Processus de Lévy et de Markov

18 octobre 2012

Table des matières

Chapitre 1

Rappels de probabilité, fonctions caractéristiques

Dans cette section, on rappelle quelques résultats classiques du Calcul des Probabilités (ou de théorie de la mesure) qui nous serons utiles pour la suite. Certains des résultats ci-dessous sont vrais pour des mesures positives finies, mais nous nous contenterons du cas des mesures de probabilités.

Definition 1.1. *Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.*

(a) On appelle loi de X et on note μ_X l'unique mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_X(dx)$.

(b) On appelle fonction caractéristique de X et on note φ_X, la transformée de Fourier $\hat{\mu}_X$ de la mesure μ_X, i.e.

$$\varphi_X(u) = \hat{\mu}_X(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{i\langle u,X\rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle}\mu_X(dx) \qquad \forall u \in \mathbb{R}^d,$$

où $\langle .,. \rangle$ dénote le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

(c) Si X est à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^d$ et est de loi μ_X, on appelle transformée de Laplace de μ_X (ou de X) et on note $\tilde{\mu}_X$ la fonction

$$\tilde{\mu}_X(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\langle u,X\rangle}] = \int_{(\mathbb{R}^+)^d} \mathrm{e}^{-\langle u,x\rangle}\mu_X(dx) \qquad \forall u \in (\mathbb{R}^+)^d,$$

On rappelle que, comme son nom l'indique, la fonction caractéristique caractérise la loi d'une variable aléatoire (voir e.g. la Proposition 1.6 ci-après). De plus φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ $\varphi_X(-u) = \overline{\varphi_X(u)}$ et $|\varphi_X(u)| \leq \varphi_X(0) = 1$.

De même la transformée de Laplace caractérise les mesures sur $\mathcal{B}((\mathbb{R}^+)^d)$. Il est clair que $\tilde{\mu}$ ne prend que des valeurs strictement positives (c'est un avantage certain sur la fonction caractéristique, on peut prendre son logarithme...) est bornée par 1 et tend vers 0 en l'infini. De plus $\tilde{\mu}$ est C^∞ sur $(R^{+*})^d$.

On rappelle aussi que si X_1 et X_2 sont deux variables alétoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de lois respectives μ_{X_1} et μ_{X_2} alors $X_1 + X_2$ a pour loi $\mu_{X_1} * \mu_{X_2}$ (la convolée des deux mesures μ_{X_1} et μ_{X_2}) et $\varphi_{X_1+X_2} = \varphi_{X_1}\varphi_{X_2}$ est la fonction caractéristique de $\mu_{X_1} * \mu_{X_2}$. Ces résultats se généralisent aisément au cas de plusieurs variables aléatoires indépendantes (dans leur ensemble) ainsi qu'à la transformée de Laplace.

Pour $d = 1$ on a les estimations suivantes pour la queue de X.

Lemme 1.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout $r > 0$, on a :*

(i) $\mu(\{x \ : \ |x| \geq r) \leq \frac{r}{2} \int_{-2/r}^{2/r} (1 - \hat{\mu}(t))dt$,

(ii) $\mu([-r, r]) \leq 2r \int_{-1/r}^{1/r} |\hat{\mu}(t)|dt$.

Si μ est portée par $\mathbb{R}^+$, on a aussi :

(iii) $\mu([r, +\infty[) \leq 2(1 - \tilde{\mu}(1/r))$.

Preuve : On a (comme $\sin u \leq 1 \leq u/2$ pour $u \geq 2$) :

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{c} (1 - \hat{\mu}(t))dt = \mathrm{Re}\big(\int_{-c}^{c} (1 - \hat{\mu}(t))dt\big) &= \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_{-c}^{c} (1 - \cos(tx))dt \\ &\geq 2c \int_{]-2/c, 2/c[^c} (1 - \frac{\sin(cx)}{cx})\mu(dx) \geq c\mu(\{x \ : \ |x| \geq 2/c\}),\end{aligned}$$

ce qui prouve (i).
En utilisant que $1 - \cos u \geq \frac{u^2}{4}$, pour tout $|u| \leq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mu([-r, r]) &\leq 4 \int_{-r}^{r} \frac{1 - \cos(x/r)}{(x/r)^2} \mu(dx) \leq 2r \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) \int_{-1/r}^{1/r} (1 - r|t|)\mathrm{e}^{itx} dt \\ &\leq 2r \int_{-1/r}^{1/r} (1 - r|t|)\hat{\mu}(t) \leq 2r \int_{-1/r}^{1/r} |\hat{\mu}(t)|dt,\end{aligned}$$

ce qui prouve (ii).
En remarquant que $\mathrm{e}^{-u} \leq 1/2$, pour tout $u \geq 1$, on obtient

$$1 - \tilde{\mu}(1/r) = \int_{\mathbb{R}^+} (1 - \mathrm{e}^{-x/r})\mu(dx) \geq \frac{1}{2}\mu(\{x \ : \ x/r \geq 1\}).$$

Definition 1.2. *Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On dit que (μ_n) converge étroitement vers une mesure finie μ si pour toute fonction continue bornée f sur $\mathbb{R}^d$, $\mu_n(f) \to \mu(f)$. Si cette convergence a lieu pour toute fonction de $C_0(\mathbb{R}^d)$, on dit que (μ_n) converge faiblement vers μ.*

Dans le cas de la convergence étroite μ est nécessairement une mesure de probabilité, mais ce n'est pas forcément le cas lorsqu'il y a convergence faible. En fait on verra que ces deux notions coïncident dès que l'on suppose $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$.

On peut établir le résultat suivant par un procédé diagonal.

Lemme 1.2. *De tout suite (μ_n) de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers une mesure finie μ.*

Ce résultat ne passe pas à la convergence étroite. Aussi introduit-on les notions suivantes.

Definition 1.3. *Soit Π un ensemble de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) On dit que Π est relativement compact si de toute suite on peut extraire une sous-suite convergeant étroitement.

(b) On dit que Π est tendu si $\sup_{\mu\in\Pi} \mu(\{u \in \mathbb{R}^d, \|u\| \geq n\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Il découle aisément du Lemme 1.2 le résultat suivant.

Proposition 1.3 (Théorème de Prohorov)**.** *Soit Π un ensemble de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Alors Π est relativement compact si et seulement si Π est tendu.*

Proposition 1.4. *Soit Π une famille de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Π est tendue si et seulement si $\{\hat{\mu} \ : \ \mu \in \Pi\}$ est équicontinue en 0. Alors $\{\hat{\mu} \ : \ \mu \in \Pi\}$ est uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}^d$.*

Preuve : On suppose Π tendue. Soit $\mu \in \Pi$. Pour tous $s, t \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(t) - \hat{\mu}(s)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |1 - \mathrm{e}^{i\langle(t-s),x\rangle}|\mu(dx) \\ &\leq \sqrt{\|t-s\|} + 2\sup_{\mu\in\Pi} \mu(\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \|x\| \geq 1/\sqrt{\|t-s\|}\},\end{aligned}$$

ce qui prouve la première implication (et l'uniforme équicontinuité sur $\mathbb{R}^d$).
La réciproque découle directement du Lemme 1.1. □

Remarque : si Π est une famille de mesure sur $\mathcal{B}((\mathbb{R}^+)^d)$ (donc sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) on peut remplacer dans la proposition $\hat{\mu}$ par $\tilde{\mu}$.

Proposition 1.5 (Théorème de Lévy)**.** *Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle qu'il existe f, continue en 0, telle que $(\hat{\mu}_n)$ converge simplement vers f sur un voisinage V de l'origine. Alors (μ_n) est tendue et la convergence est uniforme sur tous les compacts de V. Si de plus $V = \mathbb{R}^d$ alors f est la tranformée de Fourier d'une mesure de probabilité.*

Preuve : On fait le preuve pour $d = 1$. D'après le théorème de convergence dominée, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$\limsup_n \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1 - \hat{\mu}_n(t))dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1 - f(t))dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut alors par le Lemme 1.1 que (μ_n) est tendue. La convergence uniforme sur les compacts découle de la Proposition 1.4.
On suppose maintenant que $(\hat{\mu}_n)$ converge vers f sur $\mathbb{R}$. Comme (μ_n) est tendue, il existe une sous-suite (n_k) et une mesure de probabilité μ tels que $\hat{\mu}_{n_k}$ converge vers $\hat{\mu}$. Donc $\hat{\mu} = f$. □

Proposition 1.6. *Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. La suite (μ_n) converge étroitement vers la mesure de probabilité μ si et seulement si $(\hat{\mu}_n)$ converge vers $\hat{\mu}$.*

Preuve : La nécessité est évidente, montrons la suffisance. Supposons que $\hat{\mu}_n \to \hat{\mu}$. Donc (μ_n) est tendue. Soit f continue bornée et $\varepsilon > 0$. Soit $r \geq 1$ un entier, tel que $\max(\mu([-r, r]^c), \sup_{n\geq 1} \mu_n([-r, r]^c)) \leq \varepsilon$. Soit $m = \|f\|_\infty$ et $\tilde{f}$ une fonction $2\pi r$-périodique, coïncidant avec f sur $[-r, r]$ et telle que $\|\tilde{f}\| \leq m$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass ou le théorème de Féjer, il existe $l \geq 1$, $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ tels que $\|\tilde{f} - P\|_\infty \leq \varepsilon$, où $P(x) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j e^{im_j x/r}$. Alors

$$\begin{aligned} |\nu_n(f) - \nu(f)| \leq & |\nu_n(f) - \nu_n(\tilde{f})| + |\nu_n(\tilde{f}) - \nu_n(P)| \\ & + |\nu_n(P) - \nu(P)||\nu(P) - \nu(\tilde{f})| + |\nu(\tilde{f}) - \nu(f)| \\ \leq & \, 2m\varepsilon + \varepsilon + \sum_{j=1}^{l} |\alpha_j| \hat{\nu}_n(m_j x/r) - \hat{\nu}(m_j x/r)| + \varepsilon + 2m\varepsilon \end{aligned}$$

D'où,

$$\limsup_n |\nu_n(f) - \nu(f)| \leq 2(2m + 1)\varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat. □

Remarque : Les deux propositions restent vraies pour (μ_n) portées par $(\mathbb{R}^+)^d$ en remplaçant, $\hat{\mu}_n$ par $\tilde{\mu}_n$.

Exercices

Exercice 1.1. *On rappelle que* m *est une (la) médiane d'une variable aléatoire réelle* Z*, si* $\max(\mathbb{P}(Z < m), \mathbb{P}(Z > m)) \leq 1/2$.
Soit Z_1 *et* Z_2 *deux var indépendantes de même loi et* m *une médiane pour* Z_1 *(donc pour* Z_2*). Soit* $Z = Z_1 - Z_2$.
1) *Montrer que, pour tout* $r > 0$

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(|Z_1 - m| > r) \leq \mathbb{P}(|Z| > r) \leq 2\mathbb{P}(|Z_1| > r/2).$$

2) *Montrer que, pour tout* $p \geq 1$, $Z_1 \in L^p$ *ssi* $Z \in L^p$.

Exercice 1.2. *Soit* X *une var admettant un moment d'ordre* $n \in \mathbb{N}^*$*. Montrer que* φ_X *est de classe* C^n.

Exercice 1.3.
1) *Soit* X *une var tel que* φ_X *soit de classe* C^2.
a) *On suppose* X *symétrique. Montrer que* $\varphi'_X(0) = 0$*, puis que* $X \in L^2$.
b) *On suppose* X *quelconque. Montrer que* $X \in L^2$.
2) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, X *est de classe* C^{2n} *si et seulement si* $X \in L^{2n}$.

Exercice 1.4 (caractéristique de la transformé de Laplace)**.** *On suppose la notion de fonction holomorphe non connue.*
1) *Soit* τ *une mesure signée finie (i.e. une mesure différence de deux mesures positives finies) sur* $\mathbb{R}^+$*. Soit* $r > 0$ *un réel.*
a) *Montrer que l'on définit une fonction* ψ_r *par* $\psi_r(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(r+z)x}\tau(dx)$*, pour tout* $z \in D_r := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < r\}$.
b) *Montrer que la restriction de* ψ_r *(que l'on note toujours* ψ*) à* $]-r, r[$ *est de classe* C^∞ *et calculer* $\psi_r^{(n)}(0)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
c) *Montrer que pour tout* $z \in D_r$, $\psi_r(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} z^n$.
2) *Soit* μ_1 *et* μ_2 *deux mesures positives finies sur* $\mathbb{R}^+$ *ayant même transformée de Laplace. Pour* $i \in \{1, 2\}$*, on définit une mesure finie* ν_i *par* $\int_0^\infty f(x)\nu_i(dx) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} f(x)\mu_i(dx)$*, pour toute fonction continue bornée* f.
Montrer (en utilisant ψ_r *pour un* $r > 0$ *bien choisi) que* ν_1 *et* ν_2 *ont même transformée de Fourier, puis conclure.*

Chapitre 2

Lois infiniment divisibles, lois stables

2.1 Lois infiniment divisibles

Definition 2.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On dit que μ est infiniment divisible si pour tout $n \geq 1$, il existe une mesure (de probabilité) μ_n telle que $\mu = \mu_n^{*n} = \mu_n * \cdots * \mu_n$.*

Remarque. Si μ est une mesure de probabilité infiniment divisible, alors μ_n est unique.

Clairement, on a

Proposition 2.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) μ est infiniment divisible.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, il existe des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots X_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telles que $X_1 + \cdots + X_n$ soit de loi μ.

(iii) Pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction caractéristique φ_n telle que φ_n^n soit la fonction caractéristique de μ.

Exemples. On se donne X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\mu = \mu_X$. Dans les exemples ci-dessous μ est une loi infiniment divisible et μ_n est la probabilité intervenant dans la Définition 2.1.

1. **Loi gaussienne.** Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On suppose que X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, i.e. μ a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Alors $\mathbb{E}X = m$, $\mathrm{Var}X = \sigma^2$ et $\varphi_X(t) = e^{imt - \sigma^2 t^2/2}$. On prend pour μ_n la loi loi gaussienne $\mathcal{N}(m/n, \sigma^2/n)$.
2. **Loi Gamma**. Soit $\alpha > 0$, $d = 1$. On suppose que X suit une loi Gamma de paramètre α, i.e. μ admet pour densité $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$. Alors

$EX = \alpha$ et $\varphi_X(t) = \left(\frac{1}{1+iu}\right)^\alpha$ (attention à la définition, utiliser le lemme 2.2). On prend pour μ_n la loi Gamma de paramètre α/n.

3. **Loi de Poisson.** Soit $\lambda > 0$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, i.e. pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = r) = \frac{\lambda^r}{r!}\mathrm{e}^{-\lambda}$. Alors $\mathbb{E}X = \mathrm{Var}X = \lambda$ et $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}$. Si μ désigne la loi de X, $\tilde{\mu}(u) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{-u}-1)}$, $u \geq 0$.
4. **Loi de Cauchy.** Soit $a > 0$. On suppose que X suit une loi de Cauchy de paramètre $a > 0$, i.e. μ a pour densité $f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$. Alors $\varphi_X(t)\mathrm{e}^{-a|t|}$. On prend pour μ_n la loi de Cauchy de paramètre a/n.
5. **Loi de Poisson composée.** Soit N une va suivant une loi de Poisson de paramètre λ et (Z_r) une suite de va iid de loi ν, indépendante de N. On pose $X = \sum_{r\geq 0} Z_r \mathbf{1}_{\{N\geq r\}} = \sum_{1\leq r\leq N} Z_r$. Alors $\varphi_X(t) = \sum_{j\geq 0} \frac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}(\varphi_{Z_1}(t))^j = \mathrm{e}^{\lambda(\varphi_{Z_1}(t)-1)} = \exp[\lambda \int_{\mathbb{R}}(\mathrm{e}^{itx} - 1)\nu(dx)]$. Si $Z_1 \geq 0$ p.s. et si μ désigne la loi de X, alors $\tilde{\mu}(u) = \mathrm{e}^{-\lambda(1-\tilde{\nu}(u))}$, $u \geq 0$.

Remarques. Au **3.** on a une loi infiniment divisible non continue et au **4**. une loi infiniment divisible n'ayant pas de moment d'ordre 1.

Pour obtenir d'autres loi infiniment divisibles (en fait toutes, voir le Théoréme 1.5), on peut utiliser le lemme 2.3 ci-dessous dont la preuve repose sur le lemme suivant.

On rappelle que l'on définit la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{e}^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Lemme 2.2 (Lemme de relèvement)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et ne s'annulant pas. Alors il existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, telle que $\varphi = \mathrm{e}^\psi$, de plus si φ est de classe C^k, $k \geq 1$, il en est de même de ψ. Si $\varphi(0) = 1$, il existe une unique solution ψ telle que $\psi(0) = 0$.*

Preuve : On donne une preuve constructive sans utiliser le logarithme complexe. Il suffit de construire $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, telle que $\varphi = \mathrm{e}^{\log|\varphi|+i\theta} \Leftrightarrow \frac{\varphi}{|\varphi|} = \mathrm{e}^{i\theta}$. On pose $\tilde{\varphi} := \frac{\varphi}{|\varphi|}$. On peut supposer que $\tilde{\varphi}(0) = 1$. On construit une suite (t_n) comme suit. On pose $t_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $t_{n+1} = \inf\{t \geq t_n : \tilde{\varphi}(t_n)\tilde{\varphi}(t) = -1\}$, on rappelle que $\inf\emptyset = +\infty$. Remarquer que $(\tilde{\varphi}(t_n)) \subset \{-1, 1\}$. Soit $n \geq 0$. On suppose θ définie en t_n. Pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}[$, il existe un unique $u \in]-\pi, \pi[$ tel que $\varphi(t) = \varphi(t_n)\mathrm{e}^{iu} = \mathrm{e}^{i(\theta(t_n)+u)}$. En fait, puisque $u = 2\arctan(\frac{\sin u}{1+\cos u})$, on a $u = 2\arctan(\frac{\mathrm{Im}\varphi(t)}{\varphi(t_n)+\mathrm{Re}\varphi(t)})$. On pose alors $\theta(t) = 2\arctan(\frac{\mathrm{Im}\varphi(t)}{\varphi(t_n)+\mathrm{Re}\varphi(t)}) + \theta(t_n)$, si $t \in [t_n, t_{n+1}[$ et $\theta(t_{n+1}) = \lim_{t\to t_{n+1}^-} 2\arctan(\frac{\mathrm{Im}\varphi(t)}{\varphi(t_n)+\mathrm{Re}\varphi(t)}) + \theta(t_n) = \theta(t_n) \pm \pi$. □

Lemme 2.3.

(i) Soit μ_1, μ_2 infiniment divisibles, alors $\mu_1 * \mu_2$ est infiniment divisible.

(ii) Soit X une variable aléatoire ayant une loi infiniment divisible. Alors φ_X ne s'annule pas.

(iii) Soit (μ_n) une suite de loi infiniment divisible convergeant étroitement vers μ. Alors μ est infiniment divisible.

Remarque : Le point (i) est équivalent à
(i') Si X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes ayant des lois infiniment divisibles, alors il en est de même de $X_1 + X_2$.
Preuve : (i) découle directement de la remarque.

On montre (ii). Pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction caractéristique φ_n telle que $\varphi_n^n = \varphi_X$, en particulier telle que $|\varphi_n|^2 = |\varphi|^{2/n}$. Soit X_n et $\tilde{X}_n$ deux variables indépendantes de fonction caractéristique φ_n et χ_n la fonction caractéristique de $X_n - \tilde{X}_n$. Alors $\chi_n = |\varphi_n|^2$ et (χ_n) converge simplement vers χ définie par $\chi(t) = 0$ si $\varphi_X(t) = 0$ et $\chi(t) = 1$ si $\varphi_X(t) \neq 0$. Comme φ ne s'annule pas sur un voisinage de 0, donc χ vaut 1 sur ce voisinage et χ donc est continue en 0. D'après le théorème de continuité de Lévy (Proposition 1.5), χ est une fonction caractéristique, donc elle est continue et ne peut qu'être constante égale à 1. En particulier, φ_X ne s'annule pas.

On montre (iii). Soit φ_n la fonction caractéristique de μ_n et φ celle de μ. Par hypothèse φ_n converge simplement vers φ. D'après (ii) et le lemme de relèvement, pour tous $n, p \geq 1$, il existe une unique fonction $\psi_{n,p} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, nulle en 0, telle que $\varphi_n = \mathrm{e}^{p\psi_{n,p}}$ et $\mathrm{e}^{\psi_{n,p}}$ est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité $\mu_{n,p}$. Par unicité $p\psi_{n,p} = \psi_n$. D'après la Proposition 1.5, (φ_n) converge uniformément sur les compacts vers φ. Il résulte de la preuve du Lemme 2.2 qu' il existe un voisinage de 0, sur lequel (ψ_n) converge uniformément. En particulier, $(\mathrm{e}^{\psi_{n,p}})_n$ est équicontinue en 0 et d'après la Proposition 1.4, $(\mu_{n,p})$ admet une sous suite convergeant étroitement vers une mesure de probabilité μ_p telle que $\mu_p^{*p} = \mu$. $\square$

Definition 2.2 (mesures de Lévy)**.** *Soit ν une mesure σ-finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$. On dit que ν est une mesure de Lévy, si $\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \min(\|x\|^2, 1)\nu(dx) < \infty$.*

Remarquer que si ν est une mesure de Lévy sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\}$ alors $\min(\|x\|^2, 1)\nu(dx)$ s'étend en une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, en posant $\nu(0) = 0$.

Proposition 2.4. *Soit ν une mesure de Lévy sur $\mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$. Pour tous $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, la fonction $t \mapsto \exp^{\psi(t)}$, avec*

$$\psi(t) = \psi_{b,c\nu}(t) = ibt - \frac{ct^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \left(\mathrm{e}^{itx} - 1 - itx\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)\nu(dx), \tag{2.1}$$

est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité infiniment divisible.

Preuve : Soit $n \geq 1$, un entier. Alors la mesure $\nu_n(dx) := \mathbf{1}_{\{|x|\geq 1/n\}}\nu(dx)$ est finie. Soit $b_n = b - \int_{1/n<|x|\leq 1} x\nu(dx)$ et

$$\psi_n(t) = ib_n t - \frac{ct^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} (\mathrm{e}^{itx} - 1)\nu_n(dx).$$

Alors e^{ψ_n} est la fonction caractéristique de la somme de deux variables indépendantes suivant une loi gaussienne et une loi de Poisson composé. De plus (e^{ψ_n}) converge simplement vers e^ψ, qui est donc la transformée de Fourier d'une mesure infiniment divisible. $\square$

On veut montrer la réciproque de cette proposition, i.e., que toute mesure de probabilité infiniment divisible admet une transformée de Fourier de la forme e^ψ avec ψ donnée par (2.1), pour un unique triplet $(b, c\nu)$. L'unicité découle du lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soit $b, b' \in \mathbb{R}$, $c, c' \geq 0$ et ν, ν' des mesures de Lévy. Avec les notations de la Proposition 5.9, si $\psi_{b,c,\nu} = \psi_{b',c',\nu'}$, alors $b = b'$, $c = c'$ et $\nu = \nu'$.*

Preuve : Soit b, c, ν comme ci-dessus. La mesure

$$\tau(dx) := \frac{c}{6}\delta_0(dx) + (1 - \frac{\sin x}{x})\nu(dx)$$

est positive finie (remarquer que $0 \leq \int_{-1}^{1}(1 - \cos(xy))dy = 2(1 - \frac{\sin x}{x}) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{3}$) et elle détermine clairement c et ν. Or, un calcul immédiat, montre que $\hat{\tau} = \psi - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\psi(\cdot + t)dt$. Donc $\hat{\tau}$, et ainsi τ, c et ν, sont entièrement déterminés par ψ. Il en est alors de même pour b. $\square$

Lemme 2.6. *Soit μ une mesure de probabilité. Alors μ est infiniment divisible si et seulement s'il existe une suite (μ_n) de lois de Poisson composés convergeant étroitement vers μ.*

Preuve : La suffisance découle du Lemme 2.3. Montrons la nécessité. Soit μ une mesure de probabilité infiniment divisible et $\hat{\mu} = e^\psi$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $e^{\psi/n}$ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité μ_n. Soit ν_n la loi de Poisson composé de paramètre $\lambda = n$ et $\nu = \mu_n$, on a : $\hat{\nu}_n = e^{n(e^{\psi/n}-1)} \to e^\psi = \hat{\mu}$. $\square$

Théorème 2.7 (Lévy-Khintchin)**.** *Une mesure de probabilité μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est infiniment divisible si et seulement s'il existe $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ et ν une mesure de Lévy (uniques) tels que $\hat{\mu} = e^{\psi_{b,c,\nu}}$.*

Preuve : Soit μ infiniment divisible. D'après le Lemme précédent, il existe (μ_n) une suite de lois de Poisson composés convergeant étroitement vers μ. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $b_n \in \mathbb{R}$, $c_n \geq 0$ et ν_n une mesure de Lévy tels que $\hat{\mu}_n = e^{\psi_{b_n,c_n,\nu_n}} = e^{\psi_n}$ et (ψ_n) converge uniformément sur les compacts vers ψ, où $\hat{\mu} = e^\psi$.

Pour tout $n \geq 1$, soit la mesure $\tau_n(dx) := \frac{c_n}{6}\delta_0(dx) + (1 - \frac{\sin x}{x})\nu_n(dx)$. On remarque que $\hat{\tau}_n = \psi_n - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\psi_n(\cdot + t)dt$ et donc que (τ_n) converge étroitement vers une mesure finie τ. On définit alors $c \geq 0$ et une mesure σ telle que $\sigma(\{0\}) = 0$ par $\tau = \frac{c}{6}\delta_0 + \sigma$, puis une mesure σ-finie ν par $\nu(dx) = \frac{1}{1-\frac{\sin x}{x}}\sigma(dx)$, qui est clairement une mesure de Lévy. Alors $\tau(dx) = \frac{c}{6}\delta_0(dx) + (1 - \frac{\sin x}{x})\sigma(dx)$.

On a alors immédiatement le résultat suivant.

Claim. Soit Γ *continue sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $l = \lim_{x\to 0} \frac{\Gamma(x)}{x^2}$ *existe. On pose* $\chi(x) = \frac{\Gamma(x)}{1-\frac{\sin x}{x}}$ *si* $x \neq 0$ *et* $\chi(0) = 6l$. *Alors* χ *est continue bornée et*

$$c_n l + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x)\nu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\tau_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\tau(dx) = cl + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x)\nu(dx).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbf{1}_{[-1,1]} \leq h \leq \mathbf{1}_{[-1-\varepsilon,1+\varepsilon]}$. On applique le Claim avec $\Gamma(x) = \mathrm{e}^{ix} - 1 - ixh(x)$ et $l = 1/2$. On obtient

$$\frac{c_n}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{ix} - 1 - ixh(x))\nu_n(dx) \to \frac{c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{ix} - 1 - ixh(x))\nu(dx).$$

Posons $\tilde{b}_n = b_n + \int_{\mathbb{R}} x(h(x) - \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\nu_n(dx)$. Alors

$$\begin{aligned} i\tilde{b}_n &= \psi_n(1) - \frac{c_n}{2} - \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{ix} - 1 - ixh(x))\nu_n(dx) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(1) - \frac{c}{2} - \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{ix} - 1 - ixh(x))\nu(dx) := i\tilde{b}. \end{aligned}$$

Posons $b = \tilde{b} - \int_{\mathbb{R}} x(h(x) - \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\nu(dx)$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Appliquons le Claim avec $\Gamma(x) = \mathrm{e}^{itx} - 1 - itxh(x)$ et $l = 1/2$. soit χ la fonction correspondante comme dans le claim. Sachant que $\psi_n(t) \to \psi(t)$, il vient.

$$\begin{aligned} 0 &= i\tilde{b}_n t + \frac{c_n t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{itx} - 1 - itxh(x))\nu_n(dx) - \psi_n(t) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} i\tilde{b}t + \frac{ct^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{itx} - 1 - itxh(x))\nu(dx) - \psi(t) \\ &= ibt + \frac{ct^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{itx} - 1 - itx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\nu(dx) - \psi(t) = 0, \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve. □

Pour des lois infiniment divisibles portées par $\mathbb{R}^+$, on a le résultat suivant.

Proposition 2.8. *Soit* μ *une mesure de probabilité sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. *Alors* μ *est infiniment divisible si et seulement s'il existe* $b \geq 0$ *et une mesure de Lévy* ν *sur* $]0, +\infty[$ *vérifiant* $\int_{]0,1]} x\mu(dx) < \infty$, *tel que*

$$\tilde{\mu}(\lambda) = \mathrm{e}^{-\left(b\lambda + \int_{]0,+\infty[}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\nu(dx)\right)}.$$

On laisse la preuve au lecteur.

2.2 lois stables

Rappelons le TCL classique.

Théorème 2.9. *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires réelles iid telle que* $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$*. Alors* $(X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *où,* $m = \mathbb{E}(X_1)$ *et* $\sigma^2 = V(X_1)$*.*

Plus généralement on s'intéresse aux variables X dont la loi est limite d'une suite de variables aléatoires de la forme $(X_1 + \ldots + X_n - a_n)/b_n$ où (X_n) est iid et (a_n), (b_n) sont des suites déterministes avec $b_n > 0$.

Les lois qui sont obtenues par ce procédé sont appelées *stables*. On peut démontrer que X suit une loi stable si et seulement s'il existe des suite (c_n) et (d_n) déterministes, telles que $c_n > 0$ et pour toutes copies indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de X, $X_1 + \ldots + X_n$ a même loi que $c_n X + d_n$. Une loi stable est donc infiniment divisible.

Lorsque $d_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, on dit que X suit une loi *stable stricte*. Les lois strictement stables sont infiniment divisibles. Remarquons, que si X suit une loi stable et que X' est une copie indépendante de X alors la variable symétrisée $X - X'$ suit une loi stable stricte.

On peut montrer que si X suit une loi stable, $c_{mn} = c_m c_n$ et donc que $c_n = \sigma n^{1/\alpha}$ pour un certain $\sigma > 0$ et un $\alpha > 0$ dont on peut établir qu'en fait $\alpha \leq 2$.

On a alors.

Théorème 2.10. *Soit* μ *une loi stable de paramètre* $\alpha \in]0, 2]$*. Alors*

(i) Si $\alpha = 2$*, la mesure de Lévy* ν *est nulle et* μ *est une loi normale.*

(ii) Si $\alpha \neq 2$*, alors* $c = 0$ *et il existe* $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ *avec* $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ *tels que* $\nu(dx) = \frac{\alpha_1}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)dx + \frac{\alpha_2}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)dx$*.*

Preuve : Comme μ est stable elle est infiniment divisible, donc il existe $\psi_{b,c,\nu}$ telle que $\hat{\mu} = \mathrm{e}^{\psi_{b,c,\nu}}$. De plus, par définition, il existe $\sigma > 0$, $\alpha \in]0, 2]$ et $d_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\psi_{nb,nc,n\nu} = \psi_{d_n + n^{1/\alpha} b, n^{2/\alpha} c, \nu \circ S^{-1}_{n^{1/\alpha}}},$$

où $S_y(x) = yx$. D'après le Lemme 2.5, $n^{2/\alpha} c = nc$ et $n\nu = \nu \circ S^{-1}_{n^{1/\alpha}}$.

Donc, si $\alpha \neq 2$, $c = 0$. Posons pour $x > 0$, $F(x) = \nu([x, +\infty])$. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x > 0$, on a $nF(x) = F(x/n^\alpha)$. Donc, prenant $x = n^\alpha$, $F(n^\alpha) = F(1)/n$, puis prenant $x = k^\alpha$, $F((k/n)^\alpha) = kF(1)/n$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et comme F est continue à droite, il vient, $F(x) = F(1)/x^\alpha$, ce qui prouve que ν admet la densité désirée. Comme $\int_{[0,1]} x^2 \nu(dx) < \infty$, il vient que $\nu = 0$ si $\alpha = 2$. $\square$

Dans le cas $\alpha < 2$, la fonction caractéristique d'un variable α-stable peut être précisée.

Théorème 2.11. *Soit $0 < \alpha \leq 2$. Une variable aléatoire X est α-stable si et seulement si il existe $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\nu \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

(i) pour $\alpha = 2$, $\hat{\mu}(t) = \exp(i\nu t - \sigma^2 t^2/2)$,

(ii) pour $\alpha \neq 1, 2$, $\hat{\mu}(t) = \exp[i\nu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \mathrm{sgn}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))]$,

(ii) pour $\alpha = 1$, $\hat{\mu}(t) = \exp[i\nu t - \sigma|t|(1 - \frac{2i\beta}{\pi}\mathrm{sgn}(t) \log |t|]$.

En particulier, toute mesure de probabilité α-stable admet une densité.

On admet ce théorème. Le résultat final découle de l'intégrabilité de $\hat{\mu}$. Remarquons que si μ est symétrique alors $\hat{\mu}(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha)$.

Exemples.

1. Loi gaussienne. $\alpha = 2$, $\mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$.

2. Loi de Cauchy. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\mu(dx) = \frac{\sigma dx}{\pi[(x-\nu)^2+\sigma^2]}$.

3. Loi de Lévy. $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ $\mu(dx) = \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{1/2} \dfrac{\exp[\frac{-\sigma}{2(x-\nu)}]}{(x-\nu)^{3/2}} \mathbf{1}_{\{x>\nu\}} dx.$

On s'intéresse maintenant aux lois α-stables strictes portées par $[0, +\infty[$. On va utiliser la transformée de Laplace.

Soit μ une mesure de probabilité portée par $[0, +\infty[$. On définit sa transformée de Laplace L_μ sur $[0, +\infty[$, par $L_\mu(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mu(dx)$. La transformée de Laplace partage certaines propriétés avec la transformée de Fourier, en particulier elle caractérise μ. Elle est de plus de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Soit μ une mesure α-stable stricte portée par $[0, +\infty[$. Alors, pour tout $t \geq 0$, $(L_\mu(t))^n = L_\mu(n^{1/\alpha}t)$, ce qui entraîne que $L_\mu(t) = \mathrm{e}^{-t^\alpha}$. Or, la transformée de Laplace d'une mesure décroît vers 0 en $+\infty$ au plus exponentiellement. Donc $\alpha \in]0, 1]$.

2.3 Semi-groupe de convolution

Definition 2.3. *On appelle semi-groupe de convolution (sur $\mathbb{R}^d$) une famille de mesures de probabilités $(\mu_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $s, t \geq 0$, $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$. On dit que $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est mesurable si pour tout borélien A, l'application $t \to \mu_t(A)$ est mesurable. On dit que $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est continue pour la topologie de la convergence étroite si pour toute fonction continue bornée f, $\mu_t(f) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mu_0(f)$.*

Remarquons que si $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de convolution alors $\mu_0 = \delta_0$ et que la définition est équivalente à $\hat{\mu}_{s+t} = \hat{\mu}_s \hat{\mu}_t$. On a défini ci-dessous la continuité en 0 du semi-groupe. Vérifier que cela implique la continuité en tout point et que la définition de la continuité est équivalente à : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\hat{\mu}_t(u) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \hat{\mu}_0(u) = 1$.

On a la relation suivante entre loi infiniment divisible et semi-groupe de convolution.

Proposition 2.12. *On a :*

(i) Soit $(\mu_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de convolution. Alors pour tout $t \geq 0$, μ_t est infiniment divisible.

(ii) A toute mesure de probabilité infiniment divisible on peut associer un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t\geq 0}$ tel que $\mu_1 = \mu$. De plus $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est unique si l'on requiert qu'il soit mesurable.

Preuve. Pour tout $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_t = (\mu_{t/n})^{*n}$, ce qui prouve (i).
Soit μ une mesure de probabilité infiniment divisible, alors $\hat{\mu} = \mathrm{e}^{\psi_{b,c,\nu}}$ et pour tout $t \geq 0$, $t\psi_{b,c,\nu} = \psi_{tb,tc,t\nu}$. Soit μ_t la mesure de probabilité donnée par $\hat{\mu}_t = \mathrm{e}^{\psi_{tb,tc,t\nu}}$. Alors, pour tout $s, t \geq 0$, $\hat{\mu}_s\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_{s+t}$, ce qui prouve la première partie de (ii).

Montrons l'unicité dans le cas mesurable. Soit $(\mu_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de convolution mesurable tel que $\mu_1 = \mu$. D'après (i) et le théorème de Lévy-Khintchin il existe des fonctions ψ_t telles que $\hat{\mu}_t = \mathrm{e}^{\psi_t}$ et $\psi_{s+t} = \psi_s + \psi_t$. De plus, d'après le Lemme 2.5, ψ_1 est entièrement déterminée par μ. On conclut alors avec le lemme ci-dessous. □

Lemme 2.13. *Soit χ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi(s+t) = \chi(s) + \chi(t)$, pour tout $s, t \geq 0$. Alors $\chi(t) = t\chi(1)$, pour tout $t \geq 0$.*

Preuve (inspirée de Sierpinski) : Un calcul classique montre que $\chi(x) = x\chi(1)$, pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$. Posons $\rho(t) = \chi(t) - t\chi(1)$. Alors ρ est nulle sur $\mathbb{Q}^+$, montrons qu'elle est nulle sur $\mathbb{R}$. Soit $A = \{t \geq 0 \ : \ \rho(t) > 0\}$ et λ la mesure de Lebesgue. Alors A est mesurable. Supposons que $\lambda(A) > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\lambda(A_n) > 0$, où $A_n = A \cap [0, n]$. Posons $B_n = \{2n - t \ : \ t \in A_n\}$. Alors $\lambda(B_n) = \lambda(A_n) > 0$ et pour tout $t \in B_n$, $\rho(t) < 0$. Soit $f := \mathbf{1}_{-A_n} * \mathbf{1}_{B_n}$. Alors f est continue, positive et non identiquement nulle. Il existe donc $x \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) > 0$, en particulier, il existe $(s, t) \in (-A_n) \times B_n$ tel que $x = t - s \geq 0$. Donc $0 < \rho(s) = \rho(s) + \rho(t - s) = \rho(t) < 0$, contradiction. Donc $\rho = 0$ λ-p.p., donc partout (en utilisant l'argument de convolution précédent. □

Le résultat suivant découle de la Proposition 2.12 et de sa preuve.

Corollaire 2.14. *Soit $(\mu_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de convolution. Si $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est mesurable, il est continue pour la topologie de la convergence étroite.*

2.4 Exercices

Exercice 2.1. *Soit μ une loi infiniment divisible. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une* unique *mesure μ_n telle que $\mu_n^{*n} = \mu$. En déduire que si μ est symétrique, alors μ_n est symétrique, de même que ν.*

Exercice 2.2. *Soit μ une loi infiniment divisible et $n \geq 1$. Montrer que μ admet un moment d'ordre $2n$ ssi $\int_{\{|x|\geq 1\}} |x|^{2n}\nu(dx) < \infty$.*

Exercice 2.3. *Soit μ une loi infiniment divisible portée par $\mathbb{R}^+$. Montrer la Proposition 2.8 (on montrera que, si $\mu_n^{*n} = \mu$ les mesures $(n((1-\mathrm{e}^{-x})\mu_n(dx))_n$ forment une famille tendue).*

Exercice 2.4. *Montrer que la loi de Cauchy $\mu(dx) = \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$ est une loi stable et identifier la mesure ν correspondante (dans la décomposition de Lévy-Khintchin).*

Chapitre 3

Processus et martingales à temps continu

3.1 Processus et filtrations

Dans ce chapitre, on rappelle (ou introduit) quelques notions et résultats concernant les processus et martingales à temps continu, qui nous seront utiles par la suite.

Definition 3.1. *On appelle processus d'espace détats $(E, \mathcal{E})$ toute famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définies sur un même espace de probabilité et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.*

On prendra généralement $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{T} = [s, t]$ $(0 \leq s < t)$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesuré. Prenons pour T l'un des exemples ci-dessus. Alors, on appelle filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ de sous-tribu de $\mathcal{F}$, i.e. $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Etant donné un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on lui associe sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ définie par $\mathcal{F}_t^0 = \sigma\{X_s,\ s \leq t\}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Si $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on lui associe deux filtrations comme suit

$$\mathcal{F}_t^- = \vee_{s<t}\mathcal{F}_s \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_t^+ = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s \qquad \forall t \in \mathbb{T},$$

et on dit que $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite (resp. à gauche) si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ (resp. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^-$), pour tout $t \in \mathbb{T}$. Enfin, si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_\infty := \vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$.

Notons que la notion de continuité à droite de $(\mathcal{F}_t^0)$ n'est pas lié à la continuité à droite des trajectoires du processus (X_t).

Definition 3.2. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définis respectivement sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ et admettant le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$. Ces processus sont dits équivalents si pour tout $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$,*

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n) = \mathbb{P}'(X'_{t_1} \in A_1, \ldots, X'_{t_n} \in A_n).$$

On dit aussi que chacun des processus est une version *de l'autre.*

On dit aussi que $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ont même lois fini-dimensionnelles.

Definition 3.3. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et admettant le même espace d'états $(E, \mathcal{E})$. On dit qu'ils sont des modifications l'un de l'autre si pour tout $t \in T$, $X_t = X'_t$ $\mathbb{P}$-p.s. et qu'ils sont indistinguables s'il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout $t \in \mathbb{T}$, $X_t(\omega) = X'_t(\omega)$.*

Lorsque $\mathbb{T}$ est dénombrable, ces deux notions sont les mêmes, mais ce n'est pas le cas en général. De même, lorsque $\mathbb{T}$ est dénombrable, un processus est "entièrement déterminé" par ses lois fini-dimensionnelles, mais il n'en est rien en général.

3.2 Processus canoniques

Soit $(E, \mathcal{E})$ un ensemble mesurable. On définit les *applications coordonnées* sur $E^{\mathbb{T}}$ (à valeurs dans $E, \mathcal{E})$) par $Y_t(\sigma) = \sigma_t$, où $\sigma = (\sigma_u)_{u\in\mathbb{T}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{T}}$ et on muni $E^{\mathbb{T}}$ de la plus petite tribu, notée $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$, rendant mesurables les applications coordonnées. C'est aussi la tribu engendrée par les ensembles $\prod_{t\in\mathbb{T}} A_t$ où $A_t \in \mathcal{E}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, et les A_t sont tous égaux à E sauf pour un ensemble fini d'indices.

Soit alors $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On définit une application mesurable $\psi \ : \ \Omega \to E^{\mathbb{T}}$ par $\psi(\omega) = (X_t(\omega))_{t\in\mathbb{T}}$ et on note $\mathbb{P}_X$ la mesure image de P par ψ, i.e. si $\Gamma \in \mathcal{E}^{\otimes\mathbb{T}}$ est comme ci-dessus, $\mathbb{P}_X(\Gamma) = \mathbb{P}(\psi^{-1}(\Gamma))$.

Soit $t_1, \ldots t_n \in \mathbb{T}$ et $A_{t_1}, \ldots A_{t_n} \in \mathcal{E}$. Posons $A_t := E$ si $t \in \mathbb{T}\backslash t_1, \ldots, t_n$ et $\Gamma := \prod_{t\in\mathbb{T}} A_t$. On a :

$$\mathbb{P}_X(Y_{t_1} \in A_{t_1}, \ldots, Y_{t_n} \in A_{t_n})\mathbb{P}_X(\Gamma) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_{t_1}, \ldots, X_{t_n} \in A_{t_n})$$

En particulier $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une version, dite *version canonique*, de $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$. On dit que P_X est la loi de $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et donc, tous processus versions l'un de l'autre ont même loi.

Dans le cas où E est un espace métrique séparable (muni de sa tribu borélienne), $\mathbb{T}$ est un interval de $\mathbb{R}$ et où $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ à des trajectoires $\mathbb{P}$-p.s. continues (i.e. il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue) on peut prendre dans la construction précédente $C(\mathbb{T}, E)$ (l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{T}$ dans E) au lieu de $E^{\mathbb{T}}$ (qui s'identifie à l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{T}$ dans E).

On obtient ainsi des versions canoniques continues (ce qui n'a aucune raison d'être sinon).

De même, beaucoup de processus ont des trajectoires $\mathbb{P}$-p.s. continues à droites et limitées à gauche, dites cadlag, et l'on peut alors considérer $D(\mathbb{T}, E)$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{T}$ dans E, continues à droite et limitée à gauche. Notons que la notion de processus cadlag est conventionnelle, mais dans la plupart des cas on pourrait parler de processus caglad.

Sur chacun des espaces, $E^{\mathbb{R}^+}$, $C(\mathbb{R}^+, E)$ et $D(E, \mathbb{R}^+)$, on définit une famille de transformations $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ par $\theta_t(\omega) = (\omega_{u+t})_{u\in\mathbb{R}^+}$. Ces transformations sont mesurables et sont appelées opérateurs de *décalages* (ou *shift*). On a alors, $Y_s \circ \theta_t = Y_{s+t}$ et $\theta_{s+t} = \theta_s \circ \theta_t$.

3.3 Temps d'arrêts

Definition 3.4. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une filtration. On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté si, pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. On dit qu'une variable aléatoire $T \ : \ \Omega, [0, +\infty]$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si $\{T \leq t\}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarquer que l'on autorise T à valoir $+\infty$.

Proposition 3.1. *Tout temps d'arrêt est la limite décroissante d'une suite de temps d'arrêt ne prenant chacun qu'un nombre fini de valeurs.*

Preuve : Soit $k \geq 1$. Posons $T_k = +\infty$ si $T \geq k$ et, pour tout entier $1 \leq q < k2^k$, $T_k = q/2^k$ si $(q-1)/2^k \leq T < q/2^k$. On voit facilement que (T_k) convient. $\square$

Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté et T un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)$. On définit sur l'ensemble $\{T < \infty\}$ une application notée X_T définie par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

En général, (lorsque T prend une infinité non dénombrable de valeurs) X_T n'a aucune raison d'être mesurable, mais on a

Proposition 3.2. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté, dont les trajectoires sont $\mathbb{P}$-p.s. continues à droite ou à gauche. Soit T un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)$. Alors, X_T est une variable aléatoire, mesurable (sur $\{T < \infty\}$) relativement à la filtration $\mathcal{F}_T$ définie ci-dessous.*

Definition 3.5. *Soit T un temps d'arrêt relativement à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. On définit une filtration $\mathcal{F}_T$ comme suit*

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty \ : \ \forall t \in \mathbb{R}^+, \ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

3.4 Martingales

On suppose ici que $\mathbb{T}$ est un intervalle de $\mathcal{N}$ ou $\mathbb{R}^+$.

Definition 3.6. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus à valeurs réelles, $(\mathcal{F}_t)$-adapté. On dit que c'est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ si*
(i) $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$, pour tout $t \in \mathbb{T}$;
(ii) $X_s \le \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ a.s., pour tout $s < t$ dans $\mathbb{T}$.
On dit que c'est une sur-martingale si $(-X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une sous-martingale et que c'est une martingale si c'est à la fois une sous et une sur-martingale.

En particulier, $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale ssi $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ et si pour tout $s < t$ dans $\mathbb{T}$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbb{E}(X_t\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X_s\mathbf{1}_A)$.

Dans cette définition, l'espace de probabilité sous-jacent et la filtration sont très importants. Notons que si $(X_t)_{t\in T}$ est une martingale relativement à une certaine filtration il en est une aussi relativement à sa filtration naturelle.

Dans cette section on s'intéresse surtout aux martingales, mais leur étude peut faire apparaître naturellement des sous-(sur-)martingales. Par exemple, si $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale et φ est convexe alors, par l'inégalité de Jensen (pour l'espérance conditionnelle), $(\varphi(X_t))$ est une sous-martingale.

Dans ce qui suit on énonce des résultats sans démonstration, car leur preuve utilise des résultats analogues en temps discret, couplés à un argument de continuité.

Théorème 3.3 (Doob's maximal inequality)**.** *Soit $\mathbb{T}$ un intervalle réel et $(X_t)_{t\in T}$ un processus continu à droite. Supposons que (X_t) est une martingale ou une sous-martingale positive. Alors $X^* := \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t|$ définit une variable aléatoire et*

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mathbb{P}(X^* \ge \lambda) \le \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}(|X_t|^p), \qquad \textit{pour tout } p \ge 1 \ ;$$
$$\|X^*\|_p \le \frac{p}{p-1} \sup_{t\in\mathbb{T}} \|X_t\|_p.$$

Remarque : Si $\mathbb{T} = [0, A]$, on a aussi, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,A]} |X_t| \ge \lambda) \le \mathbb{E}(|X_A|\mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,A]}|X_t|\ge\lambda}).$$

On rappelle le lemme des montées de Doob, sous une forme légèrement plus générale.

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur un sous-ensemble $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}$. Soit $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{T}$ et $a < b$ des réels.

On définit par récurrence une suite (stationnaire) (s_n), par $s_0 = 0$, $s_{2n+1} = \int\{t_i > s_{2n} \ : \ f(t_i) < a\}$ et $s_{2n+2} = \int\{t_i > s_{2n+1} \ : \ f(t_i) > b\}$. On convient que $\inf \emptyset = t_d$.

Posons, $F = \{t_1, \ldots, t_d\}$ et notons $\tilde{U}(f, F, [a,b]) = \sup\{n \ : \ s_{2n} < t_d\}$. Enfin on note $U(f, \mathbb{T}, [a,b]) = \sup\{D(f, F, [a,b]) \ : \ F \subset \mathbb{T}, \text{ fini}\}$.

On remarquera que $U(f, \mathbb{T}, [a,b])$ est fini pour toute paire $\{a,b\}$ de rationnels, si et seulement si f n'admet pas de discontinuité de seconde espèce sur $\mathbb{T}$.

On a alors (voir le cours de deuxième année)

Proposition 3.4. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une sous-martingale, avec $\mathbb{T}$ dénombrable. Pour tout $a, b \in \mathbb{T}$, on a :*

$$(b-a)\mathbb{E}(D(X, \mathbb{T}, [a,b]) \leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}((X_t - b)^+).$$

Théorème 3.5. *soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale. Il existe $\omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, et tout $t \in \mathbb{R}^+$ les limites $\lim_{r\uparrow t,\ r\in\mathbb{Q}} X_t$ et $\lim_{r\downarrow t,\ r\in\mathbb{Q}} X_t$ existent.*

On en déduit le

Théorème 3.6. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ une sous-martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)$) continue à droite en probabilité. Alors $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ admet une modification cadlag qui est une martingale (par rapport à la même filtration).*

Remarque : le théorème reste vrai si l'on remplace l'hypothèse de continuité à droite de la martingale par : la continuité à droite de la filtration et de l'application $t \to \mathbb{E}(X_t)$.

On pourra donc dorénavant considérer des martingales continues à droite (p.s.) et par exemple utiliser le théorème 3.3.

3.5 Exercices

Exercice 3.1. *Soit S et T des temps d'arrêts relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.*
1) *Montrer que pour tout $t > 0$, $\{T < t\}$, $\{T = t\}$, $\{T \geq t\}$ sont dans $\mathcal{F}_t$.*
2) *Montrer que $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont des temps d'arrêts relativement à $(\mathcal{F}_t)$.*
3) *Montrer que $\{S = T\}$, $\{S \leq T\}$ et $\{S > T\}$ sont dans $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.*
4) *Soit (T_n) une suite de temps d'arrêts relativement à $(\mathcal{F}_t)$.*
a) *Montrer que $\sup_n T_n$ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.*
b) *On suppose (F_t) continue à droite montrer que $\inf_n T_n$, $\limsup_n T_n$ et $\liminf T_n$ sont des $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêts.*

Exercice 3.2.
1) *Prouver le théorème 3.3 à l'aide de la remarque suivant le théorème.*
2) *Montrer similairement que sous les hypothèses du théorème 3.3 on a*

$$\|X^*\|_1 \leq C(1 + \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}(|X_t| \log^+ |X_t|).$$

On pourra utiliser, après l'avoir démontrer, l'inégalité de convexité $a \log b \leq a \log^+ a + b/\mathrm{e}$, $a, b > 0$ *(distinguer* $a \leq 1$ *et* $a > 1$*).*

Exercice 3.3. 1) *Soit* $p \geq 1$ *et* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ *une filtration. On note* H^p *(resp.* $\mathbb{H}^p$*) l'espace des martingales continues (resp. continues à droites) relativement à* $(\mathcal{F}_t)$*, telle que* $X^* := \sup_{t \geq 0} |X_t| \in L^p$*. Montrer que, muni de la norme* $\|(X_t)\|_{H^p} := \|X^*\|_p$*, ces espaces sont des espaces de Banach, en particulier* H^p *est fermé dans* $\mathbb{H}^p$*.*
2) *Montrer que pour* $p > 1$, $N_p((X_t)) := \sup_{t \geq 0} \|X_t\|_p$ *définit une norme équivalente à* $\| \cdot \|_{H^p}$*.*

Chapitre 4

Processus de Markov

Dans cette section on étudie des processus qui généralisent au temps continu la notion de chaîne de Markov. Comme dans le cas des chaînes de Markov, ces processus seront caractérisés par le fait que pour prédire le futur, sachant le passé, il suffit de connaître le présent.

De même que les marches aléatoires sont des chaînes de Markov particulières, les processus de Lévy sont des processus de Markov particuliers.

4.1 Définition

Definition 4.1. *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesuré. On appelle probabilité de transition sur $(E, \mathcal{E})$, tout noyau de transition N vérifiant, $N(x, E) = 1$ pour tout $x \in E$.*

On rappelle que la définition d'un noyau de transition est donnée par Definition 5.2. La notion de probabilité de transition généralise celle de matrice stochastique (ou matrice de transition).

Un noyau de transition agit naturellement (à gauche) sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables positives par

$$N(f)(x) = \int_E f(y) N(x, dy) \qquad \forall x \in E.$$

Lorsque N est une probabilité de transition, la formule précédente définit un opérateur sur l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables bornées.

Etant donné deux noyaux M et N sur $(E, \mathcal{E})$, on définit un nouveau noyau MN par

$$MN(x, A) := \int_E M(x, dy) N(y, A) \qquad \forall (x, A) \in E \times \mathcal{E}. \tag{4.1}$$

On vérifiera que MN est bien un noyau de transition et que, si M et N sont des probabilités de transition il en est de même de MN.

Dans le cas particulier où $M(x, dy) = \nu(dy)$ pour tout $x \in E$, on voit que (4.1) définit une action de N (à droite) sur l'ensemble des mesures positives.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, pour lequel (par analogie avec les chaînes de Markov) il existe pour tout $t > s \geq 0$ une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \sigma X_u, \ u \leq s) = P_{s,t}(X_s, A) \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

On déduit alors automatiquement que pour toute fonction f $\mathcal{E}$-mesurable positive, $\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma X_u, \ u \leq s) = P_{s,t}f(X_s)$.

Alors pour tout $s < t < v$, on doit avoir

$$\begin{aligned} P_{s,v}(X_s, A) &= P(X_v \in A | \sigma X_u, \ u \leq s) = P(X_v \in A | \sigma X_u, \ u \leq t | \sigma X_u, \ u \leq s) \\ &= \mathbb{E}(P_{t,v}(X_t, A) | \sigma X_u, \ u \leq s) = \int_E P_{s,t}(X_s, dy) P_{t,v}(y, A). \end{aligned}$$

Ceci nous amène à la définition suivante.

Definition 4.2 (Equations de Chapman-Kolmogorov)**.** *Une famille* $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ *de noyaux de transition sur* $(E, \mathcal{E})$ *est appelé une* fonction de transition *si pour tous* $s < t < u$,

$$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}.$$

Definition 4.3. *Un fonction de transition* $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ *est dite homogène si* $P_{s,t}$ *ne dépend de* s *et* t *que par la différence* $t - s$*. Alors, si l'on note* $P_t := P_{0,t}$*, les équations de Chapman-Kolmogorov se réécrivent*

$$P_{s+t} = P_s P_t,$$

en particulier $(P_t)_{t \geq 0}$ *est un semi-groupe.*

Remarque : si $(\mu_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$, alors $P_t(x, A) = \mu_t(A - x)$, définit une fonction de transition. D'autres exemples de fonctions de transition sont donnés en exercice.

On peut maintenant définir un processus de Markov. Notons que la fonction de transition permet de connaître X_t sachant X_s, pour tout $t > s$, il est donc nécessaire de connaître X_0 pour retrouver tout le processus à partir de $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$.

Definition 4.4. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *est un processus de Markov par rapport à la filtration*

$(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *de fonction de transition* $(P_{s,t})0 \leq s < t$, *si pour toute fonction* $\mathcal{E}$*-mesurable positive et pour tout* $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s) \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{4.2}$$

La mesure de probabilité $X_0(\mathbb{P})$ *est appelée* mesure initiale *de* $(X_t)_{t\geq 0}$. *Le processus est dit* homogène *si la fonction de transition l'est, et dans de cas, l'égalité précédente s'écrit*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = P_{t-s}f(X_s) \qquad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

Etant donné un processus de Markov sur $(E, \mathcal{E})$, E est appelé l'espace des états du processus.

On voit à partir de la definition qu'un processus de Markov relativement à une filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ est automatiquement un processus de Markov relativement à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t) = (\sigma\{X_u,\ u \leq t\})$. Dans ce cas on parlera de Processus de Markov sans mentionné la filtration.

Comme dans le cas des chaînes de Markov, l'existence d'un processus de Markov de probabilité initiale et de fonction de transition données, résulte du théorème d'extension de Kolmogorov. La proposition suivante permet cette opération.

Proposition 4.1. *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Markov (sur* $(E, \mathcal{E})$*) de mesure initiale* ν *et de fonction de transition* $(P_{s,t})$, *si et seulement si pour tous* $0 = t_0 < \ldots < t_k$ *et toutes fonctions* $\mathcal{E}$*-mesurables positives* $f_0, \ldots, f_k$,

$$\mathbb{E}\big(\prod_{i=0}^{k} f_i(X_i)\big) = \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{0,t_1}(x_0, dx_1) f_1(x_1) \ldots \int_E P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1}, dx_k) f_k(x_k).$$

Preuve : supposons que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov comme ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})\big) &= \mathbb{E}\big(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i})\mathbb{E}(f_k(X_{t_k})|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\big) \\ &= \mathbb{E}\big(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) P_{t_{k-1},t_k} f_k(X_{t_{k-1}})\big),\end{aligned}$$

et on conclut par une récurrence immédiate.

Réciproquement, montrons qu'un processus vérifiant les égalités ci-dessus, est un processus de Markov. Soit $0 \leq s < t$. On veut montrer (4.2). Il suffit d'établir que pour tous $t_1 < \ldots < t_k \leq s < t$ et toutes fonctions $f_1, \ldots, f_k, g$ $\mathcal{E}$-mesurables positives

$$\mathbb{E}\big(\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{t_i}) g(X_t)\big) = \mathbb{E}\big(\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i}) P_{s,t} g(X_s)\big). \tag{4.3}$$

On peut toujours supposer $t_k = s$. Alors l'égalité (4.3) découle des égalités de l'énoncé de la proposition appliquées à chaque membre de (4.3). $\square$

Dans le théorème qui suit $\Omega := E^{\mathbb{R}^+}$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$, $(X_t)_{t\geq 0}$ est le processus coordonnées sur Ω (i.e. $X_t(\omega) = \omega_t$, où $\omega = (\omega_s)_{s\geq 0} \in \Omega$) et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle asoociée à $(X_t)_{t\geq 0}$.

De plus, on suppose dans ce théorème que E est un espace polonais muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$.

Théorème 4.2. *Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathcal{E}$ et $(P_{s,t})_{0\leq s<t}$ une fonction de transition sur $(E, \mathcal{E})$. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}_\nu$ sur $\mathcal{F}$ tel que $(X_t)_{t\geq 0}$ soit un processus de Markov sur $(E, \mathcal{E})$ de fonction de transition $(P_{s,t})_{0\leq s<t}$ et de probabilité initiale μ.*

Preuve : la proposition précédente nous indique comment construire une probabilité sur $\mathcal{E}_{t_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}_{t_k}$, pour tous $t_1 < \ldots < t_k$. On étend alors ces probabiltés à $\mathcal{F}$, grâce au théorème de Kolmogorov. $\square$

Le processus de Markov construit dans le théorème est appelé processus de Markov canonique associé à ν et $(P_{s,t})_{0\leq s<t}$.

On ne s'intéresse dorénavant qu'aux processus de Markov homogènes, auquel cas on a

$$\mathbb{P}_\nu(X_0 \in A_0,\ X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_k} \in A_k) =$$
$$\int_{A_0} \nu(dx_0) \int_{A_1} P_{t_1}(x_0, dx_1) \int_{A_2} P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \ldots \int_{A_k} P_{t_k - t_{k-1}}(x_{t_{k-1}}, dx_{t_k}). \tag{4.4}$$

Fixons une fonction de transition $(P_t)_{t\geq 0}$ sur $(E, \mathcal{E})$. On a vu que pour toute mesure de probabilité, on peut définir une mesure de probabilité $\mathbb{P}_\nu$ sur $\mathcal{F}$. On note alors $\mathbb{E}_\nu$ l'espérance correspondante. En particulier, pour tout $x \in E$, prenant $\mu = \delta_x$, on peut définir une probabilité $\mathbb{P}_{\delta_x}$ que l'on notera plutot $\mathbb{P}_x$ (et $\mathbb{E}_x$ l'espérance associée). En particulier, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_x(X_t \in A) = P_t(x, A)$ et $x \mapsto \mathbb{P}_x(X_t \in A)$ est $\mathcal{E}$-mesurable. Plus généralement on a

Proposition 4.3. *Soit Z une variable $\mathcal{F}$-mesurable positive. L'application $x \mapsto \mathbb{E}_x(Z)$ est $\mathcal{E}$-mesurable est pour toute mesure νsur $\mathcal{E}$, on a :*

$$\mathbb{E}_\nu(Z) = \int_E \nu(dx)\mathbb{E}_x(Z).$$

Pour tout $t \geq 0$ on définit une application θ_t sur $\Omega = E^{\mathbb{R}^+}$, par $\theta_t((\omega_s)_{s\geq 0}) = (\omega_{s+t})_{s\geq 0}$, de sorte que pour tout $s, t \geq 0$, $X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$. Alors θ_t est mesurable et $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}$. On appelle les opérateurs θ_t des opérateurs de décalage.

On peut alors énoncer la propriété de Markov.

Proposition 4.4 (Propriété de Markov). *Soit Z une variable $\mathcal{F}$-mesurable positive. Pour tout $t > 0$ et toute mesure initiale ν,*

$$\mathbb{E}_\nu(Z \circ \theta_t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{X_t}(Z) \qquad \mathbb{P}_\nu\text{-}a.s.$$

Preuve : Il suffit d'établir que pour toute fonction $\mathcal{F}_t$-mesurable g, $\mathbb{E}_\nu(Z \circ \theta_t g) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_{X_t}(Z)g)$. Le résultat pour $Z = \prod_{i=1}^k f_i(X_{t_i})$ $(t_1 < \dots t_k)$ et $g = \prod_{i=1}^l g_i(X_{s_i})$ $(s_1 < \dots s_k \leq t)$ découle directement de la Proposition 4.1 et le résultat général s'ensuit par un argument de classe monotone. □

4.2 Les processus de Feller

Dans cette section on considère des fonctions de transition (homogène) continue à droite en 0, ce qui aura notamment pour conséquence la propriété càdlàg pour le processus associé.

Dans tout cette partie E est un espace localement compact à base dénombrable, $C_0(E)$ dénote l'espace de Banach (pour la norme uniforme) des fonctions continues de nulle en l'infini sur E et $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne sur E.

Definition 4.5. *On appelle* semi-groupe de Feller *sur $C_0(E)$, toute famille $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs positifs sur $C_0(E)$ tels que*

(a) $T_0 = Id$ et $\|T_t\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.
(b) $T_{s+t} = T_s \circ T_t$, pour tout $s, t \geq 0$.
(c) $\lim_{t\to 0^+} \|T_t f - f\| = 0$ pour tout $f \in C_0(E)$.

On rappelle que la norme (norme d'opérateur ou norme triple, parfois notée $|||\cdot|||$) apparaissant au (a), est donnée par $\|T_t\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|T_t f\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|T_t f\|_\infty$.

La notion de semi-groupe de Feller se justifie (pour nous) par le résultat suivant

Proposition 4.5. *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur $C_0(E)$. Alors il existe une unique fonction de transition homogène $(P_t)_{t\geq 0}$ telle que pour tout $f \in C_0(E)$ et tout $x \in E$, $P_t f(x) = T_t f(x)$.*

Preuve : Soit $t \geq 0$ et $x \in E$. On définit une forme linéaire continue positive sur $C_0(E)$ par $f \mapsto T_t f(x)$. Il existe donc, par le théorème de représentation de Riesz, une mesure $\nu_{t,x}$ sur $\mathcal{E}$ telle que $T_t f(x) = \int_E f(y)\nu_{t,x}(dy)$, pour tout $f \in C_0(E)$. Pour tout $f \in C_0(E)$, l'application $x \to \int_E f(y)\nu_{t,x}(dy)$ est alors continue, donc borélienne. D'où par un argument de classe monotone, il en est de même de $x \mapsto \nu_{t,x}(A)$, pour tout $A \in \mathcal{E}$. En utilisant la propriété (b) de $(T_t)_{t\geq 0}$, on vérifie donc que $P_t(x, A) := \nu_{x,t}(A)$ définit une fonction de transition comme désirée. □

Une fonction de transition associée à un semi-groupe de Feller comme ci-dessus sera appelée une *fonction de transition de Feller*. On vérifiera que la fonction de transition associèe à un semi-groupe de convolution mesurable sur $\mathbb{R}^d$ est de Feller.

Pour montrer qu'une fonction de transition est de Feller il peut être plus simple d'utiliser la proposition suivante.

Proposition 4.6. *Une fonction de transition est de Feller si et seulement si*
(i) $P_t C_0(E) \subset C_0(E)$ *pour tout* $t \geq 0$.
(ii) Pour tous $f \in C_0(E)$, $x \in E$, $\lim_{t \to 0^+} P_t f(x) = f(x)$.

La preuve, admise (voir e.g. Revuz et Yor [5] p. 89), utilise la notion de résolvante d'ordre $p > 0$, U_p, définie par $U_p f(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} P_t f(x)$, qui satisfait à l'équation $U_p - U_q = (q-p) U_p U_q = (q-p) U_q U_p$.

Definition 4.6. *Un processus de Markov ayant une fonction de transition, de Feller, est appelé un processus de Feller.*

Théorème 4.7. *Tout processus de Feller admet une modification càdlàg.*

La preuve, analogue à la preuve de la proposition 5.4, repose sur la proposition suivante.

Proposition 4.8. *Soit* $(X_t)_{t \geq 0}$ *un processus de Feller. Pour tout* $p > 0$ *et toute fonction* $f \in C_0(E)$ *positive, le processus* $(\mathrm{e}^{-pt} U_p f(X_t))$ *est une super-martingale pour toute probabilité* $\mathbb{P}_\nu$.

Preuve : D'après la propriété de Markov, pour tout $t > s$, nous avons

$$\mathbb{E}_\nu\big(\mathrm{e}^{-pt} U_p f(X_t) | \mathcal{F}_s\big) = \mathrm{e}^{-pt} \mathbb{E}_\nu((U_p f(X_{t-s} \circ \theta_s)) | \mathcal{F}_s) = \mathrm{e}^{-pt} P_{t-s} U_p f(X_s).$$

Or $\mathrm{e}^{-p(t-s)} P_{t-s} U_p f \leq U_p f$, d'où,

$$\mathbb{E}_\nu\big(\mathrm{e}^{-pt} U_p f(X_t) | \mathcal{F}_s\big) \leq \mathrm{e}^{-ps} U_p f(X_s)),$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

On donne maintenant la propriété de Markov forte. Dans le résultat qui suit on suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite (i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s > t} \mathcal{F}_s$ pour tout $t \geq 0$). Par exemple, si ν est le probabilité initiale de notre processus de Markov, il suffit que $\mathcal{F}_0$ contiennent les ensembles de $\mathcal{F}_\infty$, négligeables pour $\mathbb{P}_\nu$ (voir Prop. 2.10 p. 93 de [5]). L'hypothèse de continuité à droite de la filtration n'est pas nécessaire si le processus de Markov étudié est un processus de saut pur (i.e. (X_t) est continue à droite est constant entre ses points de discontinuités -ou sauts- que l'on suppose isolés).

Théorème 4.9. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov comme ci-dessus. Soit T un temps d'arrêt. Pour toute mesure initiale ν et toute va positive Z, $\mathcal{F}_\infty$-mesurable on a*

$$\mathbb{E}_\nu(Z\circ\theta_T|\mathcal{F}_T) = \mathbb{E}_{X_T}(Z) \qquad \mathbb{P}_\nu\text{-a.s.}$$

sur l'ensemble $\{T<\infty\}$.

Preuve : On montre le résultat lorsque T prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable D, dans ce cas le résultat est vrai pour tout processus de Markov (sans hypothèse sur la filtration). On a (à vérifier) :

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\mathbb{E}(Z\circ\theta_T|\mathcal{F}_T) &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\sum_{d\in D}\mathbf{1}_{\{T=d\}}\mathbb{E}(Z\circ\theta_d|\mathcal{F}_d)\\ &= \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\sum_{d\in D}\mathbb{E}_{X_d}(Z).\end{aligned}$$

Dans le cas général, soit pour tout $n\geq 0$, $T_n = ([2^nT]+1)/2^n$. Alors (T_n) décroît vers T et pour tout n, T_n prend un nombre dénombrable de valeurs. Soit $t_1<\ldots<t_k$ et $f_1,\ldots f_m$ des fonctions continues positives. D'après ce qui précède, avec $Z=\prod_{k=1}^m f_k(X_{t_k})$

$$\mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}\mathbb{E}(Z\circ\theta_{T_n}|\mathcal{F}_{T_n}) = \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}g(X_{T_n}),$$

où $g(x):=\int_E P_{t_1}(x,dx_1)f_1(x_1)\ldots\int_E P_{t_k}(x_{k-1},dx_k)$, est continue car $(P_t)_{t\geq 0}$ est Feller. Par continuité à droite des trajectoires, et continuité de g le membre de droite ci-dessus tend vers $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}g(X_T)$. Remarquons que $\mathcal{F}_T=\cap_{n\geq 1}\mathcal{F}_{T_n}$ et que $Z\circ\theta_{T_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z\circ\theta_T$ (pour notre choix de Z). D'après le lemme ci-dessous on a donc,

$$\mathbb{E}_\nu(Z\circ\theta_T|\mathcal{F}_T) = \mathbb{E}_{X_T}(Z),$$

puis on conclut par un argument de classe monotone. □

Lemme 4.10. *Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit (X_n) une suite de va convergeant $\mathbb{P}$-p.s. vers X et telle que $\sup_n|X_n|\in L^1(\mathbb{P})$. Soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration décroissante et $\mathcal{G}:=\cap_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$. Alors*

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathbb{E}(X|\mathcal{G}),$$

p.s. et dans $L^1(\mathbb{P})$.

4.3 Générateur infinitésimal

Dans toute cette partie $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe sur $C_0(E)$ où E est localement compact à base dénombrable.

Definition 4.7. *On dit que $f \in C_0(E)$ appartient au domaine $\mathcal{D}_A$ du générateur infinitésimal de $(P_t)_{t\geq 0}$, si la limite $\lim_{t\to 0, t>0} \frac{P_t f - f}{t}$ existe dans C_0 et on note alors Af cette limite. On définit ainsi un opérateur $A : \mathcal{D}_A \to C_0$, appelé générateur infinitésimal de $(P_t)_{t\geq 0}$.*

Autrement dit, $f \in A$, si $t \mapsto P_t f$ est fortement (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) dérivable à droite. L'opérateur A nétant a priori pas défini sur tout $C_0(E)$ est dit non-borné.

Si $f \in \mathcal{D}_A$, on a

$$\mathbb{E}(f(X_{t+h}) - f(X_t)|\mathcal{F}_t) = P_h f(X_t) - f(X_t) = hAf(X_t) + o(h) \qquad (h \to 0),$$

donc l'opérateur A peut être vu comme un moyen d'observer l'évolution du processus sur une période infinitésimale.

On obtient de suite les propriétés suivantes de A.

Proposition 4.11.
(i) $\mathcal{D}_A$ est un espace vectoriel stable par P_t pour tout $t \geq 0$.
(ii) Pour tout $f \in \mathcal{D}_A$, $t \mapsto P_t f$ est fortement dérivable et

$$\frac{d}{dt} P_t f = AP_t f = P_t A f.$$

(iii) Pour tous $f \in \mathcal{D}_A$ et $t \geq 0$, $P_t f - f = \int_0^t P_s A f ds = \int_0^t A P_s f ds$.

Preuve : Le point (i) découle clairement de la définition et de la propriété de semi-groupe. De même, $t \mapsto P_t f$ est fortement dérivable à droite pour tout $f \in \mathcal{D}_A$, de dérivée à droite égale à $P_t A f = AP_t f$.

Soit $f \in \mathcal{D}_A$. L'application $t \mapsto \int_0^t P_s A f ds$ est dérivable de dérivé $P_t A f$. Comme deux fonctions continues de dérivées à droite égales (sauf sur un ensemble au plus dénombrable) diffèrent d'une constante, donc il existe $g \in C_0(E)$ tel que $\int_0^t P_s A f ds = P_t A f + g$, pour tout $t \geq 0$. En particulier, $t \mapsto P_t f$ est dérivable et, en faisant tendre t vers 0, $g = f$. □

Il n'est pour l'instant pas clair si $\mathcal{D}_A$ contient d'autres fonctions que les constantes. La proposition suivante répond à cette question.

Proposition 4.12. *L'espace $\mathcal{D}_A$ est dense dans $C_0(E)$ et l'opérateur A est fermé (i.e. pour toute suite (f_n) convergeant vers f dans $C_0(E)$ et telle que (Af_n) converge vers g dans $C_0(E)$, alors $f \in \mathcal{D}_A$ et $g = Af$).*

Preuve : Pour tout $t > 0$ et tout $f \in C_0(E)$, on pose $B_t(f) = \frac{1}{t}\int_0^t P_u f du$ et $A_t(f) = \frac{1}{t}(P_t f - f)$.

Soit $f \in C_0(E)$, on a, pour tout $h, s > 0$,

$$A_h B_s f = B_s A_h f = B_h A_s f.$$

Comme $\lim_{h\to 0, h>0} B_h(A_s f) = A_s f$, donc $B_s f \in \mathcal{D}_A$ et comme $\lim_{s\to 0, s>0} B_s f = f$, $f \in \overline{\mathcal{D}_A}$.

Soit $(f_n) \subset A$, tel que $Af_n \to g \in C_0(E)$. Pour tout $s > 0$, on a

$$\begin{aligned} B_s g = B_s(\lim_n Af_n) &= \lim_n (B_s A f_n) = \lim_n \left(B_s \lim_h A_h f_n\right) \\ &= \lim_n \left(\lim_h B_s A_h f_n\right) = \lim_n A_s f_n = A_s f. \end{aligned}$$

En faisant tendre s vers 0, on voit alors que $f \in \mathcal{D}_A$ et que $Af = g$. □

Proposition 4.13. *Soit $f \in \mathcal{D}_A$. Alors le processus défini par*

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds \qquad \forall t \geq 0, \tag{4.5}$$

est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale centrée sous $\mathbb{P}_\nu$, pour toute probabilité initiale ν.

Remarques : L'intégrale apparaissant dans (4.5) est l'intégrale pour tout $\omega \in \Omega_0$ fixé de la fonction continue $s \mapsto Af(X_s)(\omega))$. Si $Af = 0$, $(f(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Preuve : Comme, f et Af sont bornées, M_t est défini intégrable pour tout $t \geq 0$. Soit $t \geq s \geq 0$. D'après la propriété de Markov et la Proposition 4.11 (ii), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu(M_t|\mathcal{F}_s) &= P_{t-s}f(X_s) - f(X_0) - \int_0^s f(X_u)du - \int_s^t P_{u-s}Af(X_s)du \\ &= P_{t-s}f(X_s) - f(X_0) - \int_0^s f(X_u)du - \int_0^{t-s} P_u Af(X_s)du \\ &= P_{t-s}f(X_s) - f(X_0) - \int_0^s f(X_u)du - (P_{t-s}f(X_s) - f(X_s)) = M_s, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

On a en fait la réciproque.

Proposition 4.14. *Soit $f \in C_0(E)$ tel qu'il existe $g \in C_0(E)$ tel que pour tout $x \in E$, le processus donné par*

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s)ds \qquad \forall t \geq 0,$$

est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sour $\mathbb{P}_x$. Alors, $f \in \mathcal{D}_A$ et $g = Af$.

Preuve : Soit $x \in E$, $t > 0$. Par hypothèse, $\mathbb{E}_x(M_t|\mathcal{F}_0) = 0$, i.e.

$$P_t f(x) - f(x) - \int_0^t P_s g(x)ds = 0.$$

D'où $\left\|\frac{P_t f - f}{t} - g\right\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|P_s g - g\| ds \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$ □

On identifie maintenant A dans le cas des processus de Lévy. On traitera au chapitre suivant le cas des processus de sauts purs.

On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dénote l'espace de Schwartz des fonctions rélles f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $\|x\|^m |f(x)| \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 4.15. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy dans $\mathbb{R}$ de caractéristique (b, c, ν). Alors $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_A$ et pour tout $f \in \mathcal{S}$*

$$Af(x) = bf'(x) + \frac{c}{2}f''(x) + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} \big(f(x+y) - f(x) - \mathbf{1}_{\{|y|\leq 1\}} f'(x)\big)\nu(dy).$$

Preuve : On sait que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX_1}) = \mathrm{e}^{\psi_{b,c,\nu}}$. On vérifiera que $\psi(u) = O(u^2)$ en l'infini (où l'on omet les indices de ψ).

Soit $f \in \mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est stable par la transformation de Fourier et est inclus dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $f(y) = \hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iyu} g(u) du$.

On rappelle que si μ_t est la loi de X_t, la fonction de transition est donnée par $P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\mu_t(dy)$. On alors

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu_t(dy) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(x+y)u} g(u) du = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}_t(u) \mathrm{e}^{iux} g(u) du = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{t\psi(u)} \mathrm{e}^{iux} g(u).$$

Or, pour tous $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{t\psi(u)} - 1 - t\psi(u)| \leq Ct^2 |\psi(u)|^2$.

Comme $|\psi|^2 |g| \in L^1(\mathbb{R})$, car $g \in \mathcal{S}$, le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{t\to 0, t>0} \frac{P_t f - f}{t} = t\int_{\mathbb{R}} \psi(u) \mathrm{e}^{iux} g(u) du.$$

Maintenant, $\int_{\mathbb{R}} u \mathrm{e}^{iux} g(u) du = -if'(x)$, $\int_{\mathbb{R}} u^2 \mathrm{e}^{iux} g(u) du = -f''(x)$ et d'après Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{itu} - 1 - itu\mathbf{1}_{\{|t|\leq 1\}})\nu(dt)\Big) \mathrm{e}^{iux} g(u) du = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x+t) - f(x) - f'(x)\big)\mu(dt)$$

ce qui prouve le résultat. □

4.4 Exercices

Exercice 4.1. *Montrer que chacun des exemples ci-dessous définit une fonction de transition de Feller. On prendra toujours pour $\mathcal{E}$ la tribu borélienne de E.*
1. Translation à vitesse constante. *Soit $v \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$.*

$$P_t(x, dy) = \delta_{x+tv}(dy).$$

2. Mouvement brownien standard de $\mathbb{R}^d$. *Soit $E = \mathbb{R}^d$.*

$$P_t(x, dy) = \frac{1}{(2\pi)^{td/2}} \mathrm{e}^{-\|x-y\|^2/2t} dy.$$

3. Processus de Poisson. *Soit $\lambda > 0$, $E = \mathbb{R}$.*

$$P_t(x, dy) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \delta_{x+n}(dy).$$

4. Processus de Poisson composé (généralisé). *Soit π une probabilité de transition sur $(E, \mathcal{E})$. On a vu comment définir π^2, puis par récurrence π^n. On pose alors*

$$P_t(x, dy) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \pi^n(x, dy).$$

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^d$ et où π est associé à une mesure de probabilité ν, on obtient la fonction de transition d'un processus de Poisson composé.
5. Mouvement brownien réfléchi. *Soit $E = \mathbb{R}^+$.*

$$P_t(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \big(\mathrm{e}^{-(x-y)^2/2t} + \mathrm{e}^{-(x+y)^2/2t} \big).$$

6. Processus de Ornstein-Uhlenbek. *Soit $E = \mathbb{R}$.*

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) P_t(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(\mathrm{e}^{-t} x + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}} y) \mathrm{e}^{-y^2/2t} dy.$$

Les deux derniers exemples sont-ils issus de semi-groupes de convolution ? Dans les trois derniers exemples, expliciter le générateur infinitésimal sur $\mathcal{S}$.

Exercice 4.2. *Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions de transition de Feller sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.*
1) $P_t(x, dy) = \mathrm{e}^{-t/x} \delta_x + \frac{t}{y^2} \mathrm{e}^{-t/y} \mathbf{1}_{]x,+\infty[}(y) dy$.
2) $P_t f(x) = \frac{x}{x+t} f(x+t) + \int_x^\infty \frac{t}{(t+y)^2} f(t+y) dy$.
Identifiez A sur des espaces ad hoc.

Exercice 4.3 (Processus de Bessel sur $\mathbb{R}^3$)**.** *Pout tout $t > 0$, on définit un noyau de transition $P_t(x, dy)$ sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, par*

$$P_t(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-(x-y)^2/2} - \mathrm{e}^{-(x+y)^2/2}\right)dy.$$

Montrer que $(P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe, laissant la fonction identité invariante (c'est la fonction de transition associée au mouvement brownien tué en quand il atteint 0). Montrer que $Q_t(x, dy) := yP_t(x, dy)$ définit alors aussi un semi-groupe et montrer que si l'on pose $Q_t(0, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} y^2 \mathrm{e}^{-y^2/t} dy$, alors $(Q_t)_{t\geq 0}$ est une fonction de transition de Feller (pour un choix judicieux de Q_0).

Exercice 4.4. *Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ uns fonction de transition de Feller sur $C_0(E)$. Montrer que pour tout $p > 0$, et tout $f \in C_0(E)$, $U_p f = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} P_t f \in \mathcal{D}_A$, où A est le générateur infinitésimal de $(P_t)_{t\geq 0}$.*

Exercice 4.5. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Markov sur $(E, \mathcal{E})$ de fonction de transition $(P_t)_{t\geq 0}$. Montrer que pour tout $u > 0$, le processus $(Y_t)_{0\leq t\leq u}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$, pour tout $x \in E$, où $Y_t = P_{u-t} f(X_t)$.*

Exercice 4.6. *Montrer que la définition du générateur infinitésimal à la Proposition 4.15 s'étend aux fonctions de classe C^2, que si $\int_{\mathbb{R}} \min(x, 1)\nu(dx) < \infty$, elle s'étend aux fonctions de classe C^1, et que si ν est finie elle s'étend à C_0.*

Chapitre 5

Processus de Lévy

Definition 5.1. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS), ou encore un processus de Lévy, si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(a) Pour tous $s, t \geq 0$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

(b) Pour tous $s, t \geq 0$, $X_{s+t} - X_s$ a même loi que X_t.

(c) La fonction $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$-mesurable.

La notion de processus de Lévy est intimement liée à celle de semi-groupe de convolution. On a :

Proposition 5.1. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIS, alors si μ_t désigne la loi de X_t, pour tout $y \geq 0$, $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de convolution. Réciproquement, pour tout semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t\geq 0}$ on peut construire un PAIS (dit canonique) $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que, pour tout $t \geq 0$, μ_t soit la loi de X_t.*

Le premier point découle de la définition des PAIS. Le deuxième du théorème d'extension de Kolmogorov. $\square$

Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy, alors X_1 suit une loi infiniment divisible de paramètres (b, c, ν). On dit alors que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy de paramètres (b, c, ν).

On verra par la suite que tout PAIS admet une version càd-làg. Le PAIS canonique associè à un semi-groupe de probabilité donnné n'a en général aucune raison d'être càd-làg.

Lemme 5.2. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIS, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle et T un temps d'arrêt p.s. fini. Alors $(X_{T+t} - X_T)_{t\geq 0}$ est un PAIS de même loi que $(X_t)_{t\geq 0}$ et indépendant de $\mathcal{F}_T$. On rappelle que $\mathcal{F}_T$ est la σ-algèbre des ensembles A, $\mathcal{F}_\infty$-mesurable tels que, pour tout $t \geq 0$, $A \cap \{T \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$.*

5.1 Exemples de processus de Lévy

Le mouvement brownien standard. On appelle mouvement brownien d-dimensionel tout PAIS $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$, X_t suit la loi normale $\mathcal{N}(0, tI)$. L'adjectif standard inclus quelque fois la continuité des trajectoires.

Processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On appelle processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ tout PAIS $(N_t)_{t\geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

On constate que $(N_t)_{t\geq 0}$ est p.s. croissant, un tel PAIS est appelé un subordinateur.

On pose $T_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$

$$T_n = \inf\{t \geq 0,\ N_t = n\} = T_{n-1} + \inf\{t \geq 0,\ N_{t+T_{n-1}} - N_{T_{n-1}} = 1\}.$$

D'après le Lemme 5.2, la suite $(T_n - T_{n-1})_{n\geq 1}$ est iid de même loi que T_1, cette suite représente les instants de saut du processus $(N_t)_{t\geq 0}$.

Soit $t \geq 0$, $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, donc T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Il est clair que l'on retrouve le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ comme suit

$$N_t = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}, \qquad \forall t \geq 0. \tag{5.1}$$

Réciproquement, si (Y_n) est une suite de variables iid suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et si l'on pose $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, l'identité (5.1) définit un processus de Poisson de paramètre λ.

Processus de Poisson composé. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi ν. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, indépendant de $(Z_n)_{n\geq 1}$. Alors le processus

$$X_t = \sum_{1\leq n\leq N_t} Z_n \qquad \forall t \geq 0,$$

est un PAIS, appelé processus de Poisson composé. Pour tout $t \geq 0$, X_t suit une loi de Poisson composé $\pi(\lambda t, \nu)$. Avec les notations précédentes on a : $X_t = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}} Z_n$.

On laisse la preuve au lecteur.

Changement de temps. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIS et $(T_t)_{t\geq 0}$ un subordinateur (i.e. un PAIS positif). Alors le processus $(X_{T(t)})_{t\geq 0}$ définit un PAIS.

On laisse la preuve au lecteur. Noter que cette façon de générer des PAIS peut être vu comme une généralisation, de la construction des processus de Poisson composé.

5.2 Quelques propriétés

On peut trouver une définition différente des PAIS dans la littérature, où il peut être imposé que $(X_t)_{t\geq 0}$ soit continue en probabilité. Cette différence est clarifiée par le lemme suivant.

Lemme 5.3. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIS. Alors $(X_t)_{t\geq 0}$ est continu en probabilité.*

Preuve : On a vu que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_{X_t}(u)$ est continue. On utilise alors les propriétés des PAIS et le fait que convergence en loi vers 0 et convergence en probabilité vers 0 sont équivalentes, pour établir la continuité à droite et la continuité à gauche. □

On obtient alors le résultat (plus précis) suivant.

Proposition 5.4. *Tout PAIS admet une modification càd-làg.*

Preuve : Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un PAIS. Soit $u \in \mathbb{R}$, posons $M_t^u = \mathrm{e}^{iuX_t - t\psi(u)}$, où $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{iuX_1}) = \mathrm{e}^{\psi(u)}$. Alors, $(M_t^u)_{t\geq 0}$ est une martingale continue en probabilité. D'après le théorème **??**, il existe Ω_u, avec $\mathbb{P}(\Omega_u) = 1$, tel que, pour tout $\omega \in \Omega_u$, les limites $\lim_{s\to t, s>t, s\in\mathbb{Q}^+} M_s^u(\omega)$ et $\lim_{s\to t, s<t, s\in\mathbb{Q}^+} M_s^u(\omega)$ existent, $t \in \mathbb{R}$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Par une application de Fubini, il existe $\tilde{\Omega}$ avec $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$, tel que pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$, il existe $\Gamma_\omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\lambda(\mathbb{R}\backslash\Gamma_\omega) = 0$ tel que pour tout $u \in \Gamma_\omega$, les limites $\lim_{s\to t, s>t, s\in\mathbb{Q}^+} \mathrm{e}^{iuX_s}$ et $\lim_{s\to t, s<t, s\in\mathbb{Q}^+} \mathrm{e}^{iuX_s}$ existent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le lemme ci-dessous permet alors de définir un nouveau processus $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ par

$$\tilde{X}_t(\omega) = 0 \qquad \text{si } \omega \in \Omega\backslash\Omega_0,$$
$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{s\to t, s>t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \qquad \text{si } \omega \in \Omega_0.$$

On vérifiera que $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ est un processus continue à droite, limité à gauche. De plus, comme $(X_t)_{t\geq 0}$ est continu en probabilité donc $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ est une modification de $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ est un PAIS. □

Lemme 5.5. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que (e^{iua_n}) converge pour λ-presque tout $u \in \mathbb{R}$. Alors, (a_n) converge.*

Preuve : Soit $\beta > 0$, tel que $(\mathrm{e}^{i\beta a_n})$ converge. D'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^\beta \mathrm{e}^{iu(a_n - a_m)} du \underset{n>m\to\infty}{\longrightarrow} \beta$. Soit $n > m$, on a :

$$a_n - a_m = \frac{\mathrm{e}^{i\beta(a_n - a_m)} - 1}{i\int_0^\beta \mathrm{e}^{iu(a_n - a_m)} du} \underset{n>m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où (a_n) est de Cauchy, donc converge. □

On remarquera qu'en fait, on a besoin de la convergence pour λ-presque tout $u \in I$, où I est un intervalle.

5.3 Mesures aléatoires et mesures de Poisson

Definition 5.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, $(S, \mathcal{S})$ des espaces mesurés.*
- *On appelle noyau de transition sur $\Omega \times \mathcal{S}$ toute application N sur $\Omega \times \mathcal{S}$ telle que*
  - *(a) Pour tout ω, $N(\omega, \cdot)$ est une mesure sur $\mathcal{S}$.*
  - *(b) Pour tout $A \in \mathcal{B}(R^d)$, $N(\cdot, A)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.*
- *On appelle mesure aléatoire (sur $\mathcal{S}$) toute variable aléatoire M définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $\mathcal{M}(\mathcal{S})$, l'espace des mesures σ-finies sur $\mathcal{S}$ muni de la tribu rendant mesurable les applications $\pi_A \ : \ \mu \mapsto \mu(A)$.*

En posant $N(\omega, A) = M(\omega)(A)$, on définit une bijection entre les noyaux de transitions sur $(\Omega \times \mathcal{S})$ et les mesures aléatoires sur $\mathcal{S}$.

Definition 5.3. *Soit μ une mesure σ-finie non atomique sur $\mathcal{S}$. On appelle mesure de Poisson d'intensité μ, tout noyau de transition sur $\Omega \times \mathcal{S}$, tel que*
- *(a) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ d'ensembles disjoints, $(N(\cdot, A_n))$ est une suite de va indépendantes.*
- *(b) Pour tout $A \in \mathcal{S}$, $N(\cdot, A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$.*

Remarque. Si N est une mesure de Poisson alors, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ d'ensembles disjoints la loi du processus $(N(\cdot, A_n))$ est entièrement déterminée par μ et $(A_n)_n$. Si $B \in \mathcal{S}$, on définit clairement une nouvelle mesure de Poisson N_B en posant $N_B(\cdot, A) = N(\cdot A \cap B)$. Son intensité est μ_B définie par $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$.

Lemme 5.6. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ des espaces de probabilités et $(S, \mathcal{S}$ un espace mesuré. Soit μ une mesure σ-finie sur S. On a :*
- *(i) Soit N et $\tilde{N}$ des mesures de Poisson sur $\Omega \times \mathcal{S}$ et $\tilde{\Omega} \times \mathcal{S}$, de même intensité μ. Soit $f \ : \ S \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\int_S |f(x)| N(\cdot, dx) < \infty$ $\mathbb{P}$-p.s. Alors, $\int_S |f(x)| \tilde{N}(\cdot, dx) < \infty$ $\tilde{\mathbb{P}}$-p.s. et les variables $N(f) = \int_S f(x) N(\cdot, dx)$ et $\tilde{N}(f) = \int_S f(x) \tilde{N}(\cdot, dx)$ ont même loi.*
- *(ii) Soit $f \in L^1(\mu)$. Alors, pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, $f \in L^1(N(\omega, dx))$.*

Preuve : On ne montre que (ii), (i) se montrant par un argument analogue combiné à la remarque précédente. Supposons f positive. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $N(f)(\omega) = \int_S f(x) N(\omega, dx)$ est défini à valeur dans $[0, +\infty]$. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(N(f)) < \infty$. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions étagées convergeant vers f. Alors pour tout $\omega \in \Omega$, $(N(f_n)(\omega))$ est une suite croissante convergeant vers $N(f)(\omega)$, et donc $\mu(f_n) = \mathbb{E}(N(f_n)) \to \mathbb{E}(N(f)) < \infty$. $\square$

Le théorème suivant établit que toute mesure σ-finie non-atomique sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$ est l'intensité d'une mesure de Poisson.

Théorème 5.7. *Soit μ une mesure σ-finie sur $\mathcal{S}$. Soit $(E_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}$ formant une partition de S et tels que $0 < \mu(E_n) < \infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $\mu_i = \mu/\mu(E_i)$.*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_{n,k})_{n,k\geq 1}$ des va indṕendantes telles que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(E_n)$ et $Y_{n,k}$ a pour loi μ_n. Alors la mesure aléatoire définie par

$$N(\omega, A) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{X_n} \delta_{Y_{n,k}}(A), \qquad \forall (\omega, A) \in \Omega \times \mathcal{S},$$

est une mesure de Poisson d'intensité μ.

Preuve : Il est clair que N défini une mesure aléatoire. Soit $(A_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles disjoints de $\mathcal{S}$ et $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs (ou nuls). Posons $\theta_i = \mu(E_i)$. En utilisant l'indépendance et l'identité $\mathbb{E}\big[\exp(-\sum_{l\in\mathbb{N}}\lambda_l \sum_{k=1}^m \mathbf{1}_{A_l}(Y_{n,k}))\big]\big) = \big(\frac{1}{\theta_n}\int_{E_n} \mathrm{e}^{-\sum_{l\in\mathbb{N}}\lambda_l \mathbf{1}_{A_l}(x)}\mu(dx)\big)^m$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\sum_{l\geq 0}\lambda_l N(A_l)}) &= \prod_{n\geq 0}\Big(\sum_{m\geq 0}\frac{\theta_n^m \mathrm{e}^{-\theta_n}}{m!}\mathbb{E}\big[\exp(-\sum_{l\in\mathbb{N}}\lambda_l\sum_{k=1}^m \mathbf{1}_{A_l}(Y_{n,k}))\big]\Big)\\
&= \prod_{n\geq 0}\exp\Big(\int_{E_n}\mathrm{e}^{-\sum_{l\in\mathbb{N}}\lambda_l \mathbf{1}_{A_l}(x)}\mu(dx) - \mu(E_n)\Big)\\
&= \exp\Big(\int_S (\mathrm{e}^{-\sum_{l\in\mathbb{N}}\lambda_l \mathbf{1}_{A_l}(x)} - 1)\mu(dx)\\
&= \exp\Big(\sum_{l\in\mathbb{N}}\int_S(\mathrm{e}^{-\lambda_l} - 1)\mathbf{1}_{A_l}(x)\mu(dx) \qquad\qquad (*)\\
&= \prod_{l\in\mathbb{N}}\exp\big(\mu(A_l)(\mathrm{e}^{-\lambda_l}-1)\big)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que les A_l sont disjoints pour obtenir $(*)$.

D'où, $N(A_n)$ suit une loi de Poisson de paramètre θ_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les va $(N(A_n))_n$ sont indépendantes. □

Lemme 5.8. *Soit N une mesure de Poisson d'intensité μ et f une fonction mesurable sur S à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

(i) Si f est positive

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-N(f)}) = \exp\Big(\int_S(\mathrm{e}^{-f(x)} - 1)\mu(dx)\Big). \tag{5.2}$$

(ii) Si f est à valeurs imaginaires pures et si $\mu(1 \wedge |f|) < \infty$, l'égalité précédente reste vraie pour f.

Preuve : La preuve du théorème précédent et le Lemme 5.6 (i) prouvent que le lemme est vrai pour f de la forme $f = \sum_n \lambda_n \mathbf{1}_{A_n}$. Le résultat général s'obtient par approximation, comme pour le Lemme 5.6.

Montrons (ii). Remarquons que l'égalité (5.2) est vraie pour toute fonction étagée à valeurs complexes. Soit $c > 0$. En appliquant le point (i) à $c|f|$ et en remarquant que $|e^{-c|f|} - 1| \leq \min(1, c|f|) \in L^1(\mu)$, on obtient, lorque $c \to 0$, que $\mathbb{P}(N(|f|) < \infty) = 1$. Donc $N(|f|) < \infty$ p.s. Soit alors $(f_n)_n$ une suite de fonction étagées convergeant vers f, avec $|f_n| \leq |f|$. Par convergence dominée $N(f_n) \to N(f)$ p.s., puis $\mathbb{E}(e^{-N(f_n)}) \to \mathbb{E}(e^{-N(f)})$. De même $\int_S (e^{-f_n(x)} - 1)\mu(dx) \to \int_S (e^{-f(x)} - 1)\mu(dx)$ et le résultat suit. $\square$

Proposition 5.9. *Soit μ une mesure finie sur $\mathbb{R}^d$ (non nécessairement atomique). Soit N une mesure de Poisson sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \otimes \mathbb{R}^d)$ d'intensité $\lambda \otimes \mu$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. Alors, on définit par*

$$U_t = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d} xN(\cdot, dsdx), \quad t \geq 0,$$

un processus de Poisson composé de paramètres $\mu(\mathbb{R}^d)$, $\mu/\mu(\mathbb{R}^d)$.

Remarque : La mesure $\lambda \otimes \mu$ est non-atomique.
Preuve : On suppose $d = 1$ et que μ est portée par $\mathbb{R}^+$. Alors U_t est bien défini, mais a priori à valeurs dans $[0, +\infty]$. Soit $\lambda \geq 0$. Remarquons que $U_t = Nf_t$ où $f_t(s, x) = x\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$. D'après le lemme 5.8 on a :

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda U_t}) = \exp\big(\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} (e^{-\lambda f_t(s,x)} - 1)ds\mu(dx)\big) = e^{t\int_{\mathbb{R}^+}(e^{-\lambda x}-1)\mu(dx)}.$$

On en déduit que U_t suit une loi de Poisson composé de paramètres $t\mu(\mathbb{R}^+)$, $\mu/\mu(\mathbb{R}^+)$, donc U_t est bien une variable aléatoire finie.

Soit $t > s \geq 0$. On voit aisément que $U_t - U_s$ est indépendant de $(U_u)_{0\leq u\leq s}$ et le calcul précédent montre que $U_t - U_s$ a même loi que U_{t-s}.

Donc le résultat est vrai pour μ portée par $\mathbb{R}^+$. Supposons maintenant μ quelconque (finie). On construit deux processus $(U_t^+)_{t\geq 0}$ et $(U_t^-)_{t\geq 0}$ par

$$U_t^+ = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^+} xN(\cdot, dsdx), \quad t \geq 0,$$
$$U_t^- = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^-} -xN(\cdot, dsdx), \quad t \geq 0.$$

Ces processus sont clairement indépendants, donc $(U_t^+ - U_t^-)_{t\geq 0}$ est un PAIS et on vérifie que c'est un processus de Poisson composé de paramètres $\mu(\mathbb{R}^d)$, $\mu/\mu(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Remarque : la preuve précédente montre que si μ est une mesure de Lévy vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} \min(\|x\|, 1)\mu(dx) < \infty$, alors le processus (U_t) est toujours défini et est un processus de Lévy de paramètre $(0, 0, \mu)$. En particulier, si ν est une mesure de Lévy quelconque, le résultat s'applique pour $\mu(dx) = \mathbf{1}_{\{\|x\|>1\}}\nu(dx)$.

Lemme 5.10. *Soit μ une mesure σ-finie sur $\mathcal{S}$ et $f \in L^1(\mu)$. On définit un processus de Lévy intégrable centré par*

$$M_t = \int_{[0,t]\times S} f(x)N(\cdot, dsdx) - t\mu(f), \quad t \geq 0,$$

en particulier, $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
Si de plus $f \in L^2(\mu)$, alors le processus suivant est aussi une martingale

$$\tilde{M}_t = M_t^2 - t\mu(f^2), \quad t \geq 0.$$

Preuve : Comme $f \in L^1(\mu)$, d'après le Lemme 5.6, $(M_t)_{t\geq 0}$ est bien défini, intégrable et $\mathbb{E}(M_t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Le fait que $(M_t)_{t\geq 0}$, soit à accroissements indépendants est clair. La stationarité des accroissements découle du Lemme 5.6 et du fait que pour tout $s \geq 0$, la mesure de Poisson $N^{(s)}$ définie par $N^{(s)}([\alpha,\beta]\times A) = N([\alpha+s,\beta+s], A)$, pour tous $\beta > \alpha \geq 0$, $A \in \mathcal{S}$ a même intensité que N.

Posons, pour tout $f \in L^1(\mu)$, $N_t(f) = \int_{[0,t]\times S} f(x)N(\cdot, dsdx)$.

On suppose dorénavant que $f \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$. On veut montrer que $M_t(f)$ est dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. Supposons que $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{S}$, pour tout $1 \leq i \leq m$. Alors, $N_t(f) = \sum_{1\leq i\leq m} \lambda_i N(\cdot, [0,t] \times A_i)$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_t(f)^2) = \sum_{1\leq i\leq m} \lambda_i^2(t\mu(A_i) + t^2\mu(A_i)^2) + 2t^2 \sum_{1\leq i<j\leq m} \lambda_i\lambda_j\mu(A_i)\mu(A_j) \\ = \big(t\mu(f^2) + t^2(\mu(f))^2\big).\end{aligned}$$

Si f est quelconque dans $L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$, soit (f_n) une suite de fonctions étagées convergent μ-p.s. et dans $L^1(\mu)$ et $L^2(\mu)$ vers f. Alors, le calcul précédent montre que $(N_t(f_n))$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$, donc converge, nécessairement vers $N_t(f)$. D'où $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ est bien défini et pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(M_t) = t\mu(f^2)$. Ainsi, pour tout $t > s \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(M_t^2|\sigma\{\tilde{M}_u,\ 0 \leq u \leq s\}) = \mathbb{E}(M_t - M_s + M_s)^2|\sigma\{M_u,\ 0 \leq u \leq s\}) \\ &= \mathbb{E}((M_t - M_s)^2) + 2\mathbb{E}(M_t - M_s)\mathbb{E}(M_s) + M_s^2 = (t-s)\mu(f^2) + M_s^2,\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. □

On rappelle que si N est une mesure de Poisson d'intensité μ et $A \in \mathcal{S}$, on note N_A la mesure de Poisson d'intensité μ_A, où, $N_A(\cdot, B) = N(\cdot, A\cap B)$ et $\mu_A(B) = \mu(A\cap B)$.

Corollaire 5.11. *Soit N une mesure de Poisson sur $\Omega \times \mathcal{S}$ d'intensité μ σ-finie et $f \in L^2(\mu)$. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante déléments de $\mathcal{S}$, avec $\mu(A_n) < +\infty$, pour tout $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit $(M_t^{(n)})_{t\geq 0}$ la martingale associée, comme dans le lemme précédent, à la mesure de Poisson N_{A_n} d'intensité μ_{A_n}. Alors la suite $(M^{(n)})$ converge dans L^2 vers un processus de Lévy qui est une martingale.*

Remarque : bien sûr, la proposition est intéressante lorsque $\mu(A_n) \to \infty$.
Preuve : Soit $t > 0$, $n > m \geq 1$. D'après l'inégalité de Doob, on a :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq t} \|M_s^{(n)} - M_s^{(m)}\|^2) \leq \mathbb{E}(|M_t^{(n)} - M_t^{(m)}|^2) = t(\mu_{A_n}(f^2) - \mu_{A_m}(f^2)) \underset{m,n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $f \in L^2(f)$. La suite $(M^{(n)}$ est donc de Cauchy dans l'espace des processus càdlàg, muni de la norme $(X_t) \to \mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s\|^2)$. Le fait que la limite est un processus de Lévy est clair. □

5.4 Mesure de Poisson associée à un processus de Lévy

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy càdlàg. Alors il existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $(X_t(\omega))_{t \geq 0}$ est càdlàg. On associe à $(X_t)_{t \geq 0}$ son processus de saut

$$\Delta X_t = X_t - X_{t^-} \qquad \forall t > 0,$$

et on convient que $\Delta X_0 = 0$.

Remarquons que si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy càdlàg, le fait que $(X_t)_{t \geq 0}$ soit continue en probabilité implique que pour tout $t \geq 0$, $\Delta X_t = 0$ p.s.

Soit $t \geq 0, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\}), \omega \in \Omega$. Posons

$$N(\omega, [0,t] \times A) = \#\{0 \leq u \leq t \ : \ \Delta X_u(\omega) \in A\} = \sum_{0 \leq u \leq t} \mathbf{1}_A(\Delta X_u(\omega)).$$

Le lemme suivant garantit la mesurabilité de $N(\cdot, [0,t] \times A)$.

Lemme 5.12. *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\}$, $t > s \geq 0$. Alors $N(\cdot,]s,t] \times A)$ est $\sigma\{X_u - X_s,\ u \in [s,t]\}$-mesurable et a même loi que $N(\cdot, [0, t-s] \times A)$. En particulier N définit une mesure aléatoire sur $\Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d - \{0\})$.*

Proof. Soit f continue à support compact sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$. Sur Ω_0, on a :

$$\sum_{k=0}^{2^n - 1} f(X_{s+(k+1)(t-s)/2^n} - X_{s+k(t-s)/2^n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{s < u \leq t} f(\Delta X_u). \tag{5.3}$$

On en déduit la mesurabilité de $N(\cdot,]s,t] \times A)$ par rapport à $\sigma\{X_u - X_s,\ u \in [s,t]\}$, pour tout A compact, puis pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\}$.

Similairement,

$$\sum_{k=0}^{2^n - 1} f(X_{(k+1)(t-s)/2^n} - X_{k(t-s)/2^n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{0 \leq u \leq t-s} f(\Delta X_u). \tag{5.4}$$

Les membres de gauche de (5.3) et (5.4) ayant même loi, on montre que $N(\cdot,]s,t] \times A)$ et $N(\cdot, [0, t-s] \times A)$ ont même loi. □

Lemme 5.13. *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ un fermé (de $\mathbb{R}^d$). Alors, pour tout $t \geq 0$, $N(\cdot, [0,t] \times A) < \infty$ p.s. En particulier, le processus $(N(\cdot, [0,t] \times A))_{t \geq 0}$ est un PAIS, c'est même un processus de Poisson.*

Preuve : Soit $\omega \in \Omega$. On définit une suite comme suit $T_0(\omega) = 0$ et $T_n(\omega) = \inf\{t > T_{n-1}(\omega) \ : \ \Delta X_t \in A\}$. La suite $(T_n)_{n \geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt. On montre que $T_1 > 0$ p.s. puis que $T_n \to +\infty$ p.s.

Posons $\Gamma = \{T_1 = 0\}$ et supposons que $\mathbb{P}(\Gamma) = \mathbb{P}(\Gamma \cap \Omega_0) > 0$. Soit $\omega \in \Gamma \cap \Omega_0$. Il existe une suite (t_n) telle que $t_n > 0$, $t_n \to 0$ et $X_{t_n}(\omega) - X_{t_n^-}(\omega) \in A$, donc $0 \in A$, contradiction.

D'après ce qui précède, (T_n) est p.s. strictement croissante. Posons $\Lambda = \{\sup_n T_n < \infty\}$ et supposons que $\mathbb{P}(\Gamma) = \mathbb{P}(\Gamma \cap \Omega_0) > 0$. Soit $\omega \in \Omega_0$. Alors $T_n\omega \to \sup_m T_m(\omega) > 0$ et, par continuité à droite de $t \mapsto X_t(\omega)$ en $\sup_m T_m(\omega)$, $X_{T_n}(\omega) - X_{T_n^-}(\omega) \to 0$. Donc $0 \in A$, contradiction.

On obtient alors que pour tout $t \geq 0$, $N(\cdot, [0,t] \times A) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} < \infty$ p.s. Le processus $(N(\cdot, [0,t] \times A))_{t \geq 0}$ est donc un PAIS d'après le lemme précédent et pour tout $t \geq 0$, $\Delta N(\cdot, [0,t] \times A) \in \{0,1\}$. Donc $(N(\cdot, [0,t] \times A))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'après le lemme ci-dessous. □

Lemme 5.14. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un PAIS à valeurs dans $\mathbb{N}$, tel que $(\Delta X_t)_{t \geq 0}$ soit à valeurs dans $\{0,1\}$. Alors, $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson.*

Preuve : soit (T_n) la suite de temps d'arrêt définie ci-dessus, avec $d = 1$ et $A = \{1\}$. Comme le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ il est croissant et pour tout $s, t \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(T_1 > s + t) = \mathbb{P}(X_s = 0, X_{t+s} - X_s = 0) = \mathbb{P}(T_1 > s)\mathbb{P}(T_1 > t). \tag{5.5}$$

La fonction $t \mapsto \mathbb{P}(T_1 > t)$ est non nulle pour t suffisamment petit, car on a vu que $T_1 > 0$ p.s., elle ne s'annule donc jamais d'après (5.5) et on peut donc prendre son logarithme. De plus, cette fonction est monotone, donc mesurable. Une application du lemme 2.13 prouve alors l'existence de $\lambda > 0$ tel que $\mathbb{P}(T_1 > t) = e^{\lambda t}$, pour tout $t \geq 0$, d'où T_1 suit une loi exponentielle de paramètres λ.

D'après le Lemme 5.2, la suite $(T_n - T_{n-1})$ est iid et donc, pour tout $n \geq 1$, T_n suit une loi Γ de densité $\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$.

Par ailleurs, pour tous $n \in \mathbb{N}^*, t \geq 0$, sachant que $(X_t)_{t \geq 0}$ ne fait que des sauts unité,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t) = \mathbb{P}(T_{n+1} > t) - \mathbb{P}(T_n > t),$$

ce qui prouve le résultat, connaissant la loi de T_n, par une intégration par partie. □

D'après ce qui précède, on définit une mesure μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ en posant pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$

$$\mu(A) := \mathbb{E}(N(\cdot, [0,1] \times A). \tag{5.6}$$

Comme pour tout A fermé de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas 0, $(N(\cdot, [0,t] \times A))_{t \geq 0}$ est un processus (fini p.s.) de paramètre $\mathbb{E}(N(\cdot, [0,1] \times A) = \mu(A) < \infty$, on en déduit que μ est σ-finie.

Lemme 5.15. *Soit (Λ_n) des ensembles disjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d - \{0\})$. Alors les variables $(N(\cdot, \Lambda_n))$ sont indépendantes.*

Preuve : utiliser (5.3) et les arguments qui suivent. □

Théorème 5.16. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$ càdlàg. Alors N est une mesure de Poisson d'intensité $\lambda \otimes \mu$ où μ est définie par (5.6). De plus, pour tout A fermé de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas 0, $\mu(A) < \infty$.*

On dit qu'un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ est à *sauts bornés* (p.s.) s'il existe une constante $C > 0$, tel que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \|\Delta X_t\| \leq C \qquad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Proposition 5.17. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à sauts bornés. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,$t \geq 0$, $\mathbb{E}(\|X_t\|^m) < \infty$.*

Preuve : Soit C comme ci-dessus. On définit des temps d'arrêts (T_n) par $T_0 = 0$, et pour tout $n \geq 0$,

$$T_{n+1} = \inf\{t > T_n,\ \|X_t - X_{T_n}\| > C\} = T_n + \inf\{u > 0,\ \|X_{u+T_n} - X_{T_n}\| > C\}.$$

Par construction, pour tout $n \geq 0$ et tout $T_n < t < T_{n+1}$, $\|X_t - X_{T_n}\| \leq C$, donc, d'une part, $\|X_u\| \leq C + \|X_{T_n}\|$ et d'autre part, sur Ω_0, $\|X_{T_{n+1}^-} - X_{T_n}\| \leq C$. Ainsi, par définition de C, $\|X_{T_{n+1}} - X_{T_n}\| \leq 2C$ et, par une récurrence immédiate, $\|X_{T_n}\| \leq 2nC$, sur Ω_0.

Au total, on obtient que sur Ω_0, si $T_{n+1}(\omega) \geq t > T_n(\omega)$ alors $\|X_t(\omega)\| \leq 2(n+1)C$. D'où $\{T_n \geq t\} \cap \Omega_0 \subset \{\|X_t\| \leq 2nC\}$.

On obtient alors, par un calcul classique, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|X_t\|^m) &= m \int_0^\infty x^{m-1} \mathbb{P}(\|X_t\|\ x) dx \leq m(2C)^m \sum_{n \geq 1} (n+1)^{m-1} \mathbb{P}(X_t > 2nC) \\ &\leq m(2C)^m \sum_{n \geq 1} (n+1)^{m-1} \mathbb{P}(T_n < t) \leq m(2C)^m \sum_{n \geq 1} (n+1)^{m-1} \mathrm{e}^t \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-T_n}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Il reste à évaluer $\mathbb{E}(e^{-T_n})$.

Supposons que $\mathbb{P}(\{T_1 = \infty\}) > 0$. Soit $t > 0$, posons $\Lambda_t = \{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_{nt}\| < \infty\}$. On a $\mathbb{P}(\Lambda_t) > 0$. Comme $(X_t)_{t\geq 0}$ est un PAIS, la suite $(Y_n = X_{nt} - X_{(n-1)t})_{n\geq 1}$ est iid, donc $\mathbb{P}(\Lambda_t) = 1$ par la loi $0-1$ de Hewitt-Savage. Donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\|Y_n\|/n^{1/m} \to 0$ p.s. ce qui implique que $\mathbb{E}(\|X_t\|^m) = \mathbb{E}(\|Y_1\|^m) < \infty$ et prouve donc le résultat dans ce cas.

Supposons donc que $\mathbb{P}(T_1 = \infty) = 0$. Alors d'après le lemme 5.2, la suite $(T_{n+1} - T_n)_{n\geq 0}$ est iid. En particulier,

$$\mathbb{E}(e^{-T_n}) = (\mathbb{E}(e^{-T_1}))^n := \alpha^n. \tag{5.8}$$

Par continuité à droite des trajectoires, $T_1 > 0$ p.s. donc $\alpha < 1$ et on conclut à l'aide de (5.7). $\square$

Remarque : en fait on ne peut jamais avoir $\mathbb{P}(T_1 = \infty) > 0$, mais nous n'en avions pas besoin ici.

Nous aurons besoin du lemme technique suivant. On rappelle qu'une fonction $f : [a,b] \to E$, E un espace normé, est à variation bornée sur $[a,b]$ si $V_{[a,b]}(f) := \sup_{a=t_1<\cdots<t_n=b} \sum_{k=1}^{n-1} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|_E < \infty$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, f est à variation bornée ssi f est différence de deux fonctions croissantes.

Lemme 5.18. *Soit $(M_s)_{0\leq s\leq t}$ et $(N_s)_{0\leq s\leq t}$ des martingales (par rapport à une même filtration) dans $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$) càdlàg, telles que $M_0 = N_0 = 0$ p.s. $\mathbb{E}(\|M_t\|^2) < \infty$ et $\mathbb{E}((V_{[0,t]}N)^2) < \infty$. Alors*

$$\mathbb{E}(\langle M_t, N_t\rangle) = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}(\langle \Delta M_s, \Delta N_s\rangle).$$

On laisse la preuve au lecteur.

Corollaire 5.19. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ des processus de Lévy càdlàg, tels que $\mathbb{E}((V_{[0,t]}X)^2) < \infty$ et pour tout $t \geq 0$, $\Delta X_t = 0$ ou $\Delta Y_t = 0$, alors $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants.*

Preuve : soit $u, v \in \mathbb{R}^d$. on a déjà vu que l'on définit des martingales centrées par $M_t = \frac{e^{i\langle u, X_t\rangle}}{\mathbb{E}(e^{i\langle u, X_t\rangle})} - 1$ et $N_t = \frac{e^{i\langle v, Y_t\rangle}}{\mathbb{E}(e^{i\langle v, Y_t\rangle})} - 1$. Ces martingales vérifient clairement les hypothèses du lemme précédent. De plus, de la continuité en probabilité des processus de Lévy, on déduit que $\Delta M_t = 0$ si $\Delta X_t = 0$ et de même $\Delta N_t = 0$ si $\Delta Y_t = 0$. D'où, pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{E}(\langle M_t, N_t\rangle) = 0 = \frac{\mathbb{E}(e^{i\langle u, X_t\rangle} e^{i\langle v, Y_t\rangle})}{\mathbb{E}(e^{i\langle u, X_t\rangle})\mathbb{E}(e^{i\langle u, Y_t\rangle})} - 1,$$

ce qui prouve l'indépendance de X_t et Y_t.

Soit $s \geq 0$. On définit une martingale $(N_t^{(s)})_{t\geq 0}$ comme suit : $N_t^{(s)} = N_t$ si $t \leq s$ et $N_t^{(s)} = N_s$ si $t \geq s$. Le raisonnemment précédent montre alors que pour tout $t \geq s$, M_t est indépendant de N_s, d'où l'on déduit le résultat annoncé. $\square$

Proposition 5.20. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy càdlàg sur $\mathbb{R}^d$ et N la mesure de Poisson d'intensité $\lambda \otimes \mu$ associée. Alors $\int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} \min(1, \|x\|^2)\mu(dx) < \infty$, donc μ est une mesure de Lévy.*
Si $d = 1$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ est à valeurs positives, alors $\int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} \min(1, \|x\|)\mu(dx) < \infty$.

Preuve : Remarquons que pour tout $t \geq 0$, $\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d-\{0\}} x\mathbf{1}_{\{\|x\|>1\}} N(\cdot, dsdx)$ est bien défini, voir la preuve du Lemme 5.8 (ii). Soit $1 > \varepsilon > 0$. On condidère les processus de Lévy $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ donné par

$$\tilde{X}_t = X_t - \sum_{0\leq s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\|\Delta X_s\|>1\}} = X_t - \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d-\{0\}} x\mathbf{1}_{\{\|x\|>1\}} N(\cdot, dsdx), \quad \forall t \geq 0,$$

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \sum_{0\leq s\leq t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{\varepsilon<\|\Delta X_s\|\leq 1\}} = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d-\{0\}} x\mathbf{1}_{\{\varepsilon<\|x\|\leq 1\}} N(\cdot, dsdx), \quad \forall t \geq 0.$$

On constate que les temps de sauts des processus $(\tilde{X}_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t - \tilde{X}_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ sont distincts (p.s.), par construction.

Par ailleurs,

$$V_{[0,t]}(\tilde{X}^\varepsilon) = \sum_{0\leq s\leq t} \|\Delta X_s\| \mathbf{1}_{\{\varepsilon<\|\Delta X_s\|\leq 1\}} = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d-\{0\}} \|x\| \mathbf{1}_{\{\varepsilon<\|x\|\leq 1\}} N(\cdot, dsdx),$$

donc d'après le Lemme 5.10 (voir aussi sa preuve), on a

$$\mathbb{E}\big((V_{[0,t]}(\tilde{X}^\varepsilon)^2) \leq (t + t^2)\mu(\{\varepsilon < \|x\| \leq 1\}) < \infty.$$

En utilisant le Lemme 5.8, on en déduit que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\langle u, \tilde{X}_1\rangle})| \leq |\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\langle u, \tilde{X}_1^\varepsilon\rangle})| = \left|\exp\Big(\int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} (\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1)\mathbf{1}_{\{\varepsilon<\|x\|\leq 1\}} \mu(dx)\Big)\right|$$

$$= \exp\Big(-\int_{\{\varepsilon<\|x\|\leq 1\}} (1 - \cos(\langle u, x\rangle))\mu(dx)\Big) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \exp\Big(-\int_{\{0<\|x\|\leq 1\}} (1 - \cos(\langle u, x\rangle))\mu(dx)\Big)$$

D'après la continuité des fonctions caractéristiques, il existe $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $u \in B_d(0, \delta) = \{u \in \mathbb{R}^d \ : \ \|u\| < \delta\}$, $|\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\langle u, \tilde{X}_1\rangle})| > 1/2$. En utilisant que $1 - \cos v \geq v^2/4$, pour $|v| \leq 1$, et , on obtient alors pour tout $u \in \mathcal{B}_d$, $\int_{\|x\|\leq 1} \langle u, x\rangle^2 \mu(dx) \leq 4\int_{|\langle u,x\rangle|\leq 1} (1 - \cos(\langle u, x\rangle^2)\mu(dx) \leq 4\ln 2$. D'où en intégrant sur B_d par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ on conclut que $\int_{\|x\|\leq 1} \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$.

La deuxième partie de la proposition se démontre similairement en utilisant la transformée de Laplace au lieu de la transformée de Fourier.

□

Si N est une mesure de Poisson d'intensité $\lambda \otimes \mu$, pour tout $t \geq 0$, on note N_t la mesure de Poisson d'intensité μ définie par $N_t(\cdot, A) = N(\cdot, [0,t] \times A)$.

Proposition 5.21. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy càdlàg sur $\mathbb{R}^d$ et N la mesure de Poisson d'intensité $\lambda\otimes\mu$ associée. Alors il existe $b, c \in \mathbb{R}^d$, un mouvement brownien $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ standard, indépendant de N, tels que*

$$X_t = bt + \langle c, B_t \rangle + \int_{\{\|x\|<1\}} x(N_t(\cdot, dx) - t\mu(dx)) + \int_{\{\|x\|\geq 1\}} xN_t(\cdot, dx).$$

Preuve : Soit $\tilde{X}_t = X_t - \int_{\{\|x\|\geq 1\}} xN_t(\cdot, dx)$. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement décroissante vers 0, avec $\varepsilon_1 = 1$. Comme au Lemme 5.10, on considère la suite de martingale $(M_t^{(n)})_{t\geq 0}$ donnée par $M_t^{(n)} = \int_{\{\varepsilon_n<\|x\|\leq 1\}} x(N_t(\cdot, dx) - t\mu(dx))$. D'après le Corollaire 5.11, pour tout $t \geq 0$, $(M_t^{(n)})_n$ converge dans L^2 vers M_t et $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale. Comme pour tout $n \geq 1$, $(\tilde{X}_t - M_t^{(n)})_{t\geq 0}$ et $(M_t^{(n)})_{t\geq 0}$ sont indépendants donc il en est de même de $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0} := (\tilde{X}_t - M_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$.

Le processus $(\tilde{X}_t - M_t^{(n)})_{t\geq 0}$ a des sauts de taille au plus ε_n. De plus, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq t} \|B_s - (\tilde{X}_s - M_s^{(n)})\|^2) \to 0$. Donc, pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $\sup_{0\leq s\leq l} \|B_s - (\tilde{X}_s - M_s^{(n_k)}) \to 0$ p.s. et donc $(B_t)_{0\leq t\leq l}$ est continu pour tout $l \in \mathbb{N}$. Le thórème de Lévy ci-dessous montre alors que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. □

Théorème 5.22. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy continu. Alors, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.*

Preuve : D'apré le théorème de Lévy-khintchin, X_1 a une loi infiment divisible avec $\varphi_{X_1} = \mathrm{e}^{\psi_{b,c,\nu}}$. Soit $\alpha > 0$. D'après le Théorème 5.7, il existe une mesure de Poisson N d'intensité $\lambda\otimes\nu$. Soit $Z_t = \int_{\{\|x\|\geq\alpha\}} xN_t(\cdot, dx)$ et $Y_t = bt + cB_t + \int_{\{\|x\|<\alpha\}} x(N_t(\cdot, dx) - t\mu(dx))$ où (B_t) est un mouvement brownien standard indépendant de N. Alors, $(Y_t + Z_t)_{tge0}$ est un PAIS càdlàg de même loi que $(X_t)_{t\geq 0}$, il est donc continu d'après l'exercice 5.3. Mais, si t_0 est un instant de saut de (Z_t), par construction, ce ne peut être un instant de saut de (Y_t), contradiction. Donc (Z_t) n'a pas de saut et $\nu(\{\|x\| > \alpha\}) = 0$. Ainsi $\nu = 0$. □

5.5 Exercices

Exercice 5.1. *Montrer qu'un PAIS $(X_t)_{t\geq 0}$ est un subordinateur ssi ses trajectoires sont croissantes ssi $X_1 \geq 0$.*

Exercice 5.2. *Montrer que l'on définit bien des temps d'arret dans la preuve du Lemme 5.13.*

Exercice 5.3. 1) *Soit E un espace métrique et $f : [0,1] \to E$ une fonction càdlàg. Montrer que f n'est pas continue ssi il existe ε tel que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \max_{0\leq k\leq n-1} |f((k+1)/n) - f(k/n)| \geq \varepsilon.$$

2) *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus (admettant une modification) continu. Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus (admettant une version) càdlàg de mêmes lois fini-dimensionnelles que $(X_t)_{t\geq 0}$. Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est (admet une modification) continu.*

Exercice 5.4. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de poisson composé. Soit $(Z_n)_n$ la suite de va iid définissant $(X_t)_{t\geq 0}$. Montrer que pour tout réel $p \geq 1$, $X_1 \in L^p$ si et seulement si $Z_1 \in L^p$.*

Exercice 5.5. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy et N la mesure de poisson associé d'intensité $\lambda \otimes \mu$. Pour tout $p \geq 1$, montrer que $X_1 \in L^p$ si et seulement si $\int_{\{\|x\|\geq 1\}} \|x\|^p \mu(dx) < \infty$.*

Exercice 5.6. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy à sauts bornés. On écrit pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\langle u,X_1\rangle}) = \mathrm{e}^{\psi(u)}$. Montrer que ψ est de classe C^∞.*

Exercice 5.7 (**)**.** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy intégrable (i.e. $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$). Soit pour tout $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma\{X_u,\ u \leq s,\ X_v,\ v \geq t\}$. Montrer que pour tout $0 \leq c \leq a < b \leq d$, on a*

$$\mathbb{E}\big[(X_b - X_a)/(b-a)|\mathcal{F}_{c,d}\big] = (X_d - X_c)/(d-c).$$

(On expliquera qu'il suffit de montrer que pour tout $s < t < u$, $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{s,u}) = \frac{t-s}{u-s}X_s + \frac{u-t}{u-s}X_u$, puis que l'on peut supposer $s = 0$ et enfin on s'inspirera d'un exercice de deuxième année).

Bibliographie

[1] David Applebaum, Lévy processes and stochastic calculus. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 116. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[2] Jean-François Delmas, Introduction aux PAIS, polycopié de cours.

[3] Olav Kallenberg, Foundations of modern probability. Second edition. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2002.

[4] Florent Malrieu, Processus de Markov et inégalirés fonctionnelles, polycopié de cours.

[5] Daniel Revuz and Marc Yor, Continuous martingales and Brownian motion. Third edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 293. Springer-Verlag, Berlin, 1999.