Contrôle du 3 janvier 2012-8H00

durée : 1 heure

**Exercice 1 :**
Soit $\pi$ une probabilité de transition sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\pi(f) \in C_0(\mathbb{R})$ pour tout $f \in C_0(\mathbb{R})$.
1) Montrer que pour tout $t \geq 0$, on définit une probabilité de transition sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par

$$P_t(x, dy) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \pi^n(x, dy),$$

où l'on convient que $\pi^0(x, dy) = \delta_x(dy)$, et que $P_t(f) \in C_0(\mathbb{R})$ pour tout $f \in C_0(\mathbb{R})$ et tout $t \geq 0$.
2) Montrer que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de Feller, puis identifier son générateur infinitésimal $A$ (et donc le domaine $\mathcal{D}_A$ de $A$).

**Exercice 2 :**
Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus réel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. On suppose que $\mathbb{E}(\sup_{t \geq 0} |X_t|) < \infty$. Soit $T$ un temps d'arrêt fini (i.e. $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$) relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.
1) On suppose que $T$ prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable $D$.
*a*) Montrer que $(X_{T+t})_{t \geq 0}$ définit un processus intégrable et que pour tout $d \in D$ et tout $t \geq 0$, $\mathbf{1}_{\{T=d\}} \mathbb{E}(X_{T+t} | \mathcal{F}_T) = \mathbf{1}_{\{T=d\}} \mathbb{E}(X_{d+t} | \mathcal{F}_d)$.
*b*) Montrer que si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale, $(X_{T+t})_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_{T+t})_{t \geq 0}$-martingale.
2) (difficile) On suppose $T$ à valeurs réelles . Montrer que le résultat du 1)*b*) persiste si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite. (On rappelle que si $Y \in L^1$ et $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration décroissante telle que $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(Y | \mathcal{G}_n)$ converge p.s. et dans $L^1$ vers $\mathbb{E}(Y | \mathcal{G})$).

**Exercice 3 :**
Soit $\mu$ une mesure de probabilité infiniment divisible portée par $\mathbb{R}^+$ ($\mu \neq \delta_0$). Posons, pour tout $\lambda \geq 0$, $\gamma(\lambda) = \log \tilde{\mu}(\lambda)$, où $\tilde{\mu}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x} \mu(dx)$. Pour tout $n \geq 1$, soit $\mu_n$ une mesure de probabilité telle que $\mu_n^{*n} = \mu$. On rappelle que le théorème de

continuité de Lévy est vrai pour les transformées de Laplace.
1) Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$,

$$n(\tilde{\mu}_n(\lambda) - \tilde{\mu}_n(\lambda+1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma(\lambda) - \gamma(\lambda+1).$$

2) Pour tout $n \geq 1$, posons $\tau_n(dx) = n(1-\mathrm{e}^{-x})\mu_n(dx)$. Montrer que $\tau_n(\mathbb{R})$ converge, disons vers $\alpha \neq 0$, et que $(\tau_n/\tau_n(\mathbb{R}))_n$ est tendue.
3) Montrer qu'il existe $(n_k)$ et une mesure de probabilité $\tau$, telle que pour toute fonction $f$ continue bornée sur $\mathbb{R}^+$, $\tau_{n_k}(f)$ converge vers $\alpha\tau(f)$.
Soit $\lambda > 0$. On définit une fonction $g_\lambda$ sur $\mathbb{R}^+$ par $g_\lambda(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ si $x > 0$ et $g_\lambda(0) = \lambda$.
4) Montrer que $g$ est continue bornée et en déduire que $\tilde{\mu}(\lambda) = \exp(-\alpha \int_0^\infty g_\lambda(x)\tau(dx))$.
5) Montrer qu'il existe $a > 0$ et une mesure de Lévy $\nu$ sur $]0,+\infty[$ telle que $\int_{]0,1]} x\nu(dx) < \infty$ de sorte que, pour tout $\lambda \geq 0$, $\tilde{\mu}(\lambda) = \mathrm{e}^{-a\lambda - \int_{]0,+\infty[}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\nu(dx)}$.