Biblio et quelques directions de recherche

Connaître les belligérants. Le pendant discret du laplacien usuel semble être le principal suspect. Dans un premier temps il serait bon de comprendre comment le définir naturellement sur, disons, un graphe. Plus tard, on pourra généraliser dans certaines directions (par exemple, cf. les CW-complexes). En attendant, chercher des définitions équivalentes mais peut-être plus algébriques que celles analytiques classiques. Regarder du côté de l'IDR de Sanjay Ramassamy par exemple. S'évertuer à en tirer ses principales propriétés et chercher des correspondances discret / continu (peut-on traiter ensemble / similairement avec ces deux bonhommes ou bien existe-t-il des caractéristiques vraiment incomparables entre eux ,).

A priori, au début, on devrait se confiner à des graphes (localement) finis. Ça peut se prêter à de belles petites modélisations / simulations. Dans une perspective d'analyse statistique, il peut-être intéressant de comparer des "comportements à petites échelles" avec des "phénomènes à très grandes échelles et grand nombre d'acteurs" (beaucoup de sommets et d'arêtes).

Savoir ce que l'on recherche. Indéterminé. Mais quelques pistes existent.

- Peut-être est-il bon de commencer en se rassurant : ce que l'on fait sur un graphe, à la limite, revient à ce qu'il se passe sur une variété (riemannienne). Sous-entendu, admettons que j'ai une discrétisation de mon espace contrôlée par un paramètre d'approximation. Plus ma discrétisation et mon espace que je discrétise se ressemblent, plus je dois obtenir des résultats comparables. Pourrait-on contrôler cette dissemblance / ressemblance discrète / continue au moyen d'un ensemble de paramètres ?
- Donner une interprétation géométrique / topologique des valeurs propres (par exemple "*the multiplicity of the zero eigenvalue of the graph Laplacian enumerates connected components of the graph, and the relative size of the smallest nonzero eigenvalue in a connected graph is a measure of approximate dis-connectivity*", *Toward a spectral theory of cellular sheaves*, Hansen, Ghrist (un jour les faisceaux ; sur les histoires de connexité, il y a aussi une interprétation à coup de zéro-ième groupe de cohomologie en théorie de Hodge etc mais plus tard plus tard) ou alors on peut penser au comportement asymptotique des valeurs propres dans le problème de Kac (*Can we hear the shape of a drum ?*) qui, moyennant les valeurs propres, permettrait de déduire l'aire, le périmètre et le nombre de trous d'une surface de $\mathbf{R}^d$). Mais bon, c'est direction la géométrie spectrale. En tout cas, c'est une chouette idée d'étudier un objet de manière détournée (par son spectre). Un problème pourrait résider dans la capacité à étudier un objet de manière détournée en se fixant une discrétisation de cet objet puis en étudiant son spectre (version problème discret). Ensuite, on voit ce que l'on peut reconstruire de l'objet depuis la discrétisation. En d'autres termes, la version discrète du problème encode-t-elle des informations "suffisamment importantes" pour qu'elles "résistent" à la discrétisation ?

L'entrée en guerre. sh sh

Questions de goût. Comme le défend Rached (Mneimné), *toujours commencer par des exemples* (voir la construction de son bouquin sur la théorie de Lie par exemple). Ici, ça s'y prête très très bien.

Quelques surveys.

— *Introduction to Analysis on Graphs*, Alexander Grigor'yan. Analyse, probabilités et graphes, top.

— *Spectres de graphes*, Yves Colin de Verdière. Développer l'analogue pour les graphes finis de la théorie spectrale pour les opérateurs de type laplacien riemannien ou opérateur de Schrödinger (usuel ou avec champ magnétique). Chercher du côté des travaux de Colin de Verdière.

— *Introduction to Quantum Graphs*, Gregory Berkolaiko, Peter Kuchment.

— *The Unreasonable Effectiveness of Spectral Graph Theory: A Confluence of Algorithms, Geometry, and Physics*, James R. Lee.

Quelques cours.

— *Ergodicité et thermalisation des fonctions propres*, Nalini Anantharaman. Quelques idées à prendre (même si très orienté dans une autre direction que celle des préoccupations), néanmoins, le cours de seconde année (cf. ci-dessous) semble tomber à pic (cours ne s'étant pas encore déroulé au moment où j'écris ces notes).

— *Spectres de graphes et de surfaces*, Nalini Anantharaman. Espoir. En attendant que le cours se déroule, cf. sa présentation. Ce serait vraiment partir aux antipodes des trucs faciles et évidents, mais : intérêt pour la comparaison des fonctions zêta dynamiques (en particulier celle de Selberg vs celle d'Ihara ; voir le cours de Nicolas Bergeron sur le spectre des surfaces hyperboliques).

— *Spectral graph theory and its applications*, Dan Spielman.

Quelques IDR.

— *Théorie spectrale et formes automorphes*, Mathieu Cossutta. Propose une direction orthogonale aux préoccupations présentes, néanmoins plaisante.

— *Laplaciens discrets et combinatoire*, Sanjay Ramassamy. Adopte une approche plus algébrique que dans le livre de Grigor'yan (logique) : par exemple, définition du laplacien sur un graphe selon une construction faisant intervenir des applications linéaires (construction très naturelle). Notion de laplacien fibré vectoriel (généralisation du laplacien discret usuel).

— *Spectre du laplacien sur les variétés et expansion dans les groupes*, Weikun He. Comparaison variétés riemanniennes / groupes discrets et phénomènes de trou spectral.

Quelques thèses.

— *Résonances du Laplacien sur les fibrés vectoriels homogènes sur des espaces symétriques de rang réel un*, Simon Roby. Les résonances sont des objets spectraux attachés à des opérateurs différentiels agissant sur des domaines non compacts et apparaissent comme des pôles de l'extension méromorphe de la résolvante de ces opérateurs.

Quelques articles.

- *Discrete laplace operators*, Max Wardetzky. Fil d'ariane : traiter ensemble le laplacien discret et celui sur une variété riemannienne.
- *Discrete laplace operator on meshed surfaces*, Belkin, Sun, Wang. Beaucoup plus appliqué mais peut être intéressant concernant l'étude d'une surface que l'on approxime par une maille.
- *Spectral theory of the discrete laplacian*, Chen. Il y a une définition du laplacien discret, à voir si elle est équivalente (dans un cas particulier) avec ce qui se fait usuellement (on retrouve la même définition chez Zhou-Schölkopf).
- *On discrete Hodge-Laplacians*, Torki-Hamza. L'approche avec les 0, 1 et 2-formes est vraiment intéressante. Les histoires de chaînes et de cochaînes amènent à se demander s'il n'y aurait pas moyen de faire entrer en scène homologie, cohomologie et compagnie. Et apparemment si, l'homologie persistente est notre amie (on pourra aussi consulter avec beaucoup d'intérêt les très intéressantes slides (I et II) de Raphaël Tinarrage, ou encore un article de la Gazette). À voir ce que cela vaut !!!
- *Properties of discrete laplacians*, David Thinsz. Étude de trois opérateurs laplaciens discrets : celui sur un graphe, le combinatoire et le persistent (tiens tiens tiens !).
- *Discrete differential geometry*, Cengiz Oztireli. Si l'on peut faire de l'analyse sur un graphe, rien ne semble nous empêcher de faire de la géométrie différentielle ! En soi, ces slides ne sont pas intéressantes, c'est plutôt ce qu'elles sous-entendent : qu'il est possible de faire de la géométrie différentielle sur des graphes.

Quelques threads.

- *How to read Spectral Theory of Graphs*. Contient une grosse conjecture et quelques pistes / intérêts.
- *How did Spectral Graph theory emerge ?* La méthode de Hückel !!! Lier avec l'atomistique II.
- *Motivation for spectral graph theory*.

Quelques questions.

—