Fiche n° 1: Stationnarité, filtrage, processus linéaires et ARMA

Jeudi 12 janvier 2012

Exercice 1.1. Montrer, sans utiliser la notion de mesure spectrale, que

$$R(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0; \\ \rho & \text{si } |h| = 1; \\ 0 & \text{si } |h| > 1. \end{cases}$$

est la suite des autocovariances d'un processus stationnaire au second ordre si et seulement si $|\rho| \leq 1/2$. On rappelle qu'une suite est une suite d'autocovariance si et seulement si elle est de type positif.

Solution : $R(h)$ ressemble à la suite des autocovariance d'un MA(1) $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ qui est

$$\gamma(h) = \sigma^2 \begin{cases} 1+\theta^2 & \text{si } h = 0; \\ \theta & \text{si } |h| = 1; \\ 0 & \text{si } |h| > 1. \end{cases}$$

On résoud alors le système

$$\begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) = 1 \\ \sigma^2\theta = \rho \end{cases}$$

qui équivaut à $\sigma = \rho/\theta$ et $\rho(1+\theta^2) = \theta$. Il existe une solution si et seulement si le discriminant $1-4\rho^2$ est positif soit $|\rho| \leq 1/2$. Montrons que dans le cas contraire, il n'existe aucun processus (qui serait autre qu'un MA(1)) ayant R pour suite d'autocovariance. Il suffit de montrer que R n'est pas de type positif dans ce cas. On se donne des instants $t_i = i$, $i = 1, \dots, n$. Si R est de type positif, alors pour tout $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i R(t_i - t_j) a_j = A'\Gamma_n A \geq 0$$

avec

$$\Gamma_n = [R(t_i - t_j)]_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & \dots & \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \rho & 1 & \rho \\ & & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Prenons alors $A = [(-1)^k]_{k=1,\dots,n}$. On a $A'\Gamma_n A = n - 2(n-1)\rho = n(1-2\rho) + 2\rho$. Or, cette dernière quantité devient négative pour n assez grand si $\rho > 1/2$. De même avec $A = [1 \dots 1]$, $A'\Gamma_n A = n + 2(n-1)\rho = n(1+2\rho) - 2\rho$ qui devient négatif pour n assez grand et $\rho < 1/2$..

Exercice 1.2 (Processus à spectre discret)**.** Soit K un ensemble au plus dénombrable. On considère une collection $(A_k)_{k \in K}$ de variables aléatoires complexes, centrées, décorrélées et de variance σ_k^2, $\sum_k \sigma_k^2 < \infty$ et une collection $(\lambda_k)_{k \in K}$ de réels distincts de $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que les équations
$$X_t = \sum_{k \in K} A_k \exp(\mathrm{i}t\lambda_k)$$
définissent un processus stationnaire au second ordre.
2. Calculer la mesure spectrale de X_t.

Solution :

1. Dans le cas où K est infini, il faut montrer que la série converge dans $\mathbb{L}^2$. Elle est de Cauchy. En effet
$$\mathbb{E}\|\sum_p^q A_k \exp(\mathrm{i}t\lambda_k)\|^2 = \sum_{k,k'} \exp(\mathrm{i}t(\lambda_k - \lambda_{k'})\mathbb{E}(A_k\overline{A_{k'}}) = \sum_p^q \sigma_k^2 \to 0$$
lorsque $p, q \to \infty$ car la série de terme général σ_k est dans ℓ^2 par hypothèse. On calcule facilement par ailleurs que $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et que $\Gamma(t, t') = \sum_k \sigma_k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t')\lambda_k} =: \gamma(t - t')$ ce qui finit d'établir la stationnarité au second ordre.
2. On peut réécrire $\gamma(h) = \sum_k \sigma_k^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}h\lambda_k}$ sous la forme $\int_{]-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}h\lambda} d\mu(\lambda)$ avec $\mu = \sum_k \sigma_k^2 \delta_{\lambda_k}$.

Exercice 1.3. Montrer que si $|\phi| = 1$, il n'y a pas de solution stationnaire à l'équation de récurrence
$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \ .$$
où Z_t est un bruit blanc de variance 1.

Solution : Supposons qu'il existe une solution stationnaire, on a alors $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma_X^2$. Mais on tire facilement de la définition l'expression $X_t - X_{t-k} = \sum_{t-k+1}^t Z_t$. Le terme de droite est de norme quadratique $\sqrt{k}$ (le nombre de terme). Par l'inégalité triangulaire, celui de gauche est au plus de norme quadratique $2\sigma_X$, ce qui conduit à une contradiction pour tout k assez grand.

Exercice 1.4. Soit un processus linéaire $X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j Z_{t-j}$ avec (ψ_j) absolument sommable.

1. Montrer que $(\gamma(h))$ la suite des autocovariances est absolument sommable.
2. Montrer que
$$2\pi f(0) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) = \sigma^2 (\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j)^2.$$
où f désigne la densité spectrale de X.

Solution :

1. L'existence de X, sa stationnarité et la forme de sa fonction d'autocovariance sont des résultats de cours. En particulier
$$\gamma_X(h) = \sigma_Z^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{j+h}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\gamma_X(h)| &= \sigma_Z^2 \sum_h |\sum_j \psi_j\psi_{j+h}| \\ &\leq \sigma_Z^2 \sum_{j,h} |\psi_j\psi_{j+h}| \\ &= \sigma_Z^2 (\sum_2 |\psi_j|)^2 < \infty .\end{aligned}$$

2. Le résultat découle de ce qui précède et de Fubini :

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h) = \sigma_Z^2 \sum_h \sum_j \psi_j\psi_{j+h} = \sigma^2 \sum_j \psi_j \sum_h \psi_{j+h} = \sigma^2 (\sum_j \psi_j)^2 .$$

Exercice 1.5. Soit un processus AR de polynôme $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$. Montrer qu'il est causal si et seulement si (ϕ_1, ϕ_2) appartient au triangle défini par $\{(\phi_1, \phi_2), |\phi_2| < 1, \phi_1 + \phi_2 < 1, -\phi_1 + \phi_2 < 1\}$. Il est plus pratique de raisonner sur le polynôme $P(z) = z^2 - \phi_1 z - \phi_2$, dont les racines sont les inverses de celles de $\phi(z)$.

Solution : Une CNS pour la causalité est que les racines de ϕ se trouvent à l'extérieur du cercle unité (donc en particulier non nulles), ce qui équivaut au fait que les racines de P se trouvent à l'intérieur (ouvert) de celui-ci. Le discriminant est $\Delta = \phi_1^2 + 4\phi_2$. Si il est négatif, on vérifie que les deux racines sont de module $-\phi_2$ ce qui impose $\phi_2 > -1$. On est causal dans l'ensemble délimité par ce segment horizontal $\phi_2 = -1$ et la parabole $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$ dans le plan (ϕ_1, ϕ_2). Si le discriminant est positif, on écrit une première condition sur l'une des racines :

$$\tfrac{1}{2}(\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}) < 1 \Leftrightarrow \phi_1^2 + 4\phi_2 < (2 - \phi_1)^2 \Leftrightarrow \phi_1 + \phi_2 < 1$$

De même

$$\tfrac{1}{2}(\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}) < 1 \Leftrightarrow \phi_1^2 + 4\phi_2 > (2 + \phi_1)^2 \Leftrightarrow \phi_2 - \phi_1 < 1.$$

Il reste à vérifier que ces conditions sur (ϕ_1, ϕ_2) sont suffisantes.

Exercice 1.6. Soit X un ARMA. Montrer qu'il existe une constante positive C et $s \in (0, 1)$ tels que $|\gamma(h)| \leq C s^{|h|}$. γ est donc absolument sommable.

Exercice 1.7. On sait que $X_t = Z_t - Z_{t-1}$ est un ARMA non inversible. On ne peut exprimer Z_t comme filtré linéaire du passé de X à l'instant t. Montrer que, néammoins, Z_t s'obtient comme limite dans $\mathbb{L}^2$ de la suite

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} (1 - j/n) X_{t-j}.$$

Solution : De fait, le polynôme MA est $\theta(z) = 1 - z$; il admet 1 comme racine donc le processus X n'est pas inversible par rapport à Z (mais parfaitement défini, et causal par

rapport à Z). Ce qui veut dire qu'on ne peut pas écrire Z_t comme une moyenne mobile du passé de X, de la forme
$$Z_t = \sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j} \; .$$
En revanche, Z_t peut appartenir à l'adhérence de $\mathrm{vect}(X_j, j \geq t)$. C'est le cas ici :
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=0}^{n}(1-j/n)X_{t-j} = \sum_{j=0}^{n}(1-j/n)(Z_{t-j} - Z_{t-j-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n}(1-j/n)(Z_{t-j} - \sum_{j=1}^{n+1}(1-(j-1)/n)Z_{t-j}) \\ &= Z_t - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_{t-j} \; . \end{aligned}$$
On a donc $\|S_n - Z_t\|^2 = n^{-1}\sigma_Z^2 \to_{\mathbb{L}^2} 0$ d'où $S_n \to_{\mathbb{L}^2} Z_t$.

Exercice 1.8. Soient $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\phi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont deux suites de variables i.i.d et indépendantes entre elles. On suppose $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ centré de variance σ^2.

1. Montrer que si $\mathbb{E}[|\phi_1|^2] < 1$, alors l'équation de récurrence
$$X_t = \phi_t X_{t-1} + Z_t.$$
admet une solution stationnaire du second ordre $\{X_t\}$ que l'on explicitera sous la forme d'une série convergente dans $\mathbb{L}^2$.
2. Montrer que sa fonction d'autocovariance vérifie
$$\begin{cases} \gamma_X(0) = \frac{\sigma^2}{1-\mathbb{E}[\phi_1^2]}, \\ \gamma_X(k) = \mathbb{E}[\phi_1]\gamma_X(k-1), \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 1.9. On pose $\Psi_1 = (5I + 2B - 3B^2)/4$ et $\Psi_2 = (I + B_2)/2$ deux moyennes mobiles finies, et $\Psi = \Psi_1\Psi_2$.

1. Déterminer les suites absorbées par Ψ_i, $i = 1, 2, 3$.
2. Déterminer les suites invariantes par Ψ_1 et Ψ_2 et vérifier que Ψ_3 laisse invariants les polynômes de degré 1.
3. On pose $X_t = at + b + S_t + U_t$ où S est une coposante saisonnière de période 4 et de somme nulle, et (U_t) un bruit blanc centré de moyenne σ^2. Calculer la structure de premier et deuxième ordre de $Y_t = \Psi_3 X_t$.

Fiche n° 2: Estimation et Prédiction

Pour le 9 février 2012

Exercice 2.1. On dit qu'un processus est m-dépendant si pour tout t X_t est indépendants de tous les $X_{t+h}, |h| > m$. Par exemple un $MA(q)$ est m dépendant. Prouver la normalité asymptotique de la moyenne empirique pour un processus stationnaire au second ordre et m-dépendant. On pourra commencer par regrouper les $X_1, \dots, X_n$ par blocs de taille k séparés de m de sorte à être indépendants et prouver un TLC sur une partie des observations.

Exercice 2.2. On dira qu'un P.S.S.O est à longue mémoire de coefficient de Hurst $H \in]1/2, 1[$ si sa fonction d'autocovariance vérifie $\gamma(h) \sim_{h\to+\infty} Ch^{2H-2}$. Prouver que

$$n^{2-2H}\mathrm{Var}(\bar{X}_n) \to c(H)$$

pour une constante $c(H)$ positive. Commenter ce résultat (vitesse de convergence, utilisation d'un point de vue statistique).

Solution :

$$\begin{aligned} n^{2-2H}\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = n^{-2H}\sum\nolimits_{i,j}\mathrm{cov}(X_i, X_j) &= n^{-2H}\sum\nolimits_{h=-n+1}^{n-1}\gamma(h)(n-|h|) \\ &= C\frac{1}{n}\sum\nolimits_{h=-n+1}^{n-1}\left|\frac{h}{n}\right|^{2H-2}\left(1-\frac{|h|}{n}\right) + \text{reste} \end{aligned}$$

On reconnaît en le premier terme une somme de Riemann qui converge vers

$$C\int_{-1}^{1} u^{2H-2}(1-u)du$$

et on montre que le reste tend vers 0 (par exemple : couper la somme en deux bouts et choisir un bon seuil fonction de n de sorte que ces deux bouts tendent vers zéro).

On voit donc que la convergence n'a pas lieu à la vitesse classique de $\sqrt{n}$ (soit $\mathrm{Var}(\bar{X}_n) \sim n$ ou TLC comme en i.i.d. $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$). Ici, si convergence en loi il y a, on peut s'attendre à ce qu'elle ait lieu à une vitesse différente, qui dépend du paramètre inconnu, et vers une loi qui dépend également de H. Ce qui complique la tâche pour construire un intervalle de confiance. Il faut d'abord estimer H par un certain $\hat{H}$ (plusieurs estimateurs existent, Whittle local, Geweke-Porter Hudack etc.) puis trouver un théorème limite sur $n^{1-H}(\bar{X}_n - \mu) \to \mathcal{L}_H$ où la loi limite dépend de H.

Exercice 2.3. Pour X un MA(1), calculer

1. $\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_1,X_2)}(X_3)$
2. $\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_4,X_5)}(X_3)$
3. $\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_1,X_2,X_4,X_5)}(X_3)$

et les parts de variance expliquée correspondantes.

Solution :

1. Pour un MA(1) avec $\sigma = 1$ (sans perte de généralité), on a $\gamma(0) = 1 + \theta^2, \gamma(h) = \theta$ si $|h| = 1$ et $\gamma(h) = 0$ si $|h| > 1$. Les équations de Yule-Walker donnent pour solution $\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_1,X_2)}(X_3) = \alpha X_1 + \beta X_2$ avec (α, β) solution de

$$\begin{pmatrix} 1+\theta^2 & \theta \\ \theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   La résolution système donne $(\beta, \alpha) = u^{-1}(\theta(1+\theta^2), -\theta^2)$ avec $u = 1 + \theta^2 + \theta^4$. On calcule alors $\mathrm{Var}(\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_1,X_2)}(X_3)) = \cdots = \theta^6(1+\theta)^2/u^2$. La part de variance expliquée est donc θ^6/u^2.
2. On obtient exactement les mêmes équations (réversibilité des processus linéaires) donc la même solution en retournant le temps $\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_4,X_5)}(X_3) = \alpha X_5 + \beta X_4$.
3. Les sous-espaces $\mathrm{vect}(X_1, X_2)$ et $\mathrm{vect}(X_4, X_5)$ sont orthogonaux de sorte que

$$\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_1,X_2,X_4,X_5)}(X_3) = \mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_4,X_5)}(X_3) + \mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_1,X_2)}(X_3)$$

   et que les parts de variance expliquées s'ajoutent. On peut vérifier que le résultat est inférieur à 1...

Exercice 2.4. Pour $X_t = 2X_{t-1} + Z_t$ un AR(1) anti-causal, calculer $\mathcal{P}_{\mathrm{vect}(X_h, h \leq n)}(X_{n+1})$.

Solution : Attention ici, l'AR n'est pas causal et on ne peux appliquer le simple raisonnement “toute l'information sur X_t apportées par son passé est $2X_{t-1}$, Z_t étant dans le présent ou le futur”. NB : on peut d'ailleurs d'emblée dire que le prédicteur linéaire de X_t n'est pas $2X_{t-1}$ en remarquant qu'on aurait là un prédicteur de variance (quatre fois) plus forte que X_t alors que toute projection orthogonale est contractante. On peut utiliser la représentation anti-causale de X_t, pour établir que la fonction d'autovariance est la même que si le coefficient avait été 1/2 au lieu de 2. Il y a d'ailleurs un résultat plus général. Chaque racine du polynôme AR à l'intérieur du cercle unité peut être remplacée par son inverse pour obtenir finalement un polynôme AR causal fournissant la même structure de second ordre (à une constante mutliplicative près).

Donc X_{t+1} peut se décomposer en

$$X_{t+1} = \frac{1}{2}X_t + \frac{3}{2}X_t + Z_{t+1}$$

où le premier membre de droite est le prédicteur linéaire optimal et la somme des deux autres est dans l'orthogonal de $\mathrm{vect}(X_s, s \leq t)$ (et à X_t en particulier !). Le vérifier pour exercice.

Exercice 2.5. Calculer la fonction d'autocovariance de l'ARMA(2,1) causal solution de

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - 0.7X_{t-1} + 0.12X_{t-2} = Z_t + 0.5Z_{t-1}.$$

Solution : On vérifie que X_t est bien causal par rapport à Z_t car le polynôme AR se factorise en $\phi(z) = 1 - 0.7z + 0.12z^2 = (0.3z - 1)(0.4z - 1)$ dont les racines sont 1/0.3 et 1/0.4. Il existe alors une écriture

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j Z_{t-j}$$

où les ψ_j s'obtiennent en calculant le développement en série entière de $\frac{\theta(z)}{\phi(z)}$ en zéro qui est absolument convergent sur le disque unité. On a notamment comme début de développement

$$\frac{\theta(z)}{\phi(z)} = \frac{1+0.5z}{1-0.7z+0.12z^2} = (1+0.5z)(1+0.7z+\dots) = 1+1.2z+\dots$$

de sorte que $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 1.2$ etc. Soit X_t une solution stationnaire de covariance γ. On a pour tout h positif

$$\langle X_{-h}, X_0 - 0.7X_{-1} + 0.12X_{-2}\rangle = \langle X_{-h}, Z_0 + 0.5Z_{-1}\rangle.$$

Les produits scalaires de droite pour $h \geq 2$ sont nuls, d'après la causalité. On obtient donc

$$\forall h \geq 2, \gamma(h) - 0.7\gamma(h-1) + 0.12\gamma(h-2) = 0$$

qui est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $P(z) = z^2 - 0.7z + 0.12 = (z-0.3)(z-0.4)$. Les solutions sont donc de la forme $\alpha 0.3^h + \beta 0.4^h$. Les coefficients α et β sont obtenu en écrivant les conditions initiales, en formant les produits scalaires avec X_{-1} et X_0 qui donnent

$$\begin{aligned}
&\gamma(1) - 0.7\gamma(0) + 0.12\gamma(1) = 0.5\sigma^2 \\
&\gamma(0) - 0.7\gamma(1) + 0.12\gamma(2) = \langle Z_0 + 1.2Z_{-1} + \dots, Z_0 + 0.5Z_{-1}\rangle = 1.6\sigma^2
\end{aligned}$$

On résout ensuite en α et β après injection de la forme générique de γ trouvée ci-dessus. On obtient une fonction d'autocorrélation $\rho(h) = -3.68(0.3)^h + 4.68(0.4)^h$. Attention aux conventions de signes pour les coefficients des polynômes avec cette fonction de R :

```
ret = ARMAacf(ar = c(0.7,-0.12), c(0.5), lag.max = 20, pacf = F)
```

Remarque : une méthode alternative consiste à calculer d'abord le filtre MA(∞) ψ en identifiant termes à termes $\psi(z)\phi(z)$ et $\theta(z)$ puis à appliquer la formule $\gamma(h) = \sigma^2 \sum_j \psi_j \psi_{j+h}$.

Fiche n° 3: Estimation et Prédiction

ARMA, ARCH et GARCH

Exercice 3.1. Soit l'équation de récurrence AR(2)

$$X_t - X_{t-1} + 0.25X_{t-2} = Z_t + Z_{t-1}$$

1. Montrer qu'elle admet une solution stationnaire causale unique.
2. Par les deux moyens données dans la correction de l'exercice 2.5, montrer que la fonction d'autocovariance de cette solution est donnée par

$$\gamma(h) = \sigma_Z^2(\frac{32}{3} + 8|h|)2^{-|h|}$$

Exercice 3.2. Moments conditionnels (1). On note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $X_s, s \leq t$ (ou filtration naturelle du processus X_t). Soit un AR(1) $X_t = c + aX_{t-1} + Z_t$, avec $|a| < 1$, Z bruit blanc fort de variance σ^2. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t = \frac{c}{1-a} \quad &\text{et} \quad \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = c + aX_{t-1} \\ \mathrm{Var}X_t = \frac{\sigma}{1-a^2} \quad &\text{et} \quad \mathrm{Var}(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Exercice 3.3. Moments conditionnels (2). Calculer les moments (inconditionnels et conditionnels) de l'exercice précédent pour un MA(1) $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$.

Exercice 3.4. On appelle kurtosis ou coefficient d'applatissement le ratio

$$\kappa := \frac{\mathbb{E}Z^4}{(\mathbb{E}Z^2)^2}$$

1. Montrer qu'il est égal à 3 pour une variable gaussienne centrée.
2. Montrer qu'il vaut

$$3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$$

   si $3\alpha_1^2 < 1$ et qu'il n'existe pas sinon.
3. Montrer qu'il est plus grand que 3 pour tout ARCH(p)