**Exercice 1.** Soient $E, f \subset \mathbb{R}$ et $f : e \to F$ une fonction bijective et monotone. Est-ce que $f^{-1}$ est monotone ?

Comme $f$ est bijective, elle est injective, donc strictement monotone.
Sans perte de généralité, pour tou $x, x' \in E, x < x' \implies f(x) < f(x')$.

Prenons $y, y' \in F$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.
Comme la fonction inverse de $f$, $f^{-1}$ est bijective alors $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$.

Donc, $f^{-1}(y) < f^{-1}(y') \implies y < y'$ et par contraposée, $y \geq y' \implies f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$.
Par conséquent, $f^{-1}$ est (strictement) monotone.

**Exercice 2.** Les fonctions suivantes sont-elles bien définies ? injectives ? surjectives ? bijectives ?

(i) $\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$

(ii) $\begin{aligned} b : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$

(iii) $\begin{aligned} c : [0, \infty) &\to (-\infty, 0] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

(iv) $\begin{aligned} d : \mathbb{N} &\to \{-1, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$

(v) $\begin{aligned} e : \mathbb{N} &\to \{-1, 1\} \\ n &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$

Exercice 2

(i) a est bien définie, injective : $n+1 = n'+1 \implies n+1-1 = n'+1-1 \implies n = n'$
, pas surjective : $a(x) \neq 0$, $0 \in \mathbb{N}$.

(ii) b est bien définie, injective : $2x = 2x' \implies \frac{2x}{2} = \frac{2x'}{2} \implies x = x'$
, surjective : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{1}{2} \cdot y, y = b(x)$

b est donc bijective, avec $b^{-1} : x \longmapsto \frac{1}{2} \cdot x$

(iii) c n'est pas bien définie, car pour $x = 4 \in [0, \infty)$, $c(x) = 4^2 = 16 \notin (-\infty, 0]$

(iv) d est bien définie, pas injective : $d(2) = d(4)$
, surjective : $d(2) = 1$, $d(3) = -1$, donc $\forall y \in \{-1, 1\}, \exists x \in \mathbb{N}, y = d(x)$.

(v) $e = d$.

**Exercice 3.** Soit $E \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\sup E$, s'il existe, est unique.

Soit $E \subset \mathbb{R}$, muni d'un supremum noté $\sup E$.
Supposons un deuxième supremum de $E$, noté $\sup' E$. Alors $\sup' E$ est un majorant de $E$, et comme pour tout majorant $M$ de $E$, $\sup E \leq M$, alors $\sup E \leq \sup' E$.

De la même manière, comme $\sup E$ est un majorant de $E$, $\sup' E \leq \sup E$.
Comme $\sup E \leq \sup' E$ et $\sup' E \leq \sup E$, $\sup E = \sup' E$.

**Exercice 4.** Trouver le supremum et infimum dans $\mathbb{R}$ de :

(i) $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^*\}$

(ii) $E = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

(iii) $E = \{x \in \mathbb{R} : -8 \leq x^3 \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x + 1 < 6\}$

Est-ce que ce sont des maximums et des minimums ?

Exercice 4

- $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^*\}$ : Si $n$ est pair, $\frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} + 1$
  Si $n$ est impair, $\frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} - 1 < \frac{1}{n} + 1$

  - Si $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$, donc pour $n \in \{2, 4, 6, \ldots\}$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{n} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1$. Comme $\frac{1}{n} + 1 \geq \frac{1}{n} + (-1)^n$, $\frac{1}{n} + (-1)^n \leq \frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2}$ est un majorant de l'ensemble. Comme $\frac{3}{2} \in \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^*\}$, c'est également le supremum et maximum.

  - Puisque $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$, donc $\frac{1}{n} - 1 > -1$, et donc $-1$ est un minorant de l'ensemble.

    Par le principe d'Archimède, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{N} < \varepsilon$, par conséquent $\frac{1}{N} - 1 < -1 + \varepsilon$.
    Il n'existe donc pas de minorant plus grand que $-1$, et c'est donc l'inpimum.
    Comme $-1 \notin \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^*\}$, il ne s'agit pas d'un minimum

Exercice 4 (cont.)

- $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

  Il suit directement de la dépinition de l'ensemble que $\inf E = \min E = 0$, et $\sup E = 1$.
  L'ensemble ne possède pas de maximum.

- $\{x \in \mathbb{R} : -8 \leq x^3 \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x+1 < 6\}$.

  L'ensemble peut se réécrire comme $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 5\}$.

  Par conséquent, $\inf E = \min(\inf [-2, -1], \inf [1, 5)) = \min(-2, 1) = -2$.
  Comme $-2 \in E$, c'est un minimum.

  De même, $\sup E = \max(\sup [-2, -1], \sup [1, 5)) = \cancel{\sup} \max(-1, 5) = 5$.
  Comme $5 \notin$, ce n'est pas un maximum.

**Exercice 5.** Déterminer quelles sont les fonctions injectives, surjectives, et bijections parmi la liste suivante. Justifier vos affirmations.

(i) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\quad x \mapsto \frac{1}{x}$

(ii) $g : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{N}$
$\quad n \mapsto$ le plus petit nombre premier divisant $n$

(iii) Soit $E$ un ensemble,

$$\begin{array}{rcl} \chi : \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \chi_A \end{array}$$

où $\chi_A$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $A$.

Exercice 5

(i) $f$ est injective : $\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x'}} \Longrightarrow x = x'$
elle est aussi surjective : $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \exists x = \frac{1}{y}, y = \frac{1}{x}$.

Elle est donc bijective, et $f^{-1} = f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

(ii) $g$ n'est ni surjective : $g(x) \neq 4$, ni injective : $g(1) = g(0)$

(iii) $\chi$ est injective : $\chi_A = \chi_B \Longrightarrow A = B$
elle est aussi ~~injective~~ surjective : $\{0,1\}^E$ associe une fonction $\chi_A : E \to \{0,1\}$ à chaque partie de $E$, donc il existe une partie de $E$ pour chaque fonction $\chi_A$ dans $\{0,1\}^E$.

**Exercice 6.** Déterminer quelles sont les fonctions croissantes et décroissantes parmi la liste suivante. Justifier vos affirmations.

(i) $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ même question avec $\begin{array}{rcl} i : [0, \infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

(ii) $\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \pi(n) \end{array}$ où $\pi(n)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $n$.

Exercice 6

(i) ($h$ est décroissante sur $(-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, \infty)$)

Soient $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$, alors $x < y$ et $h(x) > h(y)$, mais $y < z$ et $h(y) < h(z)$.
Donc, $h$ n'est pas monotone.

En revanche, puisque le domaine de définition de $i$ est restreint à $[0, \infty)$, $x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$,
donc $i$ est (strictement) croissante.

(ii) Soit $p$ le plus grand nombre premier inférieur à $n$. Alors $\forall \delta \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n + \delta$.
Donc, le nombre de nombres premiers inférieurs à $n+\delta$ est au moins aussi grand que pour $n$, i.e. $\pi(n) \leqslant \pi(n+\delta)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi(n) \leqslant \pi(n+1)$ et $\pi$ est donc croissante.

**Exercice 7.** Soient $E \subset F \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\sup E \leq \sup F$ et $\inf E \geq \inf F$.

Exercice 7

Comme $E \subset F$, $F$ peut être écrit comme $F = A \cup E \cup B$, avec $A = \{x \in F : \forall y \in E, x \leqslant y\}$
et $B = \{x \in F : \forall y \in E, x \geqslant y\}$

Autrement dit, $F$ est l'union des minorants de $E$ dans $F$ de $E$, et des majorants de $E$ dans $F$.
Il suit que si $B = \emptyset$, $\sup F = \sup E$, sinon $\sup F = \sup B$.
De même, si $A = \emptyset$, $\inf F = \inf E$, sinon $\inf F = \inf A$.

Comme $\inf A \leqslant \inf E$ tant que $A$ est non vide, par définition de $A$, et que $\sup B \geqslant \sup E$ tant que $B$ est non vide, on en conclut que $\inf F \leqslant \inf E$ et $\sup F \geqslant \sup E$.

**Exercice 8.** Soit $f : E \to F$. Montrer que

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$$

Exercice 8

$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E : f(x) \in \{y\}\} = \{x \in E : f(x) = y\}$. Donc,

$\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{y \in F} \{x \in E : f(x) \in \{y\}\} = \{x \in E : f(x) \in \bigcup_{y \in F} \{y\}\} = \{x \in E : f(x) \in F\}$.

Comme une fonction s'applique à tous les éléments de son domaine de définition, tant que $f$ est bien définie $\{x \in E : f(x) \in F\} = E$.

**Exercice 9.** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

(i) Supposons que $g \circ f$ est injective, est-ce que $f$ est injective ? Même question avec $g$ ?

(ii) Supposons que $g \circ f$ est surjective, est-ce que $f$ est surjective ? Même question avec $g$ ?

(iii) Est-ce que $g \circ f$ bijective implique $f$ et $g$ bijectives ?

Pour chaque question, si la réponse est oui, le prouver. Sinon, exhiber un contre-exemple.

Exercice 9

Soit $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, $x \longmapsto |x|$

Il peut être montré que $f$ est injective sans être surjective, $g$ est surjective sans être injective, et $g \circ f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $x \longmapsto |x^2|$ est bijective.

(i) Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

Preuve par contraposée : Si $f$ n'est pas injective, alors il existe $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Alors, $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et par conséquent, $g \circ f$ n'est pas injective.

$g$ n'est pas forcément injective, comme montré dans l'exemple ci-dessus.

(ii) Si $g \circ f$ est surjective, $f$ n'est pas forcément surjective, comme montré dans l'exemple ci-dessus.

Par contre, $g$ est surjective.

Preuve par contraposée : Si $g$ n'est pas surjective, alors il existe $y \in G$ tel que pour tout $x \in F$, $g(x) \neq y$. En particulier, pour tout $e \in E$, $g(f(e)) \neq y$. Donc, $g \circ f(e) \neq y$ et par conséquent, $g \circ f$ n'est pas surjective.

(iii) Par (i) et (ii), il suit que si $g \circ f$ est bijective, alors $f$ est injective et $g$ est surjective.