



**Exercice 1.** Écrire la négation des assertions suivantes.

- (i)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x - y| \leq \delta \implies f(x) \geq f(y)]$   
(où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, [|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon]$   
(où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (iii)  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N, [n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon]$   
(où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ )
- (iv)  $\forall E \subset \mathbb{N}, [E \neq \emptyset \implies (\exists n \in E, \forall m \in E, m \geq n)]$
- (v)  $\forall E \subset \mathbb{R}, [E \neq \emptyset \implies \exists a \in \mathbb{R}, ((\forall b \in E : b \leq a) \text{ et } (\forall \epsilon > 0, \exists b \in E : b \geq a - \epsilon))]$

**Exercice 2.** (Différence symétrique). L'opération  $\triangle$  est définie sur les ensembles  $A, B \subset E$  par  $A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$ .

- (i) Montrer que  $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- (ii) Vérifier que  $A \triangle B = \emptyset \implies (A = B)$

**Exercice 3.** Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

- (i)  $\forall n \geq 0, u_n < u_{n+1}$  (où  $(u_n)$  est une suite réelle)
- (ii) Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction :
  - (a)  $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = C$
  - (b)  $\exists x \in E, [f(x) = 0 \implies x = 0]$
  - (c)  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in E, f(x) = y$
  - (d)  $\forall x \in E, \forall y \in E, [f(x) = f(y) \implies x = y]$
  - (e)  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq A$

**Exercice 4.** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

- (i) La fonction  $f$  s'annule.
- (ii) La fonction  $f$  est la fonction nulle.
- (iii)  $f$  n'est pas une fonction constante.
- (iv)  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur.
- (v) La fonction  $f$  admet un minimum.
- (vi)  $f$  prend des valeurs arbitrairement grandes.
- (vii)  $f$  ne peut s'annuler qu'une seule fois.

**Exercice 5.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $A(x, y)$  des assertions indexées par  $(x, y) \in E \times F$ .

- (i) Montrer que  $\forall x \in E, \forall y \in F, A(x, y) \iff \forall y \in F, \forall x \in E, A(x, y)$ .
- (ii) Montrer que  $\exists x \in E, \exists y \in F, A(x, y) \iff \exists y \in F, \exists x \in E, A(x, y)$ .
- (iii) Montrer en donnant un exemple que  $\exists x \in E, \forall y \in F, A(x, y)$  n'est pas nécessairement équivalent à  $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x, y)$ .

On dira que l'on peut échanger les quantificateurs  $\forall$  adjacents (ou les  $\exists$  adjacents), mais que l'on ne peut pas échanger les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ .

**Exercice 6.** (Fonctions caractéristiques  $\chi_A$ ). Soient  $E$  un ensemble et  $A \subset E$ . La fonction caractéristique de  $A$  est définie par  $\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}$  et

$$\chi_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (i) Montrer que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont la même fonction caractéristique.
- (ii) Que peut-on dire sur  $A$  et  $B$  si  $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$  pour tout  $x \in E$ ?
- (iii) Montrer que  $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ ,  $\chi_{A^C} = 1 - \chi_A$  et  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$ .
- (iv) Montrer que les formules de De Morgan pour  $(A \cup B)^C$  et  $(A \cap B)^C$  en utilisant les fonctions caractéristiques.

**Exercice 7.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction bijective. Démontrer les propriétés suivantes énoncées mais pas démontrées en classe (Proposition 1.23).

- (i)  $(f^{-1})^{-1} = f$ ,  $f^{-1} \circ f = I_E$ ,  $f \circ f^{-1} = I_F$ .
- (ii) (unicité de l'inverse) Si  $g : F \rightarrow E$  tel que  $g \circ f = I_E$  et  $f \circ g = I_F$ , alors  $g = f^{-1}$ .
- (iii) (composition des inverses) Soit  $g : F \rightarrow G$  une autre fonction bijective. Alors  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**Exercice 8.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction.

- (i) Soit  $B \subset F$ . Dans le cas où  $f$  est bijective, montrer que l'image réciproque  $f^{-1}(B)$  de  $B$  est égale à l'image directe de  $B$  par la fonction inverse  $f^{-1}$ . (Notons que l'image réciproque existe pour tout  $f$ , tandis que la fonction inverse uniquement si  $f$  est bijective.)
- (ii) Montrer que pour tout  $A, B \subset F$  on a

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

- (iii) Montrer que pour tout  $A, B \subset F$  on a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

- (iv) Montrer qu'en général  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  est fausse.  
Montrer aussi qu'elle est vraie si  $f$  est injective.

**Exercice 9.**

- (i) Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ . Les éléments de  $E$  sont des familles  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  indexées par  $\mathbb{Z}$ . Définissons la fonction  $f : E \rightarrow E$  par

$$f : (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$$

Montrer que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

- (ii) Soit  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Les éléments de  $E$  sont des familles  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  indexées par  $\mathbb{N}$  (aussi appelées suites). Définissons la fonction  $f : E \rightarrow E$  par

$$f : (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$$

Est-ce que  $f$  est injective? Surjective?

- (iii) Soit  $f$  la fonction de (ii). Définissons les ensembles  $A, B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  par

$$A = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_0 \in [0, 1], x_1 \leq 0\}, \quad B = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \exists i \in \mathbb{N}, x_i \geq 0\}$$

Déterminer les images directes  $f(A)$  et  $f(B)$  ainsi que les images réciproques  $f^{-1}(A)$  et  $f^{-1}(B)$ .