Exercice 1. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (x^4 + x^2 - 1)^{41223791150}$.

Exercice 1

Définissons $a = 41223791150$.

$f(x) = h \circ g(x)$ avec $h(x) = x^a$ et $g(x) = x^4 + x^2 - 1$, alors

$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = a(x^4+x^2-1)^{a-1} \cdot (4x^3+2x) = 2ax(x^4+x^2-1)(2x^2+1)$

Exercice 2.

(i) Quelle est l'assertion correspondant à la phrase "f tend vers $+\infty$ en $+\infty$" ?

(ii) Montrer que si f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vérifie $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{f}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2

(i) "f tend vers a en ∞" : $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

"f tend vers ∞ en b" : $\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - b| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Par conséquent, "f tend vers ∞ en ∞" : $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow f(x) > M$

(ii) Soit $\varepsilon = \frac{1}{M}$, avec M arbitrairement grand. Si f tend vers ∞ en ∞ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \varepsilon.$

et comme $M > 0$, $\frac{1}{f(x)} > 0$, donc $\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$, alors $\frac{1}{f}$ tend vers 0 en ∞.

Exercice 3. (Formule de Leibniz). Soient $f, g \in C^n(I, \mathbb{R})$. Montrer par récurrence que $fg \in C^n(I, \mathbb{R})$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

Exercice 3

Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} = fg^{(1)} + f^{(1)}g = (fg)^{(1)}$

Induction : Supposons que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Alors,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})^{(1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)^{(1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Désolé pour l'oubli des coefficients binomiaux jusqu'à cette ligne →

La proposition est donc vérifiée pour $n+1$, et ainsi par récurrence elle est montrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le cas $n=0$ est trivial).

Exercice 4. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

Exercice 4

(i) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Preuve par récurrence :

Initialisation : Pour $n=1$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(1)} = \frac{1^{(1)}\cdot(1-x) - 1\cdot(1-x)^{(1)}}{(1-x)^2} = \frac{0-1\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Induction : Supposons que $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Alors,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n+1)} = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)^{(1)} = \frac{(n!)^{(1)}\cdot(1-x)^{n+1} - n!\cdot((1-x)^{n+1})^{(1)}}{((1-x)^{n+1})^2} = \frac{0-n!\cdot((n+1)(1-x)^n\cdot(-1))}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(1-x)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

(ii) $x \mapsto x^2(1+x)^n$

Exercice 4 (cont.)

(ii) La dérivée k-ième de $(x^2(1+x)^n)$ est $\sum_{p=0}^{k-1} 2p\cdot\frac{n!}{(n-k-2)!}(1+x)^{n-k+2} + 2k\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!}\cdot x(1+x)^{n-k+1}$
$+ \frac{n!}{(n-k)!}x^2(1+x)^{n-k}$

Preuve par récurrence :

Initialisation : Pour $k=1$, $\sum_{p=0}^{k-1} 2p\cdot\frac{n!}{(n-k+2)!}(1+x)^{n-k+2} + 2k\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!}x(1+x)^{n-k+1} + \frac{n!}{(n-k)!}x^2(1+x)^{n-k}$

$$= 0 + 2\cdot1\cdot x(1+x)^{n} + n\cdot x^2(1+x)^{n-1}$$
$$= 2x(1+x)^n + nx^2(1+x)^{n-1}$$
$$= (x^2(1+x))^{(1)}$$

Induction : Supposons la proposition vraie pour k. Alors,

$$(x^2(1+x)^n)^{(k+1)} = \left(\sum_{p=0}^{k-1}2p\cdot\frac{n!}{(n-k+2)!}(1+x)^{n-k+2} + 2k\frac{n!}{(n-k+1)!}x(1+x)^{n-k+1} + \frac{n!}{(n-k)!}x^2(1+x)^{n-k}\right)^{(1)}$$
$$= 0 + \sum_{p=0}^{k-1}2p\cdot\frac{n!}{(n-k+2)!}(n-k+2)(1+x)^{n-k+1}$$
$$+ 2k\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!}(1+x)^{n-k+1} + 2k\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!}x\cdot(n-k+1)(1+x)^{n-k}$$
$$+ 2\frac{n!}{(n-k)!}x(1+x)^{n-k} + \frac{n!}{(n-k)!}x^2(n-k)(1+x)^{n-k-1}$$
$$= \left(\cancel{\Sigma}\, 2k + \sum_{p=0}^{k-1}2p\right)\cdot\frac{n!}{(n-k+1)!}(1+x)^{n-k+1} + (2+2k)\cdot\frac{n!}{(n-k)!}x(1+x)^{n-k} + \frac{n!}{(n-k-1)!}x^2(1+x)^{n-k-1}$$
$$= \sum_{p=0}^{k}2p\cdot\frac{n!}{(n-(k+1)+2)!}(1+x)^{n-(k+1)+2} + 2(k+1)\cdot\frac{n!}{(n-(k+1)+1)!}x(1+x)^{n-(k+1)+1} + \frac{n!}{(n-(k+1))!}x^2(1+x)^{n-(k+1)}$$

Alors la proposition est vraie pour $k+1$, et par récurrence elle est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$ (le cas $k=0$ est trivial)

Donc, la dérivée n-ième est le cas $k=n$:

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n-1}2p\cdot\frac{n!}{(n-n+2)!}(1+x)^2 + 2n\cdot\frac{n!}{(n-n+1)!}x(1+x) + \frac{n!}{(n-n)!}x^2$$
$$= n!\cdot\left(\sum_{p=0}^{n-1}2p\cdot\frac{1}{2!}(1+x)^2 + 2n\cdot\frac{1}{1!}x(1+x) + \frac{1}{0!}x^2\right)$$
$$= n!\cdot\left(\sum_{p=0}^{n-1}p\cdot(1+x)^2 + 2nx(1+x) + x^2\right)$$

(iii) $x \mapsto x^n(1+x)^n$

(iii) Par Ex. 3, $(x^n(1+x)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}((1+x)^n)^{(n-k)}$

Exercice 5. (Formulation de Weierstrass de la dérivée).
Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et dérivable en a ssi il existe $\phi : I \to \mathbb{R}$ continue sur I telle que

$$f(x) = f(a) + (x - a)\phi(x), \quad \forall x \in I$$

Exercice 5

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f continue sur I et dérivable en $a \in I$.

Soit $\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$ Comme f est continue sur I, ϕ est continue sur $I\setminus\{a\}$. De plus, comme f est dérivable en a, alors $f'(a)$ existe et $\lim_{x\to a}\phi(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \phi(a)$.

Donc, ϕ est continue en a et elle est donc continue en tout point sur I.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe ϕ continue sur I telle que $f(x) = f(a) + (x-a)\phi(x)$, $\forall x \in I$.

Comme $f(x)$ est alors une somme de fonctions continues, elle est continue.

De plus, comme ϕ continue sur I, alors $\lim_{x\to a}\phi(x) = \phi(a)$. On en déconclut que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, i.e. que f est dérivable en a.

Par $\boxed{\Rightarrow}$ et $\boxed{\Leftarrow}$, l'équivalence est prouvée.

Exercice 6. Déterminer le domaine de définition puis trouver la dérivée en tout point de ce domaine pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice 6

$1+x^2 > 0$, donc $\sqrt{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $\sqrt{1+x^2} > 0$.

Comme $1+x^2 > x^2$, $\sqrt{1+x^2} > |x|$, donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, et $\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soient $g(x) = 1 + x^2$, et $h(x) = \sqrt{x}$, alors $f = h \circ h \circ g$.

Donc, $f' = (h\circ h\circ g)' = (h(h(g)))' = h'(h(g)) \cdot h'(g) \cdot g' = \frac{1}{2}\left((1+x^2)^{1/2}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}\left((1+x^2)^{-1/2}\right) \cdot 2x$

$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/4} \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x$

$= \frac{x}{2} \cdot (1+x^2)^{-3/4} = \frac{x}{2(1+x^2)^{3/4}}$

Exercice 7. Trouver le polynôme de Taylor $T_4 f(x; 1)$ de la fonction $x \mapsto x^{1/3}$. L'utiliser pour calculer $(1/2)^{1/3}$, et à l'aide du Théorème de Taylor donner un majorant pour l'erreur entre $(1/2)^{1/3}$ et son approximation.

Exercice 7

$T_4 f(x;1) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9\cdot 2}(x-1)^2 + \frac{4}{27\cdot 6}(x-1)^3 - \frac{28}{81\cdot 24}(x-1)^4$

$T_4 f(\tfrac{1}{2};1) = 1 + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}) + -\frac{1}{9\cdot 2}(\frac{1}{4}) + \frac{4}{27\cdot 6}(-\frac{1}{8}) - \frac{28}{81\cdot 24}(\frac{1}{16}) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{72} - \frac{1}{324} - \frac{7}{7776} \simeq 0.815\ldots$

$|T_4 f(\tfrac{1}{2};1) - f(\tfrac{1}{2})| \leqslant \sup_{c\in(\frac{1}{2},1)} \left| f^{(5)}(c) \cdot \frac{(\frac{1}{2}-1)^5}{5!} \right| = \sup_{c\in(\frac{1}{2},1)} \left| \frac{280}{243} \cdot c^{-14/3} \cdot \frac{-\frac{1}{32}}{120} \right| = \frac{280}{243 \cdot 120 \cdot 32 \cdot \frac{1}{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \frac{7}{729} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2})^{1/3}}$

$= \frac{7}{729} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{4}} < \frac{7 \cdot 4}{729} \simeq 0.038\ldots$