# *Convection naturelle: problème de Blasius*

*Mathieu Rousseau*

*May 7, 2020*

## *Contents*

## 1 Dérivation

Nous allons analyser la convection naturelle le long d'une plaque chauffée verticale plane dont le bas se situe en $y = 0$.

- Le fluide colle à la plaque : $v = 0$ en $x = 0$.
- Le fluide est au repos loins de la plaque : $u = v = 0$.
- Le fluide est plus chaud proche de la plaque: $T_w > T_e$.
- $\delta << Y$

On suppose que l'écoulement n'existe que dans la couche limite ($\delta(x)$).

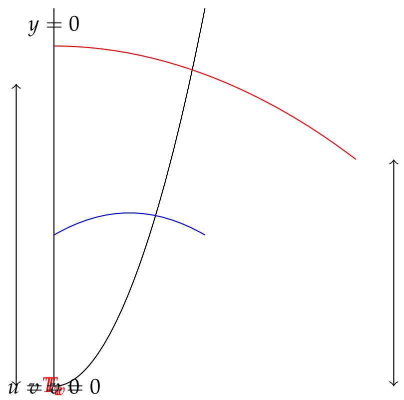
Dès lors on peut utiliser **les équations de Prandtl** en y ajoutant **le terme lié à la poussée d'Archimède** et en négligeant **la dissipation visqueuse**.

Hypothèses de Prandtl

- L'écoulement est à grand nombre de Reynolds.
- L'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de Reynolds ($\frac{\delta}{Y} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$).
- Les forces d'inertie, de pression et de viscosité sont du même ordre de grandeur dans la couche limite.
- Poussée d'Archimède (la pression ne dépend que de la profondeur) : $P(x, y) = \rho g y$

On peut obtenir une solution de similitude en définissant :

$$\eta(x, y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{y}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{1/4} \tag{1}$$




- Nombre de Grasshof : $\frac{(\text{"poussée d'Archimède"})(\text{terme d'inertie})}{(\text{forces visqueuses})^2} = \frac{\beta \Delta T g L^3}{\nu^2}$

  On part des équations de Navier-Stokes 2D :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\textit{fluide incompressible}) \tag{2}$$

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \quad (\textit{fluid flow}) \tag{3}$$

$$\rho\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] \quad (\textit{fluid flow}) \tag{4}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] \quad (\text{heat flow}) \tag{5}$$

Simplifications :

On part du principe que la largeur de la couche limite est beaucoup plus petite que la longueur de la plaque. Cette simplification va nous permettre de retrouver les équations de Prandtl.

$$\boxed{\delta << Y} \tag{6}$$

On commence par l'équation décrivant l'écoulement incompressible, on peut comparer ses 2 termes d'inerties :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{O}(\frac{U}{\delta})} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\frac{V}{Y})} = 0$$

Par conséquent on trouve un relation importante :

$$\boxed{U = V\frac{\delta}{Y} << V} \tag{7}$$

On continue ensuite avec les 2 équations du bilan de la quantité de mouvement. La couche laminaire est le lieu où les *termes d'inerties* sont du même ordre que les *termes visqueux*, on peut donc les comparer.

On prend la première :

$$\rho \left[ \underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{(2)} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{(3)} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{(4)} \right]$$

Pour ce qui est des termes d'inertie, le terme $(1)$ est de l'ordre $\frac{U^2}{\delta} = \frac{V^2}{Y^2}\delta$ et le terme $(2)$ est de l'ordre $\frac{VU}{Y} = \frac{V^2}{Y^2}\delta$
Pour ce qui est des termes visqueux, le terme $(3)$ est de l'ordre $\frac{U}{\delta^2}$ et le terme $(4)$ est de l'ordre $\frac{U}{Y^2}$.

On observe donc que :

$$\boxed{\frac{U}{\delta^2} >> \frac{U}{Y^2} \quad \textit{le terme } (4) \textit{ est négligeable}}$$

On peut effectuer un raisonnement similaire avec la seconde équation :

$$\rho \left[ \underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{(2)} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{(3)} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}_{(4)} \right]$$

Les termes d'inerties sont de l'ordre :

$$\begin{cases} u\frac{\partial v}{\partial x} \approx \mathcal{O}(\frac{UV}{\delta}) & = \mathcal{O}(\frac{V^2}{Y}) \\ & v\frac{\partial u}{\partial y} \approx \mathcal{O}(\frac{V^2}{Y}) \end{cases}$$

Les termes visqueux sont de l'ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \mathcal{O}(\frac{V}{\delta^2}) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \mathcal{O}(\frac{V}{Y^2}) \end{cases} \Longrightarrow \frac{V}{\delta^2} >> \frac{V}{Y^2}$$

On peut trouver une autre condition importante à la validité des équations de Prandtl.
Puisque les *termes d'inerties* sont du même ordre que les *termes visqueux*, on peut écrire :

$$\rho\frac{V^2}{Y} = \mu\frac{V}{\delta^2} \Longrightarrow \frac{\delta^2}{Y^2} = \frac{\mu}{V\rho Y} = \frac{1}{Re_y}$$

On trouve donc que l'hypothèse $\delta << Y$ est satisfaite pour un grand nombre de Reynolds :

$$\boxed{\frac{\delta}{Y} = \frac{1}{\sqrt{Re_y}}} \tag{8}$$

Pour ce qui est de la pression, on peut faire un développement de Taylor afin de connaitre la pression dans la zone de la couche laminaire.

Pression dans la couche laminaire $x \sim \mathcal{O}(\delta)$ :

$$\boxed{P(x,y) - P_0 \approx P(\delta,y) - P_0 + \cancel{\left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}(x-\delta)} + ...}$$

On observe que :

$$P(\delta,y) - P_0 = y\frac{\partial P}{\partial y} \approx \mathcal{O}(Y)\mathcal{O}(\frac{\rho V^2}{Y}) = \mathcal{O}(\rho V^2)$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} \approx \mathcal{O}(\frac{\rho UV}{Y})\mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\rho V^2\frac{\delta^2}{Y^2})$$

Par conséquent, la pression est constante sur une tranche horizontale : $P(y)$
$\frac{\partial P}{\partial x}$ étant négligeable, on peut supprimer l'équation contenant ce terme.

On obtient les équations de Prandtl :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]$$