GELFAND NAIMARK POUR LE GROUPE ABÉLIEN $G = \mathbf{Z}$

MATHIAS GARNIER

TABLE DES MATIÈRES

1. GELFAND NAIMARK

On a précédemment montré une équivalence de catégories entre **TopComp** la catégorie des espaces topologiques compacts et $\mathbf{C^*AlgCommU}^{\mathrm{op}}$ la catégorie (opposée) des C^*-algèbres commutatives unitaires. On a ensuite étendu ce résultat aux espaces localement compacts en faisant sauter l'hypothèse unitaire. Rappelons un énoncé précis de cette correspondance (il faut travailler un petit peu plus pour construire les foncteurs adéquats).

Théorème 1. *Soit A une C^*-algèbre commutative. La transformée de Gelfand $\Gamma : A \to C_0(\hat{A})$ est un isomorphisme de C^*-algèbres.*

2. LE GROUPE $G = \mathbf{Z}$

Soit G un groupe abélien, arrêtons nous sur le cas $G = \mathbf{Z}$. On rappelle les définitions suivantes : l'algèbre involutive commutative $\mathbf{CZ} := \{f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C} \ : \ \mathrm{supp}(f) \text{ est fini}\}$ est munie du produit de convolution discret usuel, de l'involution $f^*(n) = \overline{f(-n)}$, d'une unité δ_0 et est engendrée par δ_1 et δ_1^*. Cette algèbre se complète en la C^*-algèbre $C^*(\mathbf{Z})$ par rapport à la norme $||f|| := ||\pi(f)||_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{Z}))}$ où $\pi : \mathbf{CZ} \to \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{Z}))$ est défini tel que $\pi(f)(g)(n) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} f(m)g(n-m)$. Notons $u = \delta_1$.

1. Soit $\chi \in \widehat{C^*(\mathbf{Z})}$ (i.e. $\chi \in \mathrm{Hom}(C^*(\mathbf{Z}), \mathbf{C})$), montrons que $\chi(u) \in S^1$. Remarquons que $(u * u^*) = \delta_0$, dès lors comme χ est un morphisme d'algèbres on obtient $|\chi(u)||\chi(u^*)| = |\chi(\delta_0)| = 1$. Or $|\chi(u)| \leq ||u|| = 1$ (Schwartz, Théorème 2.14.31). Ainsi $|\chi(u)| = 1$. Ceci assure la bonne définition de morphismes définis ci après.

2. Soit $\phi : \widehat{C^*(\mathbf{Z})} \to S^1$ définie par $\phi(\chi) = \chi(u)$, montrons que ϕ est continue. On procède par caractérisation séquentielle. Soit $(\chi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\widehat{C^*(\mathbf{Z})}$ convergent vers $\chi \in \widehat{C^*(\mathbf{Z})}$. Il suffit de montrer que $\phi(\chi_n) \to \phi(\chi)$. Puisque $\widehat{C^*(\mathbf{Z})}$ est muni de la topologie de la convergence faible-* (topologie de la convergence simple / ponctuelle), c'est automatique. En effet : $\phi(\chi_n) = \chi_n(u) \xrightarrow{*} \chi(u) = \phi(\chi)$.

3. Soit $\psi : S^1 \to \widehat{C^*(\mathbf{Z})}$ définie par $\psi(z)(f) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)z^n$, montrons que ψ est continue. On procède de même par caractérisation séquentielle puis on montre le résultat par densité. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de S^1 convergent vers $z \in S^1$. On a $\psi(z_n)(u) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} u(m)z_n^m = z_n^1 \to z = \sum_{m\in\mathbf{Z}} u(m)z^m = \psi(z)(u)$. De même, le résultat vaut en $f = u^*$. Puisque u et u^* engendrent $\mathbf{CZ}$ et que le support de tout $f \in \mathbf{CZ}$ est fini, par linéarité, on conclut que $\psi(z_n)(f)$ tend vers $\psi(z)(f)$. Plus généralement, la convergence vaut pour tout $f \in C^*(\mathbf{Z})$ étant donné que $\mathbf{CZ}$ est dense dans $C^*(\mathbf{Z})$, cela montre donc la continuité de ψ.

4. Montrons que ϕ et ψ sont mutuellement inverses. Un calcul direct nous donne

$$(\psi \circ \phi)(\chi)(f) = \psi(\phi(\chi))(f) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n)\chi(u)^n = \chi\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)u^n\right) = \chi(f)$$

par décomposition de f d'après les questions 2, 3 et 4 de la partie 1 (algèbre de convolution de **Z**). De plus,

$$\phi(\psi(z)(f)) = \psi(z)(u) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u(n)z^n = z.$$

On dispose donc d'un homéomorphisme entre le spectre de $C^*(\mathbf{Z})$ et S^1.

5. Exhibons un isomorphisme d'algèbres $G : C^*(\mathbf{Z}) \to C(S^1)$. Par le Théorème 1, on a $C^*(\mathbf{Z}) \cong C(\widehat{C^*(\mathbf{Z})})$. Les questions précédentes nous permettent alors d'affirmer que $C(S^1) \cong C(\widehat{C^*(\mathbf{Z})})$. On souhaite construire G tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
C^*(\mathbf{Z}) \arrow[dd, "G"'] \arrow[dr, hook, two heads, "\Gamma"] & \\
& C(\widehat{C^*(\mathbf{Z})}) \arrow[dl, hook, two heads, "\gamma"] \\
C(S^1) &
\end{tikzcd}$$

pour Γ la transformée de Gelfand définie par $\Gamma(f)(\chi) = \chi(f)$ et γ à déterminer. Si γ existe alors nécessairement, comme composition de deux isomorphismes, G existera et sera un isomorphisme d'algèbres. Il suffit de prendre $\gamma : f \mapsto (\psi \mapsto \psi(z)(f))$ pour $z \in S^1$.

3. Transformée de Fourier

Remarquons que $\psi(z)(f)$ peut se réécrire sous la forme suivante $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n)e^{in\theta}$ pour un certain θ réel puisque $z \in S^1$. La transformée ψ a la propriété de convolution suivante

$$\begin{aligned}
\psi(z)(f * g) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \left(\sum_{m\in\mathbf{Z}} f(m)g(n-m)\right) e^{in\theta} = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{m\in\mathbf{Z}} f(m)g(k)e^{i(m+k)\theta} \\
&= \left(\sum_{m\in\mathbf{Z}} f(m)e^{im\theta}\right)\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} g(k)e^{ik\theta}\right) = \psi(z)(f)\cdot\psi(z)(g).
\end{aligned}$$

On voit donc ψ comme une transformée de Fourier définissant un isomorphisme entre $\ell^2(\mathbf{Z})$ et $\ell^2(S^1)$.