Logique et Théorie des Ensembles
Série 02-B

Exercice 1. En partant de l'ensemble vide, construire à l'aide des axiomes des ensembles à 10 et 2^{10} éléments. Pensez-vous pouvoir construire des ensembles de taille finie quelconque ?

Partons de $\emptyset$: 0 élément.
Par l'axiome de puissance,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \ \text{ : 1 élément} \\
&A = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ \text{ : 2 éléments} \\
&B = \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ \text{ : 4 éléments}
\end{aligned}$$

Par l'axiome de compréhension,

$$C = \left\{ x \in \mathcal{P}(B) \text{ tel que } x \notin B \text{ et } x \notin \left\{ \left\{ \emptyset, \{\{\emptyset\}\} \right\}, \left\{ \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\} \right\} \right\} \right\}$$

C possède alors $2^4 - 4 - 2 = 10$ éléments, et donc $\mathcal{P}(C)$ possède 2^{10} éléments.

On peut remarquer que l'axiome de puissance permet de construire des ensembles de grande taille, et l'axiome de compréhension permet de restreindre librement le nombre d'éléments d'un ensemble. On en déduit donc qu'il est possible de construire des ensembles de taille finie quelconque.

Exercice 2. (Différence symétrique). L'opération $\triangle$ est définie sur les ensembles $A, B \subset E$ par $A \triangle B = (A \cap (E \setminus B)) \cup (B \cap (E \setminus A))$.

1. Montrer que : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Vérifier que : $A \triangle B = \emptyset \iff (A = B)$.

Exercice 2

1. $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $A\Delta B \subset (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

Soit $x \in A\Delta B$, i.e. $x \in (A\cap(E\setminus B))\cup(B\cap(E\setminus A))$

- Si $x \in (A\cap(E\setminus B))$, alors $x\in A$ et $x \in E\setminus B$, donc $x \notin B$.
  Par conséquent, $x \in (A\cup B)$ mais $x \notin (A\cap B)$. Donc, $x \in (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
- Si $x \in (B\cap(E\setminus A))$, alors $x\in B$ et $x \in E\setminus A$, donc $x\notin A$.
  Par conséquent, $x \in (A\cup B)$ mais $x \notin (A\cap B)$. Donc, $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $A\Delta B \supset (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

Soit $x \in (A\cup B)\setminus(A\cap B)$, i.e. $x\in A$ ou $x\in B$, mais $x\notin A\cap B$.

- Si $x\in A$, alors $x\notin B$, donc $x\in E\setminus B$ (car $x\in E$, puisque $A\subset E$)
  Par conséquent, $x\in(A\cap(E\setminus B))$
- Si $x\in B$, alors $x\notin A$, donc $x\in E\setminus A$ (car $x\in E$, puisque $B\subset E$)
  Par conséquent, $x\in(B\cap(E\setminus A))$

Il est donc montré que pour tout $x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, $x\in(A\cap(E\setminus B))$ ou $x\in(B\cap(E\setminus A))$, i.e. $x\in A\Delta B$.

Ayant montré $\boxed{\subset}$ et $\boxed{\supset}$, il est montré que $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

Exercice 2 (cont.)

2. $(A\Delta B) = \emptyset \iff (A=B)$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $A\Delta B = \emptyset$

Par le point 1. de cet exercice, $(A\cup B)\setminus(A\cap B) = \emptyset$.

Donc, tous les éléments de $A\cup B$ ~~est conten~~ appartiennent à $A\cap B$.

i.e., $(A\cup B)\subset(A\cap B)$.

Comme $A\subset A\cup B\subset A\cap B\subset B$, $A\subset B$. De la même manière, $B\subset A$.

Alors, $A=B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $A=B$

Par le point 1. de cet exercice, $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$
$= (A\cup A)\setminus(A\cap A)$
$= A\setminus A$
$= \emptyset$

Ayant montré $\boxed{\Longrightarrow}$ et $\boxed{\Longleftarrow}$, il est montré que $(A\Delta B \cancel{\neq\emptyset} = \emptyset) \iff (A=B)$.

Exercice 3. Soient E, F, et G trois ensembles.

1. Montrer que $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.
2. Montrer que $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$.
3. Montrer que $E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

Exercice 3

1. $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $E \cup (F \cap G) \subset (E \cup F) \cap (E \cup G)$

Soit $x \in E \cup (F \cap G)$. Alors :

- Si $x \in E$, alors $x \in (E \cup F)$ et $x \in (E \cup G)$, donc $x \in ((E \cup F) \cap (E \cup G))$
- Si $x \in F \cap G$, alors $x \in F$ donc $x \in (E \cup F)$, et $x \in G$ donc $x \in (E \cup G)$

Par conséquent $x \in ((E \cup F) \cap (E \cup G))$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $E \cup (F \cap G) \supset (E \cup F) \cap (E \cup G)$

Soit $x \in ((E \cup F) \cap (E \cup G))$. Donc, $x \in (E \cup F)$ et $x \in (E \cup G)$.

- Si $x \in E$, alors $x \in (E \cup (F \cap G))$.
- Si $x \notin E$, alors $x \in F$ car $x \in (E \cup F)$, et $x \in G$ car $x \in (E \cup G)$.

Donc, $x \in (F \cap G)$, et $x \in E \cup (F \cap G)$.

2. $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $E \setminus (F \cup G) \subset (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$. Soit $x \in E \setminus (F \cup G)$

Alors $x \in E$, mais $x \notin F \cup G$ donc $x \notin F$ et $x \notin G$. Autrement dit, $x \in E$ et $x \notin F$, donc $x \in (E \setminus F)$, et $x \in E$ et $x \notin G$, donc $x \in (E \setminus G)$. Par conséquent, $x \in (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $E \setminus (F \cup G) \supset (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$. Soit $x \in (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$

Alors $x \in E$ mais $x \notin F$ et $x \in E$ mais $x \notin G$. Donc, $x \in E$ et $x \notin F \cup G$. Par conséquent, $x \in E \setminus (F \cup G)$.

Exercice 3 (cont.)

3. $E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$

$\boxed{\subset}$ Montrons que $E \setminus (F \cap G) \subset (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$. Soit $x \in E \setminus (F \cap G)$.

Alors $x \in E$, mais $x \notin (F \cap G)$.

- Si $x \in F$, alors $x \notin G$, et comme $x \in E$, $x \in (E \setminus G)$
- Si $x \in G$, alors $x \notin F$, et comme $x \in E$, $x \in (E \setminus F)$

Donc, $x \in (E \setminus F)$ ou $x \in (E \setminus G)$, i.e. $x \in (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$.

$\boxed{\supset}$. Montrons que $E \setminus (F \cap G) \supset (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$. Soit $x \in ((E \setminus F) \cup (E \setminus G))$.

- Si $x \in (E \setminus F)$, alors $x \in E$ et $x \notin F$
- Si $x \in (E \setminus G)$, alors $x \in E$ et $x \notin G$

Donc, $x \in E$ mais $x \notin (F \cap G)$, par conséquent $x \in E \setminus (F \cap G)$.

Exercice 4. Montrer que $E = F$ si et seulement si $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.

Montrons $E = F \iff \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$. Raisonnement par double implication :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $E = F$.
En particulier, $E \subset F$ donc toute partie de E est également partie de F.
Donc, $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
Par le même raisonnement, puisque $F \subset E$ alors $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E)$.
Comme $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ et $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E)$, alors $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.
Soit A une partie de E. Comme $A \subset E$, alors $A \in \mathcal{P}(E)$ et puisque $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$, alors $A \in \mathcal{P}(E)$ et donc $A \subset F$. Puisque A est générale, $E \subset F$.
De la même manière, il peut être montré que $F \subset E$.
Comme $E \subset F$ et $F \subset E$, $E = F$.

Exercice 5. Expliciter les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\}))$.

Les éléments de $\{0\}$ sont : 0
Les éléments de $\mathcal{P}(\{0\})$ sont : $\emptyset, \{0\}$
Les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\})) = (\mathcal{P}(\{\emptyset, \{0\}\})$ sont : $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}$

Donc, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}\}$

Exercice 6. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble F de tous les ensembles (on pourra raisonner par l'absurde et considérer la partie de F composée des ensembles ne s'appartenant pas).

Preuve par l'absurde :
Supposons F l'ensemble de tous les ensembles, et A la partie de F composée des ensembles ne s'appartenant pas.
Si A s'appartient, alors A n'est pas un élément de A, donc A ne s'appartient pas, et par conséquent A est un élément de A, donc A s'appartient.
Cette situation mène donc à un paradoxe, et on peut en déduire que l'ensemble de tous les ensembles ne peut pas exister.