Un peu de géométrie projective

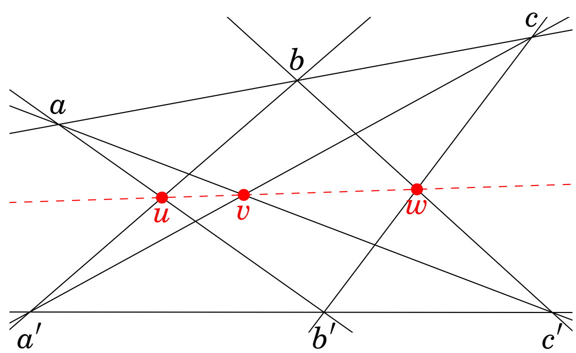
Deux manières d'aborder la géométrie projective sont envisageables : une axiomatique et une algébrique. On souhaite prouver que ces deux approches sont essentiellement les mêmes. Nous allons suivre les traces du Perrin – *Partie 1. Géométrie projective linéaire*.

Théorème 1 (Chou-vert et vert-chou)**.** *Soit* $\mathbf{P}$ *un plan projectif défini axiomatiquement. Il existe un corps commutatif* k*, un* k*-espace vectoriel* E *de dimension* 3 *et une bijection* $\Phi : \mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}$ *telle que les droites de* $\mathbf{P}$ *soient exactement les images des droites de* $\mathbf{P}(E)$.

Il convient de préciser ce que l'on entend par la définition axiomatique du plan projectif.

Définition 2 (Plan projectif)**.** *On appelle plan projectif axiomatique la donnée d'un ensemble* $\mathbf{P}$ *dont les éléments sont appelés points et d'un ensemble* $\mathscr{D}$ *de parties de* $\mathbf{P}$ *dont les éléments sont appelés droites, vérifiant les axiomes suivants :*

- *(P1) par deux points distincts passe une droite et une seule,*
- *(P2) deux droites se coupent en un point au moins,*
- *(P3) il existe trois points non alignés,*
- *(P4) toute droite contient au moins trois points,*
- *(P5) le théorème de Pappus* [1] *est vrai dans* $\mathbf{P}$*, c'est-à-dire :*
  soient D *et* D' *deux droites distinctes de* $\mathscr{D}$ *se coupant en* O *et soient* a, b, c *(resp.* a', b', c'*) trois points distincts de* D *(resp. de* D'*) distincts de* O*. On appelle respectivement* u, v, w *les points d'intersection des droites* (ab') *et* $(a'b)$*,* (ac') *et* $(a'c)$*,* (bc') *et* $(b'c)$*. Alors* u*,* v *et* w *sont alignés.* [2]



Perrin fait figurer un sixième axiome (*le théorème de Desargues est vrai dans* $\mathbf{P}$). Dans la mesure où il est conséquence du cinquième on ne le postule pas.

Démontrons le théorème 1. La stratégie est la suivante : en partant d'une droite D de $\mathbf{P}$, on choisit trois points distincts de cette droite. On les note $\infty, 0, 1$. On pose $k = D \setminus \{\infty\}$. On définit alors deux opérations sur k : une addition et un produit. On montrera "géométriquement" que l'ensemble k est en fait un corps commutatif muni de ces deux lois. Il faudra ensuite construire l'isomorphisme Φ.

Définition 3 (Repère)**.** *Un repère de* $\mathbf{P}$ *est un quadruplet de points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.*

1. Qui représente un cas particulier de l'hexagramme de Pascal.
2. Source tikz (légèrement modifiée).

Lorsque l'on disposera de la version "algèbre linéaire" des espaces projectifs (à condition de généraliser convenablement la notion de *plan projectif* car nous ne disposons pas de plus à l'heure actuelle), on sera en mesure de donner une définition plus maniable voire agréable. Intuitivement, si l'on raisonne sur le plan projectif on s'attend à ce que la famille suivante soit un repère : $(1,1,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. (Il sera bon également de commencer à avoir en tête ce que Perrin appelle *l'inflation du nombre de points* en fonction que l'on soit en vectoriel, affine ou projectif.)

Hexades quadrangulaires. Donnons nous une droite D du plan projectif $\mathbf{P}$ et prenons six points sur cette droite : a,b,c,a',b',c'. On dit que ces points forment une hexade quadrangulaire et on note cette propriété $Q\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ s'il existe un repère $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ du plan tel que les points $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ne soient pas sur la droite D et que a,a',b,b',c,c' soient respectivement les intersections de D avec les droites $(\alpha\beta)$, $(\gamma\delta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\delta\beta)$, $(\alpha\delta)$ et $(\beta\gamma)$. Une figure s'impose.

PAUSE. En attendant :

Lecture du Hartshorne, *Foundations of projective geometry*