB NAMB = 1+1-11 = 1= NAUB.

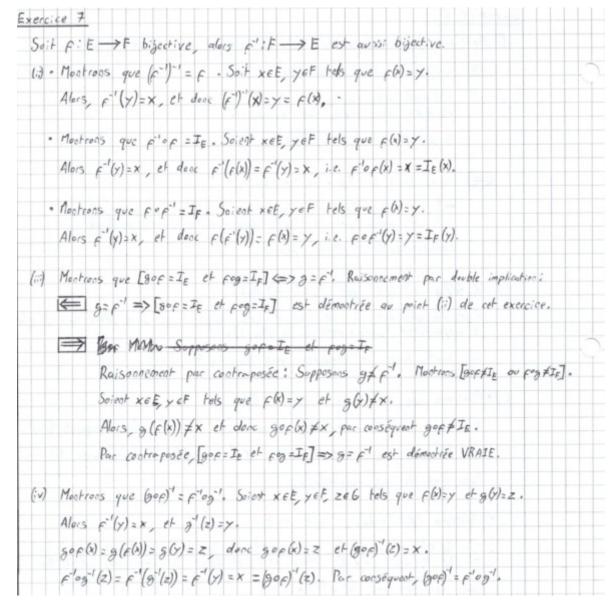
     SixeA et xEB: Alors NA = 1, NB = 1, NAUB = 1. Donc, NA + NB NAMB = 1+1-11 = 1= NAUB.
- (iv) Montrer que les formules de De Morgan pour  $(A \cup B)^C$  et  $(A \cap B)^C$  en utilisant les fonctions caractéristiques.

-SixKA et x & B: A605 \$ 1 = 0, \$ 18=1, \$ 1 AUB=1 - Done, \$ 1 + 7 B - 8 ANB = 0+1-01=1 = \$ 1 AUB

-SixEA et x & B: Alors \$10 =0, \$1000, \$1000 =0 . Docc, \$10+\$10-\$1070 = 0+0-0.0 = 0 = \$1000

[iv] Formules de De Morgan:  $(AUB)^c = A^c OB^c$ ;  $(AOB)^c = A^c UB^c$ •  $\mathcal{N}(AUB)^c = 1 - \mathcal{N}_{AUB} = 1 - (\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_D - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B) = 1 - \mathcal{N}_A - \mathcal{N}_B + \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B = (1 - \mathcal{N}_A)(1 - \mathcal{N}_B) = \mathcal{N}_A^c \cdot \mathcal{N}_B^c = \mathcal{N}_{(A^c OB^c)}$ •  $\mathcal{N}_{(A^c UB^c)} = 1 - \mathcal{N}_{(A^c UB^c)} = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B$ Comme  $\mathcal{N}_{(A OB)^c} = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B$ , alors  $\mathcal{N}_{(A OB)^c} = \mathcal{N}_{(A^c UB^c)} = 1 - \mathcal{N}_A \mathcal{N}_B$  **Exercice 7.** Soit  $f: E \to F$  une fonction bijective. Démontrer les propriétés suivantes énoncées mais pas démontrées en classe (Proposition 1.23).

- (i)  $(f^{-1})^{-1} = f$ ,  $f^{-1} \circ f = I_E$ ,  $f \circ f^{-1} = I_F$ .
- (ii) (unicité de l'inverse) Si  $g: F \to E$  tel que  $g \circ f = I_E$  et  $f \circ g = I_F$ , alors  $g = f^{-1}$ .
- (iii) (composition des inverses) Soit  $g: F \to G$  une autre fonction bijective. Alors  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .



**Exercice 8.** Soit  $f: E \to F$  une fonction.

(i) Soit  $B \subset F$ . Dans le cas où f est bijective, montrer que l'image réciproque  $f^{-1}(B)$  de B est égale à l'image directe de B par la fonction inverse  $f^{-1}$ . (Notons que l'image réciproque existe pour tout f, tandis que la fonction inverse uniquement si f est bijective.)

Soit  $A \subset E$  tel que B est l'image directe de A par f, i.e. f(A) = B. Alors l'image réciproque de B est  $f^{-1}(B) = A$ .

Comme B est l'image directe de A, pour tout  $y \in B$  il existe  $x \in A$  tel que f(x) = y. Puisque f est bijective, x est unique et  $f^{-1}(y) = x$ . Donc A est également l'image directe de B par  $f^{-1}$ .

(ii) Montrer que pour tout  $A, B \subset F$  on a

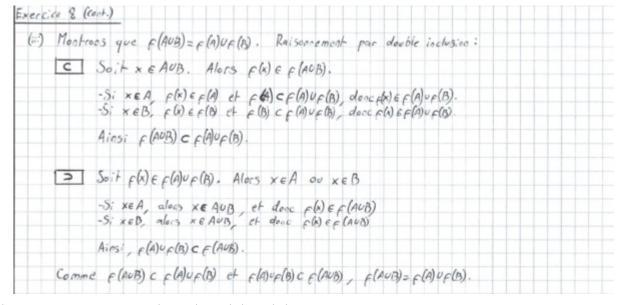
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = \{x \in E : f(x) \in A \cup B\} = \{x \in E : f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B\}$$
$$= \{x \in E : f(x) \in A\} \cup \{x \in E : f(x) \in B\} = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = \{x \in E : f(x) \in A \cup B\} = \{x \in E : f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B\}$$
$$= \{x \in E : f(x) \in A\} \cap \{x \in E : f(x) \in B\} = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

(iii) Montrer que pour tout  $A, B \subset F$  on a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$



(iv) Montrer qu'en général  $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$  est fausse. Montrer aussi qu'elle est vraie si f est injective.

Contre-exemple :  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  avec  $A = \mathbb{R}_+$  et  $B = \mathbb{R}_-$ . Alors  $A \cap B = \{0\}$ , et  $f(A \cap B) = \{0\}$ . Par contre,  $f(A) = f(B) = f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+$ .

En revanche, si f est injective : Soit  $f(x) \in f(A) \cap f(B)$ . Alors  $f(x) \in f(A)$  et  $f(x) \in f(B)$ , et comme f est injective alors  $x \in A$  et  $x \in B$ . Donc,  $x \in A \cap B$  et  $f(x) \in f(A \cap B)$ . Par conséquent,  $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$  et comme  $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B)$  (démontrée au point (iii)), alors  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

## Exercice 9.

(i) Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ . Les éléments de E sont des familles  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  indexées par  $\mathbb{Z}$ . Définissons la fonction  $f: E \to E$  par

$$f:(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$$

Montrer que f est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

(ii) Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Les éléments de E sont des familles  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  indexées par  $\mathbb{N}$  (aussi appelées suites). Définissons la fonction  $f : E \to E$  par

$$f:(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$$

Est-ce que f est injective? Surjective?

(iii) Soit f la fonction de (ii). Définissons les ensembles  $A,B\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  par

$$A = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_0 \in [0, 1], x_1 \le 0\}, \quad B = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \exists i \in \mathbb{N}, x_i \ge 0\}$$

Déterminer les images directes f(A) et f(B) ainsi que les images réciproques  $f^{-1}(A)$  et  $f^{-1}(B)$ .

Exercice 9
(i) Intoition: F': (x:); EZ (x:-); EZ.
· Montrons que à est sonjective : Autrement dit, chaque élément yet peut être représenté comme (x;+); ez , avec (xi); ez .
Comme i=(i+1)-1 et que -10Z alors i EZ S: (i+1) EZ, et donc [Y=(x) EE x EE] est vr
· Montrons que & est lejective: \(\forall x, y \in E, \( \xi \) = \( \xi \) = \( \xi \) = \( \xi \) \( \xi
Comme $\epsilon$ est surjective et injective, elle est bijective. Véripions la $\epsilon''$ proposée: $\epsilon \circ \epsilon''(x)_{i \in \mathbb{Z}} = \epsilon'(\epsilon''(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \epsilon'(x_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}} = (x_{i-1+1})_{i \in \mathbb{Z}} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ $\epsilon' \circ \epsilon''(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \epsilon''(\epsilon'(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \epsilon''((x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$
(i) f n'est pas surjective, car on ne peut pas trouver de ien tel que i+1 =0.  F est injective, car pour tout x, y en x+1 = y+1 => x=y.
(ii) f(A) = {(x); en * : x; < 0} ; f(B) = {(x); en * : \( \)
F'(A)={(x); ∈N : x1 ∈ [0]] x2 ≤0} / F'(B) = {(x); ∈N : ∃; ∈N, x; 1, 70}