Exercice 1. (Familles libres et génératrices de vecteurs)
Les familles suivantes sont-elles libres ou génératrices ? Si oui le prouver, sinon donner un contre-exemple.

1. $\{(1,1),(1,-i)\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$

1. Soit un vecteur de $\mathbb{C}^2$, $v = (z_1, z_2) = ((a_1+ib_1),(a_2+ib_2))$

Alors il peut être représenté comme combinaison linéaire de $(1,1)$ et $(1,-i)$:

$\alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (1,-i) = (z_1, z_2)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = z_1 \\ \alpha - i\beta = z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = z_1 - \beta \\ z_1 - \beta - i\beta = z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = z_1 - \frac{z_1 - z_2}{1+i} \\ \beta = \frac{z_1 - z_2}{1+i} \end{cases}$$

* pour chaque (z_1, z_2)

α et β étant uniques*, tout vecteur v de $\mathbb{C}^2$ peut donc être exprimé comme une unique combinaison linéaire des vecteurs de $\{(1,1),(1,-i)\}$ et donc,

$\{(1,1),(1,-i)\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$.

2. $\{(1,2,2),(-2,0,2),(-2,2,-1)\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$

2. Soit un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $v = (x,y,z)$

Alors il peut être représenté comme combinaison linéaire de $(1,2,2)$, $(-2,0,2)$ et $(-2,2,-1)$:

$\lambda_1 \cdot (1,2,2) + \lambda_2 \cdot (-2,0,2) + \lambda_3 \cdot (-2,2,-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = y \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = z \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = y - 2x \\ 6\lambda_2 + 3\lambda_3 = z - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{3}\cdot(z-2x) \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \frac{1}{2}\cdot(y-2x) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{3}\cdot(z-2x) \\ 2\lambda_3 = \frac{1}{2}\cdot(y-2x) - \frac{1}{3}\cdot(z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = x \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{z}{3} - \frac{2x}{3} \\ \lambda_3 = \frac{y}{4} - \frac{x}{2} - \frac{z}{3} + \frac{x}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = x + \frac{y}{2} - \frac{2z}{3} - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{2z}{3} \\ 2\lambda_2 = \frac{z}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} + \frac{x}{6} = \frac{2z}{3} + \frac{5x}{6} - \frac{y}{4} \\ \lambda_3 = \frac{y}{4} - \frac{z}{3} - \frac{x}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{2z}{3} + \frac{2z}{3} + \frac{5x}{6} - \frac{y}{4} = \frac{9x}{6} + \frac{y}{4} \\ \lambda_2 = \frac{5x}{12} - \frac{y}{8} + \frac{2z}{6} \\ \lambda_3 = -\frac{x}{6} + \frac{y}{4} - \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y \\ \lambda_2 = \frac{5}{12}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{3}z \\ \lambda_3 = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}z \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant uniques pour chaque (x,y,z), tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ peut donc être exprimé comme une unique combinaison linéaire des vecteurs de $\{(1,2,2),(-2,0,2),(-2,2,-1)\}$ et donc,

$\{(1,2,2),(-2,0,2),(-2,2,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.

3. $\{(1,2,2),(-2,0,2),(-2,2,-1)\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{R}$

3. Par le même raisonnement que 2., la famille est libre.

En revanche, elle n'est pas génératrice : Il n'existe pas de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$\lambda_1 \cdot (1,2,2) + \lambda_2 \cdot (-2,0,2) + \lambda_3 (-2,2,-1) = (0,0,i)$, par exemple.

4. Donner une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Et sur $\mathbb{C}$?

4. $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: Pour tout $v \in \mathbb{C}^2 = (z_1, z_2)$,

$(z_1, z_2) = a \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+ib\\c+id\end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

qui est une représentation unique pour chaque (z_1, z_2) et donc pour chaque v.

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$: Pour tout $v \in \mathbb{C}^2 = (z_1, z_2)$,

$(z_1, z_2) = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$, (avec $\mu_1 = z_1$ et $\mu_2 = z_2$)

qui est une représentation unique pour chaque (z_1, z_2) et donc pour chaque v.

Exercice 2. (Indépendance linéaire de fonctions)
Dans l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les familles ci-dessous sont-elles libres ?

1. $\{3x^2, 2x^4\}$
2. $\{3^x, 3^{x+3}\}$
3. $\{1, \sin^2(x), \cos^2(x)\}$
4. $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(4x)\}$
5. La famille infinie $\{1, \sin(x), \sin(2x), \sin(4x), \sin(8x), \sin(16x), \dots\}$

Exercice 2

Supposition pour l'exercice : Le corps sur lequel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel est $\mathbb{R}$.

1. Comme $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $0 = \lambda_1 \cdot 3x^2 + \lambda_2 \cdot 2x^4 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Donc, $\{3x^2, 2x^4\}$ est libre. (Alt : $2x^4 = \lambda \cdot 3x^2$ est fausse pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$)

2. $3^{x+3} = 3^3 \cdot 3^x = 9 \cdot 3x$, donc $\{3^x, 3^{x+3}\}$ est liée.

3. $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, donc $\{1, \sin^2(x), \cos^2(x)\}$ est liée.

4. Comme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $0 = \lambda_1 \cdot \cos(x) + \lambda_2 \cdot \cos(2x) + \lambda_3 \cdot \cos(4x) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Donc, $\{\cos(x), \cos(2x), \cos(4x)\}$ est libre.

5. Cette famille peut s'écrire $\{\sin(2^i x)\}_{i \in \mathbb{N}}$.
On observe alors que toute sous-famille finie est libre, car pour tout $i \in \mathbb{N}$,
$\sin(2^i x) = \sum_{k \in K} \lambda_k \cdot \sin(2^k x)$, $K \subset \mathbb{N} \setminus \{i\}$ n'admet aucune solution pour $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Donc, la famille infinie $\{\sin(2^i x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ est libre.

Exercice 3. (Sous-famille libre)
Montrer l'affirmation suivante :

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille libre dans un espace vectoriel V,
Alors toute sous-famille $\{v_i\}_{i \in I}$ indexée par $I \subset \{1, \ldots, n\}$ est aussi libre.

Exercice 3

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre, alors pour tout v_k, $k \in K = \{1, \ldots, n\}$, il est impossible de représenter v_k comme combinaison linéaire des vecteurs de $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_k\}$.

En particulier, il est impossible de représenter v_k comme combinaison linéaire des vecteurs de n'importe quelle sous-famille de $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_k\}$

Ainsi, pour tout v_k, une sous-famille $\{v_i\}_{i \in I}$, $I \subset K$, contenant v_k est libre.
Comme v_k peut être n'importe quel vecteur de $\{v_1, \ldots, v_n\}$, on en conclut que toute sous-famille de $\{v_1, \ldots, v_n\}$: $\{v_i\}_{i \in I}$ avec $I \subset \{1, \ldots, n\}$ est libre.

Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre, alors pour tout $v_k, k \in K = \{1, \ldots, n\}$, il est impossible de représenter v_k comme combinaison linéaire des vecteurs de $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_k\}$.
En particulier,

Exercice 4. (Dimension d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$)
On note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension de l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$.

(a) Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
(b) En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$.
(c) Montrer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. En déduire $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$.

Exercice 4

(a) $\{1\}$ est une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, car $\forall v \in \mathbb{R}, \exists! \lambda \in \mathbb{R}, v = \lambda \cdot 1$

Comme $\{1\}$ possède 1 élément, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \text{card}(\{1\}) = 1$.

$\{1, i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, car $\forall v \in \mathbb{C}, \exists! a \in \mathbb{R}, \exists! b \in \mathbb{R}, v = 1 \cdot a + i \cdot b$

Comme $\{1, i\}$ possède 2 éléments, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \text{card}(\{1, i\}) = 2$.

(b) Puisqu'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}$, il suit qu'il peut être représenté comme n vecteurs de $\mathbb{R}$ indépendants, et donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n \cdot \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

Donc, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n \cdot 1 = n$.

Par le même raisonnement, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = n \cdot \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2n$.

(c) $\{1\}$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, car $\forall v \in \mathbb{C}, \exists! z \in \mathbb{C}, v = z \cdot 1$

Donc, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n \cdot \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = n \cdot 1 = n$.

Exercice 5. (Base, famille libre maximale et famille génératrice minimale)
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$.

(a) En cours, nous avons vu que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{F}$ est une base de V

(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre maximale de V

(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale de V

L'équivalence $(i) \iff (ii)$ a été montrée en cours. Montrer l'équivalence $(i) \iff (iii)$.

Exercice 5

(a) Montrons "$\mathcal{F}$ est une base" $\iff$ "$\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale de V"

$\boxed{\Rightarrow}$ Comme $\mathcal{F}$ est une base, elle est génératrice de V et libre.

Puisqu'elle est libre, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, v_k ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F} \setminus \{v_k\}$.

Comme $v_k \in V$, alors $\mathcal{F} \setminus \{v_k\}$ n'est pas génératrice de V, et donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice minimale de V, alors elle est libre, et c'est donc une base.

Par contraposée : Supposons $\mathcal{F}$ liée, montrons qu'elle n'est pas minimale.

Puisqu'elle est liée, alors il existe au moins un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$v_k = \sum_{i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}} \lambda_i \cdot v_i$. Par conséquent, pour tout vecteur $v \in V$, avec $I = \{1, \ldots, n\}$:

$$v = \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot v_i = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} \alpha_i \cdot v_i + \mu \cdot v_k = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} \alpha_i \cdot v_i + \mu \sum_{i \in I \setminus \{k\}} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i \in I \setminus \{k\}} (\alpha_i + \mu \cdot \lambda_i) \cdot v_i$$

Donc, $\mathcal{F} \setminus \{v_k\}$ est génératrice de V, et par conséquent $\mathcal{F}$ n'est pas minimale

Par $\boxed{\Rightarrow}$ et $\boxed{\Leftarrow}$, l'équivalence $(i) \iff (iii)$ est démontrée.

(b) Montrer que

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } V \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice et } \operatorname{card}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$$

Indication : card$(\mathcal{F})$ est le nombre d'éléments de la famille $\mathcal{F}$.

(b) Montrons que "$\mathcal{F}$ est une base" $\iff$ "$\mathcal{F}$ est génératrice et $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$"

$\boxed{\Rightarrow}$ Suit directement des définitions de base et de dimension.

$\boxed{\Leftarrow}$ Montrons que si $\mathcal{F}$ est génératrice et $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$, alors $\mathcal{F}$ est une base.

Par l'absurde : Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas une base.

Alors $\mathcal{F}$ n'est pas minimale, donc il existe une sous-famille de $\mathcal{F}$ possédant au moins un vecteur en moins qui est une base.

On a donc une base de V dont la cardinalité est inférieure à la dimension de V, ce qui contredit la définition de dimension.

Par $\boxed{\Rightarrow}$ et $\boxed{\Leftarrow}$, l'équivalence est démontrée.