Processus de Markov

January 25, 2014

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ *des espaces mesurés.*
On appelle noyau de transition sur $\Omega \times \mathcal{E}$ *toute application* N *sur* $\Omega \times \mathcal{E}$ *telle que*

(a) *Pour tout* ω, $N(\omega, \cdot)$ *est une mesure sur* $\mathcal{E}$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ *des espaces mesurés.*
On appelle noyau de transition sur $\Omega \times \mathcal{E}$ *toute application* N *sur* $\Omega \times \mathcal{E}$ *telle que*

(a) *Pour tout* ω, $N(\omega, \cdot)$ *est une mesure sur* $\mathcal{E}$.
(b) *Pour tout* $A \in \mathcal{E}$, $N(\cdot, A)$ *est* $\mathcal{F}$*-mesurable.*

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ *des espaces mesurés.*
On appelle noyau de transition sur $\Omega \times \mathcal{E}$ *toute application* N *sur* $\Omega \times \mathcal{E}$ *telle que*

(a) *Pour tout* ω, $N(\omega, \cdot)$ *est une mesure sur* $\mathcal{E}$.

(b) *Pour tout* $A \in \mathcal{E}$, $N(\cdot, A)$ *est* $\mathcal{F}$*-mesurable.*

On parle de probabilité de transition si au (a), $N(\omega, \cdot)$ *est une probabilité pour tout* $\omega \in \Omega$.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ des espaces mesurés.
On appelle noyau de transition sur $\Omega \times \mathcal{E}$ toute application N sur $\Omega \times \mathcal{E}$ telle que

(a) *Pour tout ω, $N(\omega, \cdot)$ est une mesure sur $\mathcal{E}$.*
(b) *Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $N(\cdot, A)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.*

On parle de probabilité de transition si au (a), $N(\omega, \cdot)$ est une probabilité pour tout $\omega \in \Omega$.

Définition (Composition des noyaux)

Soit M et N des noyaux sur $E \times \mathcal{E}$. On définit un noyau noté MN sur $E \times \mathcal{E}$, par

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ *des espaces mesurés.*
On appelle noyau de transition sur $\Omega \times \mathcal{E}$ *toute application* N *sur* $\Omega \times \mathcal{E}$ *telle que*

(a) *Pour tout* ω, $N(\omega, \cdot)$ *est une mesure sur* $\mathcal{E}$.

(b) *Pour tout* $A \in \mathcal{E}$, $N(\cdot, A)$ *est* $\mathcal{F}$*-mesurable.*

On parle de probabilité de transition si au (a), $N(\omega, \cdot)$ *est une probabilité pour tout* $\omega \in \Omega$.

Définition (Composition des noyaux)

Soit M *et* N *des noyaux sur* $E \times \mathcal{E}$. *On définit un noyau noté* MN *sur* $E \times \mathcal{E}$, *par*

$$MN(x, A) = \int_E M(x, dy) N(y, A) \qquad \forall (x, A) \in E \times \mathcal{E}.$$

En prenant, $M(x, dy) = \nu(dy)$, pour tout $x \in E$, avec ν une mesure sur $\mathcal{E}$, on constate que les noyaux de transition agissent sur l'ensemble des mesures positives, et mème sur l'ensemble des probabilités si M est une probabilité de transition.

En prenant, $M(x, dy) = \nu(dy)$, pour tout $x \in E$, avec ν une mesure sur $\mathcal{E}$, on constate que les noyaux de transition agissent sur l'ensemble des mesures positives, et mème sur l'ensemble des probabilités si M est une probabilité de transition.

Un noyau de transition sur $E \times \mathcal{E}$ agit naturellement (à gauche) sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables positives (et même sur les fonctions $\mathcal{E}$-mesurables bornées lorsque l'on a une probabilité de transition) par

En prenant, $M(x, dy) = \nu(dy)$, pour tout $x \in E$, avec ν une mesure sur $\mathcal{E}$, on constate que les noyaux de transition agissent sur l'ensemble des mesures positives, et mème sur l'ensemble des probabilités si M est une probabilité de transition.

Un noyau de transition sur $E \times \mathcal{E}$ agit naturellement (à gauche) sur l'ensemble des fonctions $\mathcal{E}$-mesurables positives (et même sur les fonctions $\mathcal{E}$-mesurables bornées lorsque l'on a une probabilité de transition) par

$$Mf = \int_E f(y) M(x, dy) \qquad \forall (x, A) \in E \times \mathcal{E}.$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

En particulier pour tout fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ou bornée f, on aurait

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

En particulier pour tout fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ou bornée f, on aurait

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s)\,.$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

En particulier pour tout fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ou bornée f, on aurait

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s)\,.$$

On devrait également avoir pour tous $s < t < v$,

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

En particulier pour tout fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ou bornée f, on aurait

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s)\,.$$

On devrait également avoir pour tous $s < t < v$,

$$P_{s,v}(X_s, A) = P(X_v \in A|\sigma\{X_u,\ u \leq s\})$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

En particulier pour tout fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ou bornée f, on aurait

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s)\,.$$

On devrait également avoir pour tous $s < t < v$,

$$\begin{aligned} &P_{s,v}(X_s, A) = P(X_v \in A|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) \\ &= P(X_v \in A|\sigma\{X_u,\ u \leq t\}|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) \end{aligned}$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

En particulier pour tout fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ou bornée f, on aurait

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t} f(X_s)\,.$$

On devrait également avoir pour tous $s < t < v$,

$$\begin{aligned} P_{s,v}(X_s, A) &= P(X_v \in A | \sigma\{X_u,\ u \leq s\}) \\ &= P(X_v \in A | \sigma\{X_u,\ u \leq t\} | \sigma\{X_u,\ u \leq s\}) \\ &= \mathbb{E}(P_{t,v}(X_t, A) | \sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = \int_E P_{s,t}(X_s, dy) P_{t,v}(y, A), \end{aligned}$$

Par analogie avec les chaînes de Markov, un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ serait un processus pour lequel pour tout $t > s \geq 0$, il existe une probabilité de transition $P_{s,t}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad \forall A \in \mathcal{E}.$$

En particulier pour tout fonction $\mathcal{E}$-mesurable positive ou bornée f, on aurait

$$\mathbb{E}(f(X_t) | \sigma\{X_u, u \leq s\}) = P_{s,t} f(X_s)\,.$$

On devrait également avoir pour tous $s < t < v$,

$$\begin{gathered} P_{s,v}(X_s, A) = P(X_v \in A | \sigma\{X_u,\ u \leq s\}) \\ = P(X_v \in A | \sigma\{X_u,\ u \leq t\} | \sigma\{X_u,\ u \leq s\}) \\ = \mathbb{E}(P_{t,v}(X_t, A) | \sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = \int_E P_{s,t}(X_s, dy) P_{t,v}(y, A), \end{gathered}$$

$$\text{i.e. } P_{s,v} = P_{s,t} P_{t,v}.$$

Définition (Equations de Chapman-Kolmogorov)

Une famille $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ *de noyaux de transition sur* $(E, \mathcal{E})$ *est appelé une fonction de transition si pour tous* $s < t < u$*,*

$$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}.$$

Définition (Equations de Chapman-Kolmogorov)

Une famille $(P_{s,t})_{0\leq s<t}$ *de noyaux de transition sur* $(E,\mathcal{E})$ *est appelé une fonction de transition si pour tous* $s<t<u$,

$$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u}.$$

Définition

Une fonction de transition $(P_{s,t})_{0\leq s<t}$ *est dite homogène si* $P_{s,t}$ *ne dépend de* s *et* t *que par la différence* $t-s$. *Alors, si l'on note* $P_t := P_{0,t}$, *les équations de Chapman-Kolmogorov se réécrivent*

$$P_{s+t} = P_sP_t,$$

en particulier $(P_t)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe.*

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *est un processus de Markov par rapport à la filtration* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *de fonction de transition* $(P_{s,t})0 \leq s < t$*, si pour toute fonction* $\mathcal{E}$*-mesurable positive et pour tout* $0 \leq s < t$*,*

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *est un processus de Markov par rapport à la filtration* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *de fonction de transition* $(P_{s,t})0 \leq s < t$*, si pour toute fonction* $\mathcal{E}$*-mesurable positive et pour tout* $0 \leq s < t$*,*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s) \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{1}$$

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *est un processus de Markov par rapport à la filtration* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *de fonction de transition* $(P_{s,t})0 \leq s < t$*, si pour toute fonction* $\mathcal{E}$*-mesurable positive et pour tout* $0 \leq s < t$*,*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s) \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{1}$$

La mesure de probabilité $X_0(\mathbb{P})$ *est appelée loi initiale de* $(X_t)_{t\geq 0}$*. Le processus est dit homogène si la fonction de transition l'est, et dans de cas, l'égalité précédente s'écrit*

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré. Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $(E, \mathcal{E})$ *est un processus de Markov par rapport à la filtration* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *de fonction de transition* $(P_{s,t})0 \leq s < t$*, si pour toute fonction* $\mathcal{E}$*-mesurable positive et pour tout* $0 \leq s < t$*,*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = P_{s,t}f(X_s) \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{1}$$

La mesure de probabilité $X_0(\mathbb{P})$ *est appelée loi initiale de* $(X_t)_{t\geq 0}$*. Le processus est dit homogène si la fonction de transition l'est, et dans de cas, l'égalité précédente s'écrit*

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\sigma\{X_u,\ u \leq s\}) = P_{t-s}f(X_s) \qquad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

Proposition

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Markov (sur* $(E,\mathcal{E})$*) de mesure initiale* ν *et de fonction de transition* $(P_{s,t})$*, si et seulement si pour tous* $0 = t_0 < \ldots < t_k$ *et toutes fonctions* $\mathcal{E}$*-mesurables positives* $f_0, \ldots, f_k$*,*

Proposition

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Markov (sur* $(E,\mathcal{E})$*) de mesure initiale* ν *et de fonction de transition* $(P_{s,t})$*, si et seulement si pour tous* $0 = t_0 < \ldots < t_k$ *et toutes fonctions* $\mathcal{E}$*-mesurables positives* $f_0,\ldots,f_k$*,*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k} f_i(X_i)\right) =$$
$$\int_E \nu(dx_0)f_0(x_0)\int_E P_{0,t_1}(x_0,dx_1)f_1(x_1)\ldots\int_E P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1},dx_k)f_k(x_k).$$

On se place dans la situation suivante :

(*i*) $\Omega := E^{\mathbb{R}^+}$,

(*ii*) $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$,

(*iii*) $(X_t)_{t \geq 0}$ est le processus coordonnées sur Ω,

(*iv*) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle asoociée à $(X_t)_{t \geq 0}$.

On se place dans la situation suivante :

(i) $\Omega := E^{\mathbb{R}^+}$,

(ii) $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$,

(iii) $(X_t)_{t \geq 0}$ est le processus coordonnées sur Ω,

(iv) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle asoociée à $(X_t)_{t \geq 0}$.

On suppose également que E est un espace polonais muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$.

On se place dans la situation suivante :

(*i*) $\Omega := E^{\mathbb{R}^+}$,

(*ii*) $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{R}^+}$,

(*iii*) $(X_t)_{t \geq 0}$ est le processus coordonnées sur Ω,

(*iv*) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle asoociée à $(X_t)_{t \geq 0}$.

On suppose également que E est un espace polonais muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$.

Théorème

Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathcal{E}$ et $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ une fonction de transition sur $(E, \mathcal{E})$. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}_\nu$ sur $\mathcal{F}$ tel que $(X_t)_{t \geq 0}$ soit un processus de Markov sur $(E, \mathcal{E})$ de fonction de transition $(P_{s,t})_{0 \leq s < t}$ et de loi initiale ν.

Notons $\mathbb{E}_\nu$ l'espérance sous $\mathbb{P}_\nu$. Lorsque $\nu := \delta_x$ avec $x \in E$, on note plutot $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_{\delta_x}$ et $\mathbb{E}_x := \mathbb{E}_{\delta_x}$.

Notons $\mathbb{E}_\nu$ l'espérance sous $\mathbb{P}_\nu$. Lorsque $\nu := \delta_x$ avec $x \in E$, on note plutot $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_{\delta_x}$ et $\mathbb{E}_x := \mathbb{E}_{\delta_x}$.

Proposition

Soit Z une variable $\mathcal{F}$-mesurable positive. L'application $x \mapsto \mathbb{E}_x(Z)$ est $\mathcal{E}$-mesurable est pour toute mesure νsur $\mathcal{E}$, on a :

$$\mathbb{E}_\nu(Z) = \int_E \nu(dx)\mathbb{E}_x(Z).$$

Notons $\mathbb{E}_\nu$ l'espérance sous $\mathbb{P}_\nu$. Lorsque $\nu := \delta_x$ avec $x \in E$, on note plutot $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_{\delta_x}$ et $\mathbb{E}_x := \mathbb{E}_{\delta_x}$.

Proposition

Soit Z une variable $\mathcal{F}$-mesurable positive. L'application $x \mapsto \mathbb{E}_x(Z)$ est $\mathcal{E}$-mesurable est pour toute mesure νsur $\mathcal{E}$, on a :

$$\mathbb{E}_\nu(Z) = \int_E \nu(dx)\mathbb{E}_x(Z).$$

Proposition (Propriété de Markov)

Soit Z une variable $\mathcal{F}$-mesurable positive. Pour tout $t > 0$ et toute mesure initiale ν,

$$\mathbb{E}_\nu(Z \circ \theta_t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{X_t}(Z) \qquad \mathbb{P}_\nu\text{-a.s.}$$