Convection naturelle: problème de Blasius

Mathieu Rousseau

May 8, 2020

Contents

Lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une paroi fixe, sa vitesse est nulle à la paroi tandis qu'elle est égale à la vitesse de l'écoulement loin de la plaque. Dans une zone proche de la paroi, la vitesse des différentes couche du fluide varie fortement tandis qu'elle tend à s'égaliser en dehors de cette zone. Cette zone est appelée *couche limite*.
La convection naturelle quand à elle est un phénomène qui se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Dans notre cas, un gradient de tempèrature. Nous allons analyser le mouvement d'un fluide incompressible, stationnaire, 2D et de son flux de chaleur dans cette couche limite. Le mouvement du fluide dans cette zone est régit par les équations de Prandtl.

1 *Dérivation*

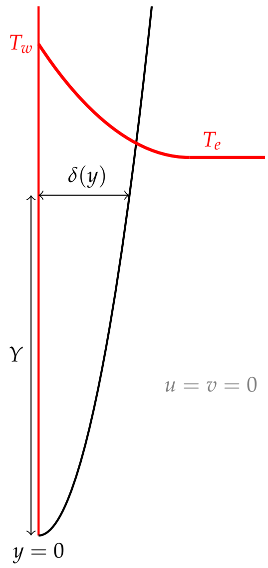

Figure 1: Couche limite

Nous allons analyser la convection naturelle le long d'une plaque chauffée verticale plane dont le bas se situe en $y = 0$.

- Le fluide colle à la plaque : $v = 0$ en $x = 0$.
- Le fluide est au repos loin de la plaque : $u = v = 0$.
- Le fluide est plus chaud proche de la plaque: $T_w > T_e$.
- $\delta << Y$

On suppose que l'écoulement n'existe que dans la couche limite ($\delta(x)$).

Dès lors on peut utiliser **les équations de Prandtl** en y ajoutant **le terme lié à la poussée d'Archimède** et en négligeant **la dissipation visqueuse**.

Hypothèses de Prandtl :

- L'écoulement est à grand nombre de Reynolds.
- L'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de Reynolds ($\frac{\delta}{Y} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$).
- Les forces d'inertie, de pression et de viscosité sont du même ordre de grandeur dans la couche limite.
- Poussée d'Archimède (la pression ne dépend que de la profondeur) : $P(x, y) = \rho g y$

On peut obtenir une solution de similitude en définissant :

$$\eta(x, y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{y}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{1/4} \tag{1}$$

- Nombre de Grasshof : $\frac{(\text{"poussée d'Archimède"})(\text{terme d'inertie})}{(\text{forces visqueuses})^2} = \frac{\beta \Delta T g L^3}{\nu^2}$

  On part des équations de Navier-Stokes 2D :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\textit{fluide incompressible}) \tag{2}$$

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\textit{fluid flow}) \tag{3}$$

$$\rho \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (\textit{fluid flow}) \tag{4}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (\text{heat flow}) \tag{5}$$

SIMPLIFICATIONS :

On part du principe que la largeur de la couche limite est beaucoup plus petite que la longueur de la plaque. Cette simplification va nous permettre de retrouver les équations de Prandtl.

$$\boxed{\delta << Y} \tag{6}$$

On commence par l'équation décrivant l'écoulement incompressible, on peut comparer ses 2 termes d'inerties :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\mathcal{O}(\frac{U}{\delta})} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\mathcal{O}(\frac{V}{Y})} = 0$$

Par conséquent on trouve un relation importante :

$$\boxed{U = V\frac{\delta}{Y} << V} \tag{7}$$

On continue ensuite avec les 2 équations du bilan de la quantité de mouvement. La couche laminaire est le lieu où les *termes d'inerties* sont du même ordre que les *termes visqueux*, on peut donc les comparer.

On prend la première :

$$\rho\left[\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{(2)}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{(3)} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}_{(4)}\right]$$

Pour ce qui est des termes d'inertie, le terme (1) est de l'ordre $\frac{U^2}{\delta} = \frac{V^2}{Y^2}\delta$ et le terme (2) est de l'ordre $\frac{VU}{Y} = \frac{V^2}{Y^2}\delta$
Pour ce qui est des termes visqueux, le terme (3) est de l'ordre $\frac{U}{\delta^2}$ et le terme (4) est de l'ordre $\frac{U}{Y^2}$.

On observe donc que :

$$\boxed{\frac{U}{\delta^2} >> \frac{U}{Y^2} \quad \textit{le terme (4) est négligeable}}$$

On peut effectuer un raisonnement similaire avec la seconde équation :

$$\rho\left[\underbrace{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{(2)}\right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left[\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{(3)} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}}_{(4)}\right]$$

Les termes d'inerties sont de l'ordre :

$$\begin{cases} u\frac{\partial v}{\partial x} \approx \mathcal{O}(\frac{UV}{\delta}) & = \mathcal{O}(\frac{V^2}{Y}) \\ v\frac{\partial u}{\partial y} \approx \mathcal{O}(\frac{V^2}{Y}) & \end{cases}$$

Les termes visqueux sont de l'ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \mathcal{O}(\frac{V}{\delta^2}) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \mathcal{O}(\frac{V}{Y^2}) \end{cases} \implies \frac{V}{\delta^2} >> \frac{V}{Y^2}$$

On peut trouver une autre condition importante à la validité des équations de Prandtl.
Puisque les *termes d'inerties* sont du même ordre que les *termes visqueux*, on peut écrire :

$$\rho\frac{V^2}{Y} = \mu\frac{V}{\delta^2} \implies \frac{\delta^2}{Y^2} = \frac{\mu}{V\rho Y} = \frac{1}{Re_y}$$

On trouve donc que l'hypothèse $\delta << Y$ est satisfaite pour un grand nombre de Reynolds :

$$\boxed{\frac{\delta}{Y} = \frac{1}{\sqrt{Re_y}}} \tag{8}$$

Pour ce qui est de la pression, on peut faire un développement de Taylor afin de connaitre la pression dans la zone de la couche laminaire.

Pression dans la couche laminaire $x \sim \mathcal{O}(\delta)$:

$$\boxed{P(x,y) - P_0 \approx P(\delta,y) - P_0 + \cancel{\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=0}(x-\delta)} + ...}$$

On observe que :

$$P(\delta,y) - P_0 = y\frac{\partial P}{\partial y} \approx \mathcal{O}(Y)\mathcal{O}(\frac{\rho V^2}{Y}) = \mathcal{O}(\rho V^2)$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} \approx \mathcal{O}(\frac{\rho UV}{Y})\mathcal{O}(\delta) = \mathcal{O}(\rho V^2\frac{\delta^2}{Y^2})$$

Par conséquent, la pression est constante sur une tranche <u>horizontale</u> : $P(y)$
$\frac{\partial P}{\partial x}$ étant négligeable, on peut supprimer l'équation contenant ce terme.

On obtient les équations de Prandtl :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho \left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

APPROXIMATION DE BOUSSINESQ

Puisqu'on est dans le cas de la convection naturelle, on ajoute le terme d'Archimède et la force à distance (ρg).
Dans le cas de la convection naturelle, le fluide près de la paroi s'élève sous l'effet de la chaleur.
On considère également que le fluide est soumis à la force d'Archimède c'est à dire que la pression exercée sur ce dernier ne dépend que de la profondeur.

$$\begin{cases} -\underbrace{\beta(T-T_e))}_{<<1} \qquad + \rho \approx \rho_0(1 \\ \qquad P(y) \qquad = \rho_0 g y \implies dvPy = \rho_0 g \end{cases} \tag{9}$$

On peut simplifier les équations de Prandtl :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho_0(1 - \underbrace{\cancel{\beta(T-T_e)})}_{<<1} \left[u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right] = \cancel{-\rho_0 g} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho_0(\cancel{1} - \beta(T-T_e)g)$$

On obtient enfin les équations de Prandtl pour la convection naturelle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \beta(T-T_e)g + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

FONCTION DE COURANT ET VARIABLE DE SIMILITUDE

On peut exprimer les composantes de la vitesse u et v en terme d'une fonction de courant $\psi(x,y)$:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad ; \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10}$$

La fonction de courant peut s'écrire de la manière suivante *(cf. proposé dans le TP8)* :

$$\psi(x,y) = -4\nu f(\eta)\left[\frac{1}{4}Gr(y)\right]^{1/4} \quad \textit{(ansatz)} \tag{11}$$

L'énoncé nous propose la variable de similitude suivante :

$$\eta(x,y) = \frac{x}{\delta(y)} = \frac{x}{y}\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{1/4} \tag{12}$$

où :

Gr = Nombre de Grashof, caractérise le transfert thermique dû à la convection naturelle d'un fluide.

Nous pouvons introduire la température adimensionnelle :

$$\boxed{\theta(\eta) = \frac{T - T_e}{T_w - T_e} = \frac{T - T_e}{\Delta T}} \tag{13}$$

Par conséquent :

$$\beta(T - T_e)g = \beta\theta(\eta)\Delta T g = \theta(\eta)Gr(y)\frac{\nu^2}{y^3} \tag{14}$$

On notera que :

$$Gr(y) = \frac{\beta \Delta T g y^3}{\nu^2} \tag{15}$$

$$Gr'(y) = \frac{3\beta\Delta T g y^2}{\nu^2} = \frac{3}{y}Gr(y) \tag{16}$$

$$\delta(y) = y\left(\frac{Gr(y)}{4}\right)^{1/4} \tag{17}$$

$$\delta'(y) = \left(\frac{4}{Gr(y)}\right)^{1/4} - y\frac{1}{4}\left(\frac{4}{Gr(y)}\right)^{-3/4}\left(\frac{4}{Gr^2}\right)\frac{3}{y}Gr(y) \tag{18}$$

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{2y^2}\sqrt{Gr(y)} \tag{19}$$

Maintenant, grand moment de fun (piloulou, piyou-piyou), on doit calculer un tas de dérivées.
On commence par calculer quelques dérivées qui nous seront utiles par la suite :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\delta(y)} \tag{20}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\eta \frac{\delta'(y)}{\delta(y)} \tag{21}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 4\nu f' \frac{1}{4} \left[\frac{Gr}{4}\right]^{1/4} \eta \frac{\delta'(y)}{\delta(y)} \tag{22}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -4\nu \left[\frac{Gr}{4}\right]^{1/4} f'' \frac{1}{\delta(y)^2} \tag{23}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -4\nu \left[\frac{Gr}{4}\right]^{1/4} f' \frac{1}{\delta(y)} \tag{24}$$