Exercice 1. (Exemples d'applications linéaires)
Prouver si ces applications sont linéaires ou non. Si oui, décrire le noyau et l'image, et en donner des bases. Discuter de l'injectivité et du rang de ces fonctions.

1. (Sur $\mathbb{R}$)
$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-3z, 7x+6y-13z, -2x+4y-2z) \end{array}$$
2. (Sur $\mathbb{R}$)
$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -\frac{1}{2}\bar{z} \end{array}$$
3. (Sur $\mathbb{C}$)
$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -\frac{1}{2}\bar{z} \end{array}$$
4. (Sur $\mathbb{R}$)
$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ p(x) & \mapsto & p(x+1) \end{array}$$
5. (Sur $\mathbb{R}$)
$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ p(x) & \mapsto & p(x)+1 \end{array}$$
6. (Sur $\mathbb{R}$)
$$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}^2 \\ p(x) & \mapsto & (p(0), p'(0)) \end{array}$$
7. (Sur $\mathbb{R}$)
$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \to & \mathbb{R}^3 \\ p(x) & \mapsto & (p(0), p(1), p(2)) \end{array}$$

Exercice 2. (Une application linéaire particulière) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$
2. $f \circ f = 0$ et $2{\cdot}\mathrm{rang}(f) = n$

Exercice 3. (Somme d'applications linéaires)
Soient $f, g : V \to W$ des applications linéaires, où V et W sont des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.

1. Montrer que la somme
$$f+g : \begin{array}{ccc} V & \to & W \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$
est une application linéaire.
Remarque : voir la Proposition 3.1.1.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$.
L'inclusion dans l'autre sens est-elle vraie ? Si non, donner un contre-exemple.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
L'inclusion dans l'autre sens est-elle vraie ? Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 4. (Base et application linéaire)
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, et $f : E \to E$ un endomorphisme tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, f(X), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Exercice 5. (Projection linéaire)
Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Une application linéaire $p : V < toV$ est appelée une *projection* si $p \circ p = p$ Il y a deux exemples de projections *triviales* : l'application identité et l'application nulle.

1. Pour $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donner un exemple de projection qui n'est pas triviale.
2. Soit p une projection. Montrer que $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.
3. Soit p une projection. Montrer que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = V$.
4. Conclure que $V =$Ker$(p)\oplus$ Im(p). Quel est le lien entre l'application p et les les applications linéaires $\mathrm{P}_{\mathrm{Ker}(p)}$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{Im}(p)}$ introduites dans l'exemple 3.3.1(4) ?
5. Conclure que toute projection comme définie ci-dessus est de type projection sur un sous-espace U parallèlement à un sous-espace W où W est complémentaire à U.