Réduction des endomorphismes (et un peu plus)

On trouve un joli et très court résumé du problème et de sa résolution chez Troesch (chap. IV.6). Toujours par Troesch, on consultera quelques rappels et compléments pour vérifier que tout soit bien à jour.

On divise l'introduction à ce sujet en trois temps :
— rester dans la continuité du cours de S3 avec le livre de Grifone, *Algèbre linéaire* (chapitre 6),
— l'enrichir avec le cours suivant, son complément et son TD_1, son TD_2 et d'autres TD, d'autres exos voire même avec le cours de Pierre-Jean Hormière (qui ne se trouve plus sur internet),
— aborder d'une nouvelle manière la théorie avec le Dedieu-Lamy (à partir du chapitre 6 essentiellement).

Ultimement, le graal serait de pouvoir comprendre deux ou trois choses au livre de Mneimné, *Réduction des endomorphismes*. Sans doute que le Mansuy-Mneimné peut aider à s'y préparer.

On peut également trouver plein d'informations intéressantes dans des sujets de concours. On en présente quelques uns (on reste pour l'instant sur du classique, sur des choses dans la mentalité franco-française) :
— **[X 1996]** Trigonalisation de algèbres nilpotentes,
— **[Mines 2001]** Co-diagonalisation,
— **[HX3 2003]** Réduction des endomorphismes nilpotents,
— **[X 2003]** Trigonalisation simultanée d'endomorphismes unipotents,
— **[ENS 2004]** Actions de groupes,
— **[X 2007]** Endomorphismes vérifiant certaines relations de commutation,
— **[EPITA 2008]**, Dérivations d'une algèbre de matrices carrées,
— **[Mines 2011]** Critère de diagonalisation de Klarès,
— **[ENS 2011]** Classes de conjugaison des matrices nilpotentes,
— **[Centrale 2015]** Sous-espaces stables par un endomorphisme,
— **[Agrégation externe 2017]** Questions autour de la réduction,
— **[EPITA 2019]** Série entière matricielle et polynôme d'interpolation matricielle,
— **[Centrale 2019]** Réduction des sous-algèbres de $\mathscr{L}(E)$, Endomorphismes cycliques,
— **[X/ENS 2020]** Matrices symétriques à coefficients rationnels.

Pour toujours plus d'exercices, il y a l'inépuisable CPGE Dupuy de Lôme, on peut aussi piocher dans le Gourdon, *Algèbre* (en particulier l'annexe B).

On fait enfin figurer quelques articles de la RMS :
— Les matrices symétriques sont-elles vraiment diagonalisables ?
— Réduction de Jordan par la méthode des matrices bloc.

— Réduction des endomorphismes semi-linéaires.
— Quelques résultats sur la réduction des applications semi-linéaires.
— Sur la réduction des endomorphismes localement nilpotents, partie 1, 2, 3.
— Tableaux de Young et réduction des matrices carrées.
— Réduction locale de matrices à paramètres.
— Réduction des endomorphismes normaux.

On ne sait pas encore dans quelle direction s'orienter, quel sera précisément la problématique. On accumule pour l'instant.

Réduction 1. Grifone. On fixe E un espace vectoriel de dimension finie sur k. Soient $f \in \mathscr{L}_k(E)$ et $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \left\| f(e_1) \quad f(e_2) \quad \ldots \quad f(e_n) \right\|_{\mathscr{E}}$. Cherchons les bases de E dans lesquelles la forme de la matrice de f est la plus "simple" (diagonale, triangulaire).

Définition 1. *L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{E}$ de E dans laquelle on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pour des coefficients a_i dans le corps de base. L'endomorphisme sera dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure ou inférieure.*

Le problème se traduit matriciellement par la recherche de matrices semblables.

Définition 2. *Soit $f \in \mathscr{L}_k(E)$. Un vecteur $v \in E$ est dit vecteur propre de f si :*

1. *$v \neq 0$,*
2. *$\exists \lambda \in k, f(v) = \lambda v$.*

Le scalaire λ est dit valeur propre associée à v. On appelle spectre de f l'ensemble des valeurs propres de f. On le note $\mathrm{Sp}_k(f)$.

En pratique, une fois que l'on a trouvé les valeurs propres, on détermine (en résolvant un système d'équations linéaires) les vecteurs propres.

La philosophie est que diagonaliser c'est chercher une base de vecteurs propres : l'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Remarquons de plus que si λ est valeur propre, alors $f - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas injectif, ce qui signifie (en dimension finie) que $\det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$. Sans perte de généralité, on peut également considérer $\det(\lambda \mathrm{Id} - f) = 0$. Tout dépend de si l'on a envie de se traîner des $(-1)^n$ ou pas. En développant le déterminant on obtient un polynôme de degré n. Les valeurs propres en sont donc racines. On appelle alors polynôme caractéristique de f le polynôme $P_f(X) = \det(X\mathrm{Id} - f)$. On peut alors faire le jeu de la conversion endomorphisme $\rightleftarrows$ matrice en considérant $P_M(X) = \det(XI_n - M)$. Notons simplement que le déterminant ne dépend dans de la base dans laquelle on le calcule. Ainsi, le choix d'une base n'a aucune incidence sur le polynôme caractéristique.

Définition 3. *Soit $\lambda \in k$. On note $E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E dit espace propre correspondant à λ. On appelle $\dim(E_\lambda)$ la multiplicité géométrique de λ.*

Si λ n'est pas valeur propre, alors E_λ est réduit à $\{0\}$. Si λ est valeur propre, alors E_λ contient 0 et l'ensemble des vecteurs propres associés à λ. (Précisons que si v est vecteur propre, alors il en est de même de μv pour μ scalaire.)

Proposition 4. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts. Alors les espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.*

Ces espaces sont en somme directe mais peuvent ne pas "remplir" tout E. C'est là le problème de la diagonalisation. On résume alors ce fait dans le théorème suivant.

Théorème 5. *Soit f un endomorphisme et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est diagonalisable,*
2. *E est somme directe d'espaces propres : $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$,*
3. $\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots \dim(E_{\lambda_p})$.

On voit par exemple que E est diagonalisable si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes (la réciproque est fausse).

Lorsque λ est une valeur propre d'ordre α (cad. λ est une racine d'ordre α de $P_f(X)$, on dira que λ est de multiplicité algébrique α), on a $\dim(E_\lambda) \leq \alpha$.

Théorème 6 (Critère de diagonalisabilité)**.** *L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, l'on a que :*

1. *le polynôme caractéristique P_f est scindé sur k, cad. si :*

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \tag{1}$$

   avec $\lambda_i \in k$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$,

2. *les dimensions des espaces propres sont maximales :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i. \tag{2}$$

Trois exemples typiques d'utilisation de la réduction des endomorphismes portent sur le calcul des puissances d'une matrice, la résolution d'un système de suites récurrentes et celui d'un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Traitons désormais le cas de la trigonalisabilité (propriété moins restrictive que la diagonalisabilité).

Théorème 7. *Un endomorphisme est trigonalisable dans k si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé dans k.*

Corollaire 8. *Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. C'est en particulier le cas d'une matrice à coefficients réels (cependant les coefficients de la matrice triangulaire semblable ne sont en général pas réels mais complexes). Plus généralement, toute matrice à coefficients dans k est trigonalisable sur la clôture algébrique de k (que l'on note K).*

Corollaire 9. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(k)$ et $\mathrm{Sp}_K(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. On a alors :*

$$\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_p \tag{3}$$
$$\det(A) = \lambda_1 \ldots \lambda_p. \tag{4}$$

La démonstration repose sur le fait que deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant.

Grâce aux polynômes annulateurs on va pouvoir s'affranchir de la recherche des espaces propres et de la discussion de leur dimension.

Définition 10. *Soit f un endomorphisme. Un polynôme $Q \in k[X]$ est dit annulateur de f si $Q(f) = 0$.*

Remarquons que le spectre de f figure dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur Q de f. Notons donc que toutes les racines de Q ne sont donc pas nécessairement des valeurs propres de f.

Théorème 11 (Cayley-Hamilton)**.** *Soit f un endomorphisme. Le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f.*

Notons que parmi l'ensemble des polynômes annulateurs de f, si f est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur qui est scindé et qui a toutes ses racines simples. On montre que la réciproque est également vraie.

Théorème 12. *Un endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur de f scindé et n'ayant que des racines simples.*

Lemme 13 (Lemme des noyaux)**.** *Soit f un endomorphisme et $Q(X) = Q_1(X) \ldots Q_p(X)$ un polynôme factorisé en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux. Si $Q(f) = 0$, alors :*

$$E = \ker Q_1(f) \oplus \ldots \oplus \ker Q_p(f). \tag{5}$$

Notons que l'on utilise (un peu) d'arithmétique pour démontrer le lemme des noyaux (théorème de Bézout pour les polynômes).

Connaissant le polynôme caractéristique de f et sachant qu'il est annulateur de f (théorème de Cayley-Hamilton), on peut alors en déduire une décomposition de E en somme directe.

On introduit un nouvel invariant (de similitude) : le polynôme minimal. On va se rendre compte que, combiné au théorème de Cayley-Hamilton, il donne une méthode de construction systématique de tous les polynômes annulateurs de f.

Définition 14. *On appelle polynôme minimal de f, noté $m_f(X)$, le polynôme normalisé annulateur de f de plus petit degré. Le polynôme minimal est unique et l'on a $m_f(f) = 0$ par construction. Ses racines sont donc les mêmes que $P_f(X)$ mais avec une multiplicité (en général) différente.*

Proposition 15. *Les polynômes annulateurs de f sont les polynômes de la forme :*

$$Q(X) = A(X)m_f(X), \text{ avec } A \in k[X]. \tag{6}$$

Théorème 16. *Un endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé et si toutes ses racines sont simples.*

Un autre mode de réduction (en plus de la diagonalisation et la trigonalisation) est possible : la réduction en blocs triangulaires / selon les espaces caractéristiques.

Définition 17. *Soit $P_f(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \dots (X - \alpha_p)^{\alpha_p}$ (avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$). On appelle espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i le sous-espace vectoriel suivant :*

$$N_{\lambda_i} = \ker(\lambda_i \mathrm{Id} - f)^{\alpha_i}. \tag{7}$$

On a l'inclusion $E_\lambda \subset N_\lambda$ et une propriété de stabilité : $f(N_\lambda) \subset N_\lambda$.

Théorème 18. *Soit f un endomorphisme. On suppose que $P_f(X)$ défini comme ci-dessus est scindé. Il existe alors une base $\mathscr{B} = \{\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p\}$ de E, avec $\mathscr{B}_i$ une base de N_{λ_i}, telle que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
\lambda_1 & & * & & & & & & & 0 \\
& \ddots & & & & & & & & \\
0 & & \lambda_1 & & & & & & & \\
\hline
& & & \lambda_2 & & * & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & \\
& & & 0 & & \lambda_2 & & & & \\
\hline
& & & & & & \ddots & & & \\
& & & & & & & \ddots & & \\
\hline
& & & & & & & \lambda_p & & * \\
& & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & & 0 & & \lambda_p
\end{array}\right) \tag{8}$$

où chaque bloc de diagonale λ_i est de taille $\alpha_i \times \alpha_i$. On a plus précisément :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i}(f|_{N_{\lambda_i}}) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Grâce au théorème 18, on obtient la décomposition de Dunford.

Théorème 19. *Soit f un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors f se décompose d'une unique manière sous la forme $f = d + n$ où d est un endomorphisme diagonalisable et n un endomorphisme nilpotent commutant avec d.*

En particulier, une élément A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ se décompose d'une unique manière sous la forme $A = D + N$ avec D une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente qui commute avec D. On peut faire la même remarque pour $\mathscr{M}_n(K)$ où K est la clôture algébrique de k (puisque le polynôme caractéristique est nécessairement scindé sur K).

Deux petites remarques (utile pour la démonstration de la décomposition de Dunford) : la somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent est un endomorphisme diagonalisable et la somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent est un endomorphisme nilpotent.

On peut aller encore un petit peu plus loin en réduisant chaque bloc à une forme "minimale" (diagonale) lorsque c'est possible. Grâce à la théorie de Jordan on arrive à ce que l'on peut considérer comme l'ultime réduction, aboutissant ainsi à une classification des matrices à la relation d'équivalence près "A est semblable à B" (ou de manière équivalente, "A et B représentent le même endomorphisme").

Notons que l'on a déjà rencontré bon nombre d'invariants de similitude permettant de classifier les matrices selon ladite relation d'équivalence (trace, rang, polynôme caractéristique, minimal, dimension...). Certains sont plus importants et plus fins voire utiles que d'autres.

On cherche un système complet d'invariants (de similitude) tels que si deux matrices ont les mêmes invariants alors elles sont semblables [1] (cad. représentent le même endomorphisme en des bases différentes).

Définition 20. *On appelle bloc de Jordan une matrice carrée du type :*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}. \tag{10}$$

On a logiquement que $P_J(X) = (X-\lambda)^n = m_J(X)$ et $\dim(E_\lambda) = 1$.

Théorème 21. *Soit f un endomorphisme, on suppose que $P_f(X)$ est scindé.*

1. *Supposons d'abord que f n'ait qu'une seule valeur propre et que $P_f(X) = (X-\lambda)^n$ et $m_f(X) = (X-\lambda)^\beta$ avec $\dim(E_\lambda) = \gamma$. Il existe alors une base $\mathscr{B}$ de E telle que :*

$$\tilde{J}(\lambda) := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & & & 0 \\ & \boxed{J_2(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_\gamma(\lambda)} \end{pmatrix} \tag{11}$$

   où les $J_k(\lambda)$ sont des blocs de Jordan, l'ordre du plus grand bloc est β et on a γ blocs.

1. On verra (sans doute) plus tard comment la notion d'action par conjugaison généralise cela. On retrouvera donc toute la théorie habituelle en considérant les relations de conjugaison sur $\mathrm{GL}_n(k)$. Notion d'action de groupes sur des espaces de matrices etc...

2. *Si f admet les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, c'est-à-dire si :*
$$P_f(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X-\lambda_p)^{\alpha_p} \tag{12}$$
alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1(\lambda) & & & 0 \\ & \boxed{\tilde{J}_2(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{J}_\gamma(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

(Démonstration non évidente.)
Remarquons qu'une matrice sous la forme de Jordan est diagonalisable si, et seulement si, elle est déjà sous forme diagonale.

Corollaire 22. *Deux matrices de $\mathscr{M}_n(k)$, dont les polynômes caractéristiques sont scindés, sont semblables si, et seulement si, elles ont la même réduite de Jordan (à l'ordre des blocs près). Dit autrement, si une matrice carrée a son polynôme caractéristique scindé alors l'ensemble des valeurs propres (avec leurs ordres) et les dimensions des blocs de Jordan associées à chaque valeur propre forment un système complet d'invariants.*

Réduction 2. Compléments.

Réduction 3. Dedieu-Lamy.