Exercice 1

(i) $\frac{d}{dx}(5x^2-10x+15) = 10x-10 \implies f'(x)=0$ ssi $x=1$
$f'(x) \to \infty$ ssi $x \to \infty$

Donc f admet une asymptote verticale en $+\infty$, et un point critique en $x=1$
$\frac{d^2}{dx^2}(5x^2-10x+15) = 10 > 0$ donc $f^{(2)}(1) > 0$ alors $f(1)$ est un minimum local strict.

(ii) $\frac{x^2-5x}{x^2-1} = \frac{x^2-1-(5x-1)}{x^2-1} = 1 - \frac{5x-1}{x^2-1}$

$\frac{d}{dx}\left(1-\frac{5x-1}{x^2-1}\right) = 0 - \frac{5(x^2-1)-2x(5x-1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{5x^2-5-10x^2+2x}{(x^2-1)^2} = \frac{5x^2-2x+5}{(x^2-1)^2} \implies f'(x)=0$ ssi $5x^2-2x+5=0$
$f'(x)\to\infty$ ssi $(x^2-1)^2 \to 0$

$(x^2-1)^2=0 \iff x^2-1=0 \iff x=\pm 1.$

$(-2)^2-4\cdot5\cdot5 = -96 < 0$ donc $5x^2-2x+5=0$ n'a pas de solution Réelle.

Donc f admet des asymptotes verticales en $x=-1$ et $x=1$, et elle n'a pas d'extremum local.

Exercice 2

Décomposons $[0,b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-0}{n}$. En prenant $x_i = \frac{ib}{n}$, nous avons $\int_0^b x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^3\cdot\frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b^4}{n^4}\cdot i^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{b^4}{n^4}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^3 = \lim_{n\to\infty}\frac{b^4}{n^4}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^4}{4}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{b^4}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}\cdot 1 = \frac{b^4}{4}.$$

Exercice 3

(i) Soit $\phi(a) = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$. Alors $\lim_{a\to 0}\phi(a) = \frac{b^{p+1}}{p+1} = \phi(0)$ Donc ϕ est continue en 0.
Alors, si la proposition $\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$ est vraie pour $a>0$, elle sera vraie pour $a=0$.

(ii) Nous pouvons décomposer $[a,b]$ en n intervalles I_i de bords a_i et a_{i+1}, $i\in\{0,\dots,n-1\}$.
~~Alors~~ Comme suit : $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i = a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}$. Alors le quotient $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$
et la longueur de l'intervalle I_i est $a_{i+1}-a_i = a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}} - a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}$
$= a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1$

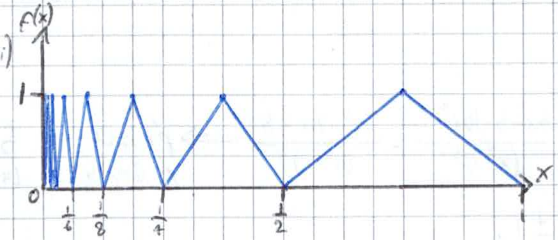
(iii)
$$\int_a^b x^p\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot|I_i| = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\right)^{p}\cdot\left(a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\right)\cdot\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\right)^{p+1}\cdot\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} a^{p+1}\cdot\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^i$$
$$= \lim_{n\to\infty} -a^{p+1}\cdot\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}\right)\cdot\frac{1-\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)^n}{1-\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} -a^{p+1}\cdot\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{p+1}\right)\cdot\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}}$$
$$= b^{p+1}-a^{p+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+1}{n}}}$$
$$= b^{p+1}-a^{p+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}}$$
$$= b^{p+1}-a^{p+1}\cdot\frac{1}{\sum_{k=0}^{p}1} = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

Exercice 4

(i) Pour tout intervalle $I \subset [0,1]$ tel que $|I|>0$, on a $I\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ et $I\setminus\mathbb{Q}\neq\emptyset$.
Par conséquent, $0 = \inf_I f < x = \sup_I f$.

Alors, pour toutes fonctions en escalier e, g tq $e \leq f \leq g$, on a $\int_0^1 e \leq 0$ et $\int_0^1 g \geq x$, donc $\underline{\int_0^1} f \leq 0 \leq x \leq \overline{\int_0^1} f$ et comme l'égalité $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f$ n'est vraie qu'en un seul point : $x=0$, on conclut que f n'est pas intégrable.

(ii)



Constatons que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1-|2^k x - 3| & \text{pour } x\in[2^{-k}, 2^{-k+1}] \end{cases}$

avec $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Décomposons $[0,1]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{2^k}$, $k=\{1,\dots,n\}$.

Observons que $f(x)$ forme sur un intervalle I_k un triangle isocèle de hauteur 1 et de base $\frac{1}{2^k}$, donc son aire vaut $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Alors nous pouvons construire la somme de Riemann $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$, et on a
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.$$

Exercice 5

Soit (v_n^i) une suite, $v_n^i = \frac{n}{(n+i)^2} = \frac{n}{n^2+2ni+i^2} = \frac{1}{n+2i+\frac{i^2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Alors $\{u_n\} = \sum_{i=1}^{n} v_n^i$ est une somme de suites convergentes, donc (u_n) converge.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n+i)^2}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{n+\frac{ni}{n}}\right)^2\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+x_i)^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx.$$