**Exercice 1.** (Nombres complexes)

1. Écrire en forme algébrique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{i(3+2i)^2}, \quad \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}-i}.$$

$$1. \quad \frac{1}{i(3+2i)^2} = \frac{1}{i(9+12i-4)} = \frac{1}{5i-12} = \frac{5i+12}{(5i)^2-12^2} = \frac{5i+12}{-25-144} = \underline{-\frac{12}{169} - \frac{5}{169}i}$$

$$\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}{\sqrt{2}^2-(\sqrt{3}i)^2} = \frac{1}{5} \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^2 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}i) = \frac{1}{5} \cdot (3+2\sqrt{6}i-2) \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{6}+2i+3i)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot (1+2\sqrt{6}i) \cdot 5i = i - 2\sqrt{6} = \underline{-2\sqrt{6} + i}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}^2-i^2} = \frac{\sqrt{3}+i}{3+1} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i}$$

2. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$-3i, \quad \sqrt{3}+i, \quad 3i(2+i).$$

$$2. \quad |-3i| = \sqrt{(-3)^2} = \underline{3} \quad ; \quad |\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \underline{2}$$

$$|3i(2+i)| = |6i-3| = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \underline{3\sqrt{5}}$$

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec la formule habituelle pour résoudre les équations générales du second degré. Vérifier les solutions trouvées.
   — $z^2 + 2z + 3 = 0$,
   — $z^2 + 2iz - 3 = 0$.

$$3. \quad -z^2+2z+3=0 \qquad b^2-4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4+12 = 16$$

$$z_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{-2} = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad ; \quad z_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{-2} = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

Vérification:

$$-3^2+2 \cdot 3+3 = -9+6+3 = 0 \quad ; \quad -(-1)^2+2 \cdot (-1)+3 = -1+(-2)+3 = 0$$

$$\underline{Sol = \{-1, 3\}}$$

$$-z^2+2iz-3=0 \qquad b^2-4ac = (2i)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -4-12 = -16$$

$$z_1 = \frac{-2i-\sqrt{-16}}{-2} = \frac{-2i-4i}{-2} = \frac{-6i}{-2} = 3i \quad ; \quad z_2 = \frac{-2i+\sqrt{-16}}{-2} = \frac{-2i+4i}{-2} = \frac{2i}{-2} = -i$$

Vérification:

$$-(3i)^2+2i(3i)-3 = -(-9)+(-6)-3 = 9-6-3 = 0 \quad ; \quad -(-i)^2+2i \cdot (-i)-3 = -(-1)+(2)-3 = 1+2-3 = 0$$

$$\underline{Sol = \{-i, 3i\}}$$

4. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en remplaçant $z = a + ib$

$$z + 3i + Re(z)(i + (Im(z))^2) = 0$$

4. $z = a + ib$

$z + 3i + Re(z)(i + (Im(z))^2) = 0$

$a + ib + 3i + a \cdot (i + b^2) = 0$

$a + ib + 3i + ai + ab^2 = 0$

$(a + ab^2) + (a + b + 3) = 0$

$\begin{cases} a + ab^2 = 0 \\ a + b + 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a(1 + b^2) = 0 \\ b = -a - 3 \end{cases}$ $a = 0$ ou $b^2 = -1$

Comme $b \in \mathbb{R}$, $b^2 \neq -1$, et donc $a = 0$.

Donc, $b = -a - 3 = 0 - 3 = -3$

Vérification : $(0 - 3i) + 3i + 0 \cdot (i + (-3)^2) = -3i + 3i + 0 = 0$

$z = 0 - 3i$

5. Calculer le conjugué en forme algébrique $z = a + ib$ des nombres complexes suivants :

$$\frac{5 + 2i}{1 - i}, \quad \frac{\sqrt{2} - i}{2 + i}, \quad \frac{2 - i}{i}.$$

5. $\overline{\frac{5+2i}{1-i}} = \overline{\frac{1}{2} \cdot (5 + 2i) \cdot (1 + i)} = \overline{\frac{1}{2} \cdot (5 + 2i + 5i - 2)} = \overline{\frac{1}{2} \cdot (3 + 7i)} = \frac{1}{2} \cdot (3 - 7i) = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$

$\overline{\frac{\sqrt{2} - i}{2 + i}} = \overline{\frac{1}{5} \cdot (\sqrt{2} - i)(2 - i)} = \overline{\frac{1}{5} \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{2}i - 2i - 1)} = \overline{\frac{1}{5} \cdot ((2\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} + 2)i)} = \frac{1}{5}((2\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 2)i)$

$= \frac{2\sqrt{2} - 1}{5} + \frac{\sqrt{2} + 2}{5}i$

$\overline{\frac{2 - i}{i}} = \overline{(2 - i) \cdot (-i)} = \overline{-2i - 1} = -1 + 2i$

6. Montrer la proposition suivante : $\forall z \in \mathbb{C}$ :

— si $z \neq 0$ : $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ ;

— $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$ ;

— $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

6. - Soit $z = a + ib \neq 0$

Alors $|z^{-1}| = \left|\frac{1}{a + ib}\right| = \left|\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{|z|} = |z|^{-1}$

- $z \in \mathbb{R} \iff (a + ib) \in \mathbb{R} \iff b = 0 \iff \bar{z} = a - 0i = a = z$

- $z \in i\mathbb{R} \iff (a + ib) \in i\mathbb{R} \iff a = 0 \iff \bar{z} = 0 - ib = -ib = -z$

**Exercice 2.** (Coordonnées polaires)

(a) Montrer que
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big( \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \big)$$
où $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ est l'écriture du nombre complexe $z$ en coordonnées polaires.

(b) Déduire une formule analogue pour $\frac{z_1}{z_2}$ lorsque $z_2 \neq 0$.

(c) Représenter graphiquement les solutions d'équation $z^3 = 1$ (racines cubiques de l'unité).

Exercice 2

(a) $z_1 z_2 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\cdot r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2 (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2 (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\cdot(i\sin\alpha_2) + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + i^2\cdot\sin\alpha_1\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2 (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i\cdot(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2))$

$= r_1 r_2 (\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$

(b) Par analogie, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$

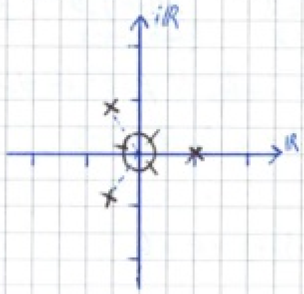
On pourra vérifier que $z\cdot z^{-1} = \frac{z}{z} = \frac{r}{r}\cdot(\cos(\alpha-\alpha) + i\sin(\alpha-\alpha)) = 1\cdot(\cos(0) + i\sin(0))$

$= 1\cdot(1+0) = 1$

(c) $z^3 = 1 \iff r^3(\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)) = 1$

$\iff r^3 = 1$ et $3\alpha = 0 \pmod{2\pi}$

$\iff r = 1$ et $\alpha \in \{0, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$




$z_1 = 1$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

**Exercice 3.** (Propriétés d'espace vectoriel)
Soit $V$ un espace vectoriel sur un corps $K$. Démontrer que les propriétés suivantes sont satisfaites

1. (a) L'élément neutre pour l'addition est unique ;
   (b) $\forall v \in V$, l'opposé $(-v)$ de $v$ est unique ;
2. (a) $0_K \cdot v = 0_V \quad \forall v \in V$ ;
   (b) $\lambda \cdot 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in K$ ;
3. L'opposé de $v$, noté $-v$, satisfait $-v = (-1) \cdot v$ avec $v \in V$ et $-1 \in K$ ;
4. $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K$ ou $v = 0_V$.

*NB : Cet exercice figure en tant que Proposition 1.1.1 du polycopié, mais vous pouvez essayer de trouver vous-mêmes les preuves avant de regarder le polycopié.*

Exercice 3

1. (a) Supposons deux éléments neutres pour l'addition, $0_V$ et $0_V'$.

$0_V = 0_V + 0_V' = 0_V' + 0_V = 0_V'$

(b) Supposons deux inverses additifs de $v$, $(-v)$ et $(-v)'$.

$(-v) = (-v) + 0_V = (-v) + (v + (-v)') = ((-v)+v) + (-v)' = 0_V + (-v)' = (-v)'$

2. (a) Soit $\alpha \in K$, et $w = (\alpha \cdot v) \in V$.

Alors pour tout $v \in V$,

$0_K \cdot v = (\alpha + (-\alpha)) \cdot v = \alpha \cdot v + (-\alpha) \cdot v = w + (-w) = 0_V$

(b) Pour tout $\lambda \in K$,

$\lambda \cdot 0_V = (\lambda - 1) \cdot 0_V + 0_V = (\lambda - 1) \cdot 0_V = (\lambda - 2) \cdot 0_V + 0_V = \cdots = 1 \cdot 0_V = 0_V$

3. $v + (-v) = 0_V = 0_K \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = v + (-1) \cdot v$

Puisque $v + (-v) = v + (-1) \cdot v$, alors $(-v) = (-1) \cdot v$.

4. $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K$ ou $v = 0_V$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Preuve par contraposée :

Supposons $\lambda \neq 0_K$ et $v \neq 0_V$. Comme $\lambda \neq 0_K$, $\lambda v = 0 \Rightarrow v = 0_V$.

Puisque $v \neq 0_V$, alors $\lambda v \neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La preuve est fournie par le point 2. de cet exercice.

Ayant montré $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$, il est montré que $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K$ ou $v = 0_V$.

**Exercice 4.** (Un exemple d'espace vectoriel)
Définir les opérations $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{C}^n$ et vérifier que cela munit $\mathbb{C}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Détailler l'associativité de la multiplication par les scalaires.

Exercice 4

$\mathbb{C}^n$ est l'ensemble constitué par les n-uplets $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ où $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$.
On peut donc représenter un vecteur de $\mathbb{C}^n$ comme une famille $(z_i)_{i\in I}$, où $I = [1, 2, \cdots, n]$.
On peut alors définir les opérations :

$$+ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \longmapsto (z_i + w_i)_{i\in I}, \quad I = [1, 2, \cdots, n]$$

et
$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\alpha, (z_i)_{i\in I} \longmapsto (\alpha \cdot z_i)_{i\in I}, \quad I = [1, 2, \cdots, n]$$

où les opérations $+$ et $\cdot$ du côté droit représentent respectivement l'addition et la multiplication complexes.

3/

Exercice 4 (cont.)

L'addition et la multiplication complexes étant définies sur un corps, $\mathbb{C}$, les opérations ~~bénéficient~~ $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{C}^n$ héritent de l'associativité, commutativité, et distributivité. On peut également vérifier que

$(z_i)_{i\in I} : \forall i \in I, z_i = 0$ est l'élément neutre additif,
$-(z_i)_{i\in I} = (-z_i)_{i\in I}$ est l'inverse additif de $(z_i)_{i\in I}$, pour tout $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^n$,
$(z_i)_{i\in I} : \forall i \in I, z_i = 1$ est l'élément neutre pour la multiplication par un scalaire.

En détail, l'associativité de la multiplication par un scalaire :

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot (z_i)_{i\in I} = ((\alpha \cdot \beta) \cdot z_i)_{i\in I} = (\alpha \cdot (\beta \cdot z_i))_{i\in I} \text{ (car la multiplication complexe est associative)}$$
$$= \alpha \cdot (\beta \cdot z_i)_{i\in I}$$

**Exercice 5.** (Est ce un sous-espace vectoriel ? Trouver une famille génératrice.)

1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ? Si oui, trouver une famille génératrice.
   (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$
   (b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - y = 0\}$

   (a) Oui : Il s'agit de la droite dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = x$.
   $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est une famille génératrice de cette droite.

   (b) Non : $(2, 2) \in E$, mais $2 \cdot (2, 2) = (4, 4) \notin E$, donc $E$ n'est pas clos pour la multiplication par un scalaire (il est également facile de vérifier qu'il n'est pas clos pour l'addition), par conséquent $E$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ ? Si oui, trouver une famille génératrice.
   (a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}$
   (b) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y = 0\}$
   (c) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
   (d) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{C}\}$
   (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y^2 - x^3 = 0\}$

   (a) Non : $0_{\mathbb{C}^3} = (0, 0, 0)$ n'appartient pas à $E$

   (b) Oui : Il s'agit du "plan" formé par les "axes" $x$ et $z$.
   $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\right\}$ est génératrice de ce sous-espace vectoriel.

   (c) Non : Si $v \in E$, alors $i \cdot v \notin E$, donc $E$ n'est pas clos pour la multiplication par un scalaire dans $\mathbb{C}$.

   (d) Oui : Il s'agit du plan formé par les points $(0, 0, 0), (1, 2, 3), (i, 2i, 3i)$.
   $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 3i \end{pmatrix}\right\}$ est génératrice de ce plan.

   (e) Non : $(1, 1, 1) \in E$, mais $(1, 1, 1) + (1, 1, 1) = (2, 2, 2) \notin E$, donc $E$ n'est pas clos pour l'addition. (Il n'est également pas clos pour la multiplication par un scalaire.)

**Exercice 6.** L'objectif de cet exercice est de vérifier que toutes les propriétés demandées dans la définition de sous-espace vectoriel sont nécessaires.

1. Donner un exemple de sous-ensemble non vide $U$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &\forall u \in U, \forall v \in U, \quad u+v \in U, \\ &\forall u \in U, \quad -u \in U \end{aligned}$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Le sous-ensemble $U = \mathbb{Z}^2$ satisfait les conditions données :
Soient $u = (a, b), v = (c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} &(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in U \\ &- u = (-a, -b) \in U \end{aligned}$$

En revanche, $[\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U]$ n'est pas vérifiée, il suffit de prendre $\lambda = \frac{1}{a}$

2. Donner un exemple de sous-ensemble non vide $U$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Le sous-ensemble $U = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$ satisfait les conditions données :
Soient $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot (x, |x|) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot |x|) = (\lambda x, |\lambda x|) \in U$$

En revanche, $[\forall u \in U, \quad -u \in U]$ n'est pas vérifiée, car $(-x, -|x|) \notin U$.

3. Donner un exemple de sous-ensemble non vide $U$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &\forall u \in U, \forall v \in U, \quad u+v \in U, \\ &\forall u \in U, \forall \lambda > 0, \quad \lambda \cdot u \in U, \end{aligned}$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Le sous-ensemble $U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}_+\}$ satisfait les conditions données :
Soient $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2), \quad x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned} &u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in U \\ &\forall \lambda > 0, \quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in U \end{aligned}$$

En revanche, $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ pas un élément de $U$.

L'exercice suivant est **facultatif**. Il ne sera pas corrigé lors de la séance d'exercices, mais sa solution sera postée sur Moodle.

**Exercice 7.** (Un corps à 3 éléments)
L'objectif de cet exercice est de construire un corps fini.
Rappelons que le reste de la division d'un entier $n$ par 3 est l'unique entier $r$ entre 0 et $3-1$ (compris) tel que $n-r$ soit divisible par 3. Par exemple, le reste de 5 est 2, le reste de 39 est 0, le reste de $-2$ est 1, et le reste de votre numéro d'étudiant est votre groupe pour les séances d'exercices.

Considérons $K = \{0, 1, 2\}$ et définissons les opérations

$$a \oplus b = \text{le reste de la division de } a+b \text{ par } 3$$
$$a \otimes b = \text{le reste de la division de } a \cdot b \text{ par } 3$$

Remplir les tables d'addition et de multiplication suivantes.

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

| $\otimes$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

Montrer l'existence des neutres additif et multiplicatif. Montrer que tout élément admet un inverse pour $\oplus$, et tout élément non-nul admet un inverse pour $\otimes$.
Vérifier que l'addition est commutative.

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| $\otimes$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

- 0 est l'élément neutre pour $\oplus$, car $\forall x \in \{0, 1, 2\}, 0 \oplus x = x \oplus 0 = x$.
- 1 est l'élément neutre pour $\otimes$, car $\forall x \in \{0, 1, 2\}, 1 \otimes x = x \otimes 1 = x$.
- On observe que :
  - $0 \oplus 0 = 0$, donc 0 est l'inverse pour $\oplus$ de 0
  - $1 \oplus 2 = 0$, donc 2 est l'inverse pour $\oplus$ de 1
  - $2 \oplus 1 = 0$, donc 1 est l'inverse pour $\oplus$ de 2
- On observe que :
  - $1 \otimes 1 = 1$, donc 1 est l'inverse pour $\otimes$ de 1
  - $2 \otimes 2 = 1$, donc 2 est l'inverse pour $\otimes$ de 2
- Enfin, la table d'addition étant symétrique selon sa diagonale, on peut en déduire que l'addition est commutative (la même observation peut être faite pour la multiplication).