

# Mathématiques et Marchés Financiers quelle place face à la crise?

Nicole El Karoui

Paris VI, EcolePolytechnique

14 Octobre 2009

# Plan

## 1 Introduction

- Quelques dimensions de la crise
- Une bulle immobilière

## 2 Gestion des risques financiers

- Les méthodes classiques
- Prix et arbitrage
- Le point de vue du vendeur

## 3 Des concepts nouveaux pour des risques nouveaux

- L'informatique
- Portefeuille de couverture
- Calcul stochastique

## 4 Un monde plein d'alea

- Des trajectoires
- Pricing et couverture
- Les limites
- L'aspect numérique

## 5 Le marché réel n'est pas complet. Mesurer le risque résiduel

# La crise financière

## A) La crise des subprimes et la bulle immobilière

- Une crise financière qui donne le **vertige**
- Basée sur une politique économique américaine, où le crédit a remplacé les revenus pour soutenir la croissance.
- la référence devient la richesse immobilière et non le revenu ; spécifique du crédit hypothécaire US
- l'endettement des ménages (**165%**) est financé par l'épargne mondiale

## B) Eclatement d'une bulle amorcée en 2004

- Les subprimes : des pratiques financières très douteuses
- des techniques financières, titrisations...etc qui ont contribué à propager le risque dans le monde entier
- Une crise du crédit avant tout....
- l'intervention des Etats en dernier recours (option)

Pas de réponse simple, un contexte macroéconomique spécifique

# Titrisation des créances immobilières

Comment financer le crédit aux ménages américains ?

- en créant des titres **achetables** par le biais de la titrisation : par exemple les ABS basés sur les crédits (immobiliers)
- nécessaire aussi de minimiser le risque de ces actifs financiers par **leur rating** anormalement élevé ;
- le tout dans un contexte de réglementation déficiente, absence de transparence.

# Gérer le risque financier : Quels moyens ?

## Le netting

- Le plus **simple** : l'échange avec quelqu'un exactement le risque inverse. C'est ce qu'on appelle le **netting**.
- C'est de loin la méthode la plus fréquente.
- L'opération demande une **intermédiation financière** car en général, on ne trouve pas tout seul la contrepartie

### Risque de réputation

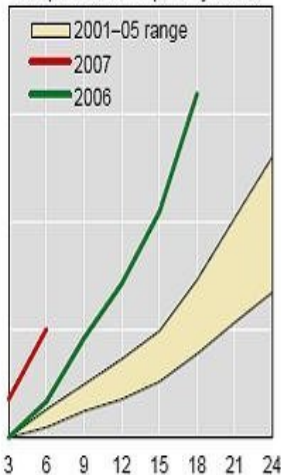
A coûté très cher pendant la crise, notamment sur les CDOs d'ABS, qui ont du être rachetés au client

**Jamais vu de modèles en France sur les CDOs d'ABS**

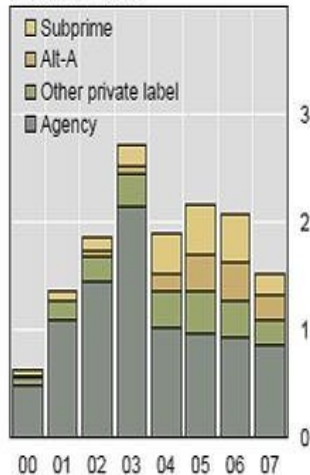
# Les Subprimes

## US mortgage markets

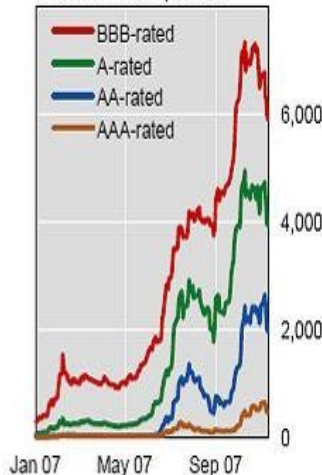
Subprime delinquency rates<sup>1</sup>



MBS issuance<sup>2</sup>



ABX tranche spreads<sup>3</sup>



# Gérer le risque financier (2)

## La titrisation

- la deuxième méthode est **la diversification**, ou "ne pas mettre tous ses oeufs dans le même panier".
- il s'agit de transférer une partie du risque en acceptant d'un prendre un peu d'un autre de nature a priori très différente.
- **la titrisation** est un moyen de faire ce genre d'opération : c'est une opération qui donne de la liquidité, mais qui est aussi utilisée pour **réduire** les fonds propres.
- beaucoup développée depuis une dizaine d'années surtout aux USA, mais moins en France.
- une croissance de 30% depuis 10 ans.

# Gestion des risques (3)

## Les produits dérivés

- Le dernier moyen, pour se garantir contre les aleas du futur, est de **s'assurer** par un contrat qui fixe le prix futur de l'opération.
- Ces produits sont vendus soit dans des marchés organisés (Chicago 1973) soit de gré à gré.
- Les produits de base sont les contrats à terme, forwards ou futures, les swaps d'intérêt et les options.
- **Exemples** *Quand El nino provoque des malheurs dans les pays du Pacifique, on assiste à une flambée des volumes sur les contrats futures de céréales.*
- Swap d'une partie de la dette de l'Etat Français (en 2001) : Agence France Trésor.



# Enjeu Produits dérivés : Gérer le risque

## Des opérations dans le futur

- Réduire le risque financier, c'est à dire les fluctuations adverses, et l'incertitude due au futur.
- Dépendent des titres **sous-jacents**
- a priori autant d'acteurs que de vendeurs car les positions sont symétriques à la hausse ou à la baisse
- les plus classiques sont les **contrats à terme**, forwards ou futures, les **swaps**, et les **options**.
- aussi considérés comme une composante majeure du **risque systémique** car ils peuvent engendrer de grandes pertes, par suite d'un fort **effet de levier**.

# Produits dérivés

## Les variations et les fluctuations des cours

Page 1 of 1



## Exemples

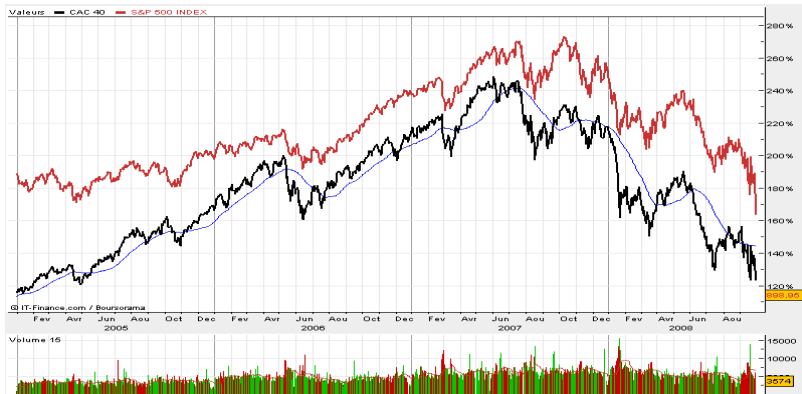
- **Contrats à terme** : le cours de l'opération à échéance est fixé à la date de négociation.
- **Options d'achat ou option de vente**. Le cours fixé dans le contrat est utilisé comme plafond ou comme plancher.  
*L'opération ne sera réalisée au cours fixé que si le cours réel a dépassé le plafond (achat) ou le plancher (vente).*

Cette option a un **prix** que Bachelier a cherché à expliquer.

# Exemples de cours

## Cours d'indices

Page 1 of 1



# Un peu d'histoire (en France)

**Années 80** : les marchés de capitaux décollent,  
**MATIF, MONEP**



- Taux, courbe de taux
  - Futures, options
- Evaluation, Arbitrage*  
*Couverture statique*

**Années 90** : Ingénieurs en salle de marché  
**Gestion quantitative**  
**Mesure des risques**  
de **marché**



- Options exotiques
- Dérivés de taux
- Optimisation de portefeuille
- Modèles internes

**Depuis 2000** : Développement du marché Euro

**Développement du**  
**crédit**



- Evaluation complexe*  
*Estimation, Optimisation*  
*Modèles de risque, VaR*
- Crédit, ABS, CDO
- Modèles de crédit*  
*Modèle de corrélation*

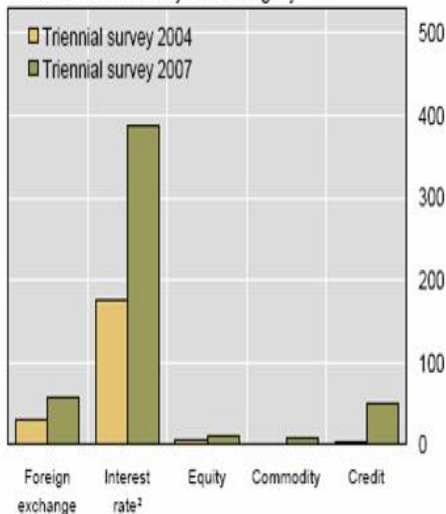
# Positions in OTC derivatives markets

In trillions of US dollars<sup>1</sup>

## Open positions

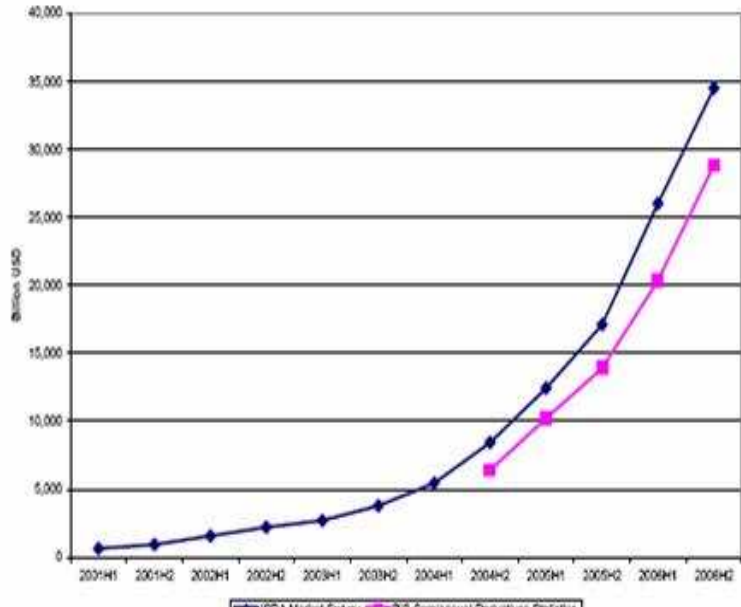


## Notional amounts by risk category



<sup>1</sup> All figures are adjusted for double-counting. <sup>2</sup> Single currency contracts only

Figure 1: Notional amounts of credit derivatives outstanding



# Prix et arbitrage

## Quelques remarques de bon sens

- Si un contrat garantit plus qu'un autre, il doit être plus cher
- si un flux garanti est décomposable en somme de flux de prix connus, son prix doit être la somme des prix.

## Arbitrage et Règle du prix unique

- Un **arbitrage** est une stratégie qui permet de faire *un profit à coup sûr* sans mise de fond, **possibilité exclue dans un marché liquide**.
- Plus généralement, deux opérations financières qui conduisent aux mêmes flux dans le futur ont la même valeur à toute date intermédiaire. C'est **la règle du prix unique**

**Liquidité et faibles couts de transaction sont fondamentaux**



# Calcul du prix à terme

Comme immédiate conséquence de la règle du prix unique

## Le prix d'un contrat à terme

Le **prix à terme** sur un actif **négocié** se calcule à partir des **données de marché**, **sans modèle**. C'est **la valeur d'aujourd'hui du sous-jacent** capitalisée de l'intérêt.

La même règle vaut pour l'évaluation des **swaps** (pas de modèle)

On voit qu'on est dans un monde idéal....

# Pricing des options

- Dans le cas des **options**, l'exercice est plus compliqué et ne peut se déduire des prix de marché
  - Le point de vue naïf face à ces flux **incertains**, est de calculer une *valeur estimée* des flux futurs.
  - L'analyse peut être basée sur l'observation des **cours passés** (statistique ou historique),
  - ou sur le point de vue des **experts**, soit souvent sur un mixte des deux.

Une fois le contrat conclu, l'acheteur ne s'en préoccupe plus jusqu'à l'échéance, date où il observe si sa position est gagnante ou non.

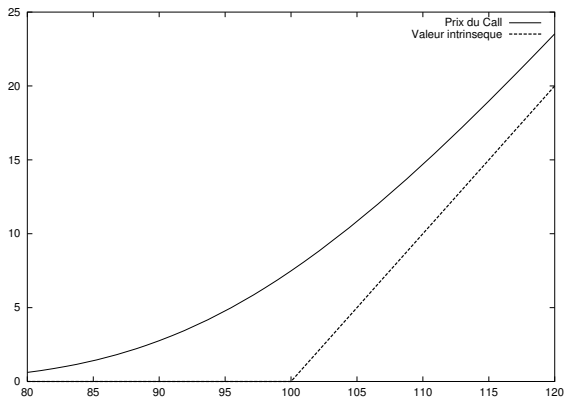
# Premier bilan

On a des preuves de l'existence d'options sur les récoltes de blé dans l'Antiquité. Ce qui est nouveau :

- L'ampleur des liquidités qui circulent dans le marché (retraite=3000 Mds dollars) et le nombre de personnes concernées
  - le nombre de supports concernés, action, taux, change, matières premières, catbond, énergie.
  - L'impact des marchés organisés, producteurs d'**information** et de liquidités
- 
- On est passé du stade artisanal au stade industriel, et avec faibles marges sur les produits très liquides.
  - Les risques sont amplifiés par les montants mis en oeuvre, d'autant que ces produits ont des forts effets de levier.
  - Ceux qui n'ont pas mesuré cela ont souvent fait **faillite**, ou en ont entraîné d'autres

# Les risques du vendeur

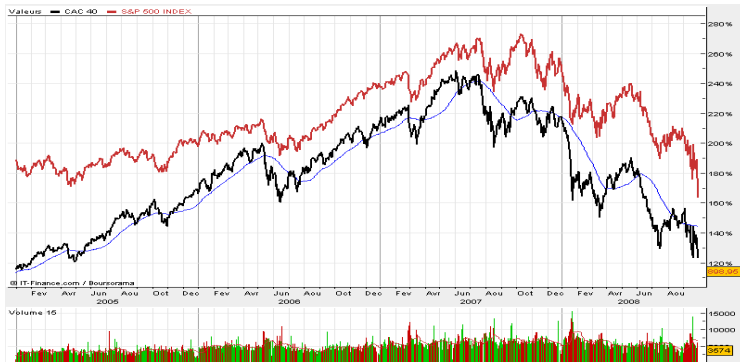
## Profil de risque d'une option d'achat



# Les risques du vendeur (2)

## Les variations et les fluctuations des cours

Page 1 of 1



# Les risques du vendeur (2)

## Les variations et les fluctuations des cours

Page 1 of 1



# L'informatique

Outils et concepts sont venus de l'extérieur.

- En 1988 IBM déteint le marché des “gros ordinateurs” (1000 fois moins puissants qu'un portable)
- Capacité de stocker beaucoup de de données
- L'information commence à être cotée en temps réel
- Possibilité de communiquer entre différentes places financières.

**Avantage comparatif** aux banques qui ont su organiser leur informatique et le maintien des bases de données. **Même enjeu maintenant**

# Les idées

Deux jeunes universitaires américains **Black et Scholes** proposent dans un article (1973) d'introduire **la théorie du portefeuille** dans le monde des options. Ils observent que :

- Les titres assurés sont **échangeables** dans le marché, et on peut suivre leur cours au jour le jour)
- Il doit être possible d'utiliser ces informations pour réduire les risques inhérents aux contrats de maturité longue par des ajustements fréquents)
- L'outil d'ajustement est un portefeuille, c'est à dire le résultat d'investissements quotidiens (autofinançant) dans l'actif et dont la mise initiale est la prime du contrat)
- La qualité de la stratégie dynamique est mesurée à travers la valeur terminale (liquidative) de ce portefeuille. Plus elle est proche de la valeur du flux garanti, plus elle est efficace.



# Une révolution conceptuelle

## Des concepts nouveaux

La révolution est d'ampleur puisque le problème n'est plus **d'estimer des pertes potentielles** mais de les réduire de manière dynamique.

“Le suivi de marché devient la réalité objective”(Nicolas Bouleau)

# Des outils mathématiques sophistiqués

Est-il possible de représenter les variations des cours par un modèle ou une simulation ?

*la trajectoire ressemble à celle d'un ivrogne qui changerait d'orientation au hasard à chaque étape*

- point de vue de **Bachelier** puis de **Einstein** en 1905 pour modéliser la trajectoire des atomes : le problème se retrouve aussi en signal et dans beaucoup d'autres domaines
- moyens informatiques puissants car beaucoup de **tirages** à faire.
- Toute la technologie repose sur des théories en probabilité développées à partir des **années 1930**.

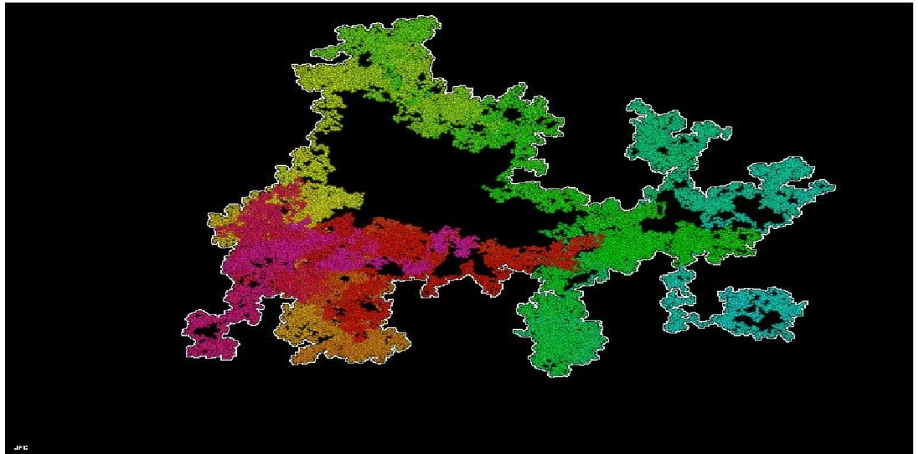
# Un monde dynamique plein d'alea...

L'incertain est modélisé via une famille de trajectoires possibles continues modélisant le cours de l'actif.

## Exemple de Trajectoires browniennes



# Mouvement Brownien en 2D



Merci à J.F Colonna (CMAP)

# Le calcul stochastique

- Par hyp, les trajectoires ont une **variation quadratique finie** :  
 $(D_n)$ =suites de partitions dyadics

$$[X]_t(\omega) = \lim_n \sum_{t_i \leq t, t_i \in D_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad (1)$$

- Formule d'Itô**

$$f(t, X_t)(\omega) = f(0, x_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)(\omega) dX_s(\omega) \quad (2)$$

$$\int_0^t f'_t(s, X_s)(\omega) dt + \int_0^t \frac{1}{2} f''_{xx}(s, X_s)(\omega) d[X]_s(\omega) \quad (3)$$

# Intégrale d'Itô et portefeuille

- La première intégrale existe comme une intégrale stochastique, limite de ses sommes de Riemann adaptées, (où nous posons  $\delta_t = F'_x(t, X_t)$ )

$$\sum_{t_i \leq t, t_i \in D_n} \delta_{t_i}(\omega)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(\omega).$$

- D'un point de vue financier, l'intégrale d'Ito est le processus de gain d'une stratégie de trading.
- $\delta_t$  est le nombre de titres à détenir
- La première hypothèse (adaptée) traduit que les prices de décision n'anticipent pas sur le futur.

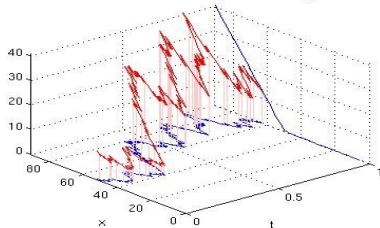
# Couvrir un dérivé, un problème de cible aléatoire

- Par absence d'arbitrage, le prix d'un dérivé est celui du portefeuille qui le réplique.
- Le message incroyable de Black et Scholes est qu'une couverture parfaite est possible.
- Si la cible est une fonction de l'action à maturité, il suffit de prendre la formule d'Itô à l'envers et d'annuler tous les termes en " $dt$ ";

# Couvrir un Call(50,50)

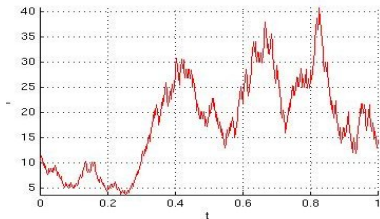
red= valeur du portefeuille, green= partie risquée du portefeuille

simulation of stochastic phenomena:  $Y(t)$

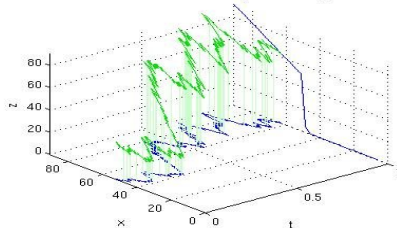


center

right



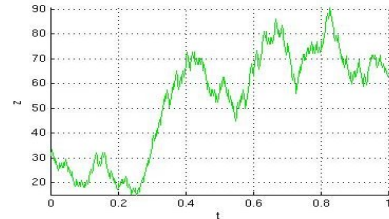
simulation of stochastic phenomena:  $z(t)$



up

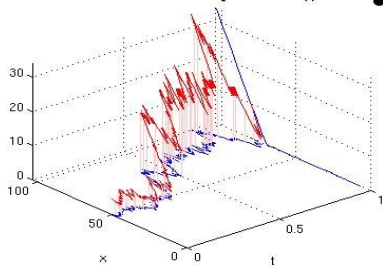
more

Close



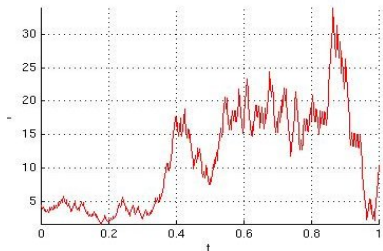
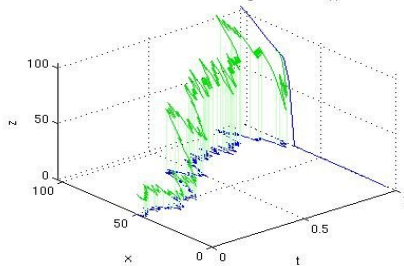


# Couvrir un Call(50,70)

simulation of stochastic phenomena:  $Y(t)$ 

center

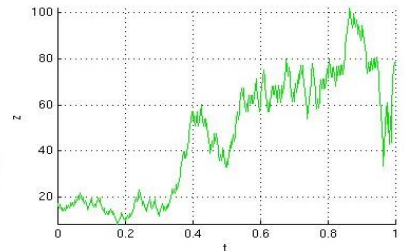
right

simulation of stochastic phenomena:  $z(t)$ 

up

more

Close



# L'équation aux dérivées partielles de pricing

Supposons que la variation quadratique vérifie :

$$d[X]_t(\omega) = \sigma^2(t, X_t(\omega)) X_t^2(\omega) dt.$$

La fonction  $\sigma^2(t, X_t(\omega))$  est un paramètre clé des marchés, appelé la **volatilité**.

## Theorem (Evaluation et couverture)

*Soit  $u$  une solution régulière de l'EDP de pricing*

$$u'_t(t, x) + \frac{1}{2} u''_{xx}(t, x) x^2 \sigma^2(t, x) + u'_x(t, x) x r - u(t, x) r = 0, \quad u(T, x) = h(x)$$

*$u(t, X_t)$  est le prix en  $t$  de l'option et le portefeuille de couverture est donné par*

$$\delta(t, X_t) = u'_x(t, X_t)$$

# La probabilité d'évaluation

## Le prix est quand même une valeur moyenne !

- **Définition** Soit  $q(t, x, T, y)$  la solution fondamentale de l'EDP.
- La règle pricing devient  $u(t, x) = \int h(y)q(t, x, T, y)dy$
- Sous des hypothèses supplémentaires, il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  telle que

$$u(t, x, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ h(X_T) | X_t = x \right]$$

- Lorsque la volatilité  $\sigma$  est déterministe, le noyau de pricing est connu (log-normal) et conduit à des formules explicites
- La plus connue est la formule de Black Sholes pour les options d'achat.
- La quantité de titre à détenir est explicite et est toujours plus petite que 1 dans le monde de Black et Scholes.

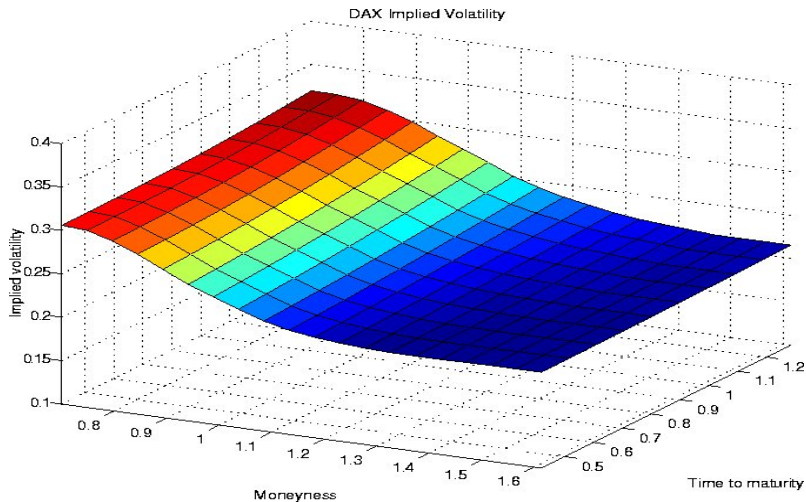
# L'identification des paramètres

- En général, le marché n'utilise pas les données passées du spot, mais les prix du jour des options côtées. Cela n'est possible car **seul un paramètre est inconnu**.
- Ils traduisent l'information donnée par les prix d'options côtés dans le marché en terme d'un paramètre dans la formule de BS. C'est de qu'on appelle la **volatilité implicite**  $\Sigma^{imp}$ .

$$C^{obs}(T, K) = C^{BS}(t_0, x_0, T, K, \Sigma^{imp})$$

- La couverture est facile à calculer quotidiennement en utilisant la volatilité implicite

# Surface de volatilité implicite



# Les limites

## A propos des hypothèses

- J'ai présenté une problématique idéale, assez robuste, et très utilisée.
- Elle est plus simple et plus robuste à mettre en oeuvre sur un sous-jacent que sur plusieurs.
- Elle sous-entend que le risque résiduel est petit, ce qui est difficile à tester.
- La procédure de calibration n'est pas très stable et est difficile à mettre en oeuvre sur des produits plus complexes.
- Il s'agit en fait de résoudre des problèmes **inverses** “**mal-posés**” au sens de l'analyse numérique, difficiles en plusieurs dimensions.
- Comme toujours en finance, on a l'impression d'avoir à faire à un problème classique, mais ce n'est en général pas le cas.

# L'aspect numérique

Les méthodes numériques, efficaces et rapides pour obtenir des prix et des hedges en quelques secondes sont très importantes. **Méthodes numériques probabilistes**

- Les méthodes probabilistes se sont imposées dans les problèmes de grande dimension, grâce aux nouvelles capacités de calcul offertes par les ordinateurs.
- Les **méthodes de Monte Carlo**, basées sur la simulation d'un grand nombre de scénarios sont efficaces en général, si on fait des petites transformations astucieuses pour réduire la variance de la variable dont on calcule l'espérance.
- Dans la salle de marché, il faut trouver des méthodes plus systématiques, car il est nécessaire de pouvoir calculer facilement la valorisation de l'activité agrégée.

# Value at Risk

Fondamentalement, il est rare qu'on puisse couvrir tous les risques, il faut donc mesurer l'exposition résiduelle.

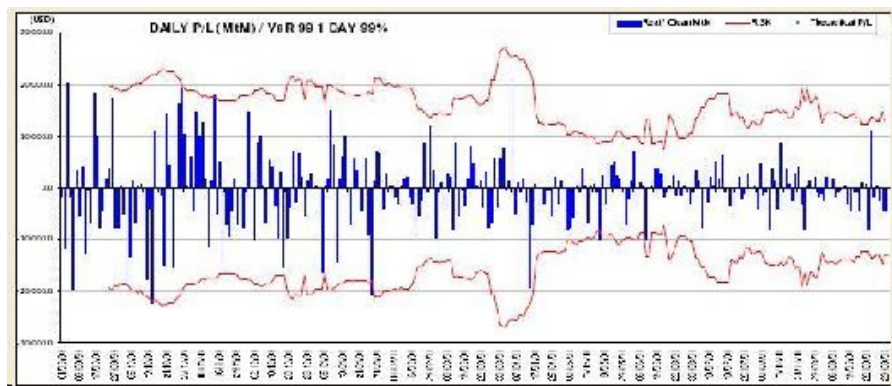
- La mesure traditionnelle est la **variance** de l'erreur de réplcation. Un nouveau critère qui prend en compte les événements extrêmes est maintenant utilisé.
- Le critère de VaR, qui correspond au niveau maximal de pertes acceptable avec une probabilité donnée (95%) a pris beaucoup d'importance ces dernières années.

$$V@R_{\varepsilon}(X) = \inf \{k : \mathbb{P}(X + k < 0) \leq \varepsilon\}.$$

- Les autorités de régulation exigent un chiffre de VaR quotidien sur l'activité agrégée de la salle de marché. Avec une incidence sur les fonds propres.
- Les processus de Levy, aux “distribution de queues” plus épaisses sont utilisés en optimisation de portefeuille et stress-testing.



# Daily V@R



# Mesure de risque convexe et monétaire

Un large débat a animé la communauté académique et un peu la professionnelle sur la performance de la VaR comme mesure de risque.

- Axiomatiquement, elles doivent vérifier les mêmes propriétés que la VaR mais être **convexes**
- Elles se représentent alors comme des mesures de type pire-cas, cash invariantes

## Theorem

Il existe une **fonction de pénalité**  $\alpha$ , telle que

$$\rho(\Psi) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}} \{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(-\Psi) - \alpha(\mathbb{Q}) \}$$

- La version dynamique est une **équation stochastique rétrograde** de la forme

# Les mathématiques face à la crise

## La dimension technique

- La pratique de la couverture quotidienne a tendance à faire perdre la vue d'ensemble du marché
- La calibration aux prix de marché est un facteur de myopie.
- Le fait d'appliquer la même méthodologie dans tous les marchés tend à minimiser l'importance de la spécificité des marchés
- Le postulat que les options n'influent pas sur la valeur du sous-jacent est clairement à remettre en cause partiellement
- dans les nouveaux marchés, il faut être très vigilant sur les risques.
- la question de la taille des pauses est difficile à contrôler
- l'augmentation de l'activité a conduit à la recherche de **solutions automatiques** qui minimise la recherche de risques par produits

# D'autres mathématiques, d'autres marchés

- Mathématiques des produits dérivés,
- mais pas celles de l'Asset management
- pas celles des hedge funds, de l'arbitrage statistique et des données hautes fréquences

Il y a beaucoup d'innovations maintenant dans ces domaines, à cause des nouveaux moyens de calcul.

# Puissance informatique

- Evolution vertigineuse
- un ordinateur personnel calcule a des dizaines de milliards de flops par seconde.
- Les nouveaux ordinateurs peuvent arriver à des niveaux mille fois plus élevés= teraflops

# Calcul haute performance

- Une grande puissance de calcul obtenue avec une seule grande machine
- Les premiers petaflops=1000 teraflops, CRAY, IBM
- complémentaire du calcul distribué.
- Applications
  - Bioinformatique
  - Energie alternative
  - Physique des particules
  - Meteo
  - Risques dont les risques financiers ;

# La simulation de grande puissance

- est un enjeu européen :
- creusera le fossé entre ceux qui seront équipés et les autres
- fondamentale pour l'industrie financières, pour la gestion des risques et des flux
- permettrait d'avoir un observatoire des flux de marché
- Demande d'anticiper les besoins de formation et de réflexion dans tous les domaines
- Ex : Plan national suisse pour le CHP, réflexion CNRS, et du CEA

# En conclusion

- les mathématiques auraient sans doute pu mieux faire, mais il ne faut pas oublier que le business des produits dérivés et des contrats à terme n'existerait pas sans liquidité et faibles coûts de transaction.
- Par nature, les modèles ne font pas être adaptés pour les crises, ce qui ne veut pas dire qu'il ne faut pas réfléchir aux problèmes alternatifs.
- Les véritables enjeux pour l'avenir me semblent plutôt être dans le suivi et la maîtrise des nouveaux outils informatiques
- qui vont offrir des possibilités énormes dans la gestion des risques, mais vont aussi compliquer sérieusement le suivi de marché.



# La formation

- nous avons été dans une bulle pour la formation
- les débouchés vont être durs dans les années à venir
- plus que jamais il faut former des gens compétents, techniquement, financièrement et éthiquement.
- les marchés ne vont pas disparaître, au contraire, ils vont continuer à s'appuyer sur les moyens High Tech qui sont à leur disposition.
- Comment surveiller et contrôler cette activité. On surveille bien les médicaments, la nourriture, pourquoi pas les marchés.
- Comment former mieux les gens intéressés. ?

# En guise de conclusion

- Comme scientifique dans le monde réel, je suis responsable des conséquences de mon activité de formation et de recherche, qui a pu contribuer indirectement à prendre plus de risques.
- Moins de mathématiques dans l'avenir, je ne crois pas. Les risques doivent être mieux compris et mieux modélisés.
- En même temps, on doit absolument arriver à contrôler les bulles.