Séries chronologiques

—

Le 15 mars 2012

—

Contrôle final - durée de 2 heures

—

Le sujet est imprimé sur 4 pages, en deux feuilles séparées
Un tableau est proposé en page 4 pour répondre à l'exercice 3
Il pourra être rendu avec la copie.

—

Les supports de cours fournis et les notes manuscrites sont autorisés

Exercice 1 (AR bruité). *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un AR(1), $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, où $|\phi| \neq 1$ et $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de moyenne nulle et de variance σ_Z^2. On définit*

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ Y_t = X_t + W_t\ ,$$

où W_t est un bruit blanc faible de moyenne nulle et de variance σ_W^2 On suppose par ailleurs que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{Z}^2, \mathbb{E}(W_s Z_t) = 0. \tag{1}$$

(a) Proposer une interprétation de l'hypothèse (1).

(b) Montrer que Y est stationnaire et calculer sa fonction d'atocovariance.

(c) Montrer que Y possède une densité spectrale et la calculer.

(d) Montrer que $Y_t - \phi Y_{t-1}$ est un processus MA(1).

(e) Conclure que Y est un ARMA(1,1) et donner ses trois paramètres (variance du bruit, coefficients de degré 1 des deux polynomes) en fonction de ϕ, σ_W et σ_Z.

Exercice 2 (AR(1) bivarié). *On note $\mathbb{L}^2$ l'ensemble des vecteurs aléatoires $\mathbf{X}$ de dimension 2 définis sur un même espace de probabilité tels que $\|\mathbf{X}\|^2 := \mathbb{E}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) < \infty$. On notera $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle = \mathbb{E}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y})$ le produit scalaire associé. On dit qu'un processus $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$ est stationnaire au second ordre si pour tout t, $\mathbf{X}_t \in \mathbb{L}^2$ et si de plus les moments $\mathbb{E}(\mathbf{X}_t)$ et $\mathrm{cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t\mathbf{X}_{t+h}^T) - \mathbb{E}(\mathbf{X}_t)\mathbb{E}(\mathbf{X}_{t+h})^T$ ne dépendent pas de t. On considère une suite de vecteurs aléatoires $(\boldsymbol{\epsilon}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\forall (t,t') \in \mathbb{Z}^2, \mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t\boldsymbol{\epsilon}_{t'}^T) = \delta_{t,t'}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\delta_{t,t'}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{t,t'} = 1$ si $t = t'$, 0 sinon). Soit $\mathbf{A}$ une matrice de dimension 2×2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathbf{A}$ pour l'existence d'une série chronologique bivariées $\mathbf{X}$ solution causale aux équations de récurrence linéaires suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t \tag{2}$$

Exercice 3 (Modélisation de séries chronologiques)**.** *On se donne quatre modèles de séries chronologiques :*

$$\mathcal{M}_1 \quad \begin{cases} X_t = 0.9X_{t-1} + Z_t \\ Z_t \text{ i.i.d } \mathcal{N}(0,1) \end{cases} \qquad \mathcal{M}_2 \quad \begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t \\ \sigma_t^2 = a + bX_{t-1}^2 \\ Z_t \text{ i.i.d } \mathcal{N}(0,1), 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_3 \quad \begin{cases} X_t = Z_t Z_{t-1} \\ Z_t \text{ i.i.d } \mathcal{N}(0,1) \end{cases} \qquad \mathcal{M}_4 \quad \begin{cases} X_t = 0.07t - 0.2 + Z_t \\ Z_t \text{ i.i.d} \end{cases}$$

Par ailleurs, on dispose de quatre séries $Y_1^i, \ldots, Y_{300}^i, i = 1,2,3,4$ de longueur 300 ($t = 1,\ldots,300$) dont on donne pour chacune un résumé sous forme de tracés différents : la trajectoire de Y^1, la fonction autocorrélation empirique de Y^2, le périodogramme de Y^3 et l'histogramme de Y^4. Le tout est représenté dans la Figure 1.

Il est demandé de dire, pour chaque couple (modèle,observations), si les observations sont compatibles avec le modèle proposé, ne le sont pas, ou s'il est difficile de donner une réponse. On justifiera avec précision et concision chacune des réponses.

*On pourra utiliser le tableau fourni avec le sujet, qu'**on n'oubliera pas de rendre avec la copie**. Dans ce cas, on pourra faire apparaître dans chaque case :*

- *la réponse ternaire : (`OUI`) pour "compatibles", (`NON`) pour "non compatibles" ou (?) pour "difficile à dire") ;*
- *et quelques lignes de justification. Les réponses plus longues seront reportées sur la copie.*

Exercice 4 (Causalité, prévision)**.** *On se donne $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance 1. Soient les équations de récurrence linéaire*

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ X_t - 0.5X_{t-1} = Z_t - 0.4Z_{t-1}\ . \tag{3}$$

(a) Montrer qu'il existe $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ solution stationnaire de (3).

(b) Cette solution est-elle causale en Z ?

(c) Montrer qu'on peut exprimer Z sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{Z},\ Z_t = \sum_{j\geq 0} \alpha_j X_{t-j}\ .$$

(d) Calculer α_j pour $j = 0,1,2$.

(e) Donner en fonction des $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une expression de

$$\hat{X}_1 = \underset{X\in V_1}{\arg\min}\, \mathbb{E}(X_1 - X)^2$$

où

$$V_1 := \overline{\mathrm{vect}}(X_s, s \leq 0)$$

c'est-à-dire l'adhérence dans $\mathbb{L}^2$ de l'ensemble constitué de toutes les combinaisons linéaires finies des $X_s, s \leq 0$.

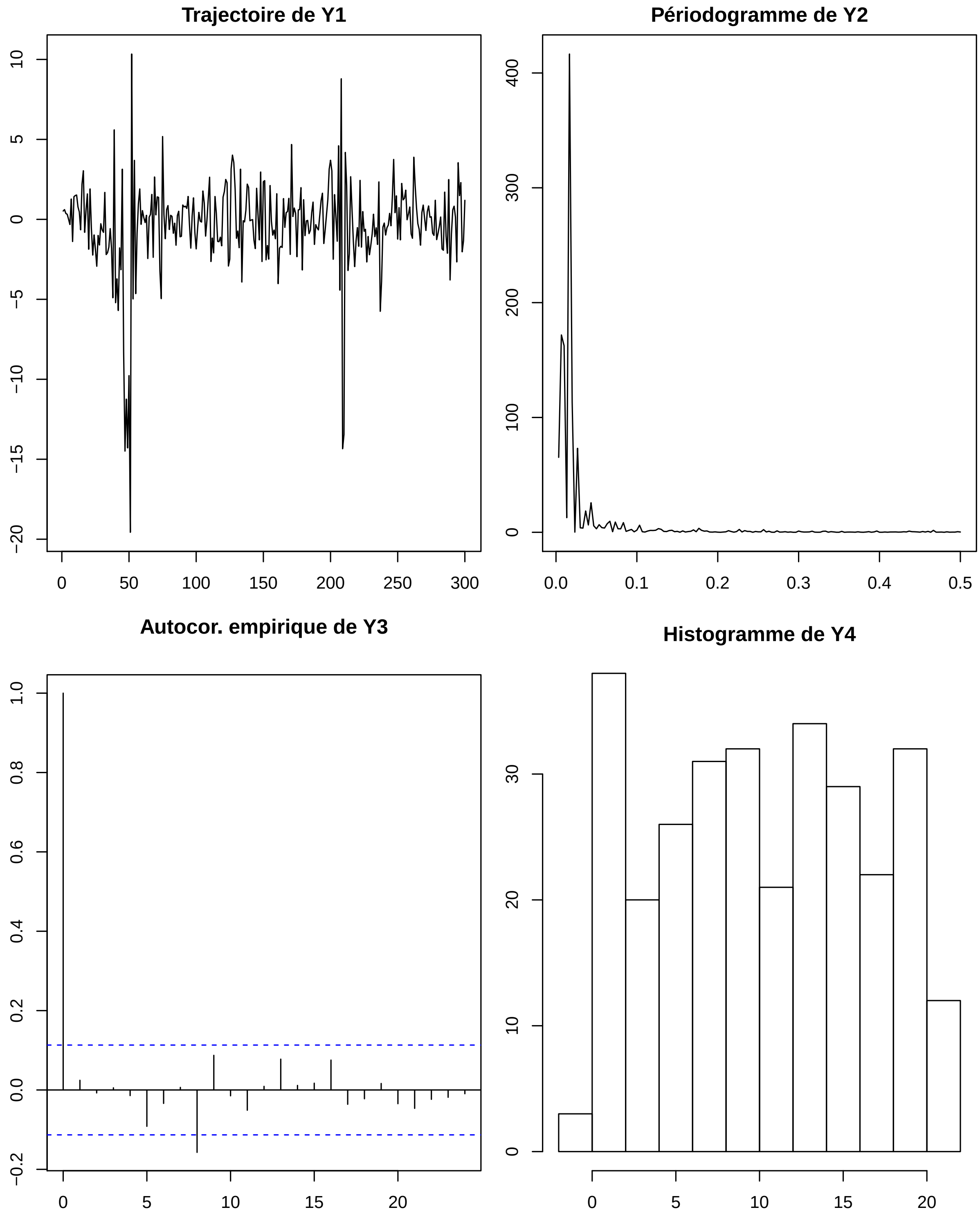

FIGURE 1. Données empiriques pour l'Exercice 3. Remarque : l'axe de fréquence pour le périodogramme est en pulsation $\omega = \lambda/(2\pi)$, donc 0.5 correspond à la fréquence π.

	Trajectoire de Y^1	**Autocorrélation empirique de Y^2**	**Périodogramme de Y^3**	**Histogramme de Y^4**
$\mathcal{M}_1$				
$\mathcal{M}_2$				
$\mathcal{M}_3$				
$\mathcal{M}_4$				