Correction de l'exercice 5.5

On admet le résultat (légèrement généralisé) de l'exercice 5.4, que l'on rappelle ici. La preuve de cette extension est identique.

Exercice 5.4. Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ un processus de poisson composé. Soit $(V_n)_n$ la suite de va iid définissant $(Z_t)_{t\geq 0}$. Montrer que pour tout réel $p \geq 1$, $Z_1 \in L^p$ si et seulement si $V_1 \in L^p$.

On veut montrer le résultat suivant (extension de l'exercice 5.5).
Exercice 5.5. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy issu de 0 et N la mesure de poisson associée d'intensité $\lambda \otimes \mu$. Pour tout $p \geq 1$, montrer que $X_1 \in L^p$ si et seulement si $\int_{\{\|x\|\geq 1\}} \|x\|^p \mu(dx) < \infty$ si et seulement si $X_t \in L^p$, pour tout $t > 0$.

Lemma 1. *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors pour tout $p > 0$, $X + Y \in L^p$ si et seulement si $X, Y \in L^p$.*

Preuve du lemme. Une direction est évidente. Montrons l'autre. Supposons donc que $X + Y \in L^p$. Soit μ_X et μ_Y les lois de X et Y respectivement. Par indépendance on a :

$$\mathbb{E}(|X+Y|^p) = \int_{\mathbb{R}^2} |x+y|\mu_X \otimes \mu_Y(dx, dy) < \infty\,.$$

Par Tonnelli, l'intégrande étant positive, on a pour μ_X-presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |x+y|^p \mu_Y(dy) = \mathbb{E}(|x+Y|^p) < \infty$$

d'où $Y \in L^p$, puis $X \in L^p$. □

Preuve de l'exercice 5.5. D'après le théorème de Lévy-Ito, il existe trois processus indépendants $(B_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$, tels que pour tout $t \geq 0$, $X_t = B_t + Y_t + Z_t$, et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un PAIS de sauts bornés (en norme) $\mathbb{P}$-p.s. par 1 et $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un PAIS dont les sauts sont $\mathbb{P}$-p.s. de norme plus grande que 1.

Un mouvement brownien admet des moments de tout ordre. D'après la Proposition 5.17, un PAIS à sauts bornés admet des moments de tout ordre également. Donc, dans les équivalences à établir, on peut remplacer X_1 et X_t par Z_1 et Z_t respectivement.

On va montrer que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé d'intensité proportionnelle à $\mathbf{1}_{\{\|x\|>1\}}\mu(dx)$. On passe par les fonctions caractéristiques. On rappelle que l'on note N_t la mesure aléatoire de Poisson, sur $\mathbb{R}^d - \{0\}$ définie par

$$N_t(\cdot, A) = N \cot, [0,t] \times A \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,.$$

D'après le théorème de Lévy-Ito, $Z_t = \int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} x\mathbf{1}_{\{\|x>1\|\}} N_t(\cdot, dx)$. Donc pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $i\langle u, Z_t\rangle = N_t(f_u)$, où $f_u(x) = i\langle u, x\rangle \mathbf{1}_{\{\|x>1\|\}}$.

Comme μ est une mesure de Lévy, $\mathbf{1}_{\{\|x>1\|\}} \in L^1(\mu)$. Par ailleurs, $\min(1,|f_u|) \leq \mathbf{1}_{\{\|x>1\|\}}$. On peut donc appliquer le point (ii) du lemme 5.8. On en déduit que

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\langle u,Z_1\rangle}) = \exp\Big(\int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} (\mathrm{e}^{i\langle u,x\rangle} - 1)\mathbf{1}_{\{\|x>1\|\}}\mu(dx)\,.$$

Soit $\lambda := \mu(\mathbf{1}_{\{\|x>1\|\}})$. On peut supposer $\lambda > 0$, sinon $(Z_t)_{t\geq 0}$ est le processus nul et on a fini. Posons aussi $\nu := \frac{1}{\lambda}\mathbf{1}_{\{\|x>1\|\}}\mu$. Alors ν est une mesure de probabilité et on constate (par identifications des lois) que Z_1 suit une loi de Poisson composé de paramètres (λ,ν) et donc (on rappelle que la loi d'un PAIS $(U_t)_{t\geq 0}$ est caractérisée par la loi de U_1) que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson composé de paramètres (λ,μ).

Il suffit alors d'appliqué l'exercice 5.4 en remarquant que V_1 adme ν pour loi. $\square$

Notons que l'équivalence de "$X_1 \in L^p$" et "$X_t \in L^p$ pour tout $t \geq 0$", peut se montrer entre autre à l'aide de l'inégalité maximale de Doob.