Lois stables

January 19, 2014

Proposition (TCL)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite variables aléatoires iid telle que* $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. *Alors* $(X_1 + \cdots + X_n - nm)/\sqrt{n}$ *converge en loi vers* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, *où* $m = \mathbb{E}(X_1)$ *et* $\sigma^2 = V(X_1)$.

Proposition (TCL)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite variables aléatoires iid telle que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Alors $(X_1 + \cdots + X_n - nm)/\sqrt{n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = V(X_1)$.

Définition

On dit que Y suit une loi stable s'il existe des suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables iid telles que $b_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(X_1 + \cdots + X_n - a_n)/b_n)$ converge en loi vers Y.

Proposition

Soit Y suivant une loi stable. Il existe des suites réelles $(c_n)_{n \geq 1}$ et $(d_n)_{n \geq 1}$ telles que $c_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour toutes copies indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ de Y, $Y_1 + \cdots + Y_n$ a même loi que $c_n Y + d_n$. Lorsque $d_n \equiv 0$ on parle de loi stable stricte.

Proposition

Soit Y suivant une loi stable. Il existe des suites réelles $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 1}$ telles que $c_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour toutes copies indépendantes $Y_1, \dots, Y_n$ de Y, $Y_1 + \cdots + Y_n$ a même loi que $c_n Y + d_n$. Lorsque $d_n \equiv 0$ on parle de loi stable stricte.

Remarque : il suit de la proposition qu'une loi stable est infiniment divisible.

Proposition

Soit Y suivant une loi stable. Il existe des suites réelles $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(d_n)_{n\geq 1}$ telles que $c_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et pour toutes copies indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ de Y, $Y_1 + \cdots + Y_n$ a même loi que $c_n Y + d_n$. Lorsque $d_n \equiv 0$ on parle de loi stable stricte.

Remarque : il suit de la proposition qu'une loi stable est infiniment divisible.

On peut montrer alors que $c_{mn} = c_m c_n$, puis que $c_n = \sigma n^{\alpha}$ pour tout $n \geq 1$ et enfin que nécessairement $0 < \alpha \leq 2$. On appelle alors α le paramètre de la loi stable.

Théorème

Soit μ *une loi stable de paramètre* $\alpha \in]0,2]$. *Alors*

(i) *Si* $\alpha = 2$, *la mesure de Lévy* ν *est nulle et* μ *est une loi normale.*

Théorème

Soit μ *une loi stable de paramètre* $\alpha \in]0,2]$. *Alors*

(i) *Si* $\alpha = 2$, *la mesure de Lévy* ν *est nulle et* μ *est une loi normale.*

(ii) *Si* $\alpha \neq 2$, *alors* $c = 0$ *et il existe* $c_1, c_2 \geq 0$ *avec* $c_1 + c_2 > 0$ *tels que* $\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)dx$.

Théorème

Soit μ *une loi stable de paramètre* $\alpha \in]0, 2]$. *Alors*

(i) *Si* $\alpha = 2$, *la mesure de Lévy* ν *est nulle et* μ *est une loi normale.*

(ii) *Si* $\alpha \neq 2$, *alors* $c = 0$ *et il existe* $c_1, c_2 \geq 0$ *avec* $c_1 + c_2 > 0$ *tels que* $\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)dx$.

Théorème

Soit $0 < \alpha \leq 2$. *Une variable aléatoire* X *est* α*-stable si et seulement si il existe* $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

(i) *pour* $\alpha = 2$, $\hat{\mu}(t) = \exp(i\lambda t - \sigma^2 t^2/2)$,

Théorème

Soit μ une loi stable de paramètre $\alpha \in]0,2]$. Alors

(i) *Si $\alpha = 2$, la mesure de Lévy ν est nulle et μ est une loi normale.*

(ii) *Si $\alpha \neq 2$, alors $c = 0$ et il existe $c_1, c_2 \geq 0$ avec $c_1 + c_2 > 0$ tels que $\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)dx$.*

Théorème

Soit $0 < \alpha \leq 2$. Une variable aléatoire X est α-stable si et seulement si il existe $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(i) *pour $\alpha = 2$, $\hat{\mu}(t) = \exp(i\lambda t - \sigma^2 t^2/2)$,*

(ii) *pour $\alpha \neq 1, 2$,*
$\hat{\mu}(t) = \exp[i\lambda t - \sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \mathrm{sgn}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))]$,

Théorème

Soit μ *une loi stable de paramètre* $\alpha \in]0,2]$. *Alors*

(i) *Si* $\alpha = 2$, *la mesure de Lévy* ν *est nulle et* μ *est une loi normale.*

(ii) *Si* $\alpha \neq 2$, *alors* $c = 0$ *et il existe* $c_1, c_2 \geq 0$ *avec* $c_1 + c_2 > 0$ *tels que* $\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)dx$.

Théorème

Soit $0 < \alpha \leq 2$. *Une variable aléatoire* X *est* α*-stable si et seulement si il existe* $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

(i) *pour* $\alpha = 2$, $\hat{\mu}(t) = \exp(i\lambda t - \sigma^2 t^2/2)$,

(ii) *pour* $\alpha \neq 1, 2$,
$\hat{\mu}(t) = \exp[i\lambda t - \sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \mathrm{sgn}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))]$,

(iii) *pour* $\alpha = 1$, $\hat{\mu}(t) = \exp[i\lambda t - \sigma|t|(1 - \frac{2i\beta}{\pi} \mathrm{sgn}(t) \log|t|]$.

Théorème

Soit μ une loi stable de paramètre $\alpha \in]0,2]$. Alors

(i) *Si $\alpha = 2$, la mesure de Lévy ν est nulle et μ est une loi normale.*

(ii) *Si $\alpha \neq 2$, alors $c = 0$ et il existe $c_1, c_2 \geq 0$ avec $c_1 + c_2 > 0$ tels que $\nu(dx) = \frac{c_1}{x^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)dx + \frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{]-\infty,0[}(x)dx$.*

Théorème

Soit $0 < \alpha \leq 2$. Une variable aléatoire X est α-stable si et seulement si il existe $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(i) *pour $\alpha = 2$, $\hat{\mu}(t) = \exp(i\lambda t - \sigma^2 t^2/2)$,*

(ii) *pour $\alpha \neq 1, 2$,*
$\hat{\mu}(t) = \exp[i\lambda t - \sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \mathrm{sgn}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))]$,

(iii) *pour $\alpha = 1$, $\hat{\mu}(t) = \exp[i\lambda t - \sigma|t|(1 - \frac{2i\beta}{\pi} \mathrm{sgn}(t) \log|t|]$.*

En particulier, toute mesure de probabilité α-stable admet une densité.

noindent **Exemples.**

1. Loi gaussienne. $\alpha = 2, \qquad \mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$.

noindent **Exemples.**

1. **Loi gaussienne.** $\alpha = 2, \qquad \mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$.
2. **Loi de Cauchy.** $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\qquad \mu(dx) = \frac{\sigma dx}{\pi[(x-\lambda)^2+\sigma^2]}$.

noindent **Exemples.**

1. **Loi gaussienne.** $\alpha = 2, \qquad \mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$.
2. **Loi de Cauchy.** $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\qquad \mu(dx) = \frac{\sigma dx}{\pi[(x-\lambda)^2+\sigma^2]}$.
3. **Loi de Lévy.** $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$

$$\mu(dx) = \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\exp[\frac{-\sigma}{2(x-\lambda)}]}{(x-\lambda)^{3/2}} \mathbf{1}_{\{x>\lambda\}} dx.$$

noindent **Exemples.**

1. **Loi gaussienne.** $\alpha = 2, \qquad \mathcal{N}(\lambda, \sigma^2)$.
2. **Loi de Cauchy.** $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\qquad \mu(dx) = \frac{\sigma dx}{\pi[(x-\lambda)^2+\sigma^2]}$.
3. **Loi de Lévy.** $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$

$$\mu(dx) = \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\exp[\frac{-\sigma}{2(x-\lambda)}]}{(x-\lambda)^{3/2}} \mathbf{1}_{\{x>\lambda\}} dx.$$

Proposition

Soit μ une loi stable de paramètre α, alors il existe $K > 0$ tel que $\tilde{\mu}(t) = \mathrm{e}^{-Kt^{\alpha}}$ pour tout $t \geq 0$ et, nécessairement, $\alpha \in]0, 1]$.

Question : peut-on avoir $\alpha = 1$ dans la proposition ?

Définition

On appelle semi-groupe de convolution (sur $\mathbb{R}^d$) une famille de mesures de probabilités $(\mu_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $s, t \geq 0$, $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$.

Définition

On appelle semi-groupe de convolution (sur $\mathbb{R}^d$*) une famille de mesures de probabilités* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *telle que pour tout* $s, t \geq 0$, $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$. *On dit que* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *est mesurable si pour tout borélien* A*, l'application* $t \to \mu_t(A)$ *est mesurable.*

Définition

On appelle semi-groupe de convolution (sur $\mathbb{R}^d$) une famille de mesures de probabilités $(\mu_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $s, t \geq 0$, $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$. On dit que $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est mesurable si pour tout borélien A, l'application $t \to \mu_t(A)$ est mesurable. On dit que $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite en 0 pour la topologie de la convergence étroite si pour toute fonction continue bornée f, $\mu_t(f) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mu_0(f)$.

Proposition

(i) *Soit* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de convolution. Alors pour tout* $t \geq 0$, μ_t *est infiniment divisible.*

Proposition

(i) *Soit* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de convolution. Alors pour tout* $t \geq 0$, μ_t *est infiniment divisible.*

(ii) *A toute mesure de probabilité infiniment divisible on peut associer un semi-groupe de convolution* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *tel que* $\mu_1 = \mu$. *De plus* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *est unique si l'on requiert qu'il soit mesurable.*

Proposition

(i) *Soit* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de convolution. Alors pour tout* $t \geq 0$, μ_t *est infiniment divisible.*

(ii) *A toute mesure de probabilité infiniment divisible on peut associer un semi-groupe de convolution* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *tel que* $\mu_1 = \mu$. *De plus* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *est unique si l'on requiert qu'il soit mesurable.*

Lemme

Soit χ *une fonction mesurable sur* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $s, t \geq 0$. $\chi(s+t) = \chi(s) + \chi(t)$. *Alors* $\chi(t) = t\chi(1)$, *pour tout* $t \geq 0$.

Proposition

(i) *Soit* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de convolution. Alors pour tout* $t \geq 0$, μ_t *est infiniment divisible.*

(ii) *A toute mesure de probabilité infiniment divisible on peut associer un semi-groupe de convolution* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *tel que* $\mu_1 = \mu$. *De plus* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *est unique si l'on requiert qu'il soit mesurable.*

Lemme

Soit χ *une fonction mesurable sur* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $s, t \geq 0$. $\chi(s+t) = \chi(s) + \chi(t)$. *Alors* $\chi(t) = t\chi(1)$, *pour tout* $t \geq 0$.

Corollaire

Soit $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe de convolution. Si* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *est mesurable, il est continue pour la topologie de la convergence étroite.*

Exercices

Exercices

Soit μ une loi infiniment divisible. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique mesure μ_n telle que $\mu_n^{*n} = \mu$. En déduire que si μ est symétrique, alors μ_n est symétrique, de même que ν.

Exercices

Exercices

Soit μ une loi infiniment divisible. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique mesure μ_n telle que $\mu_n^{*n} = \mu$. En déduire que si μ est symétrique, alors μ_n est symétrique, de même que ν.

Exercices

Soit μ une loi infiniment divisible et $n \geq 1$. Montrer que μ admet un moment d'ordre $2n$ ssi $\int_{\{|x| \geq 1\}} |x|^{2n} \nu(dx) < \infty$.

Exercices

Soit μ une loi infiniment divisible. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une unique mesure μ_n telle que $\mu_n^{*n} = \mu$. En déduire que si μ est symétrique, alors μ_n est symétrique, de même que ν.

Exercices

Soit μ une loi infiniment divisible et $n \geq 1$. Montrer que μ admet un moment d'ordre $2n$ ssi $\int_{\{|x| \geq 1\}} |x|^{2n} \nu(dx) < \infty$.

Exercices

Montrer que la loi de Cauchy $\mu(dx) = \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$ est une loi stable et identifier la mesure ν correspondante (dans la décomposition de Lévy-Khintchin).