Algèbre I - Série 2

Exercice 1

1. $\dfrac{1}{i(3+2i)^2} = \dfrac{1}{i(9+12i-4)} = \dfrac{1}{5i-12} = \dfrac{5i+12}{(5i)^2-12^2} = \dfrac{5i+12}{-25-144} = \underline{\underline{-\dfrac{12}{169} - \dfrac{5}{169}i}}$

$$\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}{\sqrt{2}^2-(\sqrt{3}i)^2} = \frac{1}{5}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i) = \frac{1}{5}\cdot(3+2\sqrt{6}i-2)\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{6}+2i+3i)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot(\overset{1}{\cancel{6}}+2\sqrt{6}i)\cdot 5i = \cancel{6}i - 2\sqrt{6} = \underline{-2\sqrt{6} + \cancel{6}i}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}^2-i^2} = \frac{\sqrt{3}+i}{3+1} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i}$$

2. $|-3i| = \sqrt{(-3)^2} \underline{\underline{= 3}}$; $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} \underline{\underline{= 2}}$

$|3i(2+i)| = |6i-3| = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} \underline{\underline{= 3\sqrt{5}}}$

3. $-z^2+2z+3=0$ $\qquad b^2-4\cdot a\cdot c = 2^2-4\cdot(-1)\cdot 3 = 4+12 = 16$

$z_1 = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2} = \dfrac{-2-4}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3$; $\qquad z_2 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{-2} = \dfrac{-2+4}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1$

Vérification:

$-3^2+2\cdot 3+3 = -9+6+3 = 0$; $\qquad -(-1)^2+2\cdot(-1)+3 = -1+(-2)+3 = 0$

$\underline{\underline{Sol = \{-1, 3\}}}$

$-z^2+2iz-3=0$ $\qquad b^2-4ac = (2i)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3) = -4-12 = -16$

$z_1 = \dfrac{-2i-\sqrt{-16}}{-2} = \dfrac{-2i-4i}{-2} = \dfrac{-6i}{-2} = 3i$; $\qquad z_2 = \dfrac{-2i+\sqrt{-16}}{-2} = \dfrac{-2i+4i}{-2} = \dfrac{2i}{-2} = -i$

Vérification:

$-(3i)^2+2i(3i)-3 = -(-9)+(-6)-3 = 9-6-3 = 0$; $\qquad -(-i)^2+2i\cdot(-i)-3 = -(-1)+(2)-3 = 1+2-3 = 0$

$\underline{\underline{Sol = \{-i, 3i\}}}$

4. $z = a+ib$

$z+3i+Re(z)(i+(Im(z))^2) = 0$

$a+ib+3i+a\cdot(i+b^2) = 0$

$a+ib+3i+ai+ab^2 = 0$

$(a+ab^2)+(a+b+3) = 0$

$\begin{cases} a+ab^2 = 0 \\ a+b+3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a(1+b^2) = 0 \\ b = -a-3 \end{cases}$ $\qquad a=0$ ou $b^2=-1$

Comme $b \in \mathbb{R}$, $b^2 \neq -1$, et donc $a = 0$.

Donc, $b = -a-3 = 0-3 = -3$

Vérification : $(0-3i)+3i+0\cdot(i+(-3)^2) = -3i+3i+0 = 0$

$\underline{\underline{z = 0-3i}}$

Exercice 1 (cont.)

5. $\overline{\left(\frac{5+2i}{1-i}\right)} = \overline{\frac{1}{2}\cdot(5+2i)\cdot(1+i)} = \overline{\frac{1}{2}\cdot(5+2i+5i-2)} = \overline{\frac{1}{2}\cdot(3+7i)} = \frac{1}{2}\cdot(3-7i) = \frac{3}{2}-\frac{7}{2}i$

$\overline{\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2+i}\right)} = \overline{\frac{1}{5}\cdot(\sqrt{2}-i)(2-i)} = \overline{\frac{1}{5}\cdot\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}i-2i-1\right)} = \overline{\frac{1}{5}\cdot\left((2\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+2)i\right)} = \frac{1}{5}\left((2\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+2)i\right)$

$= \frac{2\sqrt{2}-1}{5}+\frac{\sqrt{2}+2}{5}i$

$\overline{\left(\frac{2-i}{i}\right)} = \overline{(2-i)\cdot(-i)} = \overline{-2i-1} = -1+2i$

6. – Soit $z = a+ib \neq 0$

Alors $|z^{-1}| = \left|\frac{1}{a+ib}\right| = \left|\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|} = |z|^{-1}$

– $z \in \mathbb{R} \iff (a+ib)\in\mathbb{R} \iff b=0 \iff \bar{z} = a-0\cdot i = a = z$

– $z \in i\mathbb{R} \iff (a+ib)\in i\mathbb{R} \iff a=0 \iff \bar{z} = 0-ib = -ib = -z$

Exercice 2

(a) $z_1 z_2 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)\cdot r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2 (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2 (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\cdot(i\sin\alpha_2) + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + i^2\cdot\sin\alpha_1\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2 (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i\cdot(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2))$

$= r_1 r_2 (\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$

(b) Par analogie, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2)+i\sin(\alpha_1-\alpha_2))$

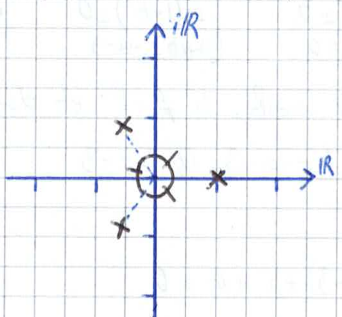
On pourra vérifier que $z\cdot z^{-1} = \frac{z}{z} = \frac{r}{r}\cdot(\cos(\alpha-\alpha)+i\sin(\alpha-\alpha)) = 1\cdot(\cos(0)+i\sin(0))$

$= 1\cdot(1+0) = 1$

(c) $z^3 = 1 \iff r^3(\cos(3\alpha)+i\sin(3\alpha)) = 1$

$\iff r^3 = 1$ et $3\alpha = 0 \pmod{2\pi}$

$\iff r = 1$ et $\alpha \in \{0, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$



$z_1 = 1$

$z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Exercice 3

1. (a) Supposons deux éléments neutres pour l'addition, 0_V et $0_V'$.

$$0_V = 0_V + 0_V' = 0_V' + 0_V = 0_V'$$

(b) Supposons deux inverses additifs de v, $(-v)$ et $(-v)'$.

$$(-v) = (-v) + 0_V = (-v) + (v + (-v)') = ((-v)+v) + (-v)' = 0_V + (-v)' = (-v)'$$

2. (a) Soit $\alpha \in K$, et $w = (\alpha \cdot v) \in V$.

Alors pour tout $v \in V$,

$$0_K \cdot v = (\alpha + (-\alpha)) \cdot v = \alpha \cdot v + (-\alpha) \cdot v = w + (-w) = 0_V$$

(b) Pour tout $\lambda \in K$,

$$\lambda \cdot 0_V = (\lambda - 1) \cdot 0_V + 0_V = (\lambda - 1) \cdot 0_V = (\lambda - 2) \cdot 0_V + 0_V = \cdots = 1 \cdot 0_V = 0_V$$

3. $v + (-v) = 0_V = 0_K \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = v + (-1) \cdot v$

Puisque $v + (-v) = v + (-1) \cdot v$, alors $(-v) = (-1) \cdot v$.

4. $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K$ ou $v = 0_V$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Preuve par contraposée :

Supposons $\lambda \neq 0_K$ et $v \neq 0_V$. Comme $\lambda \neq 0_K$, $\lambda v = 0 \Rightarrow v = 0_V$.

Puisque $v \neq 0_V$, alors $\lambda v \neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La preuve est fournie par le point 2. de cet exercice.

Ayant montré $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$, il est montré que $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K$ ou $v = 0_V$.

Exercice 4

$\mathbb{C}^n$ est l'ensemble constitué par les n-uplets $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ où $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$.

On peut donc représenter un vecteur de $\mathbb{C}^n$ comme une famille $(z_i)_{i \in I}$, où $I = [1, 2, \cdots, n]$.

On peut alors définir les opérations :

$$+ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i \in I} \longmapsto (z_i + w_i)_{i \in I}, \quad I = [1, 2, \cdots, n]$$

et

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$\alpha, (z_i)_{i\in I} \longmapsto (\alpha \cdot z_i)_{i \in I}, \quad I = [1, 2, \cdots, n]$$

où les opérations $+$ et $\cdot$ du côté droit représentent respectivement l'addition et la multiplication complexes.

Exercice 4 (cont.)

L'addition et la multiplication complexes étant définies sur un corps, $\mathbb{C}$, les opérations ~~bénéficient~~ $+$ et $\cdot$ sur $\mathbb{C}^n$ héritent de l'associativité, commutativité, et distributivité. On peut également vérifier que

$(z_i)_{i\in I} : \forall i \in I,\ z_i = 0$ est l'élément neutre additif,

$-(z_i)_{i\in I} = (-z_i)_{i\in I}$ est l'inverse additif de $(z_i)_{i\in I}$, pour tout $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^n$,

$(z_i)_{i\in I} : \forall i \in I,\ z_i = 1$ est l'élément neutre pour la multiplication par un scalaire.

En détail, l'associativité de la multiplication par un scalaire :

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot(z_i)_{i\in I} = \left((\alpha\cdot\beta)\cdot z_i\right)_{i\in I} = \left(\alpha\cdot(\beta\cdot z_i)\right)_{i\in I} \text{ (car la multiplication complexe est associative)}$$
$$= \alpha\cdot(\beta\cdot z_i)_{i\in I}$$

Exercice 5

1. (a) Oui : Il s'agit de la droite d'équation $y = x$.
   $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est génératrice de cette droite.

   (b) Non : $(2,2)\in E$, mais $2\cdot(2,2) = (4,4) \notin E$, donc E n'est pas clos pour la multiplication par un scalaire.

2. (a) Non : $0_{\mathbb{C}^3} = (0,0,0)$ n'est pas inclus dans E.

   (b) Oui : Il s'agit du "plan" formé par les "axes" x et z.
   $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right\}$ est génératrice de ce sous-espace vectoriel.

   (c) Non : Pour $v \in E$, $(i\cdot v) \notin E$, donc E n'est pas clos pour la multiplication par un scalaire dans $\mathbb{C}$.

   (d) Oui : Il s'agit du plan passant par les points $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(i,2i,3i)$.
   Ainsi, $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2i\\3i\end{pmatrix}\right\}$ est génératrice de ce plan.

   (e) Non : $(1,1,1)\in E$, mais $(1,1,1)+(1,1,1) = (2,2,2) \notin E$, donc E n'est pas clos pour l'addition.

Exercice 6

1. $\mathbb{Z}^2$ satisfait les conditions données :

Soit $u=(a,b)$ et $v=(c,d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, alors

$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d) \in \mathbb{Z}^2$

$-u=(-a,-b) \in \mathbb{Z}^2$

en revanche, $(\lambda \cdot u) \notin \mathbb{Z}^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. ~~$U:=\{(x,|x|)\}$, satisfait les condi~~

$U:=\{(x,|x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$ satisfait les conditions données :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot (x,|x|) = (\lambda x, \lambda \cdot |x|) = (\lambda x, |\lambda x|) \in U$.

En revanche, $(2,2) \in U + (-2,2) \in U = (0,4) \notin U$.

3. $U:\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}_+\}$ satisfait les conditions données :

Soient $u=(x_1,y_1)$ et $v=(x_2,y_2)$, $x_1,y_1,x_2,y_2 \in \mathbb{R}_+$, et $\lambda > 0$, alors

$u+v=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(\underbrace{x_1+x_2}_{\in \mathbb{R}_+}, \underbrace{y_1+y_2}_{\in \mathbb{R}_+}) \in U$

$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (x_1,y_1) = (\underbrace{\lambda x_1}_{\in \mathbb{R}_+}, \underbrace{\lambda y_1}_{\in \mathbb{R}_+}) \in U$

En revanche, $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \notin U$.

Exercice 7

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- 0 est le neutre additif car $\forall x \in \{0,1,2\},\ 0 \oplus x = x = x \oplus 0$
- 1 est le neutre multiplicatif car $\forall x \in \{0,1,2\},\ 1 \otimes x = x = x \otimes 1$

On observe que :
- $0 \oplus 0 = 0$ Donc $0 = -0$
- $1 \oplus 2 = 0$ Donc $2 = -1$
- $2 \oplus 1 = 0$ Donc $1 = -2$

On observe que :
- $1 \otimes 1 = 1$ Donc $1 = 1^{-1}$
- $2 \otimes 2 = 1$ Donc $2 = 2^{-1}$

La table de $\oplus$ étant symétrique selon sa diagonale, on peut remarquer que l'addition est commutative.