Exercice 1. (Compléter une famille libre en une base)
Considérons l'ensemble suivant de matrices :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ (sur $\mathbb{R}$).
2. Compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ (sur $\mathbb{R}$). Justifier votre réponse.

1. $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

   et $\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

   Donc, $\mathcal{F}$ est libre.

2. Puisque $\dim \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$ et $|\mathcal{F}| = 3$, il faut ajouter un vecteur à $\mathcal{F}$ pour la compléter en une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

   Par le lemme d'échange, on peut trouver un vecteur parmi la base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui satisfait nos conditions.

   Par exemple, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas exprimable comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \cup \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ est libre, et comme elle possède 4 éléments, c'est une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (Compléter un sous-espace vectoriel)
Considérons le sous-espace vectoriel $W = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid p(1) = 0\} \subset \mathbb{R}_3[x]$ sur $\mathbb{R}$.

1. Trouver une base de W et en déduire sa dimension.
2. Trouver un sous-espace $V \subset \mathbb{R}_3[x]$ tel que $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus V$.

1. Puisque $p(1) = 0$, alors $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Par conséquent, W peut être généré en laissant $a_1 x, a_2 x^2, a_3 x^3$ libres, et en contraignant a_0 par $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$.
   Ainsi, $\{(-1 + x), (-1 + x^2), (-1 + x^3)\}$ est une base de W, donc $\dim W = 3$.

2. $\dim \mathbb{R}_3[x] = \dim W + \dim V$, donc $\dim V = \dim \mathbb{R}_3[x] - \dim W = 1$. Par conséquent, nous devons trouver un vecteur de $\mathbb{R}_3[x]$ qui n'est pas contenu dans W, et ce vecteur suffira pour former une base de V.

   Par exemple, $p = (1) = (1 + 0x + 0x^2 + 0x^3)$ n'est pas contenu dans W, car $p(1) = 1 \neq 0$.
   Donc, $\{(1)\}$ est une base de V qui satisfait $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus V$.
   (On remarquera que ce choix donne $V = \mathbb{R}_0[x]$).

Exercice 3. (Somme, intersection et dimension de sous-espaces)

1. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les inclusions suivantes sont-elles vraies ? Le prouver ou donner un contre-exemple.

$$F \cap (G + H) \subset F \cap G + F \cap H$$
$$F \cap G + F \cap H \subset F \cap (G + H)$$

$F \cap (G + H) \subset F \cap G + F \cap H$ est FAUSSE.
Preuve par contre-exemple :*(avec $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$)*

Soit $F = \langle\{e_1, e_2\}\rangle, G = \langle\{e_2, e_3\}\rangle H = \langle\{e_1, e_3\}\rangle$. Alors,
$F \cap (G + H) = \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap \big(\langle\{e_2, e_3\}\rangle + \langle\{e_1, e_3\}\rangle\big) = \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$
et $F \cap G + F \cap H = \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap \langle\{e_2, e_3\}\rangle + \langle\{e_1, e_2\}\rangle \cap \langle\{e_1, e_3\}\rangle = \langle\{e_2\}\rangle + \langle\{e_1\}\rangle = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$

Donc, $e_3 = (0, 0, 1) \in F \cap (G + H)$ mais $e_3 \notin F \cap G + F \cap H$, donc $F \cap (G + H) \not\subset F \cap G + F \cap H$.

$F \cap G + F \cap H \subset F \cap (G + H)$ est VRAIE.
Preuve :

Soit $v \in F \cap G + F \cap H, i.e.\ v = \sum_{i \in I} g_i + \sum_{j \in J} h_j$, où g_i est un vecteur d'une base de $F \cap G$ et h_j est un vecteur d'une base de $F \cap H$.
En particulier :

- g_i et $h_j \in F$, donc $v \in F$
- $g_i \in G$ et $h_j \in H$, donc $v \in G + H$

Donc, $v \in F \cap (G + H)$.

2. Soient U et V deux sous-espaces de $\mathbb{R}^6$ tels que $\dim(U) = 2$ et $\dim(V) = 5$.
   (a) Quelles sont les valeurs minimales et maximales de $\dim(U + V)$? Donner des exemples concrets.
   (b) Quelles sont les valeurs minimales et maximales de $\dim(U \cap V)$? Donner des exemples concrets.

   (a) Si $U \subset V$, par exemple $U = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ et $V = \langle\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}\rangle$
   (où $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^6$)
   Alors $U + V = V$ et $\dim(U + V) = \dim(V) = 5$.

   Sinon, par exemple $U = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ et $V = \langle\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}\rangle$
   Alors $U + V = \mathbb{R}^6$ et $\dim(U + V) = \dim(\mathbb{R}^6) = 6$.

   (b) En reprenant les mêmes exemples que pour (a), on a $1 \leq \dim(U \cap V) \leq 2$.

3. Considérons les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3z - 4t = 0 \text{ et } 3z - 2t = 0\}$$
$$W = \Big\langle \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 4, 0, 0),\ (2, -1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1)\} \Big\rangle$$

   (a) Calculer la dimension de U et de W.
   (b) Montrer que $U + W = \mathbb{R}^4$

3. (a) Puisque $\begin{cases} 2x+3z-4t=0 \\ 3z-2t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2t-4t=0 \\ 3z=2t \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=2t \\ 3z=2t \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ z=\frac{2}{3}t \end{cases}$, alors

$U=\{(t,y,\frac{2}{3}t,t)\in\mathbb{R}^4\}=\{y\cdot(0,1,0,0)+t\cdot(1,0,\frac{2}{3},1)\}$ donc $\{(0,1,0,0),(1,0,\frac{2}{3},1)\}$ est une base de U, et par conséquent $\dim U = 2$

Comme $(2,-1,0,0)=2\cdot(1,0,0,0)-\frac{1}{4}\cdot(0,4,0,0)$ et $(0,4,0,0)=4\cdot(0,1,0,0)$ alors

$W=\langle\{(1,0,0,0),(0,4,0,0),(2,-1,0,0),(0,0,0,1)\}\rangle=\langle\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}\rangle=\langle\{e_1,e_2,e_4\}\rangle$

où e_1, e_2, e_4 sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Donc, $\{e_1,e_2,e_4\}$ est une base de W, et par conséquent $\dim W = 3$.

(b) $U+W=\langle\{e_2,(1,0,\frac{2}{3},1)\}\rangle+\langle\{e_1,e_2,e_4\}\rangle=\langle\{e_1,e_2,e_4,(1,0,\frac{2}{3},1)\}\rangle$

et comme $(1,0,\frac{2}{3},1)=e_1+\frac{2}{3}e_3+e_4$, alors tout vecteur de $U+W$ s'écrit :

$\alpha\cdot e_1+\beta\cdot e_2+\gamma\cdot e_4+\lambda\cdot(e_1+\frac{2}{3}e_3+e_4)=(\alpha+\lambda)e_1+\beta e_2+\frac{2}{3}\lambda e_3+(\gamma+\lambda)e_4$,

et donc la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est également une base de $U+W$. Comme $\mathbb{R}^4$ et $U+W$ ont une base ~~en~~ commune, ce sont les mêmes espaces vectoriels, i.e. $U+W=\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. (Matrices symétriques et antisymétriques)
Soit $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées sur $\mathbb{R}$ de taille n. La transposée de la matrice $A=(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ est définie comme $A^\top=(a_{ji})_{i,j=1,\ldots,n}$ (*i.e.* on échange les lignes avec les colonnes).

Partie A - Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\mid A=A^\top\}$ l'ensemble des matrices *symétriques*.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$
2. Donner une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans le cas où $n=3$
3. Quelle est la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 4

Partie A

1. Soient $A, B\in S_n(\mathbb{R})$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Avec $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$.

- $0_{M_{n,n}(\mathbb{R})}^\top=0_{M_{n,n}(\mathbb{R})}$ donc $0_{M_{n,n}(\mathbb{R})}\in S_n(\mathbb{R})$
- $(a_{ij})^\top+(b_{ij})^\top=(a_{ji})+(b_{ji})=((a+b)_{ji})=((a+b)_{ij})^\top$ donc $(A+B)\in S_n(\mathbb{R})$
- $\lambda\cdot(a_{ij})^\top=\lambda\cdot(a_{ji})=((\lambda a)_{ji})=((\lambda a)_{ij})^\top$ donc $(\lambda\cdot A)\in S_n(\mathbb{R})$

2. Pour $n=3$ les matrices symétriques sont de la forme

$M=\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+e\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+f\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Donc, $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$ pour $n=3$.

3. Comme on rajoute une ligne à n éléments à une matrice de $S_{n-1}(\mathbb{R})$, et les mêmes éléments en colonne, on rajoute donc n vecteurs indépendants à sa base.

Ainsi, $\dim S_n(\mathbb{R})=n+\dim S_{n-1}(\mathbb{R})=\sum_{k=1}^{n}k$.

Partie B - Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\mid A=-A^\top\}$ l'ensemble des matrices *antisymétriques*.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$
2. Donner une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans le cas où $n=3$
3. Quelle est la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 4 (cont.)

Partie B

1. Soient $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

- $0 = -0$, donc $0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})}^T = -0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})}$ donc $0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- $(a_{ij})^T + (b_{ij})^T = -(a_{ji}) - (b_{ji}) = -((a_{ji}) + (b_{ji})) = -((a+b)_{ji}) = ((a+b)_{ij})^T$ donc $(A+B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- $\lambda \cdot (a_{ij})^T = \lambda \cdot (-(a_{ji})) = -\lambda \cdot (a_{ji}) = -((\lambda a)_{ji}) = ((\lambda a)_{ij})^T$ donc $(\lambda \cdot A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

2. Pour $n=3$ les matrices antisymétriques sont de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ pour $n=3$.

3. De la même manière que dans Partie A-3. pour passer de $\mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, nous rajoutons une ligne à n éléments, mais le dernier d'entre eux est forcément égal à 0 donc il faut rajouter à la base de l'espace $n-1$ vecteurs indépendants.

Ainsi, $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = n-1 + \dim \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)$

Partie C

1. Décrire explicitement les ensembles

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Que peut-on en conclure ?

2. En argumentant sur les dimensions, vérifier l'égalité $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Partie C

1. Puisque chaque vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ peut être représenté soit comme (s) ~~soit~~ $\frac{1}{2}(a+s)$, ou $\frac{1}{2}(a-s)$, où a et s sont des vecteurs des bases analogues à celles explicitées aux points A-2. et B-2., i.e. s appartient à la base de $S_n(\mathbb{R})$ et a à la base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Alors $S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Puisque $a_{ij} = a_{ji} = -a_{ji}$ pour tout i,j implique que $a_{ij} = 0$ pour tout i,j,

Alors $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0_{\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})}\}$

On en conclut que $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et donc que chaque matrice carrée peut être décomposée en une matrice symétrique et une matrice antisymétrique de sorte que la somme des deux résulte en la matrice de départ.

2. Prouvons par récurrence que $n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$

Initialisation : pour $n=1$, $1^2 = 1$ et $\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Induction : Supposons $n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$ vraie pour n. Alors,

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2 \cdot (n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 + 2 \cdot (n+1) - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} 2k-1$. La proposition est donc vraie pour $n+1$.

Alors, $\dim \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = n^2$ et $\dim(S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})) = \dim S_n(\mathbb{R}) + \dim A_n(\mathbb{R}) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k-1 = \sum_{k=1}^{n} 2k-1$

Donc, $\dim \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \dim(S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}))$ et comme $S_n(\mathbb{R}) \leqslant \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R}) \leqslant \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$,

~~So~~ $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ est vérifiée.