Exercice 1. (Résolution graphique de systèmes)

(a) Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y), dessiner les droites d'équations

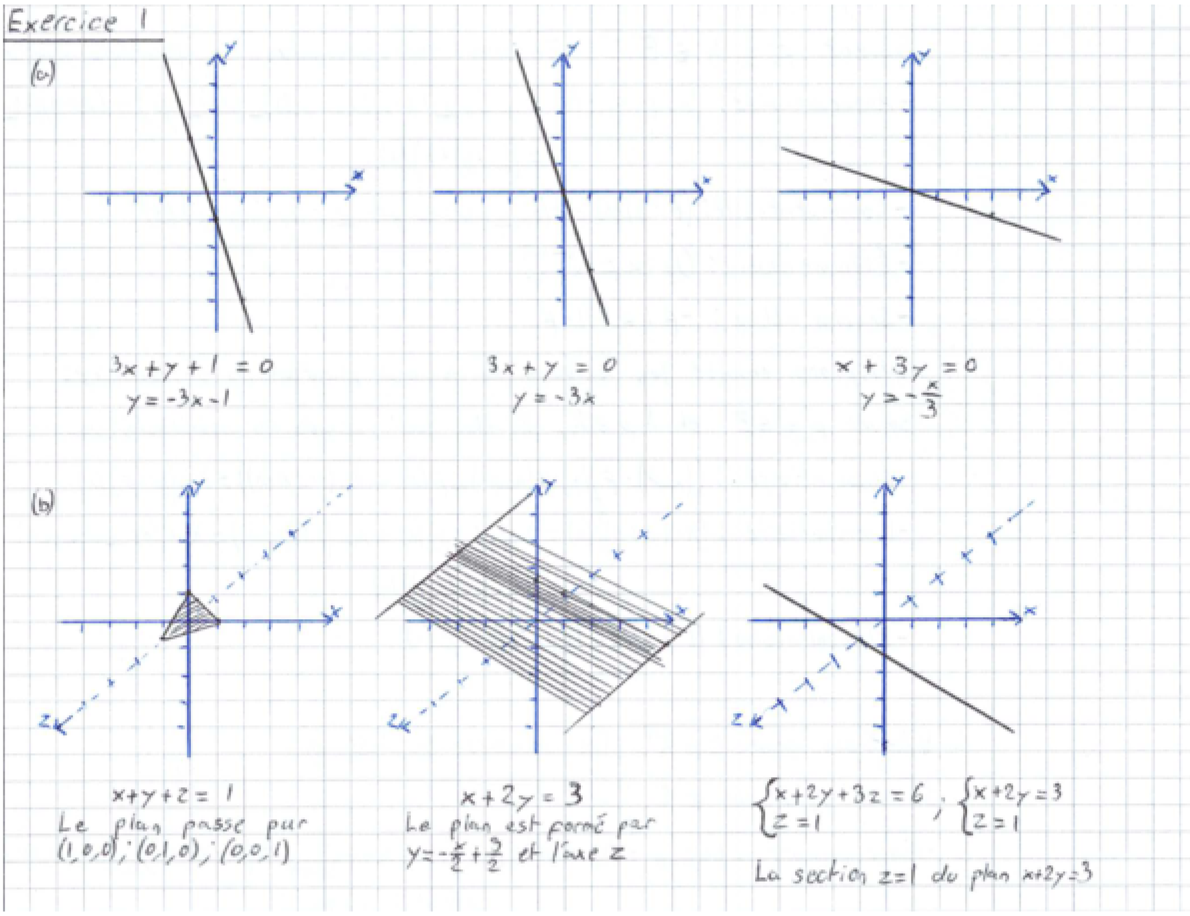
$$3x + y + 1 = 0, \quad 3x + y = 0, \quad \text{et} \quad x + 3y = 0$$

(b) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y, z), dessiner les plans d'équations

$$x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad x + 2y = 3$$

ainsi que l'intersection des deux plans d'équations

$$x + 2y + 3z = 6 \quad \text{et} \quad z = 1$$



Exercice 2. (Résolution algébrique de systèmes)

Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y &= 0 \\ x-2y &= 6 \\ 2x+3y &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2

$$\begin{cases} x+y+z = 1 & (-L_2) \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y+z = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - z \\ z = z \end{array} \quad \underline{Sol = \{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - z, z), z \in \mathbb{R}\}}$$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x-2y = 6 & (-1L_1) \\ 2x+3y = 0 & (-2 \cdot L_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 0 \\ -3y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 0 \\ y = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

L_2 et L_3 présentent une contradiction.

$\underline{Sol = \emptyset}$

Exercice 3. (Espaces vectoriels des fonctions)

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), && \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R} \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x), && \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   où le $+$ et le $\cdot$ du côté droit dénotent l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites de scalaires $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{R}$, qui peut aussi être vu comme l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \alpha \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (\alpha \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Vérifions pour $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ les axiomes de l'addition :

Soient $f, g, h \in E$. En bleu sont soulignées les opérateurs usuels dans $\mathbb{R}$

- Associativité : $(f+(g+h))(x) = f(x)\underline{+}(g+h)(x) = f(x)\underline{+}g(x)\underline{+}h(x) = (f+g)(x)\underline{+}h(x)$
$= ((f+g)+h)(x)$
- Commutativité : $(f+g)(x) = f(x)\underline{+}g(x) = g(x)\underline{+}f(x) = (g+f)(x)$
- Élément neutre : $0_E := f : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 0\end{array}$
- Inverse additif : $-f := (-1)\cdot f$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En bleu sont soulignés les opérateurs usuels dans $\mathbb{R}$

- Associativité : $((\lambda\underline{\cdot}\mu)\cdot f)(x) = (\lambda\underline{\cdot}\mu)\underline{\cdot}f(x) = \lambda\underline{\cdot}(\mu\underline{\cdot}f(x)) = \lambda\underline{\cdot}(\mu\cdot f)(x)$
- Distributivité : $(\lambda\cdot(f+g))(x) = \lambda\underline{\cdot}(f+g)(x) = \lambda\underline{\cdot}(f(x)\underline{+}g(x)) = \lambda\underline{\cdot}f(x)\underline{+}\lambda\underline{\cdot}g(x)$
$= ((\lambda\cdot f)+(\lambda\cdot g))(x)$
- Élément neutre : $(1\cdot f)(x) = 1\underline{\cdot}(f(x)) = f(x)$

2. Vérifions pour $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les axiomes de l'addition :

Soient $u, v, w \in E$.

- Associativité : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n+w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+(v_n+w_n))_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n+w_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((u_n+v_n)+w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$= (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Commutativité : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n+u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- ~~$0_E = u$~~ L'élément neutre est la suite u où, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 0$
- L'inverse additif est $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Vérifions ensuite les axiomes de la multiplication par un scalaire :

Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Associativité : $(\lambda\cdot\mu)\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\lambda\cdot\mu)\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot\mu\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot(\mu\cdot u_n))_{n\in\mathbb{N}}$
$= \lambda\cdot(\mu\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Distributivité : $\lambda\cdot(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot(u_n+v_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot u_n + \lambda\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\lambda\cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Élément neutre : $1\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4. (Notion d'espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si c'est un espace vectoriel ou non sur $\mathbb{R}$. Si oui, prouver la (les) propriété(s) entre parenthèse demandée(s). Si non, expliquer quel axiome est mis en défaut. Attention, certaines questions n'admettent pas pour réponse juste oui ou non.

1. L'espace $E = \{0\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Neutre de l'addition)
2. L'espace $E = [0, 1]$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Neutre de la multiplication)
3. L'espace $E = \mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, 2, ...\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Commutativité de l'addition)

4. L'espace $E = \mathbb{R}^2$ avec l'addition $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ et la multiplication $\lambda\cdot(x, y) = (\lambda x, 0)$. $\rightsquigarrow$ (Associativité de l'addition)
5. L'espace $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(a) = b\}$ avec les lois usuelles (définies pour l'exercice 3.1), où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont fixés. $\rightsquigarrow$ (toutes les propriétés)
6. L'espace $E = \mathbb{R}[x]$ des polynômes $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans borne sur leur degré, avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Distributivité à droite)

Exercice 4

1. Oui : L'élément neutre additif 0_E est 0, car pour tout élément x de E (Comme $E=\{0\}$, $x=0$) $0+x=x$, et $0 \in E$.

2. Non : E n'admet pas d'inverse additif : $\forall x\ \exists x \in E, [x+(-x)=0_E]$ ~~n'admet~~ n'a pas de solution

3. Non : L'opération de multiplication par un scalaire n'est pas bien définie dans $\mathbb{R}$: par exemple, $\underbrace{0{,}3}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{2}_{\in E} \notin E$

4. Non : Aucun axiome n'est vérifié. Ex : Élément neutre de la multiplication par un scalaire :
$$1\cdot(x,y) = (x,0) \neq (x,y)$$

5. Si $b \neq 0$, l'élément neutre défini pour l'exercice 3.1 n'appartient pas à E, et par conséquent E n'est pas un espace vectoriel. $\Longrightarrow$ Non

Si $b=0$: Soient $f, g, h \in E$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $f(a)+(g+h)(a) = 0+g(a)+h(a) = 0+0+0 = (f(a)+g(a))+h(a) = (f+g)(a)+h(a)$
- $f(a)+g(a) = 0+0 = g(a)+f(a)$
- $f : \begin{smallmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto 0\end{smallmatrix}$ appartient à E
- $f(a)+(-f(a)) = 0+(-0) = 0 = \cancel{0_E}$
- $(\lambda\cdot\mu)\cdot f(a) = (\lambda\cdot\mu)\cdot 0 = \lambda\cdot(\mu\cdot 0) = \lambda\cdot(\mu\cdot f(a))$
- $\lambda\cdot(f+g)(a) = \lambda\cdot(f(a)+g(a)) = \lambda\cdot(0+0) = \lambda\cdot 0+\lambda\cdot 0 = \lambda\cdot f(a)+\lambda\cdot g(a)$
- $1\cdot f(a) = 1\cdot 0 = 0 = f(a)$

$\Longrightarrow$ Oui

6. Oui : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soient $p = \alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots+\alpha_nx^n$ et $p' = \alpha_0'+\alpha_1'x+\alpha_2'x^2+\dots+\alpha_n'x^n$

Alors : $\lambda\cdot(p+p') = \lambda\cdot(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots+\alpha_nx^n+\alpha_0'+\alpha_1'x+\alpha_2'x^2+\dots+\alpha_n'x^n)$
$= \lambda\cdot(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots+\alpha_nx^n)+\lambda\cdot(\alpha_0'+\alpha_1'x+\alpha_2'x^2+\dots+\alpha_n'x^n)$
$= \lambda\cdot p+\lambda\cdot p'$

Exercice 5. (Notion de sous-espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si F est un espace vectoriel de E ou non, et le prouver. Tous les espaces vectoriels E sont sur $\mathbb{R}$.

1. $E = M_{2,2}(\mathbb{R}), F = \left\{ A \in E \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2. $E = \mathbb{R}^3, F = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$, où $u, v \in \mathbb{R}^3$ sont fixés.
3. $E = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi)\}, F = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) = a\}$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.
4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et
   (a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M\}$, où $M \in \mathbb{R}$ est fixé,
   (b) F_2 l'ensemble des fonctions bornées de E.
5. $E = \mathbb{R}_4[x], F$ l'ensemble des fonctions impaires de E.
6. E un espace vectoriel (quelconque), $F = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$, où U, V sont deux sous-espaces vectoriels (quelconques) de E fixés.

Exercice 5

1. Non : L'élément neutre $0_E = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ n'appartient pas à F.

2. Oui :

- Pour $\lambda=\mu=0$, $0_E=(0,0,0)=(\lambda u+\mu v)\in F$
- $(\lambda u+\lambda v)+(\lambda' u+\mu' v) = \lambda u+\mu v+\lambda' u+\mu' v = \Big[\underbrace{(\lambda+\lambda')}_{\in\mathbb{R}}u + \overbrace{(\mu+\mu')}^{\in\mathbb{R}}v\Big]\in F$
- $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\cdot(\lambda u+\mu v)=\alpha\cdot\lambda u+\alpha\cdot\mu v=\Big[\underbrace{(\alpha\cdot\lambda)}_{\in\mathbb{R}}u+\underbrace{(\alpha\cdot\mu)}_{\in\mathbb{R}}v\Big]\in F$

F est donc non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

3. Si $a\neq 0$, $0_E\in F$, donc F n'est sous-espace vectoriel de E. $\Longrightarrow$ Non

Si $a=0$, Oui :

- $0_E = f: \begin{array}{l}[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto 0\end{array} \in F$
- $f(0)+g(0)=0+0=0$, donc $\big(f(0)+g(0)\big)\in F$
- $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\cdot f(0)=\lambda\cdot 0=0$, donc $\big(\lambda\cdot f(0)\big)\in F$

F est alors non-vide, clos pour l'addition, et clos pour la multiplication par un scalaire.

4. (a) Non : Soit f, $|f(x)|=M$, et g, $|g(x)|>0$, alors $f,g\in F$ mais $f+g\notin F$

(b) Oui :

- $0_E=f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto 0\end{array} \in F$
- Si f et g sont bornées, alors $\min(f)$, $\max(f)$, $\min(g)$, $\max(g)$ existent.
  Par conséquent, $\min(f+g)=\min(f)+\min(g)$ et $\max(f+g)=\max(f)+\max(g)$ existent.
  Ainsi, $(f+g)$ est bornée, et appartient donc à F.
- Si f est bornée, alors $\min(f)$ et $\max(f)$ existent.
  Par conséquent, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $\min(\lambda\cdot f)=\lambda\cdot\min(f)$ et $\max(\lambda\cdot f)=\lambda\cdot\max(f)$ existent.
  Ainsi, $(\lambda\cdot f)$ est bornée, et appartient donc à F.

5. Oui : Fonction impaire : $f(-x)=-f(x)$ (Dans E : ~~polynômes de degré~~ $\alpha\cdot x^3+\beta\cdot x$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$)

- $0_E=f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto 0\end{array} \in F$, car $f(-0)=0=-0=-f(0)$
- $f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-\big(f(x)+g(x)\big)$, Donc $(f+g)\in F$
- $\lambda\cdot f(-x)=\lambda\cdot(-f(x))=-(\lambda\cdot f(x))$, Donc $(\lambda\cdot f)\in F$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$

6. Oui : $F=U+V$: Somme de sous-espaces vectoriels

- Puisque U et V sont sous-espaces vectoriels de E, $0_E\in U$ et $0_E\in V$.
  Donc, $0_E=\big(\overset{\in U}{0_E}+\overset{\in V}{0_E}\big)\in F$.
- $(u+v)+(u'+v')=\Big[\underbrace{(u+u')}_{\in U}+\underbrace{(v+v')}_{\in V}\Big]\in F$, car U et V sont s.e.v. de E.
- $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\cdot(u+v)=\Big[\underbrace{(\lambda u)}_{\in U}+\underbrace{(\lambda v)}_{\in V}\Big]\in F$, car U et V sont s.e.v. de E.