Automne 2024   **Algèbre I - Série 5**   Boff Mathias

Exercice 1

(i)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3+L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3-2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{L_3\cdot\frac{1}{4}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1-3L_3 \\ L_2+L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1+2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $x=-4$, $y=-1$, $z=1$, ainsi $\underline{Sol = \{(-4,-1,1)\}}$

(ii)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & -3 & -22 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -3 & -22 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4-3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -13 \\ 0 & 2 & -2 & -16 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3-L_2 \\ L_4-2L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+L_3 \\ L_1-L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc $x=2$, $y=-3$, $z=5$, ainsi $\underline{Sol = \{(2,-3,5)\}}$

(iii)
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ -2 & 10 & 3 & -33 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & -5 & 2 & -15 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_4-L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -27 & 3 & 1 & 18 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3-L_2 \\ L_4-3L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 30 \end{array}\right) \underset{L_4-3L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -5 & -1 & 12 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Après réarrangement des colonnes : $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6] \sim [x_1\ x_3\ x_5\ x_6\ x_2\ x_4]$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -5 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2-L_4 \\ L_3+L_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -5 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1+L_3 \\ L_1+L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

On pose les variables libres suivantes :

$x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_4 = s \in \mathbb{R}$

Alors $x_1 = 4+5t-3s$, $x_3 = 2+9s$, $x_5 = 6$, $x_6 = -6$

Donc $\underline{Sol = \{(4+5t-3s,\ t,\ 2+9s,\ s,\ 6,\ -6) \mid t,s \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b \\ -2 & 3 & 3 & b^2-b+1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{L_2+2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b^2+b+1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{\substack{L_3-L_2 \\ L_1+L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b^2+2b+1 \\ 0 & 1 & 1 & b^2+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -b^2-1 \end{array}\right)$$

D'après la troisième ligne, le système n'admet aucune solution si $-b^2-1 \neq 0$.

(i) $-b^2-1 = 0 \iff b^2 = -1$, donc pour ~~tout~~ tout $b \in \mathbb{R}$, $-b^2-1 \neq 0$ et le système n'a aucune solution.

(ii) $-b^2-1 = 0 \iff b^2 = -1 \iff b = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, donc le système admet une solution pour $\underline{b=i}$ et $\underline{b=-i}$

Par ailleurs, comme la matrice échelonnée possède une variable libre, nous avons alors une infinité de solutions dans ces cas.

Exercice 3

(i) Pour $m=0$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3-L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{L_3\cdot(-\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1-L_3 \\ L_2-L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Donc $\underline{Sol = \{(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\}}$

Exercice 3 (cont.)

(ii) Pour $m=-1$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1\cdot(-1) \\ L_2\cdot\frac{1}{2} \\ L_3\cdot\frac{1}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1+L_2 \\ L_1+L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Donc $\underline{\underline{Sol = \{(0,1,0)\}}}$

(iii) Pour $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-mL_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^2 \end{array}\right) \underset{L_3+L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-2m^2 \end{array}\right)$$

Observons la troisième ligne : $L_3 = (0 \;\; 0 \;\; 2-m-m^2 \mid 1+m-2m^2)$

$2-m-m^2 = (2+m)(1-m)$ et $1+m-2m^2 = (1+2m)(1-m)$ Alors :

- Si $m=-2$, $L_3 = (0\;0\;0 \mid -9)$ et le système ne possède aucune solution.
- Si $m=1$, $L_3 = (0\;0\;0 \mid 0)$ et le système possède une infinité de solutions.
- Pour toutes les autres valeurs de m, L_3 est de la forme $(0\;0\;\alpha \mid *)$, où $\alpha \neq 0$, et le système possède donc une unique solution.

Exercice 4

(i) Observons la matrice $A = (v_1 \; v_2 \; v_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3-2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On constate que la forme échelonnée de A met en évidence 3 pivots. Ainsi, le système linéaire $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = b$ n'admet qu'une unique solution pour chaque $b \in \mathbb{R}^3$.

Donc, les vecteurs colonne de A (i.e. $\{v_1, v_2, v_3\}$) forment une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -9 \end{array}\right) \underset{L_3-2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\cdot(-\frac{1}{3}) \\ L_3\cdot\frac{1}{3}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1-L_3 \\ L_2-L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \underset{L_1-4L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{array}\right)$$

Les coordonées de $(1,3,-6)$ dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ sont donc $\left(-\frac{26}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{11}{3}\right)$.

(iii)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & d \\ 4 & 5 & 6 & d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right)$$
est absurde sauf si $d=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2-4L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2\cdot(-\frac{1}{3})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1-2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

En posant la variable libre : $c = t \in \mathbb{R}$

Nous avons $a=t$, $b=-2t$ et donc $tx_1 - 2tx_2 + tx_3 = 0 \Leftrightarrow t\cdot(x_1 - 2x_2 + x_3) = 0$

Si $t=0$, nous avons la solution triviale $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$

Sinon, alors $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, donc $a=1$, $b=-2$, $c=1$, $d=0$.

Donc, $\underline{\underline{F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}}}$

Exercice 5

Voir Exercice 4.