

## Réduction des endomorphismes (et un peu plus)

On trouve un joli et très court résumé du problème et de sa résolution chez [Troesch](#) (chap. IV.6). Toujours par Troesch, on consultera quelques [rappels et compléments](#) pour vérifier que tout soit bien à jour.

On divise l'introduction à ce sujet en trois temps :

- rester dans la continuité du cours de S3 avec le livre de Grifone, *Algèbre linéaire* (chapitre 6),
- l'enrichir avec le [cours suivant](#), [son complément](#) et [son TD<sub>1</sub>](#), son [TD<sub>2</sub>](#) et [d'autres TD](#),
- aborder d'une nouvelle manière la théorie avec le [Dedieu-Lamy](#) (à partir du chapitre 6 essentiellement).

Ultimement, le graal serait de pouvoir comprendre deux ou trois choses au livre de Mneimné, *Réduction des endomorphismes*. Sans doute que le Mansuy-Mneimné peut aider à s'y préparer.

On peut également trouver plein d'informations intéressantes dans des sujets de concours. On en présente quelques uns (on reste pour l'instant sur du classique, sur des choses dans la mentalité franco-française) :

- **[X 1996]** [Trigonalisation de algèbres nilpotentes](#),
- **[Mines 2001]** [Co-diagonalisation](#),
- **[HX3 2003]** [Réduction des endomorphismes nilpotents](#),
- **[X 2003]** Trigonalisation simultanée d'endomorphismes unipotents,
- **[ENS 2004]** Actions de groupes,
- **[X 2007]** Endomorphismes vérifiant certaines relations de commutation,
- **[EPITA 2008]**, Dérivations d'une algèbre de matrices carrées,
- **[Mines 2011]** Critère de diagonalisation de Klarès,
- **[ENS 2011]** Classes de conjugaison des matrices nilpotentes,
- **[Centrale 2015]** [Sous-espaces stables par un endomorphisme](#),
- **[Agrégation externe 2017]** [Questions autour de la réduction](#),
- **[EPITA 2019]** Série entière matricielle et polynôme d'interpolation matricielle,
- **[Centrale 2019]** [Réduction des sous-algèbres de  \$\mathcal{L}\(E\)\$](#) , Endomorphismes cycliques,
- **[X/ENS 2020]** Matrices symétriques à coefficients rationnels.

Pour toujours plus d'exercices, il y a l'inépuisable [CPGE Dupuy de Lôme](#), on peut aussi piocher dans le Gourdon, *Algèbre* (en particulier l'annexe B).

On fait enfin figurer quelques articles de la RMS :

- [Les matrices symétriques sont-elles vraiment diagonalisables ?](#)
- [Réduction de Jordan par la méthode des matrices bloc.](#)
- [Réduction des endomorphismes semi-linéaires.](#)

- Quelques résultats sur la réduction des applications semi-linéaires.
- Sur la réduction des endomorphismes localement nilpotents, partie 1, 2, 3.
- Tableaux de Young et réduction des matrices carrées.
- Réduction locale de matrices à paramètres.
- Réduction des endomorphismes normaux.

On ne sait pas encore dans quelle direction s'orienter, quel sera précisément la problématique. On accumule pour l'instant.

**Réduction 1. Grifone.** On fixe  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $k$ . Soient  $f \in \mathcal{L}_k(E)$  et  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ . On a  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$ . Cherchons les bases de  $E$  dans lesquelles la forme de la matrice de  $f$  est la plus "simple" (diagonale, triangulaire).

**Définition 1.** L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{E}$  de  $E$  dans laquelle on a  $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  pour des coefficients  $a_i$  dans le corps de base. L'endomorphisme sera dit trigonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure ou inférieure.

Le problème se traduit matriciellement par la recherche de matrices semblables.

**Définition 2.** Soit  $f \in \mathcal{L}_k(E)$ . Un vecteur  $v \in E$  est dit vecteur propre de  $f$  si :

1.  $v \neq 0$ ,
2.  $\exists \lambda \in k, f(v) = \lambda v$ .

Le scalaire  $\lambda$  est dit valeur propre associée à  $v$ . On appelle spectre de  $f$  l'ensemble des valeurs propres de  $f$ . On le note  $\text{Sp}_k(f)$ .

En pratique, une fois que l'on a trouvé les valeurs propres, on détermine (en résolvant un système d'équations linéaires) les vecteurs propres.

La philosophie est que diagonaliser c'est chercher une base de vecteurs propres : l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres.

Remarquons de plus que si  $\lambda$  est valeur propre, alors  $f - \lambda \text{Id}$  n'est pas injectif, ce qui signifie (en dimension finie) que  $\det(f - \lambda \text{Id}) = 0$ . Sans perte de généralité, on peut également considérer  $\det(\lambda \text{Id} - f) = 0$ . Tout dépend de si l'on a envie de se traîner des  $(-1)^n$  ou pas. En développant le déterminant on obtient un polynôme de degré  $n$ . Les valeurs propres en sont donc racines. On appelle alors polynôme caractéristique de  $f$  le polynôme  $P_f(X) = \det(X \text{Id} - f)$ . On peut alors faire le jeu de la conversion endomorphisme  $\rightleftharpoons$  matrice en considérant  $P_M(X) = \det(X I_n - M)$ . Notons simplement que le déterminant ne dépend dans de la base dans laquelle on le calcule. Ainsi, le choix d'une base n'a aucune incidence sur le polynôme caractéristique.

**Définition 3.** Soit  $\lambda \in k$ . On note  $E_\lambda = \{v \in E \mid f(v) = \lambda v\}$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$  dit espace propre correspondant à  $\lambda$ . On appelle  $\dim(E_\lambda)$  la multiplicité géométrique de  $\lambda$ .

Si  $\lambda$  n'est pas valeur propre, alors  $E_\lambda$  est réduit à  $\{0\}$ . Si  $\lambda$  est valeur propre, alors  $E_\lambda$  contient 0 et l'ensemble des vecteurs propres associés à  $\lambda$ . (Précisons que si  $v$  est vecteur propre, alors il en est de même de  $\mu v$  pour  $\mu$  scalaire.)

**Proposition 4.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des scalaires deux à deux distincts. Alors les espaces propres  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$  sont en somme directe.

Ces espaces sont en somme directe mais peuvent ne pas "remplir" tout  $E$ . C'est là le problème de la diagonalisation. On résume alors ce fait dans le théorème suivant.

**Théorème 5.** Soit  $f$  un endomorphisme et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $f$ . Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est diagonalisable,
2.  $E$  est somme directe d'espaces propres :  $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ ,
3.  $\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p})$ .

On voit par exemple que  $E$  est diagonalisable si  $f$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes (la réciproque est fausse).

Lorsque  $\lambda$  est une valeur propre d'ordre  $\alpha$  (cad.  $\lambda$  est une racine d'ordre  $\alpha$  de  $P_f(X)$ ), on dira que  $\lambda$  est de multiplicité algébrique  $\alpha$ , on a  $\dim(E_\lambda) \leq \alpha$ .

**Théorème 6** (Critère de diagonalisabilité). L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, l'on a que :

1. le polynôme caractéristique  $P_f$  est scindé sur  $k$ , cad. si :

$$P_f(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad (1)$$

avec  $\lambda_i \in k$  et  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$ ,

2. les dimensions des espaces propres sont maximales :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i. \quad (2)$$

Trois exemples typiques d'utilisation de la réduction des endomorphismes portent sur le calcul des puissances d'une matrice, la résolution d'un système de suites récurrentes et celui d'un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Traisons désormais le cas de la trigonalisabilité (propriété moins restrictive que la diagonalisabilité).

**Théorème 7.** Un endomorphisme est trigonalisable dans  $k$  si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé dans  $k$ .

**Corollaire 8.** Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est semblable à une matrice triangulaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . C'est en particulier le cas d'une matrice à coefficients réels (cependant les coefficients de la matrice triangulaire semblable ne sont en général pas réels mais complexes). Plus généralement, toute matrice à coefficients dans  $k$  est trigonalisable sur la clôture algébrique de  $k$  (que l'on note  $K$ ).

**Corollaire 9.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(k)$  et  $\text{Sp}_K(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ . On a alors :

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_p \quad (3)$$

$$\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_p. \quad (4)$$

La démonstration repose sur le fait que deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant.

Grâce aux polynômes annulateurs on va pouvoir s'affranchir de la recherche des espaces propres et de la discussion de leur dimension.

**Définition 10.** Soit  $f$  un endomorphisme. Un polynôme  $Q \in k[X]$  est dit annulateur de  $f$  si  $Q(f) = 0$ .

Remarquons que le spectre de  $f$  figure dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur  $Q$  de  $f$ . Notons donc que toutes les racines de  $Q$  ne sont donc pas nécessairement des valeurs propres de  $f$ .

**Théorème 11** (Cayley-Hamilton). Soit  $f$  un endomorphisme. Le polynôme caractéristique de  $f$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

Notons que parmi l'ensemble des polynômes annulateurs de  $f$ , si  $f$  est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur qui est scindé et qui a toutes ses racines simples. On montre que la réciproque est également vraie.

**Théorème 12.** Un endomorphisme  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur de  $f$  scindé et n'ayant que des racines simples.

**Lemme 13** (Lemme des noyaux). Soit  $f$  un endomorphisme et  $Q(X) = Q_1(X) \dots Q_p(X)$  un polynôme factorisé en produit de polynômes deux à deux premiers entre eux. Si  $Q(f) = 0$ , alors :

$$E = \ker Q_1(f) \oplus \dots \oplus \ker Q_p(f). \quad (5)$$

Notons que l'on utilise (un peu) d'arithmétique pour démontrer le lemme des noyaux (théorème de Bézout pour les polynômes).

Connaissant le polynôme caractéristique de  $f$  et sachant qu'il est annulateur de  $f$  (théorème de Cayley-Hamilton), on peut alors en déduire une décomposition de  $E$  en somme directe.

On introduit un nouvel invariant (de similitude) : le polynôme minimal. On va se rendre compte que, combiné au théorème de Cayley-Hamilton, il donne une méthode de construction systématique de tous les polynômes annulateurs de  $f$ .

**Définition 14.** On appelle polynôme minimal de  $f$ , noté  $m_f(X)$ , le polynôme normalisé annulateur de  $f$  de plus petit degré. Le polynôme minimal est unique et l'on a  $m_f(f) = 0$  par construction. Ses racines sont donc les mêmes que  $P_f(X)$  mais avec une multiplicité (en général) différente.

**Proposition 15.** *Les polynômes annulateurs de  $f$  sont les polynômes de la forme :*

$$Q(X) = A(X)m_f(X), \text{ avec } A \in k[X]. \quad (6)$$

**Théorème 16.** *Un endomorphisme  $f$  est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé et si toutes ses racines sont simples.*

**Réduction 2. Compléments.**

**Réduction 3. Dedieu-Lamy.**