Exercice 1. (Nombres complexes)

1. Écrire en forme algébrique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{i(3+2i)^2}, \quad \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}-i}.$$

2. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$-3i, \quad \sqrt{3}+i, \quad 3i(2+i).$$

3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec la formule habituelle pour résoudre les équations générales du second degré. Vérifier les solutions trouvées.
   — $z^2 + 2z + 3 = 0$,
   — $z^2 + 2iz - 3 = 0$.
4. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en remplaçant $z = a + ib$

$$z + 3i + Re(z)(i + (Im(z))^2) = 0$$

5. Calculer le conjugué en forme algébrique $z = a + ib$ des nombres complexes suivants :

$$\frac{5+2i}{1-i}, \quad \frac{\sqrt{2}-i}{2+i}, \quad \frac{2-i}{i}.$$

6. Montrer la proposition suivante : $\forall z \in \mathbb{C}$:
   — si $z \neq 0$: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$;
   — $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$;
   — $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

Exercice 2. (Coordonnées polaires)

(a) Montrer que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\big)$$

où $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ est l'écriture du nombre complexe z en coordonnées polaires.

(b) Déduire une formule analogue pour $\frac{z_1}{z_2}$ lorsque $z_2 \neq 0$.

(c) Représenter grphiquement les solutions d'équation $z^3 = 1$ (racines cubiques de l'unité).

Exercice 3. (Propriétés d'espace vectoriel)
Soit V un espace vectoriel sur un corps K. Démontrer que les propriétés suivantes sont satisfaites

1. (a) L'élément neutre pour l'addition est unique ;
   (b) $\forall v \in V$, l'opposé $(-v)$ de v est unique ;
2. (a) $0_K \cdot v = 0_V \quad \forall v \in V$;
   (b) $\lambda \cdot 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in K$;
3. L'opposé de v, noté $-v$, satisfait $-v = (-1) \cdot v$ avec $v \in V$ et $-1 \in K$;
4. $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K$ ou $v = 0_V$.

NB : Cet exercice figure en tant que Proposition 1.1.1 du polycopié, mais vous pouvez essayer de trouver vous-mêmes les preuves avant de regarder le polycopié.

Exercice 4. (Un exemple d'espace vectoriel)
Définir les opérations $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{C}^n$ et vérifier que cela munit $\mathbb{C}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Détailler l'associativité de la multiplication par les scalaires.

Exercice 5. (Est ce un sous-espace vectoriel ? Trouver une famille génératrice.)

1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$? Si oui, trouver une famille génératrice.
   (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$
   (b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - y = 0\}$
2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$? Si oui, trouver une famille génératrice.
   (a) $E = \{(x, y, z) \in {}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}$
   (b) $E = \{(x, y, z) \in {}^3 \mid y = 0\}$
   (c) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
   (d) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{C}\}$
   (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y^2 - x^3 = 0\}$

Exercice 6. L'objectif de cet exercice est de vérifier que toutes les propriétés demandées dans la définition de sous-espace vectoriel sont nécessaires.

1. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie
$$\begin{aligned} &\forall u \in U, \forall v \in U, \quad u + v \in U, \\ &\forall u \in U, \quad -u \in U \end{aligned}$$
mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie
$$\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U$$
mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie
$$\begin{aligned} &\forall u \in U, \forall v \in U, \quad u + v \in U, \\ &\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U, \end{aligned}$$
mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

L'exercice suivant est **facultatif**. Il ne sera pas corrigé lors de la séance d'exercices, mais sa solution sera postée sur Moodle.

Exercice 7. (Un corps à 3 éléments)
L'objectif de cet exercice est de construire un corps fini.
Rappelons que le reste de la division d'un entier n par 3 est l'unique entier r entre 0 et $3-1$ (compris) tel que $n-r$ soit divisible par 3. Par exemple, le reste de 5 est 2, le reste de 39 est 0, le reste de -2 est 1, et le reste de votre numéro d'étudiant est votre groupe pour les séances d'exercices.

Considérons $K = \{0, 1, 2\}$ et définissons les opérations

$$a \oplus b = \text{le reste de la division de } a+b \text{ par } 3$$
$$a \otimes b = \text{le reste de la division de } a \cdot b \text{ par } 3$$

Remplir les tables d'addition et de multiplication suivantes.

$\oplus$	0	1	2
0			
1			
2			

$\otimes$	0	1	2
0			
1			
2			

Montrer l'existence des neutres additif et multiplicatif. Montrer que tout élément admet un inverse pour $\oplus$, et tout élément non-nul admet un inverse pour $\otimes$.
Vérifier que l'addition est commutative.