

Chapitre 1

Processus gaussiens

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Définition 1.1.1 (Processus stochastique) Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité. On appelle processus aléatoire (ou stochastique) à valeurs dans (E, \mathcal{E}) , une collection de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

Les ensembles d'indices les plus couramment considérés sont les cas $\mathcal{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}_+$ ou \mathbb{R}_+^N . On verra dans le cadre de ce cours que suivant l'ensemble d'indices considéré, l'étude des processus stochastiques revêt une complexité variable.

Exemple Signal temporel, image, champ aérodynamique, ...

Définition 1.1.2 (Trajectoire d'un processus) Soit $X = \{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ un processus aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Alors pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est appelée trajectoire de X .

De manière usuelle, on omet le paramètre ω en gardant à l'esprit que les X_t sont bien des variables aléatoires. Ainsi, l'application $t \mapsto X_t$ peut être appelée *fonction aléatoire*.

Définition 1.1.3 Le processus $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ est appelé modification du processus $\{Y_t; t \in \mathcal{T}\}$ si pour tout $t \in \mathcal{T}$, $P\{X_t = Y_t\} = 1$.

Définition 1.1.4 Les processus $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ et $\{Y_t; t \in \mathcal{T}\}$ sont dits indistingables si leurs trajectoires sont égales presque sûrement, i.e.

$$P\{\forall t \in \mathcal{T}, X_t = Y_t\} = 1.$$

Définition 1.1.5 (Filtration) On suppose que la collection d'indices \mathcal{T} est ordonnée. On appelle filtration de l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) une suite croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de sous-tribus de \mathcal{F} . On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}, P)$ est un espace de probabilité filtré.

1.2 Loi d'un processus stochastique

Un processus stochastique $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ à valeurs dans (E, \mathcal{E}) peut être considéré comme une application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow E^{\mathcal{T}} \\ \omega &\mapsto (t \mapsto X_t(\omega)). \end{aligned}$$

Peut-on munir l'ensemble $E^{\mathcal{T}}$ des fonctions de \mathcal{T} dans E d'une tribu rendant mesurable l'application X ?

L'existence d'une telle tribu permettrait de considérer le processus $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $E^{\mathcal{T}}$.

La motivation essentielle est d'être capable de considérer des quantités du type

$$P\{\text{Trajectoire de } X \in A\}$$

où A est un événement dans l'espace $E^{\mathcal{T}}$ des trajectoires, qui peut dépendre d'un nombre indénombrable d'indices dans \mathcal{T} .

1.2.1 Tribu de Kolmogorov

La tribu de Kolmogorov \mathcal{G} est définie comme la plus petite tribu rendant mesurables les applications

$$\begin{aligned} \varphi_t : E^{\mathcal{T}} &\rightarrow E \\ x &\mapsto \varphi_t(x) = x(t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathcal{T}$. On a donc $\mathcal{G} = \sigma(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} \varphi_t^{-1}(A); \forall A \in \mathcal{E})$.

Pour toute partie I de \mathcal{T} , on note également $\mathcal{G}(I)$ la tribu engendrée par les applications $x \mapsto x(t)$ pour tout $t \in I$, c'est-à-dire $\mathcal{G}(I) = \sigma(\bigcup_{t \in I} \varphi_t^{-1}(A); \forall A \in \mathcal{E})$.

Proposition 1.2.1

$$\mathcal{G} = \bigvee_{I \subset \mathcal{T}} \mathcal{G}(I) = \bigvee_{I \text{ fini}, I \subset \mathcal{T}} \mathcal{G}(I),$$

en notant $\bigvee \mathcal{G}(I)$ la tribu engendrée par les $\mathcal{G}(I)$.

Preuve On a les inclusions suivantes

$$\bigvee_{I \subset \mathcal{T}} \mathcal{G}(I) \supset \bigvee_{I \text{ fini}, I \subset \mathcal{T}} \mathcal{G}(I) \supset \bigvee_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{G}(\{t\}).$$

Or, $\bigvee_{I \subset \mathcal{T}} \mathcal{G}(I) = \mathcal{G}$ (car \mathcal{T} est une partie de \mathcal{T}) et $\bigvee_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{G}(\{t\}) = \mathcal{G}$ (par définition de \mathcal{G}). On a donc nécessairement l'égalité énoncée. \square

Remarquons que pour tout I fini, la tribu $\mathcal{G}(I)$ peut être identifiée à la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes I}$ (de l'espace produit E^I) par : toute partie $A \subset E^{\mathcal{T}}$ est dans $\mathcal{G}(I)$ si et seulement si elle s'écrit $A = \{x : (x(t))_{t \in I} \in B\}$ pour un certain B dans la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes I}$.

La tribu de Kolmogorov est donc engendrée par les ensembles de la forme

$$C = \{\omega : \omega(t) \in B_t, \forall t \in I\}$$

où I est une partie finie de \mathcal{T} et $(B_t)_{t \in I}$ dans $\mathcal{E}^{\otimes I}$. Ces ensembles sont appelés *cylindres*.

Un processus pouvant être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$, il est licite de définir :

Définition 1.2.2 *La loi du processus $X = \{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ est la probabilité sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$ définie comme l'image par X de la mesure de probabilité P .*

Inversement, toute probabilité μ sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$ est également la loi d'un processus stochastique. Il suffit de considérer l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G}, \mu)$ et le *processus canonique* défini par

$$X_t(\omega) = \omega(t).$$

1.2.2 Théorème de Kolmogorov

Définition 1.2.3 *La famille des lois fini-dimensionnelles du processus X est la famille $(\mu_I : I \text{ partie finie de } \mathcal{T})$ des lois des variables aléatoires $(X_t)_{t \in I}$, pour l'ensemble des parties finies I de \mathcal{T} .*

Les distributions fini-dimensionnelles (μ_I) du processus X sont donc définies par

$$\mu_I((B_t)_{t \in I}) = P\{\forall t \in I, X_t \in B_t\}$$

pour toute famille $(B_t)_{t \in I}$ dans $\mathcal{E}^{\otimes I}$.

Exemple Lorsque $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, toute partie finie de \mathcal{T} est de la forme $I = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, où $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Ainsi, les distributions fini-dimensionnelles de X s'écrivent

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(B_1 \times \dots \times B_n) = P\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\}.$$

Toute mesure de probabilité μ sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$ définit donc un système de distributions fini-dimensionnelles (μ_I) . Chaque μ_I est l'image de μ par la projection $x \mapsto (x(t), t \in I)$.

Le résultat suivant montre qu'une telle mesure est entièrement caractérisée par les lois fini-dimensionnelles (μ_I) .

Proposition 1.2.4 • *Les lois fini-dimensionnelles d'un processus vérifient la condition de compatibilité suivante :*

Si I est une partie finie de \mathcal{T} et si $t \in \mathcal{T} \setminus I$, alors

$$\forall A \in \mathcal{E}^{\otimes I}; \quad \mu_{I \cup \{t\}}(A \times E) = \mu_I(A).$$

- *Si deux mesures de probabilité sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$ admettent la même famille de distributions fini-dimensionnelles, alors elles sont égales.*

Preuve

- Si $A \in \mathcal{E}^{\otimes I}$, on a

$$\mu_{I \cup \{t\}}(A \times E) = P((X_s)_{s \in I \cup \{t\}} \in A \times E) = P((X_s)_{s \in I} \in A) = \mu_I(A).$$

- Soient μ et ν deux mesure de probabilité sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$, ayant les mêmes distributions fini-dimensionnelles (μ_I) . Elles coïncident sur tous les $\mathcal{G}(I)$ qui engendrent \mathcal{G} .

□

Exemple En reprenant le cas particulier où $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$, la relation de compatibilité s'écrit

$$\begin{aligned} P\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_{j-1}} \in B_{j-1}, X_{t_j} \in E, X_{t_{j+1}} \in B_{j+1}, \dots, X_{t_n} \in B_n\} \\ = P\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_{j-1}} \in B_{j-1}, X_{t_{j+1}} \in B_{j+1}, \dots, X_{t_n} \in B_n\} \end{aligned}$$

pour toute partie finie $I = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de \mathcal{T} , avec $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Grâce à la caractérisation de la loi de tout processus par ses distributions fini-dimensionnelles, l'égalité en loi de processus peut se définir par

Définition 1.2.5 Les processus $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ et $\{Y_t; t \in \mathcal{T}\}$ sont dits identiques en loi si leurs distributions fini-dimensionnelles sont égales.

On note $\{X_t; t \in \mathcal{T}\} \stackrel{(d)}{=} \{Y_t; t \in \mathcal{T}\}$.

On a vu qu'une mesure de probabilité sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$, c'est-à-dire la loi d'un processus stochastique $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$, définit des distributions fini-dimensionnelles. Réciproquement, le résultat suivant montre que partant d'un système de mesures de probabilité sur les fonctions d'un nombre fini de paramètres, E^I avec $I \subset \mathcal{T}$ et I fini, on peut construire une mesure de probabilité sur $E^{\mathcal{T}}$ modulo une hypothèse de compatibilité.

Théorème 1.2.6 (Théorème d'extension de Kolmogorov) Supposons que $E = \mathbb{R}^N$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Toute famille (μ_I) de probabilités sur $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$ indexée par les parties finies de \mathcal{T} vérifiant la relation de compatibilité, est la famille des distributions fini-dimensionnelles d'une (unique) probabilité sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$.

1.3 Processus gaussiens

1.3.1 Rappel sur les v.a. réelles gaussiennes

Proposition 1.3.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes telle que X_n suive la loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$. Supposons que X_n converge en loi vers X . Alors,

- (i) La v.a. X est gaussienne de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$, avec $m = \lim m_n$ et $\sigma = \lim \sigma_n$.
- (ii) Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également en probabilité vers X alors la convergence a lieu dans tous les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

Preuve Cf. [11] p. 4 et [13] p. 3 \square

1.3.2 Rappel sur les vecteurs gaussiens

Cf. Polycopié de Probabilités de 1ère année de l'ECP [4].

1.3.3 Definition et existence de processus gaussiens

Un prolongement de la notion de vecteur aléatoire gaussien est celle de processus gaussien.

Définition 1.3.2 Un processus stochastique $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ est dit processus gaussien si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est gaussien.

A tout processus gaussien $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$, on peut associer

- une fonction moyenne $\mu : t \mapsto \mu(t) = E[X_t]$,
- et une fonction de covariances $\Sigma : (s, t) \mapsto \Sigma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$.

Rappelons qu'une fonction $f : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *symétrique* si $f(s, t) = f(t, s)$ pour tous $s, t \in \mathcal{T}$ et qu'elle est dite *définie positive* si pour tous $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{T}$ et tous $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i f(s_i, s_j) \xi_j \geq 0.$$

Lemme 1.3.3 La fonction de covariances d'un processus gaussien est symétrique et définie positive.

Preuve Cf [8] Lemma 1.2.2 p. 140. \square

Le résultat suivant montre que ces deux propriétés caractérisent la loi d'un processus gaussien.

Théorème 1.3.4 Etant donné un ensemble abstrait \mathcal{T} , une fonction quelconque $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $\Sigma : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique et définie positive, il existe un processus gaussien $X = \{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ de fonction moyenne μ et de fonction de covariances Σ .

Preuve La preuve de ce résultat (faite dans le cours de 2ème année) repose sur le résultat analogue pour les vecteurs gaussiens.

On montre le résultat dans le cas où $\mu = 0$. On montre ainsi l'existence d'un processus gaussien centré $\{\tilde{X}_t; t \in \mathcal{T}\}$ de fonction de covariance Σ . Le processus final est défini par $X_t = \tilde{X}_t + \mu(t)$ pour tout $t \in \mathcal{T}$.

Sans perte de généralité, on suppose dans la suite $\mu = 0$.

Pour tout sous-ensemble fini $I = \{t_1, \dots, t_n\}$ de \mathcal{T} , on considère la matrice Σ_I de taille $n \times n$ définie par

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \Sigma_I(i, j) = \Sigma(t_i, t_j).$$

La matrice Σ_I est symétrique et définie positive, donc on peut construire un vecteur gaussien Z_I de taille n suivant la loi $\mathcal{N}(0, \Sigma_I)$. On considère alors la mesure de probabilité μ_I sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \mu_I(A) = P(Z_I \in A).$$

μ_I est la loi de Z_I .

Supposons maintenant $n > 1$ et posons $I_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$. On a $I_1 \subset I$ et Z_{I_1} a la même loi que les $n - 1$ premières coordonnées de Z_I . Il s'ensuit que

$$\forall A_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu_I(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) = \mu_{I_1}(A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}).$$

La famille de mesures de probabilité $(\mu_I; I \subset \mathcal{T} \text{ fini})$ vérifie donc les conditions de compatibilité du théorème d'extension de Kolmogorov. Il existe donc un processus $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ dont les distributions fini-dimensionnelles sont les $(\mu_I; I \subset \mathcal{T} \text{ fini})$. X est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance Σ . \square

1.4 Mesures gaussiennes

Définition 1.4.1 On appelle espace gaussien (centré) tout sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ formé de variables gaussiennes centrées.

Exemple Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien centré, alors l'ensemble $\{X_1, \dots, X_n\}$ est un espace gaussien.

Définition 1.4.2 Soient (E, \mathcal{E}) un espace mesurable et μ une mesure σ -finie sur (E, \mathcal{E}) . On appelle mesure gaussienne d'intensité μ toute isométrie de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ sur un espace gaussien.

Si G est une mesure gaussienne sur (E, \mathcal{E}) , alors pour tout $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, $G(f)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance

$$E[G(f)^2] = \|G(f)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)}^2 = \|f\|_{L^2(E, \mathcal{E}, \mu)}^2. \quad (1.1)$$

Proposition 1.4.3 Soient (E, \mathcal{E}) un espace mesurable et μ une mesure σ -finie sur (E, \mathcal{E}) . Il existe une mesure gaussienne d'intensité μ .

Preuve Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$. Pour tout $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, on a la décomposition

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n, \quad \text{avec} \quad \alpha_n = (f, f_n) = \int_E f(x) f_n(x) \mu(dx).$$

Sur un espace de probabilité quelconque, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires gaussiennes réelles i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$, on pose alors

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n.$$

Cette série converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ car $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \|f\|^2 < \infty$.

De manière évidente, l'application $G : f \mapsto G(f)$ est une isométrie de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ dans l'espace gaussien engendré par les X_n . \square

Le cas particulier où $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{E}$ et $\mu(A) < \infty$ permet de définir $G(A) := G(\mathbb{1}_A)$. D'après (1.1), $G(A)$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \mu(A))$.

Si A_1, A_2, \dots, A_n sont des éléments 2 à 2 disjoints de \mathcal{E} et tels que $\mu(A_i) < \infty$ pour $1 \leq i \leq n$, alors le vecteur $(G(A_1), G(A_2), \dots, G(A_n))$ est un vecteur gaussien (par définition de G). Sa matrice de covariance est diagonale car

$$E[G(A_i)G(A_j)] = (\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j})_{L^2(E, \mathcal{E}, \mu)} = 0.$$

On en déduit que les variables aléatoires $G(A_1), G(A_2), \dots, G(A_n)$ sont indépendantes.

1.4.1 Bruit blanc de \mathbb{R}

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et μ est la mesure de Lebesgue, la notion de mesure gaussienne donne naissance au bruit blanc et au processus isonormal...

Dans cette section, on construit le bruit blanc de \mathbb{R} comme processus gaussien indexé par les éléments de la tribu de Borel de \mathbb{R} .

Lemme 1.4.4 *L'application $\Sigma : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Sigma(A, B) = \lambda(A \cap B)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , est symétrique et définie positive.*

Preuve La symétrie est évidente. Pour montrer que Σ est définie positive, on écrit

$$\Sigma(A, B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(u) \mathbb{1}_B(u) du.$$

Le théorème de Fubini montre que pour tous $A_i \in \mathcal{T}$ et tous $\xi_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$)

$$\sum_{i,j} \xi_i \Sigma(A_i, A_j) \xi_j = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(u) \xi_i \right)^2 du \geq 0.$$

□

Le lemme précédent permet de définir le bruit blanc de \mathbb{R} par :

Définition 1.4.5 *On appelle bruit blanc sur \mathbb{R} , un processus gaussien $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A); A \in \mathcal{T}\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances définie par $\Sigma(A, B) = \lambda(A \cap B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{T}$.*

Théorème 1.4.6 *Soit $\mathbb{W} = \{\mathbb{W}(A); A \in \mathcal{T}\}$ un bruit blanc sur \mathbb{R} .*

- (i.) *Pour tous $A, B \in \mathcal{T}$ disjoints, $\mathbb{W}(A)$ et $\mathbb{W}(B)$ sont indépendants.*
- (ii.) *Pour tous $A, B \in \mathcal{T}$, $\mathbb{W}(A \cup B) = \mathbb{W}(A) + \mathbb{W}(B) - \mathbb{W}(A \cap B)$ p.s.*
- (iii.) *Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'ensembles de \mathcal{T} disjoints deux à deux et telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, alors on a presque sûrement*

$$\mathbb{W}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{W}(A_n).$$

Preuve

- (i.) Si $A \cap B = \emptyset$, on a $E[\mathbb{W}(A)\mathbb{W}(B)] = 0$. Comme \mathbb{W} est un processus gaussien, la non-corrélation entre $\mathbb{W}(A)$ et $\mathbb{W}(B)$ implique l'indépendance.
- (ii.) Supposons $A \cap B = \emptyset$ dans un premier temps. On pose $D = \mathbb{W}(A \cup B) - \mathbb{W}(A) - \mathbb{W}(B)$. On calcule

$$\begin{aligned} E[D^2] &= E[\mathbb{W}(A \cup B)^2] - 2E[\mathbb{W}(B)\mathbb{W}(A \cup B)] - 2E[\mathbb{W}(A)\mathbb{W}(A \cup B)] \\ &\quad + E[\mathbb{W}(A)^2] + 2E[\mathbb{W}(A)\mathbb{W}(B)] + E[\mathbb{W}(B)^2] \\ &= \lambda(A \cup B) - 2\lambda(B) - 2\lambda(A) + \lambda(A) + 2\lambda(A \cap B) + \lambda(B) = 0. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Tchebychev, on en déduit $P(D = 0) = 1$ ce qui montre le résultat dans le cas $A \cap B = \emptyset$. Par récurrence, on peut montrer que si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de parties 2 à 2 disjointes, on a

$$\mathbb{W}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{W}(A_i) \quad \text{p.s.}$$

Dans le cas où $A \cap B \neq \emptyset$, on décompose $A \cup B$ suivant la partition

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B).$$

On a alors $\mathbb{W}(A) = \mathbb{W}(A \setminus B) + \mathbb{W}(A \cap B)$, $\mathbb{W}(B) = \mathbb{W}(B \setminus A) + \mathbb{W}(A \cap B)$ et $\mathbb{W}(A \cup B) = \mathbb{W}(A \setminus B) + \mathbb{W}(B \setminus A) + \mathbb{W}(A \cap B)$ presque sûrement. Le résultat en découle.

(iii.) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $M_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{W}(A_i)$ et $\epsilon_n = \mathbb{W}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) - M_n$.

Grâce au point précédent, on a $M_n = \mathbb{W}(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ et $\epsilon_n = \mathbb{W}(\bigcup_{i=n+1}^\infty A_i)$ presque sûrement. D'autre part,

$$E[\epsilon_n^2] = \lambda\left(\bigcup_{i=n+1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=n+1}^\infty \lambda(A_i)$$

car les A_i sont disjoints. Par hypothèse, le dernier terme tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit que ϵ_n tend vers 0 dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, c'est-à-dire M_n tend vers $\mathbb{W}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Pour montrer la convergence presque sûre, on remarque que $\{M_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une martingale, telle que

$$E[M_n^2] = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$$

qui est bornée. La martingale $\{M_n; n \in \mathbb{N}\}$ bornée dans L^2 , converge donc dans L^2 et presque sûrement. Comme on a déjà déterminé la limite dans L^2 , le résultat en découle.

□

1.4.2 Processus isonormal de \mathbb{R}

Les propriétés du bruit blanc de \mathbb{R} permettent de définir des quantités $W(h) = \int_{\mathbb{R}} h(t) \mathbb{W}(dt)$ pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Pour cela, la première idée consiste en la construction de ces intégrales pour des fonctions étagées et d'étendre à $L^2(\mathbb{R})$ par densité.

On peut également définir cette intégrale directement, comme fait pour le bruit blanc de \mathbb{R} .

Définition 1.4.7 *Le processus isonormal de \mathbb{R} est défini comme un processus gaussien $W = \{W(f); f \in L^2(\mathbb{R})\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances*

$$\forall h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R}); \quad E[W(h_1)W(h_2)] = \int_{\mathbb{R}} h_1(u)h_2(u) du.$$

De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$W(\alpha f + \beta g) = \alpha W(f) + \beta W(g) \quad p.s.$$

La définition précédente est licite car la fonction

$$L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(h_1, h_2) \mapsto (h_1, h_2)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} h_1(u)h_2(u) du$$

est définie positive (propriété du produit scalaire).

On remarque que l'application W est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $W(L^2(\mathbb{R})) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Selon la terminologie de cette section, W est donc une mesure gaussienne d'intensité $\lambda =$ mesure de Lebesgue.

Quelle que soit la manière de construire le processus isonormal ou intégrale par rapport au bruit blanc, on a la caractérisation

$$\forall A \in \mathcal{T}; \quad \mathbb{W}(A) = W(\mathbb{1}_A).$$

Chapitre 2

Mouvement brownien

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1 *Le mouvement brownien est un processus gaussien $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ de moyenne nulle et de fonction de covariances*

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+; \quad \Sigma(s, t) = s \wedge t.$$

Cette définition du mouvement brownien est valide car la fonction Σ est définie positive. Pour voir cela, on remarque que

$$\Sigma(s, t) = \lambda([0, s] \cap [0, t])$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Théorème 2.1.2 (Représentation de Centsov) *Etant donné un bruit blanc \mathbb{W} sur \mathbb{R} , le processus $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par $B_t = \mathbb{W}([0, t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ est un mouvement brownien.*

Preuve Il suffit de calculer la fonction de covariance de B . \square

En conséquence de cette représentation du mouvement brownien et en utilisant la caractérisation entre bruit blanc et processus isonormal, on a $B_t = W(\mathbb{I}_{[0, t]})$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Sous forme intégrale, on peut alors écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+; \quad B_t = \int_{[0, t]} \mathbb{W}(ds)$$

ce qui amène à considérer le mouvement brownien comme intégrale du bruit blanc.

Grâce à cette observation, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut définir

$$\int f(s) dB_s = \int f(s) \mathbb{W}(ds) = W(f).$$

De même, pour toute fonction $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_{[0,t]} f(s) dB_s = \int_{[0,t]} f(s) W(ds) = W(\mathbb{1}_{[0,t]} f).$$

Dans une certaine mesure, le processus isonormal peut être considéré comme la première pierre de la construction de l'intégrale par rapport au mouvement brownien. On l'appelle *intégrale de Wiener*.

Proposition 2.1.3 *Soit $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien.*

- (i.) *Les accroissements de B sont indépendants :*
Pour toute suite finie $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ sont indépendantes ;
- (ii.) *Les accroissements de B sont stationnaires : Plus précisément, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s < t$, la loi de la v.a. $B_t - B_s$ est gaussienne centrée de variance $t - s$.*

Preuve On utilise la représentation de Centsov... \square

Réciproquement, on a

Proposition 2.1.4 *Si $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ vérifie*

- (i.) $X_0 = 0$ p.s. ;
- (ii.) *Pour tous $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ est indépendante de $\sigma(X_r; r \leq s)$;*
- (iii.) *Pour tous $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ suit la loi $\mathcal{N}(0, t - s)$,*
alors X est un mouvement brownien.

Preuve Laissée en exercice. \square

Proposition 2.1.5 *Soit $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien.*

- (i.) *(homogénéité en temps). Pour tout $s > 0$, le processus $\{B_{t+s} - B_s; t \in \mathbb{R}_+\}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u; u \leq s)$.*
- (ii.) *(Symétrie). Le processus $-B$ est un mouvement brownien.*
- (iii.) *(Autosimilarité). Pour tout $c > 0$, les processus $\{cB_{t/c^2}; t \in \mathbb{R}_+\}$ est un mouvement brownien.*
- (iv.) *(Inversion du temps). Le processus X défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1/t}$ pour tout $t > 0$ est un mouvement brownien.*

Preuve Prop. 1.10 p. 20 (Revuz-Yor) \square

2.2 Construction du mouvement brownien

2.2.1 Rappel : Lemme de Borel-Cantelli

Le lemme de Borel-Cantelli constitue l'outil essentiel pour montrer la convergence presque sûre d'une suite de variables aléatoires.

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements dans \mathcal{F} . La suite $(\bigcup_{k \geq n} A_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante dans \mathcal{F} donc sa limite

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

est dans \mathcal{F} (par définition d'une tribu).

L'événement $\limsup_n A_n$ peut être interprété comme l'ensemble des ω appartenant à une infinité d'événements A_n . On note souvent

$$\limsup_n A_n = \{A_n \text{ infiniment souvent}\}.$$

Théorème 2.2.1 (lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements dans l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) .

- (i) Si $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty$ alors $P(A_n \text{ infiniment souvent}) = 0$.
- (ii) Si $P(A_n \text{ infiniment souvent}) = 0$ et si les A_n sont indépendants, alors $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

Preuve

- (i) Soit $\epsilon > 0$. La convergence de la série implique l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \geq N} P(A_n) < \epsilon$. On a alors

$$P\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) \leq \sum_{n \geq N} P(A_n) < \epsilon.$$

On en déduit

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq P\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) < \epsilon.$$

Comme cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $\epsilon > 0$, on a $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 0$.

(ii) Supposons les A_n indépendants. On a alors

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^N A_k\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - P\left(\bigcap_{k=n}^N A_k^c\right)\right) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=n}^N P(A_k^c)\right) \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance des A_k .

On pose alors $a_k = P(A_k)$ pour tout k . On a alors

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=n}^N (1 - a_k)\right)$$

Par hypothèse, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - a_k) = 1,$$

et, en prenant le logarithme,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^N \ln(1 - a_k) = 0.$$

Cette dernière égalité signifie que la série $\sum \ln(1 - a_n)$ est convergente. En utilisant la majoration $|\ln(1 - x)| \geq x$ pour $0 < x < 1$, on en déduit que la série $\sum a_n$ converge.

□

2.2.2 Première construction (Lévy, 1948)

Cf. [13] pp. 4–7

Dans un premier temps, on construit le mouvement brownien pour des indices $t \in [0, 1]$. Considérons une famille de variables aléatoires $(\xi_{k,n}; n \geq 0, 0 \leq k \leq 2^n)$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On définit alors par récurrence une famille de variables aléatoires $(X_n(t); n \geq 0, t \in [0, 1])$ par :

- $X_0(0) = 0$ et $X_0(1) = \xi_{0,0}$;
- Pour tout $n \geq 0$, l'application $t \mapsto X_n(t)$ est linéaire sur $[k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}]$;

- $X_n(2j \cdot 2^{-n}) = X_{n-1}(2j \cdot 2^{-n})$ et $X_n((2j+1) \cdot 2^{-n}) = X_{n-1}((2j+1) \cdot 2^{-n}) + \xi_{2j+1,n} \cdot 2^{-(n+1)/2}$.

Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $(X_n(k \cdot 2^{-n}); 0 \leq k \leq 2^n)$ est un vecteur gaussien centré tel que $E[X_n(k \cdot 2^{-n}) X_n(l \cdot 2^{-n})] = k \cdot 2^{-n} \wedge l \cdot 2^{-n}$.

Pour $n = 0$, le résultat est trivialement vérifié. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$. $(X_n(k \cdot 2^{-n}); 0 \leq k \leq 2^n)$ est alors un vecteur gaussien centré car fonction linéaire des vecteurs gaussiens centrés $(X_{n-1}(k \cdot 2^{-(n-1)}); 0 \leq k \leq 2^{n-1})$ et $(\xi_{k,n}; 0 \leq k \leq 2^n)$, qui sont indépendants. Le calcul de sa matrice de covariances fait apparaître des termes $E[X_n(k \cdot 2^{-n}) X_n(l \cdot 2^{-n})]$ lorsque k et l sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs, ou l'un pair et l'autre impair. Dans un souci d'allègement des notations, on ne traitera que le cas où $k = l = 2j + 1$. Le calcul dans les autres cas est totalement similaire.

En utilisant $X_{n-1}((2j+1) \cdot 2^{-n}) = [X_{n-1}(j \cdot 2^{-(n-1)}) + X_{n-1}((j+1) \cdot 2^{-(n-1)})]/2$,

$$\begin{aligned} E[X_n((2j+1) \cdot 2^{-n})]^2 &= E \left[\frac{X_{n-1}(j \cdot 2^{-(n-1)}) + X_{n-1}((j+1) \cdot 2^{-(n-1)})}{2} + \frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}} \right]^2 \\ &= \frac{j \cdot 2^{-(n-1)} + 2j \cdot 2^{-(n-1)} + (j+1) \cdot 2^{-(n-1)}}{4} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2j+1}{2^n}, \end{aligned}$$

ce que l'on voulait trouver.

Pour tout $n \geq 0$, le processus $\{X_n(t); t \in [0, 1]\}$ est un processus gaussien, car toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n a_i X_n(t_i)$ est combinaison linéaire des $(X_n(k \cdot 2^{-n}); k = 0, 1, \dots, 2^n)$. Montrons que ce processus admet une limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour cela, on considère l'événement $A_n = \{\sup_{t \in [0, 1]} |X_n(t) - X_{n-1}(t)| > 2^{-n/4}\}$. On a

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P \left(\bigcup_{0 \leq j \leq 2^{n-1}-1} \left\{ \sup_{t \in [2j \cdot 2^{-n}, (2j+2) \cdot 2^{-n}]} |X_n(t) - X_{n-1}(t)| > 2^{-n/4} \right\} \right) \\ &= P \left(\bigcup_{0 \leq j \leq 2^{n-1}-1} \left\{ \frac{|\xi_{2j+1,n}|}{2^{(n+1)/2}} > 2^{-n/4} \right\} \right) \\ &\leq \sum_{0 \leq j \leq 2^{n-1}-1} P(|\xi_{2j+1,n}| > 2^{(n+2)/4}). \end{aligned}$$

Or, on sait que pour toute v.a. X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $P(X > x) \leq e^{-x^2/2}$. Par symétrie, on en déduit $P(|\xi_{2j+1,n}| > 2^{(n+2)/4}) \leq 2 \exp(-2^{n/2})$, puis $P(A_n) \leq 2^n \exp(-2^{n/2})$.

Comme $\sum_n P(A_n) < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli assure l'existence d'un ensemble Ω^* tel que $P(\Omega^*) = 1$ et une v.a. n_0

$$\forall \omega \in \Omega^*, \forall n \geq n_0(\omega); \quad \sup_{t \in [0, 1]} |X_n(t) - X_{n-1}(t)| \leq 2^{-n/4}.$$

On en déduit que pour tout $\omega \in \Omega^*$, les fonctions $X_n(\bullet, \omega)$ convergent uniformément sur $[0, 1]$ vers une limite continue $X(\bullet, \omega)$. Grâce à la Proposition 1.3.1, on sait que $\{X(t); t \in [0, 1]\}$ est un processus gaussien centré.

Montrons maintenant que X est un mouvement brownien. Il suffit de déterminer sa fonction de covariances $E[X(s)X(t)]$. Fixons $0 \leq s \leq t \leq 1$. Pour tout $n \geq 0$, il existe un unique couple (k, l) tel que $s \in [k.2^{-n}, (k+1).2^{-n}]$ et $t \in [l.2^{-n}, (l+1).2^{-n}]$. Comme X_n est affine sur $[k.2^{-n}, (k+1).2^{-n}]$, on a

$$X_n(s) = \alpha X_n(k.2^{-n}) + (1 - \alpha) X_n((k+1).2^{-n}),$$

avec $\alpha = k + 1 - 2^n s$. De même,

$$X_n(t) = \beta X_n(l.2^{-n}) + (1 - \beta) X_n((l+1).2^{-n}),$$

avec $\beta = l + 1 - 2^n t$.

On en déduit

$$E[X_n(s)X_n(t)] = \frac{\alpha\beta k}{2^n} + \frac{(1-\alpha)\beta((k+1) \wedge l)}{2^n} + \frac{\alpha(1-\beta)k}{2^n} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(k+1)}{2^n},$$

qui vaut

$$\frac{\alpha\beta k}{2^n} + \frac{(1-\alpha)\beta k}{2^n} + \frac{\alpha(1-\beta)k}{2^n} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)k}{2^n} + O(2^{-n}),$$

soit $k.2^{-n} + O(2^{-n}) = s + O(2^{-n})$.

Ainsi, on a montré que $E[X(s)X(t)] = s$.

Pour construire un mouvement sur \mathbb{R}_+ et non plus seulement sur $[0, 1]$, on considère une suite de mouvements browniens indépendants $\{B_t^m; t \in [0, 1]\}$, et on définit $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ par

$$B_t = B_{t-[t]}^{[t]} + \sum_{0 \leq m < [t]} B_1^m.$$

2.2.3 Principe d'invariance de Donsker

Rappel : Convergence faible

Définition 2.2.2 Soit (S, ρ) un espace métrique muni de sa tribu de Borel $\mathcal{B}(S)$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et P des mesures de probabilité sur $(S, \mathcal{B}(S))$. On dit que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers P si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f(s).P_n(ds) = \int_S f(s).P(ds)$$

pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

Cette notion de convergence d'une suite de mesures de probabilité a déjà été rencontrée lors de l'étude de la convergence en loi de variables aléatoires.

Rappelons également que la loi d'une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow E$ est déterminée par les quantités $E[f(X)]$ pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Grâce à cette caractérisation, on définit la convergence en distribution de la façon suivante :

Définition 2.2.3 Soient $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et (Ω, \mathcal{F}, P) des espaces de probabilité et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des variables aléatoires sur ces espaces et à valeurs dans l'espace métrique (S, ρ) .

On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribution vers X , si la suite des lois $(P_n \circ X_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers la loi $P \circ X^{-1}$, c'est-à-dire si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n[f(X_n)] = E[f(X)]$$

pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

Les notions suivantes de relative compacité et de tension sont essentielles pour caractériser la convergence faible.

Définition 2.2.4 Soit (S, ρ) un espace métrique et soit Π une famille de mesures de probabilité sur $(S, \mathcal{B}(S))$.

- Π est dite relativement compacte si toute suite de Π admet une sous-suite qui converge faiblement.
- Π est dite tendue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset S$ tel que

$$\forall P \in \Pi; \quad P(K) \geq 1 - \epsilon.$$

Une famille de v.a. $(X_\alpha)_\alpha$ est dite relativement compacte (resp. tendue) si la famille de leur loi est relativement compacte (resp. tendue).

Théorème 2.2.5 (Prohorov) Soit Π une famille de mesures de probabilité sur un espace métrique complet et séparable S . Alors, Π est relativement compacte si et seulement si elle est tendue.

Rappelons que la loi d'un processus stochastique est engendrée par ses distributions finidimensionnelles (Théorème de Kolmogorov). Tout processus stochastique $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ à valeurs dans E , peut être considéré comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des trajectoires

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{G}, P_X),$$

où \mathcal{G} est la tribu de Kolmogorov et P_X la mesure image de P par X .

Les distributions fini-dimensionnelles de X sont les mesures de probabilité

$$P_{t_1, \dots, t_d} : \mathcal{E}^{\otimes d} \rightarrow [0, 1]$$

$$B_1 \times \dots \times B_d \mapsto P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_d} \in B_d),$$

où $d \geq 1$ est un entier quelconque et t_1, \dots, t_d sont des réels positifs quelconques.

Les mesures P_{t_1, \dots, t_d} sont déterminées par les quantités $E[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})]$, pour toute $f : E^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

Pour tout sous-ensemble fini $\{t_1, \dots, t_d\}$ de \mathbb{R}_+ , on définit la fonction projection $\pi_{t_1, \dots, t_d} : C(\mathbb{R}_+, E) \rightarrow E^d$ par

$$\pi_{t_1, \dots, t_d}(\omega) = (\omega(t_1), \dots, \omega(t_d)).$$

Si une fonction $f : E^d \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors l'application composée $f \circ \pi_{t_1, \dots, t_d}$ l'est également. Ainsi, si une suite de processus continus $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un processus X alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n[f(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)})] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_n[f \circ \pi_{t_1, \dots, t_d}(X^{(n)})] \\ &= E[f \circ \pi_{t_1, \dots, t_d}(X)] \\ &= E[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})]. \end{aligned}$$

Ceci montre que les distributions fini-dimensionnelles des $X^{(n)}$ convergent vers celles de X .

La réciproque de ce résultat est fausse en général. Cependant elle devient vraie si on ajoute l'hypothèse que les lois des $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sont tendues.

Théorème 2.2.6 *Soit $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendue de processus continus dont les distributions fini-dimensionnelles convergent.*

Alors les mesures de probabilités sur $C(\mathbb{R}_+, E)$ induites par les $X^{(n)}$ convergent faiblement vers une mesure P , sous laquelle le processus coordonnées $W = \{W_t = \omega(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ vérifie

$$(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_d}^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (W_{t_1}, \dots, W_{t_d})$$

pour tous $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}_+$.

Convergence vers le mouvement brownien

Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère la suite des sommes partielles

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On définit alors le processus continu $Y = \{Y_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+; \quad Y_t = S_{[t]} + (t - [t])\xi_{[t]+1},$$

puis on renormalise Y pour obtenir un processus $\{X_t^{(n)}; t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+; \quad X_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}Y_{nt}.$$

Théorème 2.2.7 (Principe d'invariance de Donsker) *La suite de processus $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribution vers le mouvement brownien.*

2.3 Processus canonique et mesure de Wiener

Définition 2.3.1 *On appelle mouvement brownien standard un processus gaussien centré continu $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$, de fonction de covariance $\text{Cov}(B_s, B_t) = E[B_s B_t] = s \wedge t$, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 2.3.2 *On appelle mesure de Wiener la mesure de probabilité sur $C(\mathbb{R}_+)$ telle que le processus canonique $X_t(\omega) = \omega(t)$ est un mouvement brownien standard.*

Dans le chapitre précédent, on a montré l'existence d'un mouvement brownien, et donc d'une mesure de probabilité P sur l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, telle que le processus canonique soit un mouvement brownien.

Pour montrer l'existence du mouvement brownien standard, il est tentant de restreindre la mesure au sous-espace $C(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Cependant, on peut montrer que $C(\mathbb{R})$ n'est pas dans la tribu de Kolmogorov.

On montre alors l'existence du mouvement brownien standard comme une modification continue du mouvement brownien défini précédemment.

2.4 Propriétés trajectoires du mouvement brownien

2.4.1 Continuité des trajectoires du mouvement brownien

En définissant le mouvement brownien par sa loi de processus gaussien, il n'y a aucune raison pour laquelle ses trajectoires seraient continues. En effet, en modifiant la valeur d'un processus en un point (tiré aléatoirement selon une loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante du processus), on ne change pas la loi.

Le résultat suivant s'intéresse à l'existence d'une modification continue pour un processus stochastique vérifiant une certaine hypothèse sur ces moments.

Théorème 2.4.1 (Kolmogorov-Centsov) (th. 2.8 [7] p. 53) Soit $X = \{X_t; 0 \leq t \leq T\}$ un processus stochastique sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) tel que

$$\forall s, t \in [0, T]; \quad E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t - s|^{1+\beta} \quad (2.1)$$

pour des constantes positives α, β et C .

Alors, il existe une modification continue $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t; 0 \leq t \leq T\}$, qui est localement Hölder-continue d'exposant γ pour tout $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[$, i.e.

$$P \left(\omega : \sup_{0 < t-s < h(\omega)} \frac{|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta \right) = 1$$

où $h(\omega)$ est une variable aléatoire positive presque sûrement et $\delta > 0$ une constante.

Preuve Sans perte de généralité, on suppose $T = 1$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$P\{|X_t - X_s| \geq \epsilon\} \leq \frac{E[|X_t - X_s|^\alpha]}{\epsilon^\alpha} \leq C\epsilon^{-\alpha}|t-s|^{1+\beta}.$$

On en déduit que $X_s \rightarrow X_t$ en probabilité lorsque $s \rightarrow t$.

On prend ensuite $t = k.2^{-n}$, $s = (k-1).2^{-n}$ et $\epsilon = 2^{-\gamma n}$ (où $0 < \gamma < \beta/\alpha$). On obtient

$$P(|X_{k.2^{-n}} - X_{(k-1).2^{-n}}| \geq 2^{-\gamma n}) \leq C.2^{-n(1+\beta-\alpha\gamma)}.$$

Ainsi, on peut majorer

$$\begin{aligned} P \left(\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{k.2^{-n}} - X_{(k-1).2^{-n}}| \geq 2^{-\gamma n} \right) &= P \left(\bigcup_{1 \leq k \leq 2^n} \{|X_{k.2^{-n}} - X_{(k-1).2^{-n}}| \geq 2^{-\gamma n}\} \right) \\ &\leq C.2^{-n(\beta-\alpha\gamma)}. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la série $\sum P\{\max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{k.2^{-n}} - X_{(k-1).2^{-n}}| \geq 2^{-\gamma n}\}$ converge, donc on peut appliquer le lemme de Borel-Cantelli : il existe un ensemble $\Omega^* \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Omega^*) = 1$ et une variable aléatoire n^* à valeurs dans \mathbb{N} tels que pour tout $\omega \in \Omega^*$,

$$\forall n \geq n^*(\omega); \quad \max_{1 \leq k \leq 2^n} |X_{k.2^{-n}} - X_{(k-1).2^{-n}}| \leq 2^{-\gamma n}. \quad (2.2)$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère $D_n = \{(k.2^{-n}); 1 \leq k \leq 2^n\} \subset [0, 1]$. L'ensemble $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ est alors l'ensemble des rationnels dyadiques de $[0, 1]$.

Fixons $\omega \in \Omega^*$ et $n \geq n^*(\omega)$. Montrons que pour tout $m > n$, on a

$$\forall s, t \in D_m, \quad 0 < t - s < 2^{-n}; \quad |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^m 2^{-\gamma j}. \quad (2.3)$$

Pour $m = n + 1$, on doit juste montrer le résultat pour $t = k.2^{-n}$ et $s = (k - 1).2^{-n}$, qui résulte immédiatement de (2.2). Supposons (2.3) vérifiée pour $m = n + 1, n + 2, \dots, M - 1$. On considère alors $s, t \in D_M$ tels que $s < t$. On pose alors

$$\begin{aligned} t^1 &= \max(u \in D_{M-1}; u \leq t) \\ s^1 &= \max(u \in D_{M-1}; u \geq s). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} s &\leq s^1 \leq t^1 \leq t \\ s^1 - s &\leq 2^{-M} \\ t - t^1 &\leq 2^{-M}. \end{aligned}$$

D'après (2.2), on a

$$\begin{aligned} |X_{s^1}(\omega) - X_s(\omega)| &\leq 2^{-\gamma M} \\ |X_t(\omega) - X_{t^1}(\omega)| &\leq 2^{-\gamma M}. \end{aligned}$$

En appliquant (2.3) pour $m = M - 1$, on a

$$|X_{t^1}(\omega) - X_{s^1}(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{M-1} 2^{-\gamma j}.$$

On déduit (2.3) pour $m = M$ par inégalité triangulaire.

On montre alors que $\{X_t(\omega); t \in D\}$ est uniformément continu en t pour tout $\omega \in \Omega^*$. Pour tous $s, t \in D$ tels que $0 < t - s < 2^{-n^*(\omega)}$, on choisit $n \geq n^*(\omega)$ tel que $2^{-(n+1)} \leq t - s < 2^{-n}$. On a alors

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\gamma j} \leq \frac{2}{1 - 2^{-\gamma}} |t - s|^\gamma.$$

On définit alors \tilde{X} de la manière suivante : Pour tout $\omega \notin \Omega^*$, on pose $\tilde{X}_t(\omega) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$; pour tout $\omega \in \Omega^*$, on pose $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ pour tout $t \in D$; et pour tout $\omega \in \Omega^*$ et $t \in [0, 1] \setminus D$, on pose $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_n X_{s_n}(\omega)$ où $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans D qui converge vers t .

On vérifie que \tilde{X} est une modification de X . \square

Pour appliquer le théorème précédent au mouvement brownien $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$, il faut montrer que la condition (2.1) est vérifiée pour certains $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $C > 0$.

Comme $B_t - B_s$ est une variable aléatoire gaussienne centrée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $\lambda_n > 0$ telle que

$$E[(B_t - B_s)^{2n}] = \lambda_n \cdot (E[(B_t - B_s)^2])^n.$$

Par ailleurs, on a

$$E[(B_t - B_s)^2] = |t - s|$$

pour tous $s, t \in \mathbb{R}_n$, donc

$$E[(B_t - B_s)^{2n}] = \lambda_n |t - s|^n.$$

En choisissant $n = 2$, la condition (2.1) est vérifiée avec $\alpha = 4$, $\beta = 1$ et $C = \lambda_2$. On peut alors appliquer le théorème précédent pour montrer l'existence d'une modification continue au mouvement brownien défini au chapitre précédent, c'est-à-dire du mouvement brownien standard et de la mesure de Wiener.

2.4.2 Régularité des trajectoires du mouvement brownien

Théorème 2.4.2 (Loi 0-1 de Blumenthal) *Soit $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien. Pour tout $t \geq 0$, on définit la tribu \mathcal{F}_t par*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t) \vee \sigma(\mathcal{N})$$

où \mathcal{N} désigne la classe des ensembles négligeables de Ω .

On pose

$$\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s.$$

Pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$, on a $P(A) = 0$ ou 1 .

Preuve Pour $0 < \epsilon < t$, on considère

$$\mathcal{F}_{\epsilon,t} = \sigma(B_s - B_\epsilon; \epsilon \leq s \leq t) \vee \sigma(\mathcal{N}).$$

D'après la propriété de Markov simple, les tribus $\sigma(B_s - B_\epsilon; \epsilon \leq s \leq t)$ et $\sigma(B_r; r \leq \epsilon)$ sont indépendantes. Il s'ensuit que $\mathcal{F}_{\epsilon,t}$ et \mathcal{F}_ϵ sont indépendantes. A fortiori, $\mathcal{F}_{\epsilon,t}$ et \mathcal{F}_{0+} sont indépendantes.

Par un argument de classe monotone, les tribus

$$\bigvee_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,t} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{0+}$$

sont indépendantes. Comme pour tout $s \in]0, t[$,

$$B_s = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (B_s - B_\epsilon)$$

est mesurable par rapport à la tribu $\bigvee_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,t}$, celle-ci contient nécessairement la tribu engendrée $\sigma(B_s; s \leq t)$ et donc \mathcal{F}_t . Ainsi, on a

$$\bigvee_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{\epsilon,t} = \mathcal{F}_t.$$

En résumé, on a montré que \mathcal{F}_{0+} et \mathcal{F}_t sont indépendantes. Comme par ailleurs $\mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_t$, on en déduit que \mathcal{F}_{0+} est indépendante avec elle-même, et donc la tribu \mathcal{F}_{0+} est triviale. \square

Corollaire 2.4.3 Soit $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien. On a presque sûrement pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sup_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s > 0, \quad \inf_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s < 0.$$

Les temps d'arrêt $T_a = \inf(t : B_t = a)$, défini pour tout $a \in \mathbb{R}$, vérifient presque sûrement,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad T_a < \infty.$$

De plus, on a presque sûrement,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty.$$

Preuve Quitte à remplacer B par une modification continue, on suppose que les trajectoires de B sont continues.

Pour montrer le 1er point, on considère $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. On pose

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \epsilon_n} B_s > 0 \right\}.$$

Par définition de la tribu \mathcal{F}_{0+} , on sait que A est \mathcal{F}_{0+} -mesurable. Donc $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Comme $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, la quantité $P(\sup_{0 \leq s \leq \epsilon_n} B_s > 0)$ décroît vers $P(A)$, lorsque $n \rightarrow \infty$. Or,

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq \epsilon_n} B_s > 0\right) \geq P(B_{\epsilon_n} > 0) = \frac{1}{2},$$

ce qui entraîne $P(A) \geq 1/2$. Ainsi, on a $P(A) = 1$ puis

$$P\left(\forall \epsilon > 0, \sup_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s > 0\right) = 1.$$

En remplaçant B par $-B$, on tire

$$P\left(\forall \epsilon > 0, \inf_{0 \leq s \leq \epsilon} B_s < 0\right) = 1.$$

Pour le 2ème point, on remarque que pour tout $A > 0$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \delta A\right) = P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > 0\right) = 1.$$

Or, par invariance d'échelle, on a

$$P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \delta A\right) = P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} (\delta B_{s/\delta^2}) > \delta A\right) = P\left(\sup_{0 \leq s \leq 1/\delta^2} B_s > A\right).$$

En faisant décroître δ vers 0, on obtient

$$P\left(\sup_{s \geq 0} B_s > A\right) = 1,$$

puis, en remplaçant B par $-B$,

$$P\left(\inf_{s \geq 0} B_s < -A\right) = 1.$$

Le résultat en découle facilement. \square

Le résultat suivant montre que les trajectoires du mouvement brownien standard sont continues mais irrégulières. Elles ne sont pas dérivables et ne sont pas à variations bornées. Par conséquent, il est impossible de définir une intégrale par rapport au mouvement brownien ω par ω (intégrale de Stieljes).

Définition 2.4.4 (Variation quadratique) *On dit qu'un processus $X = \{X_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ est à variation quadratique finie si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et toute suite de subdivisions de $[0, t]$*

$$\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k_n} = t\}$$

dont le pas $|\Delta_n|$ tend vers 0, la quantité

$$T_t^{\Delta_n} = \sum_{i=0}^{k_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

converge en probabilité vers une variable aléatoire $\langle X, X \rangle_t$ indépendante de la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le processus $\langle X, X \rangle = \{\langle X, X \rangle_t; t \in \mathbb{R}\}$ est appelé variation quadratique de X .

Théorème 2.4.5 *Tout mouvement brownien $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ est à variation quadratique finie et on a presque sûrement $\langle B, B \rangle_t = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*

Plus généralement, si G est une mesure gaussienne d'intensité μ et F un ensemble tel que $\mu(F) < \infty$, alors pour toute suite de partitions finies $(F_k^{(n)})_{1 \leq k \leq k_n}$ de F telle que $\sup_k \mu(F_k^{(n)}) \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k [G(F_k^{(n)})]^2 = \mu(F)$$

où la convergence a lieu dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Preuve On calcule

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k [G(F_k^{(n)})]^2 - \mu(F) \right\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)}^2 &= E \left[\left(\sum_k \left(G(F_k^{(n)})^2 - \mu(F_k^{(n)}) \right) \right)^2 \right] \\ &= \sum_k \left(E \left[G(F_k^{(n)})^4 \right] - \mu(F_k^{(n)})^2 \right), \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance des $G(F_k^{(n)})$ et le fait que $E[G(F_k^{(n)})^2] = \mu(F_k^{(n)})$ par définition de la mesure gaussienne G .

Or, pour toute variable aléatoire Y de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma)$, on peut montrer que $E[Y^4] = 3\sigma^4 = 3(E[Y^2])^2$. On en déduit

$$\left\| \sum_k [G(F_k^{(n)})]^2 - \mu(F) \right\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)}^2 = 2 \sum_k [\mu(F_k^{(n)})]^2 \leq 2\mu(F) \sup_k \mu(F_k^{(n)}),$$

puis que cette quantité tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. \square

Proposition 2.4.6 *Le mouvement brownien est presque sûrement à variations infinies sur tout intervalle, i.e. il existe $\Omega^* \in \mathcal{F}$ avec $P[\Omega^*] = 1$ tel que pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_n$ de $[a, b]$ telle que $|\Delta_n| \rightarrow 0$ et*

$$\forall \omega \in \Omega^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_k \in \Delta_n} |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)| = +\infty.$$

Preuve Le Théorème 2.4.5 montre que pour tout intervalle $[p, q]$ de \mathbb{R} et toute suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[p, q]$ dont le pas $|\Delta_n|$ tend vers 0, la quantité

$$\sum_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2,$$

où $\Delta_n = \{p = t_0 < t_1 < \dots < t_{k_n} = q\}$, tend vers $q - p$ en probabilité.

Il s'ensuit l'existence d'une sous-suite de $(\Delta_{n_m})_m$ telle que la convergence soit une convergence presque sûre.

En résumé, pour tout intervalle $[p, q]$ de \mathbb{R} , il existe $\Omega_{p,q} \in \mathcal{F}$ tel que $P[\Omega_{p,q}] = 1$ et une suite de subdivisions $(\Delta_n)_n$ de $[p, q]$ telle que $|\Delta_n| \rightarrow 0$ et

$$\forall \omega \in \Omega_{p,q}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_k \in \Delta_n} (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega))^2 = q - p.$$

Quitte à considérer une suite d'intervalles $[p_n, q_n] \in [a, b]$ où $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$, $\lim p_n = a$ et $\lim q_n = b$, on déduit l'existence de $\Omega^* \in \mathcal{F}$ avec $P[\Omega^*] = 1$ tel que pour tout intervalle $[a, b]$, il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_n$ de $[a, b]$ avec $|\Delta_n| \rightarrow 0$ et

$$\forall \omega \in \Omega^*, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_k \in \Delta_n} (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega))^2 = b - a.$$

[Remarquons qu'on a utilisé ici la dénombrabilité de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ pour obtenir un ensemble Ω^* indépendant de $[a, b]$.]

On a alors

$$\forall \omega \in \Omega^*, \quad \sum_{t_k \in \Delta_n} (B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega))^2 \leq \left(\sup_k |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)| \right) \sum_{t_k \in \Delta_n} |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)|.$$

Or, $\sup_k |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, par continuité des trajectoires de B . Donc nécessairement

$$\sum_{t_k \in \Delta_n} |B_{t_{k+1}}(\omega) - B_{t_k}(\omega)| \rightarrow +\infty$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

2.5 Temps d'arrêt et propriété de Markov forte

Dans cette partie, on cherche à généraliser la propriété de Markov simple, vue précédemment, pour un temps d'arrêt.

Soient $\{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien et $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t) \vee \sigma(\mathcal{N})$. On considère la tribu $\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s; s \geq 0) \vee \sigma(\mathcal{N})$.

Définition 2.5.1 (Temps d'arrêt) Une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est appelée temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+; \quad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Définition 2.5.2 Soit T un temps d'arrêt. On définit la tribu des événements antérieurs à T par

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Pour tout temps d'arrêt T , les variables aléatoires T et B_T sont \mathcal{F}_T -mesurables.

Pour T , la preuve est identique au cas discret. Quant à B_T , on écrit

$$B_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{k \cdot 2^{-n} \leq T < (k+1) \cdot 2^{-n}\}} B_{k \cdot 2^{-n}}$$

et on vérifie que $\forall s \geq 0$, $B_s \mathbb{1}_{\{s \leq T\}}$ est \mathcal{F}_T -mesurable. Pour cela, on remarque que pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$, on a

$$\{B_s \mathbb{1}_{\{s \leq T\}} \in A\} \cap \{T \leq t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t < s \\ \{B_s \in A\} \cap \{s \leq T \leq t\} & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

qui est bien \mathcal{F}_t -mesurable.

Théorème 2.5.3 (Propriété de Markov forte) Soit $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien et soit T un temps d'arrêt. Conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus $B^{(T)}$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$$

est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T .

Preuve On distingue les deux cas : $\{T < \infty\}$ p.s. et $P(T = \infty) > 0$.

Supposons d'abord que $\{T < \infty\}$ presque sûrement. La preuve repose sur la démonstration de l'assertion suivante : Pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, pour tous réels $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p$ et pour toute fonction $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$E \left[\mathbb{1}_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)}) \right] = P(A) E \left[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p}) \right]. \quad (2.4)$$

Conséquence de cette assertion :

- On applique au cas où $A = \Omega$. L'égalité devient

$$E \left[F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)}) \right] = E \left[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p}) \right],$$

pour tous réels $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p$ et pour toute fonction $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Ceci montre que les processus B et $B^{(T)}$ ont les mêmes distributions finidimensionnelles, et donc ont la même loi.

- Grâce au point précédent, l'égalité de l'assertion se ré-écrit

$$E \left[\mathbb{1}_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)}) \right] = E[\mathbb{1}_A] E \left[F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)}) \right],$$

ce qui montre que le vecteur $(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_T . On en déduit que le processus $B^{(T)}$ est indépendant de \mathcal{F}_T par un argument de classe monotone.

Montrons l'égalité (2.4). On observe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{(k-1).2^{-n} < T \leq k.2^{-n}\}} F(B_{k.2^{-n}+t_1} - B_{k.2^{-n}}, \dots, B_{k.2^{-n}+t_p} - B_{k.2^{-n}})$$

converge presque sûrement vers $F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Comme F est bornée, le théorème de convergence dominée implique

$$\begin{aligned} & E \left[\mathbb{1}_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} E \left[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{(k-1).2^{-n} < T \leq k.2^{-n}\}} F(B_{k.2^{-n}+t_1} - B_{k.2^{-n}}, \dots, B_{k.2^{-n}+t_p} - B_{k.2^{-n}}) \right]. \end{aligned}$$

Comme $A \in \mathcal{F}_T$, on a

$$A \cap \{(k-1).2^{-n} < T \leq k.2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k.2^{-n}}.$$

D'après la propriété de Markov simple, on a

$$\begin{aligned} & E \left[\mathbb{1}_{A \cap \{(k-1).2^{-n} < T \leq k.2^{-n}\}} F(B_{k.2^{-n}+t_1} - B_{k.2^{-n}}, \dots, B_{k.2^{-n}+t_p} - B_{k.2^{-n}}) \right] \\ &= P(A \cap \{(k-1).2^{-n} < T \leq k.2^{-n}\}) E[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})]. \end{aligned}$$

En sommant sur k , on obtient (2.4).

Dans le cas où $P(T = \infty) > 0$, on montre de la même façon que

$$E \left[\mathbb{1}_{A \cap \{T < \infty\}} F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)}) \right] = P(A \cap \{T < \infty\}) E \left[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p}) \right].$$

Comme précédemment, on conclut ensuite que conditionnellement à $\{T < \infty\}$, le processus $B^{(T)}$ est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T . \square

La propriété de Markov forte peut être appliquée pour déduire le principe de réflexion du mouvement brownien, qui permet de déterminer la loi du maximum de B sur un intervalle $[0, t]$.

Théorème 2.5.4 (Principe de réflexion) *Soit $B = \{B_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ un mouvement brownien. Pour tout $t > 0$, on note $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$.*

Alors, si $a \geq 0$ et $b \leq a$ on a

$$P(S_t \geq a, B_t \leq b) = P(B_t \geq 2a - b).$$

En conséquence, S_t a même loi que $|B_t|$.

Preuve On applique la propriété de Markov forte au temps d'arrêt $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Le corollaire de la loi 0-1 de Blumenthal a montré que $T_a < \infty$ p.s. En utilisant $B_{t-T_a}^{(T_a)} = B_t - B_{T_a} = B_t - a$, on a

$$P(S_t \geq a, B_t \leq b) = P(T_a \leq t, B_t \leq b) = P(T_a \leq t, B_{t-T_a}^{(T_a)} \leq b - a).$$

On considère alors l'ensemble

$$H = \{(s, w) \in \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : s \leq t, w(t-s) \leq b-a\}.$$

En utilisant le fait que $B^{(T_a)}$ et T_a sont indépendantes et que $-B^{(T_a)}$ a même loi que $B^{(T_a)}$, le couple $(T_a, B^{(T_a)})$ a même loi que le couple $(T_a, -B^{(T_a)})$. On calcule alors

$$\begin{aligned} P\left(T_a \leq t, B_{t-T_a}^{(T_a)} \leq b-a\right) &= P\{(T_a, B^{(T_a)}) \in H\} \\ &= P\{(T_a, -B^{(T_a)}) \in H\} \\ &= P\left(T_a \leq t, -B_{t-T_a}^{(T_a)} \leq b-a\right) \\ &= P(T_a \leq t, B_t \geq 2a-b) \\ &= P(B_t \geq 2a-b), \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que $\{B_t \geq 2a-b\} \subset \{T_a \leq t\}$.

On applique ce 1er résultat pour déterminer la loi de S_t .

$$\begin{aligned} P(S_t \geq a) &= P(S_t \geq a, B_t \geq a) + P(S_t \geq a, B_t \leq a) \\ &= P(B_t \geq a) + P(B_t \geq a), \end{aligned}$$

en utilisant $\{B_t \geq a\} \subset \{S_t \geq a\}$ et en appliquant le résultat précédent pour $b = a$. Par symétrie, on trouve donc

$$P(S_t \geq a) = 2P(B_t \geq a) = P(|B_t| \geq a).$$

□