Exercice 1

Comme f est bijective, elle est injective, donc strictement monotone.

Sans perte de généralité, pour tout $x, x' \in E$, $x<x' \Longrightarrow f(x)<f(x')$.
Prenons $y, y' \in F$ tels que $y=f(x)$ et $y'=f(x')$.

Comme f^{-1}, la fonction inverse de f, est bijective, alors $x=f^{-1}(y)$ et $x'=f^{-1}(y')$.

Donc, $f^{-1}(y)<f^{-1}(y') \Longrightarrow y<y'$ et par contraposée, $y \geq y' \Longrightarrow f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$.
Par conséquent, f^{-1} est monotone.

Exercice 2

(i) a est bien définie, injective : $n+1=n'+1 \Longrightarrow n+1-1=n'+1-1 \Longrightarrow n=n'$

, pas surjective : $a(x)\neq 0$, $0\in\mathbb{N}$.

(ii) b est bien définie, injective : $2x=2x' \Longrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{2x'}{2} \Longrightarrow x=x'$

, surjective : $\forall y\in\mathbb{R}, \exists x=\frac{1}{2}\cdot y, y=b(x)$

b est donc bijective, avec $b^{-1}: x\longmapsto \frac{1}{2}\cdot x$

(iii) c n'est pas bien définie, car pour $x=4\in[0, \infty)$, $c(x)=4^2=16\notin(-\infty,0]$

(iv) d est bien définie, pas injective : $d(2)=d(4)$

, surjective : $d(2)=1$, $d(3)=-1$, donc $\forall y\in\{-1,1\}, \exists x\in\mathbb{N}, y=d(x)$.

(v) $e=d$.

Exercice 3

Soit $E\subset\mathbb{R}$, muni d'un supremum noté $\sup E$. Supposons un deuxième suprémum de E noté $\sup' E$.
Alors $\sup' E$ est un majorant de E, et comme $\sup E\leq M$ où M est n'importe quel majorant de E, $\sup E\leq \sup' E$.

De la même manière, comme $\sup E$ est un majorant de E, $\sup' E\leq \sup E$.

Comme $\sup E\leq \sup' E$ et $\sup' E\leq \sup E$, $\sup E=\sup' E$.

Exercice 4

• $\{\frac{1}{n}+(-1)^n : n\in\mathbb{N}^*\}$: Si n est pair, $\frac{1}{n}+(-1)^n=\frac{1}{n}+1$
Si n est impair, $\frac{1}{n}+(-1)^n=\frac{1}{n}-1<\frac{1}{n}+1$

- Si $n>2$, $\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$, donc pour $n\in\{2,4,6,\dots\}$, $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{n}+1\leq\frac{1}{2}+1$. Comme $\frac{1}{n}+1\geq\frac{1}{n}+(-1)^n$, $\frac{1}{n}+(-1)^n\leq\frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2}$ est un majorant de l'ensemble. Comme $\frac{3}{2}\in\{\frac{1}{n}+(-1)^n : n\in\mathbb{N}^*\}$, c'est également le supremum et maximum.

- Puisque $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}>0$, donc $\frac{1}{n}-1>-1$, et donc -1 est un minorant de l'ensemble.

Par le principe d'Archimède, $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \frac{1}{N}<\varepsilon$, par conséquent $\frac{1}{N}-1<-1+\varepsilon$.
Il n'existe donc pas de minorant plus grand que -1 et c'est donc l'infimum.
Comme $-1\notin\{\frac{1}{n}+(-1)^n : n\in\mathbb{N}^*\}$, il ne s'agit pas d'un minimum

Exercice 4 (cont.)

- $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x < 1\}$

Il suit directement de la définition de l'ensemble que $\inf E = \min E = 0$, et $\sup E = 1$.
L'ensemble ne possède pas de maximum.

- $\{x \in \mathbb{R} : -8 \leqslant x^3 \leqslant -1 \text{ ou } 2 \leqslant x+1 < 6\}$.

L'ensemble peut se réécrire comme $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leqslant x \leqslant -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x < 5\}$.

Par conséquent, $\inf E = \min(\inf[-2,-1], \inf[1,5)) = \min(-2,1) = -2$.
Comme $-2 \in E$, c'est un minimum.

De même, $\sup E = \max(\sup[-2,-1], \sup[1,5)) = \cancel{\sup} \max(-1,5) = 5$.
Comme $5 \notin$, ce n'est pas un maximum.

Exercice 5

(i) f est injective : $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x'}} \Longrightarrow x = x'$
elle est aussi surjective : $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x = \frac{1}{y}, y = \frac{1}{x}$.

Elle est donc bijective, et $f^{-1} = f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

(ii) g n'est ni surjective : $g(x) \neq 4$, ni injective : $g(4) = g(6)$

(iii) χ est injective : $\chi_A = \chi_B \Longrightarrow A = B$
elle est aussi ~~bijective~~ surjective : $\{0,1\}^E$ associe une fonction $\chi_A : \cancel{x} \; E \to \{0,1\}$ à chaque partie de E, donc il existe une partie de E pour chaque fonction χ_A dans $\{0,1\}^E$.

Exercice 6

(i) (h est décroissante sur $(-\infty, 0]$ et croissante sur $[0,\infty)$)

Soient $x=-1$, $y=0$, $z=1$, alors $x<y$ et $h(x)>h(y)$, mais $y<z$ et $h(y)<h(z)$.
Donc, h n'est pas monotone.

En revanche, puisque le domaine de définition de i est restreint à $[0,\infty)$, $x<y \Longrightarrow x^2<y^2$,
donc i est (strictement) croissante.

(ii) Soit p le plus grand nombre premier inférieur à n. Alors $\forall \delta \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n+\delta$.
Donc, le nombre de nombres premiers inférieurs à $n+\delta$ est au moins aussi grand que pour n, i.e. $\pi(n) \leqslant \pi(n+\delta)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi(n) \leqslant \pi(n+1)$ et π est donc croissante.

Exercice 7

Comme $E \subset F$, F peut être écrit comme $F = A \cup E \cup B$, avec $A = \{x \in F : \forall y \in E, x \leqslant y\}$
et $B = \{x \in F : \forall y \in E, x \geqslant y\}$

Autrement dit, F est l'union des minorants de E dans F de E, et des majorants de E dans F.
Il suit que si $B = \emptyset$, $\sup F = \sup E$, sinon $\sup F = \sup B$.
De même, si $A = \emptyset$, $\inf F = \inf E$, sinon $\inf F = \inf A$.

Comme $\inf A \leqslant \inf E$ tant que A est non vide, par définition de A, et que $\sup B \geqslant \sup E$ tant que B est non vide, on en conclut que $\inf F \leqslant \inf E$ et $\sup F \geqslant \sup E$.

Exercice 8

$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E : f(x) \in \{y\}\} = \{x \in E : f(x) = y\}$. Donc,

$\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{y \in F} \{x \in E : f(x) \in \{y\}\} = \{x \in E : f(x) \in \bigcup_{y \in F} \{y\}\} = \{x \in E : f(x) \in F\}$.

Comme une fonction s'applique à tous les éléments de son domaine de définition, tant que f est bien définie $\{x \in E : f(x) \in F\} = E$.

Exercice 9

Soit $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, $x \longmapsto |x|$

Il peut être montré que f est injective sans être surjective, g est surjective sans être injective, et $g \circ f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $x \longmapsto |x^2|$ est bijective.

(i) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

<u>Preuve par contraposée:</u> Si f n'est pas injective, alors il existe $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Alors, $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et par conséquent, $g \circ f$ n'est pas injective.

g n'est pas forcément injective, comme montré dans l'exemple ci-dessus.

(ii) Si $g \circ f$ est surjective, f n'est pas forcément surjective, comme montré dans l'exemple ci-dessus.

Par contre, g est surjective.

<u>Preuve par contraposée:</u> Si g n'est pas surjective, alors il existe $y \in G$ tel que pour tout $x \in F$, $g(x) \neq y$. En particulier, pour tout $e \in E$, $g(f(e)) \neq y$. Donc, $g \circ f(e) \neq y$ et par conséquent, $g \circ f$ n'est pas surjective.

(iii) Par (i) et (ii), il soit que si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.