Montrons la stationarité des accroissements du processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$M_t = \int_{[0,t]\times S} f(x)N(\cdot, dsdx) - t\mu(f), \quad t \geq 0,$$

où $f \in L^1(\mu)$.

Il suffit de considérer le cas $f \geq 0$. On veut montrer que pour tout $t > s$, les variables $U_1 := \int_{[s,t]\times S} f(x)N(\cdot, dsdx)$ et $U_2 := \int_{[0,t-s]\times S} f(x)N(\cdot, dsdx)$ ont même loi. Comme elles sont positives il suffit de montrer qu'elles ont même transformée de Laplace. Soit $\lambda > 0$. En posant $g_1(u,x) := \lambda \mathbf{1}_{[s,t]}(u)f(x)$ et $g_2 := \lambda \mathbf{1}_{[0,t-s]}(u)f(x)$, puis en utilisant le lemme 5.8, on constate que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda U_1}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-N(g_1)}) &= \exp\big(\int_{\mathbb{R}^+\times S} (\mathrm{e}^{-g_1(u,x)} - 1)\lambda(du)\mu(dx)\big) \\
= \exp\big(\int_{\mathbb{R}^+\times S} (\mathrm{e}^{-f(x)} - 1)\mathbf{1}_{[s,t]}(u)\mu(dx)\big) &= \exp\big(\int_{\mathbb{R}^+\times S} (\mathrm{e}^{-f(x)} - 1)(t-s)\mu(dx)\big) \\
= \exp\big(\int_{\mathbb{R}^+\times S} (\mathrm{e}^{-f(x)} - 1)\mathbf{1}_{[0,t-s]}(u)\mu(dx)\big) &= \exp\big(\int_{\mathbb{R}^+\times S} (\mathrm{e}^{-g_2(u,x)} - 1)\lambda(du)\mu(dx)\big) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-N(g_2)}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda U_2}).
\end{aligned}$$