Série 03-B

Exercice 1

$\boxed{\subset}$ Montrons que $(A\setminus B)\setminus C \subset A\setminus(B\cup C)$.

Soit $x\in(A\setminus B)\setminus C$, alors $x\in(A\setminus B)$ et $x\notin C$, donc $x\in A$, $x\notin B$, $x\notin C$.
Comme x n'appartient ni à B, ni à C, alors $x\notin(B\cup C)$.
Donc, $x\in A$ et $x\notin(B\cup C)$, i.e. $x\in A\setminus(B\cup C)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\setminus C$.

Soit $x\in A\setminus(B\cup C)$, alors $x\in A$ et $x\notin B\cup C$, donc $x\notin B$ et $x\notin C$.
En particulier, $(x\in A$ et $x\notin B)$ et $x\notin C$, i.e. $x\in(A\setminus B)\setminus C$.

Par $\boxed{\subset}$ et $\boxed{\supset}$, il est montré que $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C)$.

Note : $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\cup C) = A\setminus(C\cup B) = (A\setminus C)\setminus B$.

Exercice 2

$\boxed{\subset}$ Montrons que $(A\cap B)\times(C\cap D)\subset(A\times C)\cap(B\times D)$

Soient $x\in(A\cap B)$, $y\in(C\cap D)$. Alors $x\in A$, $x\in B$, $y\in C$, $y\in D$, donc $(x,y)\in(A\times C)$ et $(x,y)\in(B\times D)$.

Par conséquent, $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $(A\times C)\cap(B\times D)\subset(A\cap B)\times(C\cap D)$

- Question : Est-ce que "$\boxed{\supset}$ est montré par le raisonnement inverse de $\boxed{\subset}$" est acceptable ?

Soit $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$. Alors $(x,y)\in(A\times C)$ et $(x,y)\in(B\times D)$, i.e. $x\in A$, $y\in C$, et $x\in B$, $y\in D$.

Donc, $x\in(A\cap B)$, $y\in(C\cap D)$, et par conséquent $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$.

Par $\boxed{\subset}$ et $\boxed{\supset}$, il est montré que $(A\times C)\cap(B\times D) = (A\cap B)\times(C\cap D)$. $= (A\times D)\cap(B\times C)$

Exercice 4

Proposition : $A\times B = B\times A \iff A = B$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(x,y)\in A\times B$, i.e. $x\in A$ et $y\in B$. Comme $A\times B = B\times A$, $(x,y)\in B\times A$, i.e. $x\in B$ et $y\in A$. Donc, $A\subset B$ et $B\subset A$, i.e. $A=B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(x,y)\in A\times B$, i.e. $x\in A$ et $y\in B$. Comme $A=B$, $x\in B$ et $y\in A$, donc $(x,y)\in B\times A$, ce qui implique $A\times B\subset B\times A$.

Par le même raisonnement, on peut montrer $B\times A\subset A\times B$, donc $A\times B = B\times A$.

Par $\boxed{\Rightarrow}$ et $\boxed{\Leftarrow}$, l'équivalence de la proposition est démontrée.

Exercice 3

- $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, alors $x\in A$ et $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$. Alors, ~~pour tout~~ il existe $i\in I$, $x\in(A\cap A_i)$.
Donc, $x\in \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x\in\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$, alors il existe $i\in I$, $x\in(A\cap A_i)$. Comme A n'est pas dépendant de i, $x\in A$ et il existe $i\in I$, $x\in A_i$, donc $x\in A\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

- $A\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x\in A\cup\left(\bigcap_{i\in A_i} A_i\right)$

-Si $x\in A$, alors pour tout $i\in I$, $x\in(A\cup A_i)$, car $A\subset(A\cup A_i)$. Donc, $x\in\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$.
-Si $x\in\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, alors pour tout $i\in I$, $x\in A_i$, et donc $x\in(A\cup A_i)$ car $A_i\subset(A\cup A_i)$. Donc, $x\in\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x\in\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$, alors pour tout $i\in I$, $x\in(A\cup A_i)$.
-Si $x\in A$, alors comme A est indépendant de A, $x\in A\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.
-Si $x\notin A$, alors pour tout $i\in I$, $x\in A_i$, donc $x\in\bigcap_{i\in I} A_i$, et $x\in A\cup\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

- $A\setminus\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A\setminus A_i$: $x\in A\setminus\bigcup_{i\in I} A_i$

$\iff x\in A$ et $x\notin\bigcup_{i\in I} A_i$
$\iff x\in A$ et il n'existe pas de $i\in I$ tel que $x\in A_i$
$\iff x\in A$ et pour tout $i\in I$, $x\notin A_i$
$\iff$ pour tout $i\in I$, $x\in A$ et $x\notin A_i$
$\iff$ pour tout $i\in I$, $x\in A\setminus A_i$
$\iff x\in\bigcap_{i\in I} A\setminus A_i$

- $A\setminus\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A\setminus A_i$: $x\in A\setminus\bigcap_{i\in I} A_i$

$\iff x\in A$ et $x\notin\bigcap_{i\in I} A_i$
$\iff x\in A$ et il existe $i\in I$ tel que $x\notin A_i$
$\iff$ il existe $i\in I$ tel que $x\in A$ et $x\notin A_i$
$\iff$ il existe $i\in I$ tel que $x\in A\setminus A_i$
$\iff x\in\bigcup_{i\in I} A\setminus A_i$