Exercice 1.
On considère $\mathcal{B} = \{(2,1),(5,3)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. l'application linéaire dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donnée par

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver la matrice $M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(f)$ où $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Exercice 1

$P_{\mathcal{E}',\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, avec $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$: $\left.\begin{matrix} e_1 = 3b_1 - b_2 \\ e_2 = -5b_1 + 2b_2 \end{matrix}\right\}$ $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc, $M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(f) = P_{\mathcal{E}',\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2+8 & -3+1+0 \\ 0+2+8 & 0+1+0 \\ 7+0+8 & -3+0+0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 10 & 1 \\ 15 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 17+2 & -5\cdot 17-4 \\ 3\cdot 10-1 & -5\cdot 10+2 \\ 3\cdot 15+3 & -5\cdot 15-6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 53 & -89 \\ 29 & -48 \\ 48 & -81 \end{pmatrix}}}$

Exercice 2.
Soient $\mathcal{E}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \mathcal{B}_1 = \{5v_1 - 3v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3\}$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E}_2 = \{w_1, e_2\}, \mathcal{B}_2 = \{w_1 + 2w_2, -w_1 - w_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ est donnée par

$$M_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_1}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)$.

Exercice 2

$P_{\mathcal{E}_1,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $\left.\begin{matrix} w_1 = -b_1 - 2b_2 \\ w_2 = b_1 + b_2 \end{matrix}\right\}$ $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Donc, $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f) = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{E}_2} \cdot M_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_1}(f) \cdot P_{\mathcal{E}_1,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & 1+1 & -2-3 \\ -6+4 & 2+1 & -4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6-10 & 1+4+5 & 1+2-5 \\ 10-9-14 & 2+6+7 & 2+3-7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -11 & 8 & -2 \\ -13 & 15 & -2 \end{pmatrix}}}$

Exercice 3.

1. Soit σ la permutation de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ définie par

$$\sigma(1)=7,\quad \sigma(2)=5,\quad \sigma(3)=3,\quad \sigma(4)=1,\quad \sigma(5)=2,\quad \sigma(6)=4,\quad \sigma(7)=6,\quad \sigma(8)=8.$$

   Écrire la décomposition de σ en produit de cycles et une décomposition de σ en produit de transpositions.
2. Écrire la décomposition en cycles du produit des permutations $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)$ dans le groupe symétrique S_n, où n est un entier, $n \geq 4$.
3. Calculer la signature de la permutation $\sigma \in S_5$ définie par
   $\sigma(1)=4,\quad \sigma(2)=1,\quad \sigma(3)=5,\quad \sigma(4)=3,\quad \sigma(5)=2.$
4. Calculer la signature de la permutation $\sigma \in S_n$ définie par $\sigma = (12\ldots k)$ (cycle de longueur k).

Exercice 3

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = (25)(1764) = (25)(17)(76)(64)$

2. $(123)(234) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)$

3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 5\ 2) = (14)(43)(35)(52)$ donc $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^4 = 1$.

4. $(1\ 2\ \cdots\ k) = \underbrace{(1\ 2)(2\ 3)\cdots(k-1\ k)}_{k-1 \text{ termes}}$, donc $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{k-1}$

Exercice 4.
Soit $\sigma \in S_5$ la permutation définie par $\sigma(1)=2,\quad \sigma(2)=1,\quad \sigma(3)=4,\quad \sigma(4)=5,\quad \sigma(5)=3$. Quel est le plus petit entier $k \geq 1$ pour que σ^k (la composée k fois de σ) soit l'identité ?

Exercice 4

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$. Puisque $\mathrm{supp}(1\ 2) \cap \mathrm{supp}(3\ 4\ 5) = \emptyset$, $\sigma^n = (1\ 2)^n (3\ 4\ 5)^n$.

Puisque $(1\ 2)$ est un cycle de longueur 2 il faut le composer avec lui-même 2 fois pour revenir à l'identité.
De même, $(3\ 4\ 5)$ est de longueur 3, donc il doit être composé avec lui-même 3 fois pour revenir à l'identité.
Alors, le k cherché est le plus petit multiplicateur commun de 2 et 3, i.e. 6.

$\Rightarrow \underline{k = 6}$

Exercice 5.
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Exercice 5

$$\begin{aligned}
\det(\lambda A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \lambda \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot \lambda \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot \lambda \cdot a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \lambda^n \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \\
&= \lambda^n \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \\
&= \lambda^n \cdot \det(A)
\end{aligned}$$

Exercice 6.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$, où $\overline{A}$ est la matrice conjuguée complexe définie par $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Exercice 6

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \overline{a_{\sigma(1),1}} \cdot \overline{a_{\sigma(2),2}} \cdot \cdots \cdot \overline{a_{\sigma(n),n}}$$

$$= \left(\text{car } \overline{z} \cdot \overline{z'} = \overline{z \cdot z'}\right) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \overline{a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \cdots \cdot a_{\sigma(n),n}}$$

$$= \left(\text{car } \overline{z} + \overline{z'} = \overline{z + z'}\right) \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \cdots \cdot a_{\sigma(n),n}}$$

$$= \overline{\det(A)}$$

Exercice 7.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que le rang de A est égal au nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de A.
2. Montrer que le rang de A est égal au nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A.
3. Montrer que le rang de A est égal au nombre de pivots de la matrice A (Indication : regarder l'effet des opérations élémentaires de la méthode du pivot sur le rang).

Exercice 7

1. Soit f l'application linéaire associée à A, alors le rang de A est donné par la dimension de l'image de f.
Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ génère $\mathrm{Im}(f)$.

   $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est donc le nombre de vecteurs linéairement indépendants de $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$. Comme ces vecteurs forment également les colonnes de A, on conclut que $\operatorname{rang}(A)$ est égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes de A.

2. Puisque $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, si une colonne a_j est linéairement dépendante des autres, alors la ligne a_i, $i = j$ est linéairement dépendante des autres.

   Donc, le nombre de lignes et de colonnes linéairement indépendantes de A sont égaux, et il suit de 1. que $\operatorname{rang}(A)$ est égal au nombre de lignes linéairement indépendantes de A.

3. Puisque les opérations élémentaires conservent l'indépendance linéaire des lignes entre elles, le nombre de lignes linéairement indépendantes de A est égal au nombre de lignes linéairement indépendantes de sa forme échelonnée, i.e. de son nombre de pivots.

   Il suit alors de 2. que $\operatorname{rang}(A)$ est égal au nombre de pivots de A.