Série 2.B

Exercice 1

Partons de $\emptyset$: 0 éléments

Par l'axiome de puissance, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$: 1 élément

$$A = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} : 2 \text{ éléments}$$

$$B = \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} : 4 \text{ éléments}$$

Par l'axiome de compréhension : $C = \{x \in \mathcal{P}(B)$ tel que $x \notin B$ et $x \notin \{\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}\}$

C : $2^4 - 4 - 2 = 10$ éléments

Alors, $\mathcal{P}(C)$ possède 2^{10} éléments.

On peut remarquer que l'axiome de puissance permet de construire des ensembles de grande taille, et l'axiome de compréhension permet de restreindre librement le nombre d'éléments d'un ensemble. On en déduit donc qu'il est possible de construire des ensembles de taille finie quelconque.

Exercice 2

1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $A \Delta B \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Soit $x \in A \Delta B$, i.e. $x \in (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$

- Si $x \in (A \cap (E \setminus B))$, alors $x \in A$ et $x \in E \setminus B$, donc $x \notin B$.
  Par conséquent, $x \in (A \cup B)$ mais $x \notin (A \cap B)$. Donc, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- Si $x \in (B \cap (E \setminus A))$, alors $x \in B$ et $x \in E \setminus A$, donc $x \notin A$.
  Par conséquent, $x \in (A \cup B)$ mais $x \notin (A \cap B)$. Donc, $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $A \Delta B \supset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, i.e. $x \in A$ ou $x \in B$, mais $x \notin A \cap B$.

- Si $x \in A$, alors $x \notin B$, donc $x \in E \setminus B$ (car $x \in E$, puisque $A \subset E$)
  Par conséquent, $x \in (A \cap (E \setminus B))$
- Si $x \in B$, alors $x \notin A$, donc $x \in E \setminus A$ (car $x \in E$, puisque $B \subset E$)
  Par conséquent, $x \in (B \cap (E \setminus A))$

Il est donc montré que pour tout $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $x \in (A \cap (E \setminus B))$ ou $x \in (B \cap (E \setminus A))$, i.e. $x \in A \Delta B$.

Ayant montré $\boxed{\subset}$ et $\boxed{\supset}$, il est montré que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Exercice 2 (cont.)

2. $(A \Delta B) = \emptyset \iff (A = B)$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A \Delta B = \emptyset$

Par le point 1. de cet exercice, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \emptyset$.

Donc, tous les éléments de $A \cup B$ ~~est conten~~ appartiennent à $A \cap B$.

i.e., $(A \cup B) \subset (A \cap B)$.

Comme $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$, $A \subset B$. De la même manière, $B \subset A$.

Alors, $A = B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $A = B$

Par le point 1. de cet exercice,
$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup A) \setminus (A \cap A) \\ &= A \setminus A \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Ayant montré $\boxed{\Longrightarrow}$ et $\boxed{\Longleftarrow}$, il est montré que $(A \Delta B \cancel{\neq 0} = \emptyset) \iff (A = B)$.

Exercice 3

1. $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $E \cup (F \cap G) \subset (E \cup F) \cap (E \cup G)$

Soit $x \in E \cup (F \cap G)$. Alors :

- Si $x \in E$, alors $x \in (E \cup F)$ et $x \in (E \cup G)$, donc $x \in ((E \cup F) \cap (E \cup G))$
- Si $x \in F \cap G$, alors $x \in F$ donc $x \in (E \cup F)$, et $x \in G$ donc $x \in (E \cup G)$

Par conséquent $x \in ((E \cup F) \cap (E \cup G))$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $E \cup (F \cap G) \supset (E \cup F) \cap (E \cup G)$

Soit $x \in ((E \cup F) \cap (E \cup G))$. Donc, $x \in (E \cup F)$ et $x \in (E \cup G)$.

- Si $x \in E$, alors $x \in (E \cup (F \cap G))$.
- Si $x \notin E$, alors $x \in F$ car $x \in (E \cup F)$, et $x \in G$ car $x \in (E \cup G)$.

Donc, $x \in (F \cap G)$, et $x \in E \cup (F \cap G)$.

2. $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $E \setminus (F \cup G) \subset (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$. Soit $x \in E \setminus (F \cup G)$

Alors $x \in E$, mais $x \notin F \cup G$ donc $x \notin F$ et $x \notin G$. Autrement dit, $x \in E$ et $x \notin F$, donc $x \in (E \setminus F)$, et $x \in E$ et $x \notin G$, donc $x \in (E \setminus G)$. Par conséquent, $x \in (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $E \setminus (F \cup G) \supset (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$. Soit $x \in (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$

Alors $x \in E$ mais $x \notin F$, et $x \in E$ mais $x \notin G$. Donc, $x \in E$ et $x \notin F \cup G$.
Par conséquent, $x \in E \setminus (F \cup G)$.

Exercice 3 (cont.)

3. $E\setminus(F\cap G)=(E\setminus F)\cup(E\setminus G)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $E\setminus(F\cap G)\subset(E\setminus F)\cup(E\setminus G)$. Soit $x\in E\setminus(F\cap G)$.

Alors $x\in E$, mais $x\notin(F\cap G)$.

- Si $x\in F$, alors $x\notin G$, et comme $x\in E$, $x\in(E\setminus G)$
- Si $x\in G$, alors $x\notin F$, et comme $x\in E$, $x\in(E\setminus F)$

Donc, $x\in(E\setminus F)$ ou $x\in(E\setminus G)$, i.e. $x\in(E\setminus F)\cup(E\setminus G)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $E\setminus(F\cap G)\supset(E\setminus F)\cup(E\setminus G)$. Soit $x\in((E\setminus F)\cup(E\setminus G))$.

- Si $x\in(E\setminus F)$, alors $x\in E$ et $x\notin F$
- Si $x\in(E\setminus G)$, alors $x\in E$ et $x\notin G$

Donc, $x\in E$ mais $x\notin(F\cap G)$, par conséquent $x\in(E\setminus(F\cap G))$.

Exercice 4

$E=F \iff \mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(F)$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $E=F$. En particulier, $E\subset F$ donc toute partie de E est également partie de F. Donc, $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$.

Par le même raisonnement, puisque $F\subset E$ alors $\mathcal{P}(F)\subset\mathcal{P}(E)$.

Comme $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(F)\subset\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(F)$. Soit A une partie de E.

Comme $A\subset E$, alors $A\in\mathcal{P}(E)$ et puisque $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(F)$, $A\in\mathcal{P}(F)$, donc $A\subset F$. Puisque A est général, $E\subset F$.

Par le même raisonnement, il peut être montré que $F\subset E$.

Comme $E\subset F$ et $F\subset E$, $E=F$.

Exercice 5

Les éléments de $\{0\}$ sont : 0

Les éléments de $\mathcal{P}(\{0\})$ sont : $\emptyset$, $\{0\}$

Les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))=\mathcal{P}(\{\emptyset,\{0\}\})$ sont : $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{0\}\}$, $\{\emptyset,\{0\}\}$.

Donc, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{0\}\},\{\emptyset,\{0\}\}\}$.

Exercice 6

Preuve par l'absurde : Supposons F l'ensemble de tous les ensembles, et $A\subset F$ la partie de F composée des ensembles ne s'appartenant pas.

Si A s'appartient, alors A n'est pas un élément de A donc A ne s'appartient pas, et par conséquent A est un élément de A, donc A s'appartient.

Cette situation mène donc à un paradoxe, et l'ensemble de tous les ensembles ne peut pas exister.