Einheiten quadratischer Formen.

Erweiterte Fassung eines am 25. Januar 1939 zu Hamburg gehaltenen Vortrages.

Von CARL LUDWIG SIEGEL.

Unter den *Einheiten* einer quadratischen Form $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} = \sum_{k,l=1}^{m} s_{kl} x_k x_l$ mit rationalen Koeffizienten s_{kl} verstehen wir die Matrizen derjenigen ganzzahligen linearen Transformationen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ der Variabeln $x_1, \cdots, x_m$, welche die quadratische Form invariant lassen, also der Matrizengleichung $\mathfrak{C}' \mathfrak{S} \mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ genügen. Ist die Determinante $|\mathfrak{S}| \neq 0$, so gilt $|\mathfrak{C}| = \pm 1$; also ist auch $\mathfrak{C}^{-1}$ ganz, und die Einheiten bilden dann bei Multiplikation eine Gruppe, die *Einheitengruppe* von $\mathfrak{S}$. Während bei definiten quadratischen Formen die Einheitengruppe stets von endlicher Ordnung ist, so zeigt es sich, daß indefinite quadratische Formen, von einer trivialen Ausnahme abgesehen, immer unendlich viele Einheiten besitzen. Im Falle $m = 2$ führt die Bestimmung der Einheiten auf die Lösung der Pellschen Gleichung $t^2 - Du^2 = \pm 4$, wobei $-D$ die Determinante von $\mathfrak{S}$ bedeutet. Die von LAGRANGE gegebene Methode zur Auflösung dieser Gleichung liefert zugleich alle Einheiten im binären Falle. Die Einheitentheorie der ternären indefiniten quadratischen Formen wurde von HERMITE[1]) behandelt, unter Benutzung einer weittragenden Idee, die auch bei beliebiger Variablenzahl verwendet werden kann. Allerdings blieb in HERMITES Untersuchungen zur Theorie der indefiniten quadratischen Formen eine Lücke, welche erst durch eine Abhandlung von STOUFF[2]) ausgefüllt worden ist.

Wegen der Bedeutung der Einheitengruppen für die Arithmetik der quadratischen Formen, für die Funktionentheorie und für die allgemeine Gruppentheorie dürfte vielleicht eine kurze zusammenhängende Einführung in die Einheitentheorie erwünscht sein, wie sie im folgenden gegeben werden soll.

§ 1. Fundamentalbereiche diskontinuierlicher Gruppen.

Es sei G ein offenes Gebiet des h-dimensionalen reellen euklidischen Raumes und Γ eine abzählbare Gruppe von eindeutigen Abbildungen

[1]) HERMITE, Sur la théorie des formes quadratiques, Werke, Bd. 1, insbesondere S. 226—232.

[2]) STOUFF, Remarques sur quelques propositions dues à M. Hermite, Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 3. Reihe. Bd. 19 (1902), S. 89—118.

dieses Gebietes auf sich selbst. Die Gruppe heißt in G *diskontinuierlich,* wenn die Folge der Bildpunkte eines beliebigen Punktes von G keinen Häufungspunkt innerhalb G besitzt. Ein Teilgebiet F von G soll *Fundamentalbereich* von Γ (in bezug auf G) heißen, wenn jeder Punkt von G entweder genau einen Bildpunkt im Innern von F oder aber mindestens einen Bildpunkt auf dem Rande von F besitzt. Es ist eine wichtige Aufgabe, zu einer vorgelegten diskontinuierlichen Gruppe einen möglichst einfachen Fundamentalbereich zu finden. Bei der Lösung dieser Aufgabe können sich tiefere Einblicke in die Eigenschaften der Gruppe ergeben, so erhält man z. B. in gewissen Fällen dabei einen Aufbau der Gruppe aus endlich vielen Erzeugenden.

Das Problem des Nachweises der Diskontinuität einer Gruppe und der Auffindung eines geeigneten Fundamentalbereichs kann noch in folgender Weise modifiziert werden. Es sei G eindeutig auf ein Gebiet G^* des euklidischen Raumes von h^* Dimensionen abgebildet, wobei auch $h^* < h$ sein kann. Jeder Abbildung aus der Gruppe Γ entspricht dann eine Abbildung von G^* auf sich selbst, die aber nicht eindeutig zu sein braucht. Wir setzen nun voraus, daß diese Abbildungen von G^* auf sich auch sämtlich eindeutig sind; d. h. wir setzen voraus, daß je zwei Punkte P und Q von G, denen derselbe Punkt $P^* = Q^*$ von G^* entspricht, bei jeder Abbildung aus Γ in zwei Punkte P_1 und Q_1 von G übergehen, denen in G^* wieder derselbe Punkt $P_1^* = Q_1^*$ zugeordnet ist. Dann entsteht wieder eine Gruppe Γ^* von eindeutigen Abbildungen des Gebietes G^* auf sich. Die sämtlichen Abbildungen aus Γ, denen die identische Abbildung aus Γ^* zugeordnet ist, bilden eine invariante Untergruppe Γ_0 von Γ, und es ist Γ^* die Faktorgruppe Γ/Γ_0. Unsere Aufgabe läßt sich nun folgendermaßen in vielleicht einfachere Teile zerlegen: Man bestimme zunächst einen Fundamentalbereich F^* von Γ^* in bezug auf G^*, dann das Teilgebiet G_0 von G, dem F^* in G^* entspricht, und schließlich einen Fundamentalbereich F von Γ_0 in bezug auf G_0. Es ist F zugleich ein Fundamentalbereich von Γ in bezug auf G.

Wir betrachten jetzt speziell die Gruppe der *unimodularen* Substitutionen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{U}\mathfrak{x}$ von m reellen Variablen $x_1, \cdots, x_m$, die zu der Spalte $\mathfrak{x}$ zusammengefaßt seien; dabei sind für $\mathfrak{U}$ alle m-reihigen Matrizen mit der Determinante ± 1 und ganzen rationalen Elementen zulässig. Für $m > 1$ ist diese Gruppe in keinem Gebiete des m-dimensionalen $\mathfrak{x}$-Raumes diskontinuierlich, da jeder Punkt $\mathfrak{x}$ mit rationalen Koordinaten, wie leicht zu sehen ist, Fixpunkt bei unendlich vielen $\mathfrak{U}$ ist. Um zu einem höherdimensionalen Raum zu kommen, in welchem die Gruppe diskontinuierlich ist, nimmt man statt einer einzigen Spalte m unabhängige Spalten $\mathfrak{x}$, also eine Matrix $\mathfrak{X}$ von m Zeilen und Spalten. Die Gruppe Γ der Abbildungen $\mathfrak{X} \to \mathfrak{U}\mathfrak{X}$ ist dann auf dem durch die Bedingung

$|\mathfrak{x}| \neq 0$ definierten Gebiet G des Raumes von $h = m^2$ Dimensionen diskontinuierlich; denn aus der Konvergenz einer Folge $\mathfrak{U}_k \mathfrak{x}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ mit unimodularen $\mathfrak{U}_k$ würde als Widerspruch die Konvergenz der $\mathfrak{U}_k$ selber folgen.

Um einen Fundamentalbereich F von Γ in bezug auf G zu bestimmen, untersuchte MINKOWSKI[3]) das Gebiet G^* von nur $h^* = \frac{1}{2} m (m+1)$ Dimensionen, das durch die Koeffizienten h_{kl} $(1 \leqq k \leqq l \leqq m)$ der symmetrischen Matrix $\mathfrak{x}\mathfrak{x}' = \mathfrak{H} = (h_{kl})$ geliefert wird. Es ist also G^* der Raum der Koeffizienten der *positiven quadratischen Formen* von m Variabeln. Der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{U}\mathfrak{x}$ des $\mathfrak{x}$-Raumes entspricht die Abbildung $\mathfrak{H} \to \mathfrak{U}\mathfrak{H}\mathfrak{U}'$ des $\mathfrak{H}$-Raumes, und dies ist die identische Abbildung nur für $\mathfrak{U} = \pm \mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix bedeutet. Also ist die Gruppe Γ^* der zu betrachtenden Abbildungen des $\mathfrak{H}$-Raumes genau die Faktorgruppe der Gruppe Γ in bezug auf die durch $\mathfrak{E}$ und $-\mathfrak{E}$ gebildete invariante Untergruppe Γ_0, und man erhält die Elemente von Γ^* aus denen von Γ, indem man $\mathfrak{U}$ und $-\mathfrak{U}$ nicht als verschieden ansieht. Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{U}'\mathfrak{H}\mathfrak{U} = \mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ und sagen, $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ sei *äquivalent* mit $\mathfrak{H}$. Die Bestimmung eines Fundamentalbereiches für die unimodulare Gruppe in bezug auf den $\mathfrak{x}$-Raum ist damit zurückgeführt auf die zweckmäßige Auswahl eines Repräsentanten aus jeder *Klasse* äquivalenter positiver quadratischer Formen von m Variabeln, also auf die *Reduktionstheorie* der definiten quadratischen Formen.

Für $m = 2$ stammt die Reduktionstheorie von LAGRANGE, für $m = 3$ von SEEBER, für beliebiges m ist sie von HERMITE begonnen und von MINKOWSKI vollendet worden. In neuerer Zeit haben BIEBERBACH und J. SCHUR in einer gemeinsam verfaßten Arbeit[4]) eine vereinfachte Darstellung der Minkowskischen Reduktionstheorie gegeben. Wie MINKOWSKI gezeigt hat, läßt sich als Fundamentalbereich F^* von Γ^* im $\mathfrak{H}$-Raume eine von endlich vielen Ebenen begrenzte konvexe Ecke wählen, und dabei sind zu F^* nur endlich viele Bildbereiche benachbart. Wir wollen zunächst diese beiden wichtigen Resultate auf einem etwas vereinfachten Wege herleiten und dann das zweite von ihnen so verallgemeinern, daß es für die weiterhin zu machenden Anwendungen brauchbar wird.

Nach den vorbereitenden Betrachtungen zur Theorie der positiven quadratischen Formen werden wir uns dem eigentlichen Ziel unserer Untersuchung zuwenden, nämlich der Einheitentheorie der *indefiniten* quadratischen Formen $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = \mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ mit m Variabeln und rationalen

[3]) MINKOWSKI, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, Werke, Bd. 2 S. 53—100.

[4]) BIEBERBACH und SCHUR, Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, Jahrg. 1928, S. 510—535.

Koeffizienten. Es sei $n, m-n$ die Signatur von $\mathfrak{S}$, d. h. es sei $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ durch eine reelle umkehrbare lineare Substitution der Variabeln in die Summe $y_1^2+\cdots+y_n^2-(y_{n+1}^2+\cdots+y_m^2)$ transformierbar. Wir betrachten dann die Matrizengleichung

$$\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H}=\mathfrak{S} \tag{1}$$

und verlangen, daß $\mathfrak{H}$ die Matrix einer positiven quadratischen Form bildet. Es zeigt sich, daß diese $\mathfrak{H}$ eine Mannigfaltigkeit H von genau $n(m-n)$ Dimensionen ergeben. Ist nun $\mathfrak{C}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{S}[\mathfrak{C}]=\mathfrak{S}$, so ist auch $\mathfrak{S}^{-1}=\mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{C}']$ und aus (1) folgt

$$\mathfrak{H}[\mathfrak{C}]\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H}[\mathfrak{C}]=\mathfrak{S}.$$

Demnach ist H bei den Abbildungen $\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}[\mathfrak{C}]$ invariant. Es wird bewiesen werden, daß die Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$ in dem $n(m-n)$-dimensionalen Gebiete H diskontinuierlich ist und dort einen von endlich vielen algebraischen Flächen begrenzten Fundamentalbereich besitzt. Zugleich findet man ein System von *endlich* vielen Erzeugenden der Einheitengruppe.

Die Reduktionstheorie der indefiniten quadratischen Formen $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ ist bereits von HERMITE durch Einführung der durch (1) definierten positiven quadratischen Form $\mathfrak{H}[\mathfrak{x}]$ behandelt worden. Wir wählen eine unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$, so daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ im Fundamentalbereich F^* gelegen ist, also im Bereich der reduzierten positiven quadratischen Formen, und nennen dann auch $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ *reduziert*. Für ganzzahliges $\mathfrak{S}$ sprach HERMITE den wichtigen Satz aus, daß die Elemente jedes reduzierten $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ zwischen Schranken liegen, die nur von der Determinante von $\mathfrak{S}$ abhängen. Dieser Satz bildet ein Hilfsmittel bei der Untersuchung der Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$. Da der von STOUFF gegebene Beweis durch langwierige und undurchsichtige Rechnungen beschwert wird, so ist der im folgenden dargestellte Beweis wohl nicht überflüssig.

§ 2. Reduktion positiver Formen.

Eine reelle symmetrische Matrix $\mathfrak{H}$ heiße *positiv*, in Zeichen $\mathfrak{H}>0$, wenn die quadratische Form $\mathfrak{H}[\mathfrak{x}]>0$ ist für alle reellen $\mathfrak{x}\neq\mathfrak{n}$. Bedeutet dann μ das Minimum von $\mathfrak{H}[\mathfrak{x}]$ auf der Einheitskugel $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}=1$, so ist $\mu>0$, und wegen der Homogenität gilt für beliebige reelle $\mathfrak{x}$ die Ungleichung

$$\mathfrak{H}[\mathfrak{x}]\geqq\mu\,\mathfrak{x}'\mathfrak{x}.$$

Hieraus folgt, daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{x}]$ über alle Grenzen wächst, wenn $\mathfrak{x}$ irgendeine unendliche Folge ganzer Spalten durchläuft. Auf jeder solchen Folge nimmt also insbesondere die Funktion $\mathfrak{H}[\mathfrak{x}]$ ein Minimum an.

In der Klasse aller mit $\mathfrak{H}$ äquivalenten Matrizen $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ wird eine Reduzierte von MINKOWSKI durch Extremalbedingungen festgelegt. Man wähle zunächst die erste Spalte $\mathfrak{u}_1$ von $\mathfrak{U}$ derart, daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{u}_1]$ möglichst klein ist. Sodann betrachte man alle unimodularen Matrizen mit dieser festen ersten Spalte $\mathfrak{u}_1$ und wähle die zweite Spalte $\mathfrak{u}_2$ so aus, daß wieder $\mathfrak{H}[\mathfrak{u}_2]$ möglichst klein wird. Indem man eventuell noch $\mathfrak{u}_2$ durch $-\mathfrak{u}_2$ ersetzt, kann man erreichen, daß die Zahl $\mathfrak{u}_1'\mathfrak{H}\mathfrak{u}_2 \geqq 0$ ist. Bei festgehaltenen beiden ersten Spalten $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ mache man dann $\mathfrak{H}[\mathfrak{u}_3]$ durch die dritte Spalte $\mathfrak{u}_3$ zum Minimum, wobei man noch $\mathfrak{u}_2'\mathfrak{H}\mathfrak{u}_3 \geqq 0$ vorschreiben kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man nach m Schritten eine gewisse unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$, und $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}] = \mathfrak{R}$ heißt dann *reduziert*.

Wir wollen die Reduktionsbedingungen für $\mathfrak{R}$ explizit aufschreiben. Es möge eine unimodulare Matrix $\mathfrak{U}_k$ mit $\mathfrak{U}$ in den ersten $k-1$ Spalten übereinstimmen, wobei k eine Zahl der Reihe $1, 2, \cdots, m$ sein kann. Alle diese $\mathfrak{U}_k$ werden geliefert durch den Ansatz

$$\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_{k-1} & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit ganzem $\mathfrak{A}$ und unimodularem $\mathfrak{B}$, wobei $\mathfrak{E}_{k-1}$ die $(k-1)$-reihige Einheitsmatrix und $\mathfrak{R}$ eine Nullmatrix bedeuten. Ist nun $\mathfrak{g}_k$ die k-te Spalte von $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}_k$, mit den ganzen Elementen $g_1, \cdots, g_m$, so bilden davon $g_k, \cdots, g_m$ die erste Spalte der unimodularen Matrix $\mathfrak{B}$, sind also teilerfremd, und $\mathfrak{U}\mathfrak{g}_k$ wird die k-te Spalte von $\mathfrak{U}_k$. Wählt man umgekehrt für die Elemente von $\mathfrak{g}_k$ irgend m ganze Zahlen $g_1, \cdots, g_m$, von denen $g_k, \cdots, g_m$ teilerfremd sind, so läßt sich nach einem Satze von GAUSS die aus $g_k, \cdots, g_m$ gebildete Spalte zu einer unimodularen Matrix $\mathfrak{B}$ auffüllen, und man erhält aus (2) eine unimodulare Matrix $\mathfrak{U}_k$, deren k-te Spalte $\mathfrak{U}\mathfrak{g}_k$ ist. Wegen der Extremalforderung für $\mathfrak{U}$ ist dann

$$\mathfrak{H}[\mathfrak{U}\mathfrak{g}_k] = \mathfrak{R}[\mathfrak{g}_k] \geqq r_k,$$

wo r_k das k-te Diagonalelement von $\mathfrak{R}$ bedeutet. Folglich ist $\mathfrak{R} = (r_{kl})$ dann und nur dann reduziert, wenn die sämtlichen Bedingungen

$$\mathfrak{R}[\mathfrak{g}_k] \geqq r_k \qquad (k = 1, \cdots, m) \tag{3}$$

für alle ganzen Spalten $\mathfrak{g}_k$ mit $(g_k, \cdots, g_m) = 1$ erfüllt sind und außerdem die $m-1$ Ungleichungen

$$r_{l\,l-1} \geqq 0 \qquad (l = 1, \cdots, m-1). \tag{4}$$

Die Bedingung (3) ist identisch in $\mathfrak{R}$ erfüllt, und zwar mit dem Gleichheitszeichen, wenn wir $g_k = \pm 1$ und $g_l = 0$ für $l \neq k$ wählen; diese trivialer-

weise erfüllten Bedingungsgleichungen denken wir uns weiterhin aus (3) fortgelassen.

Wählt man in $\mathfrak{g}_k$ alle Elemente gleich 0 mit Ausnahme eines einzigen Elementes $g_l = 1$, wobei die Zahl $l > k$ sei, so folgt aus (3) die Ungleichung

$$r_k \leqq r_l \qquad (k < l). \tag{5}$$

Setzt man andererseits $g_k = 1$, $g_l = \pm 1$ und alle andern Elemente von $\mathfrak{g}_k$ gleich 0, wobei jetzt $l < k$ sei, so folgt

$$\begin{aligned} r_k \pm 2\, r_{kl} + r_l &\geqq r_k, \\ -r_l \leqq 2\, r_{kl} &\leqq r_l \qquad (k > l). \end{aligned} \tag{6}$$

Es bedeute $\mathfrak{R}_l$ den l-ten Abschnitt von $\mathfrak{R}$, nämlich die aus $\mathfrak{R}$ durch Streichung der letzten $m-l$ Reihen entstehende positive l-reihige Matrix. Wählt man für $\mathfrak{g}_k$ solche Spalten, deren letzte $m-l$ Elemente sämtlich 0 sind, so folgt aus (3) und (4), daß auch $\mathfrak{R}_l$ reduziert ist.

Wir verstehen fortan unter $c_1, c_2, \cdots, c_{13}$ natürliche Zahlen, die nur von m abhängen, und beweisen zunächst den wichtigen

Satz 1: *Ist $\mathfrak{R}$ reduziert, so besteht zwischen den Diagonalelementen $r_1, \cdots, r_m$ und der Determinante $|\mathfrak{R}|$ die Ungleichung*

$$r_1 \cdots r_m < c_1 |\mathfrak{R}|. \tag{7}$$

Beweis: Die Behauptung ist trivialerweise richtig für $m = 1$. Es sei $m > 1$ und die Behauptung richtig für $m-1$ statt m. Da der Abschnitt $\mathfrak{R}_{m-1}$ reduziert ist, so folgt aus (7) die Beziehung

$$r_1 \cdots r_{m-1} < c_2 |\mathfrak{R}_{m-1}|. \tag{8}$$

Bedeutet R_{kl} die $(m-2)$-reihige Unterdeterminante von r_{kl} in $\mathfrak{R}_{m-1}$, so gilt nach (6) die Ungleichung

$$\pm R_{kl}\, r_l < c_3\, r_1\, r_2 \cdots r_{m-1}.$$

Für die Elemente von $\mathfrak{R}_{m-1}^{-1}$ erhalten wir demnach

$$\pm R_{kl} |\mathfrak{R}_{m-1}|^{-1} < c_2\, c_3\, r_l^{-1}. \tag{9}$$

Wir fassen die Zahlen $r_{1m}, r_{2m}, \cdots, r_{m-1m}$ zu einer Spalte $\mathfrak{r}$ zusammen und die $m-1$ Variabeln $x_1, \cdots, x_{m-1}$ zu einer Spalte $\mathfrak{z}$. Setzt man noch

$$r_m - \mathfrak{R}_{m-1}^{-1}[\mathfrak{r}] = r,$$

so lautet die Formel von der quadratischen Ergänzung

$$\mathfrak{R}[\mathfrak{x}] = \mathfrak{R}_{m-1}[\mathfrak{z} + \mathfrak{R}_{m-1}^{-1}\,\mathfrak{r}\,x_m] + r\,x_m^2, \tag{10}$$

und es ist

$$|\mathfrak{R}| = r\,|\mathfrak{R}_{m-1}|. \tag{11}$$

Nach (5), (6), (9) gilt

$$\mathfrak{R}_{m-1}^{-1}[\mathfrak{r}] < c_4\,r_{m-1},$$

also

$$r_m = r + \mathfrak{R}_{m-1}^{-1}[\mathfrak{r}] < r + c_4\,r_{m-1}. \tag{12}$$

Aus (8), (11), (12) erhalten wir

$$r_1 \cdots r_m < c_2\,|\mathfrak{R}_{m-1}|\,r_m = c_2\,|\mathfrak{R}|\,\frac{r_m}{r} < c_2\left(1 + c_4\,\frac{r_{m-1}}{r}\right)|\mathfrak{R}|.$$

Zum Beweise der Behauptung (7) genügt es daher, die Richtigkeit der Ungleichung

$$r_{m-1} < c_5\,r \tag{13}$$

nachzuweisen.

Wir setzen

$$c_6 = 4\,(m-1)^2, \qquad c_7 = (2\,m-2)^{m-1} = c_6^{\frac{m-1}{2}}$$

und nehmen an, die Ungleichung

$$r_{l+1} < c_6\,r_l \tag{14}$$

gälte für $l = m-2, m-3, \cdots, k+1, k$, aber nicht mehr für $l = k-1$. Dabei kann auch $k = 1$ sein, und dann fällt die auf $l = k-1$ bezügliche Annahme fort. Entsprechend ist im Falle $k = m-1$ der erste Teil der Annahme fortzulassen. Nach dem Dirichletschen Schubfachverfahren bestimmen wir nun eine natürliche Zahl x_m des Intervalls $1 \leqq x_m \leqq c_7^{m-k}$ und eine Spalte $\mathfrak{z}$ aus $m-1$ ganzen Zahlen $x_1, \cdots, x_{m-1}$, so daß die letzten $m-k$ Elemente der Spalte $\mathfrak{z} + \mathfrak{R}_{m-1}^{-1}\,\mathfrak{r}\,x_m$ absolut kleiner als c_7^{-1} und die ersten $k-1$ Elemente absolut kleiner als 1 sind. Offenbar kann man dabei die $m-k+1$ Zahlen $x_k, \cdots, x_m$ teilerfremd wählen. Nach (3) wird dann

$$\mathfrak{R}[\mathfrak{x}] \geqq r_k.$$

Aus (5), (6), (10), (14) ergibt sich andererseits

$$\mathfrak{R}[\mathfrak{x}] < c_6^{-1}(k-1)(m-1)\,r_k + c_7^{-2}\,c_6^{m-k-1}(m-k)^2\,r_k + c_7^{2(m-k)}\,r < \\ < \tfrac{1}{4}\,r_k + \tfrac{1}{4}\,r_k + c_7^{2m-2}\,r.$$

Also ist

$$r_k < c_8\,r,$$

und in Verbindung mit (14) folgt jetzt (13). Damit ist der Beweis beendet.

Für jedes positive $\mathfrak{H}$ erhält man durch das Verfahren der quadratischen Ergänzung eindeutig eine Zerlegung

$$\mathfrak{H}[\mathfrak{x}] = d_1 (x_1 + b_{12} x_2 + \cdots + b_{1m} x_m)^2 + d_2 (x_2 + b_{23} x_3 + \cdots + b_{2m} x_m)^2 + \cdots + d_m x_m^2$$

oder $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}[\mathfrak{B}]$, wo $\mathfrak{D}$ die *Diagonalmatrix* aus den positiven Diagonalelementen $d_1, \cdots, d_m$ bedeutet und $\mathfrak{B} = (b_{kl})$ eine *Dreiecksmatrix* ist, d. h. eine Matrix, in welcher die Diagonalelemente b_{kk} den Wert 1 und die links von der Diagonale gelegenen Elemente b_{kl} $(k > l)$ den Wert 0 haben. Nun sei speziell $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}$ reduziert. Aus den Gleichungen

$$r_l = d_l + \sum_{k=1}^{l-1} d_k b_{kl}^2 \qquad (l = 1, \cdots, m),$$

$$d_1 \cdots d_m = |\mathfrak{R}|$$

folgt nach Satz 1 die Abschätzung

$$1 \leqq \frac{r_l}{d_l} \leqq \prod_{k=1}^{m} \frac{r_k}{d_k} < c_1;$$

nach (5) ist daher

$$0 < \frac{d_k}{d_l} < c_1 \frac{r_k}{r_l} \leqq c_1 \qquad (k < l). \tag{15}$$

Es sei die Ungleichung

$$\pm b_{pl} < c_9$$

bereits bewiesen für $l > p$ und $p = 1, 2, \cdots, k-1$. Aus der Formel

$$r_{kl} = d_k b_{kl} + \sum_{p=1}^{k-1} d_p b_{pk} b_{pl} \qquad (k < l)$$

ergibt sich dann nach (6) und (15) die Relation

$$\pm b_{kl} \leqq \tfrac{1}{2} \frac{r_k}{d_k} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{d_p}{d_k} c_9^2 < c_1 + (m-1) c_1 c_9^2 = c_{10}.$$

Durch vollständige Induktion folgt, daß alle b_{kl} zwischen Schranken liegen, die nur von m abhängen. Wir fassen das gewonnene Resultat zusammen in

Satz 2: *Es sei $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix aus den positiven Diagonalelementen $d_1, \cdots, d_m$ und $\mathfrak{B} = (b_{kl})$ eine Dreiecksmatrix. Ist dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}[\mathfrak{B}]$ reduziert, so gelten die Ungleichungen*

$$d_k < c_{11} d_{k+1} \qquad (k = 1, \cdots, m-1), \tag{16}$$

$$\pm b_{kl} < c_{11} \qquad (k < l). \tag{17}$$

Setzt man umgekehrt voraus, daß die positive Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ und die Dreiecksmatrix $\mathfrak{B}$ den Bedingungen (16) und (17) genügen, so folgt daraus noch nicht, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}[\mathfrak{B}]$ reduziert ist. Man wähle nun ein unimodulares $\mathfrak{U}$, so daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ reduziert ist. Es gilt dann der wichtige Satz, daß alle Elemente von $\mathfrak{U}$ zwischen Schranken liegen, die nur von m abhängen. Wir werden diesen Satz aus einer allgemeineren Aussage folgern, die wir später benötigen, nämlich aus

Satz 3: *Es sei $\mathfrak{D}^*$ eine Diagonalmatrix aus den positiven Diagonalelementen $d_1^*, \cdots, d_m^*$ und $\mathfrak{B}^* = (b_{kl}^*)$ eine Dreiecksmatrix; ferner sei $\mathfrak{G}$ eine ganze Matrix, deren Determinante $G \neq 0$ ist. Es bedeute μ eine gemeinsame obere Schranke für die absoluten Beträge der Zahlen $\frac{d_k^*}{d_{k+1}^*}$ $(k = 1, \cdots, m-1)$, $b_{kl}^*\,(k < l)$ und G. Ist dann $\mathfrak{D}^*[\mathfrak{B}^*\mathfrak{G}]$ reduziert, so liegen alle Elemente von $\mathfrak{G}$ zwischen Schranken, die nur von μ und m abhängen.*

Beweis: Die Behauptung ist trivialerweise richtig für $m = 1$. Wir wenden vollständige Induktion in bezug auf m an. Es mögen $\mu_1, \cdots, \mu_9$ natürliche Zahlen bedeuten, die nur von μ und m abhängen.

Nach Satz 2 ist

$$\mathfrak{D}^*[\mathfrak{B}^*\mathfrak{G}] = \mathfrak{D}[\mathfrak{B}],$$

wo für die Elemente von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ die Ungleichungen (16) und (17) erfüllt sind. Wir setzen noch

$$\mathfrak{B}^*\mathfrak{G}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{Q} = (q_{kl}), \qquad \mathfrak{B}^* = (\beta_{kl})^{-1}. \tag{18}$$

Es ist dann

$$\mathfrak{D}^*[\mathfrak{Q}] = \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D}[\mathfrak{Q}^{-1}] = \mathfrak{D}^* \tag{19}$$

und folglich

$$d_l = \sum_{k=1}^{m} d_k^* q_{kl}^2 \qquad (l = 1, \cdots, m),$$

$$d_k^* q_{kl}^2 \leqq d_l \qquad (k, l = 1, \cdots, m). \tag{20}$$

Da $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ Dreiecksmatrizen sind, so folgt nach (18) für die Elemente von $\mathfrak{G} = (g_{kl})$ die Relation

$$g_{kl} = \sum_{\varkappa=k}^{m} \sum_{\lambda=1}^{l} \beta_{k\varkappa}\, q_{\varkappa\lambda}\, b_{\lambda l}.$$

Aus unseren Voraussetzungen über $\mathfrak{D}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ erhalten wir mit Hilfe von (20) die Abschätzung

$$d_k^* g_{kl}^2 < \mu_1 d_l. \tag{21}$$

Für die Elemente der Matrix $\mathfrak{G}^{-1} = (f_{kl})$ ergibt sich aus (18) und (19) ebenso

$$d_k f_{kl}^2 < \mu_2 d_l^* . \tag{22}$$

Da die Determinante $|f_{kl}| \neq 0$ ist, so gibt es eine Permutation $l_1, \cdots, l_m$ der Zahlen $1, \cdots, m$, so daß f_{kl_k} für $k = 1, \cdots, m$ von 0 verschieden ist. Andererseits sind die Zahlen Gf_{kl} ganz. Aus (22) folgt daher

$$d_k < \mu_3 d_{l_k}^* \qquad (k = 1, \cdots, m).$$

Nun ist von den $m - k + 1$ verschiedenen Indizes $l_k, l_{k+1}, \cdots, l_m$ mindestens einer $\leqq k$ und demnach

$$\min(d_k, d_{k+1}, \cdots, d_m) < \mu_3 \max(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_k^*),$$

$$d_k < \mu_4 d_k^* \qquad (k = 1, \cdots, m).$$

In Verbindung mit (21) erhalten wir

$$d_k g_{kl}^2 < \mu_5 d_l \qquad (k, l = 1, \cdots, m). \tag{23}$$

Es bedeute jetzt p die größte Zahl der Reihe $1, \cdots, m$, so daß die Ungleichung

$$d_k \geqq \mu_5 d_l \tag{24}$$

richtig ist für $k = p, p+1, \cdots, m$ und für $l = 1, 2, \cdots, p-1$. Für jedes g der Reihe $p+1, p+2, \cdots, m$ gibt es dann also ein $k = k(g) \geqq g$ und ein $l = l(g) < g$ mit

$$d_k < \mu_5 d_l . \tag{25}$$

Im Falle $p = 1$ ist die Aussage (24) inhaltslos, im Falle $p = m$ die Aussage (25). Zufolge (16) liefert (25) die Ungleichung

$$d_g < \mu_6 d_{g-1} \qquad (g = p+1, \cdots, m),$$

und demnach gilt

$$d_l < \mu_7 d_k \qquad (k, l = p, \cdots, m). \tag{26}$$

Aus (23) und (26) folgt

$$g_{kl}^2 < \mu_5 \mu_7 \qquad (k, l = p, \cdots, m).$$

Da g_{kl} ganz ist, so erhält man ferner aus (23) und (24) die Gleichung

$$g_{kl} = 0 \qquad (k = p, \cdots, m;\ l = 1, \cdots, p-1).$$

Es hat also $\mathfrak{G}$ die Gestalt

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_{12} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{G}_2 \end{pmatrix},$$

wo $\mathfrak{N}$ die Nullmatrix aus $m-p+1$ Zeilen und $p-1$ Spalten bedeutet und alle Elemente von $\mathfrak{G}_2$ absolut kleiner als μ_8 sind. Im Falle $p=1$ ist damit der Beweis beendet; es sei also weiterhin $p>1$.

Wir zerlegen analog

$$\mathfrak{D}=\begin{pmatrix}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{N}\\ \mathfrak{N} & \mathfrak{D}_2\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{D}^*=\begin{pmatrix}\mathfrak{D}_1^* & \mathfrak{N}\\ \mathfrak{N} & \mathfrak{D}_2^*\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{B}=\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_{12}\\ \mathfrak{N} & \mathfrak{B}_2\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{B}^*=\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_1^* & \mathfrak{B}_{12}^*\\ \mathfrak{N} & \mathfrak{B}_2^*\end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\mathfrak{D}_1^*\,[\mathfrak{B}_1^*\,\mathfrak{G}_1]=\mathfrak{D}_1\,[\mathfrak{B}_1]. \tag{27}$$

Zufolge der Induktionsannahme gilt die Behauptung für $p-1$ statt m. Also sind wegen (27) alle Elemente von $\mathfrak{G}_1$ absolut kleiner als μ_9. Endlich folgt das Entsprechende für $\mathfrak{G}_{12}$ aus der Gleichung

$$\mathfrak{G}_1'\,\mathfrak{D}_1^*\,[\mathfrak{B}_1^*]\,\mathfrak{G}_{12}+\mathfrak{G}_1'\,\mathfrak{B}_1^{*\prime}\,\mathfrak{D}_1^*\,\mathfrak{B}_{12}^*\,\mathfrak{G}_2=\mathfrak{B}_1'\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{B}_{12},$$

indem man sie mit Hilfe von (27) zu

$$\mathfrak{G}_{12}=\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{B}_1^{-1}\,\mathfrak{B}_{12}-\mathfrak{B}_1^{*\,-1}\,\mathfrak{B}_{12}^*\,\mathfrak{G}_2$$

umformt. Hierdurch ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt unmittelbar

Satz 4: *Sind* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{H}\,[\mathfrak{U}]$ *beide reduziert, so sind alle Elemente der unimodularen Matrix* $\mathfrak{U}$ *absolut kleiner als* c_{12}.

Für eine spätere Anwendung auf die Theorie der indefiniten quadratischen Formen betrachten wir noch die Matrizengleichung

$$\mathfrak{R}^{-1}\,[\mathfrak{F}]=\mathfrak{R} \tag{28}$$

unter der Annahme, daß $\mathfrak{R}$ reduziert und $\mathfrak{F}$ ganz sei. Nach Satz 2 ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{D}\,[\mathfrak{B}]$, wobei für die Diagonalelemente der Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ und für die Elemente der Dreiecksmatrix $\mathfrak{B}$ die Ungleichungen (16) und (17) gelten. Es bedeute noch $\mathfrak{V}$ die Matrix der Substitution $x_k\to x_{m-k+1}$ $(k=1,\cdots,m)$. Setzt man dann

$$\mathfrak{D}^{-1}\,[\mathfrak{V}]=\mathfrak{D}^*,\qquad \mathfrak{V}\,\mathfrak{B}'^{-1}\,\mathfrak{V}=\mathfrak{B}^*,\qquad \mathfrak{V}\,\mathfrak{F}=\mathfrak{G},$$

so geht (28) über in die Gleichung

$$\mathfrak{D}^*\,[\mathfrak{B}^*\,\mathfrak{G}]=\mathfrak{R}.$$

Nun gelten die Ungleichungen (16) auch für die Diagonalelemente von $\mathfrak{D}^*$, und ferner ist $\mathfrak{B}^*$ eine Dreiecksmatrix, deren Elemente absolut kleiner als c_{13} sind. Nach (28) ist noch $|\mathfrak{G}|=\pm|\mathfrak{R}|$. Aus Satz 3 folgt daher

Satz 5: *Ist* $\mathfrak{R}$ *reduziert, so liegen die Elemente sämtlicher ganzen Lösungen* $\mathfrak{F}$ *der Matrizengleichung*

$$\mathfrak{R}^{-1}[\mathfrak{F}] = \mathfrak{R}$$

zwischen Schranken, die nur von m *und der Determinante* $|\mathfrak{R}|$ *abhängen.*

Der in § 1 genannte Satz von HERMITE ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 5.

§ 3. Der Bereich der reduzierten positiven Formen.

Die Reduktionsbedingungen (3) und (4) sind homogene lineare Ungleichungen für die $\frac{1}{2}m(m+1)$ Größen r_{kl} $(k \leqq l)$, die wir als rechtwinklige kartesische Koordinaten ansehen. Daher erfüllen die reduzierten Punkte $\mathfrak{R}$ im Raume aller positiven $\mathfrak{H}$ einen *konvexen Kegel* R, dessen Spitze im Nullpunkt liegt. Es sollen die *Randpunkte* von R näher untersucht werden.

Zunächst betrachten wir die Berandung des Gebietes aller positiven $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{G}$ reell symmetrisch, aber nicht positiv, so hat die Ungleichung $\mathfrak{G}[\mathfrak{x}] \leqq 0$ eine Lösung $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$, die wir durch die Bedingung $\mathfrak{x}'\mathfrak{x} = 1$ normieren können. Es sei $\mathfrak{G}_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ eine gegen $\mathfrak{G}_0$ konvergente Folge solcher $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_k[\mathfrak{x}_k] \leqq 0$, $\mathfrak{x}_k'\mathfrak{x}_k = 1$. Die $\mathfrak{x}_k$ haben mindestens einen Häufungspunkt $\mathfrak{x}_0$ auf der Einheitskugel, und dann ist auch $\mathfrak{G}_0[\mathfrak{x}_0] \leqq 0$, $\mathfrak{x}_0 \neq \mathfrak{n}$. Folglich ist das Gebiet der positiven $\mathfrak{H}$ offen. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Randpunkt dieses Gebietes und $\mathfrak{H}_k \to \mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_k > 0$. Aus der Ungleichung $\mathfrak{H}_k[\mathfrak{x}] \geqq 0$ folgt auch $\mathfrak{G}[\mathfrak{x}] \geqq 0$. Daher ist stets $\mathfrak{G}[\mathfrak{x}] \geqq 0$, und es gibt ein $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{G}[\mathfrak{x}] = 0$. Eine solche symmetrische Matrix heiße *halbpositiv*, in Zeichen $\mathfrak{G} \geqq 0$. Durch reelle Transformation in eine Diagonalmatrix ersieht man, daß die Determinante $|\mathfrak{G}|$ verschwindet. Ist $\mathfrak{G}$ halbpositiv, so ist $\mathfrak{G} + \varepsilon\mathfrak{E}$ positiv für jede positive Zahl ε. Daher fällt der Rand des Gebietes der positiven $\mathfrak{H}$ mit der Menge der halbpositiven $\mathfrak{G}$ zusammen.

In einem *inneren* Punkte $\mathfrak{R}$ von R müssen die sämtlichen Ungleichungen (3) und (4) mit dem Zeichen $>$ erfüllt sein, denn anderenfalls würden jene Ungleichungen nicht für alle Punkte einer vollen Umgebung von $\mathfrak{R}$ gelten.

Nun sei $\mathfrak{R}_0$ ein Randpunkt von R, also entweder positiv oder halbpositiv. Wir betrachten zunächst den ersteren Fall. Da (3) und (4) auch in $\mathfrak{R}_0$ gelten, so ist $\mathfrak{R}_0$ reduziert. Andererseits gibt es eine gegen $\mathfrak{R}_0$ konvergierende Folge von positiven $\mathfrak{H}_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, die sämtlich außerhalb von R liegen. Es sei $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{D}[\mathfrak{B}]$ mit einer Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ aus den Diagonalelementen $d_1, \cdots, d_m$ und einer Dreiecksmatrix $\mathfrak{B} = (b_{kl})$, also $b_{kk} = 1$ und $b_{kl} = 0$ $(k > l)$. Dabei wird die Umgebung von $\mathfrak{R}_0$ umkehrbar eindeutig und stetig auf die Umgebung der $\frac{1}{2}m(m+1)$ Werte d_k $(k = 1, \cdots, m)$, b_{kl} $(1 \leqq k < l \leqq m)$ abgebildet. Setzt man analog

$\mathfrak{H}_k = \mathfrak{D}_k[\mathfrak{B}_k]$ für $k = 1, 2, \cdots$ und wendet Satz 2 auf $\mathfrak{R}_0$ an, so erkennt man, daß für hinreichend großes k alle Elemente von $\mathfrak{B}_k$ und die Quotienten aufeinanderfolgender Diagonalelemente von $\mathfrak{D}_k$ zwischen Schranken liegen, die nur von m abhängen. Nun sei $\mathfrak{H}_k[\mathfrak{U}_k]$ reduziert, wobei $\mathfrak{U}_k \neq \pm \mathfrak{E}$ ist, da $\mathfrak{H}_k$ außerhalb von R gelegen ist. Nach Satz 3 gehört dann $\mathfrak{U}_k$ für genügend großes k einer endlichen nur von m abhängigen Menge von unimodularen Matrizen an. Es gibt also eine unendliche Teilfolge der $\mathfrak{H}_k$ mit festem $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U} \neq \pm \mathfrak{E}$. Durch Grenzübergang ergibt sich, daß auch die Matrix $\mathfrak{R}_0[\mathfrak{U}] = \mathfrak{R}_1$ reduziert ist.

Wir wollen beweisen, daß auch $\mathfrak{R}_1$ ein Randpunkt von R ist. Zu diesem Zwecke zeigen wir gleich allgemeiner, daß für zwei Punkte $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ von R und eine von $\pm \mathfrak{E}$ verschiedene unimodulare Matrix $\mathfrak{U}$ die Gleichung $\mathfrak{R}_0[\mathfrak{U}] = \mathfrak{R}_1$ nur dann erfüllt sein kann, wenn $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ beides Randpunkte von R sind. Nach den Sätzen 2 und 3 gehört dann jedenfalls $\mathfrak{U}$ einer endlichen nur von m abhängigen Menge an. Ist $\mathfrak{U}$ keine Diagonalmatrix, so sei von den Spalten $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \cdots, \mathfrak{g}_m$ von $\mathfrak{U}$ die Spalte $\mathfrak{g}_k$ die erste, welche ein nicht in der Diagonale von $\mathfrak{U}$ stehendes Element $\neq 0$ enthält; die k-te Spalte $\mathfrak{h}_k$ von $\mathfrak{U}^{-1}$ hat dann die gleiche Eigenschaft. Für die k-ten Diagonalelemente r_k und s_k von $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ gilt dann nach (3) die Beziehung

$$s_k = \mathfrak{R}_0[\mathfrak{g}_k] \geqq r_k = \mathfrak{R}_1[\mathfrak{h}_k] \geqq s_k,$$

also

$$\mathfrak{R}_0[\mathfrak{g}_k] = r_k = s_k = \mathfrak{R}_1[\mathfrak{h}_k]. \tag{29}$$

Daher sind $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ Randpunkte von R. Ferner gehören $\mathfrak{g}_k$ und $\mathfrak{h}_k$ einer nur von m abhängigen endlichen Menge an; zufolge (29) kann man also aus den Reduktionsbedingungen (3) eine nur von m abhängige endliche Menge herausgreifen, so daß mindestens eine von diesen für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist; dasselbe gilt für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$.

Ist $\mathfrak{U}$ eine Diagonalmatrix, so trete in der Folge $\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1$ der Diagonalelemente von $\mathfrak{U}$ hinter dem q-ten Gliede der erste Zeichenwechsel auf. Für $\mathfrak{R}_0 = (r_{kl})$, $\mathfrak{R}_1 = (s_{kl})$ gilt dann $r_{q\,q+1} = -s_{q\,q+1}$. Nach (4) ist aber $r_{q\,q+1} \geqq 0$, $s_{q\,q+1} \geqq 0$. Also ist für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ und für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$ die q-te Bedingung (4) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt; es sind daher $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ auch wieder Randpunkte von R.

Die positiven Randpunkte von R liegen demnach auf *endlich* vielen Ebenen, und zwar erhält man die Gleichungen dieser Ebenen, indem man in gewissen endlich vielen der Bedingungen (3) und (4) das Gleichheitszeichen schreibt. Diese Ebenen begrenzen eine *konvexe Ecke* E, welche R ganz enthält. Es ist leicht zu sehen, daß R innere Punkte besitzt. Man wähle nämlich irgendein endliches Gebiet von $\frac{1}{2}m(m+1)$ Dimensionen, das nur aus positiven $\mathfrak{H}$ besteht. Ist dann $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ reduziert, so gehört $\mathfrak{U}$

zufolge Satz 3 einer endlichen Menge unimodularer Matrizen an, welche außer von m aber noch von dem Gebiete abhängt. Lägen nun die Punkte $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ alle auf dem Rande von R, also auf dem Rande von E, so würde dieser Rand durch die endlich vielen durch $\mathfrak{U}^{-1}$ vermittelten affinen Abbildungen in ein Gebiet von $\frac{1}{2}m(m+1)$ Dimensionen übergehen, was widersinnig ist.

Schließlich sei $\mathfrak{T}$ ein Punkt von E, der nicht zu R gehört, und $\mathfrak{R}$ ein innerer Punkt von R. Die Strecke $(1-\lambda)\mathfrak{T}+\lambda\mathfrak{R}$, wobei λ von 0 bis 1 läuft, gehört ganz zu E, und zwar mit etwaiger Ausnahme des einen Endpunktes $\mathfrak{T}$ zum Innern von E. Auf ihr liegt nun ein Randpunkt $\mathfrak{H}$ von R. Dies kann kein positiver Randpunkt sein, denn dieser müßte dann auf E liegen und würde mit $\mathfrak{T}$ zusammenfallen, gegen die Voraussetzung, daß $\mathfrak{T}$ nicht zu R gehört. Also ist $\mathfrak{H}$ halbpositiv und $|\mathfrak{H}| = 0$. Läßt man dann die reduzierte Matrix $\mathfrak{R}$ gegen $\mathfrak{H} = (h_{kl})$ konvergieren, so folgt durch Grenzübergang aus (5), (6), (7) die Gleichung

$$h_{1l} = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots, m).$$

Setzt man noch $\mathfrak{T} = (t_{kl})$, $\mathfrak{R} = (r_{kl})$, $\mathfrak{H} = (1-\lambda)\mathfrak{T}+\lambda\mathfrak{R}$, so gilt also

$$(1-\lambda)t_{1l}+\lambda r_{1l} = 0 \qquad (l = 1, 2, \cdots, m),$$

wobei $\lambda < 1$ ist, und folglich wird

$$t_{1l} = t_{11}\frac{r_{1l}}{r_{11}} \qquad (l = 2, \cdots, m).$$

Da $\mathfrak{R}$ variabel ist, so erhält man $t_{11} = 0$, $\lambda = 0$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{T}$. Folglich ist $\mathfrak{T}$ ein halbpositiver Randpunkt von R. Es entsteht also E aus R durch Hinzunahme der halbpositiven Randpunkte. Da in beliebiger Nähe eines solchen Randpunktes auch äußere Punkte in bezug auf R liegen, so fällt die gesamte halbpositive Begrenzung von R auf den Rand von E.

Damit haben wir das Hauptresultat der Minkowskischen Reduktionstheorie, nämlich

Satz 6: *Der Raum R der reduzierten positiven Matrizen $\mathfrak{R}$ bildet eine konvexe Ecke, deren Spitze im Nullpunkt liegt. Läßt man $\mathfrak{U}$ alle unimodularen Matrizen durchlaufen, wobei aber $\mathfrak{U}$ und $-\mathfrak{U}$ nicht als verschieden gelten, so liefern die Bilder $\mathfrak{R}[\mathfrak{U}]$ der Punkte $\mathfrak{R}$ von R eine lückenlose einfache Überdeckung des Raumes aller positiven quadratischen Formen. Dabei hat R nur mit endlich vielen Bildbereichen einen Punkt gemeinsam.*

Nach den Überlegungen von § 1 ergibt sich aus R auch ein Fundamentalbereich für die Gruppe der Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{U}\mathfrak{x}$ im m^2-dimensionalen Raume der umkehrbaren m-reihigen Matrizen $\mathfrak{x}$. Setzt man nämlich $\mathfrak{x}\mathfrak{x}' = \mathfrak{H}$, so ergeben jene Abbildungen die unimodularen

Transformationen $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}[\mathfrak{U}']$ im Raume der positiven $\mathfrak{H}$. Es sei F_0 das Gebiet des $\mathfrak{x}$-Raumes, dem das Gebiet R im $\mathfrak{H}$-Raume zugeordnet ist. Offenbar wird F_0 von endlich vielen Kegeln zweiter Ordnung begrenzt. Übt man auf F_0 alle unimodularen Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{U}\mathfrak{x}$ aus, so erhält man eine lückenlose zweifache Überdeckung des $\mathfrak{x}$-Raumes. Da nun F_0 bei der Abbildung $\mathfrak{x} \to -\mathfrak{x}$ in sich übergeht, so gewinnt man aus F_0 einen Fundamentalbereich F in bezug auf die volle unimodulare Gruppe, indem man für die Punkte von F noch irgendeine homogene lineare Ungleichung in den Elementen von $\mathfrak{x}$ vorschreibt; man kann etwa fordern, daß das erste Element der ersten Zeile $\geqq 0$ sei. Für die Anwendungen ist es aber vorteilhafter, statt F den Fundamentalbereich R im $\mathfrak{H}$-Raume zu betrachten.

§ 4. Reduktion indefiniter Formen.

Es sei $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ eine *indefinite* quadratische Form mit reellen Koeffizienten und m Variabeln. Wir setzen voraus, daß sie *nicht ausgeartet* ist, daß also der absolute Betrag D der Determinante $|\mathfrak{S}|$ größer als 0 ist. Durch eine geeignete reelle lineare Substitution $\mathfrak{y} = \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ wird dann $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = y_1^2 + \cdots + y_n^2 - (y_{n+1}^2 + \cdots + y_m^2)$ oder $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}[\mathfrak{C}]$, wo $\mathfrak{D}$ die Diagonalmatrix aus n Diagonalelementen $+1$ und $m-n$ Diagonalelementen -1 bedeutet. Da $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ indefinit ist, so sind die Zahlen n und $m-n$ beide positiv. Das Paar n, $m-n$ heißt die *Signatur* von $\mathfrak{S}$.

Um die Reduktion auch für indefinite Formen zu erklären, ordnete HERMITE der indefiniten symmetrischen Matrix $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}[\mathfrak{C}]$ die positive Matrix $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ zu, also der indefiniten quadratischen Form

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = y_1^2 + \cdots + y_n^2 - (y_{n+1}^2 + \cdots + y_m^2)$$

die positive quadratische Form $y_1^2 + \cdots + y_n^2 + (y_{n+1}^2 + \cdots + y_m^2)$, und nannte $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ *reduziert,* wenn $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ reduziert ist. Allerdings besaß HERMITE noch nicht genau die zweckmäßige Definition der reduzierten positiven Form, wie sie später von MINKOWSKI gegeben wurde. HERMITE sprach dann die Behauptung aus, daß es zu jedem natürlichen D nur *endlich* viele ganzzahlige reduzierte $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ gibt. Er bewies diese Behauptung nur im Falle ternärer Formen, und zwar unter der unausgesprochenen Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ keine *Nullform* ist, d. h. daß die diophantische Gleichung $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = 0$ keine andere ganzzahlige Lösung $\mathfrak{x}$ besitzt als die triviale $\mathfrak{x} = \mathfrak{n}$. Nun gibt es zwar bei drei und vier Variabeln noch ganzzahlige indefinite quadratische Formen, welche keine Nullformen sind, so z. B. die ternäre Form $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2$ und die quaternäre Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 7x_4^2$, dagegen ist *jede* ganzzahlige indefinite quadratische Form von mindestens fünf Variabeln stets eine Nullform. Die Hermitesche Behauptung ist tatsächlich für jeden Fall ausnahmslos richtig. Hierfür wurde 1902 von

STOUFF ein Beweis gegeben; aber dieser Beweis ist so umständlich, daß er noch nicht einmal in dem sonst so ausführlichen Werke von BACHMANN vollständig dargestellt worden ist.

Der Hermitesche Satz ist nun eine unmittelbare Folge von Satz 5. Aus den Relationen $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}' \mathfrak{D} \mathfrak{C}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}' \mathfrak{C}$ folgt nämlich

$$\mathfrak{H}^{-1}[\mathfrak{S}] = \mathfrak{C}' \mathfrak{D} \mathfrak{C} (\mathfrak{C}' \mathfrak{C})^{-1} \mathfrak{C}' \mathfrak{D} \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' \mathfrak{D}^2 \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' \mathfrak{C} = \mathfrak{H}.$$

Ersetzt man hierin $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}\mathfrak{U}$, so erhält man für $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ analog

$$\mathfrak{R}^{-1}[\mathfrak{T}] = \mathfrak{R}; \tag{30}$$

dabei ist $|\mathfrak{R}|^2 = |\mathfrak{T}|^2 = |\mathfrak{S}|^2 = D^2$, also $|\mathfrak{R}| = D$. Jetzt sei $\mathfrak{R}$ reduziert im Sinne von MINKOWSKI. Nach Satz 5 hat die Matrizengleichung (30) überhaupt nur endlich viele Lösungen in ganzen Matrizen $\mathfrak{T}$, deren Determinanten den festen Wert $\pm D$ haben, und zwar liegen alle Elemente von $\mathfrak{T}$ zwischen Schranken, die nur von D und m abhängen. Insbesondere muß dies für die symmetrischen $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ gelten. Damit haben wir

Satz 7: *Die Anzahl der reduzierten ganzzahligen indefiniten quadratischen Formen mit m Variabeln und fester von 0 verschiedener Determinante ist endlich.*

Nun gibt es zufolge unserer Definition in jeder Klasse mit $\mathfrak{S}$ äquivalenter Matrizen $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ mindestens eine reduzierte. Aus Satz 7 folgt also

Satz 8: *Die Anzahl der Klassen ganzzahliger indefiniter quadratischer Formen mit fester von 0 verschiedener Determinante und fester Variabelnzahl ist endlich.*

Sind allgemeiner alle Elemente von $\mathfrak{S}$ rational, aber nicht notwendig ganz, so wähle man für λ den Hauptnenner der Elemente von $\mathfrak{S}$ und wende den Hermiteschen Satz auf die ganze Matrix $\lambda\mathfrak{S}$ an. Da mit $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ auch $\lambda\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ reduziert ist, so erhält man

Satz 9: *In jeder Klasse äquivalenter rationaler $\mathfrak{S}$ gibt es nur endlich viele verschiedene reduzierte Matrizen.*

Die Sätze 8 und 9 ergeben offenbar zusammen wieder den Satz 7. Wir werden weiterhin nur Satz 9 zu benutzen haben.

§ 5. Fundamentalbereich der Einheitengruppe.

Wir wollen die Matrizengleichung $\mathfrak{H}^{-1}[\mathfrak{S}] = \mathfrak{H}$ oder

$$\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{S} \tag{31}$$

näher betrachten, unter der Nebenbedingung $\mathfrak{H} > 0$, für festes $\mathfrak{S}$ von der Signatur $n, m-n$. Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen,

daß sie jedenfalls erfüllt ist, wenn $\mathfrak{S}[\mathfrak{C}^{-1}] = \mathfrak{D}$ die Diagonalmatrix aus n Diagonalelementen $+1$ und $m-n$ Diagonalelementen -1 bedeutet und $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ gesetzt wird. Es soll nun gezeigt werden, daß dies die allgemeine Lösung ist. Man kann $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}$ simultan reell in Diagonalmatrizen transformieren und etwa

$$\mathfrak{H}[\mathfrak{C}^{-1}] = \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{S}[\mathfrak{C}^{-1}] = \mathfrak{T} \tag{32}$$

voraussetzen, mit reellem $\mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix mit fallend geordneten Diagonalelementen sei. Aus (31) und (32) folgt aber

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{C}(\mathfrak{C}'\mathfrak{D}\mathfrak{C})^{-1}\mathfrak{C}'\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'\mathfrak{D}\mathfrak{C},$$

also $\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}$, so daß $\mathfrak{D}$ tatsächlich die frühere Bedeutung hat.

Für skalares ϱ ist

$$\mathfrak{H} + \varrho\mathfrak{S} = \mathfrak{C}'(\mathfrak{E} + \varrho\mathfrak{D})\mathfrak{C},$$

also $\mathfrak{H} + \varrho\mathfrak{S} > 0$ für $-1 < \varrho < 1$, $\geqq 0$ für $\varrho = \pm 1$, und zwar ist der Rang n für $\varrho = 1$ und $m-n$ für $\varrho = -1$. Um eine Parameterlösung von (31) zu finden, bei gegebenem $\mathfrak{S}$, setzen wir $\mathfrak{H} + \mathfrak{S} = 2\mathfrak{Z}$. Dann ist also $\mathfrak{Z} \geqq 0$ und vom Range n; ferner gilt

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{Z} = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{H}+\mathfrak{S})\mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{H}+\mathfrak{S}) = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{S}+2\mathfrak{H}+\mathfrak{S}) = \mathfrak{Z}.$$

Umgekehrt sei $\mathfrak{Z}$ eine halbpositive symmetrische Matrix vom Range n, die der Gleichung

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z} \tag{33}$$

genügt. Dann wird

$$(\mathfrak{S}-\mathfrak{Z})\mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{S}-\mathfrak{Z}) = \mathfrak{S} - 2\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z} = \mathfrak{S} - \mathfrak{Z}, \qquad \mathfrak{Z}\mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{S}-\mathfrak{Z}) = \mathfrak{N},$$

also

$$\mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{Z}, \mathfrak{S}-\mathfrak{Z}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{S}-\mathfrak{Z} \end{pmatrix}$$

Auf Grund des Trägheitsgesetzes ist daher $\mathfrak{Z} - \mathfrak{S} \geqq 0$. Für $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$ ist dann $\lambda\mathfrak{Z} + \mu(\mathfrak{Z}-\mathfrak{S}) \geqq 0$, und aus der Relation

$$(\lambda\mathfrak{Z} + \mu(\mathfrak{Z}-\mathfrak{S}))\mathfrak{S}^{-1}(\mu\mathfrak{Z} + \lambda(\mathfrak{Z}-\mathfrak{S})) = \lambda\mu\mathfrak{Z} + \lambda\mu(\mathfrak{S}-\mathfrak{Z}) = \lambda\mu\mathfrak{S}$$

folgt $|\lambda\mathfrak{Z} + \mu(\mathfrak{Z}-\mathfrak{S})| \neq 0$ für $\lambda\mu \neq 0$, also $\lambda\mathfrak{Z} + \mu(\mathfrak{Z}-\mathfrak{S}) > 0$ für $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Der spezielle Fall $\lambda = \mu = 1$ ergibt, daß $\mathfrak{H} = 2\mathfrak{Z} - \mathfrak{S}$ positiv ist und der Gleichung (31) genügt.

Wir haben also die allgemeine halbpositive Lösung $\mathfrak{Z}$ der Gleichung (33) aufzusuchen, mit dem Range n. Jedes halbpositive $\mathfrak{Z}$ vom Range n hat die Gestalt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{X}'$ mit n-reihigem, positivem $\mathfrak{T}$ und

reellem $\mathfrak{X}$ vom Range n, das m Zeilen und n Spalten besitzt. Durch diesen Ansatz geht (33) über in

$$\mathfrak{X}\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{X}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{X}-\mathfrak{T})\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{X}'=\mathfrak{N},$$

und da $\mathfrak{X}$ den Rang n hat, so folgt hieraus $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{X}=\mathfrak{T}$. Ist umgekehrt ein reelles $\mathfrak{X}$ mit m Zeilen und n Spalten so gewählt, daß $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{X}=\mathfrak{T}>0$ wird, so ist $\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{X}'$ eine halbpositive Lösung von (33) mit dem Range n. Damit haben wir für die allgemeine Lösung von (31) die Parameterdarstellung

$$(34)\quad \mathfrak{H}=2\mathfrak{Z}-\mathfrak{S},\qquad \mathfrak{Z}=\mathfrak{X}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{X}',\qquad \mathfrak{T}=\mathfrak{X}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{X}>0.$$

Die mn Elemente von $\mathfrak{X}$ sind dabei reelle Variable, die nur der Bedingung $\mathfrak{X}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{X}>0$ genügen müssen.

Nun bleibt aber offenbar $\mathfrak{H}$ invariant, wenn $\mathfrak{X}$ durch $\mathfrak{X}\mathfrak{Q}$ ersetzt wird, mit beliebigem, umkehrbarem $\mathfrak{Q}$ aus n Reihen. Daher können wir noch

$$\mathfrak{X}=\begin{pmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{Y}\end{pmatrix}$$

normieren, wo $\mathfrak{E}$ die n-reihige Einheitsmatrix und $\mathfrak{Y}$ eine variable Matrix mit $m-n$ Zeilen und n Spalten bedeutet. Dann wird

$$(35)\quad \mathfrak{H}=2\mathfrak{Z}-\mathfrak{S},\quad \mathfrak{Z}=\begin{pmatrix}\mathfrak{T}^{-1} & \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Y}'\\ \mathfrak{Y}\mathfrak{T}^{-1} & \mathfrak{Y}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{Y}'\end{pmatrix},\quad \mathfrak{T}=\mathfrak{S}^{-1}\begin{bmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{Y}\end{bmatrix}>0$$

eine rationale Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch $n(m-n)$ Parameter. Aus (35) kann man wiederum $\mathfrak{T}^{-1}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{T}^{-1}$ rational durch die Elemente von $\mathfrak{H}$ ausdrücken, also auch $\mathfrak{Y}$ selber. Die positiven Lösungen $\mathfrak{H}$ von (31) bilden also eine rationale Mannigfaltigkeit von $n(m-n)$ Dimensionen, und diese wird vermöge (35) eineindeutig abgebildet auf den Teil des $\mathfrak{Y}$-Raumes, in welchem $\mathfrak{T}>0$ ist. Wir wollen die Mannigfaltigkeit der $\mathfrak{H}$ mit H bezeichnen.

Ist $\mathfrak{W}$ irgendeine reelle Lösung von $\mathfrak{S}[\mathfrak{W}]=\mathfrak{S}$, so ist auch $\mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{W}']=\mathfrak{S}^{-1}$, und folglich genügt mit $\mathfrak{H}$ auch $\mathfrak{H}[\mathfrak{W}]$ der Gleichung (31). Durch die Abbildung $\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}[\mathfrak{W}]$ geht dann also H in sich über.

Nunmehr sei $\mathfrak{S}$ *rational*. Zu jeder Lösung $\mathfrak{H}$ von (31) gibt es eine unimodulare Matrix $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$, so daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}]$ im Minkowskischen Fundamentalbereich R liegt, und dann ist $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}]$ reduziert. In der Menge aller mit $\mathfrak{S}$ äquivalenten Matrizen $\mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ gibt es aber nach Satz 9 nur endlich viele verschiedene reduzierte; diese seien $\mathfrak{S}_k=\mathfrak{S}[\mathfrak{U}_k]$ für $k=1,\cdots,g$, und es sei $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_k$ eine zugehörige Lösung von [31], so daß also $\mathfrak{H}_k[\mathfrak{U}_k]$ in R gelegen ist. Ist dann $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ eine der soeben betrachteten *reduzierenden*

Substitutionen, so gilt

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{U}_\mathfrak{H}] = \mathfrak{S}[\mathfrak{U}_k] = \mathfrak{S}_k \tag{36}$$

für einen von $\mathfrak{H}$ abhängigen Index k der Reihe $1, \cdots, g$. Dann ist aber $\mathfrak{U}_\mathfrak{H}\mathfrak{U}_k^{-1} = \mathfrak{V}$ eine ganzzahlige Lösung von $\mathfrak{S}[\mathfrak{V}] = \mathfrak{S}$, also eine Einheit von $\mathfrak{S}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{V}$ eine beliebige Einheit von $\mathfrak{S}$, so liegt für jedes $k = 1, \cdots, g$ auch $\mathfrak{H}_k[\mathfrak{V}^{-1}] = \mathfrak{H}$ in H, und für $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\mathfrak{U}_k$ gilt $\mathfrak{H}_k[\mathfrak{U}_k] = \mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$. Also liegt $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ in R und $\mathfrak{U}$ ist eine reduzierende Substitution. Da der in (36) auftretende Index k durch $\mathfrak{U}_\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt wird, so erhält man alle reduzierenden Substitutionen in der Form $\mathfrak{U}_\mathfrak{H} = \mathfrak{V}\mathfrak{U}_k$, und zwar jede nur einmal, indem man $\mathfrak{V}$ alle Einheiten von $\mathfrak{S}$ und k die Werte 1 bis g durchlaufen läßt.

Wir finden *sämtliche* Einheiten von $\mathfrak{S}$, indem wir alle reduzierenden Substitutionen $\mathfrak{U}_\mathfrak{H}$ aufsuchen und von diesen nur diejenigen herausgreifen, für welche (36) mit festem k gilt; dann ergeben $\mathfrak{U}_\mathfrak{H}\mathfrak{U}_k^{-1} = \mathfrak{V}$ die Einheiten. Mit $\mathfrak{V}$ ist auch $-\mathfrak{V}$ eine Einheit. Sehen wir wieder $\mathfrak{V}$ und $-\mathfrak{V}$ nicht als verschieden an, so erhalten wir die Faktorgruppe der Einheitengruppe in bezug auf die von $\mathfrak{E}$ und $-\mathfrak{E}$ gebildete invariante Untergruppe. Diese Faktorgruppe wollen wir *gekürzte* Einheitengruppe nennen und mit $\Gamma(\mathfrak{S})$ bezeichnen. Unsere Aufgabe besteht in der Bestimmung eines Fundamentalbereiches F von $\Gamma(\mathfrak{S})$ in bezug auf H. Die Gruppe ist diskontinuierlich in H, weil sogar die Gruppe aller unimodularen Transformationen $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}[\mathfrak{U}]$ im Raum der positiven $\mathfrak{H}$ diskontinuierlich ist.

Wir wollen hier eine Bemerkung über einen Sonderfall einfügen, um diesen dann weiterhin ausschließen zu können. Es handelt sich um den Fall einer *rational zerlegbaren binären* quadratischen Form; dann ist also $n = m - n = 1$ und D das Quadrat einer rationalen Zahl. Wir können $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = y_1 y_2$ setzen, wo $y_1 = ax_1 + bx_2$, $y_2 = cx_1 + dx_2$ lineare Funktionen von x_1, x_2 mit rationalen Koeffizienten bedeuten. Setzt man noch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathfrak{M}$, so entspricht der Substitution $\mathfrak{x} \to \mathfrak{V}\mathfrak{x}$ der Variabeln x_1, x_2 die Substitution $\mathfrak{y} \to \mathfrak{M}\mathfrak{V}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{y}$ der Variabeln y_1, y_2. Ist nun $\mathfrak{V}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$, so müssen dabei y_1, y_2 entweder in cy_1, $c^{-1}y_2$ oder in cy_2, $c^{-1}y_1$ übergehen, mit konstantem $c \neq 0$. Aus der Annahme

$$\mathfrak{M}\mathfrak{V}\mathfrak{M}^{-1} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

folgt durch Potenzieren, daß sämtliche positive und negative Potenzen von c rationale Zahlen mit beschränktem Nenner sind; also ist $c = \pm 1$ und $\mathfrak{V} = \pm\mathfrak{E}$. Gibt es ferner zwei Einheiten $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2$ von $\mathfrak{S}$ mit

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ c_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{M}\,\mathfrak{V}_2\,\mathfrak{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & c_2 \\ c_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

so folgt durch Multiplikation, daß $c_1\,c_2^{-1} = \pm 1$, also $\mathfrak{V}_2 = \pm\mathfrak{V}_1$ ist. Also gibt es in $\Gamma(\mathfrak{S})$ außer $\pm\mathfrak{E}$ höchstens noch eine weitere Einheit $\pm\mathfrak{V}$, und zwar ist dann $|\mathfrak{V}| = -1$. Fortan wollen wir dauernd voraussetzen, daß nicht dieser besondere Fall einer rational zerlegbaren quadratischen Form vorliegt.

Durch die g Abbildungen $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}[\mathfrak{U}_k^{-1}]$ $(k = 1, \cdots, g)$ geht der Minkowskische Fundamentalbereich R über in g Bildbereiche $R_1, \cdots, R_g$. Es sei H_k der Durchschnitt von H mit R_k und F die Vereinigungsmenge von $H_1, H_2, \cdots, H_g$. Ist nun $\mathfrak{H}$ ein beliebiger Punkt von H und $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}} = \mathfrak{V}\,\mathfrak{U}_k$ eine zugehörige reduzierende Substitution, so liegt $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}_k]$ in R, also $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ in R_k und als Punkt von H sogar in H_k. Folglich existiert zu jedem Punkt $\mathfrak{H}$ von H mindestens ein Element $\pm\mathfrak{V}$ von $\Gamma(\mathfrak{S})$, so daß $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ in F gelegen ist.

Jetzt seien $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ beide in F gelegen und $\mathfrak{V} \neq \pm\mathfrak{E}$. Liegt dabei $\mathfrak{H}$ in H_k und $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ in H_l, wobei k und l gewisse Indizes der Reihe $1, \cdots, g$ bedeuten, so gehören $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}_k]$ und $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}_l]$ beide zu R, und zwar wegen $\mathfrak{U}_k \neq \pm\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}_l$ zum Rande von R. Nach Satz 6 gehört $\mathfrak{V}$ dann einer von $\mathfrak{H}$ unabhängigen endlichen Menge an, die durch m und $\mathfrak{S}$ festgelegt ist. Ferner liegt $\mathfrak{H}$ auf dem Rande von R_k und $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ auf dem Rande von R_l. Es sei noch G_k der Durchschnitt von H mit dem Rande von R_k, also die Punktmenge, in welcher H von den endlich vielen Randebenen von R_k geschnitten wird. Dann liegt $\mathfrak{H}$ auf G_k und $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ auf G_l.

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß G_k der *Rand* von H_k in bezug auf H ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist keineswegs trivial, denn die Dimension $n(m-n)$ von H ist kleiner als $\frac{1}{2}m(m+1)$; es wäre also z. B. denkbar, daß H ganz auf einer Randebene von R_k gelegen ist. Ist jene Behauptung aber erst bewiesen, so folgt daraus unmittelbar, daß F tatsächlich Fundamentalbereich von $\Gamma(\mathfrak{S})$ in bezug auf H ist.

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Randpunkt von H_k in bezug auf H. Man bilde dann eine gegen $\mathfrak{H}$ konvergierende Folge von Punkten $\mathfrak{H}_0$ aus H, die nicht zu H_k gehören. Zu jedem $\mathfrak{H}_0$ dieser Folge gibt es eine reduzierende Substitution $\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}_l \neq \pm\mathfrak{U}_k$, die nach Satz 6 einer endlichen Menge angehören muß. Man kann daher eine unendliche Teilfolge mit festem $\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}_l$ auswählen, und dann ist auch $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}\,\mathfrak{U}_l]$ in R gelegen, also $\mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ in H_l. Nach dem vorhin Bewiesenen liegt dann $\mathfrak{H}$ auf G_k.

Nun sei umgekehrt $\mathfrak{H}$ ein Punkt von G_k. Wir haben zu zeigen, daß es in beliebiger Nähe von $\mathfrak{H}$ Punkte $\mathfrak{H}_0$ von H gibt, die nicht zu H_k gehören. Es ist aber H eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit,

und der Rand von R_k besteht aus endlich vielen Ebenen. Wir haben also nur zu beweisen, daß H nicht ganz auf einer Randebene von R_k gelegen sein kann.

Die Gleichung einer Randebene von R hat entweder die Gestalt $\mathfrak{R}[\mathfrak{q}_l] = r_l\,(l = 1, \cdots, m)$ oder $r_{ll+1} = 0\,(l = 1, \cdots, m-1)$. Setzt man hierin $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}[\mathfrak{U}_k]$, so erkennt man, daß die Gleichung einer Randebene von $\mathfrak{R}_k$ entweder durch $\mathfrak{H}[\mathfrak{u}] = \mathfrak{H}[\mathfrak{v}]$ oder durch $\mathfrak{u}'\mathfrak{H}\mathfrak{v} = 0$ gegeben wird, wobei $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ linear unabhängige ganze Spalten bedeuten. Ersetzt man im ersten Fall $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ durch $\frac{1}{2}(\mathfrak{u}+\mathfrak{v})$ und $\frac{1}{2}(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})$, so kommt man auf den zweiten Fall zurück. Es genügt also nachzuweisen, daß die allgemeine Lösung $\mathfrak{H}$ von (31) nicht identisch der Gleichung

$$\mathfrak{u}'\mathfrak{H}\mathfrak{v} = 0 \tag{37}$$

genügen kann.

Es sei wieder $\mathfrak{S} = \mathfrak{D}[\mathfrak{C}]$ mit reellem $\mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{D}$ die Diagonalmatrix aus n Diagonalelementen $+1$ und $m-n$ Diagonalelementen -1 bedeutet. Wir ersetzen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{H}[\mathfrak{C}]$, $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{u}$, $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{v}$, wobei (37) mit linear unabhängigen Spalten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ bestehen bleibt, und erhalten aus (35) die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{H} = 2\,\mathfrak{Z} - \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{T}^{-1}[\mathfrak{E}\ \mathfrak{Y}'], \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{E} - \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}$$

mit variablem $\mathfrak{Y}$ aus $m-n$ Zeilen und n Spalten. Entwickelt man nach Potenzen in der Umgebung von $\mathfrak{Y} = \mathfrak{N}$, so wird

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} + 2\,\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y} & 2\,\mathfrak{Y}' \\ 2\,\mathfrak{Y} & \mathfrak{E} + 2\,\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}' \end{pmatrix} + \cdots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder mindestens von dritter Ordnung sind. Zerlegt man analog $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ in die Teilspalten $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, so folgen aus dem identischen Bestehen von (37) die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{u}_2'\mathfrak{Y}\mathfrak{v}_1 = -\mathfrak{v}_2'\mathfrak{Y}\mathfrak{u}_1, \qquad \mathfrak{u}_1'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}\mathfrak{v}_1 = -\mathfrak{u}_2'\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}'\mathfrak{v}_2.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man entweder $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{u}_1 = \varrho\,\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{u}_2 = -\varrho\,\mathfrak{v}_2$ mit $\varrho \neq 0$. Aus der zweiten ergibt sich im ersten Falle $\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{n}$ und im zweiten Falle $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{n}$ oder $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{n}$, beide Male im Widerspruch zu $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{v} \neq \mathfrak{n}$; im dritten Falle folgt schließlich $n = m - n = 1$.

Wir haben also nur noch den Fall einer binären Form zu behandeln. Setzt man $T = \mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{x}]$, so ergibt (35) die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{H}[\mathfrak{y}] = 2\,T^{-1}(\mathfrak{x}'\mathfrak{y})^2 - \mathfrak{S}[\mathfrak{y}].$$

Aus (37) erhielte man dann

$$\mathfrak{u}'\mathfrak{S}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 2\,\mathfrak{u}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{v}'\mathfrak{S}\mathfrak{x},$$

es wäre also $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ rational zerlegbar. Dieser Fall ist aber ausgeschlossen worden.

Wir haben damit

Satz 10: *Der Fundamentalbereich F der gekürzten Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ in bezug auf den $n(m-n)$-dimensionalen Raum H der positiven Lösungen von $\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ wird aus H von endlich vielen Ebenen des Raumes aller positiven $\mathfrak{H}$ ausgeschnitten. Setzt man in der Abbildung $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}[\mathfrak{V}]$ für $\pm\mathfrak{V}$ alle Elemente von $\Gamma(\mathfrak{S})$, so liefern die Bildbereiche $F_{\mathfrak{V}}$ von F eine lückenlose einfache Überdeckung von H. Dabei hat F nur mit endlich vielen $F_{\mathfrak{V}}$ einen Punkt gemeinsam.*

Es seien jetzt $F_{\mathfrak{V}}$ für $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1, \cdots, \mathfrak{V}_h$ die sämtlichen endlich vielen Bilder von F, welche mit F einen Randpunkt gemeinsam haben. Sind dann $F_{\mathfrak{U}}$ und $F_{\mathfrak{W}}$ irgend zwei Bildbereiche mit gemeinsamem Randpunkt, so haben auch $F_{\mathfrak{W}\mathfrak{U}^{-1}}$ und F einen Punkt gemeinsam; es ist also $\pm\mathfrak{W}\mathfrak{U}^{-1}$ eines jener $\mathfrak{V}_k$ $(k = 1, \cdots, h)$. Ferner ist die Mannigfaltigkeit H *zusammenhängend,* wie etwa aus der rationalen Parameterdarstellung folgt. Man kann demnach einen Punkt eines beliebigen Bildbereiches $F_{\mathfrak{W}}$ mit einem Punkt von F durch eine innerhalb H verlaufende algebraische Kurve verbinden. Zufolge Satz 10 kann diese Kurve nur in endlich vielen Punkten die Begrenzung von Bildbereichen von F treffen. Also gibt es eine endliche Folge von Bildbereichen $F_0 = F, F_1, \cdots, F_{q-1}, F_q = F_{\mathfrak{W}}$, so daß für jedes k der Reihe $1, 2, \cdots, q$ die Gebiete F_{k-1} und F_k einen Randpunkt gemeinsam haben. Geht dann F_k aus F durch die Abbildung $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}[\mathfrak{U}_k]$ hervor, so ist $\mathfrak{U}_0 = \pm\mathfrak{E}$, $\mathfrak{U}_q = \pm\mathfrak{W}$, und $\pm\mathfrak{U}_k\mathfrak{U}_{k-1}^{-1}$ stimmt mit einer der h Matrizen $\mathfrak{V}_1, \cdots, \mathfrak{V}_h$ überein. Folglich ist

$$\mathfrak{W} = (\mathfrak{U}_q\mathfrak{U}_{q-1}^{-1})(\mathfrak{U}_{q-1}\mathfrak{U}_{q-2}^{-1}) \cdots (\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1^{-1})(\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_0^{-1})$$

ein Produkt dieser Matrizen.

Hieraus erhalten wir

Satz 11: *Die Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$ hat endlich viele Erzeugende.*

Wir greifen schließlich noch einmal auf die Parameterdarstellung (34) für den Raum H zurück. Es sei $\mathfrak{P}$ eine reelle umkehrbare Matrix mit m Reihen. Bei der Substitution $\mathfrak{x} \to \mathfrak{P}'\mathfrak{x}$, $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}[\mathfrak{P}]$ bleibt $\mathfrak{T} = \mathfrak{x}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{x}$ ungeändert, während $\mathfrak{H} = 2\mathfrak{x}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}' - \mathfrak{S}$ durch $\mathfrak{H}[\mathfrak{P}]$ zu ersetzen ist. Um zu einer entsprechenden Aussage für die inhomogene Parameterdarstellung (35) zu kommen, zerlegen wir $\mathfrak{x}$ in

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{x}_1 \end{pmatrix}$$

mit n-reihigem $\mathfrak{x}_2$ und analog

$$\mathfrak{P}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{A} \end{pmatrix},$$

so daß die Substitution $\mathfrak{x} \to \mathfrak{P}'\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x}_1 \to \mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_2 \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{D}\mathfrak{x}_2$ gleichbedeutend ist. Für $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1}$ erhält man dann die gebrochene lineare Substitution

$$\mathfrak{y} \to (\mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D})^{-1}, \tag{38}$$

und für

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{S}^{-1}\begin{bmatrix}\mathfrak{E}\\ \mathfrak{y}\end{bmatrix} \tag{39}$$

wird dabei

$$\mathfrak{T} \to \mathfrak{T}[(\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D})^{-1}]. \tag{40}$$

Bei den Substitutionen $\mathfrak{y} \to (\mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D})^{-1}$, $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}[\mathfrak{P}]$ ist also $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{H}[\mathfrak{P}]$ zu ersetzen. Da die Gleichung $\mathfrak{y} = (\mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D})^{-1}$ nur dann identisch in $\mathfrak{y}$ gilt, wenn $\mathfrak{P} = \lambda\mathfrak{E}$ mit skalarem $\lambda \neq 0$ ist, so ergeben zwei Matrizen $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2$ nur dann dieselbe gebrochene Substitution (38), wenn $\mathfrak{P}_2 = \lambda\mathfrak{P}_1$ ist.

Nun sei $\mathfrak{P}$ speziell eine Einheit $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{S}$. Da $\lambda\mathfrak{V}$ nur dann wieder eine Einheit ist, wenn λ den Wert ± 1 hat, so ergeben die Substitutionen (38) eine *treue* Darstellung der gekürzten Einheitengruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$. Es bedeute G das Bild von F im $\mathfrak{y}$-Raum. Da $\mathfrak{y}$ rational von $\mathfrak{H}$ abhängt, so wird G von *endlich vielen algebraischen* Flächen begrenzt; und durch die linearen Transformationen (38) erhält man eine lückenlose einfache Überdeckung des gesamten $\mathfrak{y}$-Raumes.

§ 6. Das Maß der Einheitengruppe.

Es soll nun im $\mathfrak{y}$-Raume ein Volumenelement gebildet werden, das gegenüber der Gruppe aller Transformationen (38) invariant bleibt. Es bedeute $\delta\mathfrak{y}$ die Matrix aus den Differentialen der Elemente von $\mathfrak{y}$. Setzt man dann

$$\mathfrak{y}_1 = (\mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D})^{-1}, \tag{41}$$

also

$$\mathfrak{y}_1(\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{B},$$

so folgt

$$\delta\mathfrak{y}_1 \cdot (\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D}) = (\mathfrak{A} - \mathfrak{y}_1\mathfrak{C}) \cdot \delta\mathfrak{y}.$$

Für die Funktionaldeterminante der Variabelntransformation (41) erhält man daher

$$\frac{d\mathfrak{y}_1}{d\mathfrak{y}} = \pm |\mathfrak{A} - \mathfrak{y}_1\mathfrak{C}|^n \cdot |\mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D}|^{n-m},$$

wo $d\mathfrak{y}_1$ und $d\mathfrak{y}$ die euklidischen Volumenelemente in den $n(m-n)$-dimensionalen Räumen von $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}$ bedeuten. Andererseits gilt

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{E} & -\mathfrak{y}_1\\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{A} & \mathfrak{B}\\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{y} & \mathfrak{E}\\ \mathfrak{E} & \mathfrak{N}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{N} & \mathfrak{A} - \mathfrak{y}_1\mathfrak{C}\\ \mathfrak{C}\mathfrak{y} + \mathfrak{D} & \mathfrak{C}\end{pmatrix},$$

also

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{vmatrix} = |\mathfrak{A} - \mathfrak{Y}_1 \mathfrak{C}| \cdot |\mathfrak{C}\mathfrak{Y} + \mathfrak{D}|.$$

Folglich wird

$$\frac{d\mathfrak{Y}_1}{d\mathfrak{Y}} = \pm \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{vmatrix}^n \cdot |\mathfrak{C}\mathfrak{Y} + \mathfrak{D}|^{-m}. \tag{42}$$

Wie in (39) sei

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{S}^{-1}\begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{Y} \end{bmatrix}.$$

Setzt man

$$\mathfrak{P}' = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{A} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}[\mathfrak{P}]; \qquad \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}_1^{-1}\begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{Y}_1 \end{bmatrix},$$

so folgt aus (40) die Formel

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1[\mathfrak{C}\mathfrak{Y} + \mathfrak{D}].$$

Es ist daher $|\mathfrak{T}| = |\mathfrak{T}_1| \cdot |\mathfrak{C}\mathfrak{Y} + \mathfrak{D}|^2$ und ferner $|\mathfrak{S}_1| = |\mathfrak{S}| \cdot |\mathfrak{P}|^2$. Bedeutet wieder D den absoluten Betrag der Determinante $|\mathfrak{S}|$, so erkennt man jetzt auf Grund von (42) die *Invarianz* des Ausdrucks

$$dv = D^{-\frac{n}{2}} |\mathfrak{T}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{Y} \tag{43}$$

gegenüber den Transformationen $\mathfrak{Y} \to (\mathfrak{A}\mathfrak{Y} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Y} + \mathfrak{D})^{-1}$, $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}[\mathfrak{P}]$.

Das durch (43) erklärte Volumenelement hat noch eine weitere wichtige Eigenschaft, die sich auf die Vertauschung von $\mathfrak{S}$ mit $-\mathfrak{S}$ und die dadurch bedingte Vertauschung von n mit $m - n$ bezieht. Die Matrizengleichung $\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ bleibt richtig, wenn $\mathfrak{S}$ durch $-\mathfrak{S}$ ersetzt wird. Zufolge (34) gestattet sie also auch die Parameterlösung

$$\mathfrak{H} = 2\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{S}, \qquad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{T}_1^{-1}[\mathfrak{Y}_1' \ \mathfrak{E}], \qquad \mathfrak{T}_1 = -\mathfrak{S}^{-1}\begin{bmatrix} \mathfrak{Y}_1 \\ \mathfrak{E} \end{bmatrix} > 0,$$

wobei $\mathfrak{Y}_1$ eine beliebige reelle Matrix mit n Zeilen und $m - n$ Spalten bedeutet. Es ist dann $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z} - \mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Z} = \mathfrak{T}^{-1}[\mathfrak{E} \ \mathfrak{Y}']$, und aus der Gleichung $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}$ folgt $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$, also

$$(\mathfrak{Y}_1' \ \mathfrak{E})\mathfrak{S}^{-1}\begin{pmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{Y} \end{pmatrix} = \mathfrak{N}. \tag{44}$$

Die beiden Parametermatrizen hängen daher mittels einer linearen Substitution zusammen, die sich aus (44) ergibt. Es soll nun gezeigt werden, daß auch

$$dv = D^{-\frac{m-n}{2}} |\mathfrak{T}_1|^{\frac{m}{2}} d\mathfrak{Y}_1$$

ist. Wegen der Invarianzeigenschaft des Volumenelementes (43) kann man sich auf den speziellen Fall

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & -\mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

beschränken. Dann ist $D = 1$, und aus (44) erhält man $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}'$. Es genügt demnach nachzuweisen, daß $\mathfrak{T} = \mathfrak{E} - \mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{E} - \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}'$ dieselbe Determinante haben. Dies folgt aber aus den beiden Formeln

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{Y}' \\ \mathfrak{Y} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ -\mathfrak{Y} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T} & \mathfrak{Y}' \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{N} \\ -\mathfrak{Y} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{Y}' \\ \mathfrak{Y} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{Y}' \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{T}_1 \end{pmatrix}.$$

Unsere Ergebnisse über die Eigenschaften von dv sind von Bedeutung für den Beweis von

Satz 12: *Das über den Fundamentalbereich G der Einheitengruppe im $\mathfrak{Y}$-Raum erstreckte Integral*

$$v(\mathfrak{S}) = D^{-\frac{n}{2}} \int_G |\mathfrak{T}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{Y}$$

ist konvergent.

Beweis: Man kann sich auf den Fall eines ganzen $\mathfrak{S}$ beschränken, da man sonst nur $\mathfrak{S}$ durch $\lambda\mathfrak{S}$ zu ersetzen hätte, mit geeignetem natürlichen λ. Indem man ferner nötigenfalls $\mathfrak{S}$ durch $-\mathfrak{S}$ ersetzt, kann man nach dem vorhin Bewiesenen voraussetzen, daß $n \leqq m - n$ ist.

Im Parameterraume der $\mathfrak{Y}$ ist G das Bild des Fundamentalbereiches F von $\Gamma(\mathfrak{S})$ in bezug auf H, ferner ist F die Summe der g Teilgebiete $H_1, \cdots, H_g$. Bedeuten $\mathfrak{S}_a = \mathfrak{S}[\mathfrak{U}_a]$ für $a = 1, \cdots, g$ die sämtlichen Reduzierten von $\mathfrak{S}$, so liegt eine Lösung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{H}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$ nur dann in H_a, wenn $\mathfrak{H}[\mathfrak{U}_a]$ im Minkowskischen reduzierten Raum R gelegen ist. Durch die Formeln

$$(45) \quad \mathfrak{H}_a = 2\mathfrak{Z}_a - \mathfrak{S}_a, \quad \mathfrak{Z}_a = \mathfrak{T}_a^{-1}[\mathfrak{E}\ \mathfrak{Y}'], \quad \mathfrak{T}_a = \mathfrak{S}_a^{-1}\begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{Y} \end{bmatrix}$$

erhält man die Parameterlösung von $\mathfrak{H}_a\mathfrak{S}_a^{-1}\mathfrak{H}_a = \mathfrak{S}_a$. Es bedeute G_a dasjenige Gebiet des $\mathfrak{Y}$-Raumes, für welches die durch (45) erklärte Matrix $\mathfrak{H}_a$ in R gelegen ist. Wegen der Invarianzeigenschaft von dv ist dann

$$D^{\frac{n}{2}} v(\mathfrak{S}) = \sum_{a=1}^{g} \int_{G_a} |\mathfrak{T}_a|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{Y},$$

und man hat also die Konvergenz jedes Summanden auf der rechten Seite nachzuweisen.

Es seien $h_1, \cdots, h_m$ die Diagonalelemente der Matrix $\mathfrak{H}_a = (h_{kl})$. Da $|\mathfrak{H}_a| = D$ und $\mathfrak{H}_a$ reduziert ist, so folgen aus (5), (6), (7) die

Ungleichungen

$$h_k \leqq h_{k+1} \qquad (k = 1, \cdots, m-1), \tag{46}$$

$$\pm 2 h_{kl} \leqq h_k \qquad (k < l), \tag{47}$$

$$h_1 \cdots h_m < c_1 D. \tag{48}$$

Wir verstehen unter Y den Teil des Raumes aller reellen $\mathfrak{Y}$, für welchen die durch (45) erklärte Matrix $\mathfrak{H}_a$ diesen sämtlichen Ungleichungen genügt und lassen weiterhin den Index a fort. Es genügt, die Konvergenz von

$$I = \int_Y |\mathfrak{T}|^{-\frac{m}{2}} d\mathfrak{Y}$$

zu beweisen.

Setzt man $\mathfrak{H} - \mathfrak{S} = \frac{1}{2}(u_{kl})$, $\mathfrak{H} + \mathfrak{S} = \frac{1}{2}(v_{kl})$, $\mathfrak{S} = (s_{kl})$ und bezeichnet die Diagonalelemente dieser Matrizen mit u_k, v_k, s_k, so wird $s_{kl} = v_{kl} - u_{kl}$, $h_{kl} = u_{kl} + v_{kl}$, und da $\mathfrak{H} - \mathfrak{S}$, $\mathfrak{H} + \mathfrak{S}$ beide halbpositiv sind, so gelten die Ungleichungen

$$\pm u_{kl} \leqq \sqrt{u_k u_l}, \qquad \pm v_{kl} \leqq \sqrt{v_k v_l},$$

also

$$\pm s_{kl} \leqq \sqrt{u_k u_l} + \sqrt{v_k v_l}.$$

Da nun $h_k = u_k + v_k$ ist, so ergibt die Schwarzsche Ungleichung die Abschätzung

$$\pm s_{kl} \leqq \sqrt{h_k h_l}. \tag{49}$$

Es ist aber $\mathfrak{S}$ ganz und $|\mathfrak{S}| \neq 0$. Für eine geeignete Permutation der Zahlen $1, \cdots, m$, etwa $l_1, \cdots, l_m$, muß daher

$$h_k h_{l_k} \geqq 1 \qquad (k = 1, \cdots, m)$$

gelten, und nach (46) gilt dann erst recht die Ungleichung

$$h_k h_{m-k+1} \geqq 1 \qquad (k = 1, \cdots, m). \tag{50}$$

Jetzt betrachten wir andererseits die $m-1$ Produkte $h_k h_{m-k}$ $(k = 1, \cdots, m-1)$. Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl q der Reihe $0, 1, \cdots, \left[\frac{m}{2}\right]$, so daß

$$h_k h_{m-k} \geqq 1 \qquad (q < k < m - q), \tag{51}$$

$$h_q h_{m-q} < 1 \tag{52}$$

ist. Im Falle $q = \left[\frac{m}{2}\right]$ ist bei dieser Erklärung die Bedingung (51) inhaltslos, und im Falle $q = 0$ ist (52) fortzulassen. Die Zahl q hängt

noch von der Lage von $\mathfrak{Y}$ im Gebiete Γ ab. Ist $q \leqq \frac{m}{2} - 1$, so folgt aus (51) die Ungleichung

$$\prod_{k=1}^{m} (h_k h_{m-k+1}) \geqq h_{m-q}^2 \prod_{k=1}^{q} (h_k h_{m-k+1})^2;$$

für $q = \frac{m-1}{2}$ ist diese Aussage sogar mit dem Gleichheitszeichen richtig. Aus (48) und (50) erhält man daher

$$h_{m-q} < c_1 D, \tag{53}$$

wenn $q \leqq \frac{m-1}{2}$ ist.

Nach (49) und (52) ist $s_{kl} = 0$ für $k \leqq q$, $l \leqq m - q$, und folglich hat $\mathfrak{S}$ die Gestalt

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} & \mathfrak{P}' \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{F} & \mathfrak{Q}' \\ \mathfrak{P} & \mathfrak{Q} & \mathfrak{G} \end{pmatrix}, \tag{54}$$

wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ symmetrische Matrizen mit q bzw. $m - 2q$ Reihen bedeuten. Für die Grenzfälle $q = 0$, $q = \frac{m}{2}$ ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{P}' \\ \mathfrak{P} & \mathfrak{G} \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Zerlegt man analog zu (54) die Spalte $\mathfrak{x}$ in drei Teilspalten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, so wird

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = \mathfrak{F}[\mathfrak{x}_2] + \mathfrak{x}_3' (2\,\mathfrak{P}\mathfrak{x}_1 + 2\,\mathfrak{Q}\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{G}\mathfrak{x}_3),$$

und folglich hat $\mathfrak{F}$ die Signatur $n - q$, $m - n - q$. Daher ist insbesondere $q \leqq n$. Wir wählen eine feste reelle Matrix $\mathfrak{C}_1$, so daß

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{C}_1] = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_{n-q} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & -\mathfrak{E}_{m-n-q} \end{pmatrix} = \mathfrak{D} \tag{56}$$

wird, wobei $\mathfrak{E}_{n-q}$ und $\mathfrak{E}_{m-n-q}$ Einheitsmatrizen mit der durch den Index angegebenen Reihenzahl bedeuten, und machen die Substitution

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{Q}\mathfrak{x}_2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{G}\mathfrak{x}_3, \qquad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{x}_2, \qquad \mathfrak{y}_3 = \mathfrak{x}_3. \tag{57}$$

Dann wird

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = \mathfrak{D}[\mathfrak{y}_2] + 2\,\mathfrak{y}_3'\mathfrak{P}\mathfrak{y}_1. \tag{58}$$

Es sei $\mathfrak{C} = (c_{kl})$ die Matrix der Reziproken der Substitution (57), also

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & -\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_1 & -\tfrac{1}{2}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{G} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{N} & \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

und $\mathfrak{H}[\mathfrak{C}] = \mathfrak{W} = (w_{kl})$ mit den Diagonalelementen $w_1, \cdots, w_m$. Nun ist $c_{kl} = 0$, wenn entweder $k > l$, $l \leqq q$ oder $k > m - q$, $q < l \leqq m - q$ oder $k > l$, $l > m - q$ ist, und

$$w_{kl} = \sum_{a,b=1}^{m} c_{ak} h_{ab} c_{bl}.$$

Nach (46) und (47) gilt dann

$$\pm w_{kl} < \gamma_1 h_k \qquad (k \neq q+1, \cdots, m-q),$$
$$\pm w_{kl} < \gamma_1 h_{m-q} \qquad (k = q+1, \cdots, m-q),$$

wobei γ_1, wie auch weiterhin $\gamma_2, \cdots, \gamma_{15}$, eine nur von m und $\mathfrak{S}$ abhängige natürliche Zahl bedeutet. Nach (46), (51), (53) ist aber

$$h_k \geqq (c_1 D)^{-1} \qquad (q < k < m - q) \tag{59}$$

und daher ausnahmslos

$$\pm w_{kl} < \gamma_2 h_k \qquad (k = 1, \cdots, m). \tag{60}$$

Nun ist $\mathfrak{W}$ positiv. Für die Zerlegung

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} \mathfrak{W}_1 & \mathfrak{W}_{12} \\ \mathfrak{W}_{21} & \mathfrak{W}_2 \end{pmatrix}$$

mit n-reihigem symmetrischen $\mathfrak{W}_1$ gilt dann die Ungleichung

$$|\mathfrak{W}| \leqq |\mathfrak{W}_1| \cdot |\mathfrak{W}_2| < \gamma_3 |\mathfrak{W}_1| \prod_{k=n+1}^{m} h_k.$$

Nach (48) ist andererseits

$$|\mathfrak{W}| = |\mathfrak{C}^2 D| > \gamma_4^{-1} \prod_{k=1}^{m} h_k$$

und demnach

$$|\mathfrak{W}_1| > \gamma_5^{-1} \prod_{k=1}^{n} h_k. \tag{61}$$

Wegen der Invarianzeigenschaft von dv dürfen wir zum Nachweis der Konvergenz des Integrals I die Parameterstellung (35) mit $\mathfrak{S}[\mathfrak{C}]$ an Stelle von $\mathfrak{S}$ benutzen. Setzt man

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{C}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{S}_{12} \\ \mathfrak{S}_{21} & \mathfrak{S}_2 \end{pmatrix}$$

mit n-reihigem $\mathfrak{S}_1$, wobei $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_{12}$ nach (56) und (58) die Matrizen

$$\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{E}_{n-q} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S}_{12} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{P}' \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{N} \end{pmatrix}$$

bedeuten, so folgen aus (35) die Formeln

$$2\,\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{S}_1, \qquad 2\,\mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{Y}' = \mathfrak{W}_{12} + \mathfrak{S}_{12}. \tag{62}$$

Nun ist

$$|\,\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{S}_1\,| \geqq |\,\mathfrak{W}_1\,|,$$

so daß man für die Elemente σ_{kl} von $(\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{S}_1)^{-1}$ nach (59), (60), (61) die Abschätzung

$$\pm\,\sigma_{kl} < \gamma_6\, h_l^{-1} \qquad (k \leqq l \leqq n) \tag{63}$$

erhält. Wegen (60) sind dann alle Elemente der Matrix $(\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{S}_1)^{-1}\,\mathfrak{W}_{12}$ absolut kleiner als γ_7. Ist ferner $\mathfrak{L}_1$ der q-te Abschnitt von

$$(\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{S}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}_1 & \mathfrak{L}_{12} \\ \mathfrak{L}_{21} & \mathfrak{L}_2 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$(\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{S}_1)^{-1}\,\mathfrak{S}_{12} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N} & \mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}' \\ \mathfrak{N} & \mathfrak{L}_{21}\,\mathfrak{P}' \end{pmatrix},$$

und nach (59), (63) sind die Elemente von $\mathfrak{L}_{21}\,\mathfrak{P}'$ absolut kleiner als γ_8. In Verbindung mit (62) ergibt sich jetzt, daß $\mathfrak{Y}$ die Form

$$\mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 \\ \mathfrak{Y}_3 & \mathfrak{Y}_4 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Y}_3 = \mathfrak{P}\,(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2)$$

besitzt, mit alternierendem $\mathfrak{X}_2$ und symmetrischem q-reihigen $\mathfrak{X}_1$; dabei sind alle Elemente der Matrizen $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Y}_4$, $\mathfrak{X}_2$ absolut kleiner als γ_9, und für die Elemente von $\mathfrak{X}_1 = (x_{kl})$ gilt nach (63) die Abschätzung

$$\pm\,x_{kl} < \gamma_{10}\, h_l^{-1} \qquad (k \leqq l \leqq q). \tag{64}$$

Außerdem ist noch

$$|\,\mathfrak{T}\,|^{-\frac{m}{2}} = |\,\tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{W}_1 + \mathfrak{S}_1)\,|^{\frac{m}{2}} < \gamma_{11} \prod_{k=1}^{q} h_k^{\frac{m}{2}}.$$

Die Zahl q kann einen der Werte $0, 1, \cdots, n$ haben; sie hängt noch von der Lage von $\mathfrak{Y}$ ab. Wir zerlegen das Integral I in

$$I = I_0 + I_1 + \cdots + I_n.$$

wobei in I_k nur über den Teil des Gebietes Y zu integrieren ist, für welchen $q = k$ ist. Es genügt, die Konvergenz von I_q zu beweisen, für $q = 0, 1, \cdots, n$. Das Integrationsgebiet zerlegen wir weiter in Teilgebiete durch die Bedingungen

$$e^{-g_k} < \frac{h_k}{h_{k+1}} \leqq e^{1-g_k} \qquad (k = 1, \cdots, q-1),$$
$$e^{-g_q} < h_q \leqq e^{1-g_q};$$

dabei können wir auf Grund von (46) und (52) die $g_1, \cdots, g_q$ auf natürliche Zahlen beschränken. Setzt man noch zur Abkürzung

$$g_k + g_{k+1} + \cdots + g_q = f_k \qquad (k = 1, \cdots, q),$$

so gilt

$$e^{-f_k} < h_k \leqq \gamma_{12}\, e^{-f_k}.$$

Zufolge (64) ist das Volumen jedes Teilgebietes kleiner als $\gamma_{13}\, e^{f_1+2f_2+\cdots+qf_q}$, andererseits ist dort die zu integrierende Funktion

$$|\mathfrak{T}|^{-\frac{m}{2}} < \gamma_{14}\, e^{-\frac{m}{2}(f_1+f_2+\cdots+f_q)},$$

also der Beitrag des Teilgebietes zu I_q höchstens

$$\gamma_{15}\, e^{-\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{m}{2}-k\right)f_k} \tag{65}$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{m}{2}-k\right)f_k = \sum_{k=1}^{q} k\,\frac{m-k-1}{2}\,g_k$$

und demnach die über alle Systeme natürlicher Zahlen $g_1, \cdots, g_q$ erstreckte Summe der Ausdrücke (65) stets konvergent, wenn nicht $m = q+1$ ist. Wäre endlich $m = q+1$, so folgte $m = 2$, $q = n = 1$, und nach (55) wäre $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$ eine rational zerlegbare binäre Form; dieser Fall war aber dauernd ausgeschlossen worden. Damit ist der Beweis der Konvergenz beendet.

Wir setzen

$$\alpha_{mn} = \pi^{-\frac{n(m-n)}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

und nennen die Größe

$$\mu(\mathfrak{S}) = \alpha_{mn}\, D^{-\frac{n}{2}} \int_G |\mathfrak{T}|^{-\frac{m}{2}}\, d\mathfrak{Y}$$

das *Maß* der Einheitengruppe von $\mathfrak{S}$. Diese Gruppenmaße $\mu(\mathfrak{S})$ sind für die *analytische Theorie* der quadratischen Formen von Bedeutung; sie treten z. B. bei der Definition der *Zetafunktionen*[5]) auf, welche sich

[5]) Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, Mathematische Zeitschrift, Bd. 43 (1938), S. 682—708, und Bd. 44 (1939), S. 398—426.

den indefiniten quadratischen Formen zuordnen lassen. Sind $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_h$ Repräsentanten der verschiedenen Klassen des Geschlechtes von $\mathfrak{S}$, so nennt man die Summe $\mu(\mathfrak{S}_1) + \cdots + \mu(\mathfrak{S}_h)$ das *Maß des Geschlechtes* von $\mathfrak{S}$. Für eine beliebige natürliche Zahl t sei $\omega(t)$ die Anzahl der Primfaktoren von t und $E_t(\mathfrak{S})$ die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{S}$ modulo t, also die Anzahl der ganzen Lösungen $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] \equiv \mathfrak{S} \pmod{t}$; ferner sei zur Abkürzung

$$\alpha_m = \prod_{k=1}^{m} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}}}.$$

Die analytische Theorie der quadratischen Formen[6]) ergibt dann die Relation

$$\mu(\mathfrak{S}_1) + \cdots + \mu(\mathfrak{S}_h) = 4\,\alpha_m D^{\frac{m+1}{2}} \lim_{t\to\infty} \frac{2^{\omega(t)}\, t^{\frac{m(m-1)}{2}}}{E_t(\mathfrak{S})}, \tag{66}$$

wenn t eine geeignete Folge natürlicher Zahlen durchläuft, z. B. die Folge $1!, 2!, 3!, \cdots$. Enthält das Geschlecht von $\mathfrak{S}$ nur eine einzige Klasse, so läßt sich $\mu(\mathfrak{S})$ mit dieser Formel bestimmen; dies ist insbesondere der Fall, wenn $m > 2$ ist und D keinen Primfaktor in höherer als erster Potenz enthält. Da die Gruppenmaße $\mu(\mathfrak{S}_1), \cdots, \mu(\mathfrak{S}_h)$ in rationalem Verhältnis zueinander stehen, so unterscheidet sich $\mu(\mathfrak{S})$ stets nur durch einen *rationalen* Zahlenfaktor von der rechten Seite in (66).

[6]) Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, II, Annals of Mathematics, Bd. 37 (1936), S. 230—263.