Processus en temps continu

January 20, 2014

Processus et filtrations

Définition

On appelle processus d'espace détats $(E, \mathcal{E})$ *toute famille de variables aléatoires* $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *définies sur un même espace de probabilité et à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$.

Processus et filtrations

Définition

On appelle processus d'espace détats $(E, \mathcal{E})$ toute famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définies sur un même espace de probabilité et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

Définition

(i) *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesuré. Alors, on appelle filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille croissante (ou décroissante) $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de sous-tribu de $\mathcal{F}$, i.e. $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Processus et filtrations

Définition

On appelle processus d'espace détats $(E, \mathcal{E})$ *toute famille de variables aléatoires* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *définies sur un même espace de probabilité et à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$.

Définition

(*i*) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesuré. Alors, on appelle filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *toute famille croissante (ou décroissante)* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *de sous-tribu de* $\mathcal{F}$, *i.e.* $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

(*ii*) *Si* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une filtration sur* $(\Omega, \mathcal{F})$, *on lui associe deux filtrations comme suit*

$$\mathcal{F}_t^- = \vee_{s<t}\mathcal{F}_s \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_t^+ = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s \qquad \forall t \in \mathbb{T},$$

et on dit que $(\mathcal{F}_t)$ *est continue à droite (resp. à gauche) si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ *(resp.* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^-$*), pour tout* $t \in \mathbb{T}$.

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_\infty := \vee_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t$.

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_\infty := \vee_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t$.

Etant donné un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, on lui associe sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t \in \mathbb{T}}$ définie par $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{X_s,\ s \leq t\}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_\infty := \vee_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t$.

Etant donné un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, on lui associe sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t \in \mathbb{T}}$ définie par $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{X_s,\ s \leq t\}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Définition

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définis respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et admettant le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$.

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_\infty := \vee_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t$.

Etant donné un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, on lui associe sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t \in \mathbb{T}}$ définie par $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{X_s, \ s \leq t\}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Définition

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définis respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et admettant le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$. Ces processus sont dits équivalents si pour tout $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n) = \mathbb{P}'(X'_{t_1} \in A_1, \ldots, X'_{t_n} \in A_n).$$

Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_\infty := \vee_{t\in\mathbb{T}}\mathcal{F}_t$.

Etant donné un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on lui associe sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ définie par $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{X_s,\ s \leq t\}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définis respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et admettant le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$. Ces processus sont dits équivalents si pour tout $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n) = \mathbb{P}'(X'_{t_1} \in A_1, \dots, X'_{t_n} \in A_n).$$

On dit aussi que chacun des processus est une version de l'autre.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *définis sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et admettant le même espace d'états* $(E, \mathcal{E})$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *et* $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *définis sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et admettant le même espace d'états* $(E, \mathcal{E})$*. On dit qu'ils sont des modifications l'un de l'autre si pour tout* $t \in T$, $X_t = X'_t$ $\mathbb{P}$*-p.s. et qu'ils sont indistinguables s'il existe* $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ *tel que pour tout* $\omega \in \Omega_0$ *et tout* $t \in \mathbb{T}$, $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$.

Processus canonique

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesuré. On munit $E^{\mathbb{T}}$ de la tribu $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$, la tribu engendrée par les applications coordonnées $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Processus canonique

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesuré. On munit $E^{\mathbb{T}}$ de la tribu $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$, la tribu engendrée par les applications coordonnées $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On lui associe une application mesurable $\psi = \psi_X$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{E}^{\mathbb{T}})$, définie par $\psi(\omega) = (X_t(\omega))_{t \in \mathbb{T}}$.

Processus canonique

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesuré. On munit $E^{\mathbb{T}}$ de la tribu $\mathcal{E}^{\otimes \mathbb{T}}$, la tribu engendrée par les applications coordonnées $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On lui associe une application mesurable $\psi = \psi_X$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{E}^{\mathbb{T}})$, définie par $\psi(\omega) = (X_t(\omega))_{t \in \mathbb{T}}$.

On note $\mathbb{P}_X$ la loi image de $\mathbb{P}$ par ψ, i.e. la probabilité sur $\mathcal{E}^{\mathbb{T}}$) définie par

$$\mathbb{P}_X(\Gamma) = \mathbb{P}(\psi^{-1}(\Gamma)\,,$$

pour tout $\Gamma \in \mathcal{E}^{\mathbb{T}}$.

Alors, sous $\mathbb{P}_X$, $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un processus équivalent à $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, appelé processus canonique associé à $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

On appelle alors $\mathbb{P}_X$, la loi du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Processus canonique (suite)

On rappelle que $E^{\mathbb{T}}$ s'identifie à $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{T}$ dans E.

Processus canonique (suite)

On rappelle que $E^{\mathbb{T}}$ s'identifie à $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{T}$ dans E.

Lorsque E est métrique séparable et $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il peut exister $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue sur $\mathbb{T}$.

Processus canonique (suite)

On rappelle que $E^{\mathbb{T}}$ s'identifie à $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{T}$ dans E.

Lorsque E est métrique séparable et $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il peut exister $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue sur $\mathbb{T}$.

Cette propriété de continuité n'a aucun raison d'être transportée au processus canonique. Par contre on peut reprendre la construction précédente en remplaçant $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$ par $C(\mathbb{T}, E)$. De même on peut travailler avec $D(\mathbb{T}, E)$, l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche.

On rappelle que $E^{\mathbb{T}}$ s'identifie à $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{T}$ dans E.

Lorsque E est métrique séparable et $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il peut exister $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue sur $\mathbb{T}$.

Cette propriété de continuité n'a aucun raison d'être transportée au processus canonique. Par contre on peut reprendre la construction précédente en remplaçant $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$ par $C(\mathbb{T}, E)$. De même on peut travailler avec $D(\mathbb{T}, E)$, l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche.

Enfin sur tous ces espaces (avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$) on considère les opérateurs de décalage $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$, défini par $\theta_t((\omega_u)_{u \in \mathbb{R}^+}) = (\omega_{t+u})_{u \in \mathbb{R}^+}$.

Processus canonique (suite)

On rappelle que $E^{\mathbb{T}}$ s'identifie à $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{T}$ dans E.

Lorsque E est métrique séparable et $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il peut exister $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue sur $\mathbb{T}$.

Cette propriété de continuité n'a aucun raison d'être transportée au processus canonique. Par contre on peut reprendre la construction précédente en remplaçant $\mathcal{F}(\mathbb{T}, E)$ par $C(\mathbb{T}, E)$. De même on peut travailler avec $D(\mathbb{T}, E)$, l'espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche.

Enfin sur tous ces espaces (avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$) on considère les opérateurs de décalage $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, défini par $\theta_t((\omega_u)_{u\in\mathbb{R}^+}) = (\omega_{t+u})_{u\in\mathbb{R}^+}$. On a alors $Y_s \circ \theta^t = Y_{s+t}$, pour tous $s, t \geq 0$.

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un processus défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une filtration.*

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un processus défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une filtration. On dit que* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté si, pour tout* $t \geq 0$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un processus défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une filtration. On dit que* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté si, pour tout* $t \geq 0$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable. On dit qu'une variable aléatoire* $T : \Omega \to [0, +\infty]$ *est un temps d'arrêt relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si* $\{T \leq t\}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Temps d'arrêts

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un processus défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une filtration. On dit que* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté si, pour tout* $t \geq 0$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable. On dit qu'une variable aléatoire* $T : \Omega \to [0, +\infty]$ *est un temps d'arrêt relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si* $\{T \leq t\}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Proposition

Tout temps d'arrêt est la limite décroissante d'une suite de temps d'arrêt ne prenant chacun qu'un nombre fini de valeurs.

Temps d'arrêts (suite)

Définition

Soit T un temps d'arrêt relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. On définit une tribu $\mathcal{F}_T$ comme suit

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty \ : \ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Temps d'arrêts (suite)

Définition

Soit T un temps d'arrêt relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. On définit une tribu $\mathcal{F}_T$ comme suit

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty \ : \ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté, dont les trajectoires sont $\mathbb{P}$-p.s. continues à droite ou à gauche.

Temps d'arrêts (suite)

Définition

Soit T un temps d'arrêt relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. On définit une tribu $\mathcal{F}_T$ comme suit

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty \ : \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté, dont les trajectoires sont $\mathbb{P}$-p.s. continues à droite ou à gauche.Soit T un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)$.

Temps d'arrêts (suite)

Définition

Soit T *un temps d'arrêt relativement à une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$*. On définit une tribu* $\mathcal{F}_T$ *comme suit*

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty \ : \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté, dont les trajectoires sont* $\mathbb{P}$*-p.s. continues à droite ou à gauche.Soit* T *un temps d'arrêt relativement à* $(\mathcal{F}_t)$*. Alors,* X_T *est une variable aléatoire, mesurable (sur* $\{T < \infty\}$*) relativement à la filtration* $\mathcal{F}_T$*.*

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus à valeurs réelles,* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté.*

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus à valeurs réelles,* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté. On dit que c'est une sous-martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *si*

(i) $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, *pour tout* $t \in \mathbb{T}$;

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *un processus à valeurs réelles,* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté. On dit que c'est une sous-martingale relativement à* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *si*

(i) $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, *pour tout* $t \in \mathbb{T}$*;*

(ii) $X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ *a.s., pour tout* $s < t$ *dans* $\mathbb{T}$*.*

Définition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus à valeurs réelles, $(\mathcal{F}_t)$-adapté. On dit que c'est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si

(i) $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, *pour tout* $t \in \mathbb{T}$;

(ii) $X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ *a.s., pour tout* $s < t$ *dans* $\mathbb{T}$.

On dit que c'est une sur-martingale si $(-X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une sous-martingale et que c'est une martingale si c'est à la fois une sous et une sur-martingale.

Théorème (Doob's maximal inequality)

Soit $\mathbb{T}$ un intervalle réel et $(X_t)_{t\in T}$ un processus continu à droite.

Théorème (Doob's maximal inequality)

Soit $\mathbb{T}$ un intervalle réel et $(X_t)_{t \in T}$ un processus continu à droite. Supposons que (X_t) est une martingale ou une sous-martingale positive.

Martingales

Théorème (Doob's maximal inequality)

Soit $\mathbb{T}$ *un intervalle réel et* $(X_t)_{t\in T}$ *un processus continu à droite. Supposons que* (X_t) *est une martingale ou une sous-martingale positive. Alors* $X^* := \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t|$ *définit une variable aléatoire et*

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mathbb{P}(X^* \geq \lambda) \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}(|X_t|^p), \qquad \textit{pour tout } p \geq 1\ ;$$

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in\mathbb{T}} \|X_t\|_p.$$

Théorème (Doob's maximal inequality)

Soit $\mathbb{T}$ un intervalle réel et $(X_t)_{t\in T}$ un processus continu à droite. Supposons que (X_t) est une martingale ou une sous-martingale positive. Alors $X^* := \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t|$ définit une variable aléatoire et

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mathbb{P}(X^* \geq \lambda) \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}(|X_t|^p), \qquad \textit{pour tout } p \geq 1 \text{ ;}$$

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in\mathbb{T}} \|X_t\|_p.$$

Remarque : Si $\mathbb{T} = [0, A]$, on a aussi, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,A]} |X_t| \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(|X_A| \mathbf{1}_{\{\sup_{t\in[0,A]} |X_t| \geq \lambda\}}).$$

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

Lemme des montées de Doob

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

On définit par récurrence une suite (stationnaire) (s_n), par $s_0 = 0$,

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} \ : \ f(t_i) < a\}$$

Lemme des montées de Doob

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

On définit par récurrence une suite (stationnaire) (s_n), par $s_0 = 0$,

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} \;:\; f(t_i) < a\}$$

$$s_{2n+2} = \inf\{t_i > s_{2n+1} \;:\; f(t_i) > b\}.$$

Lemme des montées de Doob

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

On définit par récurrence une suite (stationnaire) (s_n), par $s_0 = 0$,

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} \; : \; f(t_i) < a\}$$

$$s_{2n+2} = \inf\{t_i > s_{2n+1} \; : \; f(t_i) > b\}.$$

On convient que $\inf \emptyset = t_d$.

Lemme des montées de Doob

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

On définit par récurrence une suite (stationnaire) (s_n), par $s_0 = 0$,

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} \ : \ f(t_i) < a\}$$

$$s_{2n+2} = \inf\{t_i > s_{2n+1} \ : \ f(t_i) > b\}.$$

On convient que $\inf \emptyset = t_d$.

Posons, $F = \{t_1, \ldots, t_d\}$ et notons

$$\tilde{U}(f, F, [a, b]) = \sup\{n \ : \ s_{2n} < t_d\}.$$

Lemme des montées de Doob

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

On définit par récurrence une suite (stationnaire) (s_n), par $s_0 = 0$,

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} \; : \; f(t_i) < a\}$$

$$s_{2n+2} = \inf\{t_i > s_{2n+1} \; : \; f(t_i) > b\}.$$

On convient que $\inf \emptyset = t_d$.

Posons, $F = \{t_1, \ldots, t_d\}$ et notons

$$\tilde{U}(f, F, [a, b]) = \sup\{n \; : \; s_{2n} < t_d\}.$$

$$U(f, \mathbb{T}, [a, b]) = \sup\{D(f, F, [a, b]) \; : \; F \subset \mathbb{T}, \text{ fini}\}.$$

Lemme des montées de Doob

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

On définit par récurrence une suite (stationnaire) (s_n), par $s_0 = 0$,

$$s_{2n+1} = \inf\{t_i > s_{2n} \ : \ f(t_i) < a\}$$

$$s_{2n+2} = \inf\{t_i > s_{2n+1} \ : \ f(t_i) > b\}.$$

On convient que $\inf \emptyset = t_d$.

Posons, $F = \{t_1, \ldots, t_d\}$ et notons

$$\tilde{U}(f, F, [a, b]) = \sup\{n \ : \ s_{2n} < t_d\}.$$

$$U(f, \mathbb{T}, [a, b]) = \sup\{D(f, F, [a, b]) \ : \ F \subset \mathbb{T}, \text{ fini}\}.$$

On remarquera que $U(f, \mathbb{T}, [a, b])$ est fini pour toute paire $\{a, b\}$ de rationnels, si et seulement si f n'admet pas de discontinuité de seconde espèce sur $\mathbb{T}$.

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une sous-martingale, avec* $\mathbb{T}$ *dénombrable.*

Lemme des montées de Doob

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une sous-martingale, avec* $\mathbb{T}$ *dénombrable. Pour tout* $a, b \in \mathbb{T}$*, on a :*

$$(b-a)\mathbb{E}(D(X,\mathbb{T},[a,b]) \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}((X_t-b)^+).$$

Lemme des montées de Doob

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une sous-martingale, avec $\mathbb{T}$ dénombrable. Pour tout $a, b \in \mathbb{T}$, on a :

$$(b-a)\mathbb{E}(D(X,\mathbb{T},[a,b])) \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}((X_t - b)^+).$$

Théorème

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale. Il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, et tout $t \in \mathbb{R}^+$ les limites

Lemme des montées de Doob

Proposition

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *une sous-martingale, avec* $\mathbb{T}$ *dénombrable. Pour tout* $a, b \in \mathbb{T}$, *on a :*

$$(b-a)\mathbb{E}(D(X,\mathbb{T},[a,b]) \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}((X_t - b)^+).$$

Théorème

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une sous-martingale. Il existe* $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ *et pour tout* $\omega \in \Omega_0$, *et tout* $t \in \mathbb{R}^+$ *les limites* $\lim_{r\uparrow t,\ r\in\mathbb{Q}} X_t(\omega)$ *et* $\lim_{r\downarrow t,\ r\in\mathbb{Q}} X_t(\omega)$ *existent.*

Théorème

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une sous-martingale (par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)$*) continue à droite en probabilité.*

martingales cad-lag

Théorème

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue à droite en probabilité. Alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ admet une modification cadlag qui est une martingale (par rapport à la même filtration).

Théorème

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue à droite en probabilité. Alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ admet une modification cadlag qui est une martingale (par rapport à la même filtration).

Remarque : le théorème reste vrai si l'on remplace l'hypothèse de continuité à droite de la martingale par : la continuité à droite de la filtration et de l'application $t \to \mathbb{E}(X_t)$.

Théorème

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *une sous-martingale (par rapport à une filtration* $(\mathcal{F}_t)$*) continue à droite en probabilité. Alors* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *admet une modification cadlag qui est une martingale (par rapport à la même filtration).*

Remarque : le théorème reste vrai si l'on remplace l'hypothèse de continuité à droite de la martingale par : la continuité à droite de la filtration et de l'application $t \to \mathbb{E}(X_t)$.

On pourra donc dorénavant considérer des martingales continues à droite (p.s.) et par exemple utiliser le théorème 3.