Exercice 1. Soient $a < b$ deux réels positifs. Définissons les deux suites (x_n) et (y_n) par récurrence par $x_0 = a, y_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ et $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$.

(i) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 2xy$. En déduire que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que (x_n) croît et que (y_n) décroît.

(iii) Montrer que (x_n) et (y_n) convergent (on notera leurs limites ℓ et ℓ'). Utiliser le fait que $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ afin de montrer que $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$. En déduire que $\ell = \ell'$.

La limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b..

Exercice 1

(i) $(x-y)^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2+y^2-2xy \geqslant 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geqslant 2xy$

Donc, si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{2} \geqslant \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} = xy \Longrightarrow \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leqslant y_{n+1}$, i.e. $x_n \leqslant y_n$.

(ii) Comme $y_n \geqslant x_n$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{x_n x_n} = x_n$, donc $x_{n+1} \geqslant x_n$, i.e. (x_n) est croissante.

Comme $x_n \leqslant y_n$, $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \leqslant \frac{y_n+y_n}{2} = y_n$, donc $y_{n+1} \leqslant y_n$, i.e. (y_n) est décroissante.

(iii) Puisque (x_n) est croissante, (y_n) est décroissante, et $x_n \leqslant y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_0$.

Donc (x_n) et (y_n) sont bornées, et comme elles sont monotones, elles convergent.

Notons $\ell = \lim_n (x_n)$ et $\ell' = \lim_n (y_n)$. Comme $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$,

$\lim_n (y_n) = \frac{\lim_n (x_n) + \lim_n (y_n)}{2}$ donc $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$. Donc, $\frac{\ell+\ell'-2\ell'}{2} = 0 \Rightarrow \ell - \ell' = 0 \Rightarrow \ell = \ell'$.

Exercice 2. Soit $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que $\Phi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Preuve par récurrence : Comme $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant 0$ et en particulier $\varphi(0) \geqslant 0$.

Supposons que $\varphi(n) \geqslant n$. Alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$, et comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$,

$\varphi(n+1) > n \Longleftrightarrow \varphi(n+1) \geqslant n+1$.

Par récurrence, $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Montrer que toute sous-suite extraite d'une suite convergente a la même limite.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon$

Soit $(u_{\varphi(n)})$ une sous-suite extraite de (u_n), avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Comme φ est strictement croissante, $\varphi(n) \geqslant n$ et donc $\forall n \geqslant N$, $\varphi(n) \geqslant N$, ainsi $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$, donc $\lim_n u_{\varphi(n)} = \ell$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite et définissons $v_n := \sup_{k \geq n} u_k$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 4

Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \leq j$. Alors, $V_i = \sup_{k \geq i} U_k$ et $V_j = \sup_{k \geq j} U_k$

Si $V_i = \sup_{k \in [i;j)} U_k$, alors $V_i \geq V_j$, et si $V_i = \sup_{k \geq j} U_k$, alors $V_i = V_j$.

Donc, $i \leq j \Rightarrow V_i \geq V_j$, donc (V_n) est décroissante.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite bornée. Montrer que (u_n) converge si et seulement si

$$\limsup_n u_n = \liminf_n u_n$$

et que dans ce cas ce nombre est égal à $\lim_n u_n$.

Exercice 5

Montrons que "(U_n) converge" $\Longleftrightarrow \limsup_n U_n = \liminf_n U_n = \lim_n U_n$

$\boxed{\Rightarrow}$ Par la Proposition 3.22, $\limsup_n U_n$ et $\liminf_n U_n$ sont des valeurs d'adhérence de U_n. Comme (U_n) converge, par la Proposition 3.17 elle possède une unique valeur d'adhérence, sa limite. Donc $\limsup_n U_n = \liminf_n U_n = \lim_n U_n$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par la Proposition 3.22, $\limsup_n U_n$ est le maximum des valeurs d'adhérence de U_n, et $\liminf_n U_n$ est le minimum des valeurs d'adhérence, donc pour toute valeur d'adhérence a, $\liminf_n U_n \leq a \leq \limsup_n U_n$, donc $a = \limsup_n U_n = \liminf_n U_n$.

U_n possède donc une unique valeur d'adhérence, et par la Proposition 3.17 elle est convergente vers a.

$1/2$

Exercice 6.

(i) Donner un exemple de suites possédant respectivement une, deux, et trois valeurs d'adhérence.

(ii) Même question avec m valeurs d'adhérence.

(iii) Même question avec $\mathbb{N}$ comme ensemble des valeurs d'adhérence.

Déterminer, lorsqu'elles existent, les $\liminf$ et $\limsup$ de ces suites.

Exercice 6

(i) $U_n = \frac{1}{n}$, $\limsup_n U_n = \liminf_n U_n = \lim_n U_n = 0$

$V_n = (-1)^n$, $\limsup_n V_n = 1$, $\liminf_n V_n = -1$

$W_n = n \bmod (3)$, $\limsup_n W_n = 2$, $\liminf_n W_n = 0$

(ii) $U_n = n \bmod (m)$, $\limsup_n U_n = m-1$, $\liminf_n W_n = 0$

(iii) $U_0 = 0$, $U_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } U_n = \sup_{k \leq n} U_k \\ U_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$, $\liminf_n U_n = 0$, $(\limsup_n U_n = \infty)$

Est-ce qu'il serait plus correct de dire que $\limsup$ *n'existe pas pour la suite du point (iii) ?*

Exercice 7. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geq K, u_n = v_n$.

(i) Soit (u_n) convergente. Montrer que $\lim_n u_n = \lim_n v_n$.

(ii) Soit (u_n) bornée. Montrer que

$$\limsup_n u_n = \limsup_n v_n, \qquad \liminf_n u_n = \liminf_n v_n.$$

Cet exercice montre que les notions de $\lim, \limsup$ et $\liminf$ ne dépendent que du comportement asymptotique de la suite.

Exercice 7

(i) Soit $\ell = \lim_n u_n$. Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Par définition, $\exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geq K, u_n = v_n$.
Alors, prenons $M = \max\{K, N\}$ et on obtient que $\forall n \geq M, |v_n - \ell| < \varepsilon$.
Donc $\lim_n v_n = \ell = \lim_n u_n$.

(ii) $\limsup_n u_n = \lim_n (\sup_{k \geq n} u_k)$. En particulier, $\limsup_n u_n = \lim_n (\sup_{k \geq n \geq K} u_k)$
$= \lim_n (\sup_{k \geq n \geq K} v_k)$
$= \limsup_n v_n$

Le même raisonnement peut être appliqué pour montrer que $\liminf_n u_n = \liminf_n v_n$.

Exercice 8. (Théorème de Cesàro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite convergeant vers ℓ. Posons $S_n = u_1 + \ldots + u_n$. Nous désirons montrer le théorème de Cesàro, c'est-à-dire que $\frac{1}{n}S_n$ converge vers ℓ.

(i) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \sum_{k=N}^{n} u_k - (n - N + 1)\ell \right| < (n - N + 1)\varepsilon$$

(ii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| < \varepsilon$$

(iii) Montrer, en découpant la somme S_n astucieusement, que $\frac{1}{n}S_n$ converge vers ℓ.

Exercice 8

(i) Comme u_n converge vers ℓ, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Alors,
$\sum_{k=N}^{n} |u_k - \ell| < \sum_{k=N}^{n} \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, $\left|\sum_{k=N}^{n} u_k - \sum_{k=N}^{n} \ell\right| \leqslant \sum_{k=N}^{n} |u_k - \ell| < \sum_{k=N}^{n} \varepsilon$.
Donc, $\left|\sum_{k=N}^{n} u_k - (n-N+1)\ell\right| < (n-N+1)\varepsilon$

(ii) $\left|\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right| \leqslant N \cdot |\max\{u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}\}|$. Alors, avec $N' = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \cdot (N \cdot |\max\{u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}\}|) \right\rfloor + 1$
nous avons $\frac{1}{N'} \cdot \left|\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right| < \varepsilon$ et pour tout $n \geq N'$, $\frac{1}{n} \cdot \left|\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right| \leqslant \frac{1}{N'} \cdot \left|\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right| < \varepsilon$

(iii) Soit $n \geq N'$. Prenons $\varepsilon = \frac{(1+N)}{n} \cdot \ell$. Alors,
$\left|\frac{1}{n} S_n - \ell\right| = \frac{1}{n}|S_n - n\ell| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k - n\ell\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k - n\ell\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{N-1} u_k\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N}^{n} u_k - n\ell\right|$
$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N}^{n} u_k - (n-N+1)\ell\right| + \frac{1}{n}\left|(n-N+1)\ell - n\ell\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \frac{|(-N+1)|}{n} \cdot \ell \leqslant 2\varepsilon + \frac{(1+N)}{n} \cdot \ell \leqslant 3\varepsilon$.
Donc, $\frac{1}{n} S_n$ converge vers ℓ.