Exercice 1. Quelle est la contraposée des implications suivantes ? Même question avec la négation.

(i) Si $x > 0$, alors $f(x) \leq 0$.
(ii) Si $ab = 0$, alors ($a = 0$ ou $b = 0$).

Exercice 2. Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.
(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \implies \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y]$.
(iii) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > A$.
(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, \forall r \mathbb{N}, \forall s \mathbb{N}, [p = rs \implies (r = 1) \vee (s = 1)]$.

Exercice 3. Écrire la négation des assertions suivantes.

(i) $\forall x, y \in E, xy = yx$.
(ii) $\exists x \in E, \forall y \in E, xy = yx$.
(iii) $\forall a, b \in A, [ab = 0 \implies (a = 0) \vee (b = 0)]$.
(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, [x < y \implies f(x) < f(y)]$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
(v) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon]$ (où (u_n) est une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$).
(vi) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \implies |u_n - \ell|\ \epsilon]$ (où (u_n) est une suite réelle).

Exercice 4. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Exercice 5. Soient A, B et C trois ensembles.

(i) Montrer que $A = B \iff (A \cap B = A \cup B)$.
(ii) Montrer que $A = B \iff (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$.
(iii) Montrer que $(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C) \implies (B = C)$.

Exercice 6. Dites si les assertions suivantes sont VRAIES ou FAUSSES.

(i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
(iii) $\emptyset \in \mathbb{N}$.
(iv) $\emptyset \subset \mathbb{N}$.
(v) $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
(vi) $\{1, 2\} \subset \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
(vii) $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.

Exercice 7. Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{N}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7\}, \quad C = \{2, 4, 6\}, \quad D = \{3, 6\}.$$

(i) Déterminer $B \cap D$ et $C \cap D$.
(ii) Déterminer $B \cup D$ et $C \cup D$. L'une de ces deux unions est-elle disjointe ?
(iii) Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.