Exercice 1

Définissons $a = 41223791150$.

$f(x) = h \circ g(x)$ avec $h(x) = x^a$ et $g(x) = x^4 + x^2 - 1$, alors

$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = a\left(x^4+x^2-1\right)^{a-1} \cdot \left(4x^3+2x\right) = 2ax\left(x^4+x^2-1\right)\left(2x^2+1\right)$

Exercice 2

(i) "f tend vers a en ∞" : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

"f tend vers ∞ en b" : $\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - b| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Par conséquent, "f tend vers ∞ en ∞" : $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > A \Rightarrow f(x) > M$

(ii) Soit $\varepsilon = \frac{1}{M}$, avec M arbitrairement grand. Si f tend vers ∞ en ∞ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > A \Rightarrow f(x) > M \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \varepsilon.$

et comme $M > 0$, $\frac{1}{f(x)} > 0$, donc $\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$, alors $\frac{1}{f}$ tend vers 0 en ∞.

Exercice 3

Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} = f g^{(1)} + f^{(1)} g = (fg)^{(1)}$

Induction : Supposons que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)^{(1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)^{(1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

Désolé pour l'oubli des coefficients binomiaux jusqu'à cette ligne ->

La proposition est donc vérifiée pour $n+1$, et ainsi par récurrence elle est montrée vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le cas $n = 0$ est trivial).

Exercice 4

(i) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Preuve par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 1$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(1)} = \frac{1^{(1)} \cdot (1-x) - 1 \cdot (1-x)^{(1)}}{(1-x)^2} = \frac{0 - 1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Induction : Supposons que $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Alors,

$$
\left(\frac{1}{1-x}\right)^{n+1} = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)^{(1)} = \frac{(n!)^{(1)} \cdot (1-x)^{n+1} - n! \cdot \left((1-x)^{n+1}\right)^{(1)}}{\left((1-x)^{n+1}\right)^2} = \frac{0 - n! \cdot \left((n+1)(1-x)^n \cdot (-1)\right)}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(1-x)^{n+2}}
$$

$$
= \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}
$$

Exercice 4 (cont.)

(ii) La dérivée k-ième de $(x^2(1+x)^n)$ est $\sum_{p=0}^{k-1} 2p \cdot \frac{n!}{(n-k-2)!}(1+x)^{n-k+2} + 2k \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!} \cdot x(1+x)^{n-k+1} + \frac{n!}{(n-k)!} x^2 (1+x)^{n-k}$

Preuve par récurrence :

Initialisation : Pour $k=1$, $\sum_{p=0}^{k-1} 2p \cdot \frac{n!}{(n-k+2)!}(1+x)^{n-k+2} + 2k \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!} x(1+x)^{n-k+1} + \frac{n!}{(n-k)!} x^2 (1+x)^{n-k}$

$$= 0 + 2 \cdot 1 \cdot x(1+x)^{n} + n \cdot x^2 (1+x)^{n-1}$$
$$= 2x(1+x)^n + nx^2(1+x)^{n-1}$$
$$= (x^2(1+x))^{(1)}$$

Induction : Supposons la proposition vraie pour k. Alors,

$$(x^2(1+x)^n)^{(k+1)} = \left(\sum_{p=0}^{k-1} 2p \cdot \frac{n!}{(n-k+2)!}(1+x)^{n-k+2} + 2k \frac{n!}{(n-k+1)!} x(1+x)^{n-k+1} + \frac{n!}{(n-k)!} x^2(1+x)^{n-k}\right)^{(1)}$$
$$= 0 + \sum_{p=0}^{k-1} 2p \cdot \frac{n!}{(n-k+2)!}(n-k+2)(1+x)^{n-k+1}$$
$$+ 2k \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!}(1+x)^{n-k+1} + 2k \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!} x \cdot (n-k+1)(1+x)^{n-k}$$
$$+ 2\frac{n!}{(n-k)!} x(1+x)^{n-k} + \frac{n!}{(n-k)!} x^2 (n-k)(1+x)^{n-k-1}$$
$$= \left(2k + \sum_{p=0}^{k-1} 2p\right) \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!}(1+x)^{n-k+1} + (2+2k) \cdot \frac{n!}{(n-k)!} x(1+x)^{n-k} + \frac{n!}{(n-k-1)!} x^2 (1+x)^{n-k-1}$$
$$= \sum_{p=0}^{k} 2p \cdot \frac{n!}{(n-(k+1)+2)!}(1+x)^{n-(k+1)+2} + 2(k+1) \cdot \frac{n!}{(n-(k+1)+1)!} x(1+x)^{n-(k+1)+1} + \frac{n!}{(n-(k+1))!} x^2 (1+x)^{n-(k+1)}$$

Alors la proposition est vraie pour $k+1$, et par récurrence elle est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ (le cas $k=0$ est trivial)

Donc, la dérivée n-ième est le cas $k=n$:

$$(x^2(1+x)^n)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n-1} 2p \cdot \frac{n!}{(n-n+2)!}(1+x)^2 + 2n \cdot \frac{n!}{(n-n+1)!} x(1+x) + \frac{n!}{(n-n)!} x^2$$
$$= n! \cdot \left(\sum_{p=0}^{n-1} 2p \cdot \frac{1}{2!}(1+x)^2 + 2n \cdot \frac{1}{1!} x(1+x) + \frac{1}{0!} x^2\right)$$
$$= n! \cdot \left(\sum_{p=0}^{n-1} p \cdot (1+x)^2 + 2nx(1+x) + x^2\right)$$

(iii) Par Ex. 3, $(x^n(1+x)^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(k)} ((1+x)^n)^{(n-k)}$

Exercice 5

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f continue sur I et dérivable en $a \in I$.

Soit $\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$

Comme f est continue sur I, ϕ est continue sur $I \setminus \{a\}$. De plus, comme f est dérivable en a, alors $f'(a)$ existe, et $\lim_{x \to a} \phi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \phi(a)$.

Donc, ϕ est continue en a et elle est donc continue en tout point sur I.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe ϕ continue sur I telle que $f(x) = f(a) + (x-a)\phi(x)$, $\forall x \in I$.

Comme $f(x)$ est alors une somme de fonctions continues, elle est continue.

De plus, comme ϕ continue sur I, alors $\lim_{x \to a} \phi(x) = \phi(a)$. On en conclut que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, i.e. que f est dérivable en a.

Par $\boxed{\Rightarrow}$ et $\boxed{\Leftarrow}$, l'équivalence est prouvée.

Exercice 6

$1+x^2>0$, donc $\sqrt{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $\sqrt{1+x^2}>0$.

Comme $1+x^2>x^2$, $\sqrt{1+x^2}>|x|$, donc $x+\sqrt{1+x^2}>0$, et $\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soient $g(x)=1+x^2$ et $h(x)=\sqrt{x}$, alors $f=h\circ h\circ g$.

Donc, $f' = (h\circ h\circ g)' = h'(h(g))\cdot(h(g))' = h'(h(g))\cdot h'(g)\cdot g' = \frac{1}{2}\left((1+x^2)^{1/2}\right)^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\left((1+x^2)^{-1/2}\right)\cdot 2x$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/4}\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\cdot 2x$$

$$= \frac{x}{2}\cdot(1+x^2)^{-3/4} = \underline{\underline{\frac{x}{2(1+x^2)^{3/4}}}}$$

Exercice 7

$$T_4f(x;1) = \sum_{k=0}^{4}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = 1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9\cdot 2}(x-1)^2+\frac{4}{27\cdot 6}(x-1)^3-\frac{28}{81\cdot 24}(x-1)^4$$

$$T_4f(\tfrac{1}{2};1) = 1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{9\cdot 2}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{27\cdot 6}\left(-\frac{1}{8}\right)-\frac{28}{81\cdot 24}\left(\frac{1}{16}\right) = 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{72}-\frac{1}{324}-\frac{7}{7776} \underline{\underline{\simeq 0.815\ldots}}$$

$$\left|T_4f(\tfrac{1}{2};1)-f(\tfrac{1}{2})\right| \leqslant \sup_{c\in(\frac{1}{2},1)}\left|f^{(5)}(c)\cdot\frac{(\frac{1}{2}-1)^5}{5!}\right| = \sup_{c\in(\frac{1}{2},1)}\left|\frac{280}{243}\cdot c^{-13/3}\cdot\frac{-\frac{1}{32}}{120}\right| = \frac{280}{243\cdot 120\cdot 32\cdot\frac{1}{32}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \frac{7}{729}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2})^{1/3}}$$

$$= \frac{7}{729}\cdot\frac{2}{\sqrt[3]{4}} < \frac{7\cdot 4}{729} \underline{\underline{\simeq 0.038\ldots}}$$