Processus de Markov-S9 C. Cuny

Examen du 31 janvier 2012-8H00

durée : 3 heures

Exercice 1 :
Soit $t > 0$. Pour tout $f \in C_0([0, +\infty[$ on pose

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \frac{x}{x+t} f(x+t) + \int_x^\infty \frac{t}{(y+t)^2} f(y+t) dy \\ &= \frac{x}{x+t} f(x+t) + \int_{x+t}^\infty \frac{t}{y^2} f(y) dy \end{aligned}$$

1) Montrer que pour tout $t > 0$, P_t définit une contraction de $C_0([0, +\infty[)$ (i.e. que P_t définit une application linéaire de $C_0([0, +\infty[)$ dans lui-même telle que $\|P_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, pour tout $f \in C_0([0, +\infty[))$.
On admet qu'alors, pour tout $t > 0$, P_t est donné par une probabilité de transition (cf preuve de la Proposition 4.5).
Posons $P_0 = Id$ l'identité de $C_0([0, +\infty[)$.
2) Montrer que pour tout $s, t > 0$ et toute fonction $f \in C_0([0, +\infty[)$, positive, $P_s(P_t f) = P_{s+t} f$.
3) Montrer que $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de Feller sur $C_0([0, +\infty[)$.
Soit $\mathcal{S} = \{f \in C^\infty([0, +\infty[) \ : \ \sup_{x \geq 0} x^k |f^{(m)}(x)| < \infty, \ \forall k, m \in \mathbb{N}\}$, l'espace de Schwartz (sur $[0, +\infty[)$.
4) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, tout $x \geq 0$ et tout $t > 0$, on a

$$P_t f(x) - f(x) = t\left(\int_0^1 f'(x + tu) du + \int_{x+t}^{+\infty} \frac{f'(y)}{y} dy\right).$$

On note A le générateur infinitésimal associé à $(P_t)_{t \geq 0}$.
5) Soit $f \in \mathcal{S}$ nulle au voisinage de 0. Montrer que $f \in \mathcal{D}_A$ et que $Af(x) = f'(x) + \int_x^{+\infty} \frac{f'(u)}{u} du$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.
6) (Difficile) Soit $f \in C_0([0, +\infty[)$ dérivable telle que $f' \in C_0([0, +\infty[)$ et $\int_0^{+\infty} \frac{|f'(u)|}{u} du < \infty$. Montrer que $f \in \mathcal{D}_A$ et que Af est donné comme au 5).

Exercice 2 :
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(S, \mathcal{S})$ un espace mesuré. Soit N une mesure de Poisson sur $\Omega \times \mathcal{S}$ d'intensité μ, σ-finie, sur $\mathcal{S}$.

1) Montrer directement (sans reprendre le calcul du cours) que pour toute fonction f mesurable positive sur S,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-N(f)}) = \exp\Big(\int_S (\mathrm{e}^{-f(x)} - 1)\mu(dx)\Big). \tag{1}$$

On commencera par le cas d'une fonction étagée.
Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ un espace de probabilité et $\tilde{N}$ une mesure aléatoire sur $\tilde{\Omega} \times S$ vérifiant (1) pour toute f mesurable positive sur S (avec bien sûr $\tilde{\mathbb{E}}$ à la place de $\mathbb{E}$).
2a) Montrer que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{S}$, tel que $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(N(\cdot, A_n))$ est une suite de variables indépendantes dont on déterminera la loi.
2b) Montrer que $\tilde{N}$ est une mesure de Poisson et préciser son intensité.
3) Soit f une fonction mesurable sur S (non nécessairement positive), telle que $\int_S \min(1, |f|)(x)\mu(dx)$. Montrer que les variables $N(f)$ et $\tilde{N}(f)$ sont bien définies et ont même loi.
4) Montrer que si f est mesurable sur S, négative et telle que $\int_S \mathrm{e}^{-f(x)}\mu(dx) < \infty$ alors (1) reste vraie.
5) Montrer que si f est mesurable sur S, de signe quelconque et telle que $\int_S \mathrm{e}^{f^-(x)}\mu(dx) < \infty$ alors (1) reste vraie. On rappelle que $f^+ = \max(0, f)$, $f^- = \max(0, -f)$ et qu'alors $f = f^+ - f^-$.
6) Montrer que si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy réel alors, pour tout $t \geq 0$, $\sum_{0\leq s\leq t} |\Delta X_s|^2 < \infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

On rappelle la version suivante du lemme de Fatou : soit (Y_n) une suite de variables aléatoires positives sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ convergeant $\mathbb{P}$-p.s. vers Y. On a $\mathbb{E}(Y) \leq \sup_{m\geq n} \mathbb{E}(Y_m)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :
Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy réel càd-làg sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et N la mesure de Poisson associée, i.e. $N(\omega, [0, t] \times A) = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbf{1}_A(\Delta X_s(\omega))$, pour tous $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$. On définit la mesures aléatoire N_t sur $\Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par $N_t(\omega, A) = N(\omega, [0, t] \times A)$.

Posons pour tous $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_t^{(n)} = \int_{\{1/n<|x|\leq 1\}} x(N_t(\cdot, dx) - t\mu(dx)),$$

où μ est la mesure σ-finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$, donnée par $\mu(A) = \mathbb{E}(N_1(A))$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$.

1) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $(Y_t^{(n)})$ converge dans L^2, disons vers Y_t, et admet une sous-suite convergeant $\mathbb{P}$-p.s. vers Y_t.

2) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha Y_t^{(n)}}) = \exp\big(t \int_{\{1/n<|x|\leq 1\}} (\mathrm{e}^{\alpha x} - 1 - \alpha x)\mu(dx)\big).$$

3) Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\alpha Y_t}) < \infty$.
4) Soit Z_1 et Z_2 des variables aléatoires indépendantes sur Ω. Soit $\delta > 0$. Montrer que $\mathbb{E}(|Z_1 + Z_2|^\delta) < \infty$ si et seulement si $\mathbb{E}(|Z_1|^\delta) < \infty$ et $\mathbb{E}(|Z_2|^\delta) < \infty$.
5) Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{E}(|X_1|^\delta) < \infty$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(|X_t|^\delta) < \infty$.
6) Montrer que pour tout $\delta > 0$, $X_1 \in L^\delta(\Omega)$ si et seulement si $\int_{\{|x|>1\}} x N_1(\cdot, dx) \in L^\delta(\Omega)$. (On pourra utiliser la formule de Lévy-Ito).
7) Soit $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson et $(W_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives, indépendantes de $(\Gamma_t)_{t\geq 0}$. On considère le processus de Poisson composé donné par $H_t = \sum_{1\leq n\leq \Gamma_t} W_n$, pour tout $t \geq 0$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{E}(H_1^\delta) < \infty$ si et seulement si $\mathbb{E}(W_1^\delta) < \infty$.
8) Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{E}(|X_1|^\delta) < \infty$ si et seulement si $\int_{\{|x|>1\}} |x|^\delta \mu(dx) < \infty$.