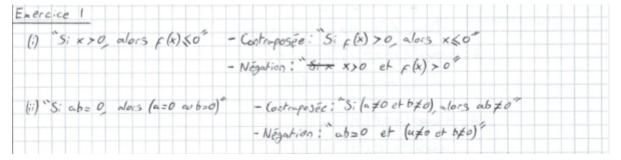
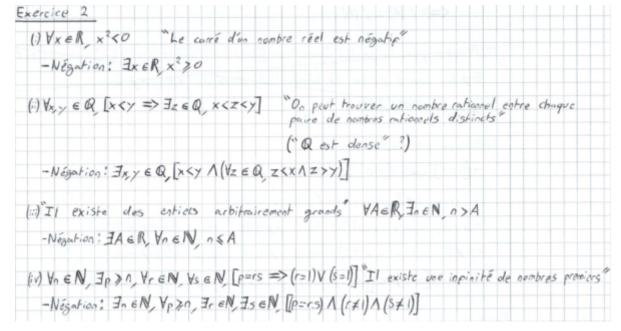
Exercice 1. Quelle est la contraposée des implications suivantes? Même question avec la négation.

- (i) Si x > 0, alors  $f(x) \le 0$ .
- (ii) Si ab = 0, alors (a = 0 ou b = 0).



Exercice 2. Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ .
- (ii)  $\forall x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \implies \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y].$
- (iii)  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > A.$
- (iv)  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, \forall r \mathbb{N}, \forall s \mathbb{N}, [p = rs \implies (r = 1) \lor (s = 1)].$



Exercice 3. Écrire la négation des assertions suivantes.

- (i)  $\forall x, y \in E, xy = yx$ .
- (ii)  $\exists x \in E, \forall y \in E, xy = yx.$
- (iii)  $\forall a, b \in A, [ab = 0 \implies (a = 0) \lor (b = 0)].$
- (iv)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, [x < y \implies f(x) < f(y)]$  (où f est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).
- $(\mathbf{v}) \ \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n \ell| < \epsilon] \ (\text{où } (u_n) \text{ est une suite réelle et } \ell \in \mathbb{R}).$
- (vi)  $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n \ell| \epsilon]$  (où  $(u_n)$  est une suite réelle).

Exercice 3

(i) 
$$\neg [V_{x,y} \in E, xy = yx] \iff \forall x \in F, xy \neq yx$$

(ii)  $\neg [V_{x,y} \in E, xy = yx] \iff \forall x \in F, \exists y \in E, xy \neq yx$ 

(ii)  $\neg [V_{x,y} \in E, \forall y \in E, xy = yx] \iff \forall x \in F, \exists y \in E, xy \neq yx$ 

(ii)  $\neg [V_{x,y} \in A, [ab = 0 \Rightarrow) (a = 0) \lor (b = 0)] \iff \exists a, b \in A, [ab = 0) \land (b \neq 0)]$ 

(iv)  $\neg [V_{x,y} \in B, \forall y \in R, [x < y \Rightarrow F (x) < F(y)] \iff \exists x \in R, \exists y \in R, [x < y) \land [x < y) \land [x < y \Rightarrow F(x)] \land [x$ 

**Exercice 4.** Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que si  $E \subset F$  et  $F \subset G$ , alors  $E \subset G$ .

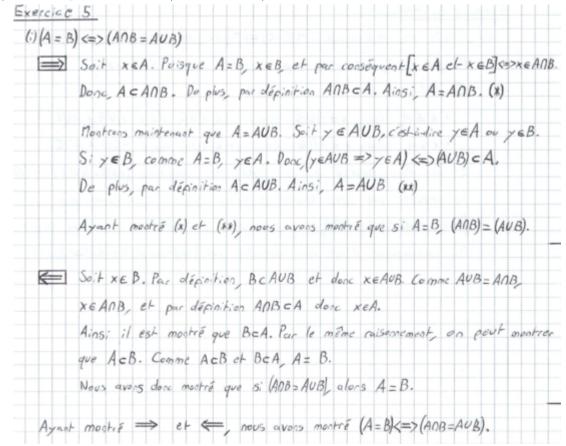
Exercice 4

Soit 
$$x \in E$$
. Puisque  $E \subset F$ , alors  $x \in F$ . De plus, comme  $F \subset G$ ,  $x \in G$ .

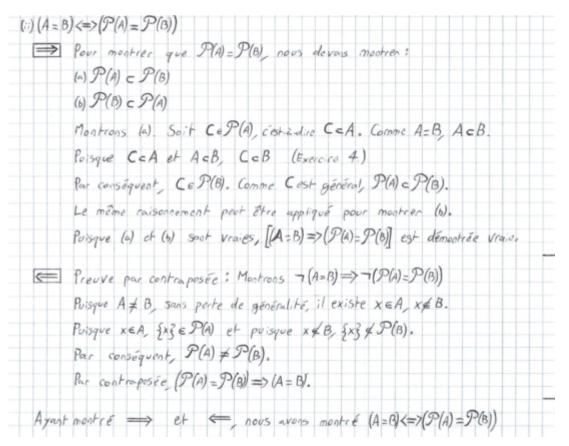
Donc,  $\left[ \forall x \in E \mid (E \subset F) \land (F \subset G) \Rightarrow x \in G \right] \iff E \subset G$ .

**Exercice 5.** Soient A, B et C trois ensembles.

(i) Montrer que  $A = B \iff (A \cap B = A \cup B)$ .



(ii) Montrer que  $A = B \iff (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$ .



(iii) Montrer que  $(A \cup B = A \cup C) \land (A \cap B = A \cap C) \implies (B = C)$ .

```
Exercice 5 (cont)

(ii) Preuve par contraposée: 7 (B=C) => 7 [(AUB=AUC) \(\lambda\) (ANB=ANC)] (*)

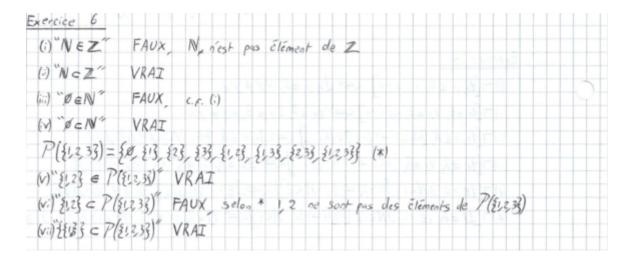
Puisque B \(\pi\) C, sons perte de généralité il existe \(\chi\) \(\epsilon\), \(\epsilon\) (Considérons les cas suivants:

• \(\chi\) \(\epsilon\) A alors \(\chi\) \(\epsilon\) AUB mais \(\chi\) \(\epsilon\) AUC, donc \(\chi\) AUB \(\pi\) AUC.

• \(\chi\) \(\epsilon\) A \(\epsilon\) \(\chi\) \(\epsilon\) \
```

Exercice 6. Dites si les assertions suivantes sont VRAIES ou FAUSSES.

- (i)  $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ .
- (ii)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .
- (iii)  $\emptyset \in \mathbb{N}$ .
- (iv)  $\emptyset \subset \mathbb{N}$ .
- (v)  $\{1,2\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ .
- (vi)  $\{1,2\} \subset \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ .
- (vii)  $\{\{1\}\}\subset \mathcal{P}(\{1,2,3\}).$



Exercice 7. Considérons les sous-ensembles de N

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7\}, \quad C = \{2, 4, 6\}, \quad D = \{3, 6\}.$$

- (i) Déterminer  $B \cap D$  et  $C \cap D$ .
- (ii) Déterminer  $B \cup D$  et  $C \cup D$ . L'une de ces deux unions est-elle disjointe?
- (iii) Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.