Un peu de géométrie projective

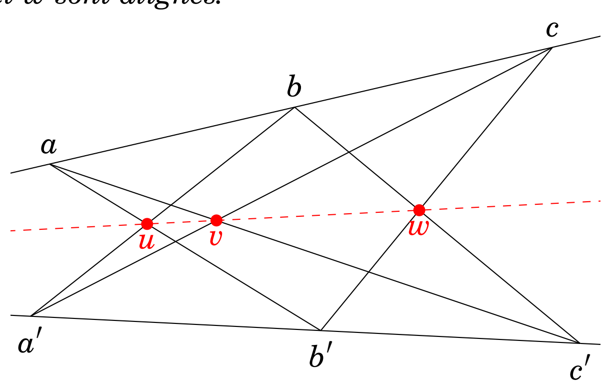
Deux manières d'aborder la géométrie projective sont envisageables : une axiomatique et une algébrique. On souhaite prouver que ces deux approches sont essentiellement les mêmes. Nous allons suivre les traces du Perrin – *Partie 1. Géométrie projective linéaire*.

Théorème 1 (Chou-vert et vert-chou)**.** *Soit* $\mathbf{P}$ *un plan projectif défini axiomatiquement. Il existe un corps commutatif* k*, un* k*-espace vectoriel* E *de dimension* 3 *et une bijection* $\Phi : \mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}$ *telle que les droites de* $\mathbf{P}$ *soient exactement les images des droites de* $\mathbf{P}(E)$*.*

Il convient de préciser ce que l'on entend par la définition axiomatique du plan projectif.

Définition 2 (Plan projectif)**.** *On appelle plan projectif axiomatique la donnée d'un ensemble* $\mathbf{P}$ *dont les éléments sont appelés points et d'un ensemble* $\mathscr{D}$ *de parties de* $\mathbf{P}$ *dont les éléments sont appelés droites, vérifiant les axiomes suivants :*

- *(P1) par deux points distincts passe une droite et une seule,*
- *(P2) deux droites se coupent en un point au moins,*
- *(P3) il existe trois points non alignés,*
- *(P4) toute droite contient au moins trois points,*
- *(P5) le théorème de Pappus*[1] *est vrai dans* $\mathbf{P}$*, c'est-à-dire :*
  soient D *et* D' *deux droites distinctes de* $\mathbf{P}$ *se coupant en* O *et soient* a,b,c *(resp.* a',b',c'*) trois points distincts de* D *(resp. de* D'*) distincts de* O*. On appelle respectivement* u,v,w *les points d'intersection des droites* (ab') *et* $(a'b)$*,* (ac') *et* $(a'c)$*,* (bc') *et* $(b'c)$*. Alors* u,v *et* w *sont alignés.*[2]



1. Qui représente un cas particulier de l'hexagramme de Pascal.
2. Source tikz.