Exercice 1. Quelle est la contraposée des implications suivantes ? Même question avec la négation.

(i) Si $x > 0$, alors $f(x) \leq 0$.

(ii) Si $ab = 0$, alors ($a = 0$ ou $b = 0$).

> (i) Contraposée : Si $f(x) > 0$, alors $x \leq 0$.
> Négation : $(x > 0)$ et $(f(x) > 0)$.
>
> (ii) Contraposée : Si ($a \neq 0$ et $b \neq 0$), alors $ab \neq 0$.
> Négation : $(ab = 0)$ et ($a \neq 0$ et $b \neq 0$).

Exercice 2. Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \implies \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y]$.

(iii) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > A$.

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, \forall r \mathbb{N}, \forall s \mathbb{N}, [p = rs \implies (r = 1) \vee (s = 1)]$.

> (i) "Le carré d'un nombre réel est négatif."
> Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
>
> (ii) "On peut trouver un nombre rationnel entre chaque paire de nombres rationnels distincts."
> *("$\mathbb{Q}$ est dense." ?)*
> Négation : $\exists x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \wedge (\forall z \in \mathbb{Q}, z < x \wedge y < z)]$.
>
> (iii) "Il existe des entiers naturels arbitrairement grands."
> Négation : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq A$
>
> (iv) "Il existe une infinité de nombres premiers."
> Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \exists r \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N}, [(p = rs) \wedge (r \neq 1) \wedge (s \neq 1)]$

Exercice 3. Écrire la négation des assertions suivantes.

(i) $\forall x, y \in E, xy = yx$.

(ii) $\exists x \in E, \forall y \in E, xy = yx$.

(iii) $\forall a, b \in A, [ab = 0 \implies (a = 0) \vee (b = 0)]$.

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, [x < y \implies f(x) < f(y)]$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

(v) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon]$ (où (u_n) est une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$).

(vi) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon]$ (où (u_n) est une suite réelle).

> (i) $\neg[\forall x, y \in E, xy = yx] \iff \exists x, y \in E, xy \neq yx$.
>
> (ii) $\neg[\exists x \in E, \forall y \in E, xy = yx] \iff \forall x \in E, \exists y \in E, xy \neq yx$.
>
> (iii) $\neg[\forall a, b \in A, [ab = 0 \implies (a = 0) \vee (b = 0)]] \iff \exists a, b \in A, [ab = 0 \wedge (a \neq 0) \wedge (b \neq 0)]$.
>
> (iv) $\neg[\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, [x < y \implies f(x) < f(y)]] \iff \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, [x < y \wedge f(x) \geq f(y)]$
>
> (v) $\neg[\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon]] \iff \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, [n \geq N \wedge |u_n - \ell| \geq \epsilon]$
>
> (vi) $\neg[\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon]]$
> $\iff \forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, [n \geq N \wedge |u_n - \ell| \geq \epsilon]$

Exercice 4. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

> Soit $x \in E$. Puisque $E \subset F$, alors $x \in F$. De plus, comme $F \subset G, x \in G$.
> Donc, $[\forall x \in E, (E \subset F) \wedge (F \subset G) \implies x \in G] \iff E \subset G$.

Exercice 5. Soient A, B et C trois ensembles.

(i) Montrer que $A = B \iff (A \cap B = A \cup B)$.

Exercice 5

(i) $(A = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A \cup B)$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $x \in A$. Puisque $A = B$, $x \in B$, et par conséquent $[x \in A$ et $x \in B] \Leftrightarrow x \in A \cap B$.
Donc, $A \subset A \cap B$. De plus, par définition $A \cap B \subset A$. Ainsi, $A = A \cap B$. $(*)$

Montrons maintenant que $A = A \cup B$. Soit $y \in A \cup B$, c'est-à-dire $y \in A$ ou $y \in B$.
Si $y \in B$, comme $A = B$, $y \in A$. Donc, $(y \in A \cup B \Rightarrow y \in A) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset A$.
De plus, par définition $A \subset A \cup B$. Ainsi, $A = A \cup B$ $(**)$

Ayant montré $(*)$ et $(**)$, nous avons montré que si $A = B$, $(A \cap B) = (A \cup B)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x \in B$. Par définition, $B \subset A \cup B$ et donc $x \in A \cup B$. Comme $A \cup B = A \cap B$, $x \in A \cap B$, et par définition $A \cap B \subset A$ donc $x \in A$.
Ainsi il est montré que $B \subset A$. Par le même raisonnement, on peut montrer que $A \subset B$. Comme $A \subset B$ et $B \subset A$, $A = B$.
Nous avons donc montré que si $(A \cap B = A \cup B)$, alors $A = B$.

Ayant montré $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$, nous avons montré $(A = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A \cup B)$.

(ii) Montrer que $A = B \iff (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$.

(ii) $(A = B) \iff (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour montrer que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, nous devons montrer :

(a) $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

(b) $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$

Montrons (a). Soit $C \in \mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire $C \subset A$. Comme $A = B$, $A \subset B$.

Puisque $C \subset A$ et $A \subset B$, $C \subset B$ (Exercice 4)

Par conséquent, $C \in \mathcal{P}(B)$. Comme C est général, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Le même raisonnement peut être appliqué pour montrer (b).

Puisque (a) et (b) sont vraies, $[(A = B) \Rightarrow (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))]$ est démontrée vraie.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Preuve par contraposée : Montrons $\neg(A = B) \Rightarrow \neg(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$

Puisque $A \neq B$, sans perte de généralité, il existe $x \in A$, $x \notin B$.

Puisque $x \in A$, $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ et puisque $x \notin B$, $\{x\} \notin \mathcal{P}(B)$.

Par conséquent, $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

Par contraposée, $(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (A = B)$.

Ayant montré $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$, nous avons montré $(A = B) \iff (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$

(iii) Montrer que $(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C) \implies (B = C)$.

Exercice 5 (cont.)

(iii) Preuve par contraposée : $\neg(B = C) \Rightarrow \neg[(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C)]$ $(*)$

Puisque $B \neq C$, sans perte de généralité il existe $x \in B$, $x \notin C$.

Considérons les cas suivants :

- $x \notin A$, alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cup C$, donc $A \cup B \neq A \cup C$.
- $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ mais $x \notin A \cap C$, donc $A \cap B \neq A \cap C$.

Il est donc montré que si $B \neq C$, les assertions $(A \cup B = A \cup C)$ et $(A \cap B = A \cap C)$ ne peuvent pas être vraies en même temps, et donc que $[(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C)]$ est fausse. Ainsi, $(*)$ est démontrée vraie.

Par contraposée, il est donc démontré que $(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (B = C)$.

Exercice 6. Dites si les assertions suivantes sont VRAIES ou FAUSSES.

(i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
(iii) $\emptyset \in \mathbb{N}$.
(iv) $\emptyset \subset \mathbb{N}$.
(v) $\{1,2\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.
(vi) $\{1,2\} \subset \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.
(vii) $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(\{1,2,3\})$.

Exercice 6

(i) "$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$" FAUX, $\mathbb{N}$ n'est pas élément de $\mathbb{Z}$

(ii) "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" VRAI

(iii) "$\emptyset \in \mathbb{N}$" FAUX, c.f. (i)

(iv) "$\emptyset \subset \mathbb{N}$" VRAI

$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ (*)

(v) "$\{1,2\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$" VRAI

(vi) "$\{1,2\} \subset \mathcal{P}(\{1,2,3\})$" FAUX, selon * 1, 2 ne sont pas des éléments de $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

(vii) "$\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(\{1,2,3\})$" VRAI

Exercice 7. Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{N}$

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad B = \{1,3,5,7\}, \quad C = \{2,4,6\}, \quad D = \{3,6\}.$$

(i) Déterminer $B \cap D$ et $C \cap D$.
(ii) Déterminer $B \cup D$ et $C \cup D$. L'une de ces deux unions est-elle disjointe ?
(iii) Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

Exercice 7

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{1,3,5,7\}$, $C = \{2,4,6\}$, $D = \{3,6\}$

(i) $B \cap D = \{1,3,5,7\} \cap \{3,6\} = \{3\}$ $\quad$ $C \cap D = \{2,4,6\} \cap \{3,6\} = \{6\}$

(ii) $B \cup D = \{1,3,5,7\} \cup \{3,6\} = \{1,3,5,6,7\}$ $\quad$ $C \cup D = \{2,4,6\} \cup \{3,6\} = \{2,3,4,6\}$

Aucune de ces unions n'est disjointe car $B \cap D \neq \emptyset$ et $C \cap D \neq \emptyset$

En revanche, $B \cup C$ est disjointe.

(iii) $A \setminus B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{1,3,5,7\} = \{2,4,6\} = C$

$A \setminus C = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3,5,7\} = B$

$A \setminus D = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{3,6\} = \{1,2,4,5,7\}$