Exercice 1

1. $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_2-\lambda_3 & \lambda_1+\lambda_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

et $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1-\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2-\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cdot\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \\ 2\cdot\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ Donc, $\mathcal{F}$ est libre.

2. Puisque $\dim_{\mathbb{R}} M_{22}(\mathbb{R}) = 4$ et $\dim\langle\mathcal{F}\rangle = 3$, il faut ajouter un vecteur à $\mathcal{F}$ pour la compléter en une base de $M_{22}(\mathbb{R})$.

Par le lemme d'échange, on peut trouver un vecteur parmi la base canonique de $M_{22}(\mathbb{R})$ qui satisfait nos conditions.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas expressible comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est libre, et comme elle possède 4 éléments, c'est une base de $M_{22}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Puisque $p(1) = 0$ alors $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Par conséquent, W peut être généré en laissant a_1x, a_2x^2, a_3x^3 libres et en constraignant a_0 par $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$.

Ainsi, $\{(-1+x), (-1+x^2), (-1+x^3)\}$ est une base de W, et $\dim W = 3$.

2. $\dim \mathbb{R}_3[x] = \dim W + \dim V$, donc $\dim V = \dim \mathbb{R}_3[x] - \dim W = 1$. Par conséquent, nous devons trouver un vecteur de $\mathbb{R}_3[x]$ qui n'est pas contenu dans W, et ce vecteur suffira pour former une base de V.

Il est impossible d'exprimer $(1+0x+0x^2+0x^3) = (1)$ par combinaison linéaire des vecteurs de la base trouvée dans 1. (ce qui est logique puisque $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$).

Par conséquent, $\{(1)\}$ est une base de V qui satisfait $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus V$.
On remarquera que $V = \mathbb{R}_0[x]$ dans ce cas.

Exercice 3

1. $F \cap (G+H) \subset F\cap G + F \cap H$ est FAUSSE. <u>Preuve par contre-exemple:</u>

Soit $F = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$, $G = \langle\{e_2, e_3\}\rangle$, $H = \langle\{e_1, e_3\}\rangle$, avec $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Alors $F \cap (G+H) = \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap (\langle\{e_2, e_3\}\rangle + \langle\{e_1, e_3\}\rangle) = \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$

et $F\cap G + F\cap H = \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap \langle\{e_2, e_3\}\rangle + \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap \langle\{e_1, e_3\}\rangle = \langle\{e_2\}\rangle + \langle\{e_1\}\rangle = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$

Donc, $e_3 = (0,0,1) \in F \cap (G+H)$ mais $e_3 \notin F\cap G + F\cap H$.

$F\cap G + F\cap H \subset F\cap(G+H)$ est VRAIE. <u>Preuve:</u>

Soit $v \in F\cap G + F\cap H$, i.e. $v = \sum_{i\in I} g_i + \sum_{j \in J} h_j$, où $g_i \in F\cap G$ et $|I| \geq \dim F\cap G$, et $h_j \in F \cap H$ et $|J| \geq \dim F\cap H$

En particulier : - g_i et $h_j \in F$, donc $v \in F$
- $g_i \in G$ et $h_j \in H$, donc $v \in G+H$.

Donc, $v \in F \cap (G+H)$.

Exercice 3 (cont.)

2. (a) - Si $U \subset V$, par exemple $U = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ et $V = \langle\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}\rangle$ alors $U+V = V$ et $\dim(U+V) = \dim(V) = 5$

- Sinon, par exemple $U = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ et $V = \langle\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}\rangle$ alors $U+V = \mathbb{R}^6$ et $\dim(U+V) = \dim \mathbb{R}^6 = 6$

Donc, $5 \leqslant \dim(U+V) \leqslant 6$.

(b) En reprenant les mêmes exemples que pour (a), on a

$1 \leqslant \dim(U+V) \leqslant 2$.

3. (a) Puisque $\begin{cases} 2x+3z-4t=0 \\ 3z-2t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2t-4t=0 \\ 3z=2t \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=2t \\ 3z=2t \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=\frac{2}{3}t \end{cases}$, alors

$U = \{(t, y, \frac{2}{3}t, t) \in \mathbb{R}^4\} = \{y\cdot(0,1,0,0) + t\cdot(1,0,\frac{2}{3},1)\}$ donc $\{(0,1,0,0), (1,0,\frac{2}{3},1)\}$ est une base de U, et par conséquent $\dim U = 2$

Comme $(2,-1,0,0) = 2\cdot(1,0,0,0) - \frac{1}{4}\cdot(0,4,0,0)$ et $(0,4,0,0) = 4\cdot(0,1,0,0)$ alors

$W = \langle\{(1,0,0,0), (0,4,0,0), (2,-1,0,0), (0,0,0,1)\}\rangle = \langle\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}\rangle = \langle\{e_1, e_2, e_4\}\rangle$
où e_1, e_2, e_4 sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Donc, $\{e_1, e_2, e_4\}$ est une base de W, et par conséquent $\dim W = 3$.

(b) $U + W = \langle\{e_2, (1,0,\frac{2}{3},1)\}\rangle + \langle\{e_1, e_2, e_4\}\rangle = \langle\{e_1, e_2, e_4, (1,0,\frac{2}{3},1)\}\rangle$

et comme $(1,0,\frac{2}{3},1) = e_1 + \frac{2}{3}e_3 + e_4$, alors tout vecteur de $U+W$ s'écrit :

$\alpha\cdot e_1 + \beta\cdot e_2 + \gamma\cdot e_4 + \lambda\cdot(e_1 + \frac{2}{3}e_3 + e_4) = (\alpha+\lambda)e_1 + \beta e_2 + \frac{2}{3}\lambda e_3 + (\gamma+\lambda)e_4$,

et donc la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est également une base de $U+W$. Comme $\mathbb{R}^4$ et $U+W$ ont une base ~~en~~ commune, ce sont les mêmes espaces vectoriels, i.e. $U+W = \mathbb{R}^4$.

Exercice 4

Partie A

1. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

- $0_{M_{n,n}(\mathbb{R})}^T = 0_{M_{n,n}(\mathbb{R})}$ donc $0_{M_{n,n}(\mathbb{R})} \in S_n(\mathbb{R})$
- $(a_{ij})^T + (b_{ij})^T = (a_{ji}) + (b_{ji}) = ((a+b)_{ji}) = ((a+b)_{ij})^T$ donc $(A+B) \in S_n(\mathbb{R})$
- $\lambda\cdot(a_{ij})^T = \lambda\cdot(a_{ji}) = ((\lambda a)_{ji}) = ((\lambda a)_{ij})^T$ donc $(\lambda\cdot A) \in S_n(\mathbb{R})$

2. Pour $n=3$ les matrices symétriques sont de la forme

$M = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} + e\cdot\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} + f\cdot\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

Donc, $\left\{\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$ pour $n=3$.

3. Comme on rajoute une ligne à n éléments à une matrice de $S_{n-1}(\mathbb{R})$, et les mêmes éléments en colonne, on rajoute donc n vecteurs indépendants à sa base.

Ainsi, $\dim S_n(\mathbb{R}) = n + \dim S_{n-1}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{n} k$.

Exercice 4 (cont.)

Partie B

1. Soient $A, B \in A_n(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$,

- $0 = -0$, donc $O_{M_{n,n}(\mathbb{R})}^T = -O_{M_{n,n}(\mathbb{R})}$ donc $O_{M_{n,n}(\mathbb{R})} \in A_n(\mathbb{R})$
- $(a_{ij})^T + (b_{ij})^T = -(a_{ji}) - (b_{ji}) = -\left((a_{ji}) + (b_{ji})\right) = -\left((a+b)_{ji}\right) = \left((a+b)_{ij}\right)^T$ donc $(A+B) \in A_n(\mathbb{R})$
- $\lambda \cdot (a_{ij})^T = \lambda \cdot (-(a_{ji})) = -\lambda \cdot (a_{ji}) = -((\lambda a)_{ji}) = ((\lambda a)_{ij})^T$ donc $(\lambda \cdot A) \in A_n(\mathbb{R})$

2. Pour $n=3$ les matrices antisymétriques sont de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $A_n(\mathbb{R})$ pour $n=3$.

3. De la même manière que dans Partie A-3., pour passer de $A_{n-1}(\mathbb{R})$ à $A_n(\mathbb{R})$, nous rajoutons une ligne à n éléments, mais le dernier d'entre eux est forcément égal à 0 donc il faut rajouter à la base de l'espace $n-1$ vecteurs indépendants.

Ainsi, $\dim A_n(\mathbb{R}) = n-1 + \dim A_{n-1}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)$

Partie C

1. Puisque chaque vecteur de la base canonique de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ peut être représenté soit comme ~~(s) soit~~ $\frac{1}{2}(a+s)$, ou $\frac{1}{2}(a-s)$, où a et s sont des vecteurs des bases analogues à celles explicitées aux points A-2. et B-2., i.e. s appartient à la base de $S_n(\mathbb{R})$ et a à la base de $A_n(\mathbb{R})$

Alors $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Puisque $a_{ij} = a_{ji} = -a_{ji}$ pour tout i,j implique que $a_{ij} = 0$ pour tout i,j,

Alors $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{O_{M_{n,n}(\mathbb{R})}\}$

On en conclut que $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ et donc que chaque matrice carrée peut être décomposée en une matrice symétrique et une matrice antisymétrique de sorte que la somme des deux résulte en la matrice de départ.

2. Prouvons par récurrence que $n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$

Initialisation : pour $n=1$, $1^2 = 1$ et $\sum_{k=1}^{1} 2k-1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$.

Induction : Supposons $n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$ vraie pour n. Alors,

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2\cdot(n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 + 2\cdot(n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} 2k-1$. La proposition est donc vraie pour $n+1$.

Alors, $\dim M_{n,n}(\mathbb{R}) = n^2$ et $\dim(S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})) = \dim S_n(\mathbb{R}) + \dim A_n(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k-1 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$

Donc $\dim M_{n,n}(\mathbb{R}) = \dim(S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}))$ et comme $S_n(\mathbb{R}) \leqslant M_{n,n}(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R}) \leqslant M_{n,n}(\mathbb{R})$,

$M_{n,n}(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ est vérifiée.