Géométrie et groupes classiques

Notes de Cours

2011

Table des matières

1 Actions de groupes, groupes topologiques

1.1 Actions de groupes

Définition 1.1 (*Action d'un groupe G sur un ensemble X*)

On dit que G agit sur X s'il existe une fonction

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$$

telle que :

1. $\forall g,h \in G,\ \forall x \in X,\ g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x$
2. $\forall x \in X,\ e\cdot x = x$

Remarque : Il existe toujours une action triviale telle que $\forall g \in G,\ \forall x \in X,\ g\cdot x = x$.

Proposition 1.1 (*Autre point de vue*)

G agit sur X si et seulement si il existe un homomorphisme :

$$\varphi : G \longrightarrow \mathcal{S}_X$$

Un unique action $\cdot$ est associé à un tel homomorphisme φ :

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & g\cdot x = \varphi(g)(x) \end{array}$$

Et réciproquement, un unique homomorphisme φ est associé à une action $\cdot$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \longrightarrow & \mathcal{S}_X \\ & g & \longmapsto & f : x \longmapsto f(x) = g\cdot x \end{array}$$

Définition 1.2 (*Orbite*)

Soit $x \in X$. On définit l'orbite de x sous l'action de G par : $G.x := \{g\cdot x \mid g \in G\}$

Remarque : L'appartenance à une même orbite définit une relation d'équivalence sur X. En particulier les orbites constituent une partition de X.

Définition 1.3 (*Stabilisateur*)

Soit $x \in X$. Le stabilisateur de x dans G est le sous-groupe $\mathrm{Stab}_G(x) = G_x = \{g \in G \mid g\cdot x = x\}$.
Si $Y \subset X$, $\mathrm{Stab}_G(Y) = \{g \in G \mid g\cdot Y \subset Y \text{ et } g^{-1}\cdot Y \subset Y\} = \mathrm{Stab}_G(Y) = \{g \in G \mid g\cdot Y = Y\}$

Définition 1.4 (*Action transitive*)

On dit que G agit transitivement sur X s'il n'y a qu'une seule orbite :

$$\forall x,y \in X,\ \exists g \in G,\ g\cdot x = y$$

Définition 1.5 (*Action fidèle*)

On dit que G agit fidèlement sur X si :

$$\forall g \in G,\ [(\forall x \in X,\ g\cdot x = x) \Longrightarrow (g = e)]$$

Remarques :
- Avec le second point de vue, une action est fidèle si et seulement si Ker $\varphi = \{e\}$, ie : φ injective.
- Si G n'agit pas fidèlement, on peut quotienter par Ker φ pour obtenir une action fidèle.

Exemples :
1. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En particulier, il n'y a qu'une seule orbite qui est $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. On rappelle que $\mathcal{O}(n) := \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = \mathrm{Id}_n\}$. Les orbites de $\mathcal{O}(n)$ sont les sphères centrées en l'origine.

Proposition 1.2 (*Stabilisateur - Orbite*)

L'application suivante est une bijection :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G/(\mathrm{Stab}_G(x)) & \longrightarrow & \omega(x) \\ & \overline{g} & \longmapsto & g\cdot x \end{array}$$

Démonstration :

On commence par montrer que φ est bien définie. Soient $g, g' \in G$ tels que $g^{-1}g' \in \mathrm{Stab}_G(x)$. Alors $g\,\mathrm{Stab}_G(x) = g'\,\mathrm{Stab}_G(x)$ donc $(g^{-1}g')\cdot x = x$ et $g' \cdot x = g\cdot x$. Ainsi les éléments d'une même classe modulo le stabilisateur agissent de la même manière sur X.

La surjectivité étant évidente, il reste à montrer l'injectivité. Soient $g, g' \in G$ tels que $g\cdot x = g'\cdot x$. Alors $x = (g^{-1}g')\cdot x$ et $(g^{-1}g') \in \mathrm{Stab}_G(x)$. Ainsi si deux éléments agissent de la même manière sur X, alors ils sont dans la même classe d'équivalence. ■

1.2 Groupes topologiques

Définition 1.6 (*Groupe topologique*)

Un groupe G est dit topologique, s'il est muni d'une topologie pour laquelle la multiplication et l'inversion continues.

Exemple : $(\mathbb{Z}, +)$ pour la topologie discrète (ie : les fermés sont les ensembles finis de points) est un groupe topologique.

Proposition 1.3

1. *Un sous-groupe d'un groupe topologique est un groupe topologique pour la topologie induite.*
2. *Un produit de groupes topologiques est un groupe topologique pour la topologie produit.*

Démonstration :

1. Soit $H < G$. Un ouvert Ω de H est de la forme $\Omega' \cap H$ avec Ω' ouvert de G. Ainsi :
$$\mu_H^{-1}(\Omega) = \mu_H^{-1}(\Omega' \cap H) = \mu_H^{-1}(\Omega') \cap \mu_H^{-1}(H) = \underbrace{\underbrace{\mu^{-1}(\Omega')}_{\text{ouvert de } G\times G} \cap (H \times H)}_{\text{est un ouvert de } H\times H}$$
Et de même :
$$\iota_H^{-1}(\Omega) = \iota_H^{-1}(\Omega' \cap H) = \iota_H^{-1}(\Omega') \cap \iota_H^{-1}(H) = \underbrace{\underbrace{\iota^{-1}(\Omega')}_{\text{ouvert de } G} \cap H}_{\text{ouvert de } H}$$
2. Par définition de la topologie produit. ■

Définition 1.7 (*morphisme de groupes topologiques*)

Un morphisme de groupes topologiques est un morphisme de groupes qui est continu.

On définit de même un isomorphisme de groupes topologiques s'il est bicontinu, et un automorphisme de groupe topologique si c'est un isomorphisme bicontinu d'un groupe topologique dans lui même.

Proposition 1.4

Soit G un groupe topologique.

1. *Pour $x \in G$ la multiplication à gauche (resp. à droite) par x notée $l_x : g \mapsto xg$ (resp. $r_x : g \mapsto gx$) est un homéomorphisme mais pas un morphisme de groupe.*
2. *De même l'inversion $\iota : g \mapsto g^{-1}$ est un homéomorphisme mais pas un morphisme de groupe.*
3. *Pour $x \in X$ la conjugaison par x noté $\gamma_x : g \mapsto xgx^{-1}$ est un isomorphisme de groupe topologique.*
   Pour avoir une action à gauche il faut xgx^{-1} et pour avoir une action à droite il faut $x^{-1}gx$.

Définition 1.8 (*Composante du neutre*)

Soit G un groue topologique. On définit la composante du neutre G_e comme la composante connexe de G contenant e.

Proposition 1.5

1. *G_e est un sous-groupe fermé et distingué de G,*
2. *$\forall x \in G$ la composante connexe de G contenant x est $G_e x = xG_e$,*
3. *Tout sous-groupe $H < G$ qui est ouvert, est également fermé. En particulier, H est la réunion de composantes connexes de G et $H \supset G_e$.*

Démonstration :

1. (fermé) Toute composante connexe est fermée et ouverte.
   (sous-groupe) La continuité de la multiplication nous assure que $\mu(G_e \times G_e)$ est connexe, de plus $\mu(G_e \times G_e) \ni e = \mu(e,e)$ et $G_e = \mu(\{e\} \times G_e) \subset \mu(G_e \times G_e)$ donc $\mu(G_e \times G_e) = G_e$.
   La continuité de l'inversion assure de même que $\iota(G_e) = G_e$.
   (distingué) Soit $x \in G$ alors $xG_e x^{-1} = \gamma_x(G_e) \ni 1$.
2. $G_e = l_{x^{-1}}(xG_e) \subset l_{x^{-1}}(\mathrm{C}_x) \subset G_e$.
3. TODO ■

Lemme 1.6

Si $Y \subset X$ est fermé et ouvert, alors c'est une union de composantes connexes de X.

Proposition 1.7

Soit G un groupe topologique connexe et V un voisinage ouvert de $\{e\}$ dans G. Alors V engendre G :

$$G = \bigcup_n (V \cup \iota(V))^n$$

Théorème 1.8 (*Connexité de $\mathcal{GL}_n$*)

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est un groupe topologique connexe.

Démonstration :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni de la topologie issue de la norme de Frobénius :

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j,j} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{Tr}\ (AA^*))^{\frac{1}{2}}$$

On montre ensuite la connexité par arcs en considérant la connexité par arc du complémentaire des zéros du déterminant de $zA + (1-z)\,\mathrm{Id}$. ■

Proposition 1.9

La norme de Frobénius est une norme d'algèbre : $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

Définition 1.9 (*Produit semi-direct*)

Soient N, H des groupes et $\theta : H \to \operatorname{Aut} N$ un morphisme de groupe. On définit :

$$N \rtimes_\theta H \text{ avec la loi : } (n,h)(n',h') \mapsto (n\theta(h)(n'), hh')$$

Si $\theta = \mathrm{Id}$ on dit que le produit est direct.

Proposition 1.10

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Démonstration : En effet $\mathbb{R}^*$ est l'image non connexe de det : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui est continu. ■

Remarque : On verra plus loin que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ possède exactement deux composantes connexes : $\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$ qui est aussi un sous-groupe distingué et $\mathcal{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

1.3 Action de groupes topologiques

Définition 1.10 (*Action de groupes topologiques*)

Soient G un groupe topologique et X un espace topologique.
On dit que G agit topologiquement sur X si l'action : $G \times X \to X$ est continue.

Proposition 1.11

Si G agit topologiquement sur X alors :

1. *Si G est connexe alors les orbites sont connexes.*
2. *Si G est compact alors les orbites sont compactes.*

Démonstration : Une orbite est une image par une application continue. ■

Proposition 1.12

Si G agit topologiquement sur X et $x \in X$ alors $\operatorname{adh}(G\cdot x)$ est une union d'orbites (ie : $\operatorname{adh}(G\cdot x)$ est stable sous l'action de G).

Démonstration : On prend une suite $(x_n)_n$ de $G\cdot x$ qui converge vers $y \in \operatorname{adh}(G\cdot x)$. Alors par continuité de l'action, la suite des images est aussi une suite de $G\cdot x$ qui converge vers $g\cdot y \in \operatorname{adh}(G\cdot x)$. ■

Corollaire 1.13

On peut construire une relation d'ordre partiel $\preccurlyeq$ sur les orbites de G dans X.

$$\Omega \preccurlyeq \Omega' \iff \Omega \subset \operatorname{adh}(\Omega')$$

Définition 1.11

En considérant la relation d'équivalence $\sim$ d'appartenance à la même orbite, on définit l'espace quotient X/G des orbites.

Proposition 1.14

L'ensemble X/G peut être muni d'une topologie naturelle rendant l'application π continue et ouverte.

$$\begin{array}{rccc} \pi : & X & \longrightarrow & X/G \\ & x & \longmapsto & G\cdot x \end{array}$$

Démonstration : On construit la topologie sur X/G en posant que $U \subset X/G$ est ouvert si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert pour la topologie sur X. On vérifie ensuite qu'on a bien une topologie rendant πkjii ouverte (elle est continue par construction). ■

Proposition 1.15

$f : X/G \to Y$ est continue si et suelement si $f \circ \pi : X \to Y$ est continue.

Démonstration : C'est une conséquence de la définition de la topologie définie sur X/G. ■

Définition 1.12 (*Espace homogène*)

Un espace homogène est un espace topologique sur lequel un groupe topologique agit topologiquement et transitivement.

En particulier il n'y a qu'une seule orbite et les stabilisateurs sont tous conjugués.

Théorème 1.16

Si X est un espace topologique localement compact à base dénombrable, alors pour tout $x \in X$:

$$X \text{ est isomorphe à } G/\operatorname{Stab}_G(x)$$

2 Actions de $\mathcal{GL}(\mathbf{n},\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}(\mathbf{n},\mathbb{K})$

2.1 Action par multiplication à gauche et à droite

2.1.1 Action par multiplication à gauche

On va montrer qu'étudier l'orbite de l'action par multiplication à gauche revient à effectuer le pivot de Gauss.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n \\ (g, M) & \longmapsto & gM \end{array}$$

On définit l'ensemble $\{E_{ij}\}$ des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

Définition 2.1 (*Matrices de transvection et de dilatation*)

Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- *$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ est une matrice de transvection,*
- *$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ est une matrice de dilatation ($\lambda \neq 0$).*

Ce sont en particulier des matrices inversibles.

Remarque :
- L'action de la transvection T_{ij} sur une matrice M revient à ajouter λ fois la $j^{\text{ème}}$ ligne à la $i^{\text{ème}}$,
- L'action de la dilatation D_i sur une matrice M revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ par $\lambda \neq 0$,
- $D_j(-1) \circ T_{ij}(1) \circ T_{ji}(-1) \circ T_{ij}(-1)$ permet d'inverser les lignes i et j.

Définition 2.2 (*Forme echelonnée réduite*)

Un matrice est dite sous forme échelonnée réduite si elle est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ \vdots & \cdots & \vdots & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \cdots \vdots & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \cdots \vdots & \vdots & \vdots \cdots \vdots & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 2.1

D'après les résultats sur le pivot de Gauss, dans chaque orbite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sous l'action de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ il y a une matrice sous forme échelonnée réduite.

De plus cette matrice est unique dans chaque orbite.

Démonstration : On commence par remarquer que les matrices d'une même orbite ont les mêmes noyaux.

En effet, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$x \in \text{Ker}\,(gM) \Longleftrightarrow gM(x) = 0 \Longleftrightarrow M(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \text{Ker}\, M$$

On motre ensuite qu'il n'existe qu'une forme échelonnée réduite pour un certain noyau. ∎

Corollaire 2.2

$M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite si et seulement si $\text{Ker}\, M = \text{Ker}\, M'$.

Corollaire 2.3

L'ensemble des orbites et en bijection avec l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

2.1.2 Action de $\mathcal{GL}_\mathbf{n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_\mathbf{n}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{K})$

$$\begin{array}{rrcl} f: & (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & ((g,h),M) & \longmapsto & gMh^{-1} \end{array}$$

On a vu que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $g \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que gM soit echelonnée réduite.

On remarque que $T_{ij}^{-1}(\lambda) = T_{ij}(-\lambda)$ et que $D_i^{-1}(\lambda) = D_i(1/\lambda)$. De plus l'action par transvection et dilatation à droite revient à effectuer les opérations élémentaires sur les colonnes.

Ainsi, par multiplication à droite, à partir d'une matrice échelonnée réduite, on obtient une matrice de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.4

Les orbites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sous l'action de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est en bijection avec $\{1, \cdots, n\}$

Remarque : Tout ceci est un exemple d'une théorie plus générale sur les groupes de Lie.

2.2 Action par conjugaison

On considère l'action liée au changement de base :

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & (g,M) & \longmapsto & gMg^{-1} \end{array}$$

On peut voir cette action comme la restriction à la diagonale de l'action de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En particulier, le rang est encore un invariant.

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \simeq \{(g,g) \mid g \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\} \hookrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

Lemme 2.5

Le polynôme caractéristique est un invariant de l'action par conjugaison.

Démonstration : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son polynôme caractéristique est $\chi_M(X) = \det M - XI_n$. Si $g \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\chi_{gMg^{-1}}(X) = \det(gMg^{-1} - XI_n) = \det\left(g\,(M - XI_n)\,g^{-1}\right) = \det g \cdot \chi_M(X) \cdot \det g^{-1} = \chi_M(X)$$

■

Lemme 2.6

Le polynôme minimal est un invariant de l'action par conjugaison.

Démonstration : On rappelle que le polynôme minimal P_M de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme unitaire de degré minimal tel que $P_M(M) = 0$.

On remarque que pour $(g,M) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$(gMg^{-1})^2 = gMg^{-1}gMg^{-1} = gM^2g^{-1} \quad \text{d'où} \quad \forall k \in \mathbb{N}, (gMg^{-1})^k = gM^kg^{-1}$$

Ainsi pour tout polynôme P on a $P(gMg^{-1}) = gP(M)g^{-1}$ et en particulier $P_M = P_{gMg^{-1}}$. ■

Remarque : Sur $\mathbb{C}$ tout polynôme est scindé, donc via le lemme des noyaux, toute matrice est trigonalisable.

Théorème 2.7 (*Réduction de Jordan*)

L'ensemble des orbites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})/\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est en bijection avec l'ensemble des matrices de la forme suivante (modulo permutation des blocs) :

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Proposition 2.8

Les orbites de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par conjugaison sont représentés par les matrices :

$$\{\lambda \, \mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu \right\} \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

$$\{\lambda R_\theta \mid \lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}\} \ \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

3 Etude des sous-groupes classiques

On applle groupe classique tout sous-groupe de $\mathcal{GL}_n$ fermé et défini en famille.

3.1 $\mathcal{SL}_\mathbf{n}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 3.1 ($\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$)

$$\mathcal{SL}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1\}$$

En particulier on a $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

On définit l'homéomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{SL}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^* \\ & g & \longmapsto & \left(g \begin{pmatrix} (\det g)^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \ \det g \right) \end{array}$$

Proposition 3.1

1. *$\mathcal{SL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.*
2. *Si $\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arc, alors $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ l'est aussi.*

Démonstration : On définit la projection : $p : \mathcal{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \ni (A, t) \longmapsto A \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{C})$.
Ainsi on a $p \circ \sigma(\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{SL}_n(\mathbb{C})$.
De même la restriction $\sigma' := \sigma\big|_{\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})}$ est aussi un homéomorphisme et $p \circ \sigma'(\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})) = \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$. ■

3.2 Groupes associés à une forme sesquilinéaire

Définition 3.2 (*Forme sesquilinéaire*)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un application $<\cdot,\cdot> : E \times E \longrightarrow E$ est une forme sesquilinéaire si :

1. *$< x, \cdot > : E \longrightarrow E$ est linéaire,*
2. *$\forall x, y, z \in E,\ < x + y, z > = < x, z > \ + \ < y, z >$,*
3. *$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in E,\ < \lambda x, y > = \overline{\lambda}\ < x, y >$*

Définition - Proposition 3.3 (*Groupe des invariants $\mathcal{U}(E)$*)

$$\mathcal{U}(E) := \{f : E \longrightarrow E \text{ linéaire bijective } \mid < f(x), f(y) > = < x, y > \}$$

$\mathcal{U}(E)$ est le sous-groupe des invariants de $<\cdot,\cdot>$ dans $\mathcal{GL}(E)$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}(E)$ isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration : Si $f, g \in \mathcal{U}(E)$ on vérifie facilement que $f \circ g$, f^{-1}, et Id_E sont également dans $\mathcal{U}(E)$.
En fixant une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ on peut identifier $\mathcal{GL}(E)$ à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ par $\mathrm{Mat}_\mathcal{B} : \mathcal{GL}(E) \longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit alors $\Omega = (< e_i, e_j >) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $< x, y > = X^*\Omega Y$. Si $M = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(f)$ alors :

$$\begin{array}{rl} & f \in \mathcal{U}(E) \\ \Longleftrightarrow & X^*\Omega Y = (MX)^*\Omega(MY) \\ \Longleftrightarrow & X^*\Omega Y = X^*M^*\Omega MY \\ \Longleftrightarrow & \Omega = M^*\Omega M \end{array}$$

La dernière implication est bien vérifiée car si $A = (a_{kl}), X = e_i, Y = e_j$ alors $X^*AY = a_{ij}$. Ainsi :

$$\mathcal{U}(E) \simeq \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \mid M^*\Omega M - \Omega = 0\}$$

C'est en particulier l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par un application continue, c'est donc un sous-groupe fermé. ■

Définition - Proposition 3.4 (*Groupe unitaire $\mathcal{U}(n)$*)

Si la forme $<\cdot,\cdot>$ est hermitienne (ie : $\forall x, y \in E,\ <y,x> = \overline{<x,y>}$), on note alors $\mathcal{U}(n,\mathbb{C})$ ou $\mathcal{U}(n)$.

$$\mathcal{U}(n) = \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \mid M^*M = \mathrm{Id}\}$$

Proposition 3.2

$\mathcal{U}(n)$ est compact et connexe par arcs.

Démonstration :

On a vu que $\mathcal{U}(n)$ est fermé. De plus $\forall M \in \mathcal{U}(n), \|M\|_F^2 = \mathrm{Tr}\,(M^*M) = n$. Ainsi $\mathcal{U}(n)$ est fermé borné, donc compact.

On montre la connexité par arcs en utilisant la théorie de la réduction des endomorphismes. Pour $M \in \mathcal{U}(n)$, il existe une base orthonormée telle que M est diagonale. On peut alors construire le chemin continu.

$$\exists P \in \mathcal{U}(n), P^*MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

■

Définition 3.5 (*Groupe spécial unitaire*)

$$\mathcal{SU}(n) := \mathcal{U}(n) \cap \mathcal{SL}_n(\mathbb{C})$$

Remarque : En remarquant que $(M^*M = \mathrm{Id}) \Longrightarrow (|\det M| = 1)$, on peut définir l'homéomorphisme :

$$\sigma\big|_{\mathcal{U}(n)} : \mathcal{U}(n) \longrightarrow \mathcal{SU}(n) \times \mathcal{S}^1$$

Ainsi $\mathcal{SU}(n)$ est également compact et connexe par arcs.

3.3 Groupes associés à une forme bilinéaire symétrique

Définition 3.6 (*Forme bilinéaire symétrique - antisymétrique*)

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini, et $<\cdot,\cdot>$ un forme bilinéaire, elle est dite :
- *Symétrique si : $\forall x, y \in E,\ <y,x> = <x,y>$*
- *Antisymétrique si : $\forall x, y \in E,\ <y,x> = -<x,y>$*

Comme dans le paragraphe précédant, en remplaçant M^* par ${}^tM$ on montre que $\mathcal{O}(E)$, le sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ qui laisse une forme bilinéaire invariante, est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

On pose $\Omega = (<e_i, e_j>) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier si la forme est symétrique, Ω est symétrique.

Proposition 3.3 ($\mathcal{O}(n)$)

$$\mathcal{O}(n) \simeq \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM\Omega M - \Omega = 0\}$$

Définition 3.7 (*Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal complexe*)

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que la forme n'est pas dégénérée, on peut supposer $\Omega = \mathrm{Id}$. On définit le groupe orthogonal complexe :

$$\mathcal{O}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tMM = \mathrm{Id}\}$$

En remarquant que $({}^tMM = \mathrm{Id}) \implies (|\det M| = 1)$, on définit également le groupe spécial orthogonal complexe :

$$\mathcal{SO}(n, \mathbb{C}) = \mathcal{O}(n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{SL}(n, \mathbb{C})$$

Définition 3.8 (*Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal réel*)

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on ne peut plus supposer que $\Omega = \mathrm{Id}$. On définit le groupe orthogonal réel :

$$\mathcal{O}(n) := \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = \mathrm{Id}\}$$

On définit de même le groupe spécial orthogonal réel :

$$\mathcal{SO}(n) := \mathcal{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{O}^+(\mathbb{R}) = \mathcal{O}(n) \cap \mathcal{SL}(n, \mathbb{R})$$

Remarque : $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}^+(\mathbb{R}) \sqcup \mathcal{O}^-(\mathbb{R})$ (union disjointe de fermés de $\mathcal{O}(n)$).

Proposition 3.4

1. *$\mathcal{O}(n)$ est compact,*
2. *$\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs,*
3. *$\mathcal{O}^+(\mathbb{R}) \sqcup \mathcal{O}^-(\mathbb{R})$ est la décomposition en composantes connexes.*

Démonstration :

1. $\mathcal{O}(n) = \mathcal{U}(n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en particulier, c'est un sous-groupe fermé du compact $\mathcal{U}(n)$, c'est donc un compact.
2. $$ {}^tPMP = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & 0 & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & & 0 & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} $$

   $M \in \mathcal{SO}(n)$ donc M est diagonalisable par blocs de taille au plus 2. De plus $(\det M = 1) \Rightarrow$ (q est pair), et on peut remplacer I_2 par R_{θ_π}.

   On peut construire un chemin continu $\tilde{\gamma} : [0,1] \ni t \longmapsto R_{t\theta}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \mathrm{Id}$ et $\tilde{\gamma}(1) = R_\theta$. On en déduit un chemin continu γ de Id à M. ∎

3.4 Groupes associés à une forme bilinéaire antisymétrique

On suppose que la forme est non-dégénérée, ce qui implique que $\dim E = 2n$. Alors dans une certaine base on a :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & -1 & \\ & & 1 & & \\ & \cdot & & & 0 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

Définition 3.9 (*Groupe symplectique*)

On appelle groupe symplectique :

$$\mathcal{S}\mathrm{p}_{2n} := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tM\Omega M - \Omega = 0\}$$

On a toujours $(\mathcal{M} \in \mathcal{S}\mathrm{p}_{2n}) \Rightarrow (|\det M| = 1)$, *on définit ainsi le groupe spécial symplectique :*

$$\mathcal{US}\mathrm{p}_{2n} := \mathcal{S}\mathrm{p}_{2n} \cap \mathcal{U}(2n)$$

Proposition 3.5

1. *$\mathcal{US}\mathrm{p}_{2n}$ est compact,*
2. $\mathcal{US}\mathrm{p}_{2n} = \left\{ z \in \mathcal{U}(2n) \;\middle|\; \exists A, B \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}, z = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \right\}$.

Démonstration :

1. C'est un fermé de $\mathcal{U}(n)$, donc un compact.
2.

$$\begin{array}{ll} & z \in \mathcal{U}(2n) \\ \Leftrightarrow & z^*z = \mathrm{Id} \\ \Leftrightarrow & z^* = z^{-1} \\ \Leftrightarrow & {}^tz = \overline{z^{-1}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} & z \in \mathcal{S}\mathrm{p}(2n) \\ \Leftrightarrow & {}^tz\Omega z = \Omega \\ & \underline{z \in \mathcal{US}\mathrm{p}(2n)} \\ \Leftrightarrow & \overline{z^{-1}}\Omega z = \Omega \\ \Leftrightarrow & z^{-1}\Omega\overline{z} = \Omega \\ \Leftrightarrow & \Omega\overline{z} = z\Omega \end{array} \quad \text{donc}$$

$$\begin{array}{ll} & z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{US}\mathrm{p}(2n) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \overline{C} & \overline{D} \\ -\overline{A} & -\overline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & C = -\overline{B} \text{ et } D = \overline{A} \end{array}$$

■

3.5 Exemples en petites dimensions

– $\mathcal{O}(1) = \{\pm 1\}$ et $\mathcal{O}^+(1) = \{1\}$,
– $\mathcal{U}(1) = \mathcal{S}^1$ et $\mathcal{SU}(1) = \{1\}$,
– $\mathcal{SO}(2) \simeq \mathcal{U}(1)$

4 Décomposition polaire et applications

Définition 4.1 (*Matrice hermitienne*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$. On dit que M est hermitienne si $M^* = M$ et on note $\mathcal{H}_n$ leur ensemble.
On dit que $M \in \mathcal{H}_n$ est positive (resp. définie positive) si pour tout vecteur colonne X on a $X^*MX \geq 0$ (resp. $X^*MX > 0$) et on note $\mathcal{H}^+$ (resp. $\mathcal{H}^{++}$) leur ensemble.

Remarque : Cette définition a bien un sens car $M \in \mathcal{H}_n \Rightarrow X^*MX \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\begin{array}{llll} \overline{X^*MX} & = {}^t X\overline{MX} & = {}^t({}^t X\overline{MX}) & \text{(car de taille } (1,1)) \\ & = X^*MX & = X^*M^*X & \text{(car } M^* = M) \end{array}$$

Définition 4.2 (*Matrice symétrique*)

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques (réelles). On a :

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{H}_n \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{S}_n^+ = \mathcal{H}_n^+ \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{S}_n^{++} = \mathcal{H}_n^{++} \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Théorème 4.1 (*Décomposition polaire 1*)

1. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice unitaire $U \in \mathcal{U}(n)$ et une unique matrice hermitienne définie positive $P \in \mathcal{H}_n^{++}$ telles que : $A = UP$.*
2. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice orthogonale $U \in \mathcal{O}(n)$ et une unique matrice symétrique définie positive $P \in \mathcal{S}^{++}(n)$ telles que : $A = UP$.*

Lemme 4.2 (*Racine carrée*)

Soit $M \in \mathcal{H}^+(n)$. Il existe une unique matrice $N \in \mathcal{H}^+(n)$ telle que $N^2 = M$.
De plus $M \in \mathcal{H}^{++}(n) \Longleftrightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{H}^{++}(n)$.
On a un énoncé équivalent avec les matrices symétriques.

Démonstration du lemme 4.2 :

(existence) Soit $M \in \mathcal{H}^+(n)$, il existe $(d_1, \cdots, d_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $P \in \mathcal{U}(n)$ telles que $M = P^{-1} \operatorname{Diag}(d_1, \cdots, d_n)P$. Les d_i sont bien des réels positifs car si $X \neq 0$ tel que $MX = d_iX$ alors $X^*MX = d_iX^*X = d_i\|X\|^2 \geq 0$ car $M \in \mathcal{H}^+(n)$.

(unicité) Si $N^2 = M$ alors $NM = MN = N^3$, or si deux matrices commutent, elles sont diagonalisables dans une même base.

$$N = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P \quad \text{et} \quad M = P^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} P$$

Donc $N^2 = M \Longleftrightarrow \forall i, \lambda_i^2 = d_i$. Comme $N \in \mathcal{H}^+(n)$ les λ_i sont positifs donc $d_i = \sqrt{\lambda_i}$ d'où l'unicité.

(cas réel) La preuve est la même ■

Démonstration du théorème 4.1 :

1. **(existence)** Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On remarque que $(A^*A)^* = A^*A$, ie $A^*A \in \mathcal{H}_n$. De plus pour tout vecteur colonne X non nul, on a $X^*A^*AX = (AX)^*(AX) = \|AX\|^2 > 0$ (car A invesible). Ainsi $A^*A \in \mathcal{H}^{++}(n)$. D'après le lemme, il existe $P \in \mathcal{H}^{++}(n)$ telle que $P^2 = A^*A$. Il reste à vérifier que $U := AP^{-1} \in \mathcal{U}(n)$.
   En remarquant que $(AP^{-1})^*(AP^{-1}) = (P^{-1})^*A^*AP^{-1} = (P^*)^{-1}A^*AP^{-1}$.
   On a $U^*U = P^{-1}A^*AP = P^{-1}P^2P^{-1} = \mathrm{Id}$ donc $U \in \mathcal{U}(n)$.

(unicité) Si $A = UP$ avec $U \in \mathcal{U}(n)$ et $P \in \mathcal{H}^{++}(n)$ alors :
$A^*A = (UP)^*(UP) = P^*U^*UP = P^*P = P^2$. L'unicité de la racine de A^*A implique l'unicité de P qui implique celle de U.

2. **(cas réel)** La preuve est la même ■

Exemple : En dimension 1, cette décomposition est exactement la forme dite polaire d'un nombre complexe.

Définition 4.3 (*Exponentielle*)

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Exp}: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}\ \textit{(resp. } \mathbb{C})) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}\ \textit{(resp. } \mathbb{C})) \\ & A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array}$$

Proposition 4.3 (*Continuité de l'exponentielle*)

$\mathrm{Exp} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est une application continue (en particulier, elle est bien définie).*

Démonstration :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Banach (un espace vectoriel normé complet, et une algèbre telle que $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$ ce qui est le cas par exemple avec la norme de Frobénius).

La série de fonctions $\sum \frac{A^n}{n!}$ est normalement convergente sur toute boule de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En effet :

$$\forall r > 0,\ \forall A \in \mathrm{B}(0, r) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \sum \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|) \leq \exp(r)$$

En particulier, sur chaque boule, la série $\sum \dfrac{A^k}{k!}$ est uniformément convergente, ainsi $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Exp}(A)$ est bien définie, et Exp est limite uniforme de fonctions continues donc Exp est continue. ■

Proposition 4.4

1. $\mathrm{Exp}(0) = \mathrm{Id}$.
2. *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *commutent, alors* $\mathrm{Exp}(A + B) = \mathrm{Exp}(A)\,\mathrm{Exp}(B)$.
3. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, alors* $\mathrm{Exp}(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{Exp}(A)^{-1} = \mathrm{Exp}(-A)$.

Démonstration :

1. $\mathrm{Exp}(0) = O^0 + \frac{1}{2}O^1 + \cdots = \mathrm{Id}$ par convention.
2. Comme $\displaystyle\sum_{m,p\in\mathbb{N}} \frac{\|A^m B^p\|}{m!p!}$ converge, la famille $\displaystyle\left(\frac{A^m}{m!} \times \frac{B^p}{p!}\right)_{m,p\in\mathbb{N}}$ est absolument sommable :

$$\sum_{m,p\in\mathbb{N}} \frac{A^m B^p}{m!p!} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{A^m}{m!} \times \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{B^p}{p!} = \mathrm{Exp}(A)\,\mathrm{Exp}(B) \qquad (5)$$

$$\sum_{m,p\in\mathbb{N}} \frac{A^m B^p}{m!p!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!} \frac{B^q}{q!} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k!}\right) \underbrace{\sum_{p+q=k} \frac{(p+q)!}{p!q!} A^p B^q}_{=(A+B)^k \text{ (Newton)}} = \mathrm{Exp}(A + B) \qquad (6)$$

3. A et $(-A)$ commutent dont $\mathrm{Exp}(A)\,\mathrm{Exp}(-A) = \mathrm{Exp}(A - A) = \mathrm{Exp}(0) = \mathrm{Id}$. ■

Proposition 4.5

1. *$\mathrm{Exp}(A^*) = \mathrm{Exp}(A)^*$ et $\mathrm{Exp}({}^tA) = {}^t\mathrm{Exp}(A)$.*
2. *$\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Exp}(PAP^{-1}) = P\,\mathrm{Exp}(A)P^{-1}$.*
3. *Si A est symétrique (resp. hermitienne), alors $\mathrm{Exp}(A)$ est symétrique (resp. hermitienne) définie positive.*
4. *Si A est anti-symétrique (resp. anti-hermitienne), alors $\mathrm{Exp}(A)$ est orthogonale (resp. unitaire).*
5. *Si A est diagonale (resp. triangulaire), alors $\mathrm{Exp}(A)$ est diagonale (resp. triangulaire).*
6. *Si A est nilpotente alors $\mathrm{Exp}(A)$ est unipotente.*
7. *$\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de A si et seulement si e^λ est valeur propre de $\exp(A)$. De plus les multiplicités sont les mêmes.*

Rappels :
A est anti-symétrique (resp. anti-hermitienne) si ${}^tA = -A$ (resp. $A^* = -A$).
A est nilpotente (resp. unipotente) si il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0$ (resp. $(A - \mathrm{Id})^m = 0$).

Démonstration :

1. (exo)
2. (exo)
3. Si ${}^tA = A$ alors A est diagonalisable. Donc il exsite $P \in \mathcal{GL}_n$ tel que $A = P\,\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P^{-1}$. Ainsi $\mathrm{Exp}(A) = P\,\mathrm{Diag}\,(\exp(\lambda_1), \cdots, \exp(\lambda_n))P^{-1}$ qui est définie positive.
4. Si ${}^tA = A$ alors $\mathrm{Exp}({}^tA)\,\mathrm{Exp}(A) = \mathrm{Exp}(-A + A) = \mathrm{Id}$. Le raisonnement est identique sur $\mathbb{C}$ pour la conjugaison.
5. A triangulaire $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N},\ A^m$ triangulaire $\Rightarrow \mathrm{Exp}(A)$ triangulaire.
6. Si $A^m = 0$, $\mathrm{Exp}(A) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{A^p}{p!} = \mathrm{Id} + A\sum_{p=1}^{m-1} \frac{A^p}{p!}$ donc $(\mathrm{Exp}(A) - \mathrm{Id})^m = A^m(\sum_{p=1}^{m-1} \frac{A^p}{p!})^m = 0$.

... Remarque : les matrices strictement triangulaires supérieures sont nilpotentes.

7. Si $AX = \lambda$ alors $\mathrm{Exp}(A)X = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{A^mX}{m!} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^mX}{m!} = \exp(\lambda)X$. Il reste à montrer que les multiplicités sont conservées.
   On peut se ramener à l'étude des blocs de Jordan car $\mathrm{Exp}(PMP^{-1}) = P\,\mathrm{Exp}(M)P^{-1}$. Soit alors $J_\lambda = \lambda\,\mathrm{Id} + K_n$ un bloc de Jordan. on va montrer que la seule valeur propre de $\mathrm{Exp}(J_\lambda)$ est $\exp(\lambda)$.

$$K_n^m = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Exp}(K_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & \cdots & 1/(n-1)! \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1/6 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1/2 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme Id et K_n commutent, on a $\mathrm{Exp}(J_\lambda) = \exp(\lambda)\,\mathrm{Id}\,\mathrm{Exp}(K_n)$. ■

Proposition 4.6

$\mathrm{Exp} : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n^{++}$ est un homémorphisme (de même pour $\mathrm{Exp} : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n^{++}$).

Démonstration : On a déjà vu que $\mathrm{Exp}(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n^{++}$.

(injectivité) On a déjà vu que λ_i est une valeur propre de M de multiplicité n_i si et seulement si $\exp(\lambda_i)$ est valeur propre de $\mathrm{Exp}(M)$ de même multiplicité n_i. De plus x est vecteur propre de M si et seulement s'il est vecteur propre de $\mathrm{Exp}(M)$.
Dans notre cas $M \in \mathcal{H}_n$ est diagonalisable et $\mathrm{Exp}(M) \in \mathcal{H}_n^{++}$ l'est aussi dans une même base. Soit alors $\mathrm{Exp}(M) = \mathrm{Diag}\,(\mu_1, \cdots, \mu_n)$, tous les μ_i étant positifs on peut écrire $\mu_i = \exp\lambda_i$ de manière unique (car $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R^*}_+$ est bijective). Ce qui prouve l'unicité de $M = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

(surjectivité) Soit $M \in \mathcal{H}_n^{++}$. Il existe $U \in \mathcal{U}(n)$ telle que $U^*MU = \text{Diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Comme $\lambda_i > 0$ on peut considérer $\ln(\lambda_i)$. On pose $N = \text{Diag}\,(\ln(\lambda_n), \cdots, \ln(\lambda_1))$.
Donc $M = U\,\text{Diag}\,(\exp(\ln(\lambda_n)), \cdots, \exp(\ln(\lambda_1)))U^* = U\,\text{Exp}(N)U^* = \text{Exp}(UNU^*) \in \text{Im}\,(\text{Exp})$.

(bicontinuité) Exp étant bijective (et continue) on peut définir sa réciproque Log : $\mathcal{H}_n^{++} \to \mathcal{H}_n$. Il reste donc à montrer que Log est continue.

(choix de la norme) On considère la norme suivante sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\|M\| = \text{Sup}_{\|x\|=1} \|Mx\|$ avec $\|x\|^2 = \sum(x_i^2)$.
En particulier, si $M \in \mathcal{H}_n$, M est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres $(e_1, \cdots, e_n)$ donc :

$$\|Mx\|^2 \leq \sum |\lambda_i|^2|x_i|^2 \leq \sum(\text{Sup}\,|\lambda_i|^2)x_i^2 \leq (\text{Sup}\,|\lambda_i|^2)\|x\|^2 \Longrightarrow \|M\| \leq \operatorname*{Sup}_{\lambda_i \in \text{Sp}(M)} |\lambda_i|$$

En considérant λ_j la valeur propre maximale et e_j le vecteur propre associé, on a :

$$\|Me_j\| = |\lambda_j| \Longrightarrow \|M\| \geq \operatorname*{Sup}_{\lambda_i \in \text{Sp}(M)} |\lambda_i| \text{ et donc : } \|M\| = \operatorname*{Sup}_{\lambda_i \in \text{Sp}(M)} |\lambda_i|$$

(définition d'une suite) On considère une suite $(H_p)_p \subset \mathcal{H}_n^{++}$ convergente vers $H \in \mathcal{H}_n^{++}$. Cette suite est donc bornée et il existe ρ_+ tel que toutes les valeurs propres de H_p sont majorées par ρ_+. Comme l'inversion d'une matrice invesible est un homéomorphisme, on applique le même raisonnement à la suite convergente $(H_p^{-1})_p$ et on construit ρ_- qui majore toutes les valeurs propres de H_p^{-1}.
En remarquant que $\text{Sp}(H_p^{-1}) = \{\lambda^{-1}{}^tq\lambda \in \text{Sp}(H_p)$ on déduit que toute valeur propre de H_p appartient à l'intervalle $[1/\rho_-; \rho_+]$.

(suite image) On définit la suite des images $(\text{Log}(H_p))_p$. Comme $\text{Sp}(\text{Log}(H_p)) = \ln \text{Sp}(H_p)$ on déduit $\|\text{Log}(H_p)\| \leq \text{Max}\{\ln(1/\rho_-), \ln(\rho_+)\}$.
En particulier la suite des images est bornée et admet une valeur d'adhérence $M = \lim H_{p_k}$. On conclut en montrant l'unicité de cette valeur d'adhérence :

$$\text{Exp}(M) = \text{Exp}(\lim \text{Log}(H_{p_k})) = \lim \text{Exp}(\text{Log}(H_{p_k})) = \lim H_{p_k} = \lim H_p = H$$

(remarque) La valeur d'adhérence M est bien dans $\mathcal{H}_n$ car c'est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ∎

Théorème 4.7 (*Décomposition polaire 2*)

Les applications suivantes sont des homéomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \times \mathcal{U}(n) &\longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (H, U) &\longmapsto \text{Exp}(H)U \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{S}_n \times \mathcal{O}(n) &\longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (S, O) &\longmapsto \text{Exp}(S)O \end{aligned}$$

Application :

$\mathcal{H}_n$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$. De plus en considérant les choix de coefficients sa dimension est n^2, on obtient le résultat suivant (même raisonnement pour $\mathcal{S}_n$) :

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

En particulier comme $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}^+(n) \sqcup \mathcal{O}^-(n)$ est la décomposition en composantes connexes, on obtient que : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R}) \sqcup \mathcal{GL}_n^-(\mathbb{R})$ est aussi la décomposition en composantes connexes.

Index