

Cours de relativité

**Relativité restreinte  
non-inertielle  
et  
Relativité générale**

Licence 3 - Master - Écoles d'ingénieurs

2025 - Mathieu ROUAUD

# Introduction

Ce document regroupe les cours donnés sur un semestre à l'*Université Mayor San Simon* de Cochabamba en Bolivie. Il existe un grand nombre d'excellents livres et de pdf sur la relativité générale, voilà ce qui caractérise et peut différencier celui-ci :

1. De nombreux exercices avec des corrections détaillées accompagnent le cours.
2. Souvent la relativité restreinte n'est étudiée que dans le contexte inertiel, or, en absence de gravitation, celle-ci s'applique aussi aux référentiels non-inertiels. Nous étudions les cas du référentiel en translation rectiligne uniformément accéléré, et celui du référentiel tournant. C'est un sujet très riche qui permet une transition douce vers la relativité générale, en se familiarisant avec la notion de temps coordonné, le calcul tensoriel et le formalisme Lagrangien.
3. En cartographie, nous utilisons diverses métriques pour représenter la sphère sur un plan. Le chemin le plus court n'est plus nécessairement une ligne droite. Nous utilisons cette analogie pour comprendre les géodésiques qui maximisent le temps propre en relativité générale.
4. Certains chapitres s'appuient sur un article de recherche et permettent de se préparer à adopter la démarche du chercheur.

Bonne lecture !

Toujours content de recevoir du courrier de mes lecteurs : [ecrire@incertitudes.fr](mailto:ecrire@incertitudes.fr)

Pour la relativité restreinte il sera régulièrement fait référence au livre du même auteur :

[RR] [\*Relativité restreinte\*](#), *Approche géométrique*  
suivi de la conférence *Les voyages interstellaires et l'antimatière*,  
2020, 536 pages.

Fichiers sur [github.com/Mathieu-ROUAUD](https://github.com/Mathieu-ROUAUD)

Ce livre est sous license Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0).

## Relativité Restreinte

**Mathieu** : Bonjour. Commençons.

Depuis notre naissance nous vivons dans la fiction sociale du temps absolu. Pourtant, comme nous allons l'expliquer aujourd'hui, le temps est relatif. Cette notion nouvelle demande d'être clairement explicitée, sinon de nombreuses confusions peuvent surgir. Par exemple, la relativité du temps ne remet nullement en question la causalité. Impossible de voyager dans le passé, ou que quelqu'un du futur vienne nous visiter. Par contre, comme nous le verrons par la suite, nous pouvons voyager dans le futur des autres.

**Arkaitz** : Monsieur, mais pourquoi ne pas commencer directement par la relativité générale ? Nous avons déjà eu des cours de relativité restreinte dès la licence.

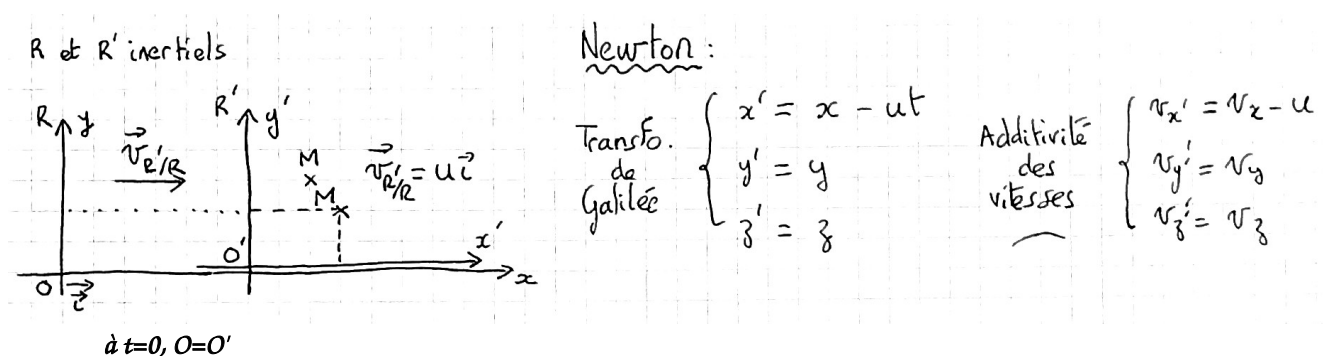
**Mathieu** : En effet, cela peut sembler inutile de recommencer ce que l'on sait déjà. Mais chaque enseignant a une approche différente de la relativité restreinte, aujourd'hui, par exemple, nous verrons un outils visuel pour déterminer la dilation du temps que vous n'avez jamais vu auparavant : le triangle des temps. De plus ce sera pour nous l'occasion d'introduire les notations, et dès le troisième cours nous introduirons l'approche tensorielle nécessaire pour la générale. Avec une nouvelle définition de la relativité restreinte qui se détache du biais historique de la lumière, et qui a permis grâce aux symétries de construire le Modèle Standard.

**Cristian** : D'accord, et nous commencerons quand la relativité générale en tant que-t-elle ?

**Mathieu** : Nous avons au total 18 cours, seuls les 6 derniers traiterons exclusivement de la générale. Auparavant nous devons compléter vos cours de restreinte, vous ne connaissez pas encore le calcul tensoriel, et par exemple nous allons mettre les équations de Maxwell sous forme de tenseur, ce qui nous guidera ensuite par analogie pour les ondes gravitationnelles. Nous traiterons la relativité restreinte dans des référentiels accélérés, nouveau aussi pour vous. Ce sera l'occasion de présenter les espaces vectoriels métriques et le Lagrangien.

D'autres questions ?

Bon, alors... Historiquement, la notion de temps relatif est le fruit de la contradiction entre deux théories. D'un côté, nous avons la théorie de Newton de 1687 qui décrit le mouvement des objets et de la matière en général, et de l'autre, la théorie de Maxwell de 1864 qui décrit le comportement de la lumière en terme d'ondes électromagnétiques. Ces deux théories, très bien vérifiées expérimentalement, énoncent leurs lois dans des référentiels inertiels. Or, la première prédit l'additivité des vitesses, ce qui entre en contradiction avec, dans la deuxième, la constance de la vitesse de la lumière dans le vide.



Maxwell (vide):

• Non invariance des  $\vec{eq}$ . sous galilée:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t \Rightarrow \square \vec{E} = \vec{0}$$

$$R: \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \xrightarrow[\text{RR p433}]{\text{dem.}}$$

$$R': \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' \neq 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Une idée, pour mettre tout le monde d'accord et sauver les deux théories, serait que la lumière se propage dans un référentiel particulier nommé l'*éther*. Or, les expériences de Michelson-Morley, menées dès 1887, prouvent que l'éther, milieu de propagation supposé de la lumière, n'existe pas.

Ce qui amène Einstein à proposer nouvelle une théorie en 1905. Cette théorie est bien plus satisfaisante car elle intègre matière et lumière dans le même cadre. Voilà les deux principaux **postulats** de la théorie de la relativité restreinte d'Einstein :

1. *Principe de relativité* : Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.

Notez le mot *physique* et non *mécanique* comme avec Newton :  
physique = mécanique + électromagnétisme = matière + lumière

2. *Universalité de la vitesse de la lumière* : La vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs inertiels.

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s (constante universelle fixée par la relativité restreinte)}$$

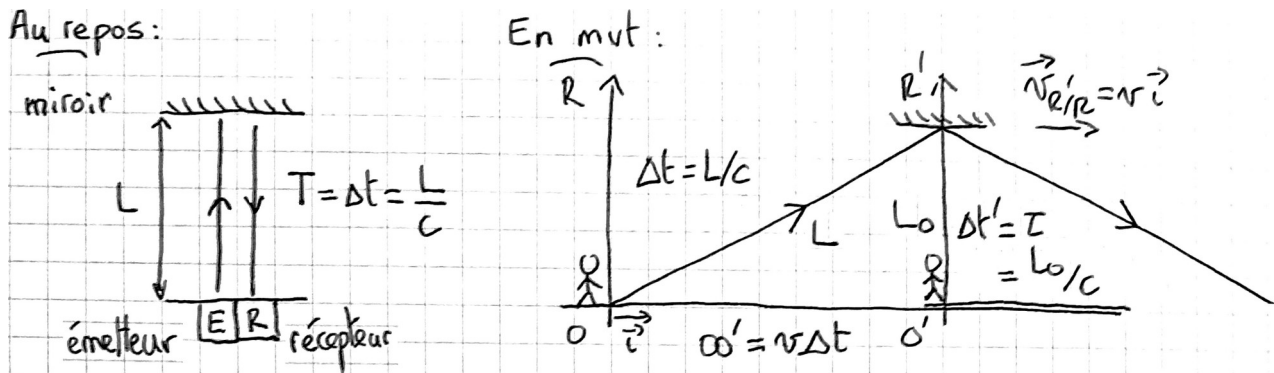
**Arkaitz** : C'est étonnant que la lumière joue un rôle aussi central. Les ondes gravitationnelles, comme vérifié en 2017, vont aussi à la vitesse  $c$ , et toute particule de masse nulle. Je trouve étrange que le contenu et le contenant soient liés.

**Mathieu** : Oui, le deuxième postulat est en fait inutile. C'est une conséquence d'hypothèses simples sur les symétries : 3 dimensions d'espace, une de temps, homogénéité du temps et de l'espace, isotropie de l'espace, principes de relativité et de causalité. Ces hypothèses semblent naturelles et permettent de trouver la transformée de Lorentz en quelques pages de calcul<sup>1</sup>. La constante  $c$  apparaît alors comme une constante de structure propre à l'espace-temps, sans lien avec un quelconque objet physique.

Il est intéressant de noter que Newton avait découvert les outils mathématiques du calcul différentiel qui auraient pu lui permettre de trouver ce changement de coordonnées le plus général entre deux référentiels inertiels. Sans s'en rendre compte, il s'est restreint au cas limite où  $c$  est infini, et l'espace et le temps, absolus et disconnectés.

Continuons néanmoins avec les 2 postulats historiques d'Einstein et décrivons l'*horloge de Pythagore*. Imaginons une horloge qui utilise des rayons lumineux. Un rayon lumineux est émis, se réfléchit sur un miroir et revient au même point après une durée  $2T$  :

<sup>1</sup> Bien expliqué et démontré par Jean-Marc Lévy-Leblond, « One more derivation of the Lorentz transformation », American Journal of Physics 44 (3) 271 - 277 (1976).



L'horloge est au repos dans  $R'$  et se déplace à la vitesse  $\vec{v}$  par rapport à  $R$ . La distance parcourue par le rayon dans  $R$  est donc plus grande, tout en gardant la vitesse constante :

$$\text{d'où } L^2 = L_0^2 + OO'^2 \Rightarrow c^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t'^2 + v^2 \Delta t'^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta t'$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad \gamma \geq 1 \quad \text{d'où } \boxed{\Delta t = \gamma \tau} \Rightarrow \text{dilatation du temps !}$$

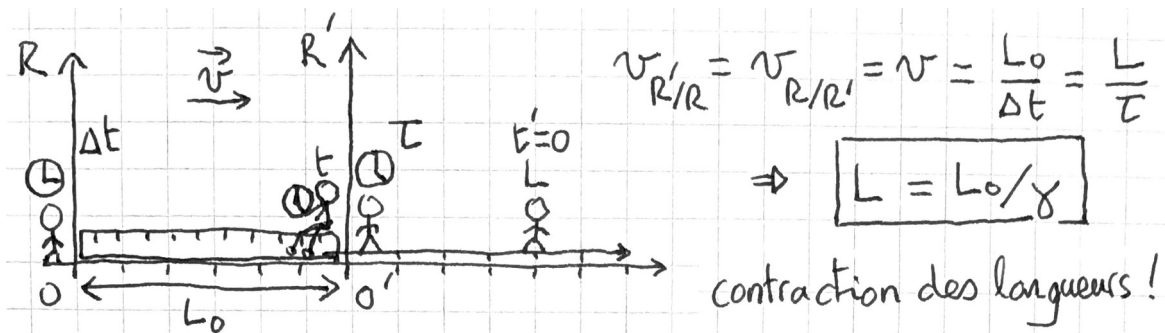
**Adriana :** ... donc un observateur de  $R$  voit l'horloge de  $R'$  aller plus lentement, et c'est relatif, celui de  $R'$  voit aussi une horloge au repos dans  $R$  aller plus lentement.

**Mathieu :** Oui, la situation est symétrique. Mais, non, ce n'est pas ce qui est vu mais ce qui est mesuré. Nous verrons tout à l'heure les méthodes de mesure des temps et des distances. Ici la dilatation du temps est la même pour des référentiels qui se rapprochent ou s'éloignent. Par contre, pour ce que l'on voit, c'est différent, car il faut tenir compte, en plus, de la propagation de la lumière. Nous verrons ça dans un prochain cours, c'est l'effet Doppler.

La dilatation du temps peut faire penser à un effet de perspective spatio-temporel. Une analogie, d'où je suis, je peux "tenir" un étudiant au fond de la salle entre mon pouce et l'index, il est tout petit, comme un Schtroumpf ! Mais, lui aussi me voit minuscule, c'est réciproque. Dans ce cas, nous avons un effet de perspective spatial. Et, bien sûr, nous avons en fait tout les deux la même taille, ce n'est qu'une illusion.

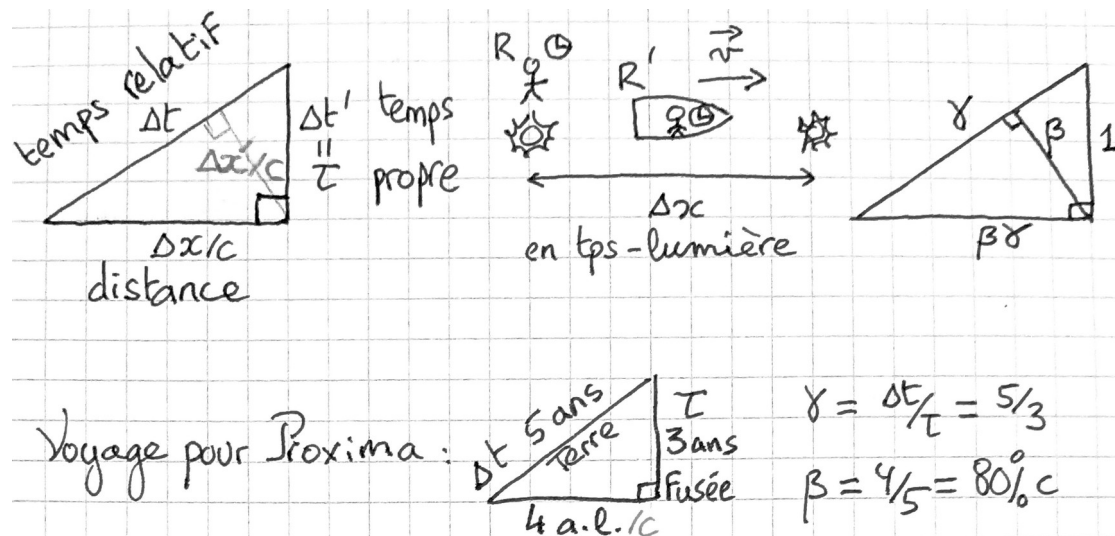
Dans le cas de la relativité c'est plus complexe, car, contrairement à l'espace, le temps n'est pas isotrope.

Où en étions-nous ? Ah oui ! De plus, la dilatation du temps est associée à une **contraction des longueurs**. Nous considérons une règle au repos dans  $R$ , et toujours une horloge au repos dans  $R'$  :



Pour mesurer une longueur dans un référentiel donné, il faut repérer la position de chaque extrémité aux mêmes instants.

En s'appuyant sur l'horloge de Pythagore, présentons maintenant le **triangle des temps** qui résume ces effets :



Nous sommes prêts pour aborder le **paradoxe des jumeaux** : imaginons des jumeaux qui ont 20 ans, l'un reste sur Terre, et l'autre part dans son vaisseau spatial à la vitesse de 80% de  $c$  pour Proxima du Centaure situé à 4 al. Le jumeau voyageur arrive, sur l'exoplanète *Proxima b*, 3 ans plus tard, alors qu'il s'est écoulé sur Terre 5 ans. Quand il revient sur Terre, il s'écoule à nouveau 3 ans dans le vaisseau et 5 ans sur Terre. Ainsi, lors des retrouvailles, le jumeau voyageur aura 26 ans, alors que le jumeau sédentaire aura 30 ans ! Si l'on imagine la situation symétrique, cela semble paradoxal. Mais l'un subit une accélération pour revenir, contrairement à l'autre. Et finalement, ce n'est pas qu'une simple illusion, un effet de perspective, mais une différence physique et mesurable.

**Luna** : Ici, la fusée va toujours à la même vitesse, ce qui n'est pas réaliste ! On ne peut pas passer de 0 à 80% de  $c$  instantanément, encore moins se retourner d'un coup en inversant la vitesse. Pourtant c'est à cause de ces phases accélérées que le voyageur rajeunit relativement à celui sur Terre. Car tout le reste du temps la situation est symétrique. Pensez-vous qu'il est pensable de construire une telle fusée un jour ?

**Mathieu** : Oui, excellentes remarques. Pour plus de réalisme, dans un prochain cours, nous considérerons une fusée uniformément accélérée. Le référentiel de la fusée est alors non-inertiel et les postulats d'Einstein ne s'y appliquent pas. La métrique n'y a plus une forme minkowskienne mais de Rindler. Concernant une telle fusée, elle est pensable avec beaucoup de "si". Si on était capable de collecter, de stocker et d'utiliser l'anti-matière de manière efficace, une fusée de la taille d'une *Saturn V* permettrait un voyage jusqu'à *Proxima b* avec une accélération d'un  $g$ , en 3 ans voyageur et 5 ans terrestre.

Pour finir aujourd'hui, un point fondamental, donnons la définition d'un **référentiel inertiel** en relativité restreinte, seuls référentiels où les postulats sont vérifiés.

Pour se repérer dans l'espace nous procédons comme en mécanique newtonienne. Nous plaçons des règles unités d'un mètre perpendiculaires les unes aux autres afin de former un réseau qui maille tout l'espace. Nous voulons aussi disposer d'horloges à chaque nœud du réseau, toutes les horloges étant constamment synchronisées. De plus, nous imaginons à chaque nœud un observateur qui note les événements se produisant à son niveau à l'aide des étiquettes ( $ct, x, y, z$ ).

La différence avec la mécanique classique concerne la synchronisation des horloges. Si vous placez toutes les horloges au nœud  $O$ , les mettez à zéro, et les déplacez ensuite à leurs nœuds respectifs, elles vont se désynchroniser lors du déplacement, car elles auront alors une vitesse non nulle et leur temps va se dilater.

D'où la **méthode de synchronisation d'Einstein** : les horloges sont d'abord placées à leurs nœuds. Arbitrairement, nous choisissons l'horloge en  $O$ ,  $H_O$ , comme référence. À la date  $t_{O1}$  sur  $H_O$ , l'observateur en  $O$  émet un rayon lumineux vers une horloge en  $M$  à synchroniser, le rayon se réfléchit sur un miroir en  $M$  pour retourner en  $O$ . Lorsque le rayon se réfléchit, l'observateur en  $M$  note la date  $t_M$  indiquée par son horloge. Lorsque le rayon revient,  $O$  note  $t_{O2}$ .  $O$  communique à  $M$  les valeurs  $t_{O1}$  et  $t_{O2}$ , et  $M$  en déduit le  $t_M$  synchronisé.

Par symétrie des trajectoires entre l'aller et le retour (isotropie de l'espace) :

$$(t_M)_{\text{sync}} = \frac{t_{O1} + t_{O2}}{2}, \quad H_M \text{ à avancer de } (t_M)_{\text{sync}} - t_M.$$

**Cristian** : Ok, les horloges sont alors initialement synchronisées. Mais qu'est-ce qui nous garantit qu'elles le restent ?

**Mathieu** : L'homogénéité de l'espace et du temps demandée dans un référentiel inertiel. Aucun point ne doit être privilégié, par symétrie, il n'y a aucune raison qu'une horloge commence à se comporter différemment des autres.

Un grand avantage de la relativité restreinte est que nous avons une méthode expérimentale qui permet de déterminer si un référentiel est inertiel : une fois synchronisées, les horloges le restent. Si le référentiel est non-inertiel elles se désynchronisent au cours du temps.

En mécanique newtonienne le temps est absolu, et un référentiel est galiléen (inertiel) si les lois de Newton sont vérifiées, or les lois ne sont vérifiées que dans un référentiel galiléen, la définition est cyclique. En mécanique classique, si un objet a une trajectoire courbe, on ne sait pas si c'est à cause de l'action d'une force, ou du caractère non-inertiel du référentiel.

En relativité, on utilise le cristal d'horloge et c'est clarifié.

Quand nous parlons de mesure du temps et des longueurs c'est par rapport à ce solide de référence et son cristal d'horloges associé. Chaque référentiel dispose d'un ensemble d'observateurs qui ont chacun leur règle et horloge propre. Suite à une expérience, les observateurs rassemblent toutes les données sur les différents événements qu'ils ont collecté pour reconstituer ce qui s'est passé<sup>2</sup>.

Considérons, une règle de longueur  $L_0$  et une horloge de période  $\tau$ , toute deux au repos dans  $R$ . Quand un référentiel  $R'$  passe à la vitesse  $\vec{v}$ , un observateur de  $R'$  va parfois coïncider avec un observateur de  $R$  donné. Par exemple, il y a deux observateurs  $A_1$  et  $A_2$  de  $R$  au repos à chaque extrémités de la règle, et dans  $R'$  à un même temps  $t'$  deux observateurs  $A'_1$  et  $A'_2$  leur coïnciderons :

$$\text{pour tout } t, L_0 = A_1 A_2 \quad ; \quad \text{même } t', L = A'_1 A'_2 = \sqrt{(x'_{A'_2} - x'_{A'_1})^2 + (y'_{A'_2} - y'_{A'_1})^2 + (z'_{A'_2} - z'_{A'_1})^2}.$$

Pour l'horloge, un observateur de  $R$  y est constamment au repos, et deux observateurs de  $R'$  lui coïnciderons, l'un au début et l'autre à la fin de la période :

$$\text{même } x, \tau = t_2 - t_1 \text{ (une horloge)} \quad ; \quad \text{différents } x', \Delta t' = t'_{A'_2} - t'_{A'_1} \text{ (deux horloges)}.$$

Et c'est selon ces protocoles que nous avons  $L = L_0/\gamma$  et  $\Delta t' = \gamma \tau$ .

Merci à vous pour votre attention.

<sup>2</sup> À noter aussi que les horloges au repos sont ainsi synchronisées dans un référentiel inertiel donné, mais elle n'apparaissent pas *a priori* synchronisées par rapport à un autre référentiel où elles sont en mouvement.

**Résumé** des notions vues aujourd'hui :

Cours 1 - RELATIVITÉ RESTREINTE

- Postulats d'Einstein
- Horloge de Pythagore : Dilatation du temps
- Contraction des longueurs
- Triangle des temps
- Paradoxe des jumeaux
- Définition d'un référentiel inertiel : Méthode de synchronisation d'Einstein

Pour réviser et s'exercer :

- Ce cours reprend le chapitre 1 du livre RR, et vous y avez les exercices 1 à 8 corrigés.