SÉMINAIRE DE LECTURE
INTRODUCTION À LA THÉORIE SPECTRALE

MATHIAS GARNIER

Résumé. Sous la direction de Paulo Carrillo-Rouse, on étudie le tome I d'analyse de Laurent Schwartz, **Théorie des ensembles et Topologie**. On commence par résumer succinctement les paragraphes 1 à 7 du chapitre II : *espaces métriques*, *espaces topologiques*, *fonctions continues et semi-continues – homéomorphismes*, *espaces métriques et espaces topologiques*, *espaces compacts – propriétés élémentaires*, *convergences – limites – suites et filtres*, *propriétés des fonctions continues sur un espace compact* ; ces notions ont été traitées durant le module d'Analyse 5 avec Radu Ignat.

L'un des objectifs de ce séminaire est de se familiariser avec le théorème suivant.

Théorème 1 (Gelfand-Naïmark, p. 376)**.** *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbf{C}^*$-algèbre de Banach commutative, $\widehat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$, muni de la topologie de la convergence simple, $\mathcal{C}(\widehat{\mathcal{A}})$ la $\mathbf{C}^*$-algèbre de Banach formée par l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\widehat{\mathcal{A}}$ à valeurs complexes.*

La transformation de Gelfand est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{C}(\widehat{\mathcal{A}})$.

Ainsi que quelques généralisations.

Théorème 2.

Date: 25 août 2025.

Planning

Séance 1 (16/01). **PCR.** Rappels généraux de topologie et d'analyse hilbertienne.

Séance 2 (17/01). **Hugo. Victor.** Stone-Weierstrass et ses corollaires.

Séance 3 (17/01). **Elias.** Compactification d'Alexandrov.

Séance 4 (21/01). **Paul. Anaëlle.** Début du chapitre 14, soit de la page 355 à la remarque 1 de la page 357, avant le thm 2.14.5. Du thm 2.14.5 jusqu'à la définition 2.14.10.

Séance 5 (21/01). **Axcel. Mathias.** De la page 360 (après la déf 2.14.10) jusqu'au thm 2.14.14. Du thm 2.14.15 au thm 2.14.22.

Séance 6 (23/01). **Élise. Raphaël.** Du thm 2.14.23 au thm 2.14.26. De la définition 2.14.27 au premier paragraphe de la page 369, c'est à dire les points 1) et 2) du thm 2.14.28.

Séance 7 (24/01). **Axcel. Van.** Continuation, parties 3) et 4) du théorème 2.14.28 jusqu'au corollaire 2.14.29 inclus. Caractères d'une Algèbre de Banach : Déf 2.14.30 + Thm 2.14.31 points 1) et 2).

Séance 8 (24/01). **Elias. Victor.** Algèbres involutives, C*-algèbres : Déf 2.14.32 jusqu'au exemple 3 page 375. Gelfand-Naimark 1 : Le théorème de GN pages 376-377.

Séance 9 (31/01). **Mathias.** Topologies faibles. Filtres. Tychonov. Banach-Alaoglu. Preuve de la compacité pour la topologie de la convergence simple de l'ensemble des caractères d'une algèbre de Banach commutative.

Séance 10 (06/02). **Raphaël.** Gelfand-Naimark 2 : Via un exo on montrera la fonctorialité des constructions qui apparaissent dans les thms de Gelfand-Naimark vus précédemment.

Séance 11 (13/02). **.** Gelfand-Naimark 3 : Le théorème version localement compact, décomposé en au moins 4 sous parties.

1. Espaces métriques

Définition 1.1. *On appelle* ***espace métrique*** *un ensemble E muni d'une fonction* ***distance****, c'est-à-dire d'une application d de $E \times E$ dans la demi-droite $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R},\ x \geq 0\}$, qui, au couple (x, y) de $E \times E$, fait correspondre un nombre $d(x, y) \geq 0$ appelé distance de x et de y. Cette distance doit posséder les 3 propriétés suivantes :*

— ***symétrie*** *:*

$$d(x, y) = d(y, x),$$

— ***positivité*** *:*

$$d(x, y) > 0 \text{ si } x \neq y \text{ et } d(x, x) = 0,$$

— ***inégalité triangulaire*** *:*

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Des exemples importants sont la droite réelle, le plan complexe munis de la distance usuelle issue de la géométrie euclidienne. On généralise aisément au cas de la dimension quelconque. Un même espace peut évidemment être muni de différentes distances (il conviendra donc de savoir dans quelles mesures deux distances sont *équivalentes*). Le lien avec la topologie de l'espace sera fait plus tard.

Définition 1.2. *On appelle* ***sphère*** *de centre a et de rayon R fini strictement supérieur à 0 l'ensemble des x de E tels que $d(x, a) = R$. On appelle* ***boule ouverte*** *(resp.* ***fermée****) de centre a et de rayon R fini strictement supérieur à 0 et on note $B(a, R)$ (resp. $\overline{B}(a, R)$) l'ensemble des x de E tels que $d(x, a) < R$ (resp. $d(x, a) \leq R$).*

Une partie d'un espace métrique est dite **bornée** si elle est contenue dans au moins une bonne de rayon fini. Une définition plus géométrique consiste à dire qu'une partie A d'un espace métrique est bornée si et seulement si son diamètre $\delta(A) := \sup_{(x,y)\in A\times A} d(x, y)$ est fini.

Définition 1.3. *Soit E un espace métrique. Une partie A de E est appelée* ***ouverte*** *si, toutes les fois qu'elle contient un point de E, elle contient au moins une boule ouverte de rayon strictement positif ayant pour centre ce point.*

Lorsque l'on dispose d'une structure algébrique, la situation peut devenir plus confortable.

Définition 1.4. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ des nombres réels ou complexes. On appelle alors* ***norme*** *sur cet espace vectoriel toute fonction, notée $x \mapsto ||x||$, possédant les propriétés suivantes :*

— ***positivité*** *:*

$$||x|| > 0 \text{ pour } x \neq 0, \qquad ||0|| = 0,$$

— ***homogénéité*** *:*

$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \qquad \lambda \in \mathbf{K},$$

— ***sous-additivité / inégalité de convexité*** *:*

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

*Un espace E muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.*

Définition 1.5. *Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels ou complexes. On appelle **segment** d'extrémités a et b l'ensemble des points x tels que $x = ta+(1-t)b$ lorsque $0 \leq t \leq 1$. On note alors logiquement ce segment $[a,b]$. on dit qu'une partie de E est **convexe** si, toutes les fois qu'elle contient deux points distincts, elle contient tout le segment qui les a pour extrémités.*

Voici pourquoi la sous-additivité peut être vue comme une inégalité de convexité : la longueur de la réunion de deux segments sera toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des segment. Le cas d'égalité est atteint lorsque l'intersection des deux segments est nulle.

De même que pour un espace métrique, on peut normer naturellement les espaces vectoriels de corps des scalaires $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (la généralisation en dimension supérieure ne pose aucun problème). On introduit à cette effet les normes $p \in [1, +\infty[$ en dimension finie d :

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Lorsque $p = +\infty$, on pose :

$$||x||_\infty := \max\left(|x_1|, \ldots, |x_d|\right). \tag{1.2}$$

Une norme sur un espace vectoriel normé est une fonction continue (choisir $\eta = \varepsilon$).

2. Espaces topologiques

Définition 2.1. *Soit E un ensemble. On dit qu'on a défini une **structure topologique** sur E ou que E est un **espace topologique** si l'on s'est donné une famille $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ satisfaisant les propriétés :*

— *$\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{O}$,*
— *stabilité par réunion **quelconque**,*
— *stabilité par intersection **finie**.*

*Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés **ensembles ouverts** ou tout simplement les **ouverts** de l'espace topologique E.*

Définition 2.2. *Soit E un espace topologique. On dit qu'il est **séparé** ou que c'est un **espace de Hausdorff** si pour tout couple de points distincts x et y de E, il existe des ouverts O_x et O_y contenant x et y respectivement et tels que $O_x \cap O_y = \emptyset$. On dit que E est **semi-séparé** si pour tout couple de points distincts x et y de E, il existe des ouverts O_x et O_y contenant x et y respectivement et tels que $y \notin O_x$ et $x \notin O_y$.*

Un espace métrique est séparé (penser à diviser par trois la distance).

Proposition 2.3. *Soient E un espace métrique, $\mathcal{O}$ l'ensemble de ses parties ouvertes. Alors $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique séparé admettant $\mathcal{O}$ pour l'ensemble des ouverts. En particulier toute boule ouverte est une partie ouverte.*

Lorsque l'espace considéré est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on connaît déjà plein d'ouverts.

La partie sur les bases d'une topologie, systèmes de générateurs et topologies sur un ensemble ordonné n'est pas traitée ici. De même pour les systèmes fondamentaux de voisinages. Elles le seront dans une section adéquate si elles s'avèrent nécessaires par la suite.

Définition 2.4. *Soit E un espace topologique. On appelle **partie fermée** de E toute partie de E dont le complémentaire est un ensemble ouvert.* [1]

Proposition 2.5. *Soit E un espace topologique, $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées de E. Alors, $\mathcal{F}$ possède les propriétés suivantes :*
- *$\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{F}$,*
- *stabilité par intersection **quelconque**,*
- *stabilité par réunion **finie**.*

Notons que la séparation assure que les singletons sont fermés. Par réunion **finie**, un ensemble constitué d'un nombre **fini** de singletons est fermé. En général, une réunion quelconque de singletons n'a aucune raison d'être fermée (par exemple, $\{1/n,\ n \in \mathbf{N}\}$ n'est pas fermé).

Pour construire des fermés, une méthode peut être de se donner un ensemble défini par compréhension dont les règles de définition respectent la structure « être fermé » (utiliser des inégalités larges par exemple). À cet effet, la boule fermée d'un espace métrique est fermée.

On peut construire des parties ni ouvertes ni fermées ou encore ouvertes et fermées. Cela dépendra évidemment de la topologie. Sur $\mathbf{R}$, la connaissance des intervalles suffit. Dans le cas général, il faut un peu plus réfléchir (par exemple, pour la métrique discrète δ_{xy}, toutes les parties sont fermées, donc faire attention et ne pas aller trop vite en besogne !).

Définition 2.6. *Soit E un espace topologique. On appelle **voisinage** d'un point $a \in E$ toute partie de E contenant au moins un ouvert contenant lui-même le point a.*

Attention, un voisinage n'a aucune raison d'être ouvert ! De plus, se méfier de la terminologie *voisinage*, ces derniers peuvent être très gros (et pas très voisins voisins du point a).

Proposition 2.7. *Soit E un espace topologique. Alors, pour tout point $a \in E$, l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(a)$ possède les propriétés suivantes :*
- *tout voisinage de a contient le point a,*
- *toute partie qui contient un voisinage de a est un voisinage de a,*
- *toute intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a,*
- *tout voisinage de a contient un sous-ensemble W qui est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Ne pas oublier qu'un ensemble est **ouvert** si, et seulement si, il est voisinage de chacun de ses points. Pour montrer le sens non direct, penser à écrire le voisinage comme l'union des ouverts inclus dedans. □

1. À vérifier, mais il se peut que les notions d'*ouverts* et de *fermés* ne soient pas duales (au sens catégorique, sens à préciser et énoncé à reformuler !).

Définition 2.8. *Soit E un espace topologique. On dit qu'un point a de E est* ***isolé*** *si la partie réduite à ce point en est un voisinage, c'est-à-dire est ouverte. Soit A une partie de E, on appelle voisinage de A toute partie de E contenant un ouvert contenant A. Si en outre E est un espace métrique, on appelle* ***voisinage d'ordre*** *ε de A la réunion des boules de rayon ε et de centre dans A.*

Dans $\mathbf{R}$, aucun point n'est isolé. En revanche, on peut aisément étudier des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ qui contiennent des points isolés. Prendre par exemple : $X =]0,1] \cup \{2\}$.

La séparation nous renseigne de nouveau sur une propriétés d'un espace topologique. En effet, soit E un espace topologique. Pour tout point $a \in E$, l'intersection de tous les voisinages fermés de a est réduite à $\{a\}$ si, et seulement si, E est un espace séparé.

Définition 2.9. *Soit A une partie d'un espace topologique E. On appelle* ***intérieur*** *de A, noté $\mathring{A}$, la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A. On appelle* ***adhérence*** *de A, noté $\overline{A}$ l'intersection de toues les parties fermées de E qui contiennent A.*

On appelle ***frontière*** *de A, noté ∂A, l'ensemble des points de E qui n'appartiennent ni à son intérieur ni à son extérieur (i.e. l'intérieur de son complémentaire). C'est une partie fermée puisque son complémentaire est une partie ouverte.*

Une partie est ouverte si elle est égale à son intérieur. Une partie est fermée si elle est égale à son adhérence.

Lorsque c'est plus commode, on notera Int, Adh, Fr. L'intérieur est alors le plus grand ouvert contenu dans A et l'adhérence le plus petit fermé contenant A. Remarquons que l'adhérence de A est la réunion de son intérieur et de sa frontière. Pour qu'un point appartienne à la frontière d'un ensemble, il faut et il suffit que tout voisinage de ce point contienne à la fois des points de l'ensemble et de son complémentaire.

On a les règles suivantes : $\operatorname{Int}(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\operatorname{Adh}(A \cup B) = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. Penser également que l'on peut écrire l'intérieur et l'adhérence comme réunion ou intersection convenables.

Définition 2.10. *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on appelle* ***distance de*** *x* ***à*** *A la borne inférieure des distances $d(x,y)$ lorsque y parcourt A. C'est un nombre réel positif ou nul noté $d(x,A)$.*

On a l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x,A) = 0.$$

Notons que pour A une partie quelconque non vide d'un espace métrique E, la fonction :

$$f : x \mapsto d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

est une fonction continue de E dans $\mathbf{R}$. (Un cas particulier du théorème d'Urysohn en fait une utilisation, cf. théorème 2.3.4. Schwartz).

Définition 2.11. *Une partie A d'un espace topologique E est dite* ***dense*** *(dans E) si tout point de E lui est adhérent, c'est-à-dire si son adhérence est E lui-même. Un espace topologique est dit* ***séparable*** *s'il contient une partie dénombrable dense.*

On se gardera bien de penser que les propriétés de séparabilité et séparé ont quelque chose à voir en commun. Évidemment, $\mathbf{R}^n$ est séparable (puisque $\mathbf{Q}^n$ est dénombrable et dense dans ce dernier). Ci après, une caractérisation de la densité.

Proposition 2.12. *Soient E un espace topologique et D une partie de E. La partie D est dense dans E si, et seulement si, tout ouvert non vide U de E rencontre D, i.e. $U \cap D \neq \emptyset$.*

À chaque fois que l'on a considéré des parties d'un espace topologique, il faut clairement avoir en tête la topologie qui vient avec cette ensemble.

Définition 2.13. *Soit E un espace topologique et F une partie de E. On appelle **topologie induite** par E sur F la topologie sur F pour laquelle une partie A de F est ouverte **dans** F si, et seulement si, c'est l'intersection d'une partie ouverte de E avec F. On dit alors que F est un **sous-espace topologique** de E.*

Proposition 2.14. *Si E est un espace métrique, F muni de la restriction de la distance à $F \times F$ est appelé un **sous-espace métrique** de E. Dans ce cas là, pour qu'une partie A de F soit ouverte dans l'espace métrique F, il faut et il suffit qu'elle soit l'intersection de F et d'une partie ouverte de E.*

On peut adapter la proposition au cas des fermés et des voisinages.

On a vu que l'on pouvait considérer des sous-espaces. Rien n'empêche de construire des espaces non « plus petits » mais « plus gros ». C'est ce que l'on va voir précisément pour le cas des espaces topologiques, espaces métriques et espaces vectoriels normés.

Proposition 2.15. *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, $E = E_1 \times E_2$ l'ensemble produit de E_1 et de E_2. Pour tout $(x, y) \in E \times E$ tel que $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, on pose :*

$$\begin{aligned}
\delta_1(x, y) &:= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2 + y_2), \\
\delta_2(x, y) &:= \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}, \\
\delta_3(x, y) &:= \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).
\end{aligned}$$

Alors, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, δ_i est une distance sur E.

Démonstration. Seules les inégalités triangulaires demandent un peu d'effort. Jouer avec les propriétés de majoration du maximum et comme souvent pour une norme 2, mettre au carré. Utiliser ensuite le fait que $(\alpha\delta - \gamma\beta)^2 \geq 0$ pour des réels positifs, ce qui équivaut à :

$$\sqrt{(\alpha + \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} + \sqrt{\beta^2 + \delta^2}.$$

□

On généralise sans problème cette construction à un produit dénombrable d'espaces métriques. Dans le cas dénombrable non fini, on prendra bien garde aux problèmes possibles de convergence (on pourra affecter des **poids** à la somme pour garantir la convergence). Notons enfin que, dans le cas d'un espace métrique réel par exemple, toutes ces métriques produit se valent (en un sens à définir plus tard, plus précisément, elles s'équivalent).

En restreignant et spécialisant aux espaces vectoriels normés, on retrouve des construction typique : $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$... On pensera alors à faire la correspondance avec la somme directe pour des espaces vectoriels supplémentaires (penser aux projections !).

Théorème 3. *Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel et E/F l'espace vectoriel quotient de E par F. Pour toute classe d'équivalence $\overline{x}$, on pose :*

$$||\overline{x}|| := \inf_{z \in \overline{x}} ||z||.$$

L'application $\overline{x} \mapsto ||\overline{x}||$ est une norme sur l'espace vectoriel quotient E/F si, et seulement si, F est fermé.

Démonstration. Bien étudier la démonstration, p. 159 & 160. □

Dans le cas où F est fermé, la surjection canonique qui associe à tout $x \in E$ sa classe d'équivalence est une application linéaire continue.

En ce qui concerne le produit d'espaces topologiques, il faut trouver un moyen afin de construire une topologie produit.

Proposition 2.16. *Soient $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ n espaces topologiques et notons $E = \prod_{i=1}^n E_i$ le produit des ensembles E_i. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de E qui sont de la forme :*

$$A \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow \exists (U_i)_{i=1,\dots,n},\ A = \prod_{i=1}^n U_i \text{ où, pour tout } i,\ U_i \text{ est un ouvert de } E_i.$$

Alors, l'ensemble $\mathcal{O}$ des parties de E qui sont des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$ est une famille d'ouverts pour une topologie sur E.

Remarquons que si, pour tout i, E_i est un espace topologie séparé, alors la topologie est séparée. Réciproquement, si E est un espace séparé, tous les espaces E_i sont séparés. On appelle **topologie produit** sur E la topologie dont l'ensemble des parties ouvertes $\mathcal{O}$ est l'ensemble des parties de E qui sont des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$.

La généralisation à un produit infini nécessite l'axiome du choix (et des raisonnements similaires à ceux fait en Proba 2* en lien avec l'indépendance mutuelle). **Il conviendra de rédiger une note ultérieure précise et où tous les détails seront traités, cf. Skandalis.**

On comprendra plus tard pourquoi la topologie produit est aussi appelée la **topologie de la convergence simple**.

On conclut par une définition du support d'une application à valeurs dans un espace vectoriel. La définition contient une petite subtilité.

Définition 2.17. *Soit f une application définie dans un espace topologique E à valeurs dans un espace vectoriel F. On appelle **support de** f l'adhérence de l'ensemble des points x tels que $f(x) \neq 0$.*

On prendra bien garde à ne pas oublier que l'on considère l'adhérence ! (Faire attention avec la fonction de Dirichlet, l'indicatrice des rationnels par exemple.)

Le support de la somme de deux fonctions est alors inclus dans la réunion des supports.

3. Fonctions continues et semi-continues – homéomorphismes

Sortez les ε ! Sortez les voisinages !

Définition 3.1. *Soit f une application d'un espace topologique E dans un espace topologique F. On dit que f est **continue en un point** a de E si, quelque soit le voisinage W de $f(a)$ dans F, il existe un voisinage V de a dans E tel que pour tout $x \in V$, on a $f(x) \in W$. De manière équivalente, on a la continuité en le point a de E si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a.*

*Une application de E dans F est alors **continue** si elle est continue en tout point de E.*

Les fonctions continues sont stables par composition. Dans le cas des espaces métriques, on retrouve la caractérisation epsilonesque bien connue : f est continue au point a si, et seulement si l'implication suivante est vraie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\ d(a,x) \leq \eta \implies d(f(a), f(x)) \leq \varepsilon.$$

En général, la caractérisation suivante s'avérera bien commode.

Théorème 4. *Pour qu'une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F soit continue, il faut et il suffit que l'image réciproque par f de tout ouvert de F soit un ouvert de E.*

Démonstration. Penser voisinage. □

On en déduit un énoncé similaire portant sur les fermés (en considérant les complémentaires).

La continuité de l'identité donne une information importante pour la comparaison de topologies.

Définition 3.2. *Soient E un ensemble et $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur E. On dit que la topologie $\mathcal{T}_1$ est **plus fine** que $\mathcal{T}_2$ si l'application identité de l'espace topologique $(E, \mathcal{T}_1)$ dans l'espace topologique $(E, \mathcal{T}_2)$ est continue.*

En vertu du théorème précédent, la finesse se traduit en terme d'inclusions entre topologies. (Une topologie plus fine aura plus d'ouverts.) On peut par ailleurs caractériser des topologies selon son *degré* de finesse requis. Par exemple, on dispose de la caractérisation suivante de la topologie produit.

Théorème 5. *Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et E le produit des E_i. La topologie produit sur E est la topologie la moins fine des topologies sur E qui rendent continues toutes les applications de E dans E_j*

$$\mathrm{pr}_j : x := (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$$

*appelées **projections canoniques** de E sur E_j.*

Lorsque l'on ne fait le produit que d'un nombre fini d'espaces, la continuité d'une application équivalent à la continuité composante par composante. (Utiliser les projections et le fait que la composition d'applications continues est continues ($f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$) !)

On saute la partie sur les groupes topologiques et espaces vectoriels topologiques. Ce serait bien de lire ce que Landesman a à en nous en dire. C'est drôle de se dire que les espaces vectoriels topologiques généralisent les espaces vectoriels normés, c'est beau. Faudrait se fritter avec les e.v.t., e.v.t.l.c. et compagnie !

4. Espaces métriques et espaces topologiques

5. Espaces compacts – propriétés élémentaires

6. Convergences – Limites – Suites et filtres

7. Propriétés des fonctions continues sur un espace compact

Théorème 6. *Soient E et F deux espaces topologiques tels que E compact et F séparé, f une application continue de E dans F. L'image directe $f(E)$ est compacte.*

Démonstration. Introduire un recouvrement ouvert de $f(E)$ et montrer que, par définition, $f(E)$ est effectivement compacte (on peut en extraire un sous recouvrement fini, pour cela : utiliser la compacité de E et la continuité de f (image réciproque, ouvert sur ouvert)). □

Attention, F n'a aucune raison d'être compact (c'est un sous-espace muni de la topologie induite qui est compact).

Corollaire 7.1. *Toute bijection continue d'un espace compact E sur un ensemble topologique séparé F est un homéomorphisme.*

Démonstration. Ne pas oublier que compact implique fermé (mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie). □

Séance 1. Aperçu général

si énoncés ~~paraît~~ naturels, ont tendance à ê admis pour gagner du ~~te~~ temps

1h45/2h
en sautant qq résultats dico

Nous avons 7 tableaux à voir (4 pour l'exposé de vendredi) ! Ce travail ne présente aucune originalité, il condense diverses sources et se bornant au nécessaire afin de démontrer le théorème 1. Je ne vais pas dire grand chose mais espérons qu'une version modifiée du principe d'incertitude d'Heisenberg sera vérifiée : peu de choses seront dites mais elles seront très précises. Je dis juste ça en rigolant en en profitant pour signaler une version mathématique de ce principe en théorie spectrale et analyse harmonique (à coup de transformées de Fourier).

Schwartz
Brezis
Skandalis

TABLE DES MATIÈRES

j'ferai pas trop les preuves pour avoir + de temps pour partie topo faible *

donner idée de la preuve à l'oral au début

Nous allons prouver le résultat suivant nécessaire à la démonstration de Gelfand-Naimark.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la convergence simple est un espace compact.*

Le Schwartz étant somme tout assez sommaire à cet égard (§ 2.13.32 et suivants), introduisons légèrement plus tout en revenant sur quelques impasses / hors programme d'Ana5.

1. Rappels du séminaire et d'Ana5

Rappelons qu'une **algèbre** $\mathcal{A}$ sur un corps k est un k-espace vectoriel muni ~~en outre~~ d'une application bilinéaire de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ appelée multiplication. ~~Cette application est associative et possède une unité e non nulle. Une~~ **algèbre normée** est une algèbre qui est également un espace ~~vectoriel~~ normé respectant de plus $||e|| = 1$ et $||xy|| \leq ||x|| ||y||$.

Fondre dans la m définition

Définition 2. *Une **algèbre de Banach** est une algèbre normée complète*, i.e. evn complet tq $\|e\|=1$ et $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$

Sur cette algèbre, on peut définir des caractères (qui généralise en un sens la situation connue des groupes finis).

Définition 3. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur le corps des nombres complexes, d'unité e. On appelle **caractère** de $\mathcal{A}$ tout homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{C}$ prenant la valeur 1 sur e. ~~En d'autres termes, χ est un caractère sur $\mathcal{A}$ si c'est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{C}$ possédant les propriétés suivantes :~~*

$$\cancel{\chi(u+v) = \chi(u) + \chi(v), \quad \chi(\lambda u) = \lambda\chi(u), \quad \chi(uv) = \chi(u)\chi(v), \quad \chi(e)} = 1.$$

~~pour~~ $(u, v, \cancel{\lambda}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \cancel{\mathbf{C}}$. On note $\widehat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des caractères de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Avant de les préciser et reprendre, donnons les définitions et résultats énoncés par Schwartz nécessaires pour prouver le théorème 1.

Définition 4. *Soient E un espace vectoriel normé, $E^* = \mathcal{L}(E, k)$ son dual topologique*[1] *(pour k corps de base). On appelle **topologie faible étoile**[2] sur E la topologie de la convergence*

1. On appelle **dual algébrique** l'ensemble des formes linéaires et **dual topologique** l'ensemble des formes linéaires continues.

2. Schwartz écrit *topologie $*$-faible.*

étoile car on est sur le dual

on en donnera plus tard un !!!

topo faible*

simple sur E. Un système fondamental de voisinages[3] *de $\varphi \in E^*$ est donné par l'ensemble des $V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(\varphi)$, où $(x_i)_{i=1}^m$ est une famille finie de points de E et $\varepsilon > 0$, donnés par :*

$$V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(\varphi) = \{\psi \in E^* : \forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| \leq \varepsilon\}.$$

topo cv simple topo produit

À vrai dire, et comme on peut s'y attendre, la topologie faible étoile (i.e. la topologie de la convergence simple, i.e. la topologie de la convergence point par point, i.e. *pointwise convergence topology*) n'est rien d'autre que la topologie produit. Notons également que l'on parle de la convergence simple d'un type d'élément bien particulier : les formes linéaires continues. Nous y reviendrons. Un théorème particulièrement important est le suivant.

Théorème 5. *Soient E^* le dual topologique d'un espace vectoriel normé et B la boule unité de E^*. Alors B est compacte pour la topologie faible étoile.*

Avoir fait cette hypothèse sur la topologie sous-jacente est fondamental. On rappelle qu'en général, pour la topologie dite **forte** (on reviendra par la suite dessus), on ne dispose pas de plus que le théorème de compacité de Riesz.

Théorème 6. *Soit E un espace vectoriel normé sur $k = \mathbf{R}, \mathbf{C}$. Alors, la boule unité fermée de E est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, la boule unité fermée est fermée et compacte. Donc par caractérisation des compacts dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on conclut. (Pour reprouver la caractérisation des compacts en dimension finie, penser très fortement à Bolzano-Weierstrass et utiliser l'équivalence des normes en dimension finie pour se ramener à ne traiter le cas que d'une norme de son choix. De manière générale, pour des raisons de métrisabilité des espaces, il va falloir abandonner le recours aux suites pourtant si plaisantes.) démo séquentielle très agréable

Réciproquement, supposons que la boule unité fermée de E est compacte. Montrons que E est de dimension finie.[4] On dispose de l'équivalence suivante dans le cas d'un espace métrique donc, *a fortiori*, pour un espace vectoriel normé :

$$\text{compacité} \iff \text{compacité séquentielle} \iff \text{précompacité et complétude.}$$

Par précompacité, on peut recouvrir la boule unité fermée B par la réunion de n boules chacune de rayon $1/2$ et centrées en les x_i, $i = 1, \ldots, n$. Pour un point quelconque x de la boule B, il existe un indice i_1 tel que $||x - x_{i_1}|| \leq 1/2$. Notons $y_1 = x - x_{i_1}$ et remarquons que $2y_1 \in B$ (par définition). Il existe alors i_2 tel que $||2y_1 - x_{i_2}|| \leq 1/2$, c'est-à-dire $||y_1 - x_{i_2}/2|| \leq 1/4$. Par récurrence, on construit de même une suite d'indices $(i_j)_{j=1}^\infty$ telle que, pour tout k entier naturel :

$x \in B \subset E$

$$\left|\left| x - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{j-1}} x_{i_j} \right|\right| \leq 1/2^k.$$

$E_n = \mathrm{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$

On a donc explicitement construit une suite de points appartenant à l'espace vectoriel engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui converge vers x. Ce sous-espace vectoriel est fermé car il est de dimension finie. Ceci implique que x en est un élément. On a donc prouvé que E était inclus dans ce sous espace vectoriel engendré, ce qui garantit que E est lui-même de dimension finie. $\square$

$x \in E_n$ $E \subset E_n$

~~Remarquons rapidement que l'hypothèse de séparation nécessaire à la compacité est ici superflue puisque l'on raisonne dans des espaces vectoriels normés. Ces derniers sont automatiquement séparés puisque les espaces métriques le sont (penser à 1/3 de distance).~~

3. Soit X un espace topologique et A une partie de X. Un système fondamental de voisinages de A est un ensemble $\mathscr{P}$ de voisinages de A tels que tout voisinage de A contienne un élément de $\mathscr{P}$.

4. La (très belle) preuve provient de ce document.

À vrai dire, une généralisation de ce théorème existe[5]. On rappelle qu'un espace est de Hausdorff s'il est séparé (on peut également dire T_2). De plus, un espace topologique est localement compact si chacun de ses points admet un voisinage compact (parfois, on demande la séparation dans la définition même de localement compact).

généralisation ne pas l'écrire au tableau

Théorème 7 (Riesz). *Un espace vectoriel topologique de Hausdorff est localement compact si, et seulement si, il est de dimension finie.*

Admettons pour le moment que la topologie faible étoile corresponde à la topologie produit. Fixons un espace topologique F et identifions l'ensemble des fonctions de notre espace vectoriel normé E dans F à l'ensemble F^E. Avec le théorème de Tychonov[6] en tête (ou cf. ci-après), on s'attend à obtenir une version de faible compacité du théorème 6 : à savoir, le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. On reviendra dessus une fois passés les rappels.

Lemme 8. *Soient I un ensemble* **quelconque** *et, pour tout $i \in I$, E_i un espace topologique. Notons $E = \prod_{i\in I} E_i$ le produit cartésien des ensembles E_i. Si, pour tout i, E_i est séparé alors, l'espace E est séparé. Réciproquement, si E est séparé, tous les espaces E_i sont séparés.*

seul sens direct est prouvé car nécessaire pour th suivant

Démonstration. Supposons les E_i séparés. Soient $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ deux points distincts de E. Comme ces deux points sont distincts, il existe un indice $j \in I$ tel que $x_j \neq y_j$. Par séparation, il existe deux ouverts O_x et O_y tels que $x_j \in O_x$, $y_j \in O_y$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$. Alors, en considérant la projection canonique, $\pi_j^{-1}(O_x)$ et $\pi_j^{-1}(O_y)$ sont de même disjoints et contiennent respectivement x et y (utiliser le fait que la préimage de l'intersection est l'intersection des préimages et revenir aux définitions). Ceci assure la séparation de X.
Réciproquement, exercice (revenir aux définitions, je ne crois pas qu'il y ait de tricks ; il y a peut-être de l'axiome du choix qui traîne, à vérifier). Cette partie n'est pas nécessaire pour le sens direct du théorème suivant. ☑

Théorème 9 (Tychonov). *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille* **quelconque** *d'espaces topologiques compacts. Alors, l'espace topologique produit E des E_i est un espace compact. La réciproque est vraie.*

Démonstration. On suit le Schwartz et ne démontre que le sens direct.[7] La propriété de séparation est assurée par le lemme précédent.
Montrons que l'espace topologique produit $E = \prod_{i\in I} E_i$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, à savoir : de tout recouvrement ouvert de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.
Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert de l'ensemble E ~~suivant~~ par

$$\mathcal{S} := \left\{ U_i \times \prod_{j\neq i} E_j,\ \text{avec } U_i \text{ un ouvert de } E_i,\ \forall i \in I \right\}.$$

L'espace engendré ci-dessus correspondant à la topologie de l'espace produit. (En effet, intuitivement, il suffit de considérer tous les ouverts pour un indice fixé, prendre le produit et répéter l'opération pour tout i de I. Formellement, revenir à la définition d'une topologie produit, cf. Schwartz 2.2.38.) On admet que, pour montrer la compacité de E, il suffit de considérer un recouvrement ouvert de E par des éléments de $\mathcal{S}$ (un système de générateurs de la topologie produit de E).[8] ~~Considérons, pour tout $i \in I$, les ensembles suivants~~ :

se restreindre à une partie génératrice

$$\mathcal{S}_i := \left\{ [illegible] \times \prod_{j\neq i} E_j \in \mathcal{R} \right\}.$$

Exercice : en utilisant la compacité des E_i, conclure. □

5. C'est à vérifier mais Riesz peut faire référence à l'un des deux frères (Marcel ou Frigyes). On n'a jamais parlé de Marcel.

6. Tychonov, Tychonoff, Tykhonov (...) c'est au choix.

7. Si le temps le permet, on reviendra sur ce théorème et on apportera une démonstration toute autre à base d'ultrafiltres. Notons qu'avec Tychonov, il y a de l'axiome du choix qui traîne... !

8. C'est à ce moment qu'on utilise le lemme de Zorn, i.e. l'axiome du choix.

Pour la terminologie : lorsque l'on suppose un espace vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue mais non nécessairement séparé, on parlera d'espace quasi-compact. On voit bien que si l'on ne disposait pas du lemme 8, le théorème de Tychonov vaudrait au moins pour les espaces quasi-compacts (et c'est là que tout se complique avec l'axiome du choix).

2. Introduction aux filtres et rappels de topologie

Pour toute personne ayant le temps, cela peut être intéressant de faire le problème n°1 d'Alain Troesch (en particulier la partie II) pour se faire la main avant de lire cette partie.
Aujourd'hui, les filtres peuvent être vus comme légèrement *baroques*. Néanmoins, ils possèdent l'admirable propriété de permettre des raisonnements de nature sequentielle dans une catégorie (est-ce bien une catégorie ?) d'espaces topologiques : les espaces topologiques où chaque point admet un système fondamental dénombrable. Pour la présentation des filtres dans l'optique de redémontrer (de manière express) le théorème de Tychonov, on suit le Skandalis de Topologie et d'Analyse, chapitre 9. Pour quelques propriétés plus générales sur les filtres (en particulier concernant la compacité), on revient à Schwartz chapitre 2, § 6.

Définition 10. *Un **filtre** sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de X tel que :*
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$,
- *pour tout A, B parties de X :*
  - *si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$,*
  - *si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

• exemples de filtre

En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est non vide, contient X, stable par intersection finie et stable par surensemble (terminologie de Schwartz). Par des considérations ensemblistes basiques (les mêmes qu'en théorie de la mesure !), on prouve la proposition suivante.

Proposition 11. *Soient X et Y des ensembles, $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. L'ensemble des parties B de Y telles que $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ est un filtre sur Y. On appelle cet ensemble l'**image directe** de $\mathcal{F}$ par f que l'on note $f(\mathcal{F})$.*

eg.

En réalité, on connaît déjà beaucoup de filtres ! Une classe de filtre toute choisie est celle constituée par l'ensemble des voisinages de x pour x un point d'un espace topologique X. On trouve également l'ensemble des parties d'un ensemble X contenant une partie non vide de X donnée. De même, l'ensemble des complémentaires des parties finies de X (ensemble non fini) est un filtre sur X.

Admettons que l'ensemble des filtres sur X muni de la relation d'inclusion est inductif, i.e. un ensemble partiellement ordonnée où toute partie totalement ordonnée admet un majorant. Ceci motive l'introduction des ultrafiltres.

Définition 12. *On appelle **ultrafiltre** un filtre maximal pour la relation d'inclusion.* [9]

Grâce à la notion de finesse (que l'on retrouve en topologie, on y reviendra), on dispose d'une autre manière de voir les ultrafiltres.

Définition 13. *Soient X un ensemble et $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ des filtres sur X. On dit que le filtre $\mathcal{F}_1$ est **plus fin** que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.*

Lemme 14. *Pour tout filtre $\mathcal{F}$, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Conséquence directe de la définition. □

On retrouve ensuite de bonnes propriétés de stabilité par préimage.

Proposition 15. *Le filtre image directe d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.*

---
9. On peut innocemment se dire que la construction est similaire à celle d'un idéal maximal.

(pb de temps)

Démonstration. Soient X, Y des ensembles, $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur X. Soit B une partie de Y. Remarquer que $f^{-1}(B)$ ou $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ appartient à l'ultrafiltre $\mathcal{F}$. Ceci est équivalent à avoir $B \in f(\mathcal{F})$ ou bien $Y \setminus B \in f(\mathcal{F})$. Or, le résultat suivant est vrai et il nous permet de conclure que $f(\mathcal{F})$ est un ultrafiltre :

> L'ensemble $\mathcal{G}$ est un ultrafiltre sur l'ensemble G si, et seulement si, pour toute partie A de G on a $A \in \mathcal{G}$ ou bien $G \setminus A \in \mathcal{G}$.

Résultat admis. Ce n'est pas totalement trivial. □

Il est direct de remarquer que l'ensemble des voisinages d'un point x d'un espace topologique X constitue un filtre sur X. Ceci motive la définition suivante et c'est précisément à ce moment là que l'on voit des raisonnements séquentiels apparaître dans le cadre des espaces topologiques.

Définition 16. *Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $x \in X$. On dit que le filtre $\mathcal{F}$* ***converge vers*** *x s'il est plus fin que l'ensemble $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x.* ~~*On dit que x est un* ***point d'adhérence*** *de $\mathcal{F}$ si $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.*~~

Avant de continuer faisons un léger détour topologique. Introduisons la notion de **topologie initiale**. Cette topologie est à la base de la section suivante sur la topologie faible et on la ~~réinterprétera en termes catégoriques ensuite (dans une moindre mesure~~). Cette réinterprétation donnera tout son sens au terme "initial", qui deviendra alors très naturel. ? question
De la même manière que pour les filtres, on retrouve une notion de finesse pour les topologies.

Définition 17. *Une topologie $\mathcal{O}_1$ sur E est* ***plus fine*** *qu'une topologie $\mathcal{O}_2$ si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.*

Moralement, une topologie plus fine possède (relativement) plus d'ouverts. Typiquement, c'est l'exact opposé qui va nous intéresser : en considérant la topologie la moins fine respectant une propriété P donnée, on s'attend à ce que conséquemment cette topologie possède plus de fermés et donc de compacts (car elle a relativement peu d'ouverts). Attention, ce n'est qu'une heuristique ! Naturellement, en prenant l'intersection de **toutes** les topologies qui possèdent une propriété P donnée, on construit la topologie la moins fine respectant P. (Rappelons qu'une intersection quelconque de topologies est encore une topologie.)

on verra à la fin de la partie suivante ⊕ préciser pq est-ce vrai

Définition 18. *Soit X un ensemble, $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $f_i : X \to Y_i$ des applications pour tout $i \in I$. La* ***topologie initiale*** *sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est la topologie la moins fine rendant continue les applications f_i pour $i \in I$.*

On s'intéressera particulièrement au cas où les f_i sont des formes linéaires continues. Signalons enfin que l'on peut voir deux topologies très connues comme des topologies initiales. La **topologie induite** est la topologie initiale définie par l'injection canonique. De plus, la **topologie produit** est la topologie initiale définie par les projections canoniques. Nous sommes désormais en mesure de caractériser la convergence d'un filtre pour la topologie initiale.

eg. ⊕ section suivante

objet initial ? final ? lien ?

topo finale : 6⊕ fine
topo quotient : surjection canonique

Proposition 19. *Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Pour tout $i \in I$, donnons nous un espace topologique Y_i et une application $f : X \to Y_i$. Munissons X de la topologie initiale associée aux applications f_i. Soit a un point de X, alors $\mathcal{F}$ converge vers a si, et seulement si, $f_i(\mathcal{F})$ converge vers $f_i(a)$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Cette propriété de convergence / continuité est admise. □

Une dernière propriété caractérisant les compacts est enfin nécessaire avant de passer à Tychonov.

Proposition 20. *Supposons que X est un espace topologique séparé. Les énoncés suivants sont équivalents (LESE, héhé) :*
- *l'espace X est compact,*
- *tout ultrafiltre sur X converge,*
- ~~*tout filtre sur X admet un point d'adhérence*~~*.*

Ceci correspond au théorème 2.6.26 de Schwartz.

idée — Considérer famille formée par les éléments de $\mathcal{F}$ fermés dans X et stable par intersection finie non vide.

~~*Démonstration.* Seule l'équivalence entre les deux premiers points nous intéresse. Le troisième est laissé à l'abandon. Se reporter au Skandalis pour plus de précisions. La démonstration de l'équivalence entre les deux premiers points vient du cours de Melleray (B.14). J'ai tenté d'esquiver allègrement la notion de point d'adhérence, ceci n'aide pas totalement et rend peut-être un peu moins clair et naturel certains passages.~~

à bas les points d'adhérence !

→ Considérer

Supposons X compact. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur X, montrons qu'il converge. Puisque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, la famille formée par les éléments de $\mathcal{F}$ qui sont fermés dans X est stable par intersection finie non vide donc est non vide. Soit un x dans cette intersection, montrons que $\mathcal{F}$ converge vers x, c'est-à-dire que le filtre $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{V}_x$. Soit V un ouvert contenant x, on a $V \in \mathcal{F}$. En effet, si ce n'était pas le cas, par définition d'un filtre, on aurait $X \setminus V \in \mathcal{F}$. Étant donné que $X \setminus V$ est fermé, on a une contradiction.

par définition

~~Réciproquement, supposons que tout ultrafiltre sur X est convergent. Soit F la famille des sous-ensembles **fermés** de X tels que toute sous-famille **finie** de F soit d'intersection non vide. Montrons que l'intersection des éléments de F est non vide en vertu du lemme suivant :~~

~~Un espace topologique X est compact si, et seulement si, pour toute collection A de fermés de X tels que toute sous-famille finie soit d'intersection non vide, on ait $\cap A \neq \emptyset$.~~

~~Par le lemme 14, ce filtre engendré est contenu dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$ de X. Par hypothèse, $\mathcal{U}$ converge vers un élément $x \in X$. Montrons que $x \in \cap A$. Soit $a \in A$ et U un ouvert contenant x. Alors, $U \in \mathcal{U}$ puisque $\mathcal{U}$ converge vers x. Alors a et U sont des éléments de $\mathcal{U}$ d'intersection non vide. Comme on peut faire ça pour tout U, on a $x \in \overline{a} = a$. En répétant cet argument pour tout $a \in A$, cela montre que $x \in a$ pour tout $a \in A$, c'est-à-dire $x \in \cap A$.~~ [10] □

? preuves ou cette caractérisation ou intersection adhérence filtre

On en arrive enfin à Tychonov, présentons une nouvelle preuve faisant usage des ultrafiltres.

Théorème 21 (Tychonov, *non bis in idem*)**.** *Un produit* **quelconque** *d'espaces topologiques compacts est compact.*

Démonstration. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts, notons E l'espace produit des E_i et $\pi_i : E \to E_i$ la projection canonique sur E_i. La propriété de séparation est de nouveau assurée par le lemme 8. Afin de conclure pleinement, montrons que E est quasi-compact. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E. Par la proposition 15, on déduit que $\pi_i(\mathcal{F})$ est un ultrafiltre sur l'espace E_i qui est compact. La compacité assure par la proposition 20 que $\pi_i(\mathcal{F})$ converge. En application de la proposition 19, on en déduit que $\mathcal{F}$ converge et ce pour tout ultrafiltre $\mathcal{F}$. Ce qui, finalement, assure la compacité de E par une nouvelle application de la proposition 20. □

image directe

~~Convaincus que les ultrafiltres c'est cool ? Bah, ce n'est pas fini ! On peut les utiliser de nouveau pour démontrer le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (si le temps le permet, on le fera dans la partie suivante ; je reviens sur mes dires, on va le faire de manière sûre et certaine, thm. 29 !).~~

3. Topologie faible et topologie faible étoile

état fondamental méca q ou Dirichlet $\int |\nabla u|^2 + \dots$

À vrai dire, on s'en tient aux notions les plus fondamentales. Peut-être simplement avoir en tête que l'introduction de nouvelles topologies peut être un moyen de retrouver de la compacité, ce qui est fondamental pour le calcul des variations, cf. l'optimisation de fonctionnelles en dimension infini (c'est du moins ce que m'a dit Vincent Boulard et ce que me fait constater Xavier Lamy !). On suit pleinement le Brezis pour cette introduction aux topologies faibles.

Notre problème est celui de construire une topologie rendant une classe de fonctions continues. On souhaite que la construction soit la plus économique [11] possible, c'est-à-dire qu'elle ait le

10. J'exposerai pas cette preuve, j'suis clairement pas à l'aise là. En plus, avec l'utilisation du lemme 14, y'a du Zorn et AC qui traîne...

11. D'où peut-être la dénomination *faible*.

moins d'ouverts possible. La motivation habituellement donnée à cela consiste à dire que cela permettra d'obtenir plus de compacts. Même si intuitivement cela ne paraît pas totalement déconnant ce n'est pas automatiquement clair pour autant (pour la simple raison que l'on s'attend à ce qu'il y ait de même substantiellement moins de fermés car ces derniers sont définis comme complémentaires des ouverts). On va tenter d'expliquer un petit peu pourquoi cela une fois que l'on disposera du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. ← objectif de cette section

l'évaluat de f en x

[12]Soit E un espace de Banach et $f \in E^*$.[13] Posons $\varphi_f : E \to \mathbf{R}$ qui à x associe $\phi_f(x) = \langle f, x\rangle$ et définissons $\Phi = (\varphi_f)_{f\in E^*}$ l'ensemble de ces formes linéaires. De plus, posons $\psi_x : E^* \to \mathbf{R}$ qui à $f \in E^*$ associe $\psi_x(f) = \langle f, x\rangle$ et définissons $\Psi = (\psi_x)_{x\in E}$ l'ensemble des applications de E^* dans $\mathbf{R}$.

Définition 22. *La **topologie faible** $\sigma(E, E^*)$ est la topologie la moins fine sur E rendant l'ensemble des éléments de Φ continus*[14].

Définition 23. *La **topologie faible étoile** $\sigma(E^*, E)$ est la topologie la moins fine sur E^* rendant l'ensemble des éléments de Ψ continus.*

Définition 24. *En comparaison de ces topologies faibles, il existe bien évidemment la **topologie forte**. La **topologie forte** est la topologie induite par la norme de l'e.v.n. considéré.*

Remarquons qu'en dimension finie, par équivalence des normes, il ne peut y avoir qu'essentiellement une topologie forte (puisque deux normes équivalentes engendrent les mêmes ouverts). À vrai dire, **en dimension finie**, la situation est assez unilatérale : dans ce cas, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$, la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ et la topologie forte se correspondent (proposition 3.6 du Brezis). Néanmoins, en dimension infini, il semble se passer des choses *étranges* : par exemple, les ouverts faibles ne sont jamais bornés. Mais globalement, ces topologies faibles disposent de beaucoup de propriétés agréables.

Proposition 25. *Les topologies faibles $\sigma(E, E^*)$ et faibles étoile $\sigma(E^*, E)$ sont séparées.*

Démonstration. Les preuves sont similaires (sauf que pour la topologie faible, on a besoin de Hahn-Banach... ça passe sous le tapis). On se restreint au cas de la topologie faible étoile. Soient $f_1, f_2 \in E^*$ différents. Il existe alors un $x \in E$ telque $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$. Spdg, supposons que $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$ et soit α tel que $\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle$.[15] Les ensembles suivants sont ouverts dans $\sigma(E^*, E)$:

$$O_1 = \{f \in E^*,\ \langle f, x\rangle < \alpha\} = \psi_x^{-1}\left(]-\infty, \alpha[\right),$$
$$O_2 = \{f \in E^*,\ \alpha < \langle f, x\rangle\} = \psi_x^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right).$$

De plus, $f_1 \in O_1$, $f_2 \in O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Ce qui conclut. $\square$

La topologie faible est clairement moins agréable que la topologie faible étoile. En effet, par exemple, la sphère unité d'un e.v.n. de dimension infinie n'est jamais fermée, de même la boule unité d'un e.v.n. de dimension infinie n'est jamais ouverte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Restreignons nous désormais à des considérations sur la topologie faible étoile, c'est de toute façon celle qu'il nous faut considérer pour la démonstration du théorème 1. On ne traite pas la notion de convergence faible, faible étoile (pourtant fondamentale) puisqu'elle n'est pas strictement nécessaire à la démonstration du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. ~~Voyons simplement l'existence d'un résultat d'existence pour nous rassurer : un résultat à la Riesz.~~

12. **Il y a un détail auquel faire attention !! J'en parlerai dans la preuve la proposition 25.**

13. Attention ! Même si E^* désigne le dual topologique de E, i.e. l'ensemble des formes linéaires **continues**, on fera bien attention de distinguer pour quelle topologie ces formes linéaires sont continues. Par défaut, pour le dual topologique, c'est la topologie forte.

14. C'est une topologie initiale !

15. Avez vous spot le détail auquel faire attention ? On est sur $\mathbf{R}$!!!! Il semblerait que tous les résultats de cette section valent lorsque l'on remplace le corps de base par $\mathbf{C}$ mais cela demande un peu plus de travail.

peut-être juste le mentionner à l'oral

Théorème 26. *Soit $\varphi : E^* \to \mathbf{R}$ une forme linéaire continue pour la topologie faible étoile. Alors, il existe un $x_0 \in E$ tel que :*

$$\varphi(f) = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*.$$

Pas absolument sûr mais ce résultat nous montre que le V de la proposition précédente est essentiellement équivalent à celui donné par Schwartz.

Proposition 27. *Soit $f_0 \in E^*$ et $\{x_1, \ldots, x_m\}$ une collection **finie**[16] de points de E. Soit $\varepsilon > 0$, considérons l'ensemble suivant :*

$$V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(f_0) := \{f \in E^* : \forall i = 1, \ldots, m,\ |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon\}.$$

Alors c'est un voisinage de f_0 pour la topologie $\sigma(E^*, E)$. De plus, on obtient une base de voisinage[17] de f_0 pour cette même topologie en faisant varier ϵ, m et les x_i.

Démonstration. **Idée** : l'ensemble $V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(f_0)$ est un ouvert pour la topologie faible étoile et il contient f_0. En effet, en réécrivant ensemblistement, on a par continuité des ψ_{x_i} :

$$V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(f_0) = \bigcap_{i=1}^m \psi_{x_i}^{-1}\left(]\langle f_0, x_i \rangle - \varepsilon; \varepsilon + \langle f_0, x_i \rangle[\right).$$

Montrer que tout voisinage de f_0 peut s'écrire sous cette forme. □

Voici pourquoi on parle de **topologie de la convergence simple** pour la topologie faible étoile.

Proposition 28. *Soit (f_n) une suite d'éléments de E^*. Alors*[18] *:*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff f_n(x) \to f(x) \text{ pour tout } x \in E.$$

Nous pouvons donc conclure cette partie en démontrant le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Ce théorème est absolument nécessaire pour la démonstration de la compacité des caractères d'une algèbre de Banach pour la topologie faible étoile, i.e. de la convergence simple.

Théorème 29 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *La boule unité fermée $B_{E^*} = \{f \in E^* : ||f|| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$.*

Démonstration. Considérons le produit cartésien $Y = \mathbf{R}^E$, ~~i.e. l'ensemble des applications de E dans $\mathbf{R}$. Cet espace est~~ muni de la **topologie produit**, ~~i.e. la topologie la moins fine rendant continue les projections canoniques.~~ ~~Cette~~ topologie n'est rien d'autre que celle de la **convergence simple**, i.e. convergence point par point (~~on voit immédiatement le rapport avec la topologie produit~~).

Schwartz fait une démo par les filtres mais est moins claire que celle-ci je trouve. De toute façon on utilise filtres par Tychonov !

Munissons désormais E^* de la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$. En particulier, E^* est une partie de Y puisque le dual est constitué d'une classe bien particulière d'applications de E dans $\mathbf{R}$. C'est donc un sous-espace topologique de Y. Par construction, la boule unité B de E^* est contenue dans Y et plus précisément dans l'ensemble :

$$K = \{\psi_x : \forall x \in E,\ |\psi_x| \leq ||x||\} = \prod_{x \in E} [-||x||, ||x||]$$

[19] qui est compact par le théorème de Tychonov. De plus, l'ensemble suivant est fermé [20] :

$$F = \{\psi_x : \psi_{x+y} - \psi_x - \psi_y = 0, \psi_{\lambda x} - \lambda\psi_x = 0, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x, y \in E\}.$$

16. On voit directement dans la preuve pourquoi on demande une collection **finie** de points.
17. Base de voisinage est un synonyme de système fondamental de voisinages.
18. Rappelons qu'une suite (x_n) d'éléments d'un espace topologique X converge vers $x \in X$ au sens d'une topologie $\mathcal{O}$ si, et seulement si, chaque suite $(\varphi_i(x_n))$ converge vers $\varphi_i(x)$. Les applications φ_i sont celles rendues continues pour la topologie initiale donnée.

Rappel

19. Penser à la norme opérateur sur E^* !
20. Penser image réciproque de zéro et continuité, on donnera explicitement l'argument dans la preuve du théorème 1.

[21]Il en résulte que l'ensemble $K \cap L$ est compact pour la topologie faible étoile. Montrons que B_{E^*} est homéomorphe à $K \cap L$. Soit $\Phi : E^* \to Y$ l'injection canonique de E^* dans Y. Cette application est bijective sur l'image $\Phi(E^*)$. Cette application est continue et d'inverse continu. En effet, c'est une conséquence directe de la définition de la topologie faible étoile :

$f \in E^*$ On a $\Phi(f) = (\varphi_x)_{x \in E}$ où $\varphi_x = \langle f, x \rangle$

Continuité de Φ : Rappel ψ continue ssi $\varphi_x \circ \psi$ continue

(+)

$f \mapsto (\Phi(f))_x = \langle f, x \rangle$ continue

Continuité de Φ^{-1} restreint à $\Phi(E^*)$:

mq $\omega \mapsto \langle \Phi^{-1}(\omega), x \rangle$ continue sur E^* pour tout $x \in E$

↳ vrai car $\langle \Phi^{-1}(\omega), x \rangle = \langle f, x \rangle = \omega_x$

où $\omega = \Phi(f)$ pour $f \in E^*$

Enfin, on a $B_{E^*} = \Phi^{-1}(K \cap L)$, ce qui assure la compacité.[22] □

On peut donc exhiber toute une famille de compacts pour une topologie faible qui ne le sont pas pour la topologie forte (à moins d'être en dimension finie, cf théorème 6). Ensuite, le théorème de Tychonov nous permet d'en construire une tonne de nouveaux ! On dispose donc effectivement de plus de compacts ! Encore une fois, ce que l'on essaie de faire c'est reproduire ce qui se passait si bien en dimension finie (mais que l'on perd en dimension infinie) : minimisation, existence...

4. ~~Interprétation catégorique~~

Rapide introduction aux catégories. Ne pas hésiter à lire le texte de Marius Capelli, issu de sa Conf4 (12 avril 2024). Marius est aujourd'hui un catégoricien averti (même s'il dira le contraire) ! On propose ici d'exposer le strict minimum nécessaire pour se dire "ah oui, c'est un objet initial !" (on expliquera cette phrase par la suite). On suit le livre d'Assem chez C & M.

Définition 30. *Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est définie par la donnée de :*

- *une classe que l'on note $\mathcal{C}_0$ ou $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ appelée **classe d'objets** de $\mathcal{C}$,*
- *pour toute paire (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, un ensemble noté $\mathcal{C}(X, Y)$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés les **morphismes** de X vers Y,*
- *pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, une application $\circ$:*

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$$

*qui associe à $(f, g) \in \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z)$ un unique élément noté $f \circ g$, ou plus brièvement gf, de $\mathcal{C}(X, Z)$ et appelé **composé** ou **produit**. Cette application, appelée **composition**, satisfait aux axiomes suivants :*

  - ***associativité*** *: si $f \in \mathcal{C}(W, X)$, $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ et $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$, alors $h(gf) = (hg)f$,*

21. Bien garder en tête ce schéma de démonstration ! On la réutilisera dans la démonstration du théorème 1.
22. N'aurait-on pas pu utiliser directement le fait que l'image d'un compact par une application continue est continue ?

- ***identité*** *: à chaque objet X de $\mathcal{C}$ est associé un morphisme 1_X de $\mathcal{C}(X,X)$ appelé* ***identité*** *sur X et tel que, si $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ et $g \in \mathcal{C}(W,X)$, alors $f1_X = f$ et $1_X g = g$.*

En définitive, une catégorie est un triplet $(\mathrm{Ob}_\mathcal{C}, \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X,Y), \circ)$ que l'on désignera plus commodément par $\mathcal{C}$ lorsque le contexte est suffisamment clair. Les objets X et Y ne sont pas clairement définis dans ce contexte mais on comprend que cela sous entend que l'on considère toutes les paires d'objets (X,Y) de $\mathcal{C}$. Moralement, une catégorie c'est juste une collection d'objets avec des flèches *compatibles* entre les objets.
Fixons E un ensemble, il est bien naturel que E soit un objet de la catégorie des ensembles **Ens** (on notera la différence entre objet et élément, plus ou moins relativement respectée). Montrons que **Ens** est effectivement une catégorie. Remarquons que les anglais la note **Set** (mais c'est quand même moins beau qu'à la française).

Proposition 31. *Soit $\mathcal{E}$ la classe de tous les ensembles. Le triplet* $\mathbf{Ens} = (\mathcal{E}, \mathrm{Hom}(E,F), \circ)$ *forme une catégorie.*

Démonstration. Vérifions formellement que l'on définisse bien une catégorie. Il n'y a en réalité presque rien à faire, c'est surtout pour manipuler les objets qu'on le fait. La vérification des deux premières propriétés s'ensuit par construction même de la catégorie. Précisions simplement que les morphismes sont ici les **applications** (sur lesquelles on ne suppose rien). L'opération de composition est associative par construction et l'identité est l'application identité $\mathbf{1}_X$ associant à $x \in X$ l'élément x lui-même. □

De même, la catégorie des groupes existe.

Proposition 32. *Soit $\mathcal{G}$ la classe de tous les groupes. Le triplet* $\mathbf{Grp} = (\mathcal{G}, \mathrm{Hom}(F,G), \circ)$ *forme une catégorie.*

Démonstration. Vérifions formellement que l'on définisse bien une catégorie. La vérification des deux premières propriétés s'ensuit par construction même de la catégorie. Les morphismes ne sont alors autres que les **morphismes de groupes**. L'associativité de la composition de morphisme découle directement de celle du groupe. L'identité est basiquement l'élément neutre. □

On prendra grand soin de ne pas se faire avoir par diverses subtilités catégoriques. Par exemple, la catégorie des groupes n'est pas une sous-catégorie de la catégorie des ensembles. Cela provient du fait qu'un même ensemble puisse admettre plusieurs structures de groupes différentes, i.e. non isomorphes. On fera donc bien attention à ne pas aller trop vite en besogne.
Deux catégories vont être d'un intérêt tout particulier pour ce séminaire d'introduction à la théorie spectrale. On n'en fera essentiellement rien mais il est bon de déjà savoir qu'elles existent. La première est la catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues. La seconde est la catégorie de C^*-algèbres ayant les C^*-algèbres pour objets et les *-homomorphismes pour morphismes, i.e. les morphismes d'algèbres involutives.

J'aime pas la tournure que ça allait prendre ensuite, section avortée.

4. Preuve du théorème 1

Preuve

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. On souhaite Mq prouver que l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la convergence simple est un espace compact. Notons que l'on n'avait aucunement besoin d'autant de choses pour montrer le théorème 1, néanmoins, ça ne fait aucun mal ! Commençons par rappeler le résultat un résultat de compacité.

Proposition 33. *Soit X un espace topologique compact et Y une partie fermée de X. Alors, Y est compact.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert de Y. Pour tout $U_i \in \mathcal{R}$, il existe un ouvert $V_i \in X$ tel que $V_i \cap Y = U_i$. Considérons $V = \{V_i\}_{i \in I}$, alors $V \cup (X \setminus Y)$ est un recouvrement ouvert de X puisque Y est supposée être une partie fermée. Par compacité de X, on peut en extraire un sous-recouvrement fini de la forme suivante :

idée

union ~~finie~~ provient compacité de X

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i \cup (X \setminus Y)).$$

→ recouvrement de X qui est en fait un recouvre Y

↳ proviendrait d'un recouvrement adapté

C'est un sous-recouvrement fini de Y (vérifier ! j'ai l'impression qu'il y a un problème). □

Avant de chercher un espace compact adéquat, commençons par montrer que $\widehat{\mathcal{A}}$ est un fermé.

Lemme 34. *L'ensemble $\widehat{\mathcal{A}}$ est faiblement étoile fermé.*

Démonstration. Soient $(u, v, \lambda) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathbf{C}$, les applications suivantes définies sur le dual de $\mathcal{A}$ sont continues :

$$\begin{aligned}
\chi &\mapsto f_{u+v}(\chi) = \chi(u+v) - \chi(u) - \chi(v), \\
\chi &\mapsto f_{\lambda u}(\chi) = \chi(\lambda u) - \lambda \chi(u), \\
\chi &\mapsto f_{uv}(\chi) = \chi(uv) - \chi(u)\chi(v), \\
\chi &\mapsto f_e(\chi) = \chi(e) - 1.
\end{aligned}$$

En effet, c'est direct par définition de la topologie de la convergence simple. Donc, l'image réciproque de $\{0\}$ par chacune de ses applications est fermée, il en est alors de même de l'intersection de ces quatre images réciproques. Or $\widehat{\mathcal{A}}$ est égale à cette intersection lorsque (u, v, λ) parcourt l'ensemble $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathbf{C}$. □

Il nous reste une ultime étape, rappelons le résultat démontré la semaine dernière.

Proposition 35. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, tout caractère χ sur $\mathcal{A}$ est continu et tel que $||\chi|| \leq 1$.*

Cette proposition nous conduit immédiatement à considérer la boule unité du dual de $\mathcal{A}$. Or, le théorème 29 nous assure que cet espace est faiblement étoile compact, ce qui conclut la preuve du théorème 1.

6. Retour sur des résultats de réflexivité

Je ne fais ici que revenir sur des résultats déjà discutés les semaines précédentes tout en tentant de les éclairer un peu à la lueur de la topologie faible. On compile alors des résultats de dualité et réflexivité dont il peut être bon de savoir qu'ils existent. On se référera au chapitre 3 partie 5 et suivantes du Brezis pour plus de précisions. Rappelons deux choses. Tout d'abord un espace est séparable[23] s'il admet une partie dénombrable dense. Deuxièmement, rappelons qu'un espace de Banach est réflexif s'il est isomorphe à son bidual topologique (i.e. que l'injection canonique de l'espace dans son bidual est surjective). Le cours d'algèbre linéaire nous a informé que les espaces vectoriels de dimensions finis étaient réflexifs (et séparables !). Le cours de théorie de la mesure nous a fait sentir que les L^p étaient réflexifs pour $p \in]1, +\infty[$ et séparables pour $p \in [1, +\infty[$. On a vu la semaine dernière (en *tordant* et appliquant de manière répétée le lemme de représentation de Riesz) que les espaces de Hilbert sont réflexifs. En revanche, L^1, ℓ^1, L^∞ et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs. Partons désormais à la chasse aux théorèmes.

5

Un dernier amuse bouche

Théorème 36 (Kakutani). *Soit E un espace de Banach. Alors, E est réflexif si, et seulement si, la boule unité $B_E = \{x \in E, \; ||x|| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

Par les Hilbert

23. Rien à voir avec séparé !

Preuve Comme Hilbert réflexif ("Riesz 2 fois")

H, $\overline{\mathrm{H}}$ (antilinéaire)

c'est gagné

Banach-Alaoglu-Bourbaki.

mot de la fin dès lors

Fin

Théorème 37 (Eberlein-Šmulian). *Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée de E admette une sous-suite faiblement convergente dans $\sigma(E, E^*)$. Alors E est réflexif.*
Supposons que E est un espace de Banach réflexif et que (x_n) soit une suite bornée de E. Alors, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

Proposition 38. *Supposons que E soit un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M est réflexif.*

Corollaire 39. *Un espace de Banach est réflexif si, et seulement si, son dual est réflexif.*

Corollaire 40. *Soit E un espace de Banach réflexif et $K \subset E$ une partie bornée, fermée et convexe. Alors, K est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

Théorème 41. *Soit E un espace de Banach tel que E^* est séparable. Alors, E est séparable.*[24]

Corollaire 42. *Soit E un espace de Banach, alors on a l'équivalence suivante :*

$$E \text{ est réflexif et séparable} \iff E^* \text{ est réflexif et séparable.}$$

Théorème 43 (Milman-Pettis). *Tout espace de Banach uniformément convexe*[25] *est réflexif.*

7. Et puis tant qu'à faire... un peu de distributions

Dès lors que l'on parle de choses faibles, ça sent les distributions ! Malheureusement, ayant eu un jour de moins pour rédiger ce document, je n'ai pas eu le temps de traiter cette partie. Ce sera le cas dans une partie du rapport *Applications harmoniques et cristaux liquides nématiques* rédigé sous la direction de Xavier Lamy.

Ressources.

- *Analyse I – Théorie des ensembles et topologie*, Schwartz.
- *Topologie et Analyse*, Skandalis.
- *Espaces vectoriels topologiques (chapitres 1 à 5)*, Bourbaki. Pas forcément la meilleure idée.
- *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Brezis.
- *Topologie, Analyse et Calcul différentiel*, Paulin.
- De manière générale, les publications pédagogiques de Karim Bekka sont top.

24. La réciproque n'est pas vraie (penser à L^1 et L^∞).
25. Cf. partie 3.7 du Brezis.

Le théorème de Gelfand-Naimark

I. Cas des espaces compacts/C^*−algèbres commutatives unitaires

Dans notre SL nous avons montré que la transformée de Gelfand, pour une C^*-algèbre commutative unitaire A,

$$G : A \longrightarrow C(\widehat{A}) \tag{1}$$

donnée par

$$G(a)(\chi) := \chi(a)$$

est un isomorphisme isométrique. Pour compléter le cas des espaces compacts et donc des C^*-algèbres commutatives unitaires montrons que:

1. Soit X un espace compact, montrer que l'application

   $$e : X \to \widehat{C(X)} \tag{2}$$

   donnée par

   $$e(x)(f) := f(x)$$

   pour $x \in X$ et $f \in C(X)$, est un homéomorphisme.

2. Fonctorialité de $X \mapsto C(X)$:

   - Soit $f : X \to Y$ une fonction continue entre deux espaces compacts. Montrer que

     $$C(f) : C(Y) \to C(X) \tag{3}$$

     donné par $C(f)(g) := g \circ f$ est un morphisme de C^*-algèbres unitaires.
   - Pour $f : X \to Y$ et $h : Y \to Z$ deux fonctions continues entre des espaces compacts, montrer que

     $$C(h \circ f) = C(f) \circ C(h). \tag{4}$$

   - Pour X espace compact, montrer que $C(Id_X) = Id_{C(X)}$.

3. Fonctorialité de $A \mapsto \widehat{A}$:

   - Soit $\theta : A \to B$ un morphisme de C^*-algèbres commutatives unitaires. Montrer que

     $$\widehat{\theta} : \widehat{B} \to \widehat{A} \tag{5}$$

     donné par $\widehat{\theta}(\chi) := \chi \circ \theta$ est une fonction continue.
   - Pour $\varphi : A \to B$ et $\theta : B \to C$ deux morphismes de C^*-algèbres commutatives unitaires, montrer que

     $$\widehat{\theta \circ \varphi} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\theta}. \tag{6}$$

   - Pour A commutative unitaire, montrer que $\widehat{Id_A} = Id_{\widehat{A}}$.

Ceci montre que $X \mapsto C(X)$ et $A \mapsto \widehat{A}$ sont de foncteurs inverses l'un de l'autre. On dit donc que la catégorie des espaces compacts et la catégorie des C^*-algèbres commutatives unitaires sont équivalentes.

II. Cas des espaces localements compacts/C^*-algèbres commutatives

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des espaces localement compacts (séparés) et la catégorie des C^*-algèbres commutatives.

1. L'unitarisation d'une C^*-algèbre non unitaire: Soit A une C^*-algèbre non unitaire (commutative ou pas, pour l'instant). Posons

$$A^+ = A \oplus \mathbb{C}$$

qu'on munit de l'addition et la multilication par scalaire coordonnée par coordonnée, d'un produit donnée par

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \lambda \cdot b + \mu \cdot a, \lambda\mu)$$

et d'une involution

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}).$$

- Vérifier que A^+ est une algèbre involutive unitaire avec ces opérations.
- Vérifier que

$$\pi : A^+ \to \mathbb{C}\ (a, \lambda) \mapsto \lambda$$

est un morphisme d'algèbres involutives unitaires.

- Vérifier que $\iota : A \to A,\ a \mapsto (a, O)$ est un morphisme d'algèbres involutives et que A peut etre idéntifiée ainsi à un idéal (à gauche et à droite) de A^+.
- Pour $x \in A^+$, soit

$$|||x|||_{A^+} = \sup\{\|ax\|_A : a \in A, \|a\|_A \leq 1\}$$

et

$$\|x\|_{A^+} = max\{|||x|||_{A^+}, |\pi(x)|_{\mathbb{C}}\}.$$

Montrer que $(A^+, \|\cdot\|_{A^+})$ est une C^*algèbre unitaire (commutative si A l'est aussi).

2. Soit X un espace localement compact non compact. Montrer qu'il y a un isomorphisme

$$C_0(X)^+ \cong C(X^+) \tag{7}$$

de C^*-algèbres commutatives unitaires.

3. Soit A une C^*-algèbre commutative non unitaire. Soit $X = \widehat{A^+} \setminus \{\pi\}$, montrer qu'il existe un isomorphisme

$$A \cong C_0(X). \tag{8}$$

Indication: Considérer la transformée de Gelfand associée à A^+.

4. Montrer que pour tout espace localement compact X (non compact c'est le cas intéressant) il existe un homéomorphisme

$$e : X \to \widehat{C_0(X)^+} \setminus \{*\}. \tag{9}$$

5. Conclure.

En ce qui concerne la première partie, *Cas des espaces compacts / C^*-algèbres commutatives unitaires*, on ne traite que les questions qui demandent plus que de simples calculs de routine. Notons que Raphaël a introduit le langage catégorique et fonctoriel.

8. Calcul de spectre