Logique et Théorie des Ensembles
Série 08-B

Buff Mathias

Exercice 1. Trouver les bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants.
(pour $a, b \in \mathbb{R}, [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, et $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$). Préciser lorsque ce sont des maximums et minimums. Vous justifierez toutes les réponses.

1. $[2,3)$
2. $[2,3]$
3. $(2,3)$
4. $(2,3]$
5. $[-2,2] \cup (5,8)$
6. $[0,1] + [-3,7] = \{x + y : x \in [0,1], y \in [-3,7]\}$
7. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$
8. $\{x^2 : x \in [-1,4)\}$
9. $\{4 + \frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

Montrons que l'infimum et le supremum d'un intervalle sont les bords de cet intervalle.

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle (preuve similaire pour $(a,b], [a,b), (a,b)$).
Par définition, $\forall x \in [a,b], a \leq x \leq b$, donc a est un minorant et b un majorant de $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe M, majorant de $[a,b]$ tel que $M = b - \varepsilon$. Soit alors $x := \frac{b+M}{2}$, nous avons que $x > M$ et $x < b$ donc $x \in [a,b]$. Alors M ne peut pas être un majorant de $[a,b]$ et on en déduit que b est le supremum de $[a,b]$.

Par le même raisonnement, on peur montrer que a est l'infimum de $[a,b]$.

1. $\inf[2,3) = \min[2,3) = 2, \quad \sup[2,3) = 3, \quad [2,3)$ n'a pas de maximum
2. $\inf[2,3] = \min[2,3] = 2, \quad \sup[2,3] = \max[2,3] = 3$
3. $\inf(2,3) = 2, \quad \sup(2,3) = 3, \quad (2,3)$ n'a ni minimum ni maximum
4. $\inf(2,3] = 2, \quad \sup(2,3] = \max(2,3] = 3, \quad (2,3]$ n'a pas de mimimum
5. $\inf[-2,2] \cup (5,8) = \min \inf[-2,2], \inf(5,8) = -2$ et c'est un minimum
   $\sup[-2,2] \cup (5,8) = \min \sup[-2,2], \sup(5,8) = 8$ et ce n'est pas un maximum
6. $\inf\{x + y : x \in [0,1], y \in [-3,7]\} = \inf[-3,8] = -3$ et c'est un minimum
   $\sup\{x + y : x \in [0,1], y \in [-3,7]\} = \sup[-3,8] = 8$ et c'est un maximum

(vii) Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$. Donc 1 est majorant de E, et comme $1 \in E$, $\max E = \sup E = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$ donc 0 est minorant de E, et par le principe d'Archimède, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$ donc 0 est l'infimum de E.

L'ensemble n'a pas de minimum

(viii) Si $x \in [-1,0)$ alors $x^2 \in (0,1]$
Si $x \in [0,4)$ alors $x^2 \in [0,16)$

Donc, $E = (0,1] \cup [0,16) = [0,16)$.
Il suit que $\min E = \inf E = 0$, $\sup E = 16$, et E n'a pas de maximum.

(ix) Si n est impair : $4 + \frac{1+(-1)^n}{n} = 4 + \frac{0}{n} = 4$
Si n est pair : $4 + \frac{1+(-1)^n}{n} = 4 + \frac{2}{n} > 4$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4 + \frac{1+(-1)^n}{n} \geq 4$ et $4 \in E$, donc $\min E = \inf E = 4$.

$\sup E = \sup(4) + \sup(\{\frac{2}{n} : n \text{ pair}\}) = 4 + 1 = 5$ et $5 \in E$ (pour $n = 2$).
Donc $\max E = \sup E = 5$.

Exercice 2. (Relation d'ordre totale ou partielle, élément maximal) Une relation d'ordre $\leq$ est dite *totale* si $\forall x, y \in E, x \leq y$ ou $y \leq x$, sinon la relation d'ordre est dite *partielle*.
Soit F une partie de E.

1. Dire (en justifiant) si les relations d'ordre suivantes sont partielles ou totales :
   (a) L'inclusion sur E
   (b) La divisibilité sur $\mathbb{N}$
   (c) L'ordre usuel sur $\mathbb{R}$: $x \leq y$ ssi $y - x \geq 0$
   (d) L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ défini par $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$ ssi $x < a$ ou $x = a$ et $y \leq b$
2. Un élément m est un *élément minimal* de F si $m \in F$ et $\forall x \in F, [m \geq x \implies x = m]$.
   Montrer qu'un minorant de F qui est dans F est un élément minimal.
3. Quels sont les éléments minimaux de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ pour la divisibilité sur $\mathbb{N}$? Même question avec $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
   Montrer qu'un élément minimal n'est pas forcément un minorant.
4. Montrer que si l'ordre est total, alors il existe au plus un élément minimal pour F.

1. (a) partielle : Soient $F, G \in E$ t.q. $G = E \setminus F$. Alors $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$
   (b) partielle : 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2.
   (c) totale : Ou bien $y - x \geq 0$, alors $x \leq y$, ou bien $y - x < 0$, alors $y < x$ donc $y \leq x$.
   (d) totale :
   - Si $x < a$ alors $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$
   - Si $a < x$ alors $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$
   - Si $x = a$ et $y \leq b$ alors $(x,y)\mathcal{R}(a,b)$
   - Si $x = a$ et $b \leq y$ alors $(a,b)\mathcal{R}(x,y)$
2. Par définition d'un minorant : $\forall x \in F, x \geq m$. Donc, si $x \in F \leq m$ alors $x = m$, et si $m \in F$ c'est donc un élément minimal.
3. L'élément minimal de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ pour la divisibilité sur $\mathbb{N}$ est 1, car 1 divise tous les éléments de cet ensemble, et son seul diviseur est lui-même.
   Les éléments minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ pour la divisibilité sur $\mathbb{N}$ sont les nombres premiers, car sur cet ensemble ils n'ont qu'eux-mêmes comme diviseur.
   Il suit directement du deuxième exemple qu'un élément minimal n'est pas forcément un minorant.
4. Supposons m et m' deux éléments minimaux de F selon une relation d'ordre totale.

Exercice 3. Soit A un sous-ensemble borné non vide de $\mathbb{R}$. Soit $B = \{|x-y|, x \in A \text{ et } y \in A\}$.
Montrer que

$$\sup B = \sup A - \inf A$$

Sans perte de généralité, supposons $x > y$. Alors, pour $x, y \in A$,
$|x - y| = x - y \leq \sup A - y \leq \sup A - \inf A$. Donc $\sup A - \inf A$ est un majorant de B (*)
Soit $m < \sup A - \inf A$ de sorte que $m = |s - \inf A|, s \in A < \sup A$. Définissons $\delta = \sup A - s$.
Alors, $|s - \inf A| = |(\sup A - \frac{\delta}{2}) - (\inf A + \frac{\delta}{2})|$ et comme $(\sup A - \frac{\delta}{2}), (\inf A + \frac{\delta}{2}) \in A$, alors $|s - \inf A| = m \in B$.
On déduit donc que $\sup A - \inf A \leq \sup B$ (**).
Par (*) et (**), il est montré que $\sup B = \sup A - \inf A$

Exercice 4. Montrer que $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$ ne possède pas de supremum dans $\mathbb{Q}$.

<u>Par l'absurde :</u>
Supposons que le supremum de $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$ existe, et notons-le S. Puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } S - \varepsilon > x$$

Alors, $S - \varepsilon < S$ est un majorant de $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$, ce qui contredit la supposition que S est le supremum de cet ensemble.