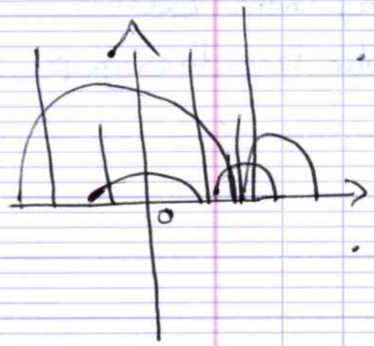
SL - GéoHyperbo

• upperhalf-plane model

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

Let $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} , |z| = 1 \}$ be the unit circle of $\mathbb{C}$.

Definition 1.1 There are two seemingly different types of hyperbolic lines:

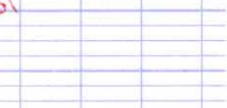


• one is the intersection of $\mathbb{H}$ with a euclidean line in $\mathbb{C}$ perpendicular to the real axis $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$

• the other is the intersection of $\mathbb{H}$ with a euclidean circle centred on the real axis $\mathbb{R}$.

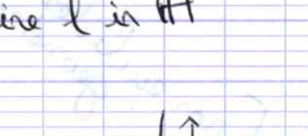
→ exists a way of unifying these two types of hyperbolic lines.

Proposition 1.2 For each pair p and q of distincts points in $\mathbb{H}$, there exists a unique hyperbolic line l in $\mathbb{H}$ passing through p and q.



Proof Two cases: • same real parts
↳ euclidean line

• $\neq$ real parts
↳ construct a circle (centred on $\mathbb{R}$)



uniqueness comes from the euclidean setting.

Is hyperbolic geo different from euclidean geo since it is based on it?

YES! A LOT. Will see how much.

First example

Definition 1.3 Two hyperbolic lines in $\mathbb{H}$ are parallel if they are disjoint. [par analogie avec la géométrie euclidienne]

Theorem 1.4. Let ℓ be a hyperbolic line in $\mathbb{H}$ and let p be a point in $\mathbb{H}$ not on ℓ. Then, there exist infinitely many distinct hyperbolic lines through p that are parallel to ℓ.

if two are constructed take points in between.

Proof Two cases ✓.

Hyperbolic geometry do not respect Euclidean parallel postulate, i.e. given Euclidean line L and a point not on L, ~~then~~ there exists a unique Euclidean line through p and parallel to L.

[axiomatique]

[non euclidean geometry]

$\Downarrow$

$\exists$ at least two in hyperbo (infinitely many)

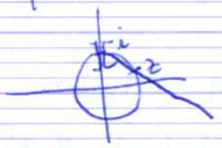
Need to define hyperbolic length, hyperbolic distance, hyperbolic area

$\Rightarrow$ group of transformations of $\mathbb{H}$ taking hyperbolic lines to hyperbolic lines

Beltrami, Klein, Poincaré

1.2. The Riemann Sphere $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\longrightarrow$ unify hyperbolic lines as one single object



Consider $\xi : \mathbb{S}^1 - \{i\} \to \mathbb{R}$ assigning $z \mapsto \mathbb{R} \cap K_z$ where K_z is the euclidean line passing through i and $z \in \mathbb{S}^1 - \{i\}$
[stereographic projection]
↳ rend raisonnable d'appeler le compactifié la sphère de Riemann

One has : $\xi(z) = \dfrac{Re(z)}{1 - Im(z)} \quad (, z \neq i)$
[bc of line equation of K_z]

$$\xi^{-1}(x) = \frac{2x}{x^2+1} + i\,\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$\Rightarrow$ ξ is a bijection between $\mathbb{S}^1 - \{i\}$ and $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ because $\mathbb{R}$ is $\mathbb{S}^1$ minus a point, then (alike) $\mathbb{R}$ might be $\mathbb{S}^1$ plus a point

[one-point compactification]

Topoly is $\mathbb{H}$ is essentially the same, except for the ∞ point.

For regular points : $U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$
For ∞ point : $U_\varepsilon(\infty) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$

Def A set X is open if for each point x of X, there exists some $\varepsilon > 0$ (possibly depending on x, X) so that $U_\varepsilon(x) \subset X$

D open of $\mathbb{C} \Rightarrow D$ open of $\overline{\mathbb{C}}$

eg. $\mathbb{H}$ is an open of $\overline{\mathbb{C}}$
$U_1(\varepsilon)$ is open in $\overline{\mathbb{C}}$
$\mathbb{S}^1$ is not open

<u>Def</u> A set X is closed in $\overline{\mathbb{C}}$ if its complement $\overline{\mathbb{C}} - X$ is open in $\overline{\mathbb{C}}$.

eg S^1 is closed in $\overline{\mathbb{C}}$ because
$$\overline{\mathbb{C}} - S^1 = U_1(0) \cup U_1(\infty)$$
(union of opens is open)

<u>Def</u> A sequence $\{z_n\}_n$ of $\overline{\mathbb{C}}$ <u>converges</u> to $z \in \overline{\mathbb{C}}$ if for each $\epsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ so that $z_n \in U_\epsilon(z)$, $\forall n \geq N$

[adhérence]

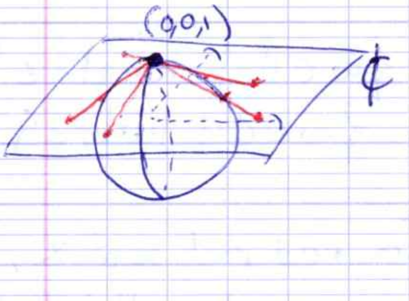
<u>Def</u> Let $X \subset \overline{\mathbb{C}}$. The closure of X in $\overline{\mathbb{C}}$, denoted $\overline{X}$, is
$$\overline{X} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid U_\epsilon(z) \cap X \neq \emptyset, \text{ for all } \epsilon > 0\}.$$

Note $X \subset \overline{X}$ because $\{x\} \subset U_\epsilon(x) \cap X$.
$\lim_p x_n \in \overline{X}$ for $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$.

<u>Def</u> A circle in $\overline{\mathbb{C}}$ is either a Euclidean circle in $\mathbb{C}$ or the union of a Euclidean line in $\mathbb{C}$ with $\{\infty\}$.

$\overline{L} = L \cup \{\infty\}$ notation

eg $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ is a circle in $\overline{\mathbb{C}}$



le pôle nord

$$\xi : S^2 - \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

[generalization of stereographic projection]

$\forall P \in S^2 - \{(0,0,1)\}$, let L_P line passing through $\{(0,0,1)\}$ and P and let $\xi(P)$ be the intersection between L_P and $\mathbb{C}$

cercles, droites, sphères ⇒ notions raisonnables même si ça ne le paraît pas totalement au début

ξ is bijective.

Equation circles in $\overline{\mathbb{C}}$: $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$

Rq : un cercle sur $\mathbb{S}^2$ est l'intersection d'un plan non tangent avec $\mathbb{S}^2$
les cercles de $\overline{\mathbb{C}}$ sont exactement les images de ces cercles par la projection (clair pour cercles passant par N, moins pour les autres)
(↳ soit preuve bourrin calcul, soit dans quelques séances argument plus abstrait

Def A function $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ is continuous at $z \in \overline{\mathbb{C}}$ if for each $\varepsilon > 0$, there exist $\delta > 0$ (depending on ε, z) so that $w \in U_\delta(z)$ implies $f(w) \in U_\varepsilon(f(z))$.

[usual operations ~~on~~ continuous function]
[slight difference between $\mathbb{R}$-continuity and $\overline{\mathbb{C}}$-continuity]

Proposition The function $J : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ defined by
$$J(z) = \frac{1}{z} \text{ for } z \in \mathbb{C}^*,\ J(0) = \infty,\ J(\infty) = 0$$
is continuous on $\overline{\mathbb{C}}$.

ça va le revoir cette fonction
$J \circ J(z) = z,\ z \in \overline{\mathbb{C}}$

Moreover, it is a homeomorphism of $\overline{\mathbb{C}}$
↓
a bijection and both f and f^{-1} are continuous

We note $\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}}) = \{ f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ is a homeomorphism} \}$
↳ forms a group.

→ terminologie deviendra claire + tard

1.3 The Boundary at infinity of $\mathbb{H}$.

NOTE : complement of circles in $\overline{\mathbb{C}}$ have two components
eg. $(\mathbb{S}^1)^c$: $U_1(0)$ and $U_1(\infty)$
$(\overline{\mathbb{R}})^c$: $\mathbb{H}$ and $\mathbb{H}^c_-$

Def A disc D in $\overline{\mathbb{C}}$ is one of the components of the complement of a circle A in $\overline{\mathbb{C}}$. For such D and A, we refer to A as the circle determining the disc D.

eg $\overline{\mathbb{R}}$ is the circle determing $\mathbb{H}$ → $\overline{\mathbb{R}}$ = "boundary at infinity of $\mathbb{H}$"
→ pts of $\overline{\mathbb{R}}$ = "points at infinity of $\mathbb{H}$"

every circle on $\overline{\mathbb{C}}$ determines two disjoint discs in $\overline{\mathbb{C}}$.
a disc determines an unique circle.

cercle est le bord du disque !
pq dist° à l'infini ? → distance.
~~ça cercle est bord~~.

Generalisation. boundary at infinity of $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ to be the intersection $\overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}}$

Proposition Let p be a point of $\mathbb{H}$ and q a point of $\overline{\mathbb{R}}$.
Then, there is a unique hyperbolic line in $\mathbb{H}$ determined by p and q.

2 - The general Möbius group

→ quantities invariant under action of group of transformations
→ Möbius transformations & reflection
→ transformations preserving $\mathbb{H}$?

2.1 - Group of Möbius transformations

Let $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}}) \subset \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ homeo taking circles of $\overline{\mathbb{C}}$ to circles of $\overline{\mathbb{C}}$

→ still unclear ~~if~~ inverses of $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ lie in $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$

pb surjectivité inverse, pas clair

Let's first consider homeo arising from polynomials (⇒ forced to be of degree 1 ; see previous exercises).

$(f(z) = g(z)$ for $z \in \mathbb{C}$, $f(\infty) = \infty$, g poly deg 1$)$

Proposition The element f of $\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ defined by
$$f(z) = az + b, \; z \in \mathbb{C} \;, \; f(\infty) = \infty$$
where $a, b \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, is an element of $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$

$az+b$ composée d'une homothétie, rotation, translation qui préservent les cercles ⇒ on peut faire preuve sans calcul

Proof show if z satisfies a ~~circ~~ line equation, then $f(z)$ satisfies a similar

passer par les équations dans $\mathbb{C}$

Proposition The element J of $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ defined by $J(z) = \frac{1}{z}$ for $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$ is an element of $\text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$

Prove for euclidean line & euclidean circles given the equation

More generally:

obtained by group composition

Def A Möbius transformation is a function $m : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ of the form:

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ and $ad - bc \neq 0$.

Let Möb^+ denote the set of all Möbius transformations.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z$ det ok ✓

→ mais géométriquement pourquoi $ad-bc \neq 0$?

$GL_2(\mathbb{C})$

$SL_2(\mathbb{C})$

Note that $m(\infty) = \frac{a}{c}$ (usual limit)

well defined because by $ad-bc$ condition, either a or c has to be $\neq 0$.

si $c = 0$, $m(\infty) = \infty$.

$\frac{a}{0} = \infty$ by continuity $a \neq 0$ in $\overline{\mathbb{C}}$

but undefined $\frac{0}{0}$ and $\frac{\infty}{\infty}$

pourquoi le $^+$ sur Möb^+ ? plus tard, on aura Möb sans plus

Explicit expression of the inverse of $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$:

$$m^{-1}(z) = \frac{b - dz}{cz - a} \Rightarrow \text{thus } m \text{ bijection}$$

⇓

Möb^+ forms a group.

Theorem 2.4 Let $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ with $ad - bc \neq 0$

If $c = 0$, $m(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$.

If $c \neq 0$, $m(z) = f(J(g(z)))$ where $g(z) = c^2 z + cd$

$f(z) = -(ad-bc) z + \frac{a}{c}$

$f(\infty) = \infty = g(\infty)$

décomposer Mat m en produit de matrices triangulaires

Thus, as composition of homeomorphisms, one has:

$$\text{Möb}^+ \subset \text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$$

⇓

On va interpréter les compositions d'homographies comme produit de matrices

More precisely: $\boxed{\text{Möb}^+ \subset \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})}$

Classification of Möbius transforms based on # of fixed points

distinct

y'a une infinité de pts fixe a fortiori

- if m is the identity: 3
- $c = 0$: 1 or 2
- $c \neq 0$: 1 or 2

preuve par l'absurde

(penser à $m(\infty) = \infty$ ou pas

Reciprocal: Let $m(z)$ be a Möbius transformation fixing three distinct point of $\overline{\mathbb{C}}$. Then m is the identity transformation

Idée preuve:

2.2. Transitivity properties of Möb$^+$

Möb$^+$ acts uniquely triply transitively on $\overline{\mathbb{C}}$

↳ given $(z_1, z_2, z_3) \neq (w_1, w_2, w_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3$

$\exists!\ m \in \text{Möb}^+$ tq $m(z_1) = w_1$, $m(z_2) = w_2$, $m(z_3) = w_3$

for uniqueness, use reciprocal up there

existence, ~~consider~~: [trichier]

group action

rendre concrets les choses

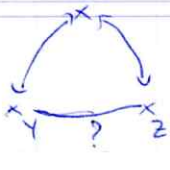
réaliser concrètement en objet

well behaved collection of symmetries of a set X

Def A group G acts on a set X if there is a homeomorphism from G onto the group $\text{Bij}(X)$ of bijections of X.

G acts <u>transitively on X</u> if for each $(x, y) \in X^2$, $\exists g \in G$ such that $g(x) = y$.

G acts <u>uniquely transitively on X</u>: $\forall$ ⊕ unicity of g



action transitive? Prendre un point de référence x qui nous arrange le point important

Theorem I Möb$^+$ acts uniquely transitively on the set T of triples of distinct points of $\overline{\mathbb{C}}$.

but not uniquely transitively

Theorem Möb$^+$ acts transitively on the set C of circles in $\overline{\mathbb{C}}$.

Theorem Möb$^+$ acts transitively on the set D of discs in $\overline{\mathbb{C}}$.

To show those theorems, have in mind:

- triple of distinct point in $\overline{\mathbb{C}}$ determines a unique circle in $\overline{\mathbb{C}}$ (converse is not true !!!)
- strange compositions → going from a simple case to the general situation
- think about $J(z) = \frac{1}{z}$, $J(0) = \infty$ $J(\infty) = 0$.

interpret transitive action in term of surjectivity; uniquely transitive in term of injective ⊕ surjective

2.3. The cross ratio (birapport)

→ functions on $\overline{\mathbb{C}}$ invariant under Möb$^+$

Def is a function $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, $U \subset \overline{\mathbb{C}}^k$, st

$$f(z_1, \dots, z_k) = f(m(z_1), \dots, m(z_k))$$

for all $m \in$ Möb$^+$ and all $(z_1, \dots, z_k) \in U$.

triple transitivity of Möb$^+$ on $\overline{\mathbb{C}}$ implies: the only function for $\overline{\mathbb{C}}$ of $n = 1, 2$ or 3 variables invariant under Möb$^+$ are the constant functions.
More interesting for $n \geq 4$. For instance, we have the crossratio.

is invariant

Def Let $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_3 \in \mathbb{C}$, their crossratio is:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

define the cross ratio of a $z_k = \infty$ by continuity cross-ratio is invariant

For instance : $[\infty, 0 ; 1, z] = \frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2}$

$\hookrightarrow$ is real iff $\bar{z}$ and hence z is.

Proposition Let z_1, z_2, z_3, z_4 be four distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$ ~~and~~ ~~let m be a Mö~~ Then z_1, z_2, z_3, z_4 lie on a circle in $\bar{\mathbb{C}}$ if and only if the cross ratio is real

Proof Let m be st $m(z_1) = \infty$, $m(z_2) = 0$, $m(z_3) = 1$
Use ~~take~~ that cross ratio is invariant under Möb$^+$ and Möb$^+ \subset \mathrm{Homeo}^c(\bar{\mathbb{C}})$

On peut introduire d'autres birapport très symétriques :

$$[z_1, z_2 ; z_3, z_4]_2 = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

$$[z_1, z_2 ; z_3, z_4]_3 = \frac{(z_2 - z_1)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_4)(z_3 - z_1)}$$

et l'on a :

$$[z_1, z_2 ; z_3, z_4]_2 = \frac{1}{[z_1, z_2 ; z_3, z_4]}$$

$$[z_1 z_2 ; z_3, z_4]_3 = \frac{1}{1 - [z_1 z_2 ; z_3, z_4]}$$

2.4 Classification of Möbius transforms

→ raffiner la classification of Möb$^+$ elements in term of # of fixed points.

Def Two Möbius transformations ~~are~~ m_1 and m_2 are conjugate if there exists some Möbius transformation p so that $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$.

Conjugaison "sameness" ↓ m_1 and m_2 have same geometric action up to a coordinate change

Rk: If n and m are conjugate then same # of fixed points

Idea: use conjugate to classify Möb$^+$ elements

Let $m \neq Id$ be a Möb$^+$ element.

But: chercher pts (0,1,∞) fixes par nos transformations

Only one fixed point:

Standard form of a parabolic element m : $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z+1$ (only one ~~de~~ fixed point in $\mathbb{C}$)

↳ eg $m(z) = \frac{z}{z+1}$

If two fixed points:

a is the Multiplier of m if $p \circ m \circ p^{-1}(z) = az$ for $a \in \mathbb{C} - \{0,1\}$

bien défini? à inverse près

Rk: $a = p \circ m \circ p^{-1}(1)$

est-ce que a est bien défini? indep du choix de la conjugaison?

x, y fixed points of m st $p(x) = 0$, $p(y) = \infty$

Sps multiplier of m st $|a| = 1$

→ m is elliptic and may write $a = e^{2i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$

then $p \circ m \circ p^{-1}(z) = e^{2i\theta} z$, rotation d'angle 2π

↳ Standard form $e^{2i\theta} z$

Sps multiplier of m st $|a| \neq 1$, then $a = \rho^2 e^{2i\theta}$ $(\rho \neq 1)$, $\theta \in [0, \pi[$

→ m is loxodromic, its standard form : $q \circ m \circ q^{-1}(z) = \rho^2 e^{2i\theta}$

(dilatation by ρ^2 ⊕ rotation by 2π)

↓

expansion if $\rho^2 > 1$

contraction if $\rho^2 < 1$

pq considérer 2θ plutôt que θ? → lié à la diagonalisation de matrice / valeurs propres

2.5. ~~Re~~ Matrix representation

Möbius transforms $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ 2×2 matrices

product ~~=~~ composition of matrices

$\downarrow$

important quantities: trace and determinant.

eg $\chi(M)(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M)$

Def Let $m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, then $\det(m) = ad-bc$.

↳ defined up to a constant.

eg $n(z) = \alpha m(z)$, then $\det(n) = \alpha^2 \det(m)$

but n, m have same geometric interpretation

But can choose α st $\det(m) = 1$.

but still ambiguity by -1 multiplication

l'auteur est tombé sur la tête, il définit un truc puis dit ensuite que c'est mal défini !

On peut faire $M \mapsto m$ mais pas $m \mapsto M$ (matrice $\in$ Möb$^+$)

Def Let $\tau : \text{Möb}^+ \to \mathbb{C}$ st $\tau(m) = (a+d)^2$.

↳ consider that instead of $a+d$, so no ambiguity more

exo: $\tau(mn) = \tau(nm)$, $\tau(pmp^{-1}) = \tau(m)$ ✓

Rk conjugacy invariante suffices to caracterize types of transforms.

Proposition (Let $m \neq Id \in$ Möb$^+$.)

for the normalized form ($\det(m)=1$) $\Rightarrow$

- m parabolic ($pmp^{-1}(z) = z+1$) : $\tau(m) = (1+1)^2 = 4$
- m elliptic : $\tau(m) \in \mathbb{R}$ and $\tau(m) \in [0;4[$
  ↳ after normalization, we find $\tau(m) = 4\cos^2(\theta)$
- m loxodromic : $Im(\tau(m)) \neq 0$ OR $\tau(m) \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$

↓ faut normaliser

~~On~~ peut aussi determiner le multiplicateur α $\to$ if m has multiplier α^2, then $\tau(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = \alpha^2 + \alpha^{-2} + 2$ then solve for a given $\tau(m)$

$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\tau(m) - 2 \pm \sqrt{-4\tau(m) + \tau^2(m)}\right)$

Let $\rho : GL_2(\mathbb{C}) \to \text{Möb}^+$ st,

$$\rho\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(m(z) = \frac{az+b}{cz+d}\right)$$, c'est un homomorphisme tq $\ker(\rho) = \{\alpha Id \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$

Mq $\text{Möb}^+ \cong PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\ker \rho$

1er thm d'isomorphisme

Penser que $m(z)=az$ se représente naturellement par $\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}}\end{pmatrix}$ (version normalisée)

2.6 Reflections

Recall $\text{Möb}^+ \subset \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$ (on a mieux cf au dos)

↳ extend to a larger group.

C acts as a reflexion

Prop The function $C : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ defined by
$$C(z) = \bar{z},\ z \in \mathbb{C},\quad C(\infty) = \infty$$
is an element of $\text{Homeo}^c(\mathbb{C})$ but not of Möb^+.

C acts a reflexion

Def The general Möbius group Möb is the group generated by Möb^+ and C. That is, every (nontrivial) element p of Möb can be expressed as a composition:
$$p = (C \circ m_k) \circ \dots \circ (C \circ m_1)$$
for some $k \geq 1$, où $m_k \in \text{Möb}^+$.

penser au rapport produit matriciel et composition

→ Because $\text{Möb}^+ \subset \text{Möb}$: Möb acts transitively on triple of ≠ point of $\overline{\mathbb{C}}$, on discs in $\overline{\mathbb{C}}$, on circles in $\overline{\mathbb{C}}$.

But: no unique transitivity on triple of ≠ points !!!

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$ en trouver l'inverse.

We have $\text{Möb} \subset \text{Homeo}^c(\overline{\mathbb{C}})$

Form of the elements (exo) : $\dfrac{az+b}{cz+d}$ OR $\dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$

Prop Every element of Möb can be expressed as the composition of reflections in finitely many circles in $\mathbb{C}$.

avec Möbius on a pas fait de det projectif

Preuve Comme Möb engendré par Möb^+ et C, suffit de vérifier la proposition

↳ engendré par $\frac{1}{z}$ et $az+b$

↳ suffit de vérifier pour eux

notion de reflection par rapport à A. C_A

Ça génère : important : on a besoin que d'un nombre fini de réflections C_{A_i}, $i=1,\dots,n$.

ce qui montre au passage que $\mathrm{Homeo}^c(\bar{\mathbb{C}})$ est un groupe

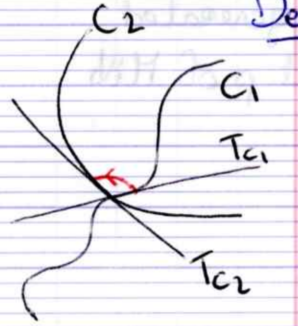
Theorem $\boxed{\text{Möb} = \mathrm{Homeo}^c(\bar{\mathbb{C}})}$

[à reprendre] → y'a pas une preuve du même genre à base d'Arac ?

Preuve Il reste à mq $\mathrm{Homeo}^c(\bar{\mathbb{C}}) \subset$ Möb, cf p.52.

~~choix de~~ densité points adéquats ⇝ ingrédients

2.7: The conformality of elements of Möb.



Def Given two smooth curves C_1 and C_2 in $\mathbb{C}$ that intersect in z_0, define the angle $\mathrm{angle}(C_1, C_2)$ between C_1 and C_2 at z_0 to be the angle between the tangent lines to C_1 and C_2 at z_0, measured from C_1 to C_2.

$$\mathrm{angle}(C_1, C_2) \overline{=} -\mathrm{angle}(C_2, C_1)$$

defined up to ~~a~~ additive multiple of π

Def A homeomorphism of $\bar{\mathbb{C}}$ that preserves the absolute value of the angle between curves is said to be conformal

∃ slightly ≠ other def

Theorem The elements of Möb are conformal homeomorphisms of $\bar{\mathbb{C}}$.

Preuve idée: se ramener aux droites euclidiennes de $\mathbb{C}$ car on mesure les angles avec des tangentes...!
Calculer comme une brute en se restreignant ~~Se restreindre~~ aux éléments générateurs de Möb.

∃ une preuve plus géométrique Jones & Singerman.

2.8. Transformations préservant $\mathbb{H}$

Jusqu'alors : • on a vu quelques propriétés des droites hyperboliques (parallélisme, paramétrisation/équation...)

• ~~aussi~~ on a étudié les |homéomorphismes| ~~transformations~~ ~~plan~~ du plan complexe qui envoient les cercles de $\overline{\mathbb{C}}$ sur des cercles de $\overline{\mathbb{C}}$ et montré que ces éléments avaient une certaine forme.

Désormais, l'objectif est de caractériser les transformations du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ envoyant les droites hyperboliques sur les droites hyperboliques.

préservant le bord $\Leftrightarrow m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$.

$m(\mathbb{H}) \subset m(\overline{\mathbb{R}})$?

Def On appelle $\text{Möb}(\mathbb{H})$ le sous-groupe de Möb préservant $\mathbb{H}$, i.e. $\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{m \in \text{Möb} \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$.

De même, on définit $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) = \{m \in \text{Möb} \mid m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}$

remarque ⊕ générale à la fin

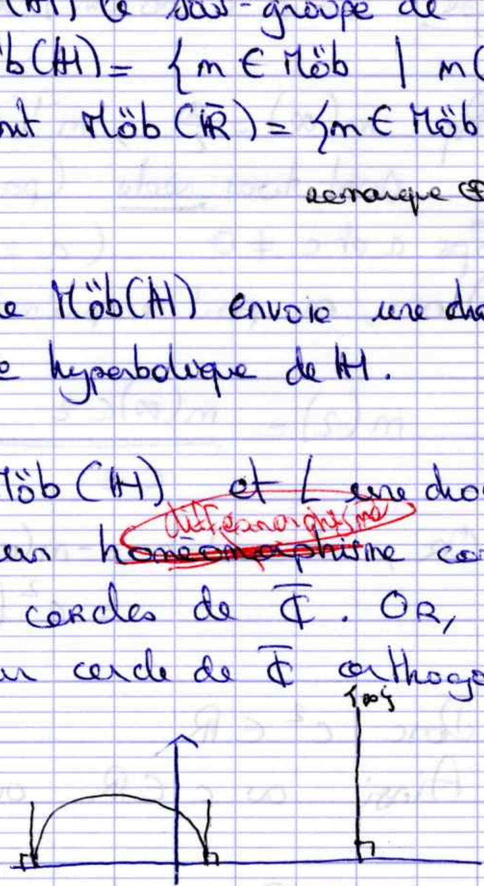
Théorème Tout élément de $\text{Möb}(\mathbb{H})$ envoie une droite hyperbolique de $\mathbb{H}$ sur une droite hyperbolique de $\mathbb{H}$.

Preuve Soit $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ et L une droite hyperbolique de $\mathbb{H}$. Comme m est un ~~homéomorphisme~~ difféomorphisme conforme, il préserve l'angle entre cercles de $\overline{\mathbb{C}}$. Or, L est l'intersection de $\mathbb{H}$ avec un cercle de $\overline{\mathbb{C}}$ orthogonal à $\overline{\mathbb{R}}$.

attention homéo/difféo ici sur $\mathbb{C}$ ça coïncide pas la conformité ça vient juste ensuite

Deux cas :

De plus, $\text{Möb} = \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$



Donc $m(L)$ est une droite hyperbolique de $\mathbb{H}$. En effet : dessin

⇒ montrer par le dessin

ou bien avoir normalisation ~~coeff~~ coeff réels ou imag. purs
ou
bien avec det ± 1 coeff tous réels

Théorème ~~Tout élément~~ Les éléments $m \in$ Möb$(\overline{\mathbb{R}})$ s'écrit sous l'une des formes suivantes :

① $m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, ② $m(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

où a,b,c,d sont tous réels ou bien tous imaginaires purs et $ad-bc=1$. ~~ou avoir det ± 1 et coeff tous réels~~

4 cas donc

Analyse Synthèse

Preuve On sait que tout élément m de Möb peut se mettre sous la forme ① ou ② avec $ad-bc = 1$ $\neq 0$ (exo). L'objectif est de déterminer les conditions sur a,b,c,d pour avoir $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$.

Je remarque

Avant, remarquons que $C(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, donc $C \in$ Möb$(\overline{\mathbb{R}})$.
Donc, quitte à composer par C, on peut se restreindre à des éléments de la forme ①.

$\Rightarrow$ ça donne une autre forme du thm

à Sl_2

Analyse Soit $m \in$ Möb$(\overline{\mathbb{R}})$ tq $m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc = 1$ $\neq 0$

Rq $m(\infty) = \dfrac{a}{c}$, $m^{-1}(\infty) = -\dfrac{d}{c}$, $m^{-1}(0) = -\dfrac{b}{a}$
sont tous réels (par déf de m)
Sps a et $c \neq 0$ ($a=0$ ou $b=0$: exo)
Alors, on peut réexprimer m :

$$m(z) = \frac{m(\infty)cz - m^{-1}(0)m(\infty)c}{cz - m^{-1}(\infty)c}$$

Or, $1 = ad-bc = -m(\infty)c\, m^{-1}(\infty)c + m^{-1}(0)m(\infty)c^2$
$= c^2 \underbrace{\left(m^{-1}(0)m(\infty) - m(\infty)m^{-1}(\infty)\right)}_{\text{réel et } \neq 0 \text{, car } c \neq 0 \text{ et prop de l'inverse}}$

$\dfrac{a_i x + \beta i}{\gamma i\, x + \delta i} = \dfrac{i}{i}\left(\dfrac{\cdots}{\cdots}\right) \in \mathbb{R}$

$z^2 = (p+iq)^2$

Donc $c^2 \in \mathbb{R}$
Ainsi ou $c \in \mathbb{R}$ ou $c \in i\mathbb{R}$

Synthèse On vérifie que les ~~quatre~~ formes obtenues conviennent c.a.d qu'avec les a,b,c,d trouvés, on ait $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$

Rq finale $\rightarrow$ faire la même chose pour Möb(A), A cercle de $\overline{\mathbb{C}}$ en se ramenant au cas Möb$(\overline{\mathbb{R}})$ ($p(\overline{\mathbb{R}}) = A$) conjuguer
ce qui va nous intéresser c'est le cas où A est un disque de $\overline{\mathbb{C}}$

2.8. Preserving $\mathbb{H}$

Recall our goal: determine transformations of the upper half plane $\mathbb{H}$ that take hyperbolic lines to hyperbolic lines.

Define $\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{ m \in \text{Möb} \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \}$.
$\text{Möb}^+(\mathbb{H}) = \{ m \in \text{Möb}^+ \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \}$

Theorem Every element of $\text{Möb}(\mathbb{H})$ takes hyperbolic lines in $\mathbb{H}$ to hyperbolic lines in $\mathbb{H}$.

→ want explicit expression for the elements of $\text{Möb}(\mathbb{H})$ and $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$
↳ start with simpler case (bc $\overline{\mathbb{R}}$ is also a circle in $\overline{\mathbb{C}}$)

Theorem Every element of $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ has one of the following forms:

C'est version ⇒

- $m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ with $ad-bc=1$,
- $m(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ with $ad-bc=1$,
- $m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in i\mathbb{R}$ with $ad-bc=1$,
- $m(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a,b,c,d \in i\mathbb{R}$ with $ad-bc=1$.

Version SL_2 (de det ± 1) et coeff tous réels → c'est ce que l'on gagne en demandant det +1 ou -1

↳ More generally can determine the form of $\text{Möb}(A)$ for A a circle in $\overline{\mathbb{C}}$ (en conjuguant!)

exo 2.37 détermine la forme des éléments de $\text{Möb}(S^1)$

c'est en ⊕ ceux-ci ⇒

Theorem Every element of $\text{Möb}(\mathbb{H})$ either has the form

- $m(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad-bc=1$ OR
- $m(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a,b,c,d \in i\mathbb{R}$, $ad-bc=1$.

preuve : discriminer parmi les éléments de $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$, car $\text{Möb}(\mathbb{H}) \subset \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$

↳ Ça permet de retrouver la forme des éléments de Möb^+ (car aucun n'a la forme $\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$)

rq $\text{Möb}(A)$ est similaire à des $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$

on a des coeffs tous réels ⟸ forme det utiliser la ±1 ⇒ ⊕ rapide

voir notamment → ⊕ simple ou général
Composée de Möbius ou multiples de matrices ? ⟹ ~~mult~~ nat

Tout ça pour en arriver à un point bien précis.

Prop Reflection in a circle in $\overline{\mathbb{C}}$ is well-defined.

2.9. Transitivity properties of $\text{Möb}(\mathbb{H})$

→ recall : • Möb^+ acts uniquely transitively on triples of distinct points of $\overline{\mathbb{C}}$

• Möb^+ acts transitively on the set of circles in $\overline{\mathbb{C}}$ and discs in $\overline{\mathbb{C}}$.

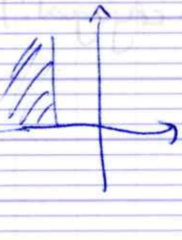
Proposition $\text{Möb}(\mathbb{H})$ acts transitively on $\mathbb{H}$.

→ utiliser lemme 2.8.

Prop $\text{Möb}(\mathbb{H})$ acts transitively on the set of hyperbolic lines in $\mathbb{H}$.

But not on set of pairs of distinct point of $\mathbb{H}$.

Def An open half-plane in $\mathbb{H}$ is a component of the complement of a hyperbolic line in $\mathbb{H}$.



A closed half-plane in $\mathbb{H}$ is the union of a hyperbolic line l with one of the open half-planes determined by l.

The hyperbolic line determining a half plane is the bounding line for that half plane.

Prop $\text{Möb}(\mathbb{H})$ acts transitively on open half-planes in $\mathbb{H}$.

$\text{Möb}(\mathbb{H})$ acts triply transitively on triples of distinct points of $\overline{\mathbb{R}}$

↳ But not $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$

2.10 - The geometry of the action of Möb(H)

→ consider how individual elements of Möb(H) act on H.
[↳ catalogue of possibilities]

Theorem Let $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ be an element of $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ st $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ and $ad-bc=1$. Then, exactly one of the following holds:

3 fixed pts (and more)

- m is the identity,
- m has exactly two fixed points in $\overline{\mathbb{R}}$; in which case, m is loxodromic and is conjugate in $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ to $q(z) = \lambda z$ for some positive real number λ,

dilatation

- m has one fixed point in $\overline{\mathbb{R}}$; in which case, m is parabolic and is conjugate in $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ to $q(z) = z+1$, or

translation

- m has one fixed point in $\mathbb{H}$; in which case, m is elliptic and is conjugate in $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ to $q(z) = \frac{\cos(\theta)z + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$ for some real number θ.

Rotation

Theorem Let $n(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$ be an element of $\text{Möb}(\mathbb{H}) \setminus \text{Möb}^+(\mathbb{H})$, so that $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in i\mathbb{R}$ and $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Then, exactly one of the following holds:

- n fixes a point of $\mathbb{H}$; in which case, there is a hyperbolic line l in $\mathbb{H}$ so that n acts as reflexion in l, or
- n fixes no point in $\mathbb{H}$; in which case ~~two points of $\overline{\mathbb{R}}$~~ n fixes exactly two points of $\overline{\mathbb{R}}$ and acts as a glide reflection along the hyperbolic line l determined by those two points.

$m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$
conserve $m(\mathbb{H})$
on H et
fixe le bord
i.e. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$e^{2i\pi(x+iy)}$

Faire ça à la bordure du H, ma fonction de H holomorphe régulières, * considérer valeurs propres Δ et donc peut-on faire de l'analyse de Fourier sur H ?

* et préserve H

3. Length and distance in $\mathbb{H}$

→ elem of Möb($\mathbb{H}$) take hyperbolic lines to hyperbolic lines and preserve angles (conformal)

→ we then derive a mean of measuring lengths of paths in $\mathbb{H}$ that is invariant under the action of this group

3.1. Paths and elements of arc-length

→ rappel : $\mathcal{C}^1$ path in $\mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$

$$\text{length}(f) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_a^b |f'(t)|\,dt \overset{\text{notation}}{=} \int_f |dz|$$

Then $|dz| = |f'(t)|\,dt$

[invariance par reparamétrage]

Then $\int_f \rho(z)\,|dz| = \int_a^b \rho(f(t))\,|f'(t)|\,dt$

↳ length of f wrt element of arc-length $\rho(z)|dz|$

$f(t) = Re^{it}$ comme en Ana Complexe

e.g. Set $\rho(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$, $\text{length}_\rho(f) = \frac{2\pi R}{1+R^2}$

Proposition Let $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ be a piecewise $\mathcal{C}^1$ path, let $[\alpha, \beta]$ be an interval in $\mathbb{R}$ and let $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ be a surjective piecewise $\mathcal{C}^1$ function. Let $\rho(z)|dz|$ be an element of arc-length on $\mathbb{C}$. Then :

$$\text{length}_\rho(f \circ h) \geq \text{length}_\rho(f)$$

with equality iif $h \circ f$ is a reparametrization of f iif $h'(t)$ does not change sign.

$\mathcal{C}^1_{pm}$

quelles conditions pour faire un changement de variable ? a-t-on besoin bijectivité ? Non (ask ?)

Def. • A <u>parametrization</u> of $X \subset \mathbb{C}$ is a piecewise C^1 path $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ st $X = f([a,b])$.

• A piecewise C^1 path $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ is a <u>simple path</u> if f is injective.

• Let f be a parametrization of $X \subset \mathbb{C}$. If f is a simple path, we say f is a <u>simple parametrization</u> of X

• [<u>almost simple path</u>] def 3.6, 3.7

• A set $X \subset \mathbb{C}$ is a <u>simple closed curve</u> if there exists a parametrization f of X st f is injective on $[a,b[$ and $f(a) = f(b)$.

3.2 The element of arc-length of $\mathbb{H}$

→ determine hyperbolic length and hyperbolic distance in $\mathbb{H}$
↳ consider elements of arc-length of $\mathbb{H}$ that are invariant under the action of $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

$\Updownarrow$

$\forall f : [a,b] \to \mathbb{H}$ piecewise C^1, $\forall \gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$
$\text{length}_\rho(f) = \text{length}_\rho(\gamma \circ f)$

Theorem For every positive constant c, the element of arc-length
$$\frac{c}{\text{Im}(z)} |dz|$$
on $\mathbb{H}$ is invariant under the action of $\text{Möb}(\mathbb{H})$

<u>Def</u> For a piecewise $\mathcal{C}^1$-path $f:[a,b]\to\mathbb{H}$, we define the <u>hyperbolic length</u> of f to be:

$$\mathrm{length}_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}\,|dz| = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{Im}(f(t))}\,|f'(t)|\,dt.$$

<u>Proposition</u> Let $f:[a,b]\to\mathbb{H}$ be a piecewise $\mathcal{C}^1$-path. Then, the hyperbolic length $\mathrm{length}_{\mathbb{H}}(f)$ is finite.

<u>proof</u> ~~use~~ ctn of f, f' on given subintervals and $f(\text{compact}) = \text{compact}$

3.3. <u>Path metric space</u>

→ know how to compute $\mathrm{length}_{\mathbb{H}}(f)$, f $\mathcal{C}^1$ piecewise path

→ want to get an hyperbolic metric

<u>Def</u> A metric on a set X is a function $d: X\times X\to\mathbb{R}_+$ st:

- $d(x,y)\geq 0$ ~~...~~ equality iif $x=y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ [triangle ineq]

eg: standard one of $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$: $d(x,y) = |x-y|$

on $\overline{\mathbb{C}}$, $s(z,w) = \dfrac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$, $s(z,\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$

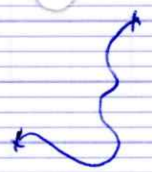
→ topology generated by d

Sps we know how to measure length of paths:
$\forall (x,y) \in X^2$, sps there exist $\Gamma[x,y]$ a collection of paths $f : [a,b] \to X$ st $f(a) = x$, $f(b) = y$ where length(f) makes sense.

Consider the function $d : X \times X \to \mathbb{R}$ defined by
$$d(x,y) = \inf \{ \text{length}(f) \mid f \in \Gamma[x,y] \}$$

pq ligne droite plus court chemin entre deux points ds le plan?
→ Euler-Lagrange

⟶ does it define a metric?
⟶ does there exist distance-realizing paths?



<u>Def</u> Let (X,d) be a metric space, it is <u>a path metric space</u> if $d(x,y) = \inf \{ \text{length}(f) \mid f \in \Gamma[x,y] \}$, $\forall x,y \in X^2$ and if there exists for each pair of points a distance-realizing path.

eg $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ and $(\overline{\mathbb{C}}, |\cdot|)$ are
but not $(\mathbb{C} - \{0\}, |\cdot|)$.

3.4. From Arc-length to metric

<u>Theorem</u> $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ is a path metric space. Moreover, the distance-realizing paths in $\Gamma[x,y]$ are the almost simple parametrizations of the hyperbolic line segments joining x to y.
~~Note that~~ Recall $d_{\mathbb{H}}$ is invariant under the action of $\text{Möb}(\mathbb{H})$

Construction générale d'une distance à partir de la notion de longueur de chemin, notion d'espace de longueur ("path metric space")

A bat Anderson ! Moralement il ne dit pas plus que $\inf\{\mathrm{length}_H(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma_{x,y}\}$ (espace métrique ⊕) est un candidat pour définir une distance intéressante entre x et y ⊕
il donne quelques vagues exemples et c'est tout.

~~J'étais~~ parti pour présenter des exemples en expliquant petit à petit un processus général pour construire une distance à partir de la notion de longueur de chemin jusqu'à... Gromov, Metric structures for Riemannian & non Riemannian spaces, chapitre 1 } non qui fait peur...

bcp de def...

ici, aucune crainte.

⊕ on retrouvera tout Anderson d'une manière ou d'une autre

Definition Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$. La dilatation de f est la quantité
$$\mathrm{dil}(f) = \sup_{\substack{x, x' \in X \\ x \neq x'}} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')}$$

La dilatation locale de f en $x \in X$ est :
$$\mathrm{dil}_x(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{dil}(f|_{B(x,\varepsilon)})$$

Rq Si $\mathrm{dil}(f) < +\infty$, on dit que f est Lipschitz. Ça "se voit"

à l'oral : Rq sur la régularité : Hölder ? Lip ? $\mathcal{C}^\infty$? ...

Definition La longueur d'une app lipschitzienne $f : [a,b] \to X$ est :
$$\ell(f) = \int_a^b \mathrm{dil}_x(f)\,dx$$
→ bien def car mesurable

eg $f(x) = x \Rightarrow$ longueur d'un intervalle

"dilatation"

eg si $\begin{cases} \mathrm{dil}_x(f) = \dfrac{1}{\mathrm{Im}(f(x))} |f'(x)| & \Rightarrow \text{hyperbolique} \\ \mathrm{dil}_x(f) = |f'(x)| & \Rightarrow \text{euclidien : taux d'accroissement !} \end{cases}$

on fixe $\beta^{?}$ l'intervalle

et X un ensemble

Definition Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Un espace de longueur est constitué d'une famille d'applications $f \in \mathcal{C}(I, X)$ et d'une application $l \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^+)$ telle que :

- positivité : $l(f) \geq 0$ ~~pour~~, $l(f) = 0$ ssi f constante.

$\forall I : \Longrightarrow$ (• restriction : si $J \subset I$, alors $\mathcal{C}(J, x) \subset \mathcal{C}(I, x)$)

- juxtaposition : si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $g \in \mathcal{C}([b,c])$ alors $h \in \mathcal{C}([a,c])$ la juxtaposition de f et g vérifie $l(h) = l(f) + l(g)$
- invariance : si φ est extomeo entre I et J et si $f \in \mathcal{C}(J)$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}(I)$ et $l(f \circ \varphi) = l(f)$.
- continuité : Soit $I = [a,b]$, l'application $x \mapsto l(f|_{[a,t]})$ est continue.

Rq invariance : $\boxed{\text{penser à Möb}}$. longueur hyperbolique est invariante sous l'action de Möb(H)

Les autres propriétés sont "de bon sens" pour avoir une distance à la def

On considère alors :

$$d_\ell(x,y) = \inf \{ l(f) \mid f \in \mathcal{C}([a,b]) \}$$

sur tous les chemins avec $f(a) = x$, $f(b) = y$

si (X, d) espace métrique d_ℓ ~~???~~ induit une topologie qui n'a aucune raison d'ê la m̂ que celle induite par d

Exemples et soucis • Sur $\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n$? Rien ne change

Mais juste : pourquoi ligne droite est le plus court chemin entre deux points?

[Euler-Lagrange, formule de Beltrami vs formalisme de espaces de longueur]

Pythagore

• Sur $\mathbb{C} - \{0\}$, $d_\ell(-1, 1) = 2$

mais ~~le~~ segment de longueur minimale passe par O...

Pb... Trouver un chemin qui reste dans l'espace que l'on s'est fixé : Gromov le demande pas mais Anderson le demande dans sa def d'espace métrique de longueur

• Sur $\mathbb{C} - D(0,1)$?

Déf Un espace métrique (X,d) est un espace métrique de longueur si $d = d_\ell$ (i.e. distance entre deux points est l'infimum des longueurs des courbes les joignant)

~~Est un espace de longueur~~

Attention à la subtilité Gromov vs Anderson
Pour Anderson, on demande ~~à~~ de plus ce que la courbe réalisant l'infimum soit contenue dans l'espace des "fonctions test"

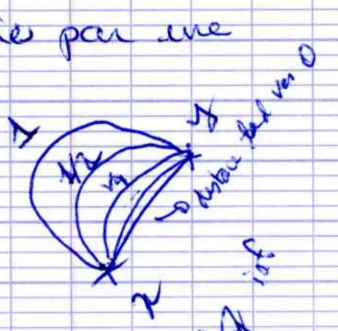
Donc $\mathbb{C} - \{0\}$ n'est pas un e.m. de longueur
mais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ si. Et $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$???

dire à l'oral | Objectif à venir :
Montrer que $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ est un espace métrique de longueur.

hyperbolicité de Kobayashi

Déf Une géodésique minimisante dans (X,d) un espace métrique de longueur est une courbe $f : I \to X$ telle que $d(f(t), f(t')) = |t - t'|$ pour tout $t, t' \in I$.

Thm (Hopf-Rinow, énoncé ddl)
Soit (X,d) un espace métrique de longueur localement compact et complet. Alors :
~~Toute paire de points peut se relier~~
~~tous~~ deux points peuvent tjs être reliés par une géodésique minimisante.



eg graphe $\Rightarrow$ longueur = nb minimal d'arêtes
$\hookrightarrow$ Slow des espaces discrets

Récapitulatif

$PSL_2(\mathbb{C}) = PGL_2(\mathbb{C}) = \text{Möb}^+ \subset \text{Möb}$

~~det~~ $= 1$ ~~det~~ $\neq 1$

$$
\begin{array}{ccc}
PGL_2(\mathbb{C}) & & \text{Möb} \\
 & & \| \\
 & & \langle PGL_2(\mathbb{C}), z \mapsto \bar{z} \rangle \quad \text{réflexion} \\
 & & \| \\
 & & \text{Homéo}^c(\hat{\mathbb{C}}) \\
\cup & & \cup \\
PGL_2(\mathbb{R}) & \subset & \langle PGL_2(\mathbb{R}), z \mapsto \bar{z} \rangle \\
\| & & \| \\
\text{Möb}^+(\bar{\mathbb{R}}) & & \text{Möb}(\bar{\mathbb{R}}) \\
\cup & & \cup \\
PSL_2(\mathbb{R}) & \subset & \langle PSL_2(\mathbb{R}), z \mapsto \bar{z} \rangle \\
\| & & \| \\
\text{Möb}^+(\mathbb{H}) & & \text{Möb}(\mathbb{H})
\end{array}
$$

identité, parabolique, elliptique, loxodromique

isométries du demi plan

PSL_2 PGL_2
↓
égaux sur $\mathbb{C}$
différents sur $\mathbb{R}$

et pour $\mathbb{Q}$?

a-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} o\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$?