Nous avons 7 tableaux à voir (4 pour l'exposé de vendredi) ! Ce travail ne présente aucune originalité, il condense diverses sources et se bornant au nécessaire afin de démontrer le théorème 1. Je ne vais pas dire grand chose mais espérons qu'une version modifiée du principe d'incertitude d'Heisenberg sera vérifiée : peu de choses seront dites mais elles seront très précises. Je dis juste ça en rigolant en en profitant pour signaler une version mathématique de ce principe en théorie spectrale et analyse harmonique (à coup de transformées de Fourier).

TABLE DES MATIÈRES

Nous allons prouver le résultat suivant nécessaire à la démonstration de Gelfand-Naimark.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la convergence simple est un espace compact.*

Le Schwartz étant somme tout assez sommaire à cet égard (§ 2.13.32 et suivants), introduisons légèrement plus tout en revenant sur quelques impasses / hors programme d'Ana5.

1. Rappels du séminaire et d'Ana5

Rappelons qu'une **algèbre** $\mathcal{A}$ sur un corps k est un k-espace vectoriel muni en outre d'une application bilinéaire de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ appelée multiplication. Cette application est associative et possède une unité e non nulle. Une **algèbre normée** est une algèbre qui est également un espace vectoriel normé respectant de plus $||e|| = 1$ et $||xy|| \leq ||x||||y||$.

Définition 2. *Une **algèbre de Banach** est une algèbre normée complète.*

Sur cette algèbre, on peut définir des caractères (qui généralise en un sens la situation connue des groupes finis).

Définition 3. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach sur le corps des nombres complexes, d'unité e. On appelle **caractère** de $\mathcal{A}$ tout homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{C}$ prenant la valeur 1 sur e. En d'autres termes, χ est un caractère sur $\mathcal{A}$ si c'est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{C}$ possédant les propriétés suivantes :*

$$\chi(u+v) = \chi(u) + \chi(v), \quad \chi(\lambda u) = \lambda \chi(u), \quad \chi(uv) = \chi(u)\chi(v), \quad \chi(e) = 1.$$

pour $(u, v, \lambda) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathbf{C}$. On note $\widehat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des caractères de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Avant de les préciser et reprendre, donnons les définitions et résultats énoncés par Schwartz nécessaires pour prouver le théorème 1.

Définition 4. *Soient E un espace vectoriel normé, $E^* = \mathcal{L}(E, k)$ son dual topologique*[1] *(pour k corps de base). On appelle **topologie faible étoile***[2] *sur E la topologie de la convergence*

1. On appelle **dual algébrique** l'ensemble des formes linéaires et **dual topologique** l'ensemble des formes linéaires continues.

2. Schwartz écrit *topologie $*$-faible.*

simple sur E. Un système fondamental de voisinages[3] *de $\varphi \in E^*$ est donné par l'ensemble des $V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(\varphi)$, où $(x_i)_{i=1}^m$ est une famille finie de points de E et $\varepsilon > 0$, donnés par :*

$$V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(\varphi) = \{\psi \in E^* : \forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| \leq \varepsilon\}.$$

À vrai dire, et comme on peut s'y attendre, la topologie faible étoile (i.e. la topologie de la convergence simple, i.e. la topologie de la convergence point par point, i.e. *pointwise convergence topology*) n'est rien d'autre que la topologie produit. Notons également que l'on parle de la convergence simple d'un type d'élément bien particulier : les formes linéaires continues. Nous y reviendrons. Un théorème particulièrement important est le suivant.

Théorème 5. *Soient E^* le dual topologique d'un espace vectoriel normé et B la boule unité de E^*. Alors B est compacte pour la topologie faible étoile.*

Avoir fait cette hypothèse sur la topologie sous-jacente est fondamentale. On rappelle qu'en général, pour la topologie dite **forte** (on reviendra par la suite dessus), on ne dispose pas de plus que le théorème de compacité de Riesz.

Théorème 6. *Soit E un espace vectoriel normé sur $k = \mathbf{R}, \mathbf{C}$. Alors, la boule unité fermée de E est compacte si, et seulement si, E est de dimension finie.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, la boule unité fermée est fermée et compacte. Donc par caractérisation des compacts dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on conclut. (Pour reprouver la caractérisation des compacts en dimension finie, penser très fortement à Bolzano-Weierstrass et utiliser l'équivalence des normes en dimension finie pour se ramener à ne traiter le cas que d'une norme de son choix. De manière générale, pour des raisons de métrisabilité des espaces, il va falloir abandonner le recours aux suites pourtant si plaisantes.)

Réciproquement, supposons que la boule unité fermée de E est compacte. Montrons que E est de dimension finie.[4] On dispose de l'équivalence suivante dans le cas d'un espace métrique donc, *a fortiori*, pour un espace vectoriel normé :

$$\text{compacité} \Longleftrightarrow \text{compacité séquentielle} \Longleftrightarrow \text{précompacité et complétude.}$$

Par précompacité, on peut recouvrir la boule unité fermée B par la réunion de n boules chacune de rayon $1/2$ et centrées en les x_i, $i = 1, \ldots, n$. Pour un point quelconque x de la boule B, il existe un indice i_1 tel que $||x - x_{i_1}|| \leq 1/2$. Notons $y = x - x_1$ et remarquons que $2y_1 \in B$ (par définition). Il existe alors i_2 tel que $||2y_1 - x_{i_2}|| \leq 1/2$, c'est-à-dire $||y_1 - x_{i_2}/2|| \leq 1/4$. Par récurrence, on construit de même une suite d'indices $(i_j)_{j=1}^{\infty}$ telle que, pour tout k entier naturel :

$$\left|\left|x - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{j-1}} x_{i_j}\right|\right| \leq 1/2^k.$$

On a donc explicitement construit une suite de points appartenant à l'espace vectoriel engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui converge vers x. Ce sous-espace vectoriel est fermé car il est de dimension finie. Ceci implique que x en est un élément. On a donc prouvé que E était inclus dans ce sous espace vectoriel engendré, ce qui garantit que E est lui-même de dimension finie. □

Remarquons rapidement que l'hypothèse de séparation nécessaire à la compacité est ici superflue puisque l'on raisonne dans des espaces vectoriels normés. Ces derniers sont automatiquement séparés puisque les espaces métriques le sont (penser à 1/3 de distance).

3. Soit X un espace topologique et A une partie de X. Un système fondamental de voisinages de A est un ensemble $\mathscr{P}$ de voisinages de A tels que tout voisinage de A contienne un élément de $\mathscr{P}$.

4. La (très belle) preuve provient de ce document.

À vrai dire, une généralisation de ce théorème existe [5]. On rappelle qu'un espace est de Hausdorff s'il est séparé (on peut également dire T_2). De plus, un espace topologique est localement compact si chacun de ses points admet un voisinage compact (parfois, on demande la séparation dans la définition même de localement compact).

Théorème 7 (Riesz)**.** *Un espace vectoriel topologique de Hausdorff est localement compact si, et seulement si, il est de dimension finie.*

Admettons pour le moment que la topologie faible étoile corresponde à la topologie produit. Fixons un espace topologique F et identifions l'ensemble des fonctions de notre espace vectoriel normé E dans F à l'ensemble F^E. Avec le théorème de Tychonov [6] en tête (ou cf. ci-après), on s'attend à obtenir une version de faible compacité du théorème 6 : à savoir, le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. On reviendra dessus une fois passés les rappels.

Lemme 8. *Soient I un ensemble* ***quelconque*** *et, pour tout $i \in I$, E_i un espace topologique. Notons $E = \prod_{i\in I} E_i$ le produit cartésien des ensembles E_i. Si, pour tout i, E_i est séparé alors, l'espace E est séparé. Réciproquement, si E est séparé, tous les espaces E_i sont séparés.*

Démonstration. Supposons les E_i séparés. Soient $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ deux points distincts de E. Comme ces deux points sont distincts, il existe un indice $j \in I$ tel que $x_j \neq y_j$. Par séparation, il existe deux ouverts O_x et O_y tels que $x_j \in O_x$, $y_j \in O_y$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$. Alors, en considérant la projection canonique, $\pi_j^{-1}(O_x)$ et $\pi_j^{-1}(O_y)$ sont de même disjoints et contiennent respectivement x et y (utiliser le fait que la préimage de l'intersection est l'intersection des préimages et revenir aux définitions). Ceci assure la séparation de X.
Réciproquement, exercice (revenir aux définitions, je ne crois pas qu'il y ait de tricks ; il y a peut-être de l'axiome du choix qui traîne, à vérifier). Cette partie n'est pas nécessaire pour le sens direct du théorème suivant. □

Théorème 9 (Tychonov)**.** *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille* ***quelconque*** *d'espaces topologiques compacts. Alors, l'espace topologique produit des E_i est un espace compact. La réciproque est vraie.*

Démonstration. On suit le Schwartz et ne démontre que le sens direct. [7] La propriété de séparation est assurée par le lemme précédent.
Montrons que l'espace topologique produit $E = \prod_{i\in I} E_i$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, à savoir : de tout recouvrement ouvert de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.
Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement onvert de l'ensemble $\mathcal{S}$ suivant :

$$\mathcal{S} := \left\{ U_i \times \prod_{j\neq i} E_j, \text{ avec } U_i \text{ un ouvert de } E_i, \ \forall i \in I \right\}.$$

L'espace engendré ci-dessus correspondant à la topologie de l'espace produit. (En effet, intuitivement, il suffit de considérer tous les ouverts pour un indice fixé, prendre le produit et répéter l'opération pour tout i de I. Formellement, revenir à la définition d'une topologie produit, cf. Schwartz 2.2.38.) On admet que, pour montrer la compacité de E, il suffit de considérer un recouvrement ouvert de E par des éléments de $\mathcal{S}$ (un système de générateurs de la topologie produit de E). [8] Considérons, pour tout $i \in I$, les ensembles suivants :

$$S_i := \left\{ U_i : U_i \times \prod_{j\neq i} E_j \in \mathcal{R} \right\}.$$

Exercice : en utilisant la compacité des E_i, conclure. □

5. C'est à vérifier mais Riesz peut faire référence à l'un des deux frères (Marcel ou Frigyes). On n'a jamais parlé de Marcel.

6. Tychonov, Tychonoff, Tykhonov (...) c'est au choix.

7. Si le temps le permet, on reviendra sur ce théorème et on apportera une démonstration toute autre à base d'ultrafiltres. Notons qu'avec Tychonov, il y a de l'axiome du choix qui traîne... !

8. C'est à ce moment qu'on utilise le lemme de Zorn, i.e. l'axiome du choix.

Pour la terminologie : lorsque l'on suppose un espace vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue mais non nécessairement séparé, on parlera d'espace quasi-compact. On voit bien que si l'on ne disposait pas du lemme 8, le théorème de Tychonov vaudrait au moins pour les espaces quasi-compacts (et c'est là que tout se complique avec l'axiome du choix).

2. Introduction aux filtres et rappels de topologie

Pour toute personne ayant le temps, cela peut être intéressant de faire le problème n°1 d'Alain Troesch (en particulier la partie II) pour se faire la main avant de lire cette partie.
Aujourd'hui, les filtres peuvent être vus comme légèrement *baroques*. Néanmoins, ils possèdent l'admirable propriété de permettre des raisonnements de nature sequentielle dans une catégorie (est-ce bien une catégorie ?) d'espaces topologiques : les espaces topologiques où chaque point admet un système fondamental dénombrable. Pour la présentation des filtres dans l'optique de redémontrer (de manière express) le théorème de Tychonov, on suit le Skandalis de Topologie et d'Analyse, chapitre 9. Pour quelques propriétés plus générales sur les filtres (en particulier concernant la compacité), on revient à Schwartz chapitre 2, § 6.

Définition 10. *Un **filtre** sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de X tel que :*
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$,
- *pour tout A, B parties de X :*
  - *si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$,*
  - *si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est non vide, contient X, stable par intersection finie et stable par surensemble (terminologie de Schwartz). Par des considérations ensemblistes basiques (les mêmes qu'en théorie de la mesure !), on prouve la proposition suivante.

Proposition 11. *Soient X et Y des ensembles, $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. L'ensemble des parties B de Y telles que $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ est un filtre sur Y. On appelle cet ensemble l'**image directe** de $\mathcal{F}$ par f que l'on note $f(\mathcal{F})$.*

En réalité, on connaît déjà beaucoup de filtres ! Une classe de filtre toute choisie est celle constituée par $\mathcal{V}_x$ les voisinages de x pour x un point d'un espace topologique X. On trouve également l'ensemble des parties d'un ensemble X contenant une partie non vide de X donnée. De même, l'ensemble des complémentaires des parties finies de X (ensemble non fini) est un filtre sur X.

Admettons que l'ensemble des filtres sur X muni de la relation d'inclusion est inductif, i.e. un ensemble partiellement ordonnée où toute partie totalement ordonnée admet un majorant. Ceci motive l'introduction des ultrafiltres.

Définition 12. *On appelle **ultrafiltre** un filtre maximal pour la relation d'inclusion.* [9]

Grâce à la notion de finesse (que l'on retrouve en topologie, on y reviendra), on dispose d'une autre manière de voir les ultrafiltres.

Définition 13. *Soient X un ensemble et $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ des filtres sur X. On dit que le filtre $\mathcal{F}_1$ est **plus fin** que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.*

Lemme 14. *Pour tout filtre $\mathcal{F}$, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Conséquence directe de la définition. □

On retrouve ensuite de bonnes propriétés de stabilité par préimage.

Proposition 15. *Le filtre image directe d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.*

9. On peut innocemment se dire que la construction est similaire à celle d'un idéal maximal.

Démonstration. Soient X, Y des ensembles, $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur X. Soit B une partie de Y. Remarquer que $f^{-1}(B)$ ou $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ appartient à l'ultrafiltre $\mathcal{F}$. Ceci est équivalent à avoir $B \in f(\mathcal{F})$ ou bien $Y \setminus B \in f(\mathcal{F})$. Or, le résultat suivant est vrai et il nous permet de conclure que $f(\mathcal{F})$ est un ultrafiltre :

> L'ensemble $\mathcal{G}$ est un ultrafiltre sur l'ensemble G si, et seulement si, pour toute partie A de G on a $A \in \mathcal{G}$ ou bien $G \setminus A \in \mathcal{G}$.

Résultat admis. Ce n'est pas totalement trivial. □

Il est direct de remarquer que l'ensemble des voisinages d'un point x d'un espace topologique X constitue un filtre sur X. Ceci motive la définition suivante et c'est précisément à ce moment là que l'on voit des raisonnements séquentiels apparaître dans le cadre des espaces topologiques.

Définition 16. *Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $x \in X$. On dit que le filtre $\mathcal{F}$ **converge vers** x s'il est plus fin que l'ensemble $\mathcal{V}_x$ des voisinages de x. On dit que x est un **point d'adhérence** de $\mathcal{F}$ si $x \in \cap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.*

Avant de continuer faisons un léger détour topologique. Introduisons la notion de **topologie initiale**. Cette topologie est à la base de la section suivante sur la topologie faible et on la réinterprétera en termes catégoriques ensuite (dans une moindre mesure). Cette réinterprétation donnera tout son sens au terme "initial", qui deviendra alors très naturel.
De la même manière que pour les filtres, on retrouve une notion de finesse pour les topologies.

Définition 17. *Une topologie $\mathcal{O}_1$ sur E est **plus fine** qu'une topologie $\mathcal{O}_2$ si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$.*

Moralement, une topologie plus fine possède (relativement) plus d'ouverts. Typiquement, c'est l'exact opposé qui va nous intéresser : en considérant la topologie la moins fine respectant une propriété P donnée, on s'attend à ce que conséquemment cette topologie possède plus de fermés et donc de compacts (car elle a relativement peu d'ouverts). Attention, ce n'est qu'une heuristique ! Naturellement, en prenant l'intersection de **toutes** les topologies qui possèdent une propriété P donnée, on construit la topologie la moins fine respectant P. (Rappelons qu'une intersection quelconque de topologies est encore une topologie.)

Définition 18. *Soit X un ensemble, $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $f_i : X \to Y_i$ des applications pour tout $i \in I$. La **topologie initiale** sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est la topologie la moins fine rendant continue les applications f_i pour $i \in I$.*

On s'intéressera particulièrement au cas où les f_i sont des formes linéaires continues. Signalons enfin que l'on peut voir deux topologies très connues comme des topologies initiales. La **topologie induite** est la topologie initiale définie par l'injection canonique. De plus, la **topologie produit** est la topologie initiale définie par les projections canoniques. Nous sommes désormais en mesure de caractériser la convergence d'un filtre pour la topologie initiale.

Proposition 19. *Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Pour tout $i \in I$, donnons nous un espace topologique Y_i et une application $f : X \to Y_i$. Munissons X de la topologie initiale associée aux applications f_i. Soit a un point de X, alors $\mathcal{F}$ converge vers a si, et seulement si, $f_i(\mathcal{F})$ converge vers $f_i(a)$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Cette propriété de convergence / continuité est admise. □

Une dernière propriété caractérisant les compacts est enfin nécessaire avant de passer à Tychonov.

Proposition 20. *Supposons que X est un espace topologique séparé. Les énoncés suivants sont équivalents (LESE, héhé) :*
- *l'espace X est compact,*
- *tout ultrafiltre sur X converge,*
- *tout filtre sur X admet un point d'adhérence.*

Ceci correspond au théorème 2.6.26 de Schwartz.

Démonstration. Seule l'équivalence entre les deux premiers points nous intéresse. Le troisième est laissé à l'abandon. Se reporter au Skandalis pour plus de précisions. La démonstration de l'équivalence entre les deux premiers points vient du cours de Melleray (B.14). J'ai tenté d'esquiver allègrement la notion de point d'adhérence, ceci n'aide pas totalement et rend peut-être un peu moins clair et naturel certains passages.

Supposons X compact. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur X, montrons qu'il converge. Puisque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, la famille formée par les éléments de $\mathcal{F}$ qui sont fermés dans X est stable par intersection finie non vide donc est non vide. Soit un x dans cette intersection, montrons que $\mathcal{F}$ converge vers x, c'est-à-dire que le filtre $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{V}_x$. Soit V un ouvert contenant x, on a $V \in \mathcal{F}$. En effet, si ce n'était pas le cas, par définition d'un filtre, on aurait $X \setminus V \in \mathcal{F}$. Étant donné que $X \setminus V$ est fermé, on a une contradiction.

Réciproquement, supposons que tout ultrafiltre sur X est convergent. Soit F la famille des sous-ensembles **fermés** de X tels que toute sous-famille **finie** de F soit d'intersection non vide. Montrons que l'intersection des éléments de F est non vide en vertu du lemme suivant :

> Un espace topologique X est compact si, et seulement si, pour toute collection A de fermés de X tels que toute sous-famille finie soit d'intersection non vide, on ait $\cap A \neq \emptyset$.

Par le lemme 14, ce filtre engendré est contenu dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$ de X. Par hypothèse, $\mathcal{U}$ converge vers un élément $x \in X$. Montrons que $x \in \cap A$. Soit $a \in A$ et U un ouvert contenant x. Alors, $U \in \mathcal{U}$ puisque $\mathcal{U}$ converge vers x. Alors a et U sont des éléments de $\mathcal{U}$ d'intersection non vide. Comme on peut faire ça pour tout U, on a $x \in \overline{a} = a$. En répétant cet argument pour tout $a \in A$, cela montre que $x \in a$ pour tout $a \in A$, c'est-à-dire $x \in \cap A$. [10] □

On en arrive enfin à Tychonov, présentons une nouvelle preuve faisant usage des ultrafiltres.

Théorème 21 (Tychonov, *non bis in idem*)**.** *Un produit* ***quelconque*** *d'espaces topologiques compacts est compact.*

Démonstration. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts, notons E l'espace produit des E_i et $\pi_i : E \to E_i$ la projection canonique sur E_i. La propriété de séparation est de nouveau assurée par le lemme 8. Afin de conclure pleinement, montrons que E est quasi-compact. Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur E. Par la proposition 15, on déduit que $\pi_i(\mathcal{F})$ est un ultrafiltre sur l'espace E_i qui est compact. La compacité assure par la proposition 20 que $\pi_i(\mathcal{F})$ converge. En application de la proposition 19, on en déduit que $\mathcal{F}$ converge et ce pour tout ultrafiltre $\mathcal{F}$. Ce qui, finalement, assure la compacité de E par une nouvelle application de la proposition 20. □

Convaincus que les ultrafiltres c'est cool ? Bah, ce n'est pas fini ! On peut les utiliser de nouveau pour démontrer le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (si le temps le permet, on le fera dans la partie suivante ; je reviens sur mes dires, on va le faire de manière sûre et certaine, thm. 29 !).

3. Topologie faible et topologie faible étoile

À vrai dire, on s'en tient aux notions les plus fondamentales. Peut-être simplement avoir en tête que l'introduction de nouvelles topologies peut être un moyen de retrouver de la compacité, ce qui est fondamental pour le calcul des variations, cf. l'optimisation de fonctionnelles en dimension infini (c'est du moins ce que m'a dit Vincent Boulard et ce que me fait constater Xavier Lamy !). On suit pleinement le Brezis pour cette introduction aux topologies faibles.

Notre problème est celui de construire une topologie rendant une classe de fonction continue. On souhaite que la construction soit la plus économique [11] possible, c'est-à-dire qu'elle ait le

10. J'exposerai pas cette preuve, j'suis clairement pas à l'aise là. En plus, avec l'utilisation du lemme 14, y'a du Zorn et AC qui traîne...

11. D'où peut-être la dénomination *faible*.

moins d'ouverts possible. La motivation habituellement donnée à cela consiste à dire que cela permettra d'obtenir plus de compacts. Même si intuitivement cela ne paraît pas totalement déconnant ce n'est pas automatiquement clair pour autant (pour la simple raison que l'on s'attend à ce qu'il y ait de même substantiellement moins de fermés car ces derniers sont définis comme complémentaires des ouverts). On va tenter d'expliquer un petit peu pourquoi cela une fois que l'on disposera du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki.

[12]Soit E un espace de Banach et $f \in E^*$.[13] Posons $\varphi_f : E \to \mathbf{R}$ qui à x associe $\phi_f(x) = \langle f, x\rangle$ et définissons $\Phi = (\varphi_f)_{f\in E^*}$ l'ensemble de ces formes linéaires. De plus, posons $\psi_x : E^* \to \mathbf{R}$ qui à $f \in E^*$ associe $\psi_x(f) = \langle f, x\rangle$ et définissons $\Psi = (\psi_x)_{x\in E}$ l'ensemble des applications de E^* dans $\mathbf{R}$.

Définition 22. *La **topologie faible** $\sigma(E, E^*)$ est la topologie la moins fine sur E rendant l'ensemble des éléments de Φ continus*[14].

Définition 23. *La **topologie faible étoile** $\sigma(E^*, E)$ est la topologie la moins fine sur E^* rendant l'ensemble des éléments de Ψ continus.*

Définition 24. *En comparaison de ces topologies faibles, il existe bien évidemment la **topologie forte**. La **topologie forte** est la topologie induite par la norme de l'e.v.n. considéré.*

Remarquons qu'en dimension finie, par équivalence des normes, il ne peut y avoir qu'essentiellement une topologie forte (puisque deux normes équivalentes engendrent les mêmes ouverts). À vrai dire, **en dimension finie**, la situation est assez unilatérale : dans ce cas, la topologie faible $\sigma(E, E^*)$, la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$ et la topologie forte se correspondent (proposition 3.6 du Brezis). Néanmoins, en dimension infini, il semble se passer des choses *étranges* : par exemple, les ouverts faibles ne sont jamais bornés. Mais globalement, ces topologies faibles disposent de beaucoup de propriétés agréables.

Proposition 25. *Les topologies faibles $\sigma(E, E^*)$ et faibles étoile $\sigma(E^*, E)$ sont séparées.*

Démonstration. Les preuves sont similaires (sauf que pour la topologie faible, on a besoin de Hahn-Banach... ça passe sous le tapis). On se restreint au cas de la topologie faible étoile.
Soient $f_1, f_2 \in E^*$ différents. Il existe alors un $x \in E$ telque $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$. Spdg, supposons que $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$ et soit α tel que $\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle$.[15] Les ensembles suivants sont ouverts dans $\sigma(E^*, E)$:

$$O_1 = \{f \in E^*,\ \langle f, x\rangle < \alpha\} = \psi_x^{-1}\left(]-\infty, \alpha[\right),$$
$$O_2 = \{f \in E^*,\ \alpha < \langle f, x\rangle\} = \psi_x^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right).$$

De plus, $f_1 \in O_1$, $f_2 \in O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Ce qui conclut. □

La topologie faible est clairement moins agréable que la topologie faible étoile. En effet, par exemple, la sphère unité d'un e.v.n. de dimension infinie n'est jamais fermée, de même la boule unité d'un e.v.n. de dimension infinie n'est jamais ouverte pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Restreignons nous désormais à des considérations sur la topologie faible étoile, c'est de toute façon celle qu'il nous faut considérer pour la démonstration du théorème 1. On ne traite pas la notion de convergence faible, faible étoile (pourtant fondamentale) puisqu'elle n'est pas strictement nécessaire à la démonstration du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Voyons simplement l'existence d'un résultat d'existence pour nous rassurer : un résultat à la Riesz.

12. **Il y a un détail auquel faire attention !! J'en parlerai dans la preuve la proposition 25.**

13. Attention ! Même si E^* désigne le dual topologique de E, i.e. l'ensemble des formes linéaires **continues**, on fera bien attention de distinguer pour quelle topologie ces formes linéaires sont continues. Par défaut, pour le dual topologique, c'est la topologie forte.

14. C'est une topologie initiale !

15. Avez vous spot le détail auquel faire attention ? On est sur $\mathbf{R}$! ! ! ! Il semblerait que tous les résultats de cette section valent lorsque l'on remplace le corps de base par $\mathbf{C}$ mais cela demande un peu plus de travail.

Théorème 26. *Soit $\varphi : E^* \to \mathbf{R}$ une forme linéaire continue pour la topologie faible étoile. Alors, il existe un $x_0 \in E$ tel que :*

$$\varphi(f) = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*.$$

Pas absolument sûr mais ce résultat nous montre que le V de la proposition précédente est essentiellement équivalent à celui donné par Schwartz.

Proposition 27. *Soit $f_0 \in E^*$ et $\{x_1, \dots, x_m\}$ une collection* ***finie***[16] *de points de E. Soit $\varepsilon > 0$, considérons l'ensemble suivant :*

$$V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(f_0) := \{f \in E^* : \forall i = 1, \dots, m, \ |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon\}.$$

Alors c'est un voisinage de f_0 pour la topologie $\sigma(E^*, E)$. De plus, on obtient une base de voisinage[17] *de f_0 pour cette même topologie en faisant varier ϵ, m et les x_i.*

Démonstration. **Idée** : l'ensemble $V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(f_0)$ est un ouvert pour la topologie faible étoile et il contient f_0. En effet, en réécrivant ensemblistement, on a par continuité des ψ_{x_i} :

$$V_{(x_i)_{i=1}^m,\varepsilon}(f_0) = \bigcap_{i=1}^m \psi_{x_i}^{-1}\left(]\langle f_0, x_i \rangle - \varepsilon; \varepsilon + \langle f_0, x_i \rangle[\right).$$

Montrer que tout voisinage de f_0 peut s'écrire sous cette forme. □

Voici pourquoi on parle de **topologie de la convergence simple** pour la topologie faible étoile.

Proposition 28. *Soit (f_n) une suite d'éléments de E^*. Alors*[18] *:*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff f_n(x) \to f(x) \text{ pour tout } x \in E.$$

Nous pouvons donc conclure cette partie en démontrant le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. Ce théorème est absolument nécessaire pour la démonstration de la compacité des caractères d'une algèbre de Banach pour la topologie faible étoile, i.e. de la convergence simple.

Théorème 29 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *La boule unité fermée $B_{E^*} = \{f \in E^* : ||f|| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$.*

Démonstration. Considérons le produit cartésien $Y = \mathbf{R}^E$, i.e. l'ensemble des applications de E dans $\mathbf{R}$. Cet espace est muni de la **topologie produit**, i.e. la topologie la moins fine rendant continue les projections canoniques. Cette topologie n'est rien d'autre que celle de la **convergence simple**, i.e. convergence point par point (on voit immédiatement le rapport avec la topologie produit).

Munissons désormais E^* de la topologie faible étoile $\sigma(E^*, E)$. En particulier, E^* est une partie de Y puisque le dual est constitué d'une classe bien particulière d'applications de E dans $\mathbf{R}$. C'est donc un sous-espace topologique de Y. Par construction, la boule unité B de E^* est contenue dans Y et plus précisément dans l'ensemble :

$$K = \{\psi_x : \forall x \in E, \ |\psi_x| \leq ||x||\} = \prod_{x \in E} [-||x||, ||x||]$$

[19] qui est compact par le théorème de Tychonov. De plus, l'ensemble suivant est fermé [20] :

$$F = \{\psi_x : \psi_{x+y} - \psi_x - \psi_y = 0, \psi_{\lambda x} - \lambda \psi_x = 0 \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall x, y \in E\}.$$

---

16. On voit directement dans la preuve pourquoi on demande une collection **finie** de points.
17. Base de voisinage est un synonyme de système fondamental de voisinages.
18. Rappelons qu'une suite (x_n) d'éléments d'un espace topologique X converge vers $x \in X$ au sens d'une topologie $\mathscr{O}$ si, et seulement si, chaque suite $(\varphi_i(x_n))$ converge vers $\varphi_i(x)$. Les applications φ_i sont celles rendues continues pour la topologie initiale donnée.
19. Penser à la norme opérateur sur E^* !
20. Penser image réciproque de zéro et continuité, on donnera explicitement l'argument dans la preuve du théorème 1.

[21]Il en résulte que l'ensemble $K \cap L$ est compact pour la topologie faible étoile. Montrons que B_{E^*} est homéomorphe à $K \cap L$. Soit $\Phi : E^* \to Y$ l'injection canonique de E^* dans Y. Cette application est bijective sur l'image $\Phi(E^*)$. Cette application est continue et d'inverse continu. En effet, c'est une conséquence directe de la définition de la topologie faible étoile :

Enfin, on a $B_{E^*} = \Phi^{-1}(K \cap L)$, ce qui assure la compacité. [22] $\square$

On peut donc exhiber toute une famille de compacts pour une topologie faible qui ne le sont pas pour la topologie forte (à moins d'être en dimension finie, cf théorème 6). Ensuite, le théorème de Tychonov nous permet d'en construire une tonne de nouveaux ! On dispose donc effectivement de plus de compacts ! Encore une fois, ce que l'on essaie de faire c'est reproduire ce qui se passait si bien en dimension finie (mais que l'on perd en dimension infinie) : minimisation, existence...

4. ~~Interprétation catégorique~~

Rapide introduction aux catégories. Ne pas hésiter à lire le texte de Marius Capelli, issu de sa Conf4 (12 avril 2024). Marius est aujourd'hui un catégoricien averti (même s'il dira le contraire) ! On propose ici d'exposer le strict minimum nécessaire pour se dire "ah oui, c'est un objet initial !" (on expliquera cette phrase par la suite). On suit le livre d'Assem chez C & M.

Définition 30. *Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est définie par la donnée de :*
- *une classe que l'on note $\mathcal{C}_0$ ou $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}$ appelée **classe d'objets** de $\mathcal{C}$,*
- *pour toute paire (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, un ensemble noté $\mathcal{C}(X, Y)$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés les **morphismes** de X vers Y,*
- *pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, une application $\circ$:*

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z)$$

  *qui associe à $(f, g) \in \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z)$ un unique élément noté $f \circ g$, ou plus brièvement gf, de $\mathcal{C}(X, Z)$ et appelé **composé** ou **produit**. Cette application, appelée **composition**, satisfait aux axiomes suivants :*
  - ***associativité** : si $f \in \mathcal{C}(W, X)$, $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ et $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$, alors $h(gf) = (hg)f$,*

21. Bien garder en tête ce schéma de démonstration ! On la réutilisera dans la démonstration du théorème 1.
22. N'aurait-on pas pu utiliser directement le fait que l'image d'un compact par une application continue est continue ?

- ***identité*** *: à chaque objet X de $\mathcal{C}$ est associé un morphisme 1_X de $\mathcal{C}(X,X)$ appelé* ***identité*** *sur X et tel que, si $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ et $g \in \mathcal{C}(W,X)$, alors $f 1_X = f$ et $1_X g = g$.*

En définitive, une catégorie est un triplet $(\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), \circ)$ que l'on désignera plus commodément par $\mathcal{C}$ lorsque le contexte est suffisamment clair. Les objets X et Y ne sont pas clairement définis dans ce contexte mais on comprend que cela sous entend que l'on considère toutes les paires d'objets (X,Y) de $\mathcal{C}$. Moralement, une catégorie c'est juste une collection d'objets avec des flèches *compatibles* entre les objets.
Fixons E un ensemble, il est bien naturel que E soit un objet de la catégorie des ensembles **Ens** (on notera la différence entre objet et élément, plus ou moins relativement respectée). Montrons que **Ens** est effectivement une catégorie. Remarquons que les anglais la note **Set** (mais c'est quand même moins beau qu'à la française).

Proposition 31. *Soit $\mathcal{E}$ la classe de tous les ensembles. Le triplet* $\mathbf{Ens} = (\mathcal{E}, \mathrm{Hom}(E,F), \circ)$ *forme une catégorie.*

Démonstration. Vérifions formellement que l'on définisse bien une catégorie. Il n'y a en réalité presque rien à faire, c'est surtout pour manipuler les objets qu'on le fait. La vérification des deux premières propriétés s'ensuit par construction même de la catégorie. Précisions simplement que les morphismes sont ici les **applications** (sur lesquelles on ne suppose rien). L'opération de composition est associative par construction et l'identité est l'application identité $\mathbf{1}_X$ associant à $x \in X$ l'élément x lui-même. □

De même, la catégorie des groupes existe.

Proposition 32. *Soit $\mathcal{G}$ la classe de tous les groupes. Le triplet* $\mathbf{Grp} = (\mathcal{G}, \mathrm{Hom}(F,G), \circ)$ *forme une catégorie.*

Démonstration. Vérifions formellement que l'on définisse bien une catégorie. La vérification des deux premières propriétés s'ensuit par construction même de la catégorie. Les morphismes ne sont alors autres que les **morphismes de groupes**. L'associativité de la composition de morphisme découle directement de celle du groupe. L'identité est basiquement l'élément neutre. □

On prendra grand soin de ne pas se faire avoir par diverses subtilités catégoriques. Par exemple, la catégorie des groupes n'est pas une sous-catégorie de la catégorie des ensembles. Cela provient du fait qu'un même ensemble puisse admettre plusieurs structures de groupes différentes, i.e. non isomorphes. On fera donc bien attention à ne pas aller trop vite en besogne.
Deux catégories vont être d'un intérêt tout particulier pour ce séminaire d'introduction à la théorie spectrale. On n'en fera essentiellement rien mais il est bon de déjà savoir qu'elles existent. La première est la catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues. La seconde est la catégorie de C^*-algèbres ayant les C^*-algèbres pour objets et les *-homomorphismes pour morphismes, i.e. les morphismes d'algèbres involutives.

J'aime pas la tournure que ça allait prendre ensuite, section avortée.

5. Preuve du théorème 1

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. On souhaite prouver que l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$ muni de la topologie de la convergence simple est un espace compact. Notons que l'on n'avait aucunement besoin d'autant de choses pour montrer le théorème 1, néanmoins, ça ne fait aucun mal ! Commençons par rappeler le résultat un résultat de compacité.

Proposition 33. *Soit X un espace topologique compact et Y une partie fermée de X. Alors, Y est compact.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement ouvert de Y. Pour tout $U_i \in \mathcal{R}$, il existe un ouvert $V_i \in X$ tel que $V_i \cap Y = U_i$. Considérons $V = \{V_i\}_{i \in I}$, alors $V \cup (X \setminus Y)$ est un recouvrement ouvert de X puisque Y est supposée être une partie fermée. Par compacité de X, on peut en extraire un sous-recouvrement fini de la forme suivante :

$$\bigcup_{i=1}^{n} (V_i \cup (X \setminus Y)) .$$

C'est un sous-recouvrement fini de Y (vérifier ! j'ai l'impression qu'il y a un problème). □

Avant de chercher un espace compact adéquat, commençons par montrer que $\widehat{\mathcal{A}}$ est un fermé.

Lemme 34. *L'ensemble $\widehat{\mathcal{A}}$ est faiblement étoile fermé.*

Démonstration. Soient $(u, v, \lambda) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathbf{C}$, les applications suivantes définies sur le dual de $\mathcal{A}$ sont continues :

$$\begin{aligned}
\chi &\mapsto f_{u+v}(\chi) = \chi(u+v) - \chi(u) - \chi(v),\\
\chi &\mapsto f_{\lambda u}(\chi) = \chi(\lambda u) - \lambda \chi(u),\\
\chi &\mapsto f_{uv}(\chi) = \chi(uv) - \chi(u)\chi(v),\\
\chi &\mapsto f_{e}(\chi) = \chi(e) - 1.
\end{aligned}$$

En effet, c'est direct par définition de la topologie de la convergence simple. Donc, l'image réciproque de $\{0\}$ par chacune de ses applications est fermée, il en est alors de même de l'intersection de ces quatre images réciproques. Or $\widehat{\mathcal{A}}$ est égale à cette intersection lorsque (u, v, λ) parcourt l'ensemble $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathbf{C}$. □

Il nous reste une ultime étape, rappelons le résultat démontré la semaine dernière.

Proposition 35. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, tout caractère χ sur $\mathcal{A}$ est continu et tel que $||\chi|| \leq 1$.*

Cette proposition nous conduit immédiatement à considérer la boule unité du dual de $\mathcal{A}$. Or, le théorème 29 nous assure que cet espace est faiblement étoile compact, ce qui conclut la preuve du théorème 1.

6. Retour sur des résultats de réflexivité

Je ne fais ici que revenir sur des résultats déjà discutés les semaines précédentes tout en tentant de les éclairer un peu à la lueur de la topologie faible. On compile alors des résultats de dualité et réflexivité dont il peut être bon de savoir qu'ils existent. On se référera au chapitre 3 partie 5 et suivantes du Brezis pour plus de précisions. Rappelons deux choses. Tout d'abord un espace est séparable [23] s'il admet une partie dénombrable dense. Deuxièmement, rappelons qu'un espace de Banach est réflexif s'il est isomorphe à son bidual topologique (i.e. que l'injection canonique de l'espace dans son bidual est surjective). Le cours d'algèbre linéaire nous a informé que les espaces vectoriels de dimensions finis étaient réflexifs (et séparables !). Le cours de théorie de la mesure nous a fait sentir que les L^p étaient réflexifs pour $p \in]1, +\infty[$ et séparables pour $p \in [1, +\infty[$. On a vu la semaine dernière (en *tordant* et appliquant de manière répétée le lemme de représentation de Riesz) que les espaces de Hilbert sont réflexifs. En revanche, L^1, ℓ^1, L^∞ et ℓ^∞ ne sont pas réflexifs. Partons désormais à la chasse aux théorèmes.

Théorème 36 (Kakutani)**.** *Soit E un espace de Banach. Alors, E est réflexif si, et seulement si, la boule unité $B_E = \{x \in E,\ ||x|| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

23. Rien à voir avec séparé !

Théorème 37 (Eberlein-Šmulian)**.** *Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée de E admette une sous-suite faiblement convergente dans $\sigma(E, E^*)$. Alors E est réflexif.*
Supposons que E est un espace de Banach réflexif et que (x_n) soit une suite bornée de E. Alors, il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

Proposition 38. *Supposons que E soit un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M est réflexif.*

Corollaire 39. *Un espace de Banach est réflexif si, et seulement si, son dual est réflexif.*

Corollaire 40. *Soit E un espace de Banach réflexif et $K \subset E$ une partie bornée, fermée et convexe. Alors, K est compacte pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

Théorème 41. *Soit E un espace de Banach tel que E^* est séparable. Alors, E est séparable.*[24]

Corollaire 42. *Soit E un espace de Banach, alors on a l'équivalence suivante :*

$$E \text{ est réflexif et séparable} \iff E^* \text{ est réflexif et séparable.}$$

Théorème 43 (Milman-Pettis)**.** *Tout espace de Banach uniformément convexe*[25] *est réflexif.*

7. Et puis tant qu'à faire... un peu de distributions

Dès lors que l'on parle de choses faibles, ça sent les distributions ! Malheureusement, ayant eu un jour de moins pour rédiger ce document, je n'ai pas eu le temps de traiter cette partie. Ce sera le cas dans une partie du rapport *Applications harmoniques et cristaux liquides nématiques* rédigé sous la direction de Xavier Lamy.

Ressources.

— *Analyse I – Théorie des ensembles et topologie*, Schwartz.
— *Topologie et Analyse*, Skandalis.
— *Espaces vectoriels topologiques (chapitres 1 à 5)*, Bourbaki. Pas forcément la meilleure idée.
— *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Brezis.
— *Topologie, Analyse et Calcul différentiel*, Paulin.
— De manière générale, les publications pédagogiques de Karim Bekka sont top.

24. La réciproque n'est pas vraie (penser à L^1 et L^∞).
25. Cf. partie 3.7 du Brezis.