Analyse I

Automne 2024

# Série 1

Buff Mathias

## Exercice 1

(i) "Si $x>0$, alors $f(x)\leqslant 0$"
- Contraposée : "Si $f(x)>0$, alors $x\leqslant 0$"
- Négation : "~~Si x~~ $x>0$ et $f(x)>0$"

(ii) "Si $ab=0$, alors ($a=0$ ou $b=0$)"
- Contraposée : "Si ($a\neq 0$ et $b\neq 0$), alors $ab\neq 0$"
- Négation : "$ab=0$ et ($a\neq 0$ et $b\neq 0$)"

## Exercice 2

(i) $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2<0$ "Le carré d'un nombre réel est négatif"

- Négation : $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2\geqslant 0$

(ii) $\forall x,y\in\mathbb{Q}\ [x<y \Rightarrow \exists z\in\mathbb{Q},\ x<z<y]$ "On peut trouver un nombre rationnel entre chaque paire de nombres rationnels distincts"

("$\mathbb{Q}$ est dense" ?)

- Négation : $\exists x,y\in\mathbb{Q},\ [x<y \wedge (\forall z\in\mathbb{Q},\ z<x\wedge z>y)]$

(iii) "Il existe des entiers arbitrairement grands" $\forall A\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{N},\ n>A$

- Négation : $\exists A\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\ n\leqslant A$

(iv) $\forall n\in\mathbb{N}, \exists p\geqslant n, \forall r\in\mathbb{N}, \forall s\in\mathbb{N}, [p=rs \Rightarrow (r=1)\vee(s=1)]$ "Il existe une infinité de nombres premiers"

- Négation : $\exists n\in\mathbb{N}, \forall p\geqslant n, \exists r\in\mathbb{N}, \exists s\in\mathbb{N}, [(p=rs)\wedge(r\neq 1)\wedge(s\neq 1)]$

## Exercice 3

(i) $\neg[\forall x,y\in E,\ xy=yx] \Leftrightarrow \exists x,y\in E,\ xy\neq yx$

(ii) $\neg[\exists x\in E, \forall y\in E,\ xy=yx] \Leftrightarrow \forall x\in E, \exists y\in E,\ xy\neq yx$

(iii) $\neg[\forall a,b\in A,\ [ab=0\Rightarrow (a=0)\vee(b=0)]] \Leftrightarrow \exists a,b\in A,\ [(ab=0)\wedge(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)]$

(iv) $\neg[\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R},\ [x<y\Rightarrow f(x)<f(y)]] \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R},\ [(x<y)\wedge(f(x)\geqslant f(y))]$

(v) $\neg[\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, [n\geqslant N\Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon]] \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geqslant N, |u_n-\ell|\geqslant\varepsilon$

(vi) $\neg[\exists \ell\in\mathbb{R}, \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, [n\geqslant N\Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon]] \Leftrightarrow \forall \ell\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N}, \exists n\geqslant N, |u_n-\ell|\geqslant\varepsilon$

## Exercice 4

Soit $x\in E$. Puisque $E\subset F$, alors $x\in F$. De plus, comme $F\subset G$, $x\in G$.

Donc, $[\forall x\in E,\ (E\subset F)\wedge(F\subset G)\Rightarrow x\in G] \Leftrightarrow E\subset G$.

## Exercice 5

(i) $A=B \iff [\forall x \in A,\ x\in B] \land [\forall x \in B,\ x \in A]$ (*)

$\iff [A\cap B = A] \land [A\cap B = B]$

Donc, $A\cap B = A = B$. Par ailleurs,

$A=B \overset{(*)}{\iff} [A\cup B = B] \land [A\cup B = A]$

Ainsi, $A\cup B = A = B = A\cap B$.

(ii) $A=B \iff [A\subset B] \land [B\subset A]$

$\iff [\mathcal{P}(A)\subset\mathcal{P}(B)] \land [\mathcal{P}(B)\subset\mathcal{P}(A)]$

$\iff \mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$

~~(iii) Preuve par l'absurde: Considérons $[(A\cup B = A\cup C)\land(A\cap B = A\cap C)]$ VRAIE, mais $[B=C]$ FAUSSE.~~
~~$B\neq C$. Sans perte de généralité, il existe $x\in B, x\notin C$.~~
~~Puisque $A\cup B = A\cup C$~~

(iii) Preuve par contraposée:

$\neg[B=C] \iff B\neq C \overset{\text{s.p.d.g}}{\iff} \exists x\in B,\ x\notin C$

Puisque $x\in B$ mais $x\in C$, nous avons :

- $x\in A$, alors $x\in A\cap B$ mais $x\notin A\cap C$, donc $A\cap B\neq A\cap C$
- $x\notin A$, alors $x\in A\cup B$ mais $x\notin A\cup C$, donc $A\cup B\neq A\cup C$

Ainsi, $\neg[B=C] \Rightarrow [(A\cup B\neq A\cup C)\lor(A\cap B\neq A\cap C)] \iff \neg[(A\cup B = A\cup C)\land(A\cap B = A\cap C)]$

## Exercice 6

(i) "$\mathbb{N}\in\mathbb{Z}$" FAUX, $\mathbb{N}$, n'est pas élément de $\mathbb{Z}$

(ii) "$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$" VRAI

(iii) "$\emptyset\in\mathbb{N}$" FAUX, c.f. (i)

(iv) "$\emptyset\subset\mathbb{N}$" VRAI

$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ (*)

(v) "$\{1,2\}\in\mathcal{P}(\{1,2,3\})$" VRAI

(vi) "$\{1,2\}\subset\mathcal{P}(\{1,2,3\})$" FAUX, selon * 1, 2 ne sont pas des éléments de $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

(vii) "$\{\{1\}\}\subset\mathcal{P}(\{1,2,3\})$" VRAI

## Exercice 7

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{3, 6\}$

(i) $B \cap D = \{1, 3, 5, 7\} \cap \{3, 6\} = \{3\}$ $\qquad$ $C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$

(ii) $B \cup D = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ $\qquad$ $C \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$

Aucune de ces unions n'est disjointe car $B \cap D \neq \emptyset$ et $C \cap D \neq \emptyset$

En revanche, $B \cup C$ est disjointe.

(iii) $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 4, 6\} = C$

$A \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5, 7\} = B$

$A \setminus D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{3, 6\} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$

Exercice 5

(i) $(A = B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A \cup B)$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $x \in A$. Puisque $A = B$, $x \in B$, et par conséquent $[x \in A$ et $x \in B] \Leftrightarrow x \in A \cap B$.
Donc, $A \subset A \cap B$. De plus, par définition $A \cap B \subset A$. Ainsi, $A = A \cap B$. (*)

Montrons maintenant que $A = A \cup B$. Soit $y \in A \cup B$, c'est-à-dire $y \in A$ ou $y \in B$.
Si $y \in B$, comme $A = B$, $y \in A$. Donc $(y \in A \cup B \Rightarrow y \in A) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset A$.
De plus, par définition $A \subset A \cup B$. Ainsi, $A = A \cup B$ (**)

Ayant montré (*) et (**), nous avons montré que si $A = B$, $(A \cap B) = (A \cup B)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x \in B$. Par définition, $B \subset A \cup B$ et donc $x \in A \cup B$. Comme $A \cup B = A \cap B$,
$x \in A \cap B$, et par définition $A \cap B \subset A$ donc $x \in A$.
Ainsi il est montré que $B \subset A$. Par le même raisonnement, on peut montrer
que $A \subset B$. Comme $A \subset B$ et $B \subset A$, $A = B$.
Nous avons donc montré que si $(A \cap B = A \cup B)$, alors $A = B$.

Ayant montré $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$, nous avons montré $(A = B) \Longleftrightarrow (A \cap B = A \cup B)$.

(ii) $(A = B) \Longleftrightarrow (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Pour montrer que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, nous devons montrer :
(a) $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$
(b) $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$
Montrons (a). Soit $C \in \mathcal{P}(A)$, c'est-à-dire $C \subset A$. Comme $A = B$, $A \subset B$.
Puisque $C \subset A$ et $A \subset B$, $C \subset B$ (Exercice 4.)
Par conséquent, $C \in \mathcal{P}(B)$. Comme $C$ est général, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
Le même raisonnement peut être appliqué pour montrer (b).
Puisque (a) et (b) sont vraies, $[(A = B) \Rightarrow (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))]$ est démontrée vraie.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Preuve par contraposée : Montrons $\neg(A = B) \Longrightarrow \neg(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$
Puisque $A \neq B$, sans perte de généralité, il existe $x \in A$, $x \notin B$.
Puisque $x \in A$, $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ et puisque $x \notin B$, $\{x\} \notin \mathcal{P}(B)$.
Par conséquent, $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.
Par contraposée, $(\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)) \Longrightarrow (A = B)$.

Ayant montré $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$, nous avons montré $(A = B) \Longleftrightarrow (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$

Exercice 5 (cont.)

(iii) Preuve par contraposée : $\neg(B=C) \Rightarrow \neg[(A\cup B = A\cup C)\wedge(A\cap B = A\cap C)]$ $(*)$

Puisque $B \neq C$, sans perte de généralité il existe $x \in B$, $x \notin C$.

Considérons les cas suivants :

- $x \notin A$, alors $x \in A\cup B$ mais $x \notin A\cup C$, donc $A\cup B \neq A\cup C$.
- $x \in A$, alors $x \in A\cap B$ mais $x \in A\cap C$, donc $A\cap B \neq A\cap C$.

Il est donc montré que si $B\neq C$, les assertions $(A\cup B = A\cup C)$ et $(A\cap B = A\cap C)$ ne peuvent pas être vraies en même temps, et donc que $[(A\cup B = A\cup C)\wedge(A\cap B = A\cap C)]$ est fausse. Ainsi, $(*)$ est démontrée vraie.

Par contraposée, il est donc démontré que $(A\cup B = A\cup C)\wedge(A\cap B = A\cap C) \Rightarrow (B=C)$.