31.6. **Lemme.** *L'égalité* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ *est satisfaite si et seulement si* $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$.

Démonstration. On procède de nouveau par double implication :

— $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \Longrightarrow \ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$. Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Donc, il existe $y \in E$ tel que $u(x) = u^2(y)$. Posons $x_1 = u(y)$ et $x_2 = x - u(y)$, alors : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}(u)$ par définition et $u(x_2) = u(x - u(y)) = u(x) - u^2(y) = 0$ donc $x_2 \in \ker(u)$. Ainsi, $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$.

— $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Supposons que $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe y dans E tel que $x = u(y)$. Comme E est la somme de $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$, alors il existe y_1 dans $\mathrm{Im}(u)$ et y_2 dans $\ker(u)$ tels que $y = y_1 + y_2$. Comme $y_1 \in \mathrm{Im}(u)$, il existe z dans E tel que $y_1 = u(z)$. Donc $y = u(z) + y_2$. Ainsi :
$$x = u(y) = u(u(z) + y_2) = u^2(z) + u(y_2) = u^2(z) + 0 = u^2(z).$$
Donc x appartient à $\mathrm{Im}(u^2)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$. Comme par ailleurs on a toujours $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$, le résultat suit.

□

En combinant les deux lemmes précédents, on remarque immédiatement qu'avoir $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est équivalent à avoir $\ker(f) = \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Il ne reste plus qu'à utiliser la question 3 pour prouver que :
$$\ker(f) = \ker(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longrightarrow f \text{ est pseudo inversible},$$
et à utiliser le résultat de la question 4 pour prouver que :
$$f \text{ est pseudo inversible } \Longrightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$
Ce qui achève la démonstration du théorème 31.2.

Profitons-en pour faire quelques remarques. Il semblerait que le sujet ENS Ulm-Sèvres 1988 soit sur le sujet (la question 8 m'interpelle en ce qu'elle semble donner une condition un peu moins restrictive). J'ai également remarqué que le Grifone semble traiter le sujet en appendice (A.5) dont voici un court extrait motivant :

> Le concept d'inverse généralisée a été introduit pour la première fois par Fredholm dans l'étude des opérateurs intégraux. Pour les matrices les premiers résultats importants ont été obtenus par E. H. Moore en 1920 qui a pu définir une notion d'inverse généralisée *unique* pour toute matrice à coefficients complexes. Ces résultats, qui n'avaient pas été publiés et n'avaient fait l'objet que d'une conférence, ont été retrouvés plus tard, sous des formes différentes par divers mathématiciens. En particulier, Penrose en 1955 a pu caractériser l'inverse généralisée de Moore par un système d'axiomes, ce qui en a facilité l'application à divers domaines des mathématiques.

32. Entre la Terminale et la Licence, un peu de calcul matriciel

Un vieil écrit sur lequel j'avais jeté pas mal de forces.

Malheureusement, on ne fait pas d'algèbre linéaire ici... Par exemple, on ne va pas pouvoir introduire une matrice comme le fait Godement par exemple :

32.1. **Définition.** (Godement, § 12) Soit
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1q} & \cdots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \tag{29}$$
Un tableau de la forme (29) s'appelle une **matrice à** p **colonnes et** q **lignes à coefficients dans l'anneau** K (les α_{ij} s'appellent aussi les **termes** de la matrice en question), et on dit que (29) est la **matrice de l'homomorphisme** f **par rapport à la base** $(a_i)_{1\le i\le p}$ **de** L **et à la base** $(b_i)_{1\le j\le q}$ **de** M. La notion de matrice joue pour les homomorphismes un rôle analogue à celui que joue, pour les vecteurs, la notion de coordonnées.

Pour nous les matrices seront essentiellement des **tableaux de nombres remplis par des coefficients et possédant certaines opérations (addition, multiplication...)** [1]. En enlevant toutes les références à l'algèbre linéaire (à proprement dit), d'un côté on se décharge d'un poids et d'une (fausse) lourdeur mais de l'autre on perd une réelle puissance de frappe et

1. Aussi naturel qu'une telle idée puisse paraître, je me demande bien combien de personnes y avaient pensé avant qu'on leur introduise. Et, pis encore, combien de gens (en particulier chez les spécialités) ont tilté qu'un nombre était une matrice 1×1.

de conception de l'objet (à vrai dire, même si on a rapidement parlé de la notion de groupe précédemment, ce n'est pas en Terminale (ni même en spécialité) que l'on se voit introduire les $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$... Il faudra proprement revenir sur cela plus tard !)

À dessein (pour plus tard), je vais donner la définition et la petite (petite) introduction (rapide) aux matrices chez Colmez :

32.2. **Définition.** (Colmez, Matrices à coefficients dans un corps) Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif. Si n, m sont des entiers ≥ 1, on note $\mathbf{M}_{n\times m}(\mathbf{K})$ l'ensemble des *matrices* $A = (a_{i,j})_{i\leq n, j\leq m}$ à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ (i.e. $a_{i,j} \in \mathbf{K}$ pour tous i, j). Pour les calculs, il est souvent commode de représenter $A = (a_{i,j})_{i\leq n, j\leq m}$ (notée simplement $(a_{i,j})$, si n et m sont clairs) sous la forme d'un tableau $n \times m$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \tag{30}$$

L'ensemble $\mathbf{M}_{n\times m}(\mathbf{K})$ des matrices $n \times m$ est, de manière naturelle, un espace vectoriel avec l'addition et la multiplication par un scalaire définies composante par composante :

$$(a_{i,j})_{i\leq n, j\leq m} + (b_{i,j})_{i\leq n, j\leq m} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i\leq n, j\leq m} \text{ et } \lambda(a_{i,j})_{i\leq n, j\leq m} = (\lambda a_{i,j})_{i\leq n, j\leq m} \tag{31}$$

Et ensuite : quelques mots sur la dimension de $\boldsymbol{M}_{n\times m}(\boldsymbol{K})$ ainsi que sur un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\boldsymbol{M}_{n\times m}(\boldsymbol{K})$ et Hom$(\boldsymbol{K}^m, \boldsymbol{K}^n)$. Malheureusement, pas de tout ça pour nous pour l'instant !

Pour la structure globale de cette sous-partie, vu que ce n'est qu'une introduction "à la volée" (sans algèbre linéaire ; sans algèbre "du tout" même), je vais essentiellement reprendre mon cours de spécialité mathématiques. Je vais l'agrémenter de quelques parties qui sortent un peu du cadre de spécialité (mais très peu). Je suis par exemple allé zieuter dans le Gourdon d'Algèbre pour dénicher deux trois idées (rien de folichon ; le niveau est pour l'instant trop relevé pour l'utiliser).

32.1. **Généralités.** On ne va pas faire une introduction aux matrices mais plus une introduction au calcul matriciel. Sans algèbre linéaire, mis à part faire de la modélisation pour les enfants ainsi que quelques calculs, on ne va pas aller bien loin ! Malheureusement, conceptuellement, on ne tire pas grand chose d'un tel module. Il n'y a bien que la partie sur les résolutions de systèmes linéaires qui peut étonner... et encore, une fois que l'on a compris la chose, on applique bêtement mais on n'a guère plus de frisson que lorsque l'on résolvait nos premières équations linéaires à l'école primaire et au collège.

Perdu pour perdu, on va essayer de faire du pur calcul. Il n'y a pas grand chose à comprendre. Néanmoins, je vais essayer de parsemer le contenu de mon cours de terminale de quelques remarques qui pourraient donner du fond à la forme.

32.1.1. *Définition.*

32.3. **Définition.** (Matrice, spécialité Math) Une **matrice de taille** (n, p) est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes.

Les nombres qui composent une matrice sont appelés les **coefficients de la matrice**, on les note a_{ij} avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{32}$$

C'est bon, je commence à maîtriser cette histoire de ligne et colonne. Même si encore aujourd'hui j'ai tendance à confondre ligne / colonne ; horizontal / vertical ; droite / gauche... Je suis bien dans le beau drap si Godement et ma prof font les choses à l'envers l'un de l'autre ! Bref...

Avant de manipuler concrètement des matrices, une opération fondamentale s'impose à nous : celle de l'égalité entre deux matrices :

32.4. **Définition.** (Égalité entre deux matrices) Deux matrices A et B sont dites égales **si et seulement si** elles ont la même taille et tous les coefficients sont égaux.

Autrement dit : $A = B \iff \forall (i,j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ l\leq j\leq p}}$ on a $a_{ij} = b_{ij}$, où a_{ij} désignent les coefficients de la matrice A et b_{ij} ceux de la matrice B. Les matrices A et B ayant une taille identique.

Lorsque l'on manipule des matrices, il existe des "types" bien spécifiques qui apparaissent fréquemment :

32.5. **Définition.** (Matrice carrée) On appelle **matrice carrée** une matrice qui a autant de lignes que de colonnes, c'est-à-dire que $n = p$.

Si on ne fait pas de la "géométrie déguisée" (produit scalaire, vecteur... ; et encore...), on a guère peu de chance de trouver autre chose que des matrices carrées. De plus, généralement, les opérations (un peu spécifiques) dont on va parler plus tard sont typiquement définies pour des matrices carrées. On conçoit alors parfaitement bien l'importance d'un tel type de matrice.

32.6. **Définition.** (Matrice ligne, vecteur ligne) Une **matrice ligne** (également appelée vecteur ligne) est une matrice ne contenant qu'une seule ligne, c'est-à-dire que $n = 1$.

32.7. **Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Aux vues de la manière dont est définie la multiplication (entre matrices), en l'espèce, si l'on ne possédait que la notion de matrice ligne... on serait vite limité. C'est pourquoi, tout naturellement, on définit ce qu'est une matrice colonne.

32.8. **Définition.** (Matrice colonne, vecteur colonne) Une **matrice colonne** (également appelée vecteur colonne) est une matrice ne contenant qu'une seule colonne, c'est-à-dire que $p = 1$.

32.9. **Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Wooow, nous retrouvons l'écriture (adoptée "dès" la seconde) des vecteurs. Effectivement, un vecteur est un type bien particulier de matrice. Donc, première remarque, est-ce que ce que l'on pouvait faire avec les vecteurs (notamment en géométrie) se généralise au cas des matrices ? Oh que oui ! Même si les matrices sont introduites si tard, sans le dire (voire même de manière carrément explicite dans des sous-parties précédentes que je n'ai pas encore écrite à l'heure actuelle) on a déjà manipulé plein de matrices ! Mais pour l'instant on est que dans du calcul matriciel : un mode bien commode de calculer des choses. On est encore loin d'avoir utilisé rien qu'un bout de la puissance d'un tel objet (qui peut lui même se généraliser fort bien et fort loin) !

32.10. **Définition.** (Matrice nulle) La **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont nuls (égaux à 0).

32.11. **Remarque.** On ne requiert aucune dimension sur la taille (la dimension) d'une matrice nulle. Elle peut être carrée ou pas ! Toutefois, à l'avenir, on notera les matrices nulles carrées de taille n : 0_n.

32.12. **Définition.** (Matrice diagonale) Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous ses coefficients sont nuls exceptés ceux situés sur la diagonale.

32.13. **Remarque.** Par commodité, que la matrice soit carrée ou pas, on pourra noter $\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ la matrice diagonale de l'exemple suivant (où n est fixé à 4).

32.14. **Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \tag{35}$$

Une telle matrice paraît bien inoffensive ! On s'en servira plus qu'on ne le pense. Il existe par ailleurs un cas bien particulier de matrice diagonale : la matrice identité. De plus, il existe d'autres cas de matrices définies par le rapport entre ses éléments et la diagonale.

32.15. **Définition.** (Matrice identité) La **matrice identité d'ordre** n, notée I_n voire Id_n, est la matrice diagonale dont tous ses coefficients sont égaux à 1.

32.16. **Exemple.**

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,1,1,1) \tag{36}$$

32.17. **Définition.** (Matrice triangulaire supérieure et inférieure) Une **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) est une matrice dont tous les coefficients en dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls. Formellement, les coefficients d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) vérifient : pour tous (i,j) tels que $i > j, a_{ij} = 0$ (resp. pour tous (i,j) tels que $i < j, a_{ij} = 0$).

32.18. **Exemple.** (Matrice triangulaire supérieure)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \tag{37}$$

32.19. **Exemple.** (Matrice triangulaire inférieure)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{38}$$

Étant donné que l'on a pour l'instant défini aucune opération sur les matrices, on ne peut guère voir beaucoup d'autres "types" de matrice (symétrique, hermitienne, orthogonale, unitaire...) [2].

32.1.2. *Opérations.* **Addition**. Additionner est une chose courante. Une fois que l'on a saisi le "truc", on peut se débrouiller à l'infini. Toutefois, comment "généraliser" cela ? En particulier dans le cas d'une matrice ! On peut se dire que l'on va faire naturellement les choses : prenant deux matrices de tailles identiques, y'a plus qu'à ! On additionne bêtement coefficient à coefficient ! Y a-t'il ne serait-ce qu'une raison ? En effet, si l'on appliquait ce raisonnement pour la multiplication, on se trouverait bien embêté à multiplier "terme à terme " [3]... (comme on le verra, le produit de matrice est défini d'une manière quelque peu déroutante aux premiers égards).

Y a-t'il un lien entre addition et multiplication (*produit*) ? Un lien relativement similaire à celui que l'on est habitué à trouver (dans $\mathbb{N}$ par exemple) (cf. équation ci-dessous) ?

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mathbf{n} \text{ fois}} = 1 \cdot \mathbf{n} \tag{39}$$

Malheureusement, il n'est pas vraiment le temps de se poser mille et une questions. Acceptons *pour l'instant* que les choses soient ainsi ! (Même si c'est triste à dire...)

32.20. **Définition.** (Somme de deux matrices) Soient A et B deux matrices de tailles identiques (n,p). La matrice $C = A + B$ est la matrice constituée des coefficients définis ci-après : pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{40}$$

Qu'est-ce que cela nous apprend ? Pas franchement grand chose ! L'addition matricielle se comporte "componentwise" essentiellement comme l'addition usuelle, classique. Donc, assez logiquement (bien que l'on ait pas "créé" quelque chose de tout nouveau), on récupère les propriétés de l'addition classique : à savoir, associativité, commutativité...

2. Voir de telles matrices n'aurait d'ailleurs que fort peu de sens à ce stade.
3. Il existe néanmoins ce que l'on appelle le *produit matriciel d'Hadamard*, on ne détaille néanmoins pas (ici ; beaucoup trop tôt ; néanmoins, par rapport au produit matriciel que nous verrons tout à l'heure, en utilisant le produit matriciel d'Hadamard : on conserve la commutativité !). Il faudrait faire de l'algèbre linéaire pour y voir plus clair !

32.21. **Proposition.** (Principales propriétés) *Sachant que l'addition usuellement définies sur un "ensemble de nombre"*[4] *est* ***commutative****,* ***associative*** *et "possède" un* ***élément absorbant*** *: il en est de même pour l'addition matricielle.*

Démonstration. On ne donne qu'une idée de preuve, les détails étant surtout formels. Il convient simplement de se rendre compte que l'addition est définie terme à terme (cf. 40). De fait, la propriété se transporte naturellement aux matrices. (On pourrait raisonner dans l'autre sens en voyant une matrice (somme de deux autres matrices) de taille (n, p) comme np additions à effectuer. Et, logiquement (dans ce cas là), ce qui est vrai localement demeure vrai globalement : l'addition terme à terme étant commutative, associative [...], il en sera de même pour l'addition matricielle. Elle sera effectivement commutative, associative [...].) Oh et puis merde, faisons les détails (au moins pour la commutative).

Soit A et B deux matrices compatibles pour l'addition (dénotons leur taille par (n, p)). On va chercher à montrer que la somme matricielle est commutative (c'est-à-dire que $A + B = B + A$). Appliquons simplement la définition 32.20 à l'addition de la matrice B à la matrice A :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \tag{41}$$

On constate, sans beaucoup de surprise, que c'est égal à :

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} \tag{42}$$

Ce qui est identique (par définition de l'addition usuelle) à :

$$\begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1p} + a_{1p} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2p} + a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} + a_{n1} & \cdots & \cdots & b_{np} + a_{np} \end{pmatrix} \tag{43}$$

En fin de compte, cela se ramène à :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = B + A \tag{44}$$

Donc : $A + B = B + A$. Wow. □

32.22. **Remarque.** Soient A, B et C trois matrices (compatibles pour l'addition) et 0_{np} la matrice nulle de taille (n, p). On a donc :

$$A + B = B + A \tag{45}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C \tag{46}$$

$$0_{np} + A = A \tag{47}$$

Comme pour l'addition usuelle, la somme a son pendant : la différence.

32.23. **Définition.** (Différence de deux matrices) La différence de deux matrices A et B (compatibles pour l'addition), notée $A - B$, est définie par $A - B := A + (-B)$.

32.24. **Remarque.** Néanmoins, à l'heure actuelle, nous ne pouvons pas décemment utiliser un tel résultat ! On trouve un signe moins devant le B, ce qui, implicitement, revient à une multiplication par moins un ! Or, nous n'avons pas défini le produit d'une matrice par un réel ! C'est ce que nous allons faire tout de suite.

4. Il conviendrait de mieux cerner cette notion, quoique vue précédemment, elle reste ouverte à débat pour nous.

Produit par un réel. On commence tout doux doucement à entrer dans des choses un poil plus intéressantes ! Mais, comme pour l'addition, pour l'instant pas franchement quoi que ce soit de nouveau sous le soleil (**et c'est sans doute à partir de là que l'on commence à comprendre que la manière "naturelle" de définir la multiplication pour les matrices (c'est-à-dire *componentwise*) risque de ne pas marcher**).

À vrai dire, on se retrouve un peu contraint dans notre démarche !

32.25. **Remarque.** N'oublions pas qu'une multiplication est une addition dissimulée ! À cet égard, $A + A = 2 \cdot A$. Si l'on regarde "le comportement des coefficients" lorsque l'on fait une telle opération, évidemment, on remarque que tout se fait "componentwise". Plus généralement, pour k un entier naturel et A une matrice, on a :

$$\underbrace{A + A + \cdots + A}_{\text{k fois}} = k \cdot A \tag{48}$$

La question qui reste à se poser étant : et si k est un réel, obtient-on un résultat similaire dans l'esprit ? (Aller voir ce que fait Tao dans son livre d'analyse (avec les suites de Cauchy). (En théorie, c'est une question qui a été traitée précédemment (mais pour les scalaires).))

Je reconnais que je suis allé un peu vite en besogne dans ma remarque ("$A + A = 2 \cdot A$"). J'ai court-circuité la chaîne de raisonnement. Néanmoins, sur l'intuition, c'est ça. Et, franchement, dans cette partie introductive, on ne cherche pas franchement tellement plus que de l'intuition (sentir l'objet, la manière de l'amener, la manière dont il est construit et ce que l'on pourrait potentiellement en faire).

32.26. **Définition.** Le produit d'une matrice A par un réel k (noté $k \cdot A$ et abrégé kA) est la matrice dont les coefficients sont obtenus en multipliant ceux de A par k. En d'autres termes, en notant a_{ij} les coefficients de A : pour tous i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a :

$$(kA)_{ij} = ka_{ij} \tag{49}$$

32.27. **Exemple.**

$$-\pi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi a_{11} & -\pi a_{12} \\ -\pi a_{21} & -\pi a_{22} \end{pmatrix} \tag{50}$$

Immédiatement, un certain nombre de propriétés basiques en découlent :

32.28. **Proposition.** *Soient A et B deux matrices de même taille, 0 la matrice nulle et deux réels k et k'. Alors :*

- $k(A + B) = kA + kB$ *;*
- $(k + k')A = kA + k'A$ *;*
- $k(k'A) = kk'A = k'kA = (kk')A$ *;*
- $1A = A$ *;*
- $0A = 0$ *; et,*
- $A + (-A) = 0$.

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne. Jusque là, on a été relativement épargné par les problèmes de "compatibilité" entre matrices (sous-entendu quand on tente de faire une opération entre elles). Jusqu'alors, on a jamais franchement requis plus que la condition suivante : les deux matrices doivent être de même taille. Enfin si ! À vrai dire, on a déjà demandé un petit peu plus sans vraiment le dire ! Dans la dernière section, on fait le produit d'une matrice de taille quelconque par un réel. Or, qu'est-ce qu'un réel ? Rien de moins qu'une matrice de taille $(1, 1)$. En somme, on a multiplié une matrice $(1, 1)$ avec une matrice (n, p). Or, on le verra plus tard, mais : pour parler, en "toute généralité", de compatibilité du produit entre deux matrices : on requiert que leurs dimensions soient compatibles, c'est-à-dire de taille (n, p) pour l'une et (p, q) pour l'autre. Il y a ce p en commun !

Donc, on a une petite subtilité (?) en ce qui concerne les scalaires. Désormais, raisonnons sur les vecteurs : les **matrices lignes** et les **matrices colonnes**.

32.29. **Définition.** Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ les éléments d'un vecteur ligne A de taille $(1, n)$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ les éléments d'un vecteur colonne B de taille $(n, 1)$. Alors, on définit le produit entre A et B, noté AB, tel que :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \tag{51}$$

32.30. **Remarque.** Attention, il ne faut pas faire la bêtise que je viens de faire ! Il faut veiller précautionneusement à respecter les hypothèses. J'ai cru que cette formule n'était pas cohérente avec celle précédemment vu concernant le produit d'une matrice par un réel. Je me suis dit, eh bien, supposons désormais A de taille $(1, 1)$. Et j'ai bêtement appliqué la formule pour obtenir :

$$a \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \overset{?}{=}{}^{?} ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n = \sum_{i=1}^{n} ab_i = a \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{52}$$

Or ! Faire cela revient à oublier la nature de n. En effet, n est une variable de l'énoncé. Si l'on fixe sa valeur en un endroit, il faut la fixer partout ailleurs (avec une valeur strictement identique ou équivalente). Attention à cet écueil donc ! Mais d'un autre côté, il ne faut pas en déduire que la formule de multiplication d'une matrice par un réel est fausse. Ce ne sont simplement pas les mêmes conditions qui s'appliquent. Les deux énoncés ne nous parlent pas exactement des mêmes choses, des mêmes cas.

Notons que la matrice obtenue est de taille $(1, 1)$, c'est donc un scalaire. Voici un petit indice terminologique qui peut nous faire penser au **produit scalaire** ! Évidemment qu'il y a un lien ! Regardons les cas des dimensions 2 et 3 :

32.31. **Exemple.** (Dimension 2)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 = \sum_{i=1}^{2} a_ib_i \tag{53}$$

32.32. **Exemple.** (Dimension 3)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i \tag{54}$$

32.33. **Remarque.** Attention à l'ordre ! La nécessité de la compatibilité dimensionnelle se ressent sur l'ordre des opérations (et plus globalement sur l'ordre de multiplication). Ainsi, le produit suivant est mal défini (tout du moins, en ce qui concerne la définition 32.29) :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{55}$$

En effet, on multiplie une matrice $(n, 1)$ par une matrice $(1, n)$. Formellement, cela ne respecte pas la définition 32.29. Mais est-ce véritablement un problème ? Oui et non. Non car on peut se débrouiller pour définir cela. Oui car on vient de découvrir la **non commutativité** et que ça va tout de suite compliquer le bins.

Attendons encore un peu pour pouvoir définir véritablement ledit produit. (Surprise : ça va donner une matrice (n, n).)

Produit d'une matrice par une matrice colonne. C'est notre dernier pas avant de pouvoir définir en toute généralité le produit entre deux matrices (compatibles).

32.34. **Définition.** Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ les éléments d'une matrice A de taille (n,p) et $(b_i)_{1\leq i\leq p}$ les éléments d'un vecteur colonne B de taille $(p,1)$. Alors, on définit le produit entre A et B, noté AB, tel que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1p}b_p \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2p}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{np}b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_k \end{pmatrix} \tag{56}$$

Intuitivement, la manière de procéder pour multiplier deux telles matrices est dans la "droite lignée" de ce que l'on a fait au paragraphe précédent (c'est "comme" si pour chaque ligne on avait calculé un produit scalaire (en dimension n)).

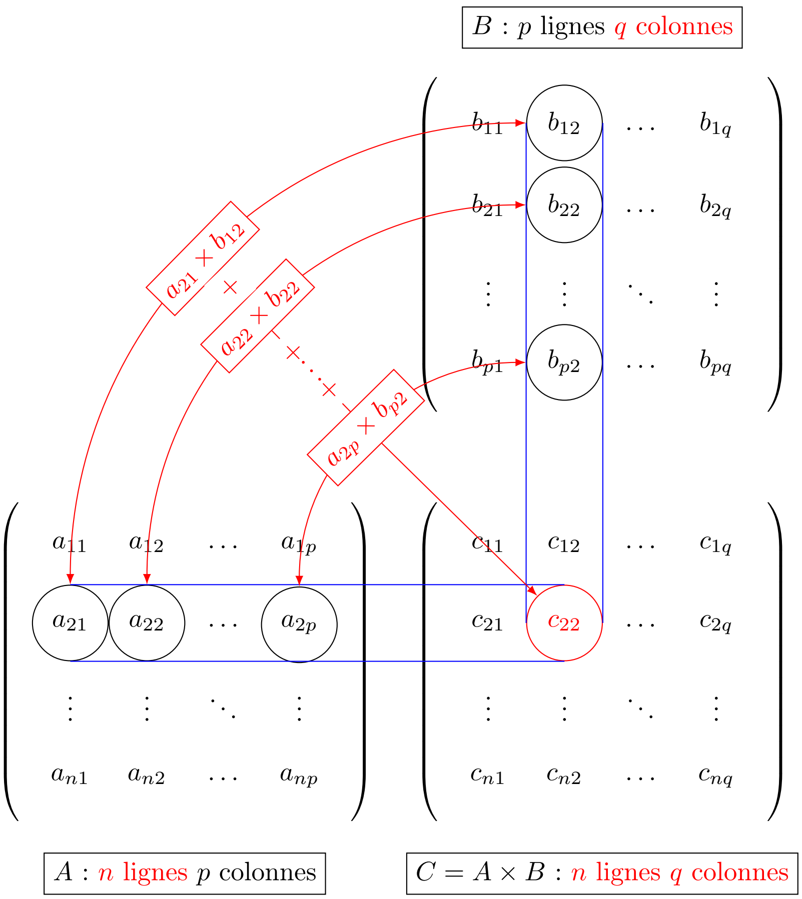
Multiplication, produit de deux matrices. C'est plus franchement la joie ! Comment concevoir globalement les choses désormais ?! Plusieurs questions se posent à nous. Même si... franchement, en soulevant deux trois idées, les choses devraient apparaître sans trop d'encombre.

Dans la première partie sur l'addition, on était un peu embêté dans la simple mesure où (à vue de nez) la manière de généraliser aux matrices addition et produit semblait quelque peu nous dépasser. Pour mieux comprendre et approcher le concept de la manière la moins "étrange" possible, on a simplement eu à décomposer la manière de multiplier deux matrices en fonction des tailles des matrices. Un argument de compatibilité (sur la dimension) a particulièrement retenu notre attention.

32.35. **Définition.** Soient n,p et q trois entiers strictement positifs. Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ les éléments d'une matrice A de taille (n,p) et $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$ les éléments d'une matrice B de taille (p,q). Alors, on définit le produit C entre A et B, noté $C=AB$, tel que C soit de dimension (n,q) et chacun de ses coefficients c_{ij} est défini tel que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \tag{57}$$

Schématiquement, voici comment on obtient chacun des coefficients c_{ij} (ici, c_{22}) :



Dans l'idée, lorsque l'on regardait le produit d'une matrice par une matrice colonne, on avait émis l'hypothèse que c'était *"comme" si pour chaque ligne on avait calculé un produit scalaire*. Désormais, lorsque l'on multiples entre elles deux matrices quelconques compatibles, "on va" *juste* calculer plein de produits scalaires dans tous les sens. (Est-ce à dire qu'un coefficient de la matrice produit ainsi obtenue correspond (par exemple) à la mesure d'un certain angle entre deux vecteurs ? Oui, entre la i-ème ligne et la j-ème colonne obtenues.)

C'est la libération ! ! ! On peut enfin multiplier des choses entre elles, ouf ! Mais c'est maintenant que les choses se corsent. On a esquissé le sujet plus tôt : des subtilités viennent se frayer un passage et un petit peu déstabiliser nos sens solidement acquis et habitués aux règles traditionnelles de calculs avec des réels ou complexes.

Non commutativité. La multiplication des matrices n'est (en général) **pas commutative**. Cela signifie que AB n'a pas vraiment de raison d'être égal à BA, en général. Mais est-ce souvent le cas ? On peut être en droit de se poser la question : mais diable, quand est-ce que deux matrices commutent ? (On pourrait sans doute raisonner de manière pas trop bourine avec de l'algèbre linéaire.) On pourrait se lancer dans des calculs qui ne nous apporteraient pas franchement grand chose d'autre que : bah, faut faire le calcul en fin de compte, il faut vérifier si $AB = BA$ ou pas. Le problème, face à ce genre de question est que : si l'on fait des calculs, on aura du mal à se rattacher à des résultats pré-existants (et permettant de donner de la perspective) pour la simple et bonne raison que l'on en a pas ! Par exemple, chercher du côté d'histoire de diagonalisation, étudier avec de bons objets le centre [5] $\mathcal{Z}(G)$ de certains groupes G de matrice... Bref, ça nous emmerde.

De manière dégénéré, l'aspect non commutatif peut survenir de manière un peu étonnante : n'oublions pas les problèmes de dimension ! En toute généralité, on a vu dans la définition 32.35 que la dimension des matrices A et B devait être respectivement (n, p) et (p, q). Ainsi, l'on peut très bien faire le produit AB. Mais peut-on nécessairement faire le produit BA ? Si l'on regarde tout d'abord, la dimension : on ferait le produit d'une matrice (p, q) avec une matrice (n, p). Aïe. Problème. À un jeu de réécriture près, du simple sucre syntaxique, en appliquant la condition sur la dimension de la définition 32.35 on requerrait que : $q = n$.

5. Le centre d'un groupe n'est autre que "l'ensemble" des éléments du groupe commutant. (Attention au vocabulaire, c'est "plus" qu'un ensemble.)

Or, en général, ça n'a pas franchement de raisons de l'être. Donc, d'un côté : AB est bien défini mais BA n'a aucune raison d'être.

Peut-être qu'un dernier exemple montrant l'importance de la commutativité peut s'avérer utile. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a pu s'habituer à la formule du **binôme de Newton**. Prenons en désormais garde ! Fondamentalement, la formule du binôme de Newton encode la manière d'élever à une puissance la somme de deux "nombres". (Il existe des généralisations, mais passons. Nous ne verrons que celle portant sur les matrices.) Par exemple, pour a et b deux nombres complexes :

32.36. **Exemple.**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{58}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{59}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \tag{60}$$

Or, en regroupant certains termes, on "commet" implicitement une chose (généralement) impensable chez les matrices : on postule que le produit commute. En effet, prenons l'exemple d'une élévation à la puissance 2 (il se passe exactement les mêmes choses pour des puissances supérieures) : $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$. Regrouper les ab et ba en $2ab$ revient évidemment à supposer que le produit commute. Aucun problème pour les complexes ! En revanche, c'est une autre paire de manche pour les matrices.

Il faut en comprendre par là que : soient A et B deux matrices, alors : $(A+B)^2 = AA + AB + BA + BB$ (par commodité, de la même manière que pour les scalaires, on notera les puissances A^k). Ce qui revient à $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Peut-on aller plus loin ? En règle générale non. Pour continuer le calcul et trouver que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, on requiert que A et B commutent. Plus généralement :

32.37. **Proposition.** (Binôme de Newton matriciel) *Soient A et B deux matrices commutatives compatibles pour le produit. Alors :*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \tag{61}$$

Démonstration. La démonstration n'a franchement rien à envier à celle dans le cas des "nombres" / des scalaires. Une récurrence et ça dégage. (Il serait intéressant de chercher d'autres démonstrations (typiquement une combinatoire ou d'autres plus "exotiques".) □

32.38. **Corollaire.** (sous les hypothèses de la proposition 32.37) *Étant donné que la somme de deux matrices est toujours commutative, on a que : $(A+B)^n = (B+A)^n$, ce qui revient à :*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = (A+B)^n = (B+A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k A^{n-k} \tag{62}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \tag{63}$$

Ce corollaire 32.38, qui est en fait simplement un jeu d'écriture, peut constituer un petit tour de passe passe si on s'y prend bien.

Toutefois, on met un détail sous le tapis : est-ce que si A et B commutent, alors des puissances quelconques de A et B vont-elles également commuter ? Eh hop :

32.39. **Proposition.** *Si A et B sont deux matrices (compatibles pour le produit) commutant, alors A^m et B^n commutent également pour des entiers naturels m et n quelconques.*

Démonstration.

$$A^m B^n = A^{m-1}\mathbf{A}\ \mathbf{B}B^{n-1} = A^{m-1}\mathbf{B}\ \mathbf{A}B^{n-1} = A^{m-2}\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}B^{n-2} = \cdots = B^n A^m \tag{64}$$

(Peut-être faire une double récurrence pour que ce soit plus "propre".) □

Propriétés du produit. On va évidemment retrouve l'associativité ou la distributivité ou la présence d'un élément absorbant et d'un élément neutre. Néanmoins, comme le présente le paragraphe précédent : en toute généralité, deux matrices ne commutent pas. On va également trouver quelques petites subtilités, quelques méfiances que l'on devra avoir.

32.40. **Proposition.** *Soient A, B et C des matrices (compatibles entre elles pour le produit) et k un nombre réel (voire même complexe). Alors :*

— $A(BC) = (AB)C = ABC$;

— $A(B + C) = AB + AC$; *et,*

— $A(kB) = k(AB) = kAB$.

Démonstration. Encore une fois, rien de fondamentalement très intéressant dans la démonstration. C'est juste un bête jeu de vérification sur les coefficients. Par exemple, pour la deuxième proposition :

Soient n, p et q trois entiers strictement positifs. Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ les éléments d'une matrice A de taille (n, p) et $(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ et $(c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ les éléments des matrice B et C de taille (p, q).

On remarque tout d'abord que, conformément à la définition de l'addition entre deux matrices 32.20, l'addition de B et C est possible (car ayant toutes deux la même dimension). Et maintenant, comme des bourrins, on calcule juste :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix} \right] \tag{65}$$

Étant donné que l'on ne peut pas utiliser la distributivité (car c'est ce que l'on veut démontrer), on ne peut faire qu'une seule et unique chose : calculer la somme et ensuite faire le produit de la matrice A avec la matrice conséquente de la somme entre B et C.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1q}+c_{1q} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2q}+c_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}+c_{p1} & \cdots & \cdots & b_{pq}+c_{pq} \end{pmatrix} \tag{66}$$

Grâce à la définition 32.35, on connaît la forme de chacun des coefficients de $A(B + C)$. Ces derniers sont :

$$\mu_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\Big[(b+c)_{kj}\Big] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\Big[b_{kj} + c_{kj}\Big] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj} \tag{67}$$

La dernière égalité est vraie pour la simple et bonne raison que la propriété de distributivité est vérifiée pour les nombres usuels / les scalaires. (Tiens tiens tiens... c'est étonnant héhé.)

$$\mu_{ij} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}_{\text{coefficient } (ab)_{ij}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}}_{\text{coefficient } (ac)_{ij}} \tag{68}$$

dû à l'associativité de l'addition (définie sur les scalaires).

On remarque alors, conformément à la définition 32.35, que les coefficients μ_{ij} résultent de la somme de deux produits matriciels ; et, enfin que :

$$A(B + C) = AB + AC \tag{69}$$

Wooow. Cool. □

(*Pour la petite histoire, c'est la première fois de ma vie que j'atteins une page de démonstration "un minimum propre" en jouant avec un système de référence et de pointage inter-document de divers résultats. C'est petit mais mignon.*)

Élément absorbant et produit matriciel. Dans la lignée des propriétés sur le produit matriciel, une peut décemment retenir notre attention : il faut y faire attention ! On va raisonner en deux temps : montrer une propriété évidente puis ensuite montrer qu'une (fausse) évidence n'est pas une propriété véridique.

32.41. **Proposition.** *Soient A et B deux matrices. Si A **ou** B est la matrice nulle alors le produit*[6] *de A et B est également la matrice nulle.*

Démonstration. Faisons une disjonction de cas (motivée par le "ou"). Trois cas possibles : **ou** A et B sont égales à la matrice nulle, **ou** A est la matrice nulle et B une matrice quelconque, **ou** B est la matrice nulle et A une matrice quelconque. Sans perte de généralité, on remarque que les deux derniers cas sont équivalents (il n'y a qu'à faire attention à la dimension à la rigueur, mais par hypothèse on s'en fiche). Donc deux cas :

— si A **et** B sont égaux à la matrice nulle. Un rapide calcul montre que le produit de A et B équivaut également à la matrice nulle.

— si A est la matrice nulle et que B est une matrice quelconque de taille (p, q). On se débrouille pour que la multiplication entre les deux soit compatible. Choisissons alors pour la matrice nulle A une taille de (n, p). Alors AB est égal à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \tag{70}$$

Encore une fois, grâce à la définition 32.35, on connaît la forme de chacun des coefficients de AB. Ces derniers sont donc :

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} 0 b_{kj} = 0 \tag{71}$$

Donc chacun des coefficients de la matrice obtenue est 0. Donc $AB = 0_{nq}$.

□

La réciproque d'un tel résultat est-elle vraie ? Si $AB = 0$, a-t'on nécessairement A ou B égal à la matrice nulle ? C'est faux, à cet égard, on peut exhiber des exemples pour le prouver :

32.42. **Exemple.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais manifestement, A et B ne sont ni l'une ni l'autre la matrice nulle.

Plus généralement que pour la matrice nulle, si on obtient l'égalité suivante $AB = AC$ entre les trois matrices A, B et C, alors on ne peut pas simplifier par A et déduire que $B = C$. On va le voir plus tard mais cette opération de "simplification" a un nom, elle s'appelle "prendre l'inverse" mais n'est pas toujours possible ! (Donc ce n'est pas vraiment une simplification comme pourrait l'être la division dans $\mathbb{R}$ vu que dans $\mathbb{R}$ on peut toujours diviser (sauf par zéro, bien entendu).)

Élément neutre et produit matriciel. À côté de l'élément neutre (le "zéro"), on trouve l'élément neutre (le "un"). De la même manière que chez les réels et complexes, on attend de lui qu'il préserve, ne change pas ce sur quoi on le fait agir. Assez logiquement, on en déduit que :

32.43. **Proposition.** *Soit A une matrice carrée compatible pour la multiplication avec la matrice identité I_n. Alors $AI_n = I_n A = A$.*

Démonstration. La matrice A est de taille (n, n) (pour être compatible pour la multiplication avec I_n et car elle est carrée). Pour prouver le résultat escompté, il n'y a qu'à dérouler les calculs en raisonnant sur les coefficients (on introduit à la volée la notation $\text{coeff}(X)_{ij}$ donnant les coefficients de la matrice X) :

$$\text{coeff}(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \text{coeff}(I_n)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} \tag{72}$$

$$\text{coeff}(I_n A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \text{coeff}(I_n)_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} a_{kj} \tag{73}$$

6. En se débrouillant pour qu'il soit compatible, c'est-à-dire en choisissant des dimensions adéquates pour les matrices nulles.

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini tel que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Dans une autre version de la démonstration, j'ai fait une connerie et je suis allé trop vite en besogne. Regardons patiemment, ce que l'on obtient pour quelques valeurs de i et j :

$$\text{pour } j = 1,\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{k1} = a_{i1} \cdot 1 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{i1} \tag{74}$$

$$\text{pour } j = 2,\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{k2} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{i2} \tag{75}$$

$$\text{pour } i = 1,\ \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}a_{kj} = 1 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} = a_{1j} \tag{76}$$

$$\text{pour } i = 2,\ \sum_{k=1}^{n} \delta_{2k}a_{kj} = 0 \cdot a_{1j} + 1 \cdot a_{2j} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} = a_{2j} \tag{77}$$

On remarque (et démontre) plus généralement que pour i et j "quelconques" (dans la limite du possible, c'est à dire compris entre 1 et n) :

$$\text{coeff}(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij} \tag{78}$$

$$\text{coeff}(I_nA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij} \tag{79}$$

Ce qui permet de conclure. Il reste néanmoins à montrer que AI_n ou I_nA est égal à A. Ce qui est automatique. □

32.44. **Remarque.** Le seul point un petit peu délicat dans la démonstration précédente intervient lors de l'introduction du symbole de Kronecker δ_{ij}. Donnons juste un élément pour justifier son utilisation : on peut définir les coefficients de la matrice identité I_n par une condition : si l'on est sur la diagonale principale, alors on met un un ; sinon, un zéro. Ce qui revient à utiliser le symbole de Kronecker (en fonction de si $i = j$ ou pas).

Petite chose délicate quand on est étourdi également : ne pas chercher à trouver les coefficients de A avec la formule 57. Dans une telle situation, ce n'est pas seulement con (on n'a aucune information sur A et ses coefficients, donc on cherche quelque chose d'inatteignable). Pire, c'est même faux : on ne vérifie pas les conditions de compatibilité sur la dimension. Certes, on a une matrice carrée (n, n). Dans ce cas, selon la définition 32.35, il faudrait considérer une matrice de dimension (n, qqch). Or, bah non : $a_{ij} \neq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot 1$. Gné, non. En plus on mélange tout... Non. À ne pas faire comme connerie !

Puissance d'une matrice. On ne considère que les matrices carrées (autrement, on aurait de petit problème de compatibilité sur la multiplication : en effet, on multiplierai la même matrice par elle même, donc une matrice (n, p) par une matrice (n, p), ce qui n'est pas compatible).

32.45. **Définition.** (Convention) On note A^2 le produit de la matrice carrée A par elle-même. Ainsi, $A^2 := AA$. On définit, par récurrence, de manière identique l'élévation de la matrice A à une puissance k (e.g. $A^3 = A^2A = AAA$).

32.46. **Remarque.** Par convention $A^0 = I_n$.

32.47. **Remarque.** $A^{n+1} = A^nA = AA^n$

Doit-on se limiter à un exposant positif ou nul ? À vrai dire "non". On le verra plus tard avec la notion d'inverse, le fameux A^{-1}.

La dynamique avec les matrices semble nettement plus riche que celle pour les scalaires. Sans chercher à entrer trop dans les détails (la question pourrait être intéressante en développement et en étude), l'on pourrait se poser des problèmes analogues à ceux de la recherche des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$. Pour les matrices, c'est déjà un peu plus trépidant, ça va un peu plus loin que les (non pas moins intéressants) ζ_n : par exemple concernant les racines deuxièmes de l'unité : on trouve évidemment que $I_2^2 = I_2$ ou $(-I_2)^2 = I_2$. Mais ce n'est pas tout [7] :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I_2,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2,\ \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2 \tag{80}$$

ou des trucs un peu plus exotiques comme

$$\begin{pmatrix} i & 73+\sqrt{5327} \\ 73-\sqrt{5327} & -i \end{pmatrix}^2 = I_2 \tag{81}$$

. Et en plus, y'a moyen que ça fasse de beaux *petits* problèmes d'arithmétiques (avec une orientation algorithmique) car le carré de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}$. Donc le problème se ramènerait au système suivant :

$$\begin{cases} a^2+bc &= 1 \\ ab+bd &= 0 \\ ac+cd &= 0 \\ cb+d^2 &= 1 \end{cases} \tag{82}$$

Mais ce serait bien qu'enfin on fasse de l'algèbre linéaire, bon dieu ! Malheureusement, on verra dans quelques longs mois. En attendant, développons quelques éléments de calcul matriciel. On les aura juste en tête, histoire d'avoir des repères plutôt que de réelles connaissances approfondies.

32.2. **Quelques éléments de calcul matriciel.** Pour la suite des hostilités, je me suis basé sur différents documents que voici : les polycopiés de Ycart, Bodin, Rouget et Schwartz.

On va voir quelques opérations qui, pour l'instant, ne relèveront de quasiment aucune utilité. À part calculer, on ne risque pas d'aller très loin. On va simplement essayer de se familiariser un peu avec ces derniers (en démontrant notamment des propriétés très basiques et rudimentaires).

32.2.1. *Trace.* On se place dans le cadre des matrices carrées.

32.48. **Définition.** Soit A une matrice carrée de dimension n. La **trace** de la matrice A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{83}$$

où les a_{ij} sont les coefficients de la matrice A.

32.49. **Remarque.** La trace d'une matrice est donc la somme de ses éléments diagonaux (ceux présents sur la diagonale principale).

32.50. **Exemple.**

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \tag{84}$$

32.51. **Proposition.** *Soient A et B deux matrices carrées de dimension n. Alors :*

7. Apparemment, il y aurait une histoire avec les matrices de Pauli (?).

1. $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$ *;*
2. $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr}(A)$ *pour tout* α *appartenant à* $\mathbb{C}$ *;*
3. $\operatorname{Tr}(A^\intercal) = \operatorname{Tr}(A)$ *; et,*
4. $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Démonstration. 1. appliquons simplement la définition 32.48 à $A+B$ et déroulons les calculs :

$$Tr(A+B) = Tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) \tag{85}$$

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn}) \tag{86}$$

$$\operatorname{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) \tag{87}$$

2. même logique que pour la démonstration précédente : on "construit" / forme la matrice αA et lui applique la définition 32.48 afin de démontrer ladite propriété :

$$\operatorname{Tr}(\alpha A) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$\operatorname{Tr}(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \operatorname{Tr}(A) \tag{89}$$

3. on n'a pas encore défini la notion de transposée, anticipons un tout petit peu. *Intuitivement*, la transposée va "faire tourner la matrice sur elle-même" en échangent les coefficients entre eux : les a_{ij} vont devenir les a_{ji} et inversement (les a_{ji} deviennent les a_{ij}). Ainsi :

$$\operatorname{Tr}(A^\intercal) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{90}$$

On constate que les coefficients sur la diagonale principale n'ont aucunement changé (seuls ceux en dessous et ceux au-dessus ont changé). De ce fait :

$$\operatorname{Tr}(A^\intercal) = \operatorname{Tr}(A) \tag{91}$$

Une telle formule est tout à fait logique : la diagonale principale "agit comme" / "se comporte comme" un axe de symétrie, il est donc naturel qu'elle soit invariante (sous sa propre action).

4. tout d'abord, on sait que l'on aura aucun problème de compatibilité du produit dans la mesure où les matrices A et B sont toutes deux carrées d'ordre n. Les produits AB et BA sont donc bien définis. Comment démontrer la propriété 4 ? Un petit retour au source à la formule 57 donnant la "tête" des coefficients de AB et BA puis une simple application de la définition 32.48 et le tour est joué !

En utilisant la formule 57, on obtient les coefficients de AB et de BA :

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{92}$$

$$(ba)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \tag{93}$$

On a précédemment remarqué (ou sinon on le fait maintenant) que la trace *ne s'intéresse qu'aux éléments sur la diagonale principale*. De ce fait, on peut se concentrer uniquement sur les coefficients pour lesquels $i = j$ (c'est-à-dire $(ab)_{ii}$ et $(ba)_{ii}$). Et c'est maintenant que je peux recaser le travail que j'avais fait pour la démonstration de la proposition 32.71. C'est pile ce qu'il faut ici. On va alors simplement chercher à démontrer que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (ab)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (ba)_{ii} = \mathrm{Tr}(BA) \tag{94}$$

Pour peu que l'on ordonne et présente suffisamment bien les choses, ça devient une évidence. Voyons donc cela :

$$\begin{aligned}
(ab)_{11} &= a_{11}b_{11} &&+ a_{12}b_{21} &&+ \dots &&+ a_{1n}b_{n1} && (95)\\
(ab)_{22} &= a_{21}b_{12} &&+ a_{22}b_{22} &&+ \dots &&+ a_{2n}b_{n2} && (96)\\
\dots &= \dots &&+ \dots &&+ \dots &&+ \dots && (97)\\
(ab)_{nn} &= a_{n1}b_{1n} &&+ a_{n2}b_{2n} &&+ \dots &&+ a_{nn}b_{nn} && (98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ba)_{11} &= b_{11}a_{11} &&+ b_{12}a_{21} &&+ \dots &&+ b_{1n}a_{n1} && (99)\\
(ba)_{22} &= b_{21}a_{12} &&+ b_{22}a_{22} &&+ \dots &&+ b_{2n}a_{n2} && (100)\\
\dots &= \dots &&+ \dots &&+ \dots &&+ \dots && (101)\\
(ba)_{nn} &= b_{n1}a_{1n} &&+ b_{n2}a_{2n} &&+ \dots &&+ b_{nn}a_{nn} && (102)
\end{aligned}$$

On se rend visuellement compte qu'il existe une égalité algébrique (exactement celle désirée). Afin que ce soit plus clair et plus visible, trois exemples ont été mis en couleur (ceux des premiers, seconds et derniers coefficients de la diagonale principale). Avec un petit jeu de ré-arrangement des coefficients lorsqu'on les somme, on tombe évidemment sur l'égalité 94 désirée.

Une telle égalité peut surprendre dans la mesure où l'on s'est habitué à la non commutativité de A et B. Toutefois, il ne convient de pas s'arrêter à cette intuition dans la mesure où l'on raisonne uniquement sur la diagonale principale avec la trace (diagonale principale "utilisée comme un axe de symétrie" par la trace, comme vu plus tôt).

□

32.52. **Corollaire.** (sous les hypothèses de la proposition 32.51) *Si A et B sont des* ***matrices semblables****, c'est-à-dire qu'elles vérifient l'égalité $B = P^{-1}AP$ (où P est une matrice carrée inversible d'ordre n), alors* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ *;*

Démonstration. Conséquemment à la proposition 32.51, on sait que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Injectons simplement la valeur $B = P^{-1}AP$, et nous obtenons :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{Tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(A(PP^{-1})) = \mathrm{Tr}(AI_n) = \mathrm{Tr}(A) \tag{103}$$

La démonstration pourra être parfaitement comprise dès que l'on aura fait la partie sur l'inverse d'une matrice, dans très peu de temps (cf. la définition 32.68). □

Plus précisément que les propriétés une et deux de la proposition 32.51, la trace est une **forme linéaire** sur "l'espace des matrices carrées". On reste volontairement flou pour l'instant, il est encore trop tôt. Néanmoins, en pratique, ça signifie simplement que pour deux matrices carrées A et B et deux scalaires λ et μ (d'une certaine structure algébrique), on a l'égalité suivante :

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B) \tag{104}$$

32.53. **Remarque.** La trace peut être intéressante à divers égards. Par exemple, elle peut être utilisée pour démontrer qu'il n'existe pas de couple de matrices carrées (A, B) tel que $AB - BA = I_n$. En effet : en raisonnant sur la trace, on constate que $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB) = 0$. Or, la trace de la matrice identité d'ordre n vaut précisément n. Dans la mesure où 0 est différent de n (n étant un entier strictement positif), il n'existe alors pas de couple (A, B) tel que $AB - BA = I_n$.

En somme, la trace nous a ici permis de vérifier si une égalité est probable ou pas du tout. Si les deux traces ne correspondent pas, il est impossible que les deux matrices soient égales (en revanche, veillons à faire attention : la contraposée n'est pas vraie : deux matrices différentes peuvent avoir des traces identiques).

32.2.2. *Transposée.* Contrairement à précédemment (pour la trace ; ou plus tard pour le déterminant), on n'est plus obligé de se restreindre à des matrices carrées. En effet, on peut très bien calculer la **transposée** d'une matrice (n, p).

32.54. **Définition.** Soit A une matrice de taille (n, p). La **transposée** de A, notée $A^\intercal$, est la matrice obtenue en interchangeant les colonnes avec les lignes (et inversement) de A. Formellement, en dénotant a_{ij} les np coefficients de la matrice A, on définit les coefficients de la matrice transposés tel que :

$$\mathrm{coeff}(A^\intercal)_{ji} = a_{ij} \tag{105}$$

32.55. **Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\ p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\ p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\ 1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\ p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{106}$$

32.56. **Corollaire.** *En conséquence de l'équation 105 définissant les coefficients de la matrice $A^\intercal$, la matrice transposée de A est de taille (p, n).*

On avait déjà pu rapidement voir la notion de transposée à la proposition 32.51 (troisième propriété). À vrai dire, cette notion était déjà latente dans d'autres concepts. En effet, lorsque l'on a remarqué que le produit scalaire pouvait avoir une expression matricielle aux exemples 32.31 et 32.32, sans trop le dire, on a usé de la notion de transposition. Dans cette optique, lorsque l'on considère deux vecteurs, on va les prendre de même dimension (disons $(n, 1)$, c'est-à-dire une matrice colonne (cf. définition 32.8). Problème, problème ! Pour calculer un produit scalaire, on conviendra que l'on calcul un *produit*, gné ! Or, au sens de la condition de compatibilité sur la dimension de la définition 32.35, on est ici emmerdé ! En effet, on veut faire le produit d'une matrice $(n, 1)$ avec une matrice $(n, 1)$, gné. Donc comment faire ? ! On va, subrepticement, utiliser, vite fait en soum-soum, la notion de transposée pour obtenir une matrice $(1, n)$. Et désormais, le produit est compatible ! (Et faut faire néanmoins gaffe à l'ordre des multiplications ! En effet, on ne veut pas obtenir une matrice (n, n) mais bien un scalaire (donc une matrice $(1, 1)$).)

32.57. **Exemple.** Imaginons que l'on souhaite faire le produit scalaire entre les deux vecteurs colonnes suivants :

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{107}$$

$\overrightarrow{v}$ scalaire $\overrightarrow{w}$, noté $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$ ou encore $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$, va s'écrire :

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v}^\intercal)\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{108}$$

On comprend et voit alors aisément que pour n quelconque, on peut définir le produit scalaire entre deux vecteurs A et B tel que $A \cdot B = A^\intercal B$.

32.58. **Proposition.** *Soient A une matrice de dimension (n, p). Alors :*

1. $(A^{\intercal})^{\intercal} = A$ *;*

2. $(\alpha A)^{\intercal} = \alpha(A^{\intercal})$ *;*

3. $(A+B)^{\intercal} = A^{\intercal} + B^{\intercal}$*, où* B *est une matrice compatible pour l'addition (cf. 32.20) ; et,*

4. $(AB)^{\intercal} = B^{\intercal}A^{\intercal}$*, où* A *et* B *sont compatibles pour la multiplication (cf. 32.35) ;*

Démonstration. 1. Cette propriété est équivalente au fait de dire que la transposée est **involutive**. Prouvons la. Par définition, on applique simplement deux fois la relation 105 :

$$A^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\ p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\ p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\ 1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\ p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{109}$$

$$(A^{\intercal})^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\ p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\ p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\ p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\ 1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = A \tag{110}$$

Une telle relation n'a rien de franchement surprenant dans la mesure où "pivoter deux fois de 180 degrés revient à effectuer un tour complet" (c'est-à-dire à "ne pas bouger", dans la mesure où 360 degrés est congru à 0 degré, modulo 360).

2. Il n'y a qu'à appliquer les relations 105 et 49 :

$$(\alpha A)^{\intercal} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{\mathbf{12}} & \cdots & \alpha a_{\mathbf{1\ p}} \\ \alpha a_{\mathbf{21}} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{\mathbf{2\ p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{\mathbf{n\ 1}} & \cdots & \cdots & \alpha a_{np} \end{pmatrix}^{\intercal} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\ p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \alpha A^{\intercal} \tag{111}$$

3. Encore une fois, c'est de l'application pure et dure de relations fondamentales (105 et 32.20). On a de plus supposé les deux matrices compatibles pour l'addition, donc aucun problème !

$$(A+B)^{\intercal} = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\ p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\ p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\ 1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{\mathbf{12}} & \cdots & b_{\mathbf{1\ p}} \\ b_{\mathbf{21}} & b_{22} & \cdots & b_{\mathbf{2\ p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{\mathbf{n\ 1}} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \right]^{\intercal} \tag{112}$$

$$(A+B)^{\intercal} = \left[\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{\mathbf{12}}+b_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\ p}}+b_{\mathbf{1\ p}} \\ a_{\mathbf{21}}+b_{\mathbf{21}} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\ p}}+b_{\mathbf{2\ p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\ 1}}+b_{\mathbf{n\ 1}} & \cdots & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \right]^{\intercal} \tag{113}$$

$$(A+B)^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{\mathbf{21}}+b_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 1}}+b_{\mathbf{n\ 1}} \\ a_{\mathbf{12}}+b_{\mathbf{12}} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 2}}+b_{\mathbf{n\ 2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\ p}}+b_{\mathbf{1\ p}} & \cdots & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \tag{114}$$

Ce qui nous permet alors de conclure que :

$$(A+B)^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\ 2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\ p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{\mathbf{21}} & \cdots & b_{\mathbf{n\ 1}} \\ b_{\mathbf{12}} & b_{22} & \cdots & b_{\mathbf{n\ 2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{\mathbf{1\ p}} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = A^{\intercal} + B^{\intercal} \tag{115}$$

4. Pas de nouveauté, on applique des relations (105 et 57) et tout roule. On va essayer d'être un peu plus précautionneux que pour les trois dernières propriétés. Tout d'abord, nous n'avons aucun problème de compatibilité pour l'addition. En effet, en tant que pré-requis, on requiert de B qu'elle soit compatible pour la multiplication avec A (c'est-à-dire que B soit de taille (p, q)). Nous allons chercher à exhiber les coefficients de la transposée de AB afin de se rendre compte qu'ils coïncident parfaitement avec ceux de la transposée de B multiplié par la transposée de A. En fait non, on va faire les choses dans l'autre sens. Donc :

$$(b^\intercal a^\intercal)_{\mathbf{i}\ \mathbf{j}} = \sum_{k=1}^{p} (b^\intercal)_{\mathbf{i}\ \mathbf{k}} (a^\intercal)_{\mathbf{k}\ \mathbf{j}} \tag{116}$$

C'est désormais que nous avons le seul point un tant soit peu *délicat*. En appliquant la définition 32.54 de la transposée, grâce à la formule 105, on constate que la transposée "échange les coefficients", elle "change leur ordre" (un (i, j) devient un (j, i)). Donc, tout logiquement, on trouve que :

$$(b^\intercal a^\intercal)_{\mathbf{i}\ \mathbf{j}} = \sum_{k=1}^{p} b_{\mathbf{k}\ \mathbf{i}} a_{\mathbf{j}\ \mathbf{k}} = \sum_{k=1}^{p} a_{\mathbf{j}\ \mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\ \mathbf{i}} \tag{117}$$

Cette dernière équation nous permet de conclure :

$$(b^\intercal a^\intercal)_{\mathbf{i}\ \mathbf{j}} = \sum_{k=1}^{p} a_{\mathbf{j}\ \mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\ \mathbf{i}} = (ab)_{\mathbf{j}\ \mathbf{i}} = ((ab)^\intercal)_{\mathbf{i}\ \mathbf{j}} \tag{118}$$

Wooow. Super cool.

□

Pour les grandes lignes de la transposée, on devrait être plus ou moins bon (il reste un petit résultat avec le déterminant, on le traitera dans le paragraphe sur le déterminant). On va désormais voir deux mini-résultats et ensuite enchaîner sur deux types de matrices assez importants : les matrices symétriques et les matrices antisymétriques.

On a déjà pu avoir un tout petit peu à faire avec des matrices semblables. Définissons un peu plus proprement que précédemment (cf. la proposition 32.52) une telle notion :

32.59. **Définition.** Deux matrices carrées A et B sont dites **semblables** s'il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = PBP^{-1} \tag{119}$$

De telles matrices sont toutes mignonnes et peuvent être rudement intéressantes notamment si l'on souhaite calculer des exponentiation par exemple. Le but du jeu va être de trouver une matrice P (et son inverse) ainsi qu'une matrice B (plutôt ravissante, c'est-à-dire dont on calcule aisément ses puissances) liées à A par la relation 119. Dans la pratique, quand on va chercher à calculer, par exemple, A^k on va se simplifier le travail grâce à la formule suivante (qui peut se démontrer par récurrence) :

$$A^k = (PBP^{-1})^k = \underbrace{\underbrace{PBP^{-1}}\underbrace{PBP^{-1}}\dots\underbrace{PBP^{-1}}}_{\text{k fois}} = PB^kP^{-1} \tag{120}$$

Sans doute pas forcément très utile en pratique, on trouve, en théorie, un résultat liant une matrice A à sa transposée :

32.60. **Proposition.** *Une matrice A est semblable à sa transposée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible telle que :*

$$A = PA^\intercal P^{-1} \tag{121}$$

Démonstration. Apparemment, en utilisant une chose qu'on appellerait la *réduction de Jordan*, ça deviendrait une trivialité. Autrement, ça semble être un exercice un petit peu "compliqué". (Par exemple, c'est un sujet de Centrale, 2003, Mathématiques 2 (TSI).) On verra ce que l'on peut en faire plus tard. □

Enfin, avant de passer aux matrices symétriques et antisymétriques, voyons un petit résultat qui va de lui-même :

32.61. **Proposition.** *Soit A une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), la transposée de A est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).*

Démonstration. On rappelle la définition de matrice triangulaire supérieure 32.17, resp. inférieure : les coefficients a_{ij} de A vérifient la relation suivante : pour tous i et j tels que $i > j$, $a_{ij} = 0$, resp pour tous i et j tels que $i < j$, $a_{ij} = 0$.

Nous n'allons traiter que le cas d'une matrice triangulaire supérieure. Celui d'une matrice triangulaire inférieure se traite parallèlement.

Par hypothèse, nous savons que A est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{np} \end{pmatrix} \tag{122}$$

Calculons simplement la transposée en appliquant la formule 105 :

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{123}$$

On reconnaît immédiatement une matrice triangulaire inférieure, comme désiré. □

Matrices symétriques.

32.62. **Définition.** Soit une matrice carrée A d'ordre n. La matrice A est dite **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = A^\intercal \tag{124}$$

32.63. **Remarque.** Les coefficients sont dits symétriques par rapport à la diagonale principale.

On pourrait, apparemment, s'amuser à compter le nombre de matrices symétriques pour un ordre n donné.

Matrices antisymétriques.

32.64. **Définition.** Soit une matrice carrée A d'ordre n. La matrice A est dite **antisymétrique** si elle est égale à sa l'opposé de sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = -A^\intercal \tag{125}$$

32.65. **Remarque.** On appelle, en anglais, ces matrices *skew-symmetric*.

Une fois les matrices symétriques et les matrices antisymétriques introduites, on peut montrer un petit résultat (qui a son pendant en analyse réelle, cf. la démonstration) :

32.66. **Proposition.** *Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

Démonstration. Il va falloir raisonner un peu astucieusement. Pour ce faire, on va pouvoir utiliser la même idée que pour montrer que toute fonction peut être écrite comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On introduit deux quantités :

$$\delta_{\mathrm{S}} = \frac{A + A^\intercal}{2} \tag{126}$$

$$\delta_{\mathrm{AS}} = \frac{A - A^\intercal}{2} \tag{127}$$

On remarque alors que $A = \delta_{\mathrm{AS}} + \delta_{\mathrm{S}}$. Il ne reste qu'à montrer que δ_{AS} est antisymétrique et que δ_{S} est symétrique. Pour cela, on utilise les résultats de la proposition 32.58 :

$$(\delta_{\mathrm{S}})^\intercal = \left[\frac{A + A^\intercal}{2}\right]^\intercal = \frac{1}{2}\big(A^\intercal + (A^\intercal)^\intercal\big) = \frac{1}{2}\big(A^\intercal + A\big) = \delta_{\mathrm{S}} \tag{128}$$

Donc δ_{S} est bel et bien une matrice symétrique.

$$(\delta_{\text{AS}})^{\intercal} = \left[\frac{A - A^{\intercal}}{2}\right]^{\intercal} = \frac{1}{2}\big(A^{\intercal} - (A^{\intercal})^{\intercal}\big) = \frac{1}{2}\big(A^{\intercal} - A\big) = -\delta_{\text{AS}} \tag{129}$$

Donc δ_{AS} est bel et bien une matrice antisymétrique. □

Matrice adjointe (Transposée du conjugué).

On se donne une matrice A à coefficients complexes. On va chercher à voir s'il n'existerait pas un petit raffinement de ce que l'on connaît comme étant la matrice transposée de A à coefficient réel.

32.67. **Définition.** On appelle matrice adjointe, notée A^* ou A^{H} voire $A^{\dagger}$, d'une matrice A à coefficients complexes, la matrice transposée de la matrice conjuguée de A. La matrice conjuguée, notée $\overline{A}$, n'étant rien d'autre que que la matrice obtenue en passant au conjugué chacun des éléments de ladite matrice.

Ainsi :

$$A^* = (\overline{A})^{\intercal} = \overline{(A^{\intercal})} \tag{130}$$

Pour l'instant, un tel objet ne nous est d'aucune quelconque utilité. Ce sera intéressant lorsque l'on s'intéressera aux espaces hermitiens (et, *a fortiori*, à plus encore) ! Je ne pense pas qu'on revoie la matrice adjointe de si tôt... donc on va un peu laisser de côté les propriétés afférentes.

32.2.3. *Déterminant.* On arrive désormais sur du lourd, mais malheureusement, on ne va pas vraiment voir en quoi ça peut être utile (changement de variable dans une intégrale multidimensionnelle, volume...). Encore une fois on se cantonne à quelques définitions rudimentaires et quelques propriétés venant d'elles-mêmes.

Au fond le déterminant (au moins en toute petite dimension) est quelque chose de très commun, on en trouve des traces dans les petites classes et notamment en seconde dans le chapitre sur les équations cartésiennes ou encore en spé Mathématiques concernant l'inverse d'une matrice.

À vrai dire, on peut donner quelques propriétés du déterminant (que l'on attend de lui) et montrer qu'il existe bien un objet (et un seul), **le déterminant**, les vérifiant. [8]

On est encore loin de pouvoir prétendre à des formules, exprimant le déterminant, type :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \tag{131}$$

En réalité, on va voir cette formule mais pas avec tous les "artifices" provenant de la théorie des groupes et de l'algèbre générale.

Au fond, qu'est-ce que le déterminant ? Intuitivement ? On l'a vu les matrices peuvent permettre de considérer l'orthogonalité, des longueurs... et si c'était également possible d'avoir une idée du volume d'un polygone multidimensionnel (engendré par un certain nombre de points). Plusieurs problèmes arrivent : pourquoi un polygone ? qu'est-ce que cette histoire de points ? pourquoi un volume ? Pour la suite, on ne va considérer que des matrices carrées. Sur ces matrices (n, n), on peut se dire que reposent n vecteurs de n composantes : un pour chaque colonne. Au fond, chacun de ces vecteurs (pour peu qu'on le fasse partir de l'origine) va permettre de représenter un point. De manière plus générale, si l'on considère l'ensemble de ces n vecteurs, on obtient n points de l'espace. Il y a fort à penser (on ne le démontre pas) que l'ensemble de ces points forme une figure à n sommets. Et s'il existait une manière de calculer son volume, ce serait merveilleux.

On laisse carrément de côté l'aspect géométrique pour ne se concentrer plus que sur du calcul pur. À moins que... à moins qu'on laisse planer le doute jusqu'à l'année prochaine ! En effet, on ne va rien faire de plus. La grande majorité des notions fait appel à des éléments du supérieur. Disons simplement que l'on a fait une petite introduction à l'existence d'une chose nommée déterminant. Il est trop tôt pour aller sérieusement plus loin.

32.2.4. *Inverse d'une matrice carrée.* On a déjà un tout petit peu évoqué la notion d'**inverse d'une matrice** lorsque l'on définissait ce qu'était la puissance d'une matrice 32.45. Voyons plus précisément ce que c'est. On s'attardera sur l'exemple bien particulier des matrices carrées d'ordre 2 avant d'esquisser quelques considérations générales.

Généralités La notion d'inversibilité pour les matrices n'est rien d'autre que la spécification d'une notion déjà bien connue (par exemple chez les réels). L'on trouve aisément l'inverse de 7 dans $\mathbb{R}$, par exemple. On se retrouve un peu plus embêté dès

8. On verra plus tard des énoncés type : *l'application déterminant en base B est l'unique forme n-linéaire alternée sur un espace E vérifiant* $\det_B(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$*, abrégé en* $\det_B(B) = 1$.

que l'on réfléchi dans "quelque chose" de "plus petit" que $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Z}$ par exemple). L'on va également pouvoir être "gêné" chez les matrices. Il existe des choses que l'on verra en détail plus tard($\mathrm{GL}_n(K)$, $\mathrm{SL}_n(K)$...) qui utilisent la notion d'inverse et permettent de ne pas trop se poser de question : est-ce que X ou Y est inversible ? C'est là d'ailleurs une question importante (à notre modeste échelle). Le calcul de l'inverse d'une matrice peut être extrêmement laborieux. Mais, restons sur de grandes généralités pour l'instant.

32.68. **Définition.** Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$.

32.69. **Exemple.** Si l'on remarque que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_2 \tag{132}$$

que peut-on en déduire ? Que A est inversible d'inverse $-A$. En effet : $A(-A) = I_2$.

32.70. **Remarque.** On jette à la trappe la matrice nulle. En effet, la matrice nulle étant un *élément absorbant*, toute produit d'une matrice quelconque avec la matrice nulle donne la matrice nulle : donc impossible que ce puisse être égal à la matrice identité. Ainsi, la matrice nulle n'est pas inversible (car il n'existe pas d'inverse adéquat).

On commence à s'apercevoir que toutes les matrices ne sont pas forcément inversibles (pour l'instant, on en connaît au moins une).

En effet, étudions plus précisément la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$. Considérons désormais une matrice B quelconque et supposons qu'elle soit l'inverse de la matrice A. Alors, on s'attend à ce que $AB = BA = I_2$. Calculons AB :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4c & b+4d \\ -\frac{1}{2}a - 2c & -\frac{1}{2}b - 2d \end{pmatrix} = I_2 \tag{133}$$

Cela nous conduit au système de quatre équations suivant (on verra "en détail" cette histoire de systèmes et le lien avec les matrices sous très peu) :

$$\begin{cases} a + 4c & = 1 \\ b + 4d & = 0 \\ -\frac{1}{2}a - 2c & = 0 \\ -\frac{1}{2}b - 2d & = 1 \end{cases} \tag{134}$$

Or problème : si l'on regarde la première et la troisième équation, l'on trouve une contradiction. En effet, d'un côté $a + 4c = 1$ et de l'autre $-\frac{1}{2}a - 2c = 0$ (ce qui revient à, après multiplication par moins deux : $a + 4c = 0$).[9]

En somme, la matrice A n'est pas inversible.

Si l'on regarde la définition 32.68, il existe en réalité un élément superflus qui peut être déduit (et n'a donc par conséquent pas vraiment besoin d'être posé dans la définition, toutefois, c'était le choix de ma professeure).

32.71. **Proposition.** *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si B est une matrice carrée d'ordre n telle que $AB = I_n$, alors $BA = I_n$.*

Réciproquement, si B est une matrice carrée d'ordre n telle que $BA = I_n$, alors $AB = I_n$.

Démonstration. On laisse la réciproque de côté. On ne prouve que la première proposition. (Notons que, avec le "peu de moyen" que l'on a pour l'instant, il va falloir démontrer la propriété en la travaillant au corps. En appliquant les définitions fondamentales).

On va chercher à prouver la commutativité. L'idée est simple : si B est l'inverse de A, on s'attend à ce que A soit également l'inverse de B.

Tout d'abord, on sait que l'on aura aucun problème de compatibilité du produit dans la mesure où les matrices A et B sont toutes deux carrées d'ordre n. Les produits AB et BA sont donc bien définis.

9. Il conviendrait une meilleure justification. L'idée est qu'une somme de choses linéaires ne peut pas avoir deux valeurs possibles.

Je suis con, à la base je m'étais fait tout un bins à essayer de raisonner sur les coefficients etc... en cherchant à montrer des choses type $\sum_{k=1}^{n}(ba)_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(ab)_{ii}$. (Le problème étant que le résultat n'est pas suffisamment fort, il ne caractérise pas suffisamment bien ce qui nous intéresse.)

En fait, on peut juste raisonner sur la transposée : $I_n = (I_n)^\intercal = (AB)^\intercal = BA$ et hop c'est plié. □

L'intérêt d'une telle proposition permet de ne retenir **que** le critère suivant : pour montrer qu'une matrice A est inversible, **il suffit** de montrer qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. (Sans avoir à se préoccuper de la réciproque.)

Montrons désormais un petit résultat important qui scelle définitivement le sort de l'inverse d'une matrice :

32.72. **Proposition.** *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A est inversible alors l'**unique** matrice B d'ordre n telle que $AB = I_n$ est appelée **matrice inverse de** A et est notée A^{-1}.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde pour prouver que l'inverse d'une matrice est unique. À cet effet, supposons que A possède plus d'un inverse, disons 2 pour fixer les choses que l'on va noter B_1 et B_2. Par hypothèse, on sait que $B_1A = AB_1 = I_n = B_2A = AB_2$. On cherche alors à montrer que $B_1 = B_2$. En vertu de la réciproque de la proposition 32.41, on sait que l'on ne peut pas procéder en utilisant une équation produit nul (c'est-à-dire former le produit $A(B_1 - B_2) = 0_n$ et en déduire que $B_1 = B_2$).

On considère la quantité suivante : B_1AB_2, elle est égale à $B_1I_n = B_1$ ou encore à I_nB_2, ce qui permet de conclure que $B_1 = B_2$. En effet, plus visuellement, on a :

$$\underbrace{B_1A}_{=I_n}B_2 = B_1\underbrace{AB_2}_{=I_n} \tag{135}$$

□

Enfin, avant de s'attarder sur le cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 et d'entrapercevoir ce qu'il se passe pour n quelconque, voyons quelques propriétés de l'inverse.

32.73. **Proposition.** *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible.*

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ *;*
2. $A^nA^{-1} = A^{n-1}$ *;*
3. $(A^{-1})^{-1} = A$ *;*
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*, pour B une matrice carrée inversible d'ordre n ;*
5. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$*, pour un α scalaire non nul ;*
6. $(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal$*, si $A^\intercal$ est inversible ; et,*
7. *$AC = BC$ implique $A = B$ si C est une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice carrée d'ordre n.*

Démonstration.

1. par définition, c'est une évidence.
2. idem.
3. par application de la propriété numéro 1, on a que $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I_n$, d'où : $(A^{-1})^{-1}A^{-1}A = I_nA = A$.
4. dans la même logique que pour la démonstration de la propriété numéro 3, on a : $(AB)^{-1}AB = I_n$, d'où : $(AB)^{-1}ABB^{-1} = I_nB^{-1} = B^{-1}$ et enfin : $(AB)^{-1}AA^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. c'est une conséquence de la propriété numéro 4 en remarquant simplement que la multiplication par un scalaire est commutative (en notant que l'inverse d'un scalaire reste et est toujours un scalaire, pour peu que l'on considère le bon "ensemble", mais ici aucun problème avec les réels ou les complexes par exemple, tant que α est différent de zéro du moins). En clair, en appliquant la propriété 4, on trouve :

$$(\alpha A)^{-1} = A^{-1}\alpha^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1} \tag{136}$$

6. sans plus de surprise que pour les démonstrations des propriétés 3 et 4, on raisonne de manière similaire. Néanmoins, nous allons utiliser une propriété supplémentaire : $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$ (cf. proposition 32.58). Ainsi : $(A^{-1})^\intercal A^\intercal = (AA^{-1})^\intercal = I_n^\intercal = I_n$, d'où alors : $(A^{-1})^\intercal A^\intercal(A^\intercal)^{-1} = I_n(A^\intercal)^{-1}$. Ce qui donne le résultat escompté : $(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1}$.

7. on entraperçoit quelque peu la section suivante sur les systèmes linéaires. Démontrons cette propriété afin de commencer à se familiariser avec ces derniers. On a supposé C inversible donc multiplions à gauche par l'inverse de C :

$$ACC^{-1} = BCC^{-1} \text{ qui devient } A\underbrace{CC^{-1}}_{=I_n} = B\underbrace{CC^{-1}}_{=I_n} \tag{137}$$

d'où $A = B$.

□

Matrices carrées d'ordre 2

32.74. **Proposition.** *Soit A la matrice carrée d'ordre 2 suivante $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose A non nulle. Alors, si A est inversible, son inverse s'exprime tel que :*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{138}$$

Démonstration. Il n'y a qu'à faire le calcul :

$$AA^{-1} = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]\left[\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{139}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = I_2 \tag{140}$$

□

32.75. **Remarque.** On remarque alors qu'une matrice carrée d'ordre 2 n'est inversible qu'à la condition suivante : que $ad - bc$ soit non nul (ce qui revient à postuler que le déterminant de ladite matrice soit non nul).

Matrices carrées d'ordre n

32.76. **Proposition.** *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose A non nul. Alors, si A est inversible, son inverse s'exprime tel que :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{com}(A)^{\intercal} \tag{141}$$

32.77. **Remarque.** De manière similaire au cas $n = 2$, on déduit que la matrice est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

On ne définit pas pour l'instant ce qu'est ce $\operatorname{com}(A)$, la comatrice, on verra plus tard. Notons toutefois, en fin de compte que la méthode de la proposition 32.76 pour calculer l'inverse d'une matrice se fait supplanter par d'autres méthodes, par exemple celle du pivot de Gauss que l'on aura l'occasion de voir dans quelques mois.

33. Formule BCH vue par un élève de Terminale

Je me demande si la première fois que j'en ai entendu parler n'était pas un document de J. Feydy.
L'histoire semble commencer avec des matrices et finit dans des *algèbres de Lie de groupes de Lie* (qu'est-ce ?).

Commençons par le commencement : on se souvient des problèmes de commutativité que l'on pouvait rencontrer avec les matrices (cf. la section 32.1.2). De manière générale, on est bien loin d'avoir l'égalité suivante :

$$AB = BA \tag{142}$$

où A et B sont deux matrices compatibles pour le produit (on va même dire carrées tant qu'à faire).

Alors alors comment faire ? Comment "*dériver*" la formule de Baker-Campbell-Hausdorff ? Comme un couillon, je pensais qu'une simple étude du Taylor (ordre par ordre) de $\exp(X)\exp(Y)$ suffirait... Un petit programme [10], et c'était réglé :

10. Je ne sais pas si fallait spécifier un truc type *commutative=False*.