

SÉQUENCE 1

CALCUL MATRICIEL

SÉANCE 1

Cours – Généralités et opérations de bases



. La grande majorité des calculs se feront sur calculatrice. Nous présenterons ceci lors de la séance suivante de TD.

Contenu

1. Qu'est-ce qu'une matrice.....	1
2. Généralités et définitions	1
3. Addition des matrices.....	2
4. Multiplication d'une matrice par un réel	2
5. Produit de matrices	3
6. Puissance de matrice.....	3
7. Tutoriel succinct d'utilisation de la calculatrice	4

1. Qu'est-ce qu'une matrice

Une matrice est un simple tableau à deux dimensions. Chacun des éléments de ce tableau est un nombre. Par exemple :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec ce tableau, on peut effectuer plusieurs opérations de bases :

- additions et soustractions de plusieurs matrices ;
- multiplications d'une matrice par un réel ;
- multiplications de plusieurs matrices entre elles ;
- calcul de l'inverse d'une matrice qui sera l'équivalent d'une « division ».

2. Généralités et définitions

Définitions : On appelle matrice réelle de dimension $n \times p$ tout tableau de nombres réels ayant n lignes et p colonnes. Par exemple M_1 est une matrice 2×3 . L'ensemble des nombres peut être écrit entre des parenthèses ou entre des crochets et dans des cas plus rares seuls.

Cas particuliers :

- Si le nombre de ligne est égal au nombre de colonne c'est une matrice carrée. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ est une matrice carrée d'ordre 2}$$

- Si $n=1$ alors c'est une matrice ligne. Par exemple :

$$(3 \ 8 \ 12)$$

- Si $p=1$ alors c'est une matrice colonne. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 54 \end{pmatrix}$$

 Le coefficient de la matrice est défini par son numéro de ligne et son numéro de colonne.
Le coefficient s'écrit a_{ij} où $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq p$. Par exemple dans M_1 , $a_{13} = 3$.

Définition : Une matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0 est appelée matrice nulle.

Définition : Une matrice dont seuls les éléments diagonaux sont égaux à 1 et le reste est égal à 0 est appelée matrice unité ou identité notée I_n . Les matrices identités sont des matrices carrées.

Par exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition : Égalité de matrices. Deux matrices sont égales si les coefficients des matrices sont égaux deux à deux.

Pour que $\begin{pmatrix} a & 6 \\ 9 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$ il faut que $a = 1$ et que $b = -5$

3. Addition des matrices

Définition : Soient $M = (m_{ij})$ et $T = (t_{ij})$ deux matrices de même dimension $n \times p$. Alors $M + T = (m_{ij} + t_{ij})$. Il en est de même pour la soustraction.

Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ 13 & 38 \end{bmatrix}$$

 Les deux matrices doivent avoir la même dimension pour que l'opération soit possible.

Propriétés : L'ensemble des propriétés que vous connaissez déjà sur les réels se retrouve ici. À savoir :

- La commutativité : $T + M = M + T$
- L'associativité : $(T + M) + A = T + (M + A)$
- L'élément neutre (la matrice nulle 0 (cf 2.)) $T + 0 = 0 + T = T$

4. Multiplication d'une matrice par un réel

Définition : Soient $M = (m_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$ et k un réel. Alors $k \cdot M = (k \cdot m_{ij})$.

Par exemple :

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}$$

Vous noterez que le signe de multiplication habituel (\times ou $*$) est remplacé ici par un (\cdot) . Il est fortement conseillé de respecter cette règle pour faire la différence avec la multiplication des matrices.

Propriétés : c et d deux réels. M et T deux matrices.

- $c.(d.M) = (cd).M$
- $(c + d).M = c.M + d.M$
- $c.(T + M) = c.T + c.M$

5. Produit de matrices

Définition : Soient $M = (m_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$ et $T = (t_{ij})$ une matrice de dimension $p \times q$. Le produit des deux matrices se note $M \times T$ ou MT et se définit par :

$$M \times T = \sum_{k=1}^p m_{ik} \cdot t_{kj} = a_{ij}$$

En classe de BTS, la notion de somme Σ n'est pas au programme donc cette définition est difficile à comprendre. Nous allons alors utiliser un exemple pour voir la méthode de calcul « à la main » même si la majorité des calculs se feront à la calculatrice.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 5 \times 6 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 1 \times 1 + 5 \times 2 \\ \square & \square \end{pmatrix} \\ \text{ensuite } \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 33 \\ 3 \times 3 + 9 \times 6 & 11 \end{pmatrix} \text{ ensuite } \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 11 \\ 63 & 3 \times 1 + 9 \times 2 \end{pmatrix} \\ &\text{ce qui donne } \begin{pmatrix} 33 & 11 \\ 63 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Propriétés : soient M, P et Q trois matrices et k un réel

- Associativité : $(MP)Q = M(PQ)$
- Distributivité : $M(P + Q) = MP + MQ$ et $(P + Q)M = PM + QM$
- $(k.M)P = k.(MP)$
- Élément neutre : In (matrice identité ou unité) $MI = IM = M$



Attention :

- Commutativité : $MP \neq PM$ elle n'est pas vérifiée dans la majeure partie des cas. Il faudra donc faire attention à l'ordre dans lequel vous ferez votre calcul.

$$\text{On a } \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{par contre } \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 75 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

- Si $AB = 0$ cela ne veut pas forcément dire que $A=0$ ou $B=0$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ or ici ni la première ni la deuxième matrice est nulle}$$

6. Puissance de matrice

Définition : Soit A une matrice.

$$\text{On a } A \times A \times \dots \times A = A^n$$

Ce qui peut être écrit autrement

$$A^{n-1} \times A = A \times A^{n-1} = A^n$$

On notera

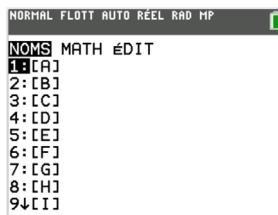
$$A^0 = I_n \text{ et que } A^1 = A$$

7. Tutoriel succinct d'utilisation de la calculatrice

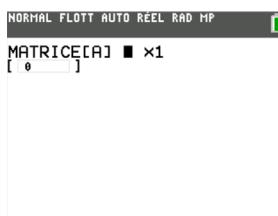
Voici un tutoriel succinct de l'utilisation de la calculatrice selon sa marque (Texas Instrument ou Casio).

Texas Instrument

Pour entrer une matrice sur une calculatrice Texas instrument, il faut presser sur **matrice** et on obtient :



Avec la **flèche droite** vous sélectionnez l'onglet **édit**. Puis pressez entrer sur le nom de la matrice. Et vous obtenez :

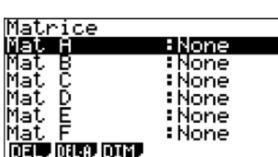


Vous entrez le nombre de ligne et de colonne voulues et vous pouvez remplir la matrice. Ensuite vous pressez sur **2^{nde} + quitter**. Pour presser sur matrice et obtenir le menu présenté dans la première image.

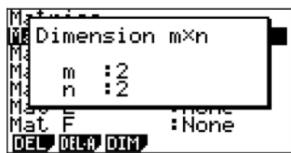
Pour faire des calculs, Il faut rester dans l'onglet **NOMS**, puis sélectionner la matrice voulue en utilisant les **flèches** puis presser sur **entrer**. Le reste du calcul se fait comme un calcul classique en utilisant les 3 opérations +, - et * ainsi que la puissance ^.

Casio

Sur une calculatrice Casio, pressez sur la touche **menu et choisir** . Puis vous appuyez sur **F3**. Vous obtenez ceci :



Vous sélectionnez la matrice en utilisant les **flèches** puis en appuyant sur **EXE**. On obtient :



Vous entrez le nombre de lignes et de colonnes voulues puis vous pouvez remplir la matrice et presser sur **EXIT** pour finir. À partir de ce moment, vous pouvez remplir une deuxième matrice ou sortir vers le calcul en pressant sur **EXIT**.

Pour faire des calculs, vous pouvez utiliser les 3 opérations possibles (+, - et * ainsi que la puissance ^) et pour faire référence à la matrice, il faut presser sur **SHIFT 2** et **ALPHA A** si vous voulez la matrice A. Il suffit de remplacer A par le nom de la matrice.



Les cours du CNED sont strictement réservés à l'usage privé de leurs destinataires et ne sont pas destinés à une utilisation collective. Les personnes qui s'en serviraient pour d'autres usages, qui en feraient une reproduction intégrale ou partielle, une traduction sans le consentement du CNED, s'exposeraient à des poursuites judiciaires et aux sanctions pénales prévues par le Code de la propriété intellectuelle. Les reproductions par reprographie de livres et de périodiques protégés contenues dans cet ouvrage sont effectuées par le CNED avec l'autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

CNED, BP 60200, 86980 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

© CNED 2020

876M1TEWB0120

