Logique et Théorie des Ensembles
Série 06-B

Exercice 1. Déterminer quelles sont les fonctions injectives, surjectives, et bijections parmi la liste suivante. Justifier vos affirmations.

1. $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ll} \mathbb{N}\setminus\{0,1\} & \to \mathbb{N} \\ n & \mapsto \text{le plus petit nombre premier divisant } n \end{array}$
3. Pour $A \subset E$, $h : \begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(A) \\ X & \mapsto X \cap A \end{array}$ (la réponse dépend de A).

1. f est injective : Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \implies \frac{1}{1/x} = \frac{1}{1/x'} \implies x = x'$.
   f est surjective : Soit $y \in \mathbb{R}$, alors $x := \frac{1}{y} \in \mathbb{R}$ satisfait $y = f(x)$.
   f est donc bijective, avec $f^{-1} : y \mapsto \frac{1}{y}$.

2. g n'est pas injective, car $g(2) = g(4)$.
   g n'est pas surjective, car $4 \in \mathbb{N}$ n'est pas premier, donc $\forall x \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, f(x) \neq 4$.

3. Si $A = E$: $\forall X \subset E$, $X \cap E = X$, donc h est alors la fonction identité dans $\mathcal{P}(E)$,
   $h : \begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto X \end{array}$
   Elle est donc bijective, et $h^{-1} = h$.

   Si $A \neq E$: Comme $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$, alors $\forall Y \in \mathcal{P}(A), Y \in \mathcal{P}(E)$ et $h(Y) = Y$, donc h est surjective.
   De plus, $\forall X \subset E \setminus A \in \mathcal{P}(E), h(X) = \emptyset$, donc h n'est pas injective.

   On en conclut que h est surjective indépendamment de A, mais qu'elle n'est injective que si $A = E$.

Exercice 2. (Fonctions caractéristiques χ_A).
Soient E un ensemble et $A \subset E$. La fonction caractéristique de A est définie par

$$\chi_A : \begin{array}{ll} E & \to \{0,1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont la même fonction caractéristique.

(i) Montrons que $A = B \iff \chi_A = \chi_B$. Raisonnement par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A = B$. Soit $x \in E$.

- Si $x \in A$, alors $x \in B$, donc $\chi_A = \chi_B = 1$
- Si $x \notin A$, alors $x \notin B$, donc $\chi_A = \chi_B = 0$

Donc, pour tout $x \in E$, $\chi_A = \chi_B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\chi_A = \chi_B$. Soit $x \in E$.

- Si $x \in A$, alors $\chi_A = 1$ donc $\chi_B = 1$ donc $x \in B$. Par conséquent, $A \subset B$.
- Si $x \in B$, alors $\chi_B = 1$, donc $\chi_A = 1$, donc $x \in A$. Par conséquent, $B \subset A$.

Comme $A \subset B$ et $B \subset A$, $A = B$.

2. Que peut-on dire sur A et B si $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ pour tout $x \in E$?

(ii) $\chi_A \leq \chi_B$ indique que $\chi_A = 1 \Rightarrow \chi_B = 1$.
Autrement dit, si un élément $x \in E$ appartient à A (donc $\chi_A = 1$) alors il appartient également à B ($\chi_B = 1$).
On peut donc en déduire que $\chi_A \leq \chi_B \Rightarrow A \subset B$.

3. Montrer que $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ et $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.

(iii) • Montrons $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$. Soit $x \in E$:

- Si $\chi_{A \cap B} = 1$, alors $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Par conséquent, $\chi_A = 1$ et $\chi_B = 1$, donc $\chi_A \chi_B = 1$
- Si $\chi_{A \cap B} = 0$, alors $x \notin A \cap B$, donc $x \notin A$ ou $x \notin B$. Par conséquent, $\chi_A = 0$ ou $\chi_B = 0$, donc $\chi_A \chi_B = 0$.

Dans tous les cas, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.

• Montrons $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$. Soit $x \in E$:

- Si $\chi_{A^c} = 1$, alors $x \in A^c$, donc $x \notin A$ et $\chi_A = 0$. Par conséquent, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.
- Si $\chi_{A^c} = 0$, alors $x \notin A^c$, donc $x \in A$ et $\chi_A = 1$. Par conséquent, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Dans tous les cas, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

• Montrons $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$. Soit $x \in E$:

- Si $x \in A$ et $x \in B$: Alors $\chi_A = 1$, $\chi_B = 1$, $\chi_{A \cup B} = 1$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1 = \chi_{A \cup B}$.
- Si $x \in A$ et $x \notin B$: Alors $\chi_A = 1$, $\chi_B = 0$, $\chi_{A \cup B} = 1$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1 = \chi_{A \cup B}$.
- Si $x \notin A$ et $x \in B$: Alors $\chi_A = 0$, $\chi_B = 1$, $\chi_{A \cup B} = 1$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 0 + 1 - 0 \cdot 1 = 1 = \chi_{A \cup B}$.
- Si $x \notin A$ et $x \notin B$: Alors $\chi_A = 0$, $\chi_B = 0$, $\chi_{A \cup B} = 0$. Donc, $\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0 = \chi_{A \cup B}$.

4. Montrer que les formules de De Morgan pour $(A \cup B)^C$ et $(A \cap B)^C$ en utilisant les fonctions caractéristiques.

(iv) Formules de De Morgan : $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

- $\chi_{(A\cup B)^c} = 1-\chi_{A\cup B} = 1-(\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B) = 1-\chi_A-\chi_B+\chi_A\chi_B = (1-\chi_A)(1-\chi_B) = \chi_{A^c}\cdot\chi_{B^c} = \chi_{(A^c\cap B^c)}$

- $\chi_{(A\cap B)^c} = 1-\chi_{(A\cap B)} = 1-\chi_A\chi_B$

$\chi_{(A^c\cup B^c)} = \chi_{A^c}+\chi_{B^c}-\chi_{A^c}\chi_{B^c} = 1-(\chi_A)+1-(\chi_B)-(1-\chi_A)(1-\chi_B) = 1-\chi_A+1-\chi_B-(1-\chi_A-\chi_B+\chi_A\chi_B)$

$= 1+1-1-\chi_A+\chi_A-\chi_B+\chi_B-\chi_A\chi_B = 1-\chi_A\chi_B.$

Comme $\chi_{(A\cap B)^c} = 1-\chi_A\chi_B$ et $\chi_{(A^c\cup B^c)} = 1-\chi_A\chi_B$, alors $\chi_{(A\cap B)^c} = \chi_{(A^c\cup B^c)}$

Exercice 3. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective.
   Montrer que f est injective et trouver un exemple pour lequel g ne l'est pas.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective.
   Montrer que g est surjective et trouver un exemple pour lequel f ne l'est pas.
3. Montrer que $g \circ f$ bijective n'implique pas que f et g soient bijectives.

Soit $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, $x \longmapsto |x|$

Il peut être montré que f est injective sans être surjective, g est surjective sans être injective, et $g\circ f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $x \longmapsto |x^2|$ est bijective.

(i) Si $g\circ f$ est injective, alors f est injective.

<u>Preuve par contraposée :</u> Si f n'est pas injective, alors il existe $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Alors, $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $g\circ f(x) = g\circ f(x')$ et par conséquent, $g\circ f$ n'est pas injective.

g n'est pas forcément injective, comme montré dans l'exemple ci-dessus.

(ii) Si $g\circ f$ est surjective, f n'est pas forcément surjective, comme montré dans l'exemple ci-dessus.

Par contre, g est surjective.

<u>Preuve par contraposée :</u> Si g n'est pas surjective, alors il existe $y \in G$ tel que pour tout $x \in F$, $g(x) \neq y$. En particulier, pour tout $e \in E$, $g(f(e)) \neq y$. Donc, $g\circ f(e) \neq y$ et par conséquent, $g\circ f$ n'est pas surjective.

(iii) Par (i) et (ii), il suit que si $g\circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 4. Montrer que si f est une application de E dans F et $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles inclus dans E,

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(E_i)$$

De plus, montrer que si f est injective,

$$f\Big(\bigcap_{i\in I} E_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(E_i)$$

Que peut-on dire si f n'est pas injective ?

$$\begin{aligned}
f\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) &= f(\{x \in E \mid \exists i \in I, x \in E_i\}) \\
&= \{f(x) \in F \mid \exists i \in I, x \in E_i\} \\
&= \{f(x) \in F \mid \exists i \in I, f(x) \in f(E_i)\} \\
&= \bigcup_{i\in I} f(E_i)
\end{aligned}$$

Sans considération particulière de f :
Soit $x \in \bigcap_{i\in I} E_i$, alors $\forall i \in I, x \in E_i$ donc $f(x) \in f(E_i)$, et par conséquent $f(x) \in \bigcap_{i\in I} f(E_i)$.

$$\text{Ainsi,} \quad f\Big(\bigcap_{i\in I} E_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(E_i) \tag{1}$$

De plus, supposons f injective :
Soit $y := f(x) \in \bigcap_{i\in I} f(E_i)$, alors $\forall i \in I, y \in f(E_i)$ et comme f injective $x \in E_i$, alors $x \in \bigcap_{i\in I} E_i$ et $f(x) \in f(\bigcap_{i\in I} E_i)$.

$$\text{Ainsi,} \quad \bigcap_{i\in I} f(E_i) \subset f\Big(\bigcap_{i\in I} E_i\Big) \tag{2}$$

Par (1) et (2), on conclut que si f est injective, $f\Big(\bigcap_{i\in I} E_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(E_i)$.