# Analyse
# des Signaux et des Images

David BOULINGUEZ

# Déroulement du module

- Les séances de cours vont se dérouler :
  - En partie de façon interactive
    - 1 séance introductive en présentiel
    - 2 séances de questions/réponses en présentiel
    - Forums d'échange
  - En partie en asychrone
    - Capsules vidéos (SPOC - Small Private Online Course) sur la plateforme Junia Learning

- 7 séances de Travaux Dirigés en présentiel (dont plusieurs sous Matlab)

- 3 séances de Travaux Pratiques en présentiel

# Déroulement du module

- Dans ce mode d'apprentissage
  - Vous pourrez travailler en partie à votre rythme ...
  - ... Mais avec des jalons (les TD, les TP, les évaluations)
    - Junia Learning vous montre l'enchainement des modules à travailler avant les séances de TD, de TP ...
  - Des séances sont prévues dans le planning pour que vous ayez du temps pour cet auto-apprentissage
  - 2 séances de questions/réponses sont prévues
    - Elles se préparent à l'avance !
  - Il est très important de ne pas attendre pour me poser des questions
    - Sur le forum de discussion de Junia Learning
    - Essentiel pour la réussite, pour s'assurer de sa bonne compréhension, pour avancer dans le module, et l'acquisition de compétences

# Déroulement du module

- Aspects techniques :
  - Vous êtes tous inscrits au module sur Junia Learning
    - Vous y trouverez tous les supports (cours, TD, TP)

Vous y trouverez toutes les capsules vidéos pour chaque chapitre

# Evaluations du module

- Pour vous autoévaluer : des QCM en ligne
- Partie Théorique : 80% de la note finale
  - 1 Devoir Surveillé → contrôle de connaissances et évaluation par application directe du cours
  - 1 Partiel avec 2ème session → évaluation de la compréhension, des compétences acquises et de la prise de recul
- Partie Pratique : 20% de la note finale
  - Evaluation individuelle écrite associée au partiel portant sur les 3 TP (sans 2ème session)

# Plan du cours

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
    1) L'intérêt de la convolution
    2) Les Représentations Fréquentielles
        A. Séries de Fourier
        B. Transformées de Fourier – Cas des signaux d'énergie finie
        C. Transformée de Fourier généralisée
        D. Utilisation de la Transformée de Fourier pour l'analyse spectrale
        E. Conclusion sur les représentations fréquentielles
    3) La Numérisation
        A. Etapes de la numérisation
        B. Théorème de Shannon ou comment échantillonner un signal correctement
        C. Numérisation : cas particulier des Images

# Plan du cours

4) La Transformée en Cosinus Discret
5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   A. Motivations et expression de la TFD
   B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$
   C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications
   D. Notion de fenêtrage
   E. Cas particulier des signaux périodiques
   F. Application de la TFD aux Images
6) Corrélation et Densité Spectrale

3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Ce qu'il faut connaître avant ce module …

- Maîtrise des outils mathématiques classiques
  - Calcul intégral
  - Calcul matriciel
  - **Calcul avec nombres complexes (module, phase)**
  - Fonctions réelles
- Notions de bases vues en CSI3/CIR3/CNB3
  - Les distributions et les propriétés associées
  - Les Séries/Transformées de Fourier
  - Les variables aléatoires

# I. Introduction

- Qu'est-ce-qu'un signal ?
- Classification des signaux
- Exemples
- Qu'est-ce que le traitement du signal ?
- Place du traitement du signal dans la formation

# Qu'est-ce-qu'un signal ?

- *« le signal, support de l'information, est le moyen de communication des hommes entre eux et avec leur environnement. L'évolution des moyens de traitement du signal, en dotant l'humanité d'instruments de plus en plus précis et efficaces, participe à l'expansion de tous les secteurs d'activités et de connaissance »*

*extrait de : « Théorie du signal »,*

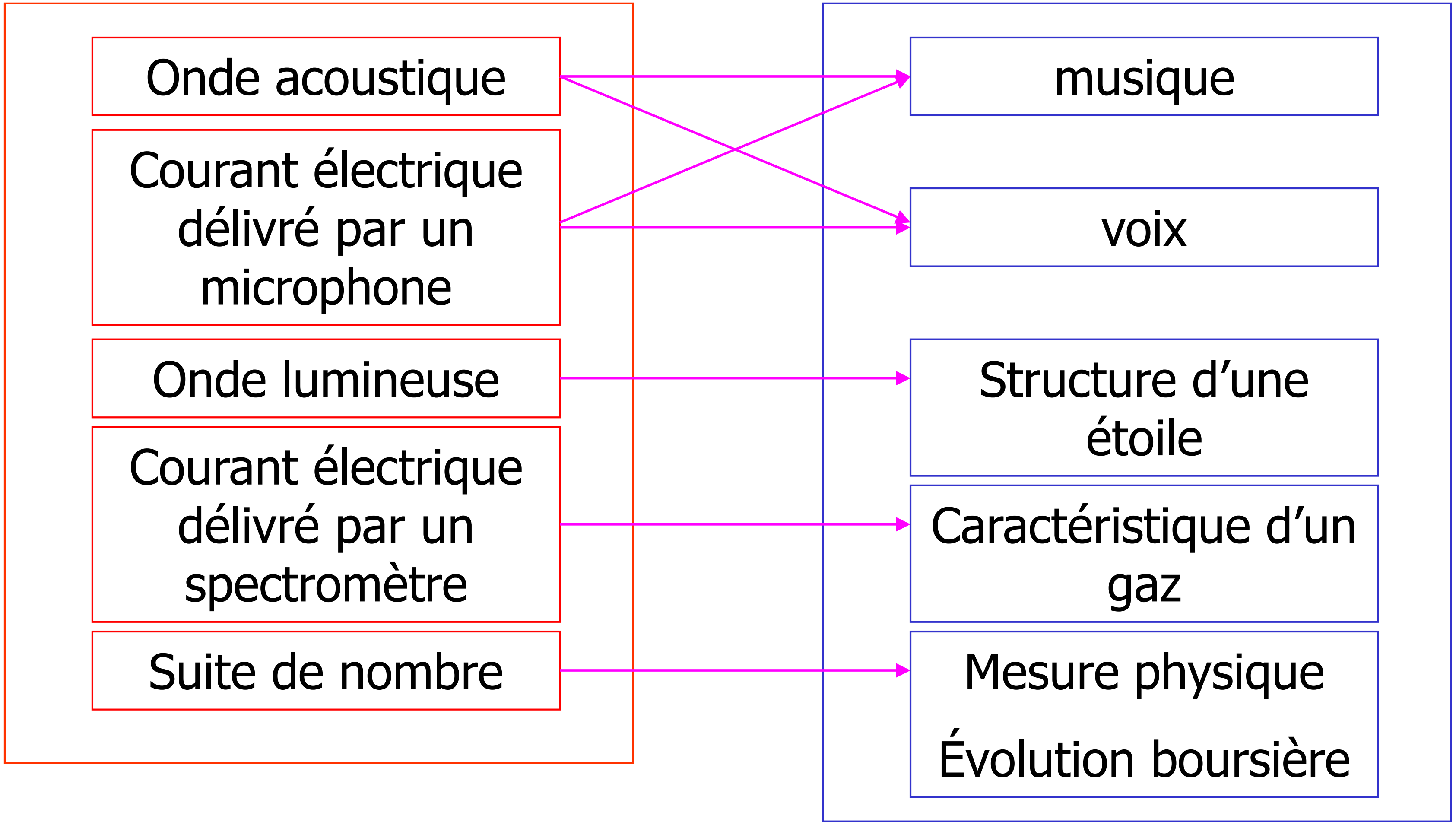
*Jean-Louis Lacoume*

# Qu'est-ce-qu'un signal ?

- Définition d'un signal :
  - On appelle **signal**, toute grandeur physique qui **varie** au cours du temps ou dans l'espace. L'information que constitue cette grandeur se **propage** véhiculant par la même l'énergie accompagnant le phénomène physique.

# Qu'est-ce-qu'un signal ?

- Un signal est une fonction qui dépend d'un ou de plusieurs paramètres et qui contient une information.



# Classification des signaux ?

- Classement dimensionnel des signaux = nombre de variables indépendantes de la fonction
  - Unidimensionnel : tension électrique V(t)
  - Bidimensionnel : image statique B(x,y) = brillance
  - Tridimensionnel :  film noir et blanc B(x,y,t)
- Classement phénoménologique
  - Déterministe : l'évolution temporelle peut être <u>**parfaitement**</u> prédite à partir d'un modèle mathématique
  - Aléatoire: comportement imprévisible $\Rightarrow$ description probabiliste (variable aléatoire)

Tout signal physique comporte une composante aléatoire

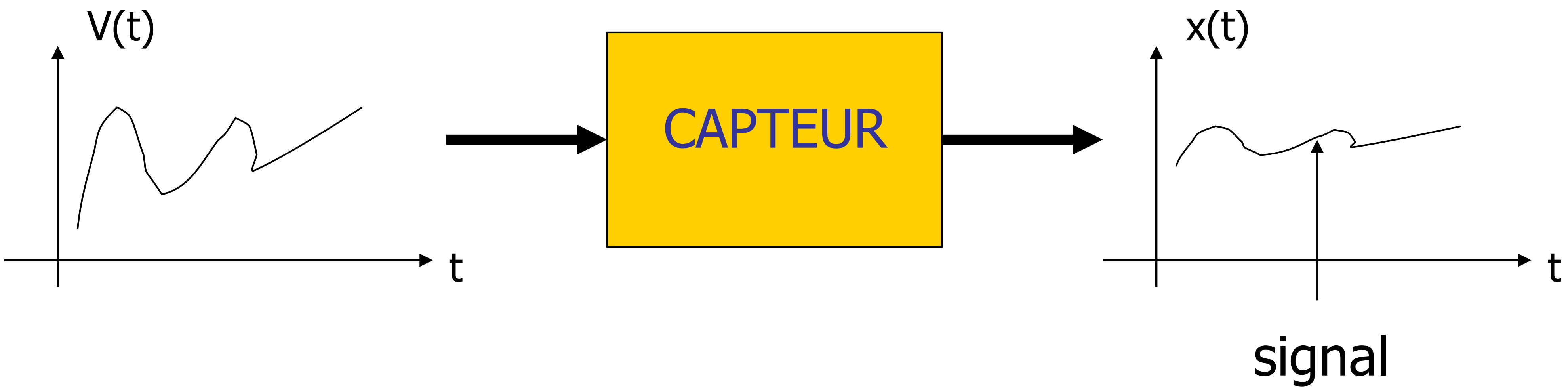
# Classification des signaux ?

- Signal à temps continu / signal à temps discret
  - Un signal à temps continu existe à chaque instant t, il peut être représenté par une fonction **continue** à support compact.
  - Un signal à temps discret, appelé signal échantillonné n'est défini qu'à des instants dénombrables $t_k$ par $f(t_k) = f_k$ . Généralement $t_k$ est un multiple d'une quantité fixe appelé période d'échantillonnage Te

- Il existe d'autre type de classification possible …
  - Signaux à énergie finie ou à puissance finie
  - Signaux à valeurs continues ou à valeurs discrètes
  - etc

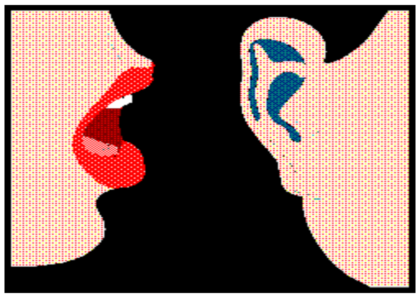
# Acquisition d'un signal physique

- Utilisation d'un capteur
- Un capteur est un dispositif qui permet de transformer les variations V du phénomène physique qui nous intéresse en une tension x

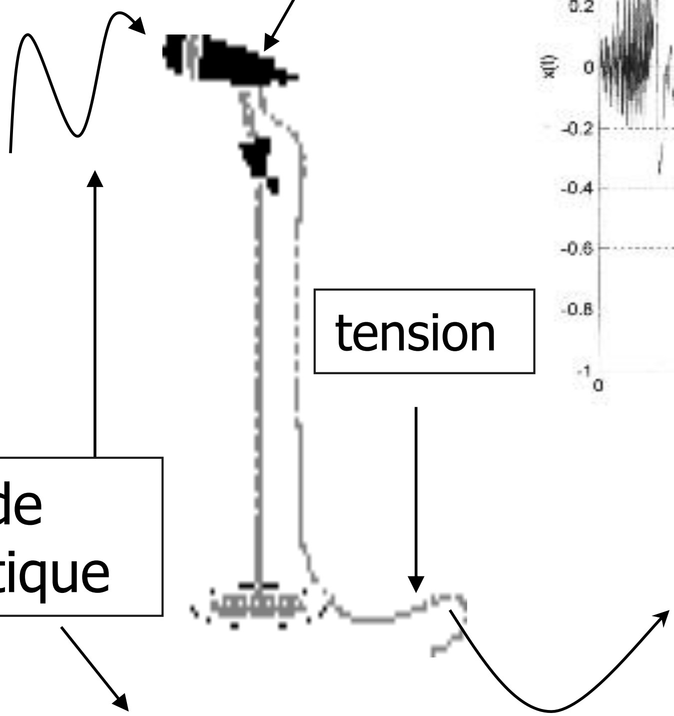


# Exemples de signaux en physique

**Parole**



capteur

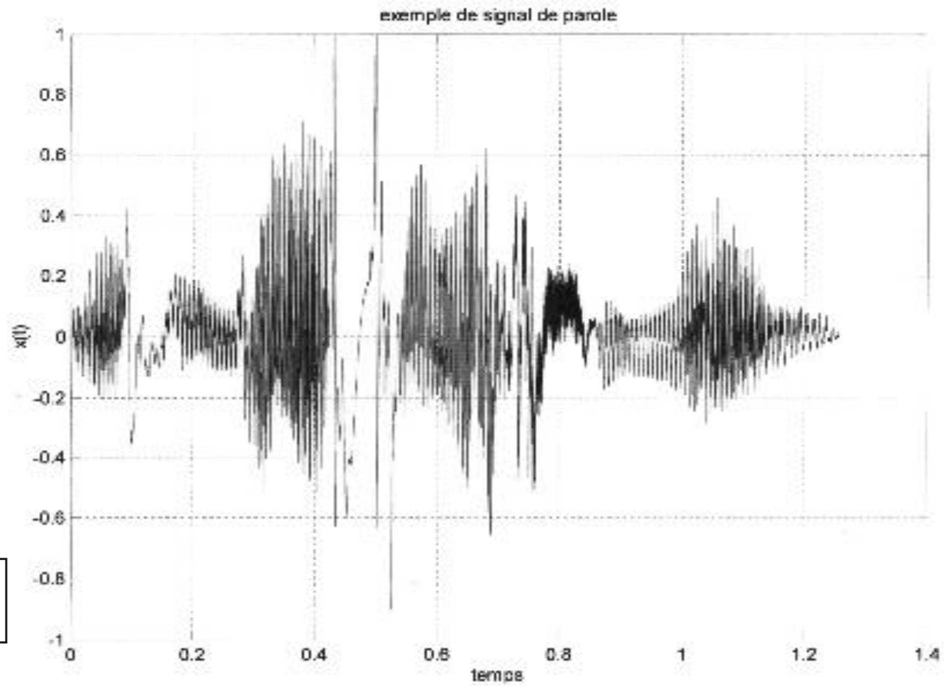


tension

Onde acoustique

parole

bruit




Traitement du signal :

⇒ Échantillonnage

⇒ Analyse spectrale

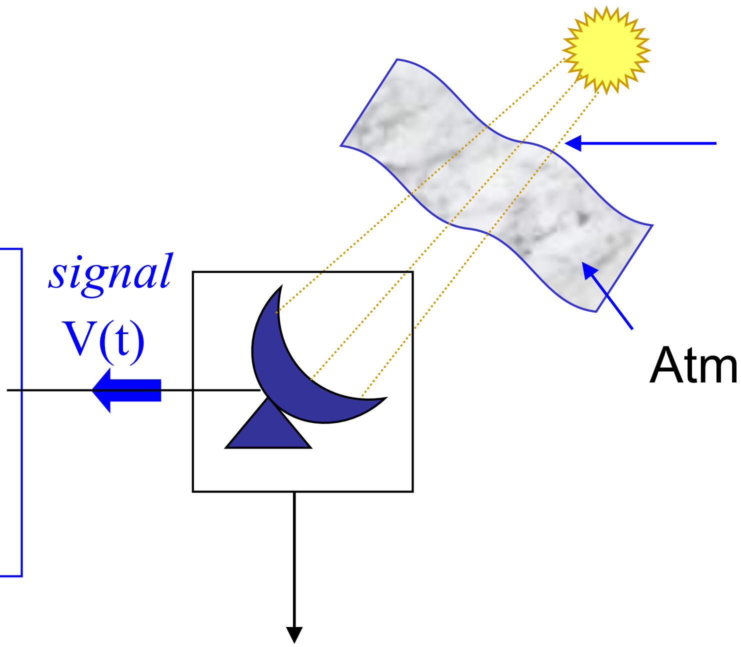
⇒ Reconnaissance de phonèmes

⇒ Codage

# Exemples de signaux en physique

**Astronomie**

**Traitement du Signal. :**
⇒ échantillonnage
⇒ filtrage
⇒ analyse spectrale
...



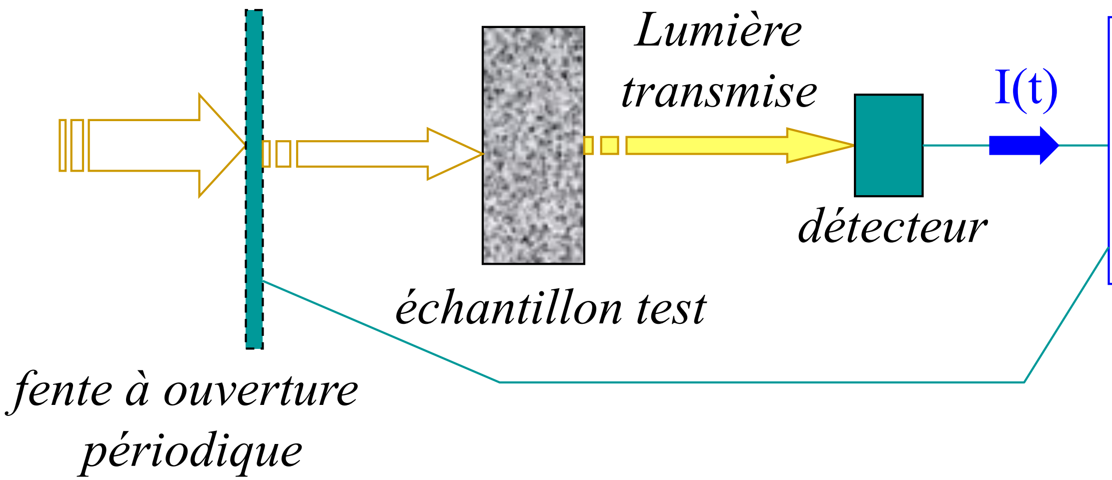

Ondes électromagnétiques
⇒ informations sur l'étoile

Atmosphère ⇒ bruit

Capteur ⇒ électronique d'acquisition ⇒ bruit (thermique, grenaille, …)

# Exemples de signaux en physique

**Physique du solide : caractérisation de matériaux**

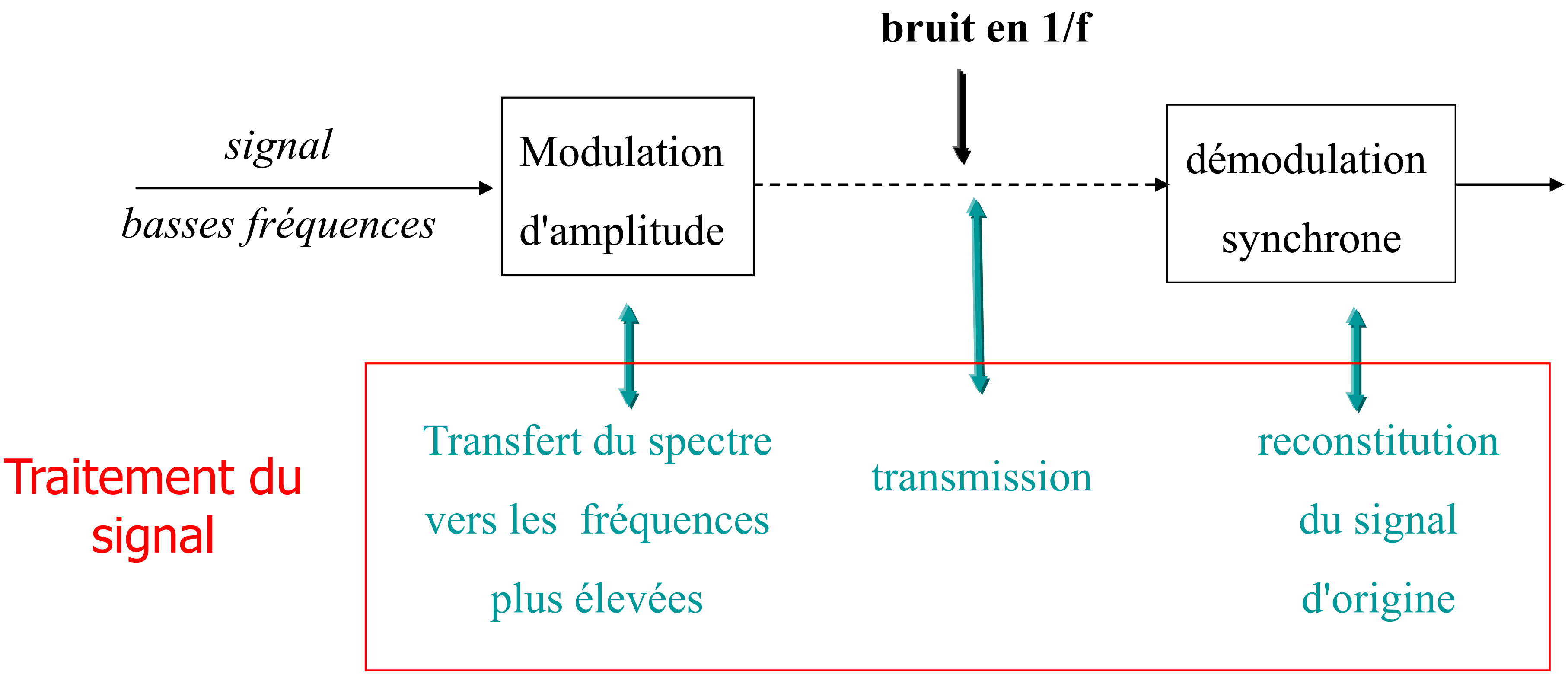



**Traitement du Signal :**
⇒ analyse spectrale
⇒ détection synchrone
...

# Exemples de signaux en télécommunication

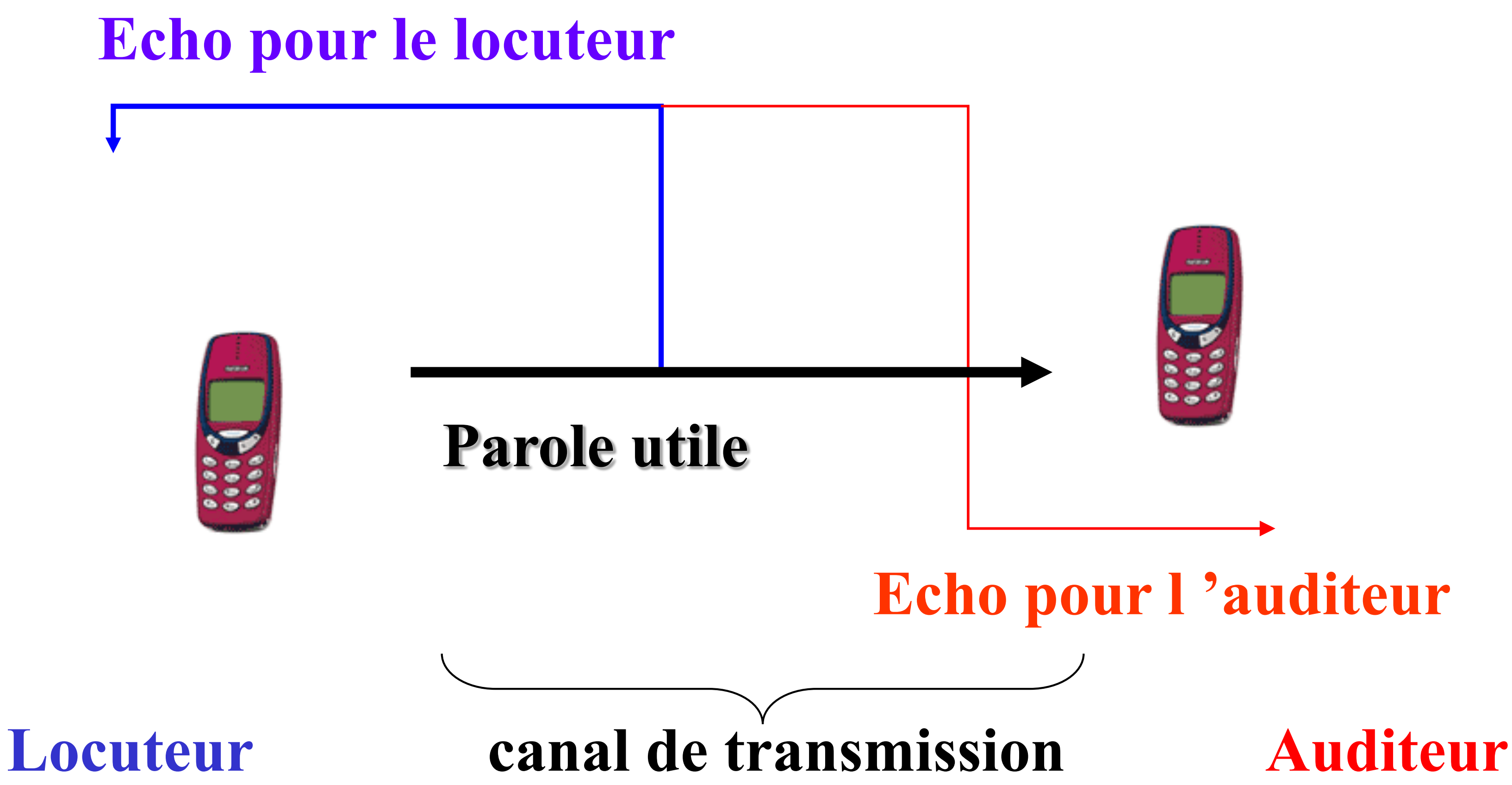
**Transmission**

(composants électroniques, support physique pour la transmission,....)



# Exemples de signaux en télécommunication

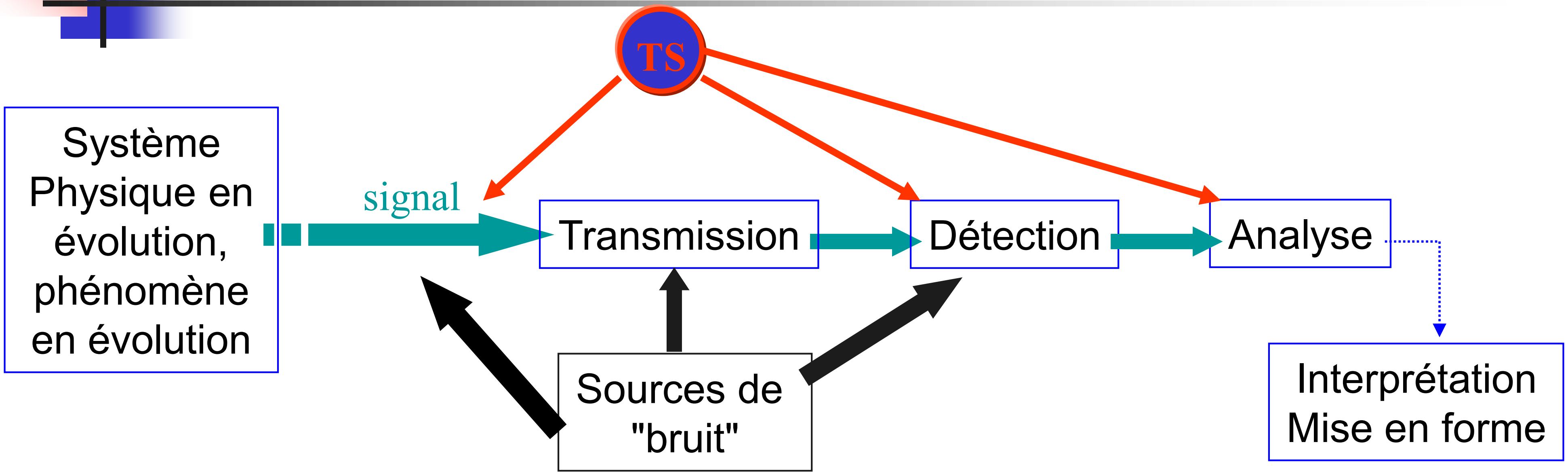
**Transmission : annulation d'écho**



# Le traitement du signal

- Si la théorie du signal a pour objet la modélisation des signaux et des systèmes, le **Traitement du Signal** est constitué de l'ensemble des techniques permettant de **produire, de modifier et d'interpréter les signaux**

# Le traitement du signal




**Traitement du signal = procédure pour**

- extraire l'information (filtrage, détection, estimation, analyse spectrale, reconnaissance de formes…)
- mettre en forme le signal (modulation, échantillonnage….)
  (forme adaptée à la transmission ou au stockage)
- ...

Les méthodes de traitement du signal sont *indépendantes* de la *nature physique* du signal et des variables libres

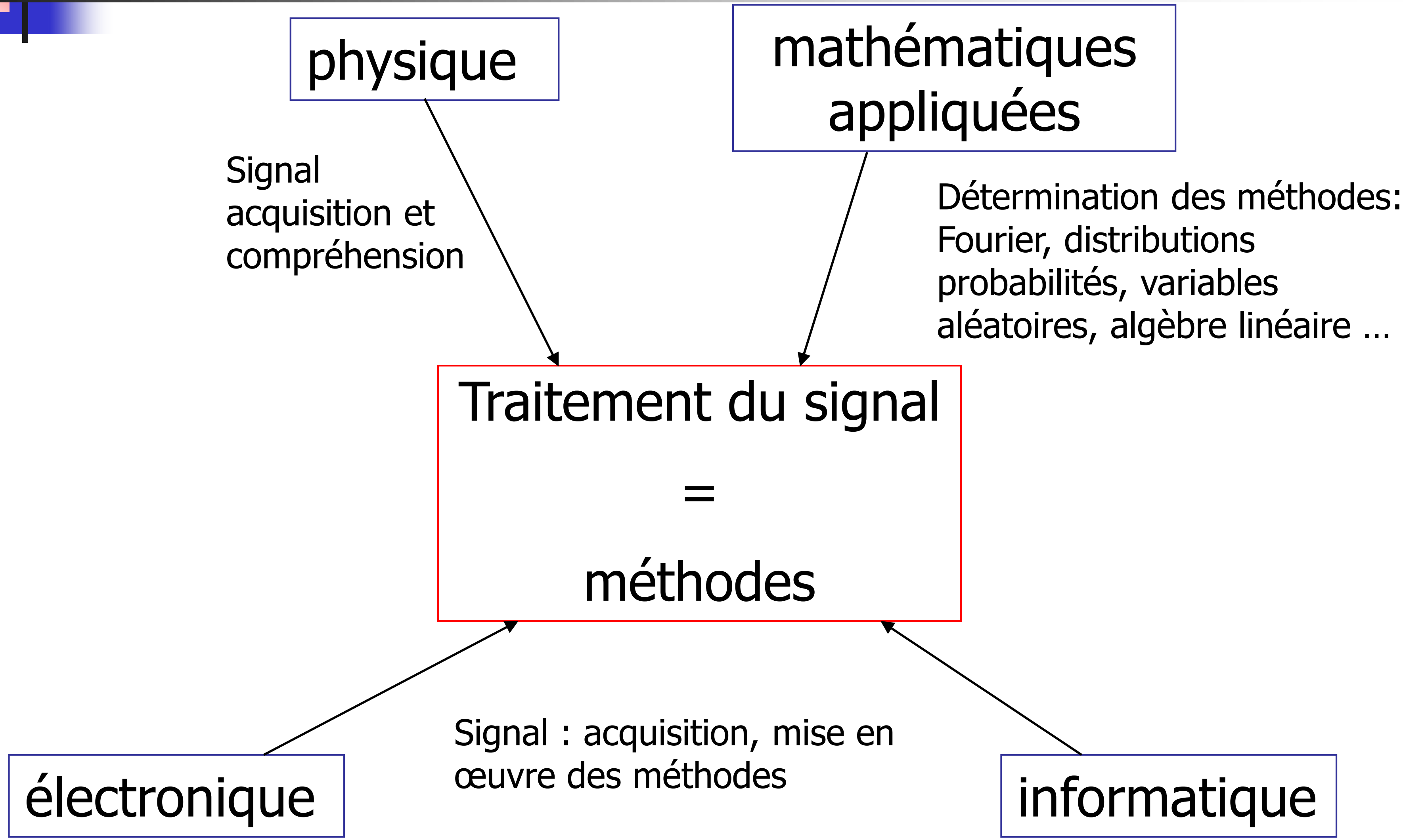
# Le traitement du signal

- 6 fonctions essentielles du traitement du signal
  - **L'analyse** : isoler les composantes essentielles d'un signal pour mieux en comprendre ses origines et sa nature
  - **La mesure** : estimer la valeur d'une grandeur caractéristique associée au signal
  - **Le filtrage** : éliminer certaines composantes d'un signal (ex : réduire les parasites d'un signal sonore)
  - **La détection** : extraire un signal d'un bruit de fond qui lui est superposé

# Le traitement du signal

- **L'identification** : complémentaire à la détection et sert à effectuer un classement d'un signal observé (ex : la reconnaissance de formes)
- **La synthèse** : opération inverse de l'analyse qui sert à recréer un signal de forme appropriée

# Le traitement du signal et les autres disciplines

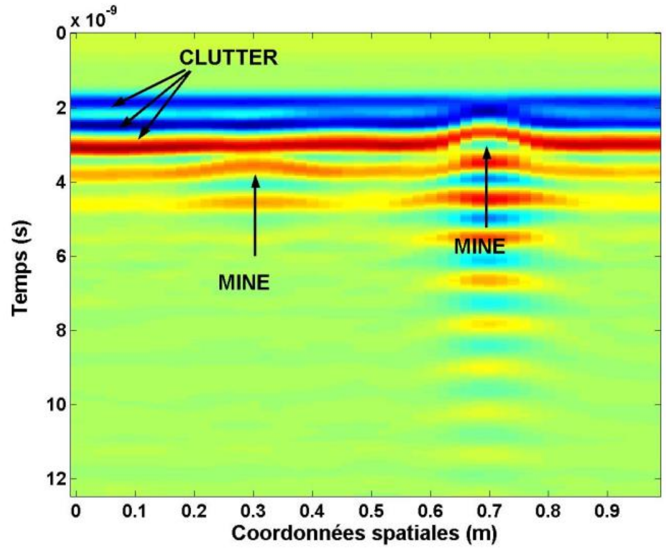



Secteurs industriels concernés : tous !!

# Quelques exemple de travaux en traitement du signal à l'ISEN

## Traitement d'images: Réduction de clutter sur des Bscans

Bscan: image d'une tranche verticale de sol enregistrée par un radar à pénétration de sol




Clutter: ensemble de phénomènes indésirables (ex: couplage entre les antennes du radar)

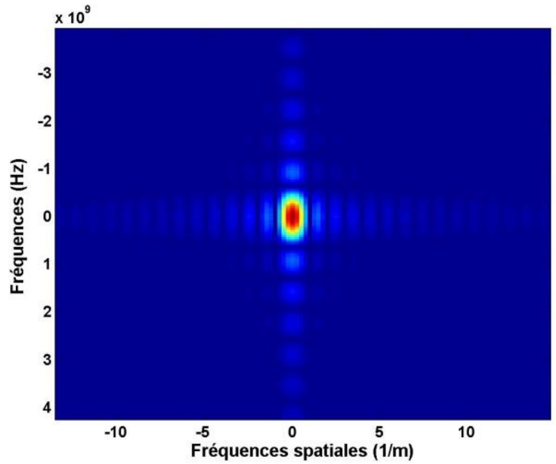
But du traitement: éliminer le clutter pour faciliter la détection des mines antipersonnel

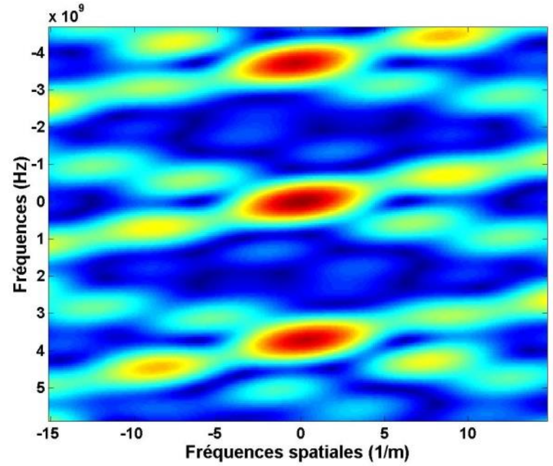
# Analyse spectrale des signaux

Calculé à partir d'une transformée de Fourier 2D

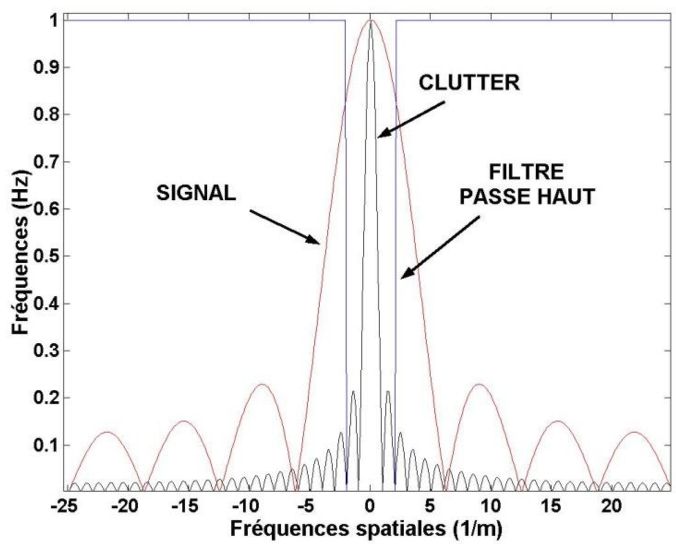
Spectre du clutter

Spectre du signal caractéristique d'une mine

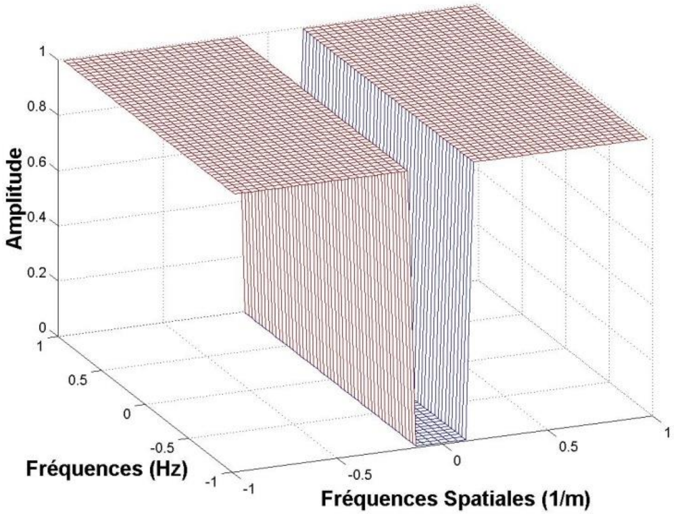


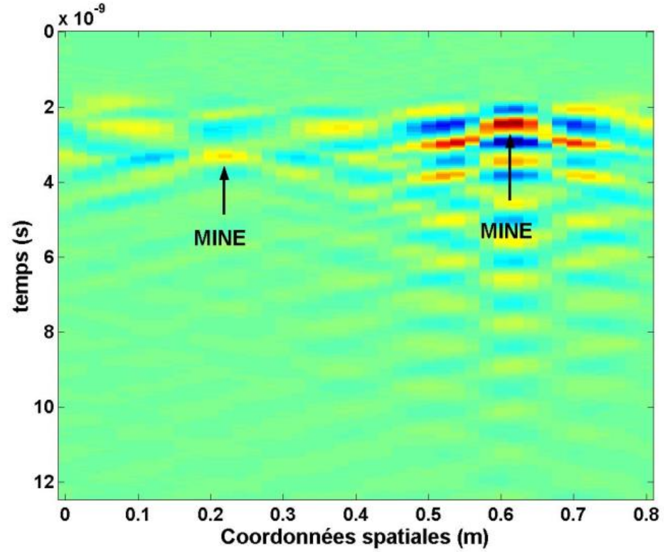

Comparaison des spectres pour f=0



## Gabarit du filtre en 2D

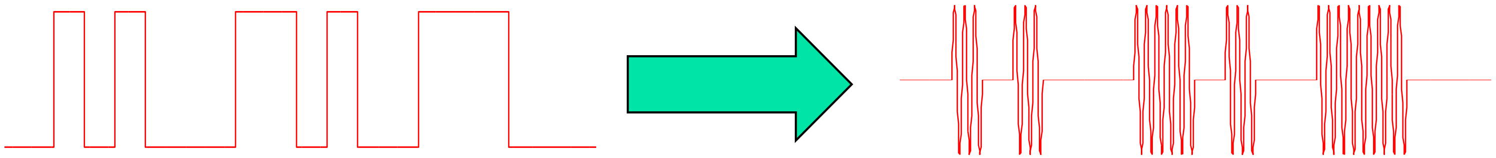



## Bscan après filtrage

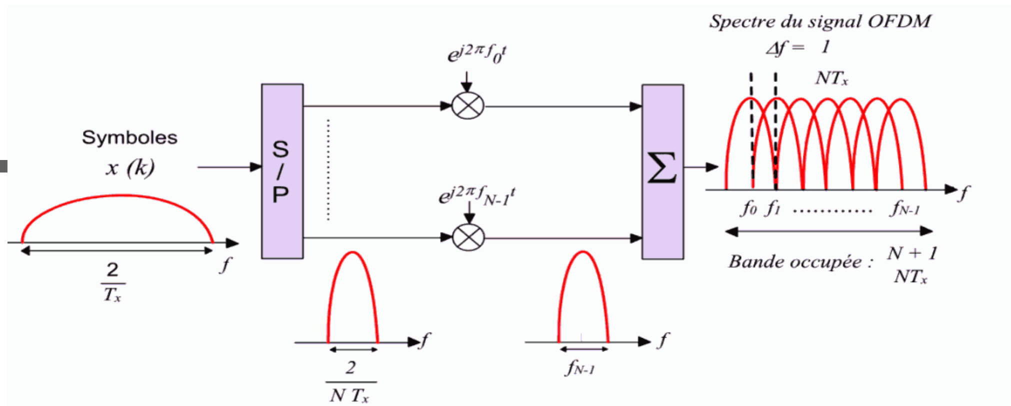


# Autre exemple de travaux en cours à l'ISEN: Modulation adaptative à multiples porteuses orthogonales avec accès multiple par code

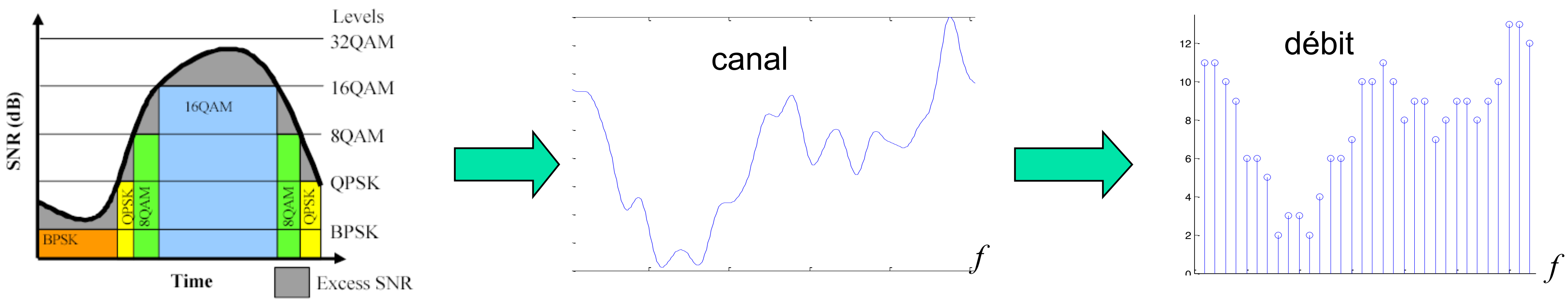
**Modulation**



**À porteuses multiples orthogonales** (comme le WiFi 802.11g et l'ADSL)




**Adaptative** = adapter le débit et donc la modulation employée au canal (cf. ADSL)



# Remise en contexte

## Lors de la séance précédente...

Introduction générale aux concepts du traitement de signal

- Qu'est ce qu'un « Signal » ?
- Les grandes catégories des signaux
  - Notamment le classement phénoménologique
    - Signal Déterministe / Signal Aléatoire
- L'acquisition d'un signal
- Qu'est ce que le traitement d'un signal ?
  - Notamment les grandes fonctions

# Remise en contexte

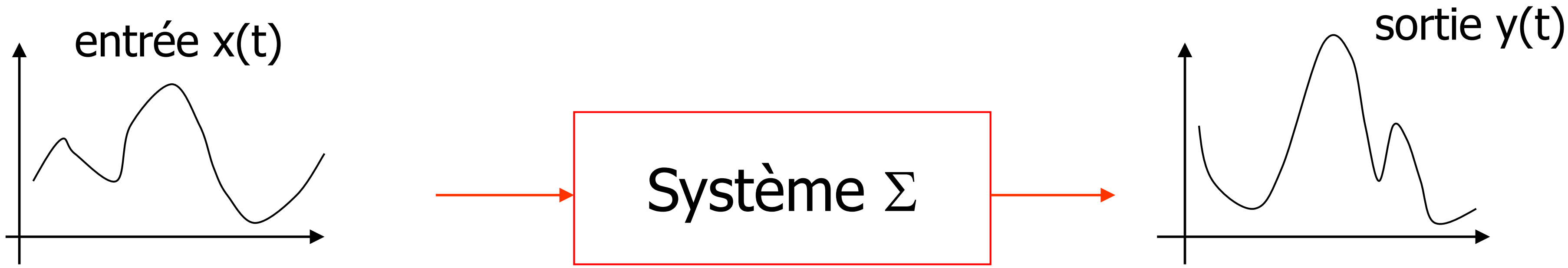
- Signal Déterministe :
  - C'est un signal dont l'évolution temporelle peut être **parfaitement** prédite à partir d'une équation mathématique
  - On peut donc écrire une équation du type x(t) = ...
  - Entièrement reproductible et calculable à chaque instant temporel « t »
  - Exemple $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$
- Signal Aléatoire :
  - C'est un signal contenant une ou plusieurs variables lui donnant un comportement imprévisible et non reproductible
  - Il n'existe pas d'équation mathématique pour décrire l'évolution temporelle
  - On peut décrire les comportements du signal grâce aux probabilités

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# 1. De l'intérêt de la convolution

- La notion de « traitement du signal » est proche de celle de « système »
  - Un système peut être vu comme une boîte noire décrit par une relation entre entrée et sortie




  - Pour ces systèmes on s'intéresse à trois propriétés fondamentales

# De l'intérêt de la convolution

- La linéarité

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t)=\Sigma(x_1(t)) \\ y_2(t)=\Sigma(x_2(t)) \end{array}\right\} \Rightarrow y(t)=\Sigma(\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t))=\lambda_1\Sigma(x_1(t))+\lambda_2\Sigma(x_2(t))$$

- La continuité

$$y_n(t)=\Sigma(x_n(t))$$

$$x(t)=\lim_{n\to+\infty} x_n(t) \Rightarrow \Sigma(x(t))=\Sigma\left(\lim_{n\to+\infty} x_n(t)\right)=\lim_{n\to+\infty} y_n(t)=\lim_{n\to+\infty}\Sigma(x_n(t))$$

alors le système est dit continu

# De l'intérêt de la convolution

- La stationnarité
  - Le système est dit stationnaire s'il a toujours le même comportement dans le temps
  - L'opérateur $\Sigma$ doit donc être invariant par translation dans le temps :

$$y(t) = \Sigma(x(t)) \Rightarrow y(t+\tau) = \Sigma(x(t+\tau))$$

- Un système linéaire, continu et stationnaire est appelé **filtre**

# De l'intérêt de la convolution

- Caractérisation temporelle d'un filtre
  - Par définition on appelle réponse impulsionnelle la réponse du système à une entrée de type **impulsion de Dirac**
  - Si on note h(t) cette réponse impulsionnelle, on a :

$$h(t) = \Sigma(\delta(t))$$

  - Si on soumet une entrée quelconque x(t) au système linéaire, continu, stationnaire
    - En vertu, des propriétés de la distribution de Dirac (que l'on reverra plus loin dans le cours) on peut écrire :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du$$

# De l'intérêt de la convolution

- Calculons alors la sortie du système

$$y(t) = \Sigma(x(t)) = \Sigma\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\Sigma(\delta(t-u))du \qquad \text{par} \qquad \text{linéarité}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du \qquad \text{par} \qquad \text{stationnarité}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du}$$

# De l’intérêt de la convolution

- Cette relation définit l’opération de convolution de deux signaux et se note *

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Calcul pratique de la convolution
  - Réaliser d’abord h(t-u) ce qui revient à retourner la fonction h(u) et à la décaler de t
  - Réaliser le produit x(u) par h(t-u)
  - Intégrer ce produit

# De l’intérêt de la convolution

- Propriétés de la convolution
  - Commutativité $x*y = y*x$
  - Distributivité $x*(y+z)=x*y+x*z$
  - Associativité $x*(y*z)=(x*y)*z=x*y*z$
  - Element neutre la fonction Dirac est élément neutre
  - Translation $x(t)*\delta(t-a)=x(t-a)$

# Remise en contexte

## Lors de la séance précédente...

L'intérêt de la convolution en traitement du signal

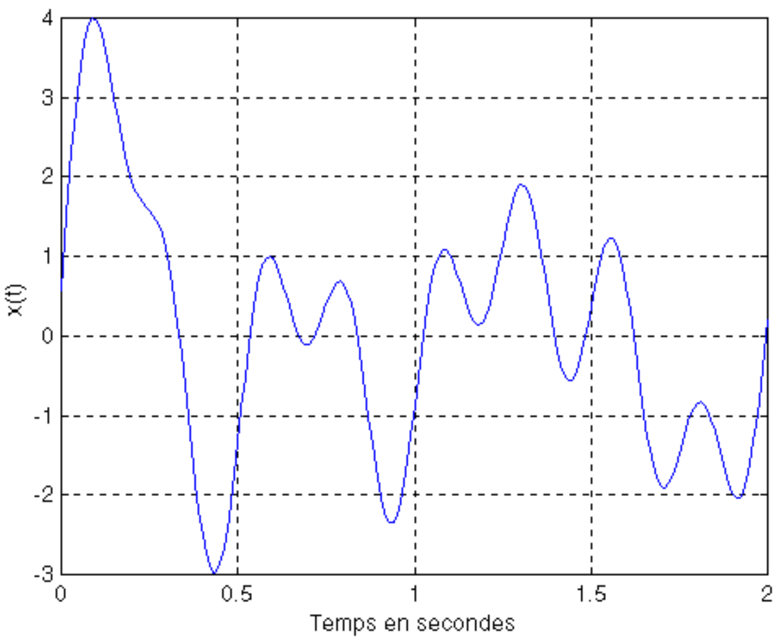
- Calcul de l'expression temporelle du signal en sortie d'un filtre à partir
  - Du signal en entrée de ce filtre
  - Et de la réponse impulsionnelle du filtre
- Définition du produit de convolution
- Propriétés liées à la convolution

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

## 2.Représentation fréquentielle d'un signal

- Insuffisance de la fonction (= représentation) temporelle x(t)




$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} \sin(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

$f_n$ ?

$\varphi_n$ ?

# Représentation fréquentielle d'un signal

- On souhaite pouvoir représenter le signal dans un autre domaine que celui temporel

$\{x(t), X(\nu)\}$

Deux représentations mais un seul signal

= un seul phénomène physique

$\boxed{\text{2 représentations de la même information}}$

# Représentation fréquentielle d'un signal

- L'analyse harmonique (ou fréquentielle) d'un signal est donc devenue un instrument majeur en traitement du signal
- L'espace des fréquences est encore appelé domaine de Fourier par l'utilisation de la transformation de Fourier
- L'analyse de Fourier consiste à décomposer un signal en une somme de signaux élémentaires particuliers faciles à mettre en oeuvre et à observer: des fonctions sinus et cosinus ou des fonctions $e^{2\pi jft}$
- Dans un premier temps nous rappellerons les décompositions en série de Fourier pour le signaux périodiques puis nous définirons la transformée de Fourier pour les signaux quelconques

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
      A. Séries de Fourier
      B. Transformées de Fourier – Cas des signaux d'énergie finie
      C. Transformée de Fourier généralisée
      D. Utilisation de la Transformée de Fourier pour l'analyse spectrale
      E. Conclusion sur les représentations fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# A. Série de Fourier

- Les séries de Fourier ont un intérêt très « mathématique » permettant d'accéder à une expression temporelle des signaux périodiques
- Notre objectif :
  - Trouver un intérêt pour l'analyse fréquentielle des signaux périodiques

# A. Série de Fourier

- Soit x(t) une fonction <u>périodique de période T</u>
  - On montre que x(t) peut être décomposée sous la forme d'une série :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt$$

$$bn = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt$$

  - $a_0/2$ représente la valeur moyenne de la fonction
  - $f_0=1/T$ est appelée fréquence propre ou fondamentale
  - $f_n=nf_0=n/T$ sont les fréquences harmoniques de rang n

# Série de Fourier

- Propriétés :
  - Si la fonction est paire, alors $b_n=0$
  - Si la fonction est impaire, alors $a_n=0$
  - Si x(t) est réel alors $a_n=a_{-n}$ et $b_n=b_{-n}$
  - La décomposition en série de Fourier est unique

- Cette décomposition classique a un intérêt très limité en traitement du signal

# Série de Fourier

- Exemple : $x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin^2(2\omega_0 t)$
- x(t) est bien périodique de période $2\pi/\omega_0$
- x(t) est « presque » déjà décomposé en série de Fourier

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \frac{1 - \cos(4\omega_0 t)}{2}$$

$$= \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} - \frac{\cos(4\omega_0 t)}{2}$$

- On en déduit : a0=1 a1=1 a4=-1/2
  an=0 pour $n \neq 0, 1, 4$
  bn=0

# Série de Fourier

- Série de Fourier complexe d'un signal périodique
  - On définit la série de Fourier suivante car il est en général plus simple de travailler avec des exponentielles complexes

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+2\pi j \frac{n}{T} t}$$

avec

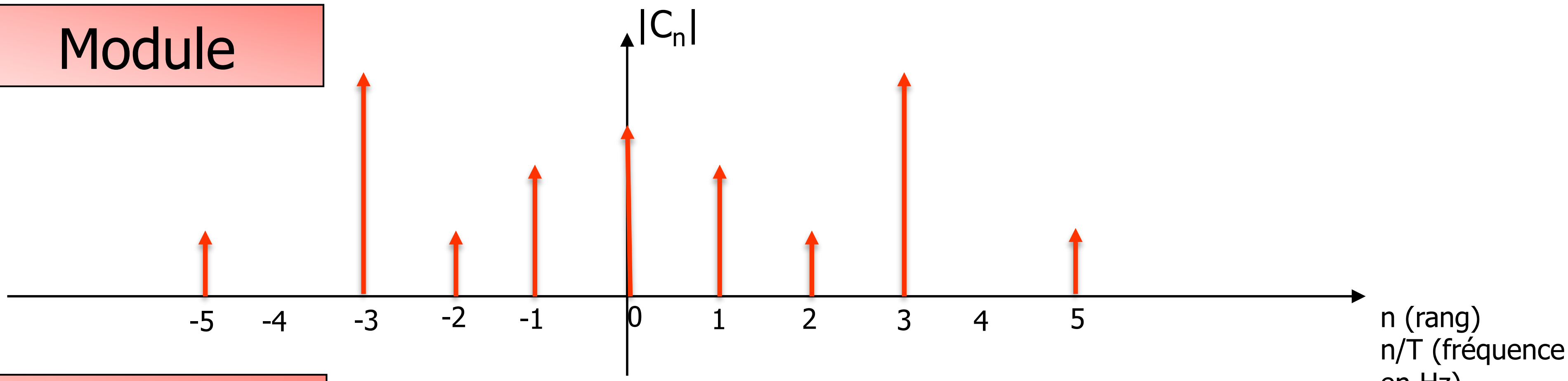
$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-2\pi j \frac{n}{T} t} dt$$

  - Cette décomposition présente déjà davantage d'intérêt en traitement du signal

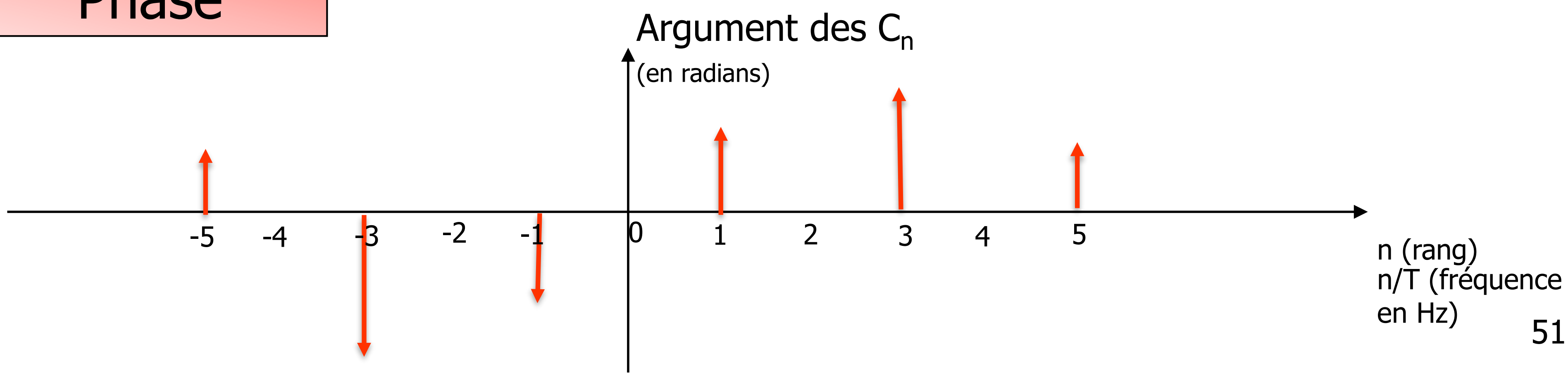
# Série de Fourier

- Les $C_n$ vont surtout permettre une représentation graphique en traitement de signal

Module




Phase



# Série de Fourier

- Les $c_n$ sont en général complexes donc définis par leur module et leur phase (argument)
- Si x(t) est réel on a $c_{-n}=c_n^*$
- $C_0$ est la moyenne de x(t)
- Relations entre $a_n$, $b_n$ et $c_n$ :
  - Pour cela on utilise la formule d'Euler :

$$e^{jx} = \cos(x) + j.\sin(x)$$

# Série de Fourier

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right) = c_n^*$$

# Série de Fourier

- Quelques propriétés utiles pour alléger les calculs
  - Dérivation
    - Soit x(t) un signal périodique de période T et $X_k$ ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$$

sont : $\left(2\pi jk\frac{1}{T}\right)^n X_k$

# Série de Fourier

- Retard
  - Soit x(t) un signal périodique de période T et $X_k$ ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction $x(t-t_0)$ sont :

$$X_k e^{-2j\pi \frac{k}{T} t_0}$$

# Remise en contexte

## Lors de la séance précédente...

Les Séries de Fourier

- Permettent une écriture temporelle différente des signaux périodiques
- Avec coefficients réels ou coefficients complexes
- La décomposition à coefficients complexes permet d'accéder à une représentation fréquentielle
- Intérêt limité des séries de Fourier en traitement du signal
- Autre outil plus large pour les représentations fréquentielles : Transformée de Fourier

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
      A. Séries de Fourier
      B. Transformées de Fourier – Cas des signaux d'énergie finie
      C. Transformée de Fourier généralisée
      D. Utilisation de la Transformée de Fourier pour l'analyse spectrale
      E. Conclusion sur les représentations fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# B. Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier
  - L'objectif est d'accéder une représentation fréquentielle plus générale que les séries de Fourier
  - Il s'agit donc de l'extension de la notion de dualité temps-fréquence au cas des signaux quelconques
    - non nécessairement périodiques
    - mais dans un premier temps **d'énergie finie**
  - Préambule :
    - On appelle **énergie** d 'un signal la quantité

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Si $E_x$ est finie on dit que x(t) est **d 'énergie finie**

# Transformée de Fourier

- On appelle **puissance** d 'un signal la quantité

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Si $P_x$ est finie on dit que x(t) est **de puissance finie**

# Transformée de Fourier

- Si x(t) est <u>d 'énergie finie </u>alors :

Notation minuscule

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

Variable temporelle

Notation majuscule

$$X(\nu) \xrightarrow{TF^{-1}} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{+2i\pi\nu t} d\nu$$

Variable fréquentielle

**<u>Transformée inverse</u>**

# Transformée de Fourier

- $X(\upsilon)$ est en général complexe
  - Prenons l'habitude de toujours faire une représentation en 2 graphiques
    - Amplitude (=Module de la fonction)
    - Phase (=Argument de la fonction)

- On définit ainsi:

$$X(\nu) = |X(\nu)| e^{i\Phi(\nu)} \Longrightarrow \textbf{SPECTRE}$$

$$|X(\nu)| \Longrightarrow \textbf{SPECTRE D 'AMPLITUDE}$$

$$\Phi(\nu) \Longrightarrow \textbf{SPECTRE DE PHASE}$$

# Transformée de Fourier

- Propriétés :
  - Linéarité
  - Si x(t) est réel et paire alors X(υ) est réel et pair
  - Si x(t) est réel et impair alors X(υ) est imaginaire et impair
  - Si $x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon) \Leftrightarrow x(-t) \xrightarrow{TF} X(-\upsilon)$
  - Translation dans le temps :

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$

$$x(t-t_0) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)e^{-2\pi j\upsilon t_0}$$

Démo
par changement
de variable

# Transformée de Fourier

- Changement d'échelle :

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$

$$x(kt) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$$

- Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\upsilon)$
- Dérivation :
  - Par rapport au temps

$$\left\| \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon) \\ \dfrac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j\upsilon)^n X(\upsilon) \end{array} \right.$$

  - Par rapport à la fréquence

$$\left\| \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon) \\ t^n x(t) \xrightarrow{TF} \dfrac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n} \dfrac{1}{(-2\pi j)^n} \end{array} \right.$$

# Transformée de Fourier

- La transformée de Fourier « transforme » donc une fonction **continue** en temps en une fonction **continue** en fréquence
- Elle offre un autre point de vue du même signal
- A ce stade du cours, on a donc défini la transformée de Fourier que si le signal x(t) répond aux 3 conditions suivantes :
  - x(t) borné (pas de valeurs infinies)
  - Les discontinuités de x(t) sont en nombre fini
  - x(t) d'énergie finie

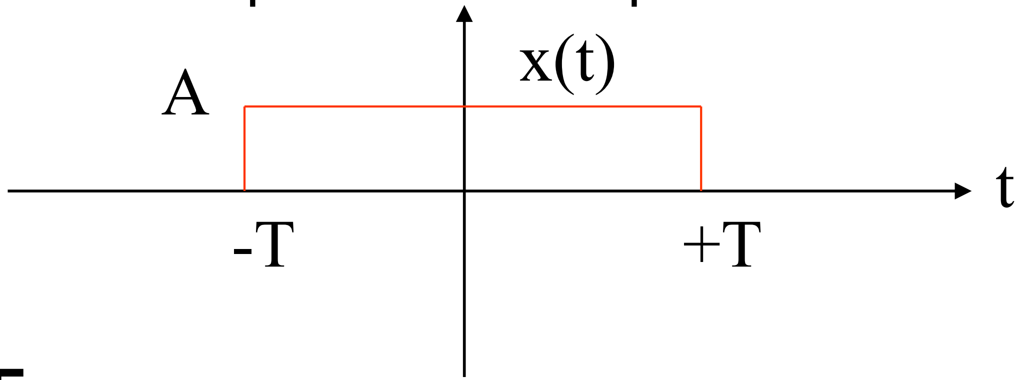
➢ Ceci est donc un peu restrictif (pour le moment…)

# Transformée de Fourier

- Exemple classique :

  La transformée de Fourier d'une porte centrée

  - Soit x(t) la fonction « porte » définie par :



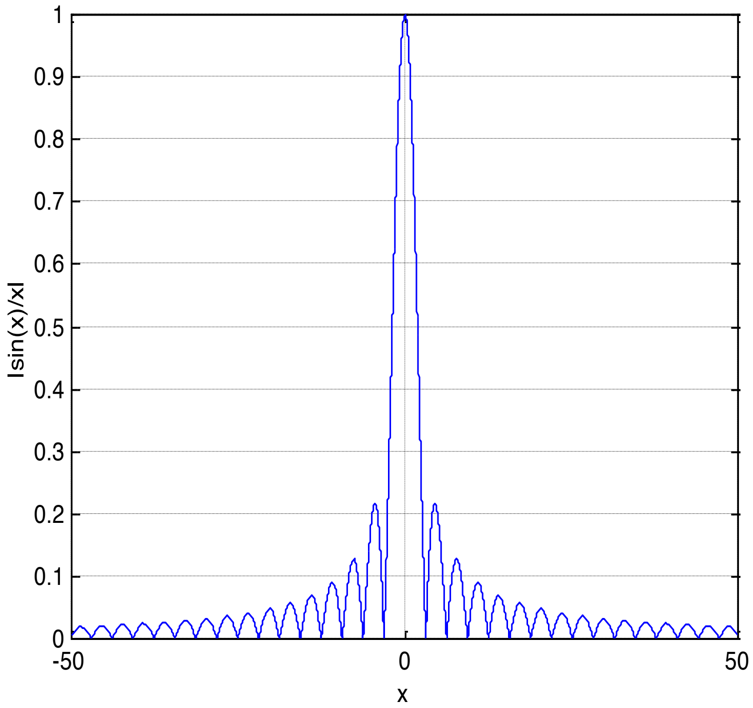

$$E_x = 2A^2T < +\infty$$

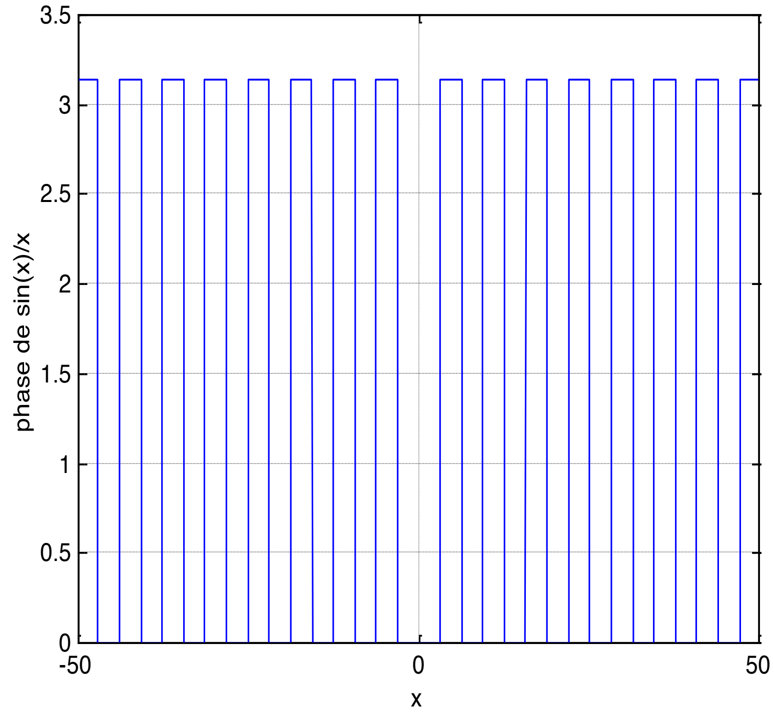
$$X(\nu) = 2AT\frac{\sin(2\pi\nu T)}{2\pi\nu T} = 2AT\,\mathrm{sinc}(2\pi\nu T)$$

Sinus cardinal

# Transformée de Fourier

- A quoi ressemble la fonction sinus cardinal ?
- Amplitude (module) et phase (argument) de la fonction sin(x)/x



# Transformée de Fourier

- Propriétés de sin(x)/x :
  - elle est maximale en $x = 0$
  - elle s'annule pour $x = k\pi$ (k non nul)
  - elle est paire
  - le lobe principal est deux fois plus large que les lobes secondaires
  - $A_n$ = amplitude du nième lobe $|A_n|>|A_{n+1}|$ pour $n > 0$ ou $n = 0$

# Remise en contexte

## Lors de la séance précédente...

La transformée de Fourier (2ème partie)

- Exemple de calcul de la transformée de Fourier de la fonction « porte » en partant de la définition
- Focus sur la fonction Sinus cardinal
- Les propriétés qui permettent d'alléger les calculs

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
      A. Séries de Fourier
      B. Transformées de Fourier – Cas des signaux d'énergie finie
      C. Transformée de Fourier généralisée
      D. Utilisation de la Transformée de Fourier pour l'analyse spectrale
      E. Conclusion sur les représentations fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# C. Transformée de Fourier Généralisée

- Problème posé par cette représentation
  - Telle qu'elle est définie la transformée de Fourier ne s'applique pas au cas des signaux d'énergie infinie et de puissance finie
    - Exemple : les signaux périodiques

$$x(t) = e^{2i\pi\nu_0 t} \qquad x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) \qquad x(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$$

    - Exemple : l'échelon unité

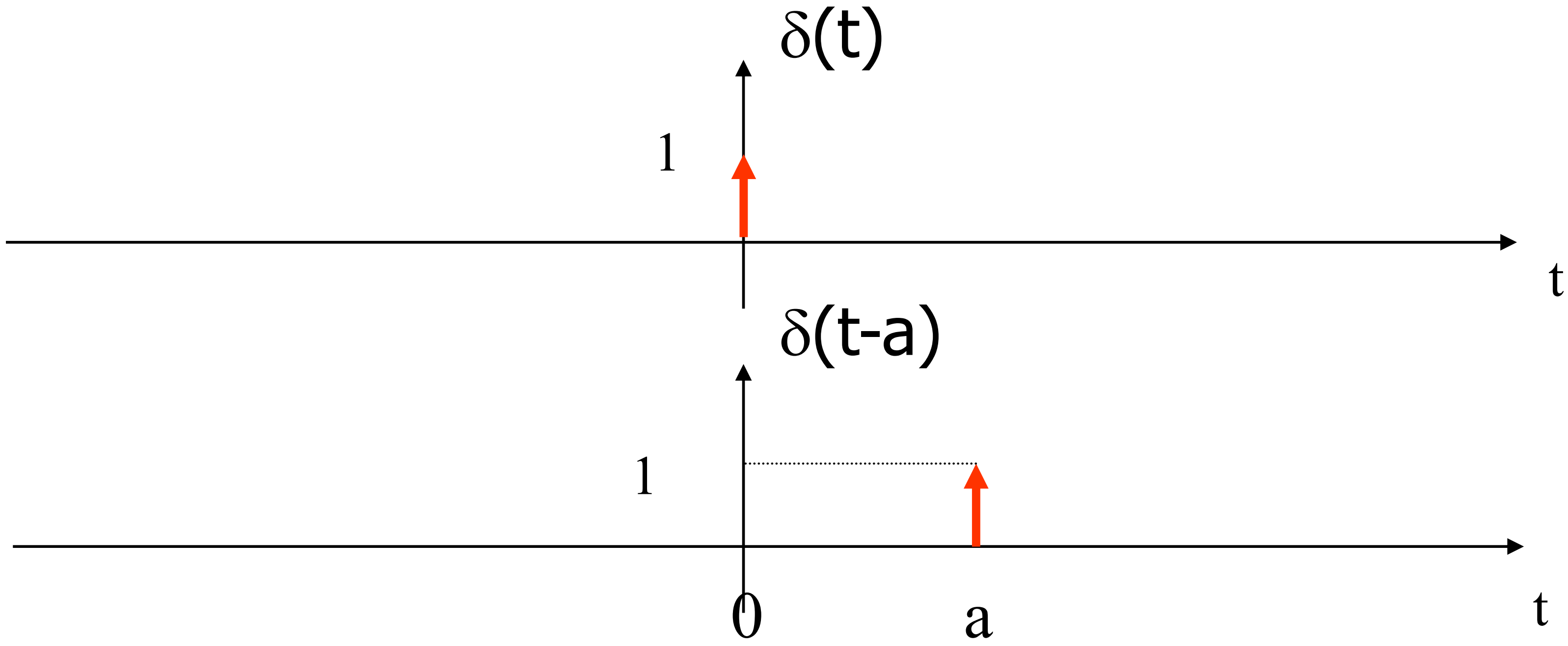
    - En effet l' intégrale ne converge pas … la transformée de Fourier n'existe donc pas au sens des fonctions

# Transformée de Fourier Généralisée

- Ce problème a conduit les mathématiciens à introduire un nouveau formalisme : les distributions
- La distribution de **Dirac δ(t)**
  - elle est définie comme une impulsion centrée sur t=0 et de largeur infiniment étroite et de surface 1
    - $$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(t)$$
    - $$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

# Transformée de Fourier Généralisée

- Il s'agit d'une distribution mathématique donc sans aucun sens physique mais qui va nous servir, entre autre, à calculer certaines transformées de Fourier
- Représentation symbolique :



# Transformée de Fourier Généralisée

- Rappel de propriétés :

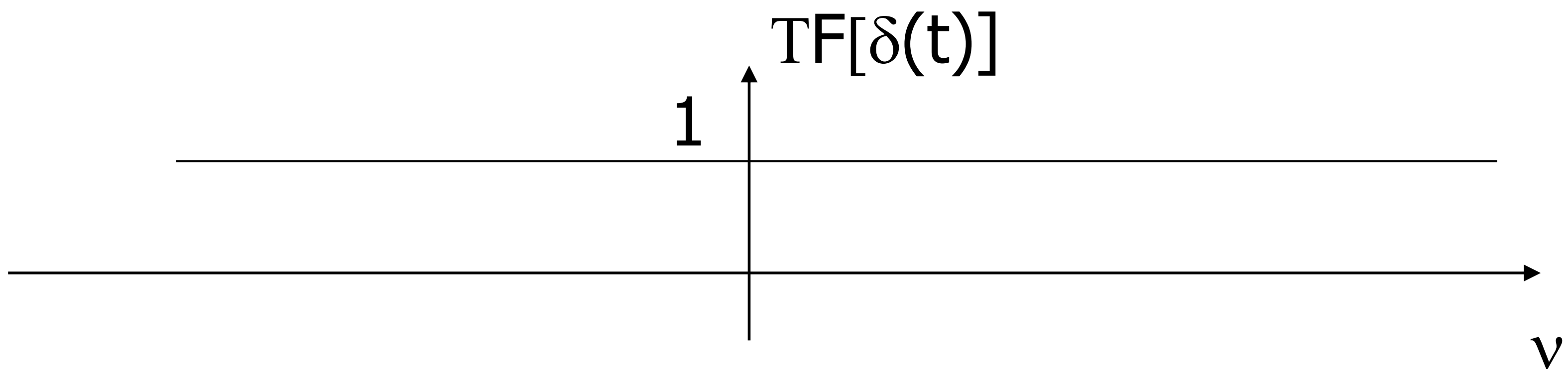
$$x(t).\delta(t) = x(0).\delta(t)$$

$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

- Transformée de Fourier d'un Dirac :

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{TF}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j \upsilon t} dt = e^{-2\pi j \upsilon \times 0} . \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



# Transformée de Fourier Généralisée

- On en déduit donc la transformée de Fourier du Dirac décalé en temps :

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-2\pi j \upsilon t} dt = e^{-2\pi j \upsilon t_0} . \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = e^{-2\pi j \upsilon t_0}$$

- Le Dirac peut être défini en fonction de la fréquence ce qui permet de déduire :

$$\delta(\upsilon-\upsilon_0) \xrightarrow{\mathrm{TF}^{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\upsilon-\upsilon_0) e^{2\pi j \upsilon t} d\upsilon = e^{2\pi j \upsilon_0 t} . \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\upsilon-\upsilon_0) d\upsilon = e^{2\pi j \upsilon_0 t}$$

$$\delta(\upsilon) \xrightarrow{\mathrm{TF}^{-1}} 1$$

# Transformée de Fourier Généralisée

- D'après ce qui précède, on en déduit donc la transformée de Fourier d'une exponentielle complexe puis celle des fonctions sinus et cosinus
  - $$e^{2\pi j\upsilon_0 t} \xrightarrow{TF} \delta(\upsilon - \upsilon_0)$$
  -

# Transformée de Fourier Généralisée

- Application Directe : La transformée de Fourier de fonctions courantes comme par exemple les fonctions cosinus et sinus

$$x(t) = A\cos(2\pi\upsilon_0 t) = \frac{A}{2}\left(e^{2\pi j\upsilon_0 t} + e^{-2\pi j\upsilon_0 t}\right)$$

$$\Rightarrow X(\upsilon) = \frac{A}{2}\left[\delta(\upsilon - \upsilon_0) + \delta(\upsilon + \upsilon_0)\right]$$

$$x(t) = A\sin(2\pi\upsilon_0 t) = \frac{A}{2j}\left(e^{2\pi j\upsilon_0 t} - e^{-2\pi j\upsilon_0 t}\right)$$

$$\Rightarrow X(\upsilon) = \frac{A}{2} j\left[\delta(\upsilon + \upsilon_0) - \delta(\upsilon - \upsilon_0)\right]$$

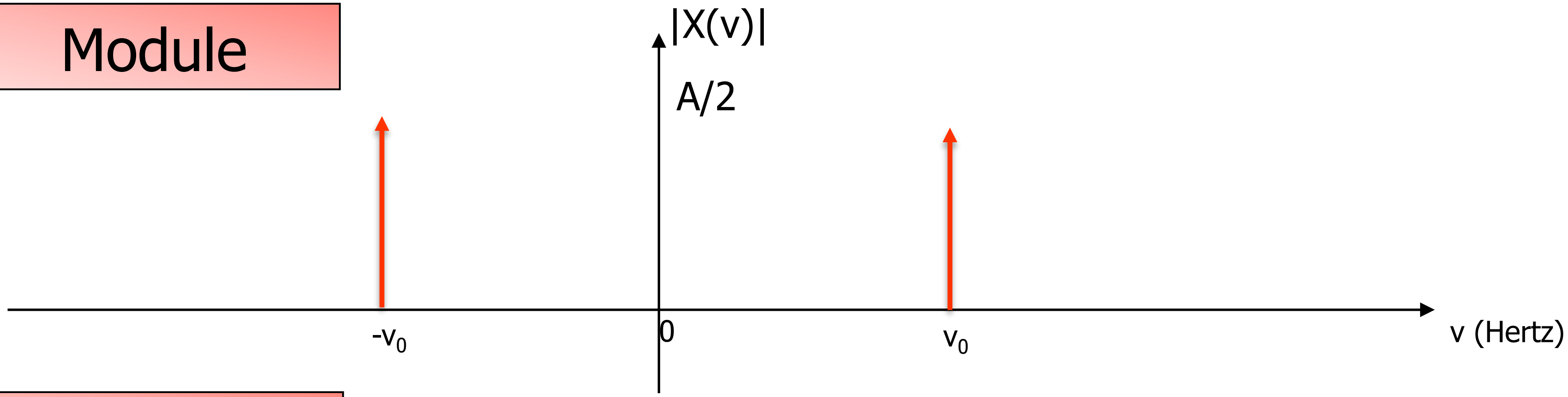
# Transformée de Fourier Généralisée

- Pour la représentation graphique, on peut définir comme on l'a vu précédemment:
  - le spectre d 'amplitude
  - le spectre de phase
- Exemple : le sinus
  - le spectre d 'amplitude $\frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)]$
  - le spectre de phase $\frac{-\pi}{2}\delta(\nu-\nu_0)+\frac{\pi}{2}\delta(\nu+\nu_0)$

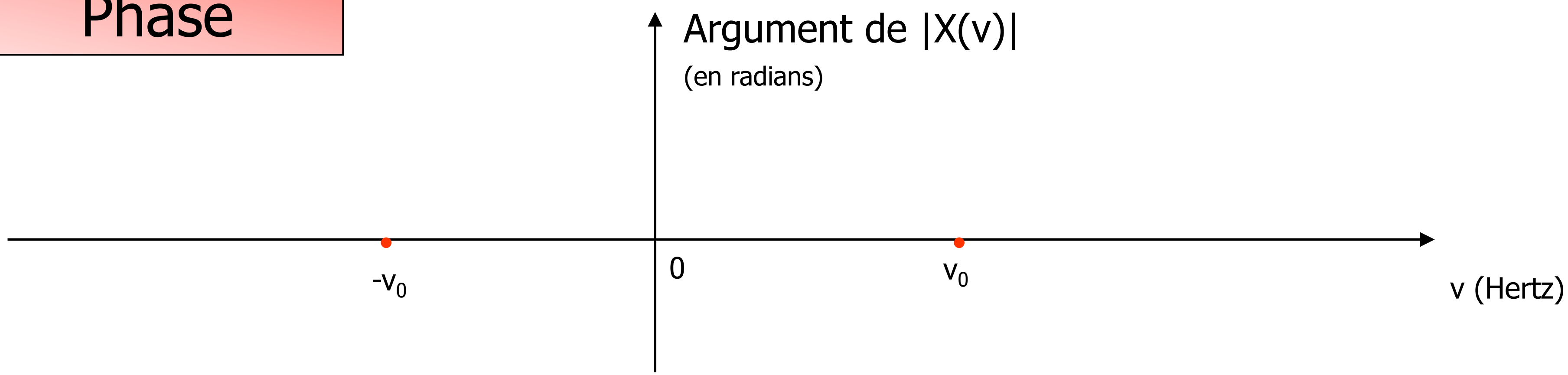
# Transformée de Fourier Généralisée

$$x(t) = A\cos(2\pi\upsilon_0 t) \quad \Longrightarrow \quad X(\upsilon) = \frac{A}{2}\left[\delta(\upsilon-\upsilon_0)+\delta(\upsilon+\upsilon_0)\right]$$

**Module**



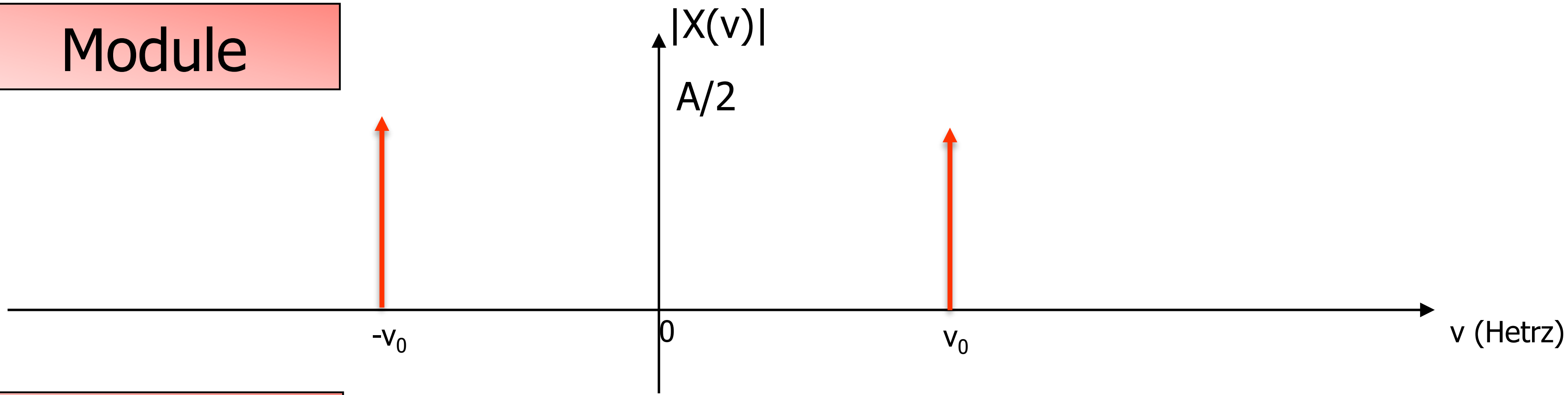

**Phase**



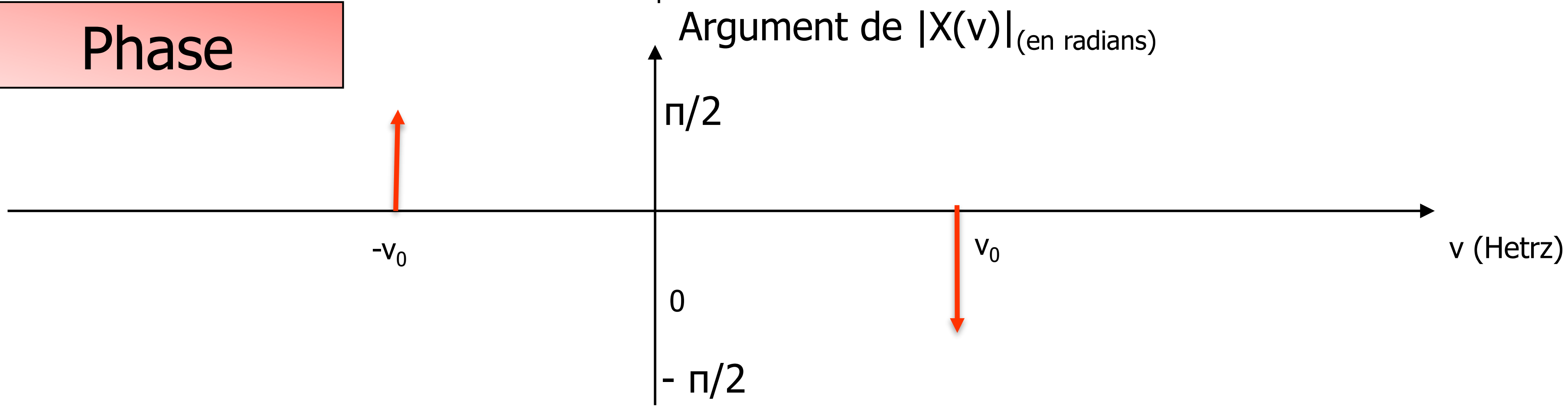
# Transformée de Fourier Généralisée

$$x(t) = A\sin(2\pi\upsilon_0 t) \Rightarrow X(\upsilon) = \frac{A}{2} j\left[\delta(\upsilon+\upsilon_0) - \delta(\upsilon-\upsilon_0)\right]$$

**Module**




**Phase**



# Transformée de Fourier Généralisée

- Autre propriété importante : le théorème de Plancherel

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\upsilon).Y(\upsilon)$$

$$x(t).y(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\upsilon) * Y(\upsilon)$$

# Transformée de Fourier Généralisée

- Lien entre série de Fourier et transformée de Fourier

$$X(\upsilon) = TF[x(t)] \quad \text{avec} \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi j \frac{nt}{T}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . TF\left[ e^{2\pi j \frac{nt}{T}} \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . \delta\left( \upsilon - \frac{n}{T} \right)$$

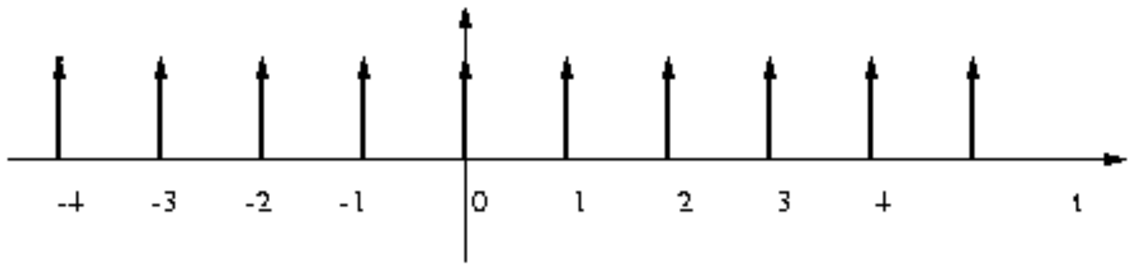
$$\Rightarrow \boxed{X\left(\frac{k}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n . \delta\left(\frac{k}{T} - \frac{n}{T}\right) = C_k}$$

# Transformée de Fourier Généralisée

- Autre exemple de distribution utile : **Le Peigne de Dirac**
  - Composé d'une infinité de Dirac se répétant périodiquement

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

  - Représentation **symbolique** du peigne de Dirac



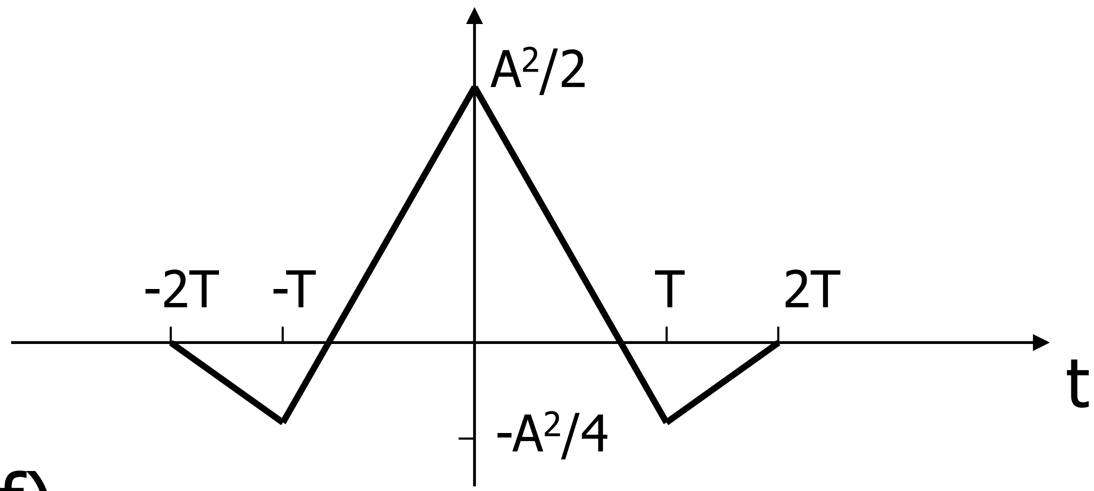
# Transformée de Fourier Généralisée

- On montre que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est :

$$X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\upsilon - \frac{n}{T}\right)$$

# Transformée de Fourier Généralisée

- Exercice : soit x(t) défini par :

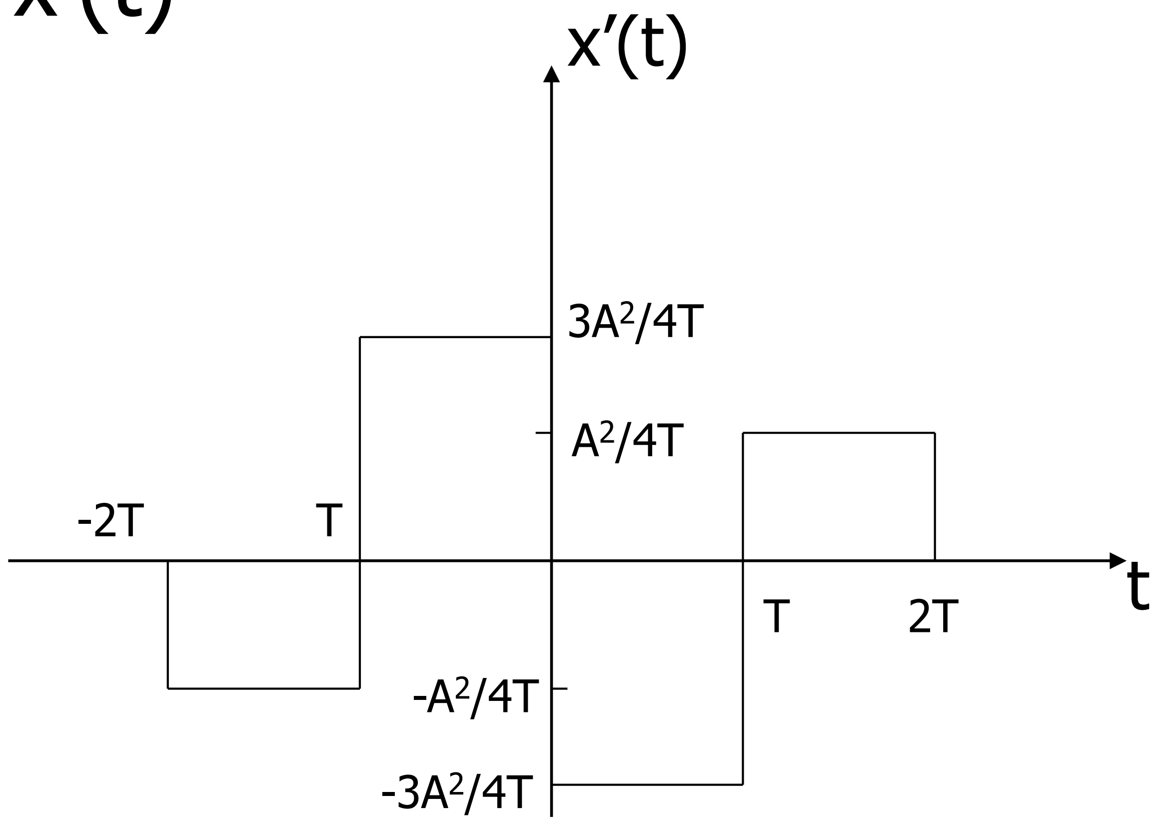



Calculer X(f)

- Conseils :
  - **Eviter de passer par le calcul de l'intégrale**
  - Utiliser les propriétés de la TF

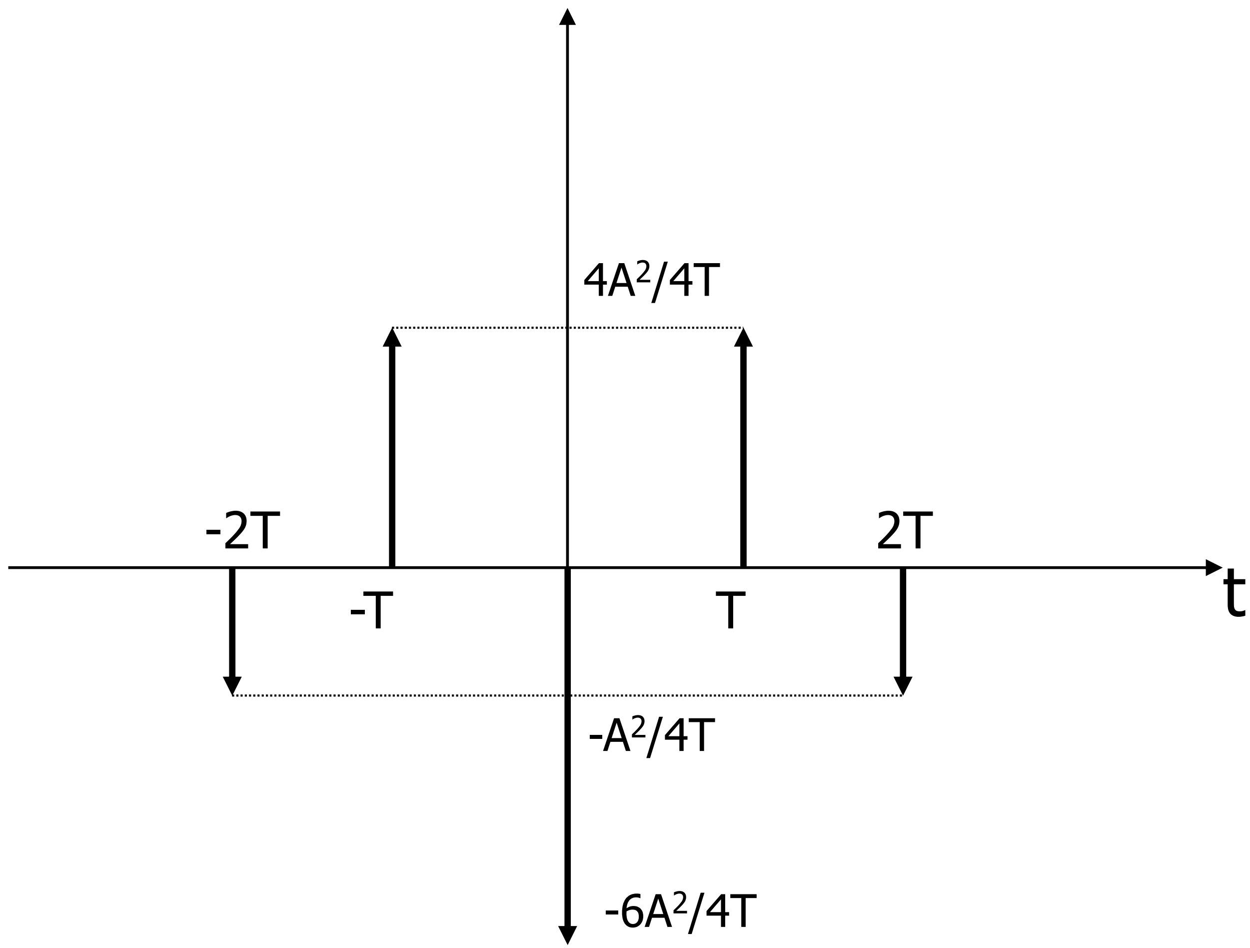
# Transformée de Fourier Généralisée

- Calculons x’(t)



# Transformée de Fourier Généralisée

- Calculons $x''(t)$



# Transformée de Fourier Généralisée

- Il est facile de calculer la TF de x''(t)

$$x''(t)=\frac{-A^2}{4T}\left[\delta(t+2T)+\delta(t-2T)\right]+\frac{A^2}{T}\left[\delta(t+T)+\delta(t-T)\right]-\frac{6A^2}{4T}\delta(t)$$

$$x''(t)\xrightarrow{TF}-\frac{A^2}{4T}\left[e^{2\pi jf2T}+e^{-2\pi jf2T}\right]+\frac{A^2}{T}\left[e^{2\pi jfT}+e^{-2\pi jfT}\right]-\frac{3A^2}{2T}$$

or

$$x''(t)\xrightarrow{TF}(2\pi jf)^2X(f)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{X(f)=\frac{1}{(2\pi jf)^2}\frac{A^2}{T}\left[\frac{-1}{2}\cos(2\pi f2T)+2\cos(2\pi fT)-\frac{3}{2}\right]}$$

# Remise en contexte

## Lors des séances précédentes...

La transformée de Fourier

- Définition généralisée de la Transformée de Fourier (grâce au formalisme des distributions de Dirac) de fonctions quelconques

- Notamment la transformée de Fourier de fonctions usuelles comme le sinus ou le cosinus

- Vraie représentation fréquentielle d'un signal qui vient compléter sa représentation temporelle en donnant un autre point de vue permettant d'accéder à de nouvelles informations contenues

# Remise en contexte

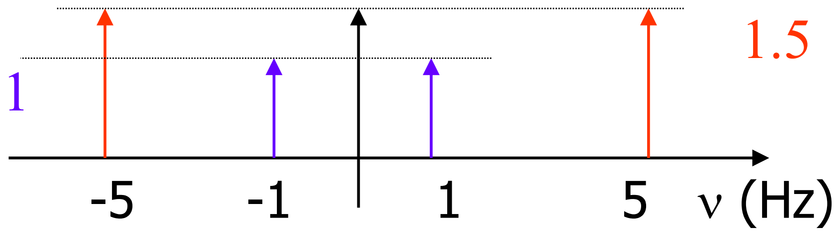
1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
      A. Séries de Fourier
      B. Transformées de Fourier – Cas des signaux d'énergie finie
      C. Transformée de Fourier généralisée
      D. Utilisation de la Transformée de Fourier pour l'analyse spectrale
      E. Conclusion sur les représentations fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# D. Utilisation de la transformée de Fourier – Analyse Spectrale

- Utilisation classique en traitement du signal : l **'analyse spectrale**
  - on cherche à **retrouver** les **composantes temporelles** d 'un signal à partir de la connaissance de son spectre
  - on cherche à **caractériser** un signal par **des fréquences particulières = signature**

# Utilisation de la transformée de Fourier – Analyse Spectrale

- Exemple simple d '**analyse spectrale**




Spectre d 'amplitude

Spectre de phase nul

**Quel est le signal temporel correspondant ?**

$$T_\nu[\cos(2\pi\nu_0 t)] = \frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)]$$

**$2\cos(2\pi f1t)+3\cos(2\pi f2t)$**

$f1 = 1$ Hz et $f2 = 5$ Hz

# E. Conclusion sur les Représentations Fréquentielles

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

\+ Formalisme des Distributions de Dirac

- <u>A ce stade du cours</u>, on a donc allégé les contraintes et pu définir la transformée de Fourier pour des signaux x(t) quelconques avec
  - x(t) borné (pas de valeurs infinies)
  - Les discontinuités de x(t) sont en nombre fini
- On peut désormais représenter un signal de 2 manières temporellement et fréquentiellement
- La Transformée de Fourier donne donc un autre point de vue de l'information contenue dans le signal sans modifier celle-ci
- La **même** information y est présentée de façon différente et donc mieux visible

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Remise en contexte

## Pour aborder la Numérisation

Il est conseillé :

- D'avoir suivi les chapitres dédiés à la Transformée de Fourier
- De savoir calculer la transformée de Fourier d'une fonction usuelle
- De savoir utiliser le produit de convolution et ses propriétés

# 3. Numérisation d’un signal

Signal
fonction continue de t

Stockage et Traitement sur un processeur (ordinateur)

# 3. Numérisation d'un signal

Signal
fonction continue de t

**Numérisation**

Traitement sur un
processeur (ordinateur)

**Echantillonnage**

+

**Quantification**

+

**Codage en Binaire**

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
      A. Les Etapes de la Numérisation
      B. Théorème de Shannon ou comment échantillonner un signal correctement
      C. Numérisation : cas particulier des Images
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Remise en contexte

Signal
fonction continue de t

**Numérisation**

**1. Echantillonnage**

+

**2. Quantification**

+

**3. Codage en Binaire**

Traitement sur un processeur (ordinateur)

# A. Les étapes de la Numérisation Echantillonnage

- Définition de l 'échantillonnage :
  - On a $x(t)$ = signal **d'amplitude continue** d 'argument **t continu (= signal analogique)**
  - On a $\{t_n\}$ une suite d'instants temporels

→ la suite $\{x(t_n)\}$ est un signal **échantillonné**

↓

Signal défini en **certains** instants seulement

# Les étapes de la Numérisation Echantillonnage

- Quelques définitions :
  - $x(t_n)$ = un **échantillon**
  - **Echantillonnage** : opération permettant de passer de $x(t)$ à $\{x(t_n)\}$

Si $t_{n+1} - t_n = T_e$ l 'échantillonnage est dit **régulier**

$T_e$ = **période d'échantillonnage**

$\nu_e = 1/T_e$ = **fréquence d'échantillonnage**

# Les étapes de la Numérisation
# Echantillonnage

- Exemple :
  - $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 1$ Hz.

$t_{n+1} - t_n = T_e = 0.1 \Rightarrow t_n = 0.1n$

$$x(t_n) = \sin(2\pi f_0 n T_e) = \sin(\pi n/5)$$

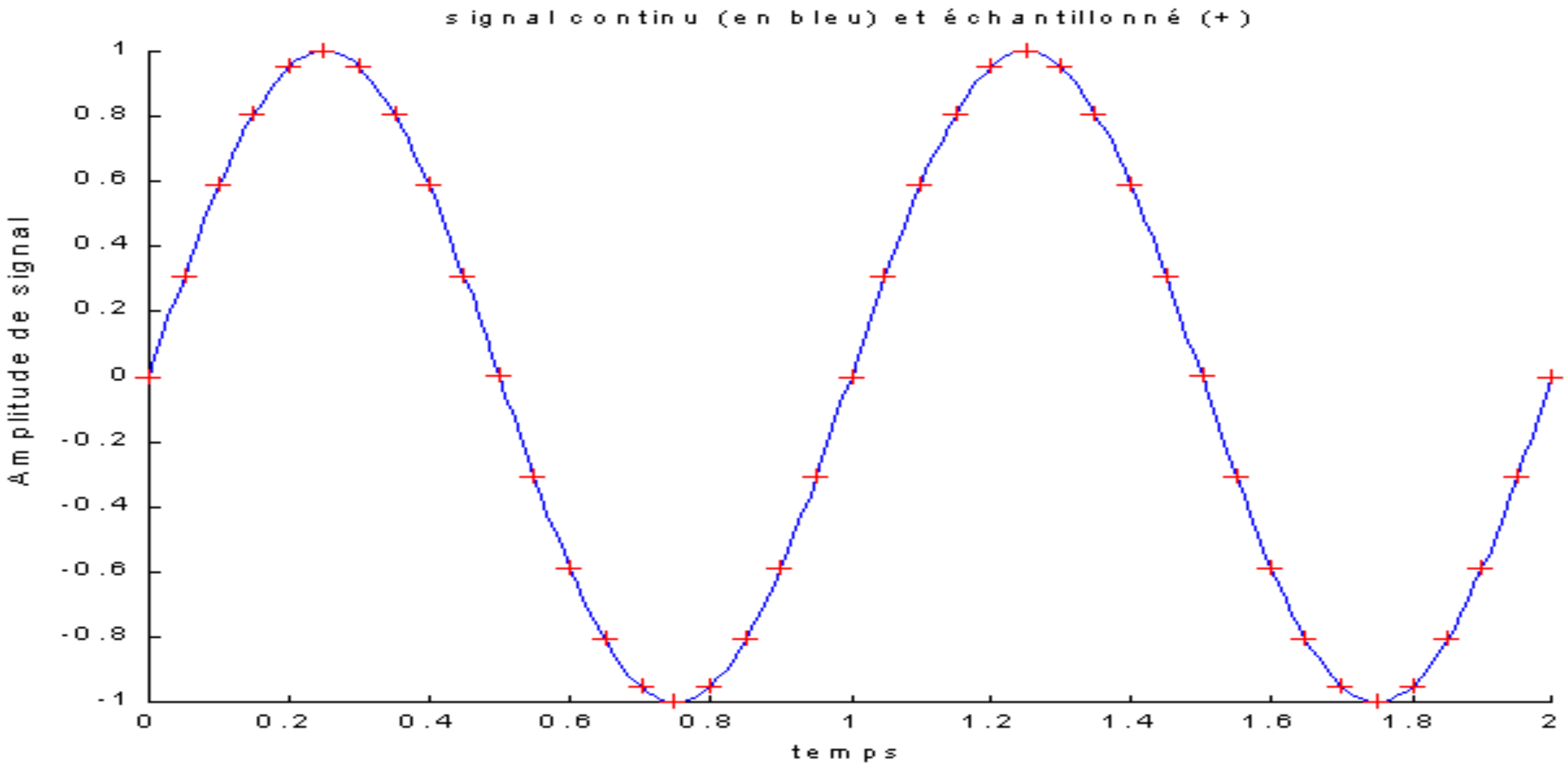
**Notation** $\quad x(t_n) \equiv x(n)$

$$x(0)=\sin(0)=0;\ x(1)=\sin(\pi/5)=0.587;\ x(2)=0.951$$

$$\nu_e = 10 \text{ Hz}$$

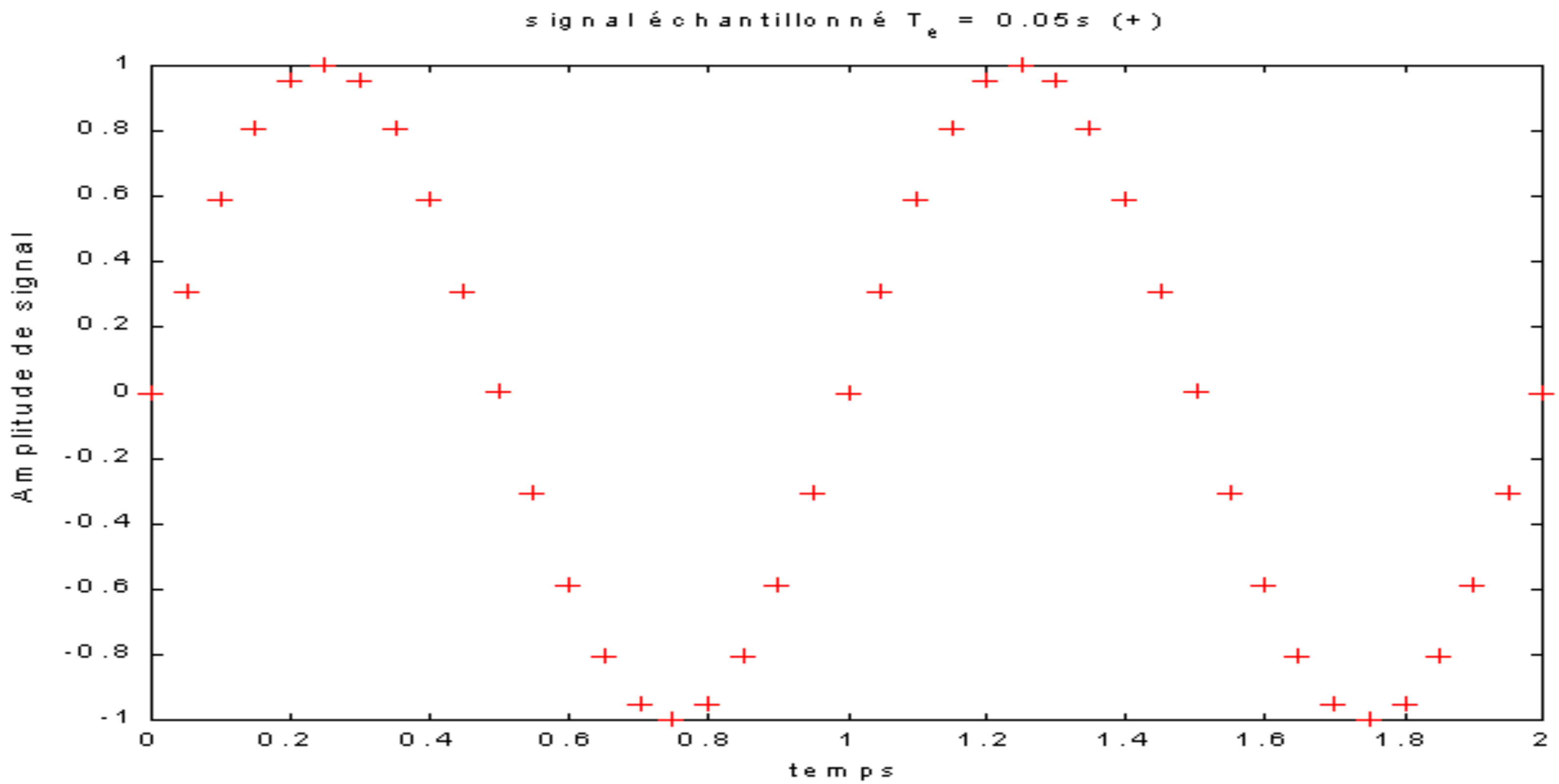
# Les étapes de la Numérisation Echantillonnage

Illustration de l 'échantillonnage (1/2)



# Les étapes de la Numérisation Echantillonnage

## Illustration de l'échantillonnage (2/2)



# Remise en contexte

Signal
fonction continue de t

**Numérisation**

Traitement sur un processeur (ordinateur)

**1. Echantillonnage**

+

**2. Quantification**

+

**3. Codage en Binaire**

# Les étapes de la Numérisation Quantification

- Définition de la quantification :
  - On a x(t) = signal **d'amplitude continue** d 'argument **t continu (= signal analogique)**
  - On a $\{xq_k\}$ une suite d 'amplitudes $k \in Z$

Soit $\{x_q(t)\}$ le signal quantifié tel que : $x_q(t) \in \{xq_k\}$

Signal quantifié défini en **certaines** amplitudes seulement

# Les étapes de la Numérisation
# Quantification

- Définition de la quantification :
  - **Quantification** : opération permettant de passer de $x(t_n)$ à $\{xq(t_n)\}$ c'est à dire un ensemble de valeurs discontinues prédéfinies

Si $xq_{k+1}-xq_k = q$ la quantification est dite **uniforme**

$q$ = **pas de quantification**

**L'erreur de quantification** est définie par l'écart entre la valeur quantifiée $xq(t_n)$ et la valeur réelle $x(t_n)$

# Les étapes de la Numérisation
# Quantification

- Exemples de règle de quantification uniforme:
  - **La troncature**

$$x(t) \in [kq;(k+1)q[ \Rightarrow xq(t) = kq$$

➡ L'erreur de quantification maximale vaut **q**

  - **L'arrondi**

$$x(t) \in [(k-\tfrac{1}{2})q;(k+\tfrac{1}{2})q[ \Rightarrow xq(t) = kq$$

➡ En valeur absolue, l'erreur de quantification maximale vaut **q/2**
Elle peut être négative ou positive

# Les étapes de la Numérisation Quantification

- Exemple : $x(t) = \sin(2\pi t)$

Quantifions avec un pas q = 0.1 et la règle de l 'arrondi

Intéressons nous à un exemple : l'échantillon de x(t) à l'instant t=0,1 seconde

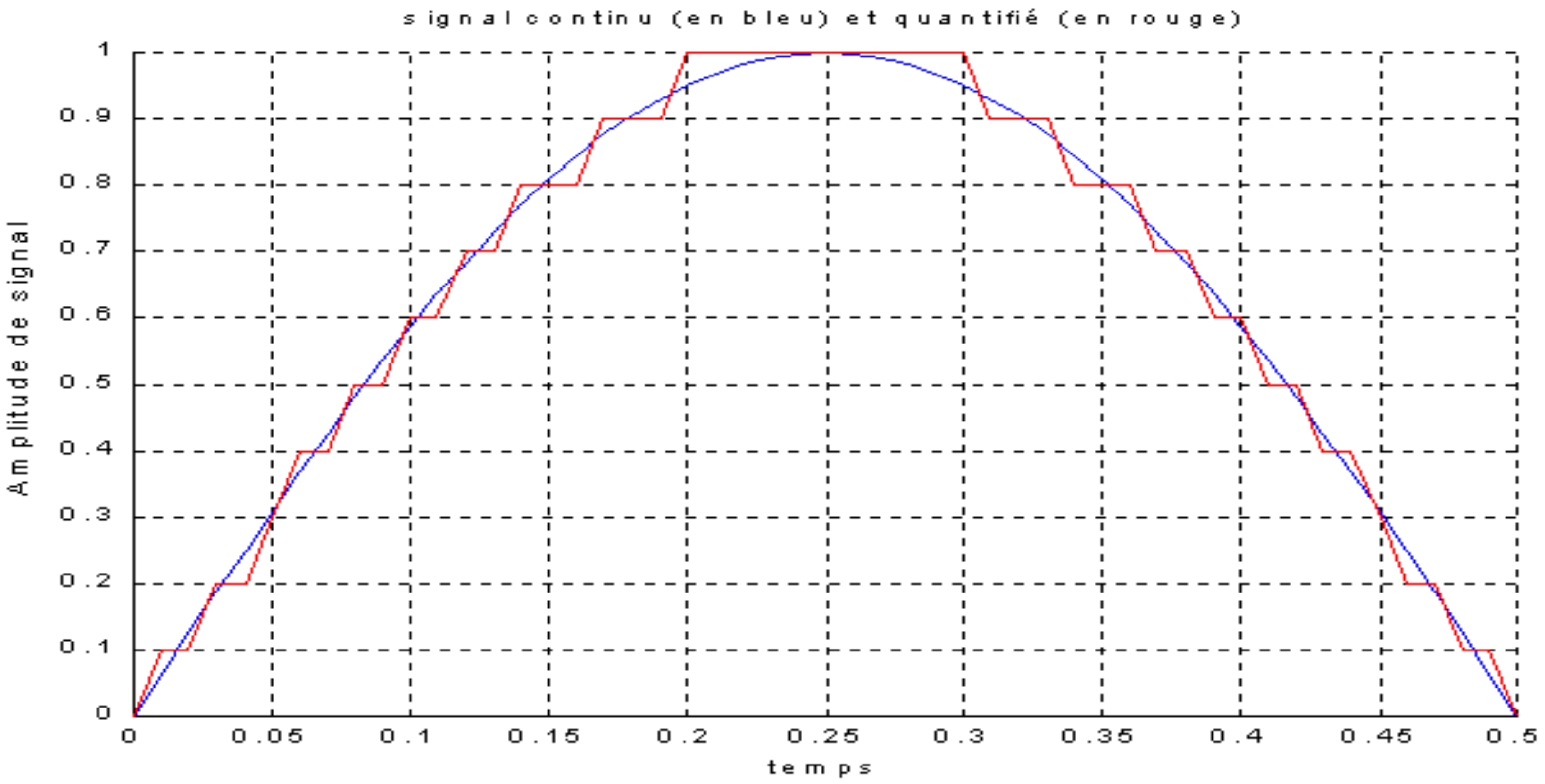
$$x(0.1) = \sin(0.2\pi) \cong 0.587785252..$$

$$\Rightarrow \quad \sin(0.2\pi) \in [(6 - \frac{1}{2})q ; (6 + \frac{1}{2})q[$$

$$\Rightarrow \quad xq(0.1) = 6q = 0.6$$

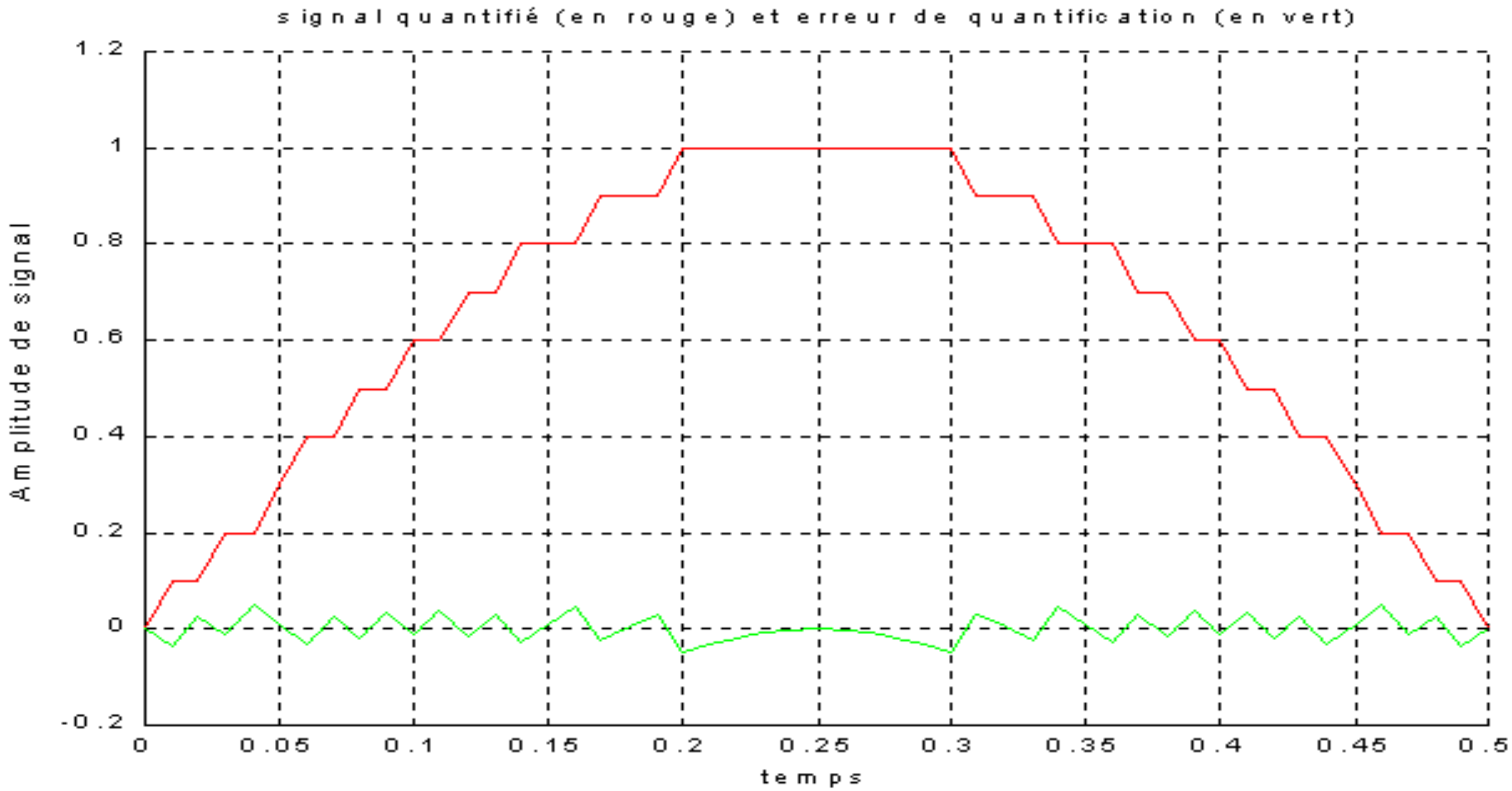
# Les étapes de la Numérisation
# Quantification

## Illustration de la quantification (1/2)



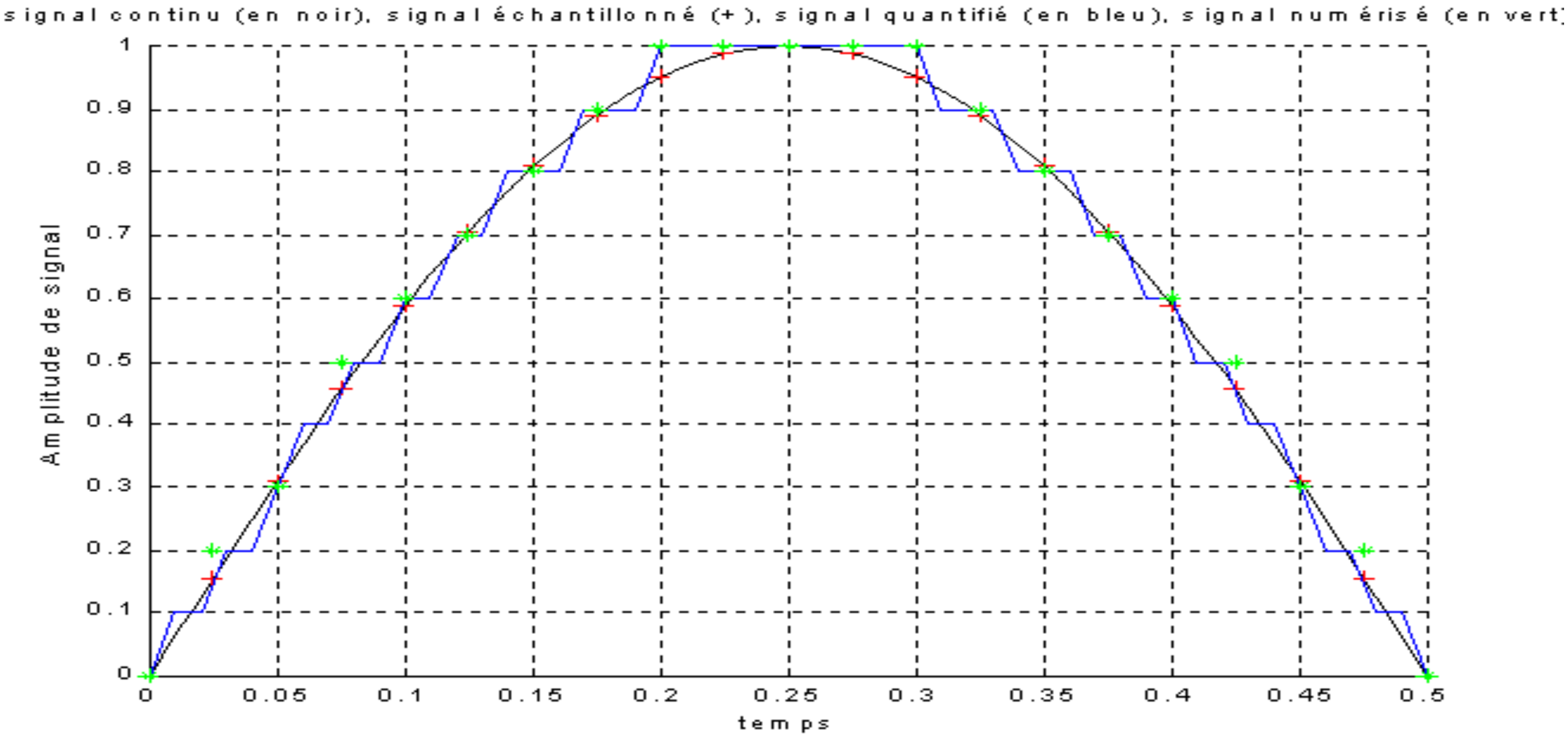
# Les étapes de la Numérisation
# Quantification

## Illustration de la quantification (2/2)

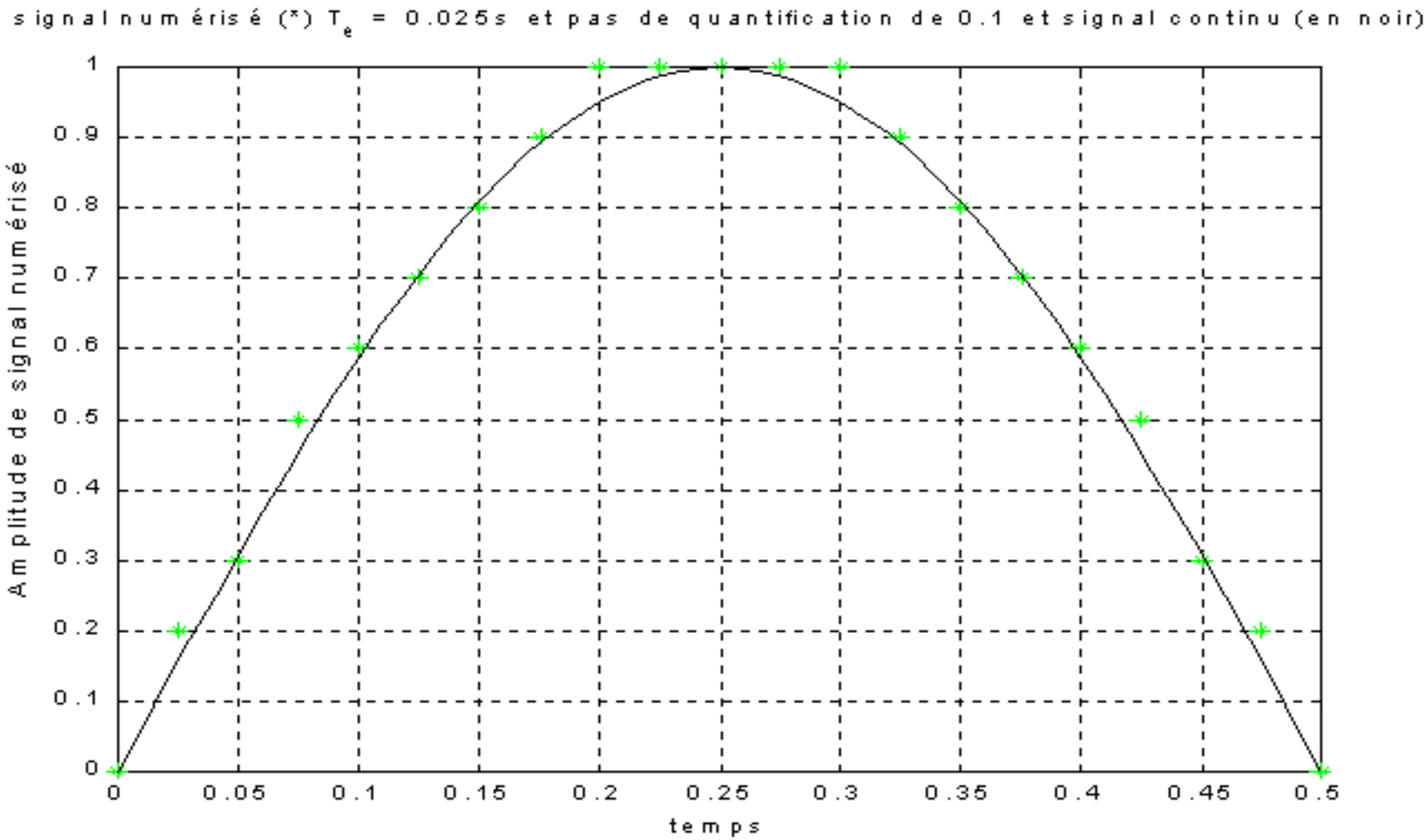


# Les étapes de la Numérisation
# Quantification

- Numérisation = Echantillonnage + Quantification



# Les étapes de la Numérisation
# Quantification



# Remise en contexte

Signal
fonction continue de t

**Numérisation**

Traitement sur un
processeur (ordinateur)

**1. Echantillonnage**

+

**2. Quantification**

+

**3. Codage en Binaire**

# Les étapes de la Numérisation Codage en Binaire

- Le codage en Binaire
  - 3ème étape
  - Après l'échantillonnage et la quantification
  - Chaque valeur quantifiée du signal va être codée sur n bits

$$q = \frac{Dynamique \quad du \quad Signal}{2^n}$$

# Numérisation d'un signal

- Le codage en Binaire
  - Généralement quand on souhaite numériser un signal on se fixe des performances à atteindre c'est-à-dire l'erreur maximale de quantification
  - Selon la méthode choisie (troncature ou arrondie) et le signal à quantifier on en déduit le nombre de bits pour coder en binaire
  - On constate qu'avec la méthode de la troncature on a besoin de 1 bit supplémentaire pour coder
  - Les Convertisseurs Analogiques Numériques qui s'appuient sur la méthode de l'arrondie sont cependant plus complexes et couteux

# Numérisation d'un signal

- Numérisation = possibilité de traitement sur ordinateur
- La numérisation entraîne :
  - Dégradation et Distorsion du signal
  - Perte d 'information sur le phénomène physique initial
- =>Possibilité d 'une analyse erronée du phénomène physique

# Numérisation d'un signal

- Il faut analyser et connaître les distorsions introduites par la numérisation
- On a déjà vu l'impact des distorsions liées à la quantification (erreur de quantification)
- On va maintenant se focaliser sur les distorsions introduites par l 'échantillonnage
  - Modélisation mathématique
  - Conséquences sur le spectre : « aliasing»
  - Comment « bien » échantillonner ?

# Remise en contexte

Signal
fonction continue de t

**Numérisation**

**1. Echantillonnage**

+

**2. Quantification**

+

**3. Codage en Binaire**

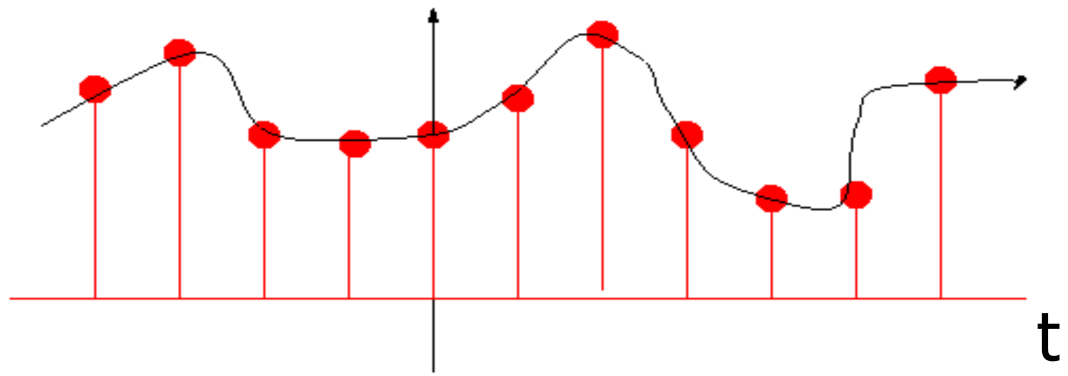
Traitement sur un processeur (ordinateur)

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
      A. Les Etapes de la Numérisation
      B. Théorème de Shannon ou comment échantillonner un signal correctement
      C. Numérisation : cas particulier des Images
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Modélisation de l'échantillonnage :
  - signal échantillonné défini en des instants particuliers seulement. On ne connait pas le signal entre 2 échantillons consécutifs




- Le résultat fait penser à une distribution de type peigne de Dirac

# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Modélisation de l 'échantillonnage :
  - x(t) considéré comme définissant une distribution
  - W(t) le peigne de dirac défini par :

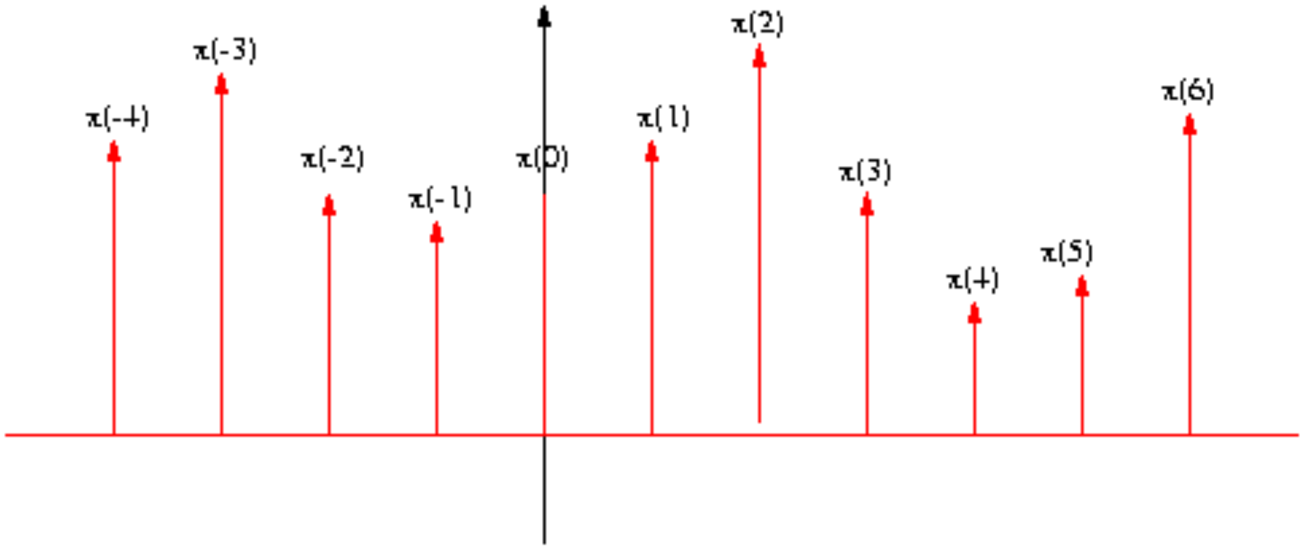
$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$$x_e(t) = x(t)W(t)$$

**= distribution qui modélise le signal échantillonné**

# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$



# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Spectre du signal échantillonné :

$$x_e(t) = x(t)W(t)$$

$$\Downarrow$$

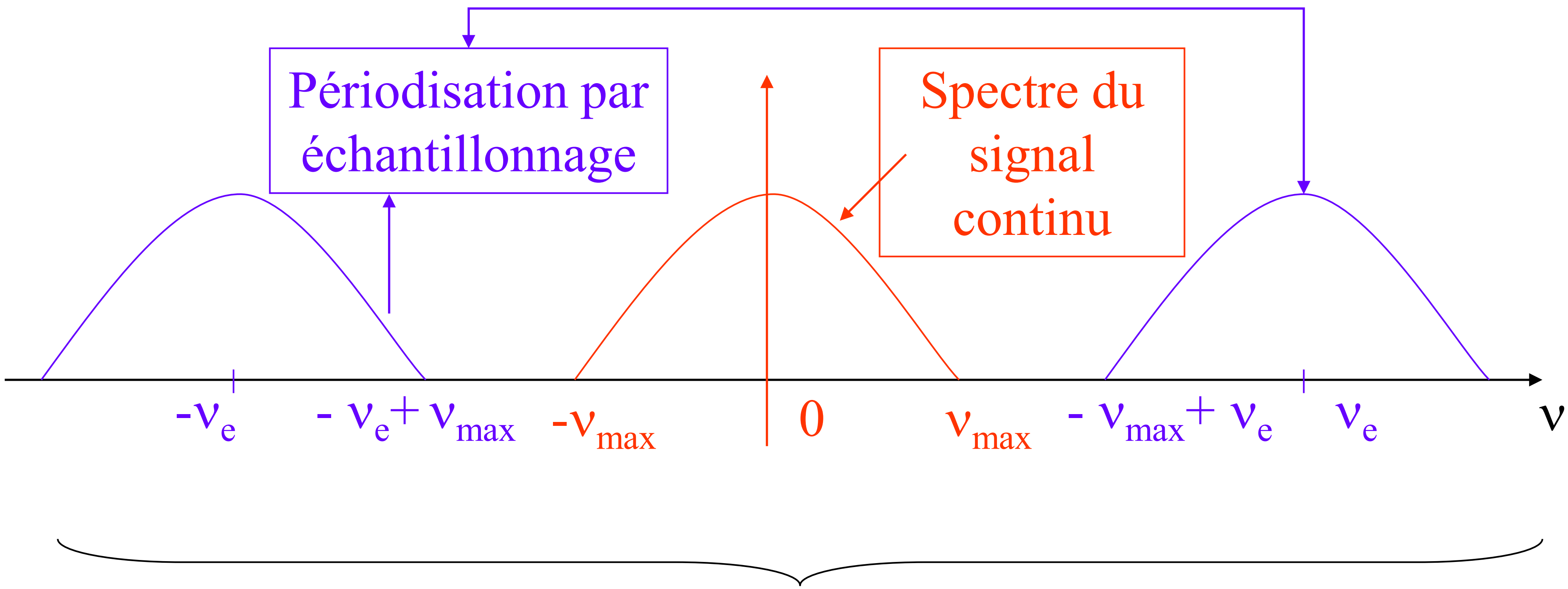
$$X_e(\nu) = X(\nu) * W(\nu) = X(\nu) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\nu_e)$$

$$\Downarrow$$

$$X_e(\nu) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\nu - n\nu_e)$$

# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Spectre du signal échantillonné : $X_e(\nu) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\nu - n\nu_e)$




Il **faut** faire la **somme** de tous les spectres

# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Pour éviter de perdre de l'information
  - On doit être capable de retrouver dans le spectre du signal échantillonné le spectre du signal continu de départ
  - C'est-à-dire éviter le recouvrement spectral des différents périodiques
  - C'est à dire : $\nu_e - \nu_{\max} \geq \nu_{\max}$

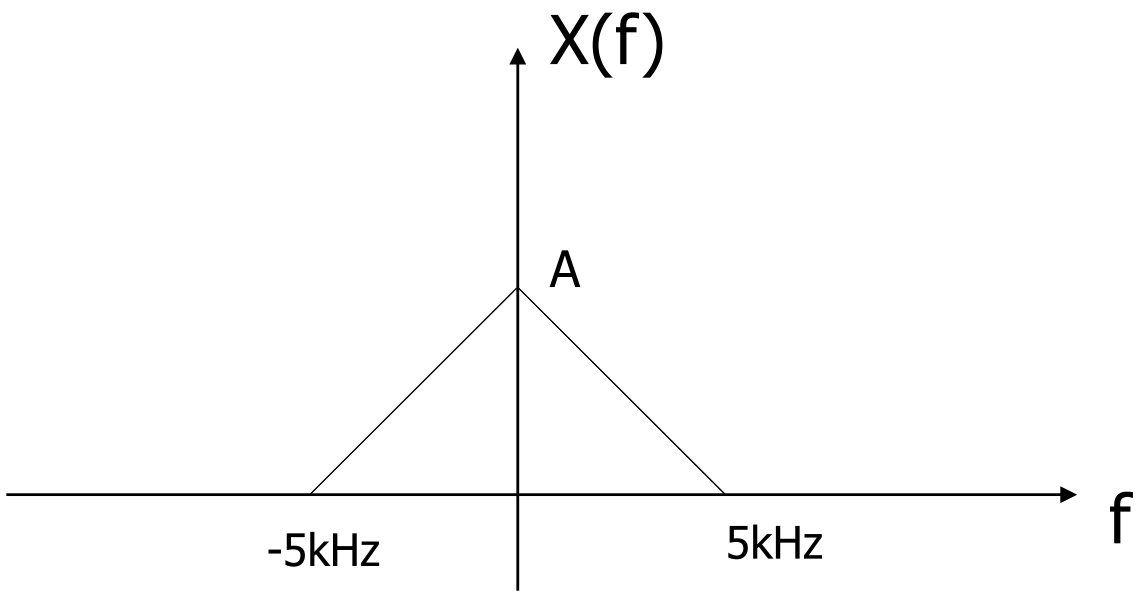
$$\boxed{\nu_e \geq 2\nu_{\max}}$$

**Thèorème de Shannon**

**$\upsilon_{max}$ est la <u>fréquence max</u> du spectre de x(t)**

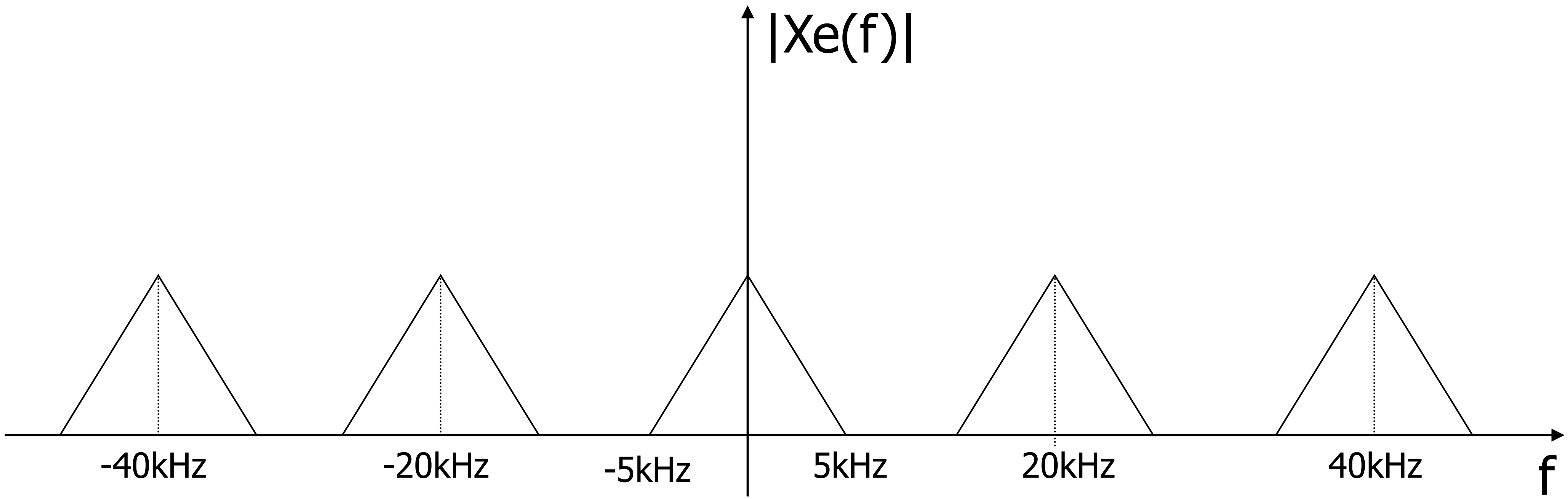
# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Exercice : soit x(t) un signal dont la transformée de Fourier est représentée ci dessous. Tracer l'allure de la transformée de Fourier de x(t) après échantillonnage.



# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- D'après le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage minimal est $F_e = 2 \times 5\text{kHz} = 10\text{kHz}$
- Prenons par ex, Fe=20kHz. On obtient donc après échantillonnage un spectre périodique de période Fe



# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Limites pratiques du théorème de l'échantillonnage
  - Le spectre du signal est rarement parfaitement connu à l'avance
  - Un signal réel est rarement à bande limitée : il n 'existe pas de fréquence $\nu_c$ telle que :

$$\forall |\nu| > |\nu_c| \qquad X(\nu) = 0$$

On utilise alors un **filtre anti-repliement** (anti-aliasing) pour atténuer fortement les fréquences supérieures à une fréquence $\nu_c$ donnée.

# Théorème de Shannon ou comment échantillonner correctement

- Echantillonnage pratique
  - En pratique un échantillonneur est réalisé à l'aide d'une porte analogique qui s'ouvre un court instant $\tau$ pendant lequel le signal x(t) est mis en mémoire
  - Aussi petit que soit $\tau$, ce n'est pas x(kte) qui est mis en mémoire mais une certaine fonction de x(t) entre les instants (kTe- $\tau$) et kTe
  - Echantillonneur moyenneur :
    - On met en mémoire $x_k = \int_{kT_e-\tau}^{kT_e} x(u)du$
    - Tout se passe comme si le signal x(t) était filtré par un filtre intégrateur à moyenne glissante sur la durée $\tau$

# Etude de l'échantillonnage

- Échantillonnage maintien
  - On retient la valeur du milieu de l'intervalle sur toute la durée $\tau$
- Echantillonneur bloqueur
  - Cas particulier de l'échantillonneur maintien avec $\tau = Te$
  - C'est celui réalisé par les CAN

# Remise en contexte

## Lors des séance précédente...

- Identification sur un signal quelconque de l'impact de l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

- Théorème de Shannon : Fondamental pour le monde du Numérique car il établit une règle sur comment échantillonner correctement un signal

# Remise en contexte

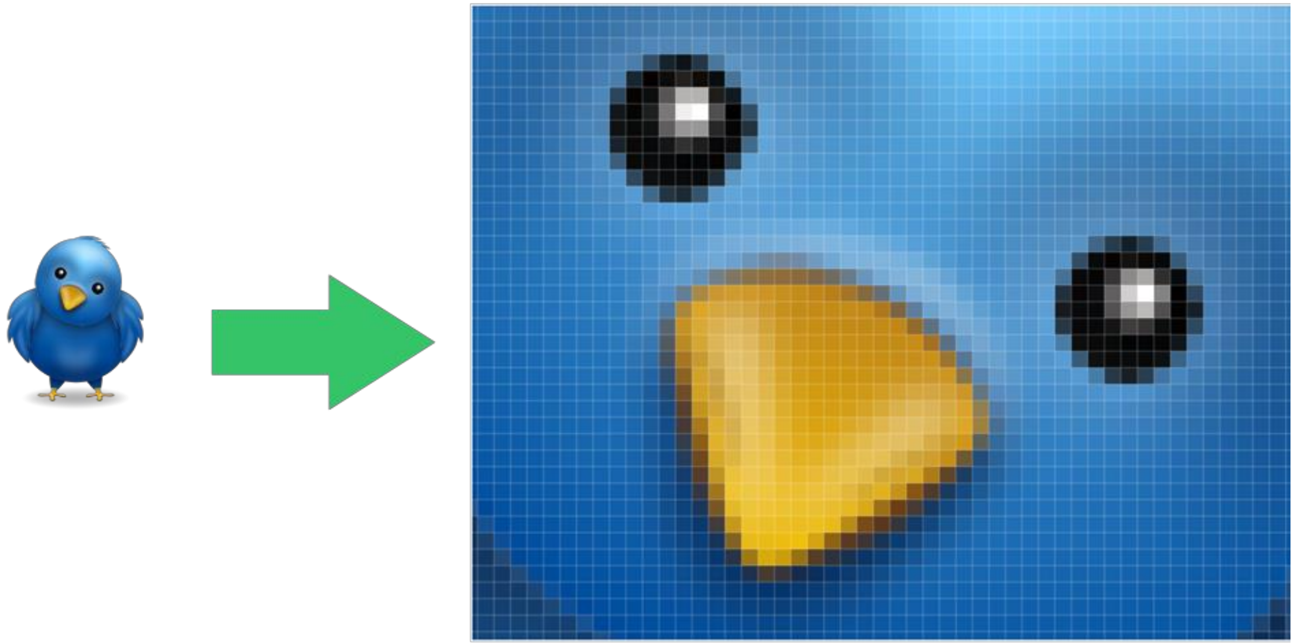
1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
      A. Les Etapes de la Numérisation
      B. Théorème de Shannon ou comment échantillonner un signal correctement
      C. Numérisation : cas particulier des Images
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# C. Numérisation : cas de l'image

- Une image est un signal à 2 dimensions
  - Axe X
  - Axe Y
  - Et l'amplitude renseigne sur la couleur par exemple
- Aujourd'hui la plupart des images traitées sont numériques (TV numérique, Photo Numérique, Scan, …)
- L'échantillon s'appelle ici « Pixel »
  - L'image analogique d'origine est « découpée » pour ne retenir que quelques valeurs
  - Pixel : petite unité de surface

# Numérisation : cas de l'image

- Qu'est ce qu'un pixel ?



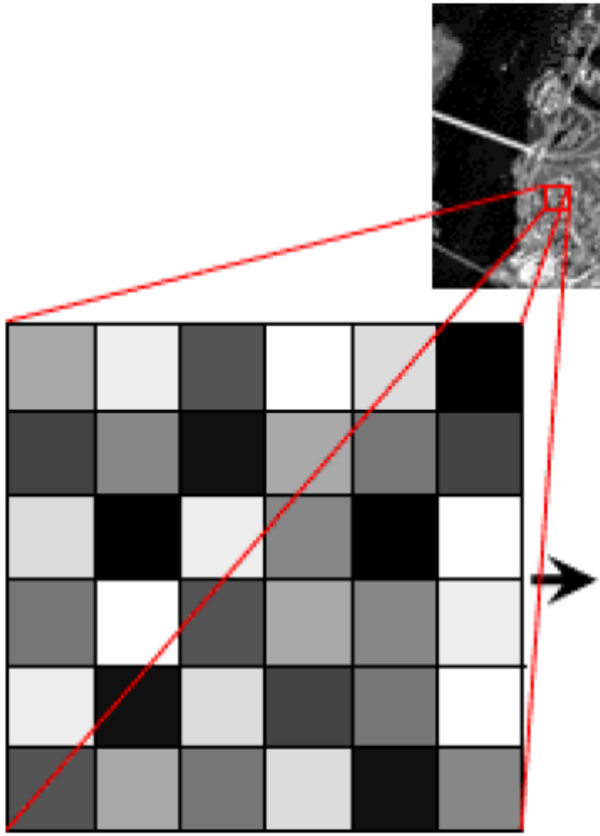
- Plus cette unité de surface est petite (plus le pas d'échantillonnage est petite), plus l'image est détaillée

# Numérisation : cas de l'image

- En 1D, un échantillon de signal possède une abscisse (par exemple le temps) et une ordonnée (amplitude quantifiée ou non)
- En 2D, un pixel est associé à au moins 3 données
  - 2 Coordonnées : position dans l'image (x,y)
  - Amplitude(s) : niveau de gris , couleur (3 valeurs Rouge/Vert/Bleu) quantifiées ou non

# Numérisation : cas de l'image

- Exemple

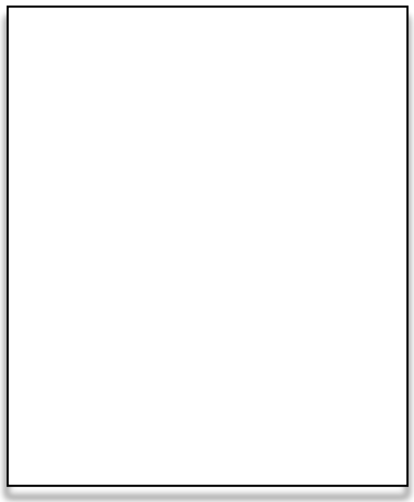


| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 170 | 238 | 85 | 255 | 221 | 0 |
| 68 | 136 | 17 | 170 | 119 | 68 |
| 221 | 0 | 238 | 136 | 0 | 255 |
| 119 | 255 | 85 | 170 | 136 | 238 |
| 238 | 17 | 221 | 68 | 119 | 255 |
| 85 | 170 | 119 | 221 | 17 | 136 |

« Niveaux de Gris » (entre 0 et 255 par exemple)

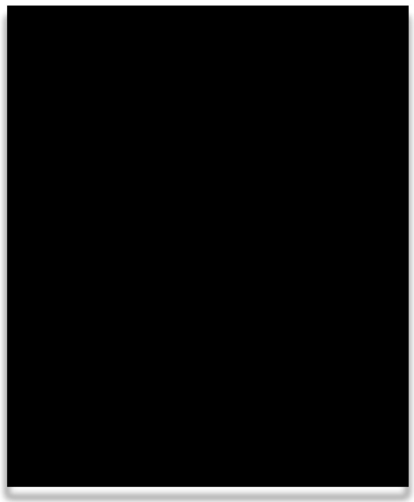
# Numérisation : cas de l'image

- Comment échantillonne-t-on une image?
  - Forte analogie avec les signaux 1D
  - Les variations d'amplitude dans une image (niveaux de gris ou de couleurs) se traduisent par un comportement en fréquence différent

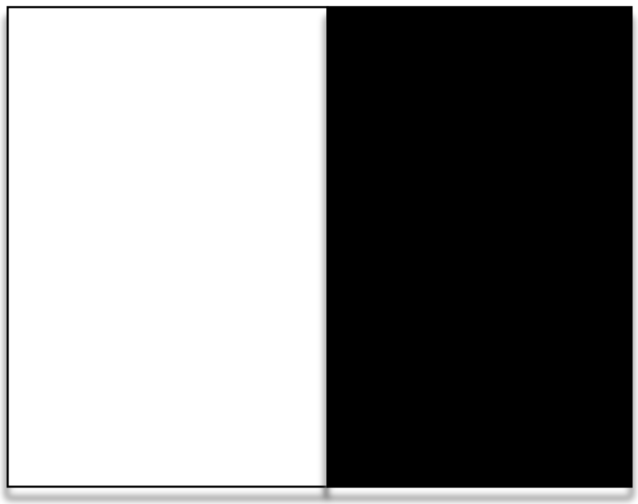


Exemple :
2 images unicolores

=> Spectre basse fréquence



# Numérisation : cas de l'image



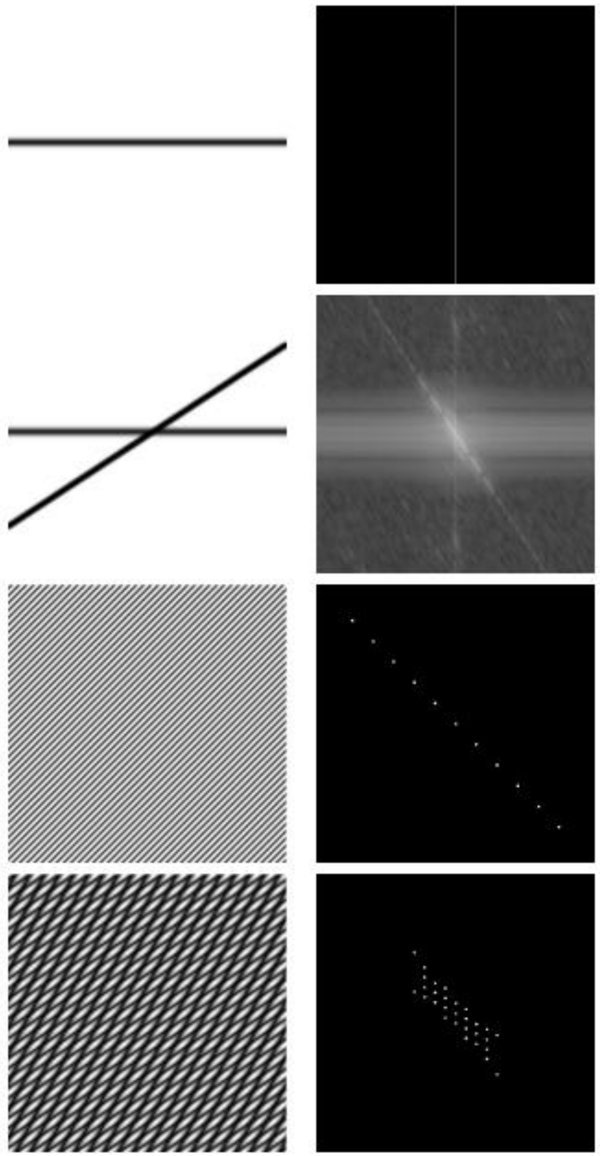
Brusque variation dans l'image qui se traduit par une haute fréquence dans le spectre

# Numérisation : cas de l'image

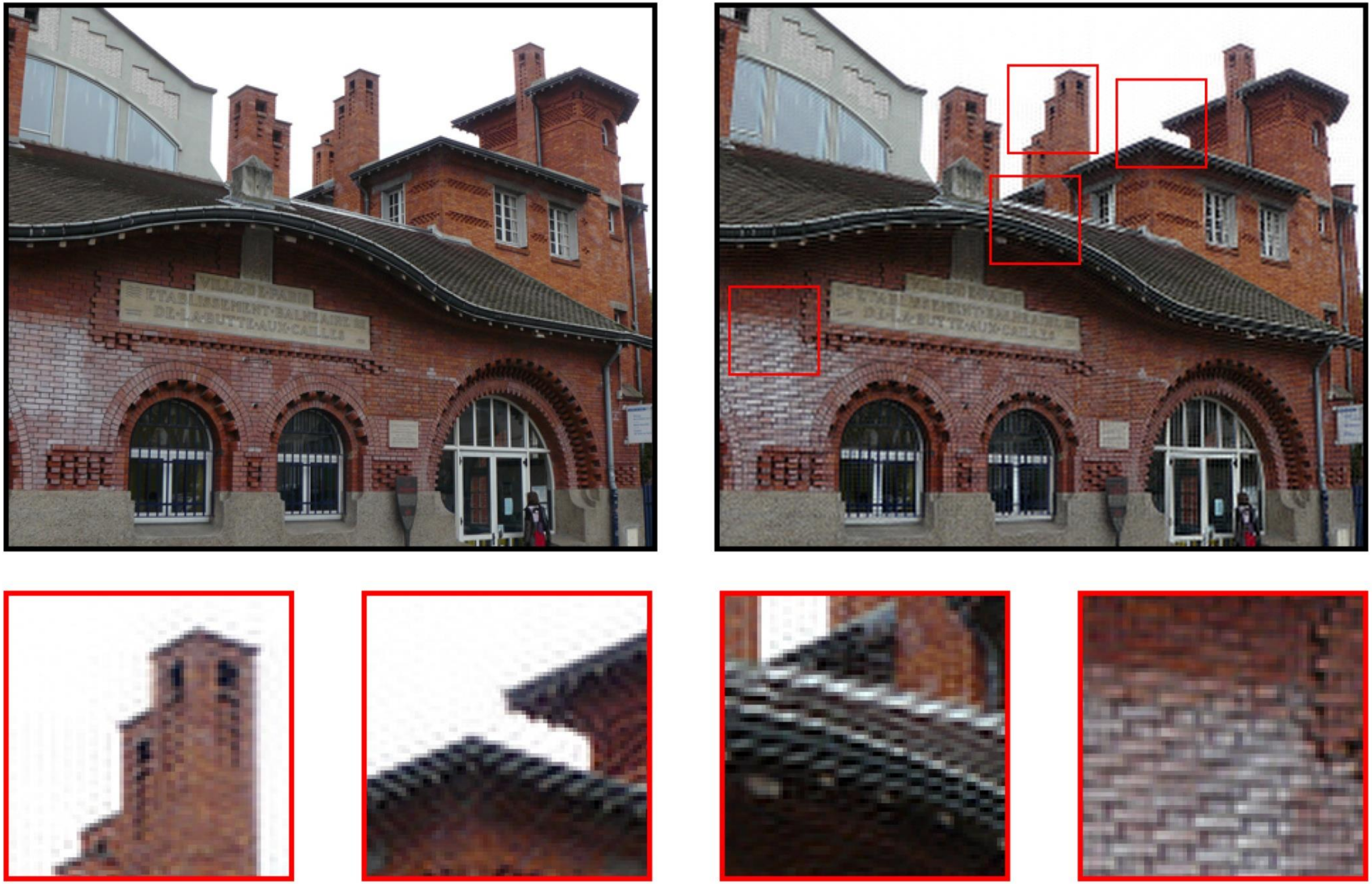
- Si on ne veut pas perdre d'information lors de l'échantillonnage d'une image il faut donc également respecter <u>le théorème de Shannon</u>
- Que se passe-t-il si on ne respecte pas Shannon?
  - Il y a repliement de spectre (aliasing)
  - L'image numérisée est donc détériorée
  - Par exemple c'est exactement l'effet que vous pouvez constater dans certaines images où vidéo : un effet de crénelage (« marche d'escalier ») sur les contours ou un effet « moirage » (des rayures parasites) qui apparaissent sur des zones de l'image

# Numérisation : cas de l'image

- On peut définir la Transformée de Fourier dans le domaine des signaux 2D
  - A gauche : les images
  - A droite : leur Transformée de Fourier



# Numérisation : cas de l'image
# Exemple du non respect du Théorème de Shannon : L'effet crénelage



# Numérisation : cas de l'image

Exemple de non respect du théorème de Shannon :
L'effet « moiré »

# Numérisation : cas de l'image

- Bilan échantillonnage
  - Plus le pas d'échantillonnage est petit, plus l'image aura de pixels

256x256 128x128 64x64 32x32

# Numérisation : cas de l'image

- Bilan quantification
  - Chaque pixel (= chaque niveau de gris ou niveau de couleur) est codé sur plusieurs bits

*6 bits* *4 bits* *3 bits* *2 bits* *1 bit*

# Remise en contexte

## Lors des séance précédente...

- Représentions fréquentielles (notamment la Transformée de Fourier)
- Numérisation des signaux
- Cas particulier des images

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# 4. La Transformée en Cosinus Discret

- La Transformée en Cosinus Discret (ou DCT en anglais) est un autre moyen pour obtenir une représentation d’un signal ou d’une image dans l’espace des fréquences
- Au lieu de projeter le signal sur une base de fonction « exponentielles complexes » comme pour la TFD, la DCT projette le signal sur une base de fonction cosinus
  - Les coefficients de projection sont donc réels et non plus complexes

# La Transformée en Cosinus Discret

- Définition de la DCT 1D

$$X_{DCT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} 2x(n)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi k}{2N}\right)$$

$$avec$$

$$0 \leq k \leq N-1$$

# La Transformée en Cosinus Discret

- Définition de la DCT 2D

$$X_{DCT}[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cos\left(\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N_1}\right) \cos\left(\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N_2}\right)$$

$avec$

$$(k_1, k_2) \in \left[-\frac{N_1}{2}; \frac{N_1}{2}\right[ \times \left[-\frac{N_2}{2}; \frac{N_2}{2}\right[$$

# La Transformée en Cosinus Discret

- Applications
  - La DCT est très utilisée en traitement du signal et de l'image, et spécialement en compression de données.
  - La DCT possède en effet une bonne propriété de « regroupement » de l'énergie : l'information est essentiellement portée par les coefficients basses fréquences.
  - Seuls un petit nombre de coefficients X[k1,k2] sont non-nuls, et peuvent être utilisés pour reconstruire l'image par transformée inverse (IDCT) lors de la décompression.
  - Le gain en termes de compression vient de la suppression des coefficients nuls ou proches de zéro.

# La Transformée en Cosinus Discret

- Ce genre de mécanisme de compression est notamment celui utilisé dans les standards JPEG et MPEG, qui utilisent une DCT 2D sur des blocs de pixels de taille 8x8 (pour des raisons de complexité).

# La Transformée en Cosinus Discret

- Exemple de compression simple par DCT
  - On applique une DCT sur une image par bloc de 8x8 pixels
  - On obtient donc 64 coefficients pour chaque bloc
  - On conserve uniquement quelques coefficients les plus élevés en amplitude. Les autres sont annulés
  - On reconstruit l'image par DCT inverse avec ces coefficients

# La Transformée en Cosinus Discret

- Illustration de cette méthode de compression avec uniquement 10 coefficients de DCT conservés par bloc de 64

- Illustration lors du TP n°1 sous Matlab/Octave

# Remise en contexte

2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
      A. Motivations et Expression de la TFD
      B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et expression finale de la TFD
      C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications
      D. Notion de fenêtrage
      E. Cas particulier des signaux périodiques
      F. Application de la TFD aux Images
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# 5. La Transformée de Fourier Discrète (TFD)

La TFD : ou comment calculer une représentation fréquentielle sur un processeur numérique

Pour aborder la Transformée de Fourier Discrète il est indispensable :

- D'avoir suivi le chapitre sur les Représentions fréquentielles
  - (notamment la Transformée de Fourier)
- D'avoir suivi le chapitre sur la Numérisation des signaux
- D'avoir revu le chapitre dédié à la convolution

# A. Motivations et Expression de la TFD

- Comment calculer un spectre sur un processeur numérique?
- Rappels : Transformée de Fourier telle qu'on l'a vue pour le moment
  - Fait un calcul exact du spectre
  - Nécessite la connaissance du signal continu de moins l'infini à plus l'infini
  - le résultat est une fonction continue
- Elle est donc difficilement implémentable sur un processeur

# Motivations et Expression de la TFD

- On va alors rechercher à faire un calcul approché la Transformée de Fourier qui soit facilement implémentable
  - Transformée de Fourier Discrète (TFD)
- Attention! : Cela restera un calcul approché. Ceci induit forcément une erreur par rapport à la Transformée de Fourier donc des erreurs d 'interprétations sont possibles et donc des possibilités de conclusions fausses sur le phénomène physique
- Il faut donc bien comprendre ce qu'on manipule

# Vers l'expression de la TFD

- Dans les slides suivants on va, pas à pas, :
  - Examiner et résoudre les problèmes qui se posent pour le calcul numérique de la Transformée de Fourier
  - De manière à aboutir à la définition de la Transformée de Fourier Discrète

# Vers l'expression de la TFD (1)

- Problème 1 (déjà résolu dans le chapitre dédié à la numérisation): le signal à analyser est continu en temps et en amplitude
- Solution 1 = on numérise le signal avec une fréquence d'échantillonnage Fe respectant le théorème de Shannon

$$X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2j\pi\nu t}dt$$

$$\Longrightarrow \quad X_1(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)e^{-2j\pi\nu nT_e}$$

# Vers l'expression de la TFD (2)

- Problème 2 : la sommation discrète s'effectue encore de moins l'infini à plus l'infini. En pratique on ne dispose que d'un nombre N fini d'échantillons du signal
- Solution 2= on limite la somme de 0 à N-1 ce qui correspond à la réalité physique

$$\Rightarrow X_2(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2j\pi\nu nT_e}$$

**Attention : ici il s'agit d'une première approximation**

# Vers l'expression de la TFD (3)

- Problème 3 : le résultat du calcul précédent est encore une fonction continue de la fréquence
- Solution 3= on échantillonne la fonction $X_2(\upsilon)$ dans le domaine fréquentiel tous les $\nu_s$ Hertz

$$\Rightarrow \quad X_3(\nu = k\nu_s) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2j\pi nk \frac{\nu_s}{\nu_e}} = X_3(k)$$

**Attention : on a ici une deuxième approximation**

**On ne connaitra pas la valeur du spectre entre 2 points d 'échantillonnage fréquentiel**

Notation:
Echantillon n° k de la TFD c'est-à-dire calculé en $k\nu_s$ Hertz

# Expression de la TFD : Comment choisir $\nu_s$ ?

- Dans la séance suivante nous allons reprendre l’ensemble de ce raisonnement mais graphiquement à partir d’un exemple quelconque
- L’objectif est de trouver une règle sur comment choisir cette période d’ échantillonnage en fréquence $\nu_s$ ?

# Remise en contexte

2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
      A. Motivations et expression de la TFD
      B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et expression finale de la TFD
      C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications
      D. Notion de fenêtrage
      E. Cas particulier des signaux périodiques
      F. Application de la TFD aux Images
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Remise en contexte

Dans ce qui précède :

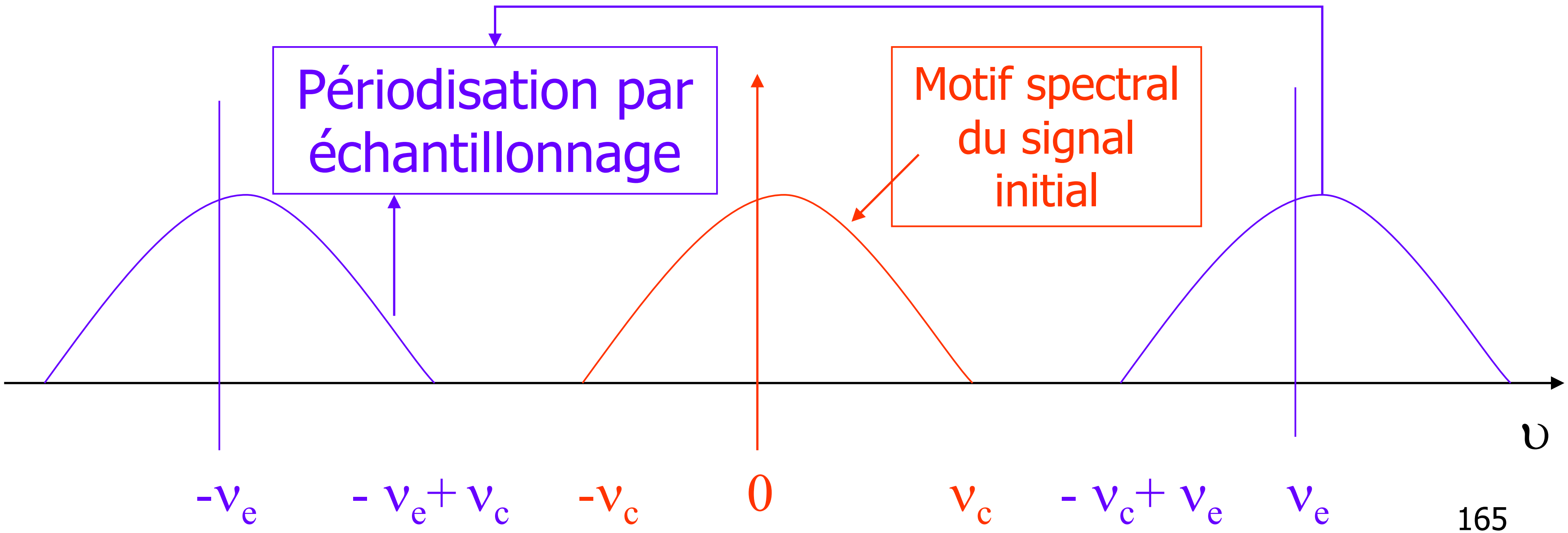
- Le Raisonnement menant à un calcul approché de la transformée de Fourier permettant son calcul numérique
  - Transformée de Fourier Discrète (TFD)

- Le résultat de la TFD est une fonction discrétisée en fréquence tous les $\nu_s$ Hertz

- Dans la précédente séance on a montré sur un exemple comment on pouvait définir la valeur de $\nu_s$

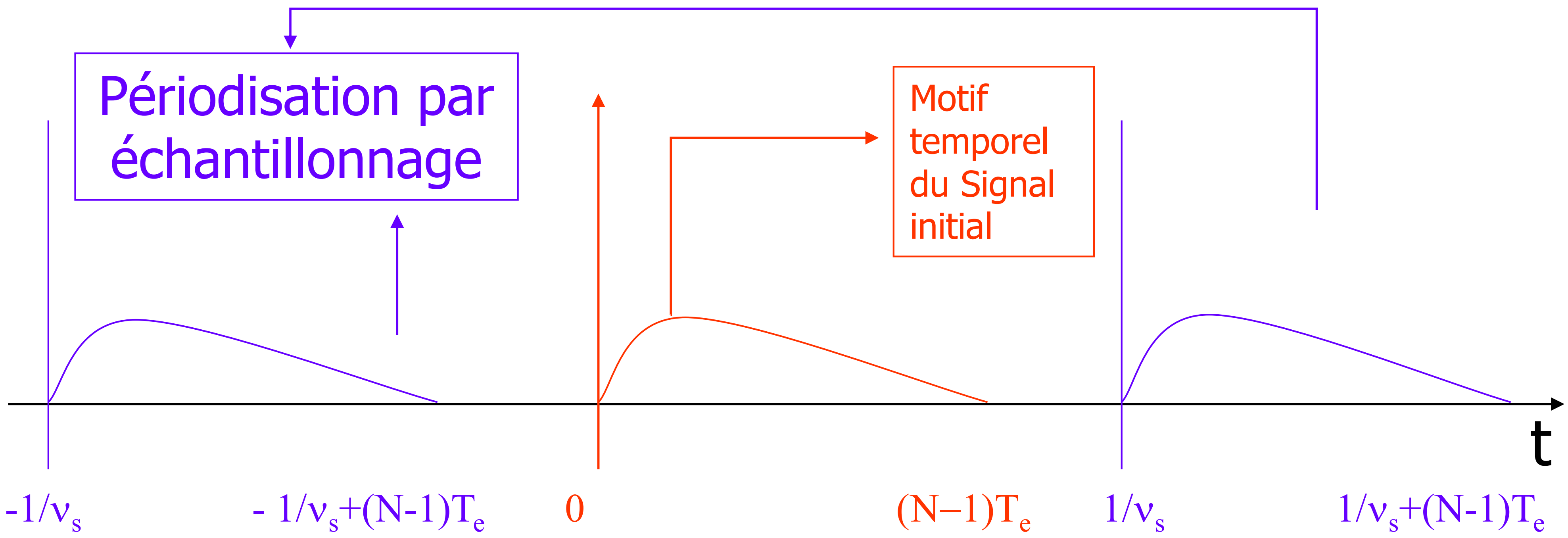
# B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et Expression finale de la TFD

- L 'échantillonnage temporel du signal toutes les Te ($=1/\nu_e$) secondes implique la <u>périodisation</u> du motif spectral tous les $\nu_e$ Hertz



# Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et Expression finale de la TFD

- L 'échantillonnage fréquentiel tous les $\nu_s$ Hertz implique la <u>périodisation du motif temporel tous les $1/\nu_s$ secondes</u>



# Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et Expression finale de la TFD

- Il faut donc éviter les recouvrements des motifs temporels périodisés

$$\Longrightarrow \quad (N-1)T_e < \frac{1}{\nu_s}$$

**On choisit classiquement**

$$\boxed{\nu_s = \frac{1}{NT_e}}$$

$\Rightarrow$ Résolution fréquentielle

# Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et Expression finale de la TFD

- Avec cette valeur de la résolution fréquentielle $\nu_s$, on peut obtenir l'expression finale de la TFD

$$X_3\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e)\, e^{-2j\pi nk \frac{1}{NT_e \nu_e}}$$

$$\Downarrow$$

Expression finale $$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k)$$

<u>Périodique de période N en k donc de période $\nu_e$ en $\nu$</u>

# Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et Expression finale de la TFD

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}}} \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

**Expression de la TFD inverse :**

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{2j\pi nk}{N}} \qquad n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

# Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et Expression finale de la TFD

- Pour améliorer la résolution fréquentielle on peut:
  - Soit augmenter la durée du signal c'est à dire N
  - Soit augmenter Te mais en prenant garde à l'aliasing (toujours respecter le Théorème de Shannon)

  - Une **erreur fréquente** consiste à dire qu'on améliore la résolution en complétant le signal observé par des valeurs nulles afin d'augmenter N artificiellement (**Zéro padding**): ceci améliore la finesse d'analyse mais ne modifie en aucun cas la résolution fréquentielle puisqu'on n'apporte aucune information supplémentaire

# Remise en contexte

2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
    1) L'intérêt de la convolution
    2) Les Représentations Fréquentielles
    3) La Numérisation
    4) La Transformée en Cosinus Discret
    5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
        A. Motivations et expression de la TFD
        B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et expression finale de la TFD
        C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications
        D. Notion de fenêtrage
        E. Cas particulier des signaux périodiques
        F. Application de la TFD aux Images
    6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Colonne n° n (pour n allant de 0 à N-1)

Ligne n°k (pour k allant de 0 à N-1)

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

# C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications

- $x(t) = \sin(2\pi t)$, $N = 4$ et $\nu_e = 4$ Hz
  - $x(0) = 0$; $x(1) = 1$; $x(2) = 0$; $x(3) = -1$

La résolution fréquentielle $\nu_s=1/NTe$ vaut ici 1 Hertz
La TFD sera donc calculée tous les Hertz

$$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = X\left(\nu = \frac{k}{4\times\frac{1}{4}}\right) = X(k) = \sum_{n=0}^{4-1=3} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{4}}$$

$$k \in \{0,1,\ldots,4-1=3\}$$

# C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications

On peut faire le calcul par une approche matricielle avec :

- N = 4

La matrice sera donc de taille 4 x 4 constituées d'exponentielles de type $e^{\frac{-2i\pi nk}{4}}$ avec n (indice de colonne) allant de 0 à 3 et k (indice de ligne) allant de 0 à 3

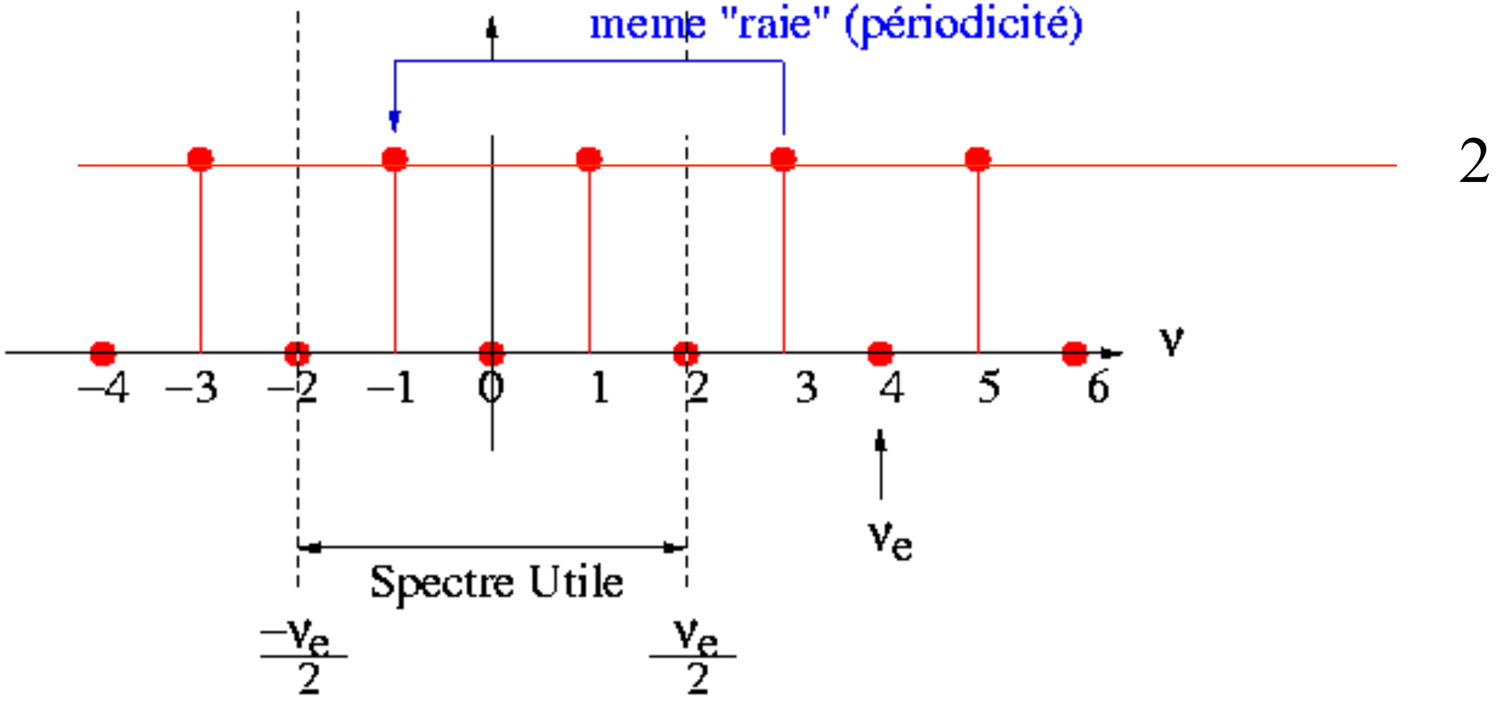
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2i \\ 0 \\ 2i \end{bmatrix}$$

# C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications

Avec le calcul Matriciel on a donc ici les 4 premiers échantillons de la TFD

Pour représenter la TFD sur toutes les fréquences, il suffit de se rappeler qu'elle est périodique tous les $\nu_e$

Module de la TFD



# Remise en contexte

2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
    1) L'intérêt de la convolution
    2) Les Représentations Fréquentielles
    3) La Numérisation
    4) La Transformée en Cosinus Discret
    5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
        A. Motivations et expression de la TFD
        B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et expression finale de la TFD
        C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications
        D. Notion de fenêtrage
        E. Cas particulier des signaux périodiques
        F. Application de la TFD aux Images
    6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Remise en contexte

Dans ce qui précède :

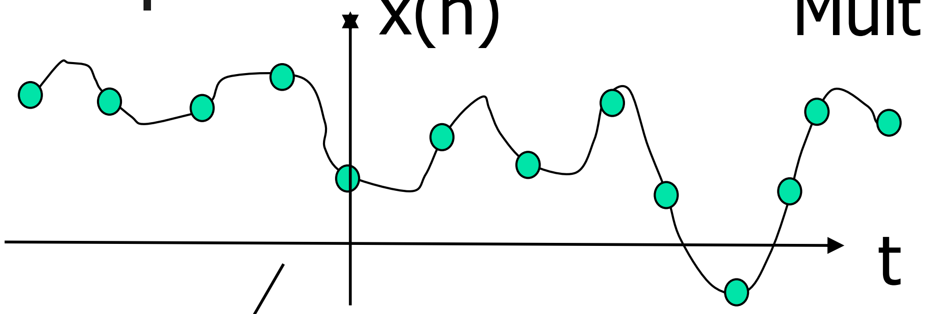
- La Transformée de Fourier discrète permet de calculer numériquement une Transformée de Fourier **grâce à plusieurs approximations**
- Le choix de la résolution fréquentielle de la TFD
- Expression finale de la TFD ainsi que l'approche matricielle simplifiant le calcul (surtout dans un objectif d'implémentation algorithmique

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}}} \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

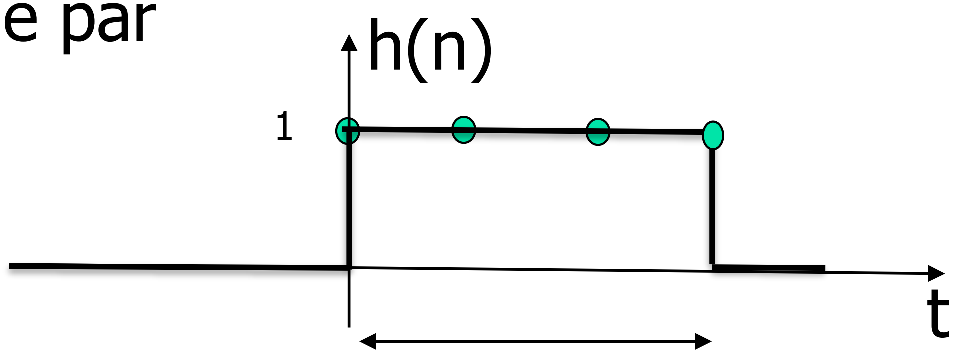
# D. Notion de Fenêtrage

- Pour le calcul de la TFD on ne dispose pas de la connaissance de tous les échantillons du signal x(n) de $-\infty$ à $+\infty$
- Dans la pratique on ne mesure en effet le signal x que pendant une durée limitée
- Seuls N échantillons résultent alors de l'échantillonnage du signal x mesurés
- Tout se passe donc comme si on ne voyait le signal x(t) qu'à travers une « fenêtre » h(t)

# D. Notion de Fenêtrage



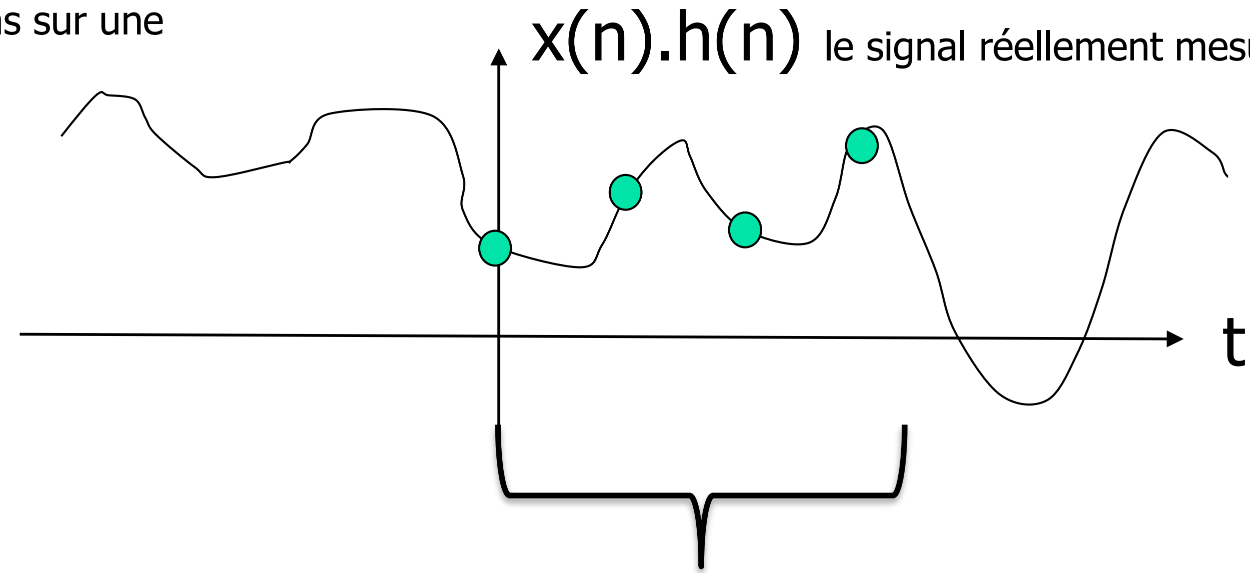

Multiplié par




En pratique on mesure ce signal uniquement sur un intervalle de temps limité et non pas sur une durée infinie

Durée correspondant à l'intervalle de mesure du signal

||




le signal réellement mesuré

N échantillons issus du signal x mesuré

# D. Notion de Fenêtrage

- Le calcul de la TFD se fait uniquement à partir des N échantillons connus du signal x(t)

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2j\pi\frac{kn}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)h(n)]e^{-2j\pi\frac{kn}{N}}$$

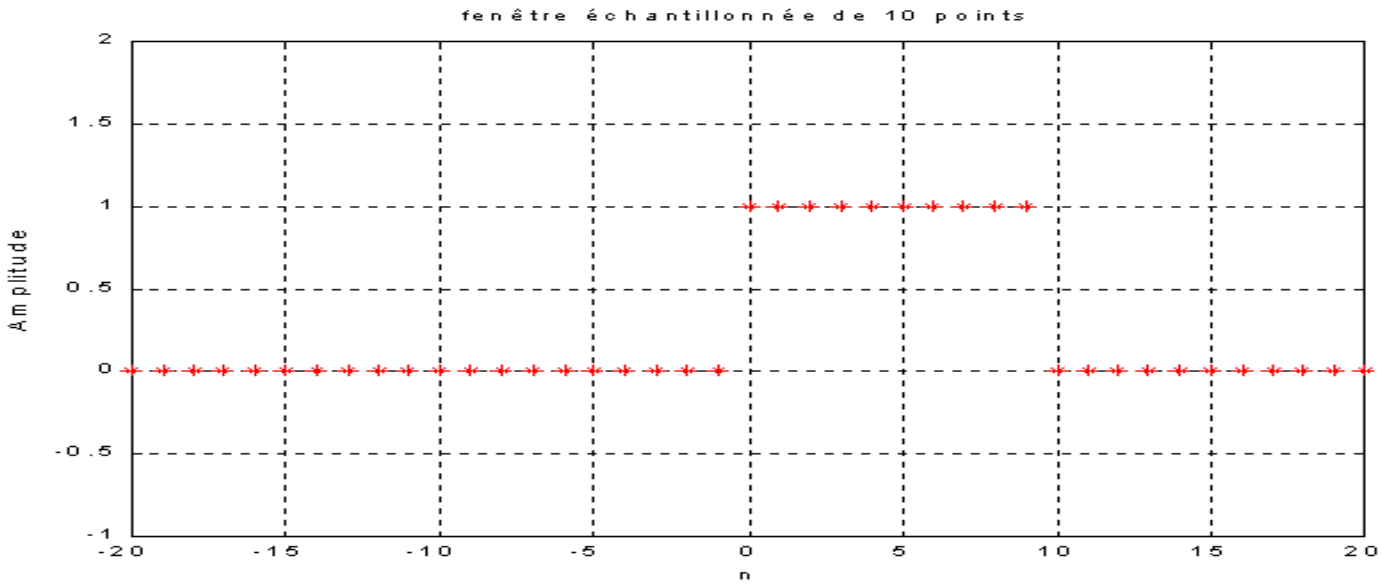
- Calculer une TFD c'est en réalité calculer le spectre du signal x(n)h(n) et donc pas celui de x(n) complet

Où h(n) est donc un signal de type « porte » par défaut car on mesure forcément le signal x sur une durée temporelle limitée

# D. Notion de Fenêtrage

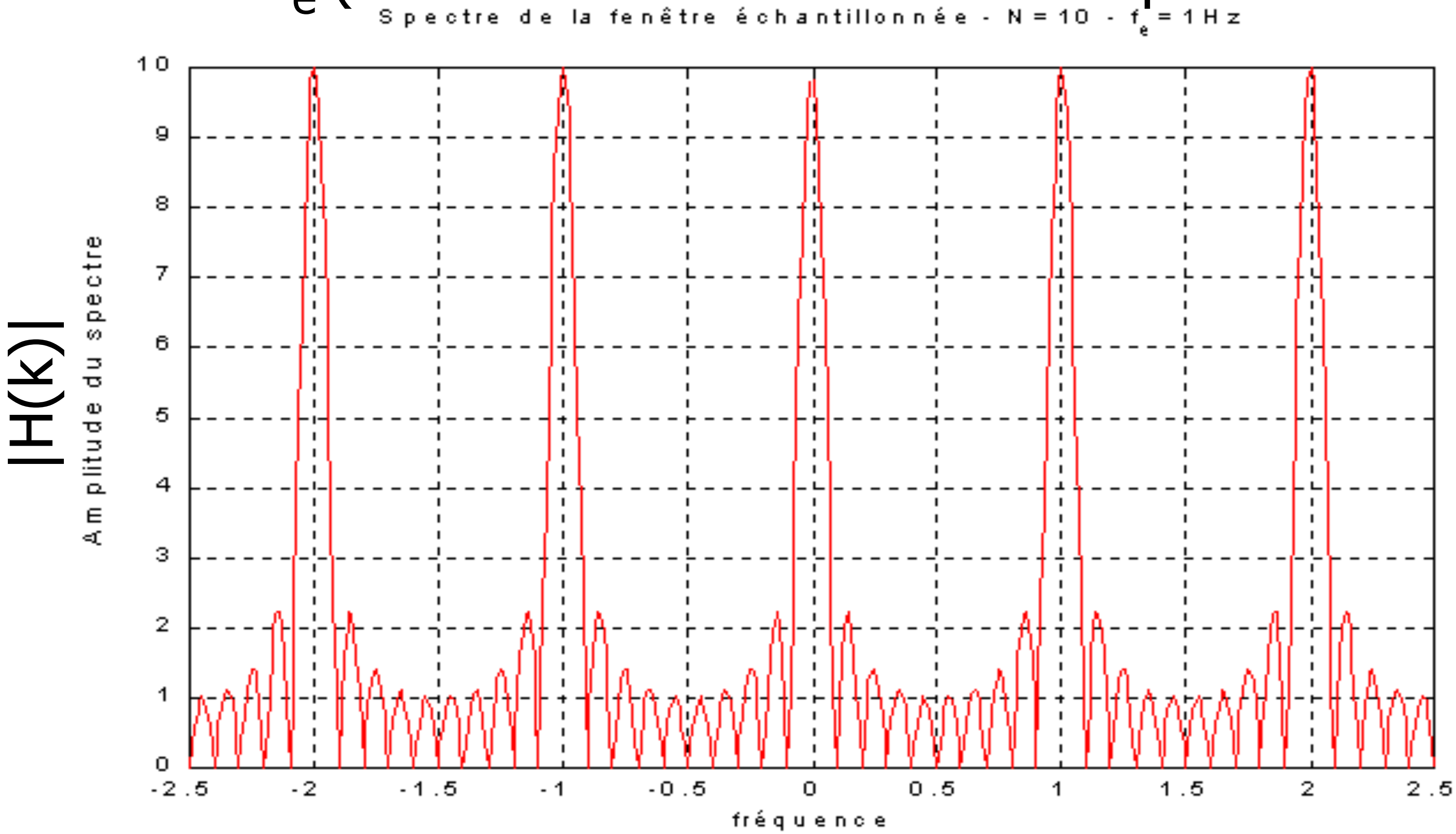
- Cette fenêtre h(n) est par défaut un signal de type porte défini par:

$$h(n) = 1 \quad n \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$
$$h(n) = 0 \qquad \text{sinon}$$



# D. Notion de Fenêtrage

- Fréquentiellement on retrouve un sinus cardinal périodisé tous les $\nu_e$ (car h est échantillonné en temps toutes les Te s)



# D. Notion de Fenêtrage

- Calculer une TFD c'est en réalité calculer le spectre du signal x(n)h(n) et donc <u>pas</u> celui de x(n) complet
- Quelles en sont les conséquences ?

$$x(n)h(n) \xrightarrow{\text{Transformée de Fourier}} TF\big(x(n)\big) * \mathrm{TF}\big(h(n)\big)$$

La Transformée de Fourier que l'on souhaitait calculer

Calculer la TFD de x introduit donc un effet de **convolution de la Transformée de Fourier souhaitée de x(n) par la transformée de Fourier de la fenêtre h**

# D. Notion de Fenêtrage

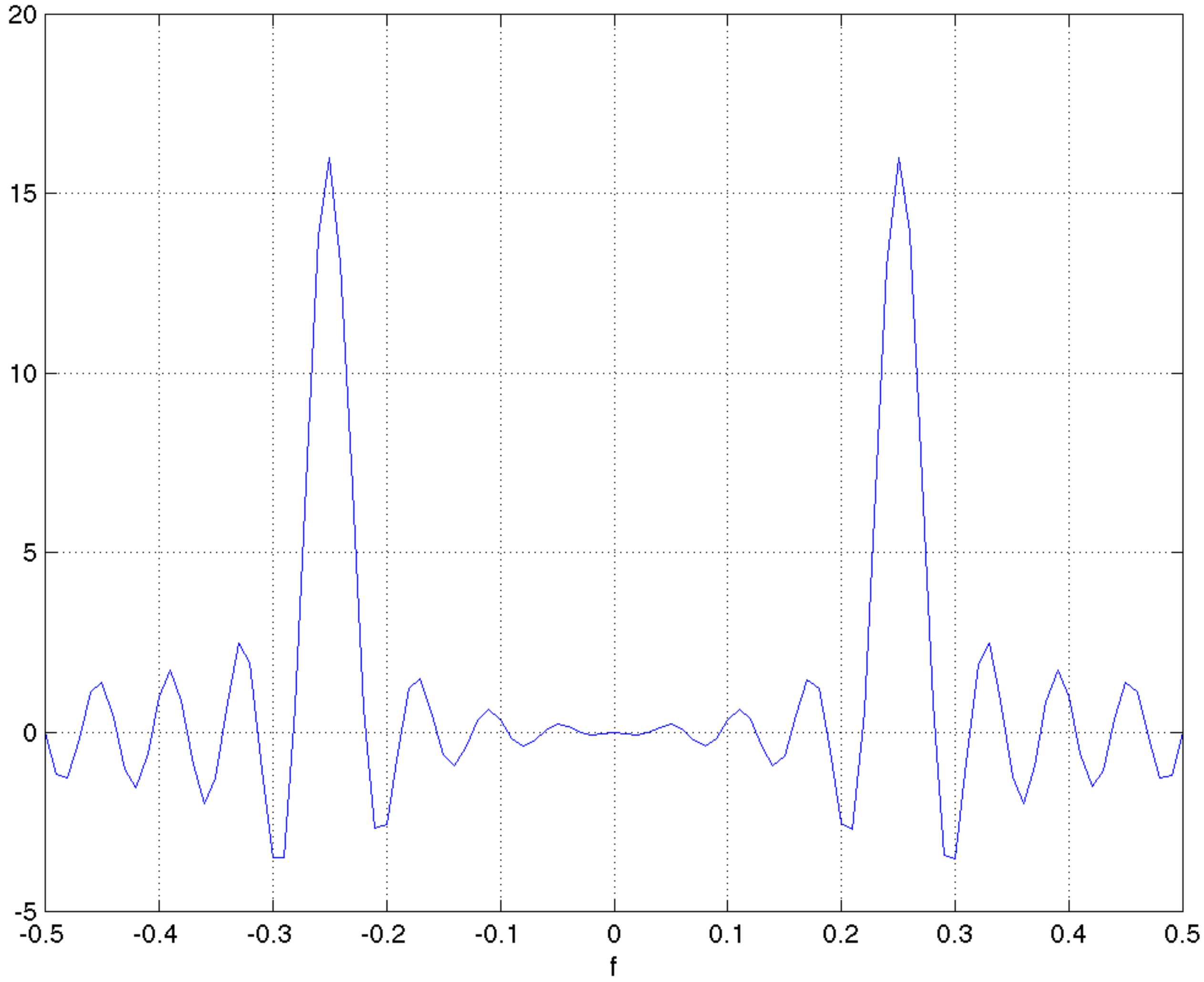
Etudions les conséquences de fenêtrage sur un exemple

- Soit x(t) un signal sinusoïdal de fréquence 0,25 Hz
- On le mesure pendant une certaine durée T et on l'échantillonne avec une période Te pour obtenir N échantillons x(n)
- On calcule sa TFD, donc en réalité la Transformée de Fourier de x(n).h(n) où h(n) est une porte de durée T et échantillonnée à la même période Te
- On va donc visualiser :
  - la transformée de Fourier de x(n) qui devrait être 2 diracs en 0,25 Hz et -0,25 Hz

  convoluée

  - par la transformée de Fourier de h(n) qui est un sinus cardinal

# D. Notion de Fenêtrage



# D. Notion de Fenêtrage

- On constate donc ici toutes les approximations/distorsions introduites par le calcul de la TFD
- On aurait du obtenir 2 diracs mais
- On obtient 2 sinus cardinaux à la place
- Ceux-ci présentent donc tout un ensemble d'oscillations parasites dûes aux lobes secondaires
- La lisibilité et l'interprétation du résultat s'en trouvent donc forcément dégradées
- Attention: en aucun cas le calcul est faux

# D. Notion de Fenêtrage

Quelles solutions face à ces distorsions qui rendent plus difficile l'interprétation de l'information ?

- On peut limiter ces oscillations parasites en utilisant une autre fenêtre c 'est-à-dire une autre fonction $h_f(n)$ dont les lobes spectraux sont d 'amplitudes plus faibles
- Le principe consiste alors à multiplier le signal x(n) mesuré par cette autre fenêtre $h_f(n)$ (différente de la fonction poste) avant de faire le calcul de TFD
- Ainsi la transformée de Fourier de x(n) est convoluée par la transformée de Fourier de $h_f(n)$ qui présente moins de lobes secondaires donc moins de distorsions

# D. Notion de Fenêtrage

$$x(n)h_f(n) \xrightarrow{\text{Transformée de Fourier}} TF\big(x(n)\big) * \mathrm{TF}\big(h_f(n)\big)$$

La Transformée de Fourier que l'on souhaitait calculer

- On peut classiquement utiliser:
  - une fenêtre triangulaire,
  - une fenêtre de hanning,
  - une fenêtre de hamming,
  - une fenêtre de Kaiser,
  - ...

# D. Notion de Fenêtrage

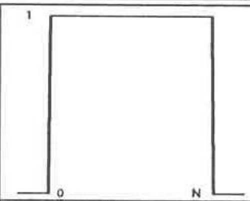
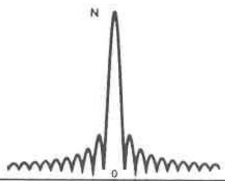
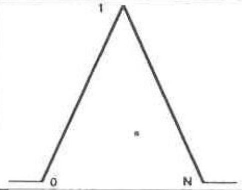
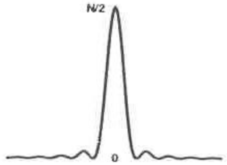
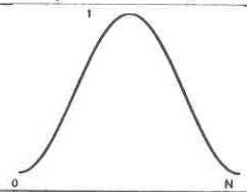
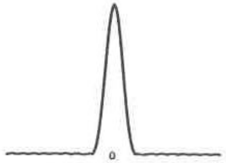
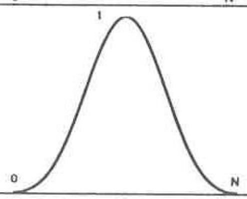
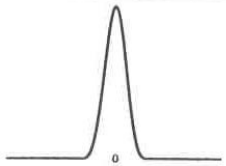
| Nom | Equation $\forall n \in \{0 \ldots N-1\}$ | Représentation temporelle | Représentation fréquentielle | Largeur lob.princ. | Amp. relative $\frac{lob.princ}{lob.sec.}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Rectangulaire** | $w[n] = 1$ |   |   | $\frac{2}{N}$ | -13 dB |
| **Triangulaire** | $w[n] = 1 - \frac{\left\lvert n - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right\rvert}{\left(\frac{N-1}{2}\right)}$ |   |   | $\frac{4}{N}$ | -25 dB |
| **Hamming** | $w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$ |   |   | $\frac{4}{N}$ | -41 dB |
| **Blackman** | $w[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$ |   |   | $\frac{6}{N}$ | -57 dB |

**Table 3** *Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques*

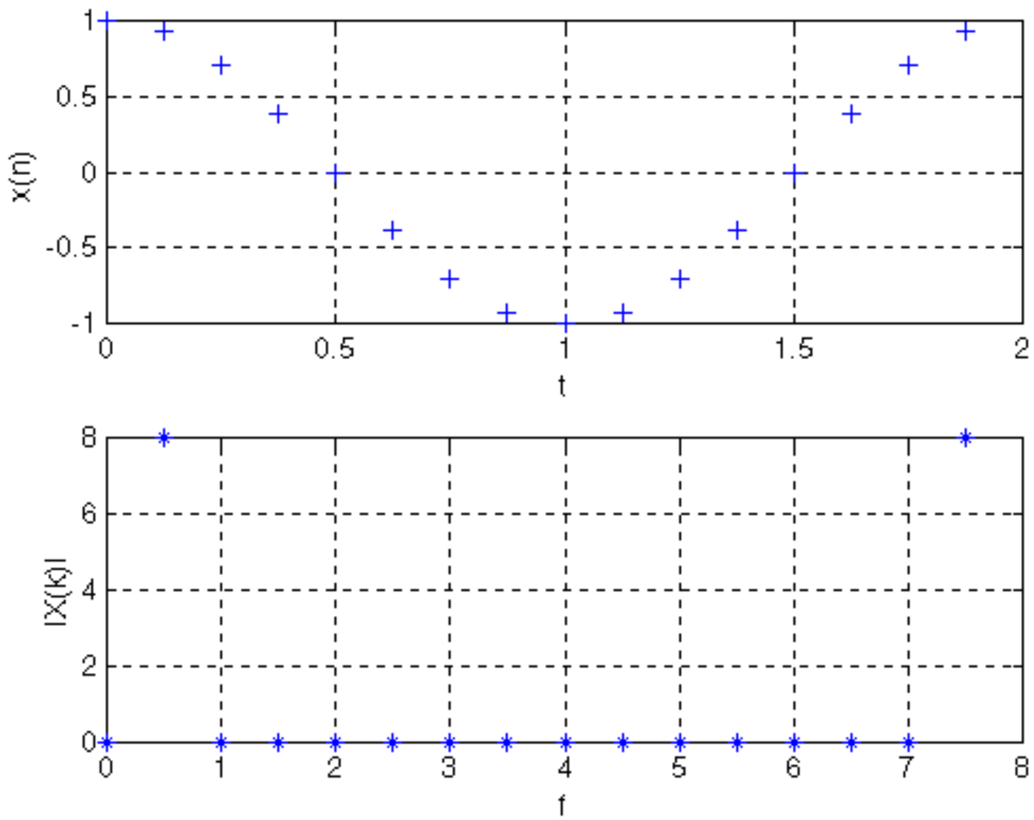
# D. Notion de Fenêtrage

Exemple de calcul de la TFD avec différentes fenêtres

- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
  - $f_0 = 0.5$ Hz
  - fe = 8 Hz
- 3 analyses par TFD :
  - N1 = 16;
  - N2 = 8;
  - N3 = 24;

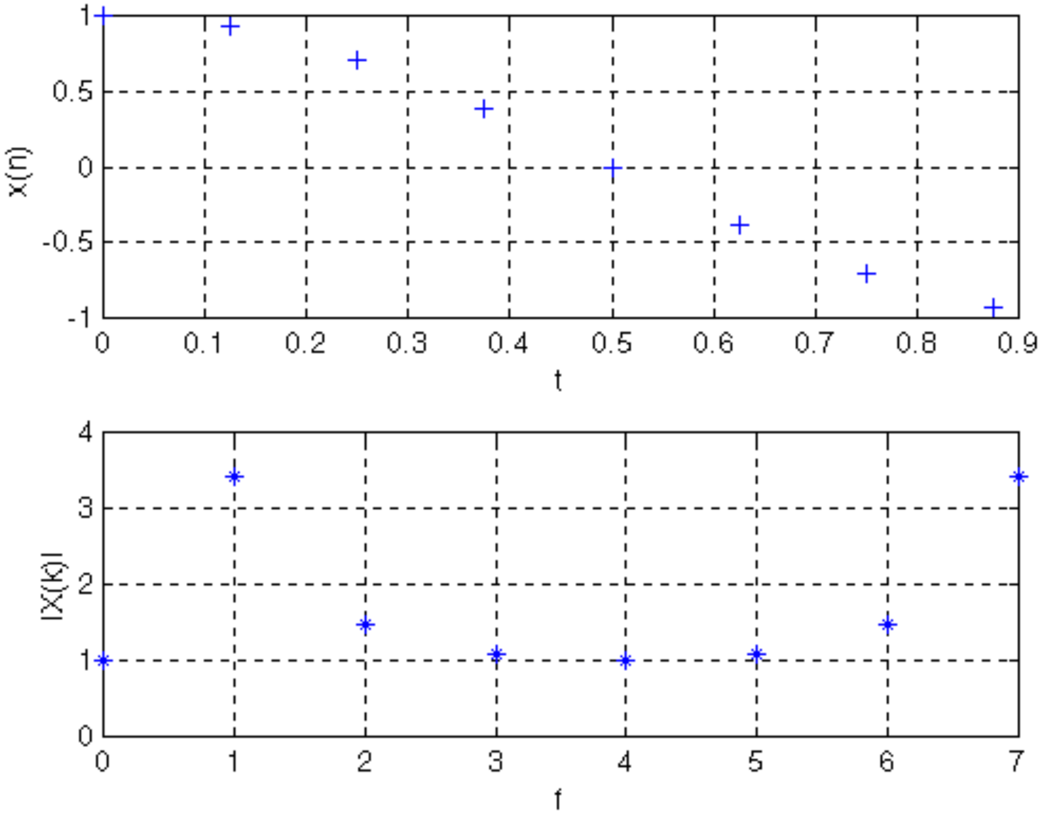
# D. Notion de Fenêtrage

- N1 = 16 ; 1/NTe = 0.5 Hz;



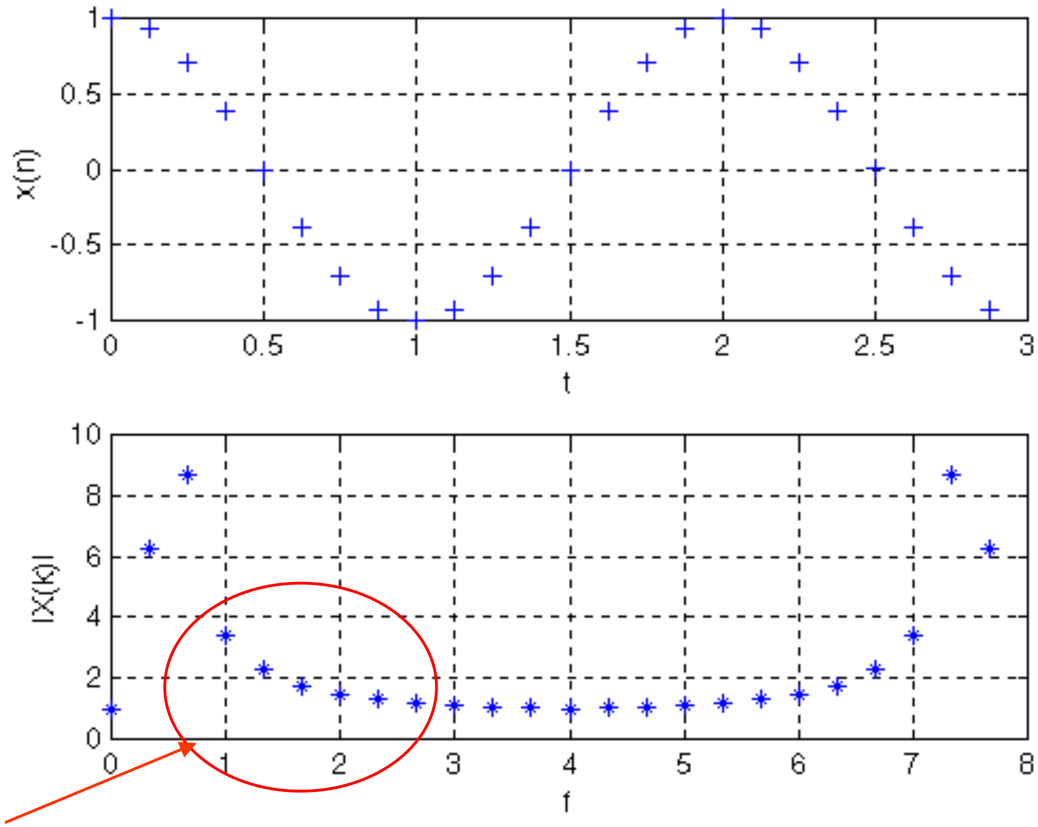
# D. Notion de Fenêtrage

- N1 = 8 ; 1/NTe = 1 Hz;



# D. Notion de Fenêtrage

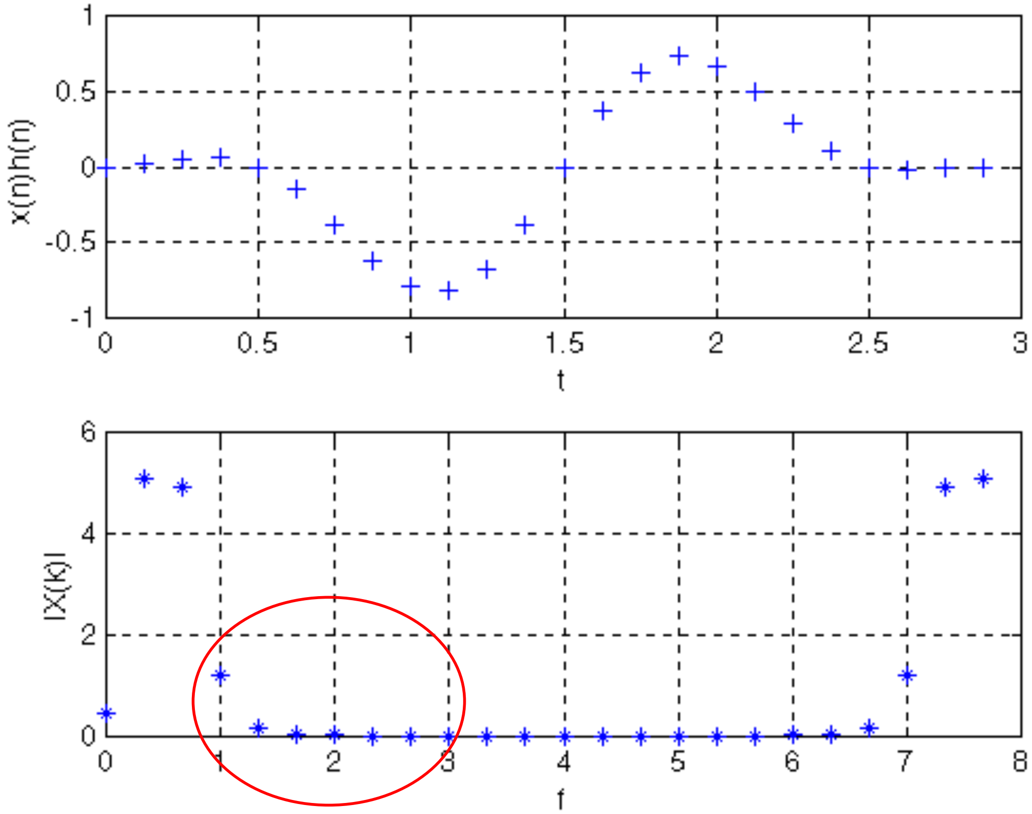
- N1 = 24 ; 1/NTe = 0.333... Hz;




Étalement du aux lobes secondaires

# D. Notion de Fenêtrage

- N1 = 24 avec fenêtrage de hanning



# Remise en contexte

## A été vu précédemment

- On a obtenu l'expression finale de la Transformée de Fourier discrète qui permet de calculer numériquement une Transformée de Fourier **grâce à plusieurs approximations**
- Le résultat de la TFD est une fonction discrète en fréquence. La TFD est calculée tous les $\nu_s$ Hertz.
- $\nu_s$ est la résolution fréquentielle de la TFD et vaut 1/NTe

# Remise en contexte

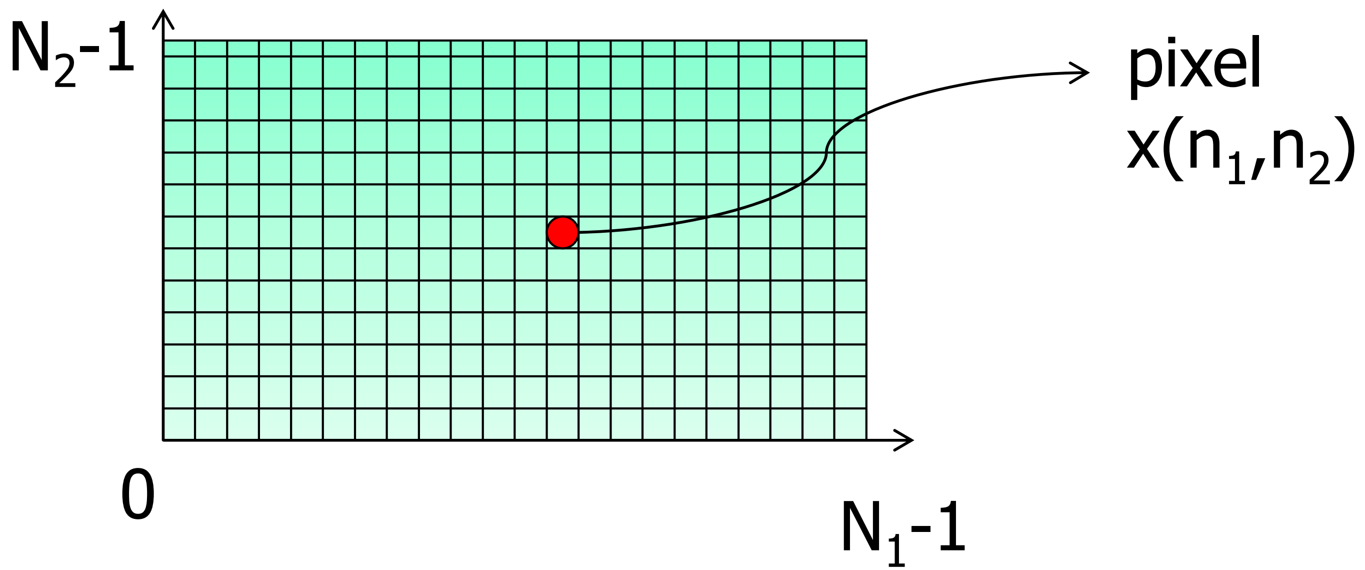
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
      A. Motivations et expression de la TFD
      B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et expression finale de la TFD
      C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications
      D. Notion de fenêtrage
      E. Cas particulier des signaux périodiques
      F. Application de la TFD aux Images
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Remise en contexte

2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
      A. Motivations et expression de la TFD
      B. Choix de la résolution fréquentielle $\nu_s$ et expression finale de la TFD
      C. Calcul matriciel de la TFD, exemples et applications
      D. Notion de fenêtrage
      E. Cas particulier des signaux périodiques
      F. Application de la TFD aux Images
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# F. Application de la TFD aux Images

- Une Image n'est rien d'autre qu'un signal à 2 dimensions
- Soit une image x, qui comporte $N_1$ pixels sur l'axe horizontal et $N_2$ pixels sur l'axe vertical



# Application de la TFD aux Images

- Il est donc possible de définir une TFD qui permet une représentation dans le domaine des fréquences « spatiales »

$$X[k_1,k_2]=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}x(n_1,n_2)e^{\frac{-2\pi j n_1 k_1}{N_1}}e^{\frac{-2\pi j n_2 k_2}{N_2}}$$

$avec$

$$(k_1,k_2)\in\left[-\frac{N_1}{2};\frac{N_1}{2}\right[\times\left[-\frac{N_2}{2};\frac{N_2}{2}\right[$$

# Application de la TFD aux Images

- Cette TFD 2D admet également une inverse qui permet de passer du domaine des fréquences au domaine spatial

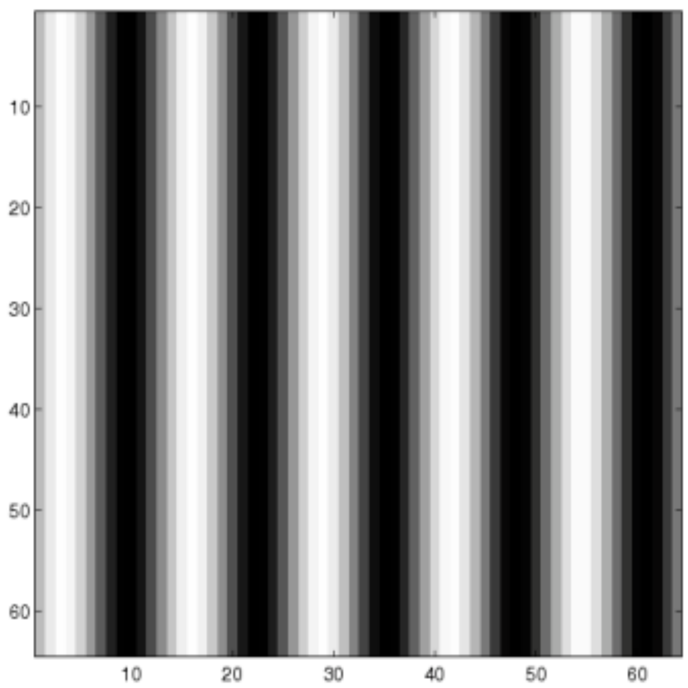
$$x[n_1,n_2]=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}X[k_1,k_2]e^{\frac{2\pi j n_1 k_1}{N_1}}e^{\frac{2\pi j n_2 k_2}{N_2}}$$

$$avec$$

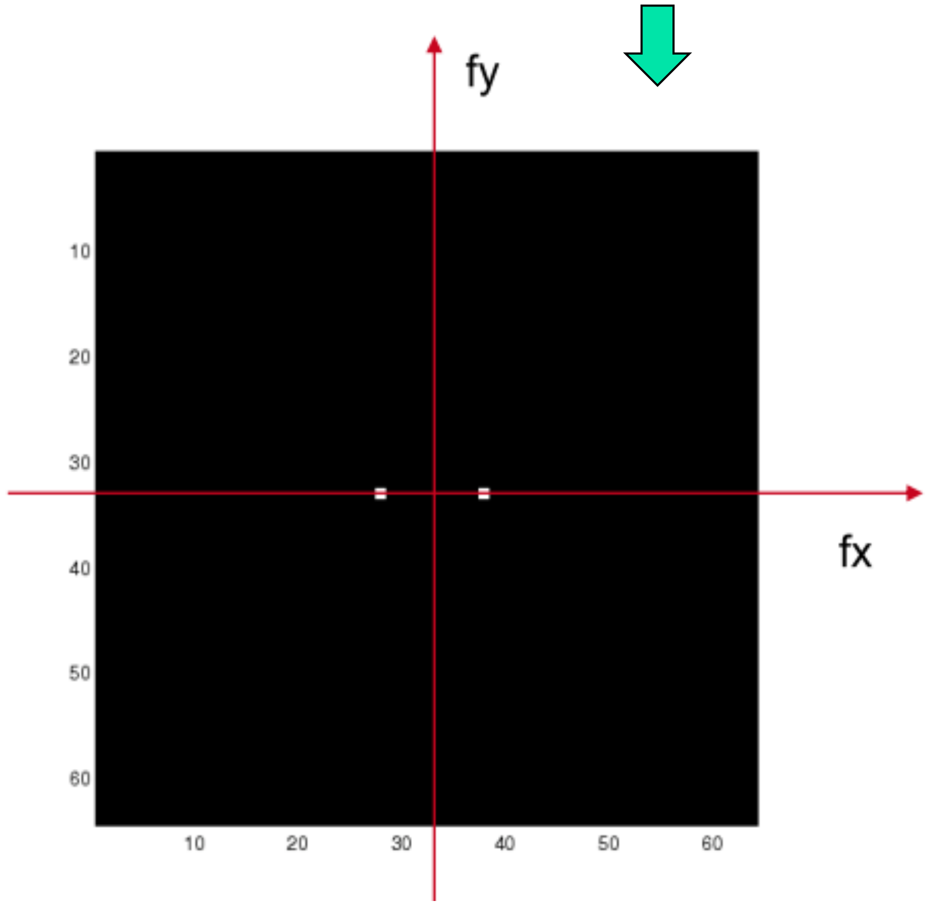
$$(n_1,n_2)\in[0;N_1-1[\times[0;N_2-1[$$

# Application de la TFD aux Images

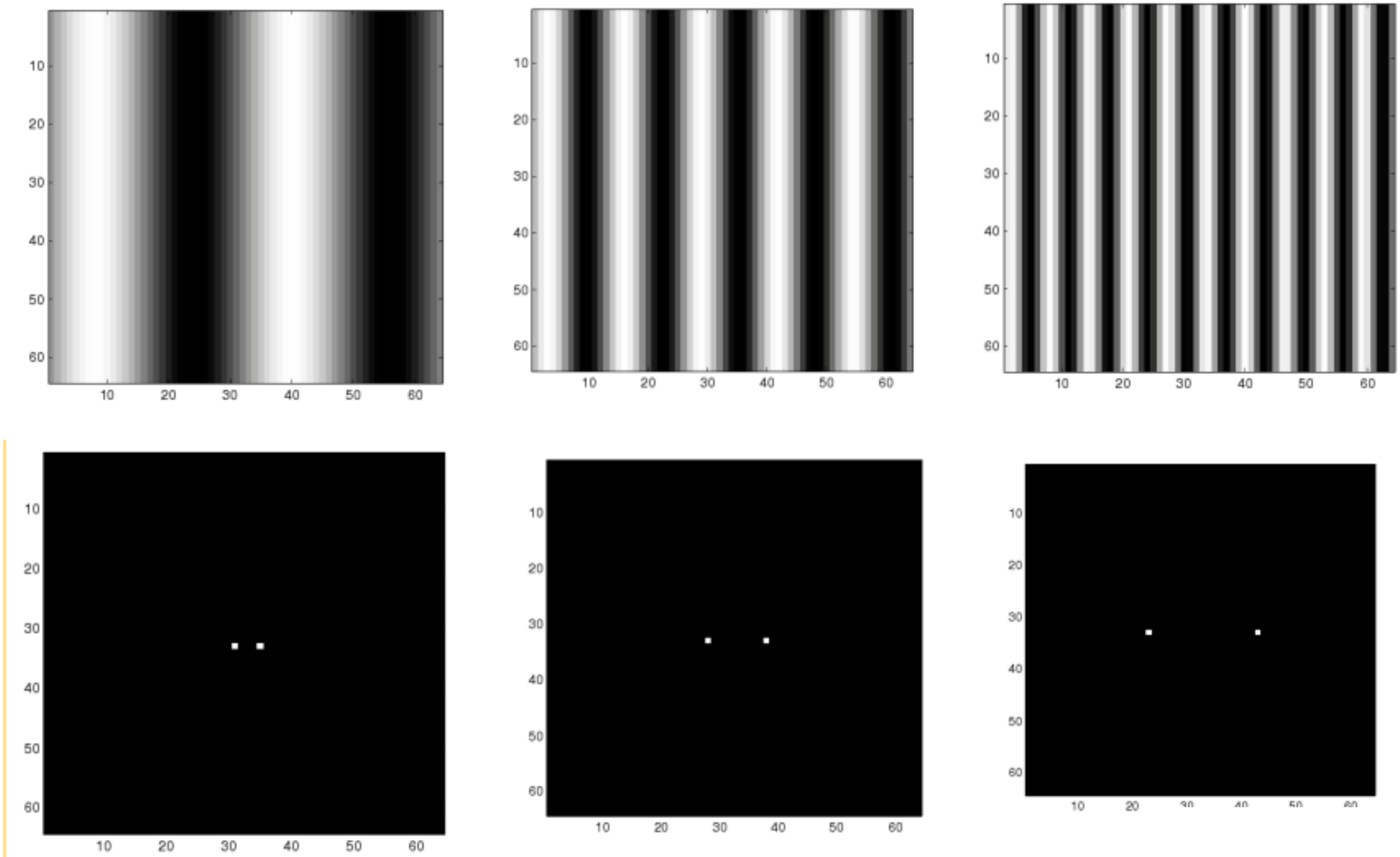
- Quelques exemples de TFD 2D :
  - cas d'une sinusoïde 2D




Module de la TFD 2D

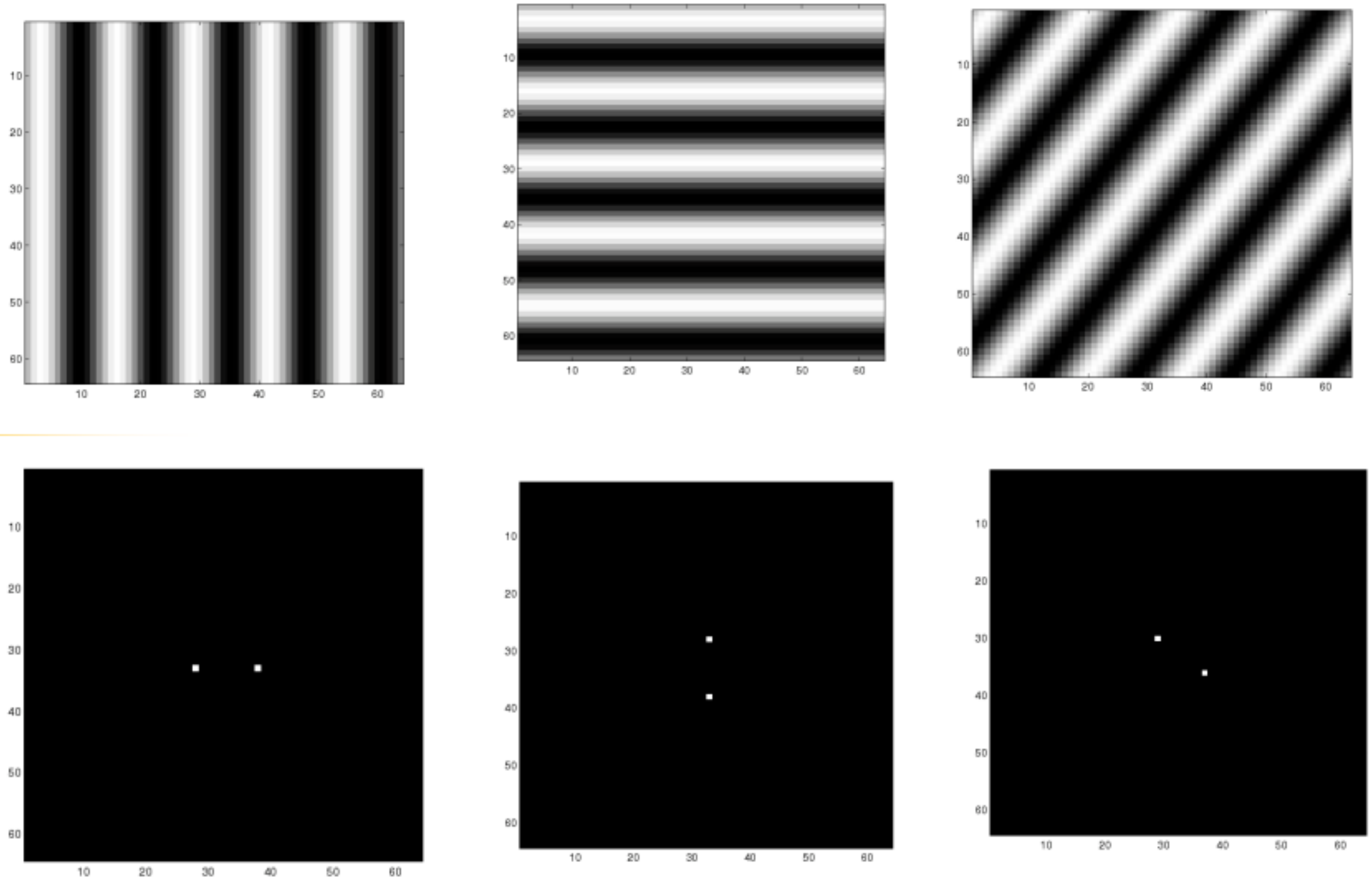


# Application de la TFD aux Images

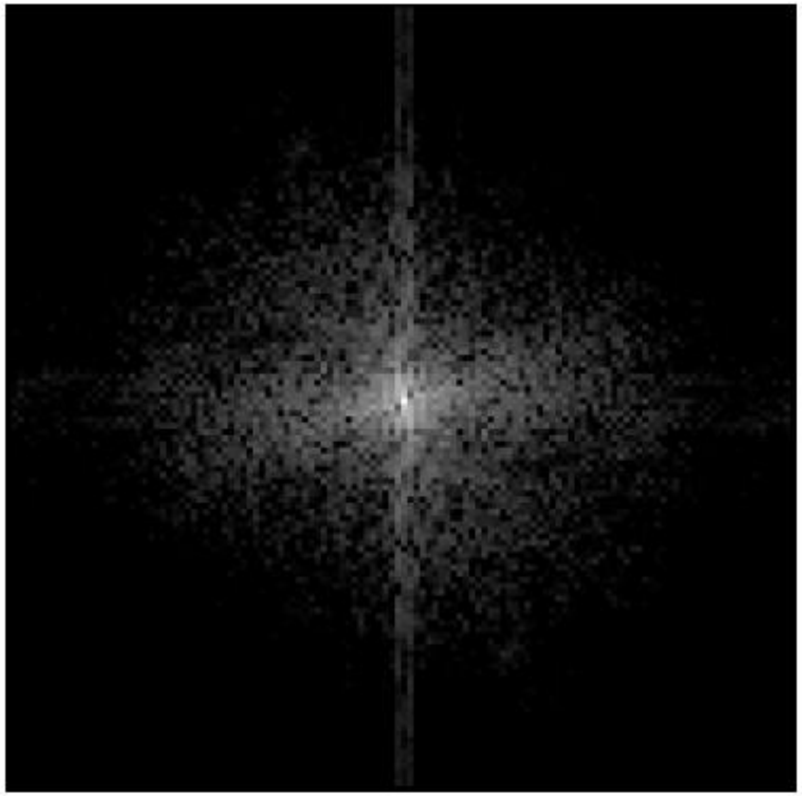


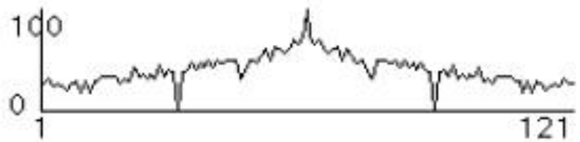
# Application de la TFD aux Images

- Modifions l'orientation de la sinusoïde



# Application de la TFD aux Images





# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Remise en contexte

Pour aborder ce chapitre sur la corrélation et la densité spectrale, il est conseillé d'avoir étudié :

- Le chapitre sur la convolution
- Le chapitre sur la numérisation
- Le chapitre sur les représentations fréquentielles en particulier la Transformée de Fourier

# 6. Corrélation et Densité Spectrale

- Définition de **la corrélation** :
  - Rapport entre deux phénomènes qui varient en fonction l'un de l'autre
  - Lien, rapport réciproque

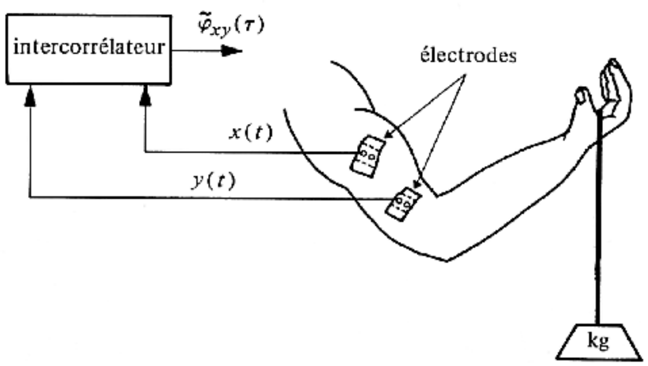
On veut connaître le lien entre deux signaux

$\Leftrightarrow$

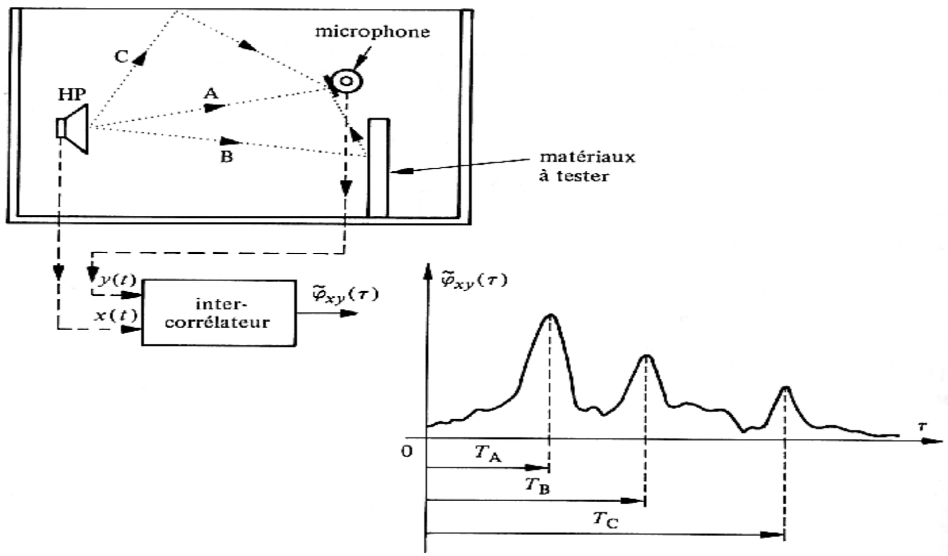
On veut connaître le lien entre deux phénomènes

# Corrélation et Densité Spectrale
## Quelques exemples d'utilisations de la corrélation

L'intercorrélation des signaux provenant d'électrodes placées sur un muscle permettent de détecter si le cellules musculaires travaillent de manière cohérente




Mise en évidence de différents chemins de propagation



# Corrélation et Densité Spectrale

## La corrélation déterministe

- Définition de **l 'autocorrélation** pour x(t) d 'énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- Définition de **l'intercorrélation** pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

# Corrélation et Densité Spectrale

- Interprétation de l 'intercorrélation

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Définit un **produit scalaire** entre deux fonctions

- Analogie **qualitative**

Vecteurs orthogonaux = le plus différent possible $\Rightarrow \dfrac{u.v}{\|u\|\|v\|} = 0$

Vecteurs colinéaires = « ressemblants » $\Rightarrow \dfrac{u.v}{\|u\|\|v\|}$ maximum

# Corrélation et Densité Spectrale

- Interprétation de l 'intercorrélation

**L 'intercorrélation est une mesure (relative) de la ressemblance des signaux $x(t)$ et $y(t-\tau)$**

➡ La fonction $C_{xy}(\tau)$ donne l 'évolution de cette ressemblance en fonction de $\tau$

$\tau$ correspond à l'écart entre les instants de mesure des 2 fonctions x et y

# Corrélation et Densité Spectrale

- Définition de **l 'autocorrélation** pour x(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x^*(t-\tau) dt$$

- Définition de **l 'intercorrélation** pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

# Corrélation et Densité Spectrale

- L'interprétation de l'intercorrélation est la même que pour les signaux d 'énergie finie

**L 'intercorrélation est une mesure (relative) de la ressemblance des signaux x(t) et y(t-$\tau$)**

- $C_{xy}(\tau)$ donne l 'évolution de cette ressemblance en fonction de $\tau$

# Corrélation et Densité Spectrale

- Propriétés de l'autocorrélation
  - Elle est maximale à l'origine

$$C_{XX}(\tau) \leq C_{XX}(0) \qquad \forall \tau$$

  - Elle est hermitienne

$$C_{XX}(\tau) = C_{XX}^{*}(-\tau) \implies$$

Si x(t) est réel,
Cxx est donc paire

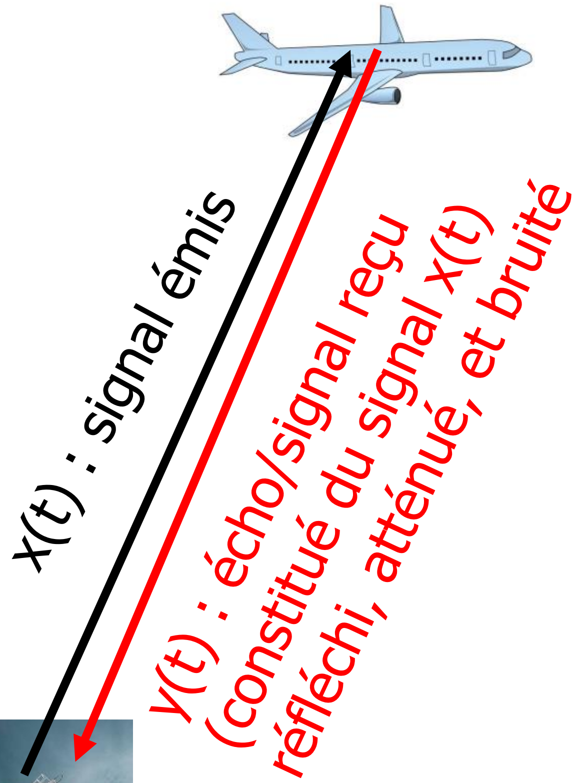
  - Sa transformée de Fourier est égale à la densité spectrale d'énergie/puissance (qui donne la répartition de l'énergie/puissance selon les fréquences)

$$C_{XX}(\tau) \xrightarrow{TF} \gamma_X(\upsilon) \Longleftarrow$$

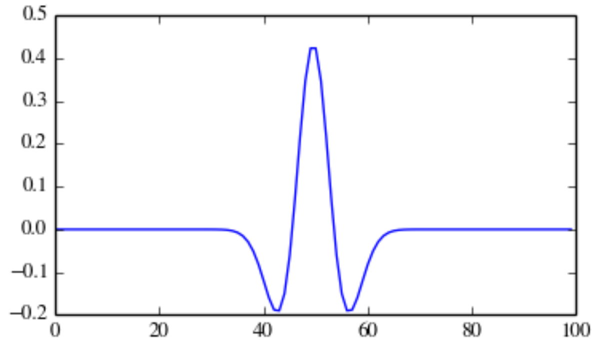
Théorème
de Wiener-Kitchine

# Corrélation et Densité Spectrale

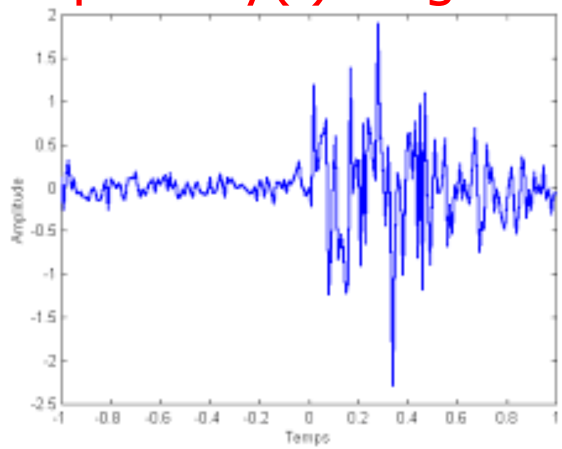
Exemple détaillé : cas du Radar




Exemple de x(t) : signal émis




Exemple de y(t) : signal reçu



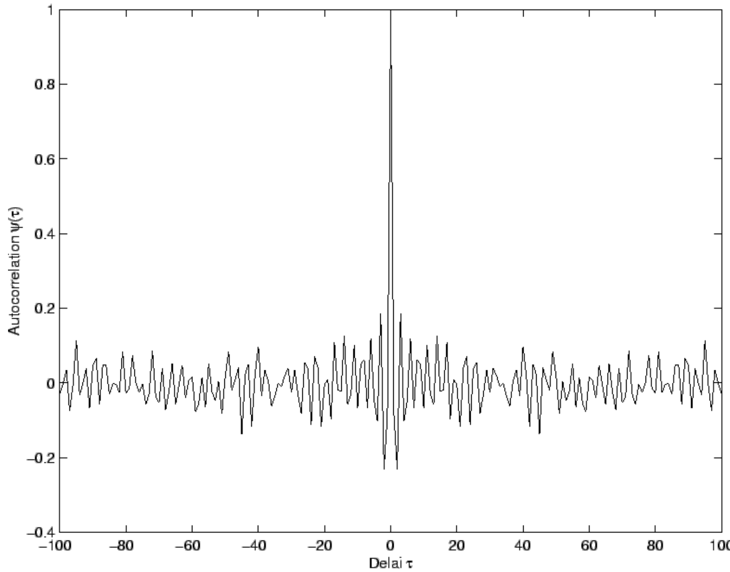

Les enjeux :

- savoir si identifier si oui ou non y(t) contient le signal x(t) réfléchi par l'avion ( = détecter la présence de l'avion)
- Déterminer à quel instant ce signal x(t) est présent dans y(t) pour calculer le retard et donc la position de l'avion

# Corrélation et Densité Spectrale

On va donc utiliser la corrélation pour identifier si une partie du signal y(t) « ressemble » au signal x(t)

Exemple de résultat d'intercorrélation entre y(t) et x(t)

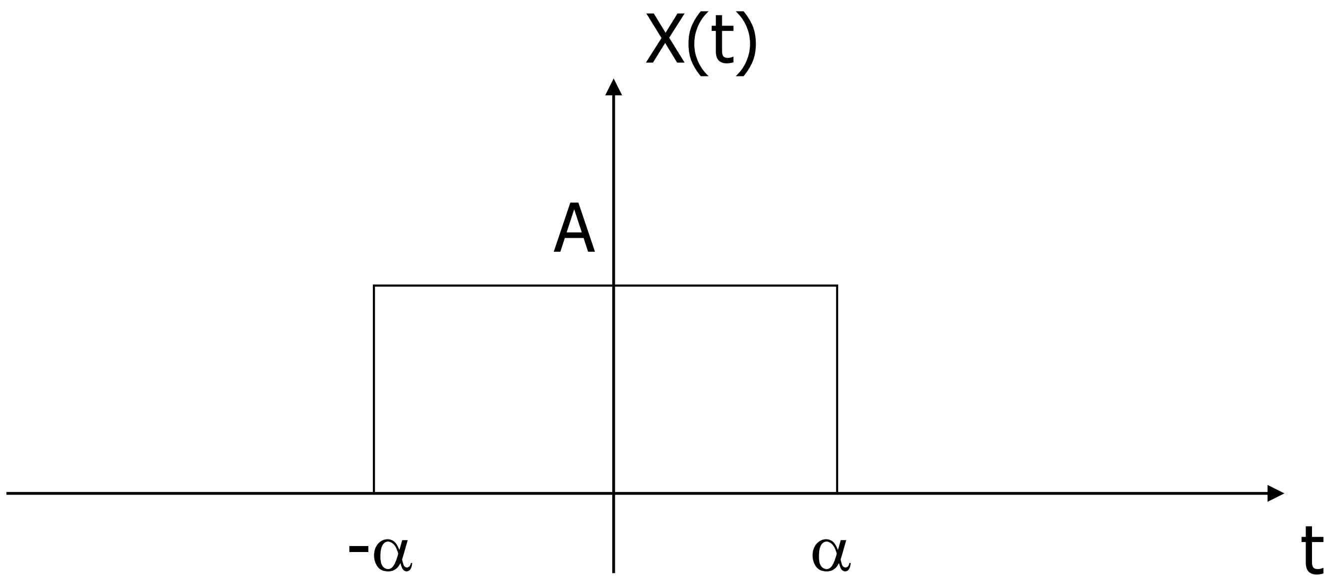



Le pic de corrélation nous indique sans ambiguïté que y(t) contient le signal x(t)

L'instant t où se situe ce pic nous donne le temps de propagation du signal x(t) et donc permettra de déterminer la position de l'avion

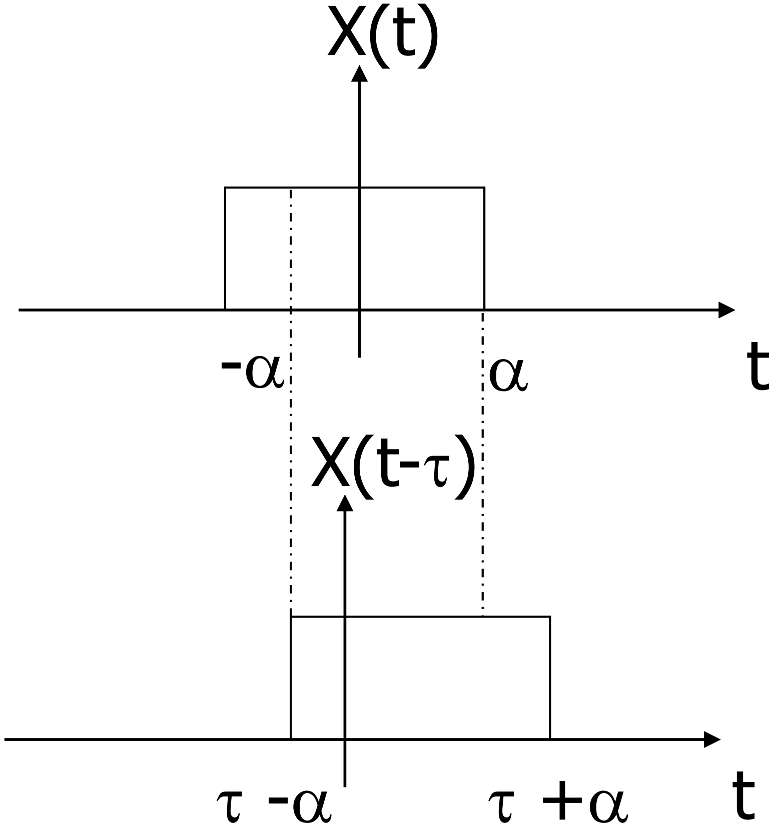
# Corrélation et Densité Spectrale

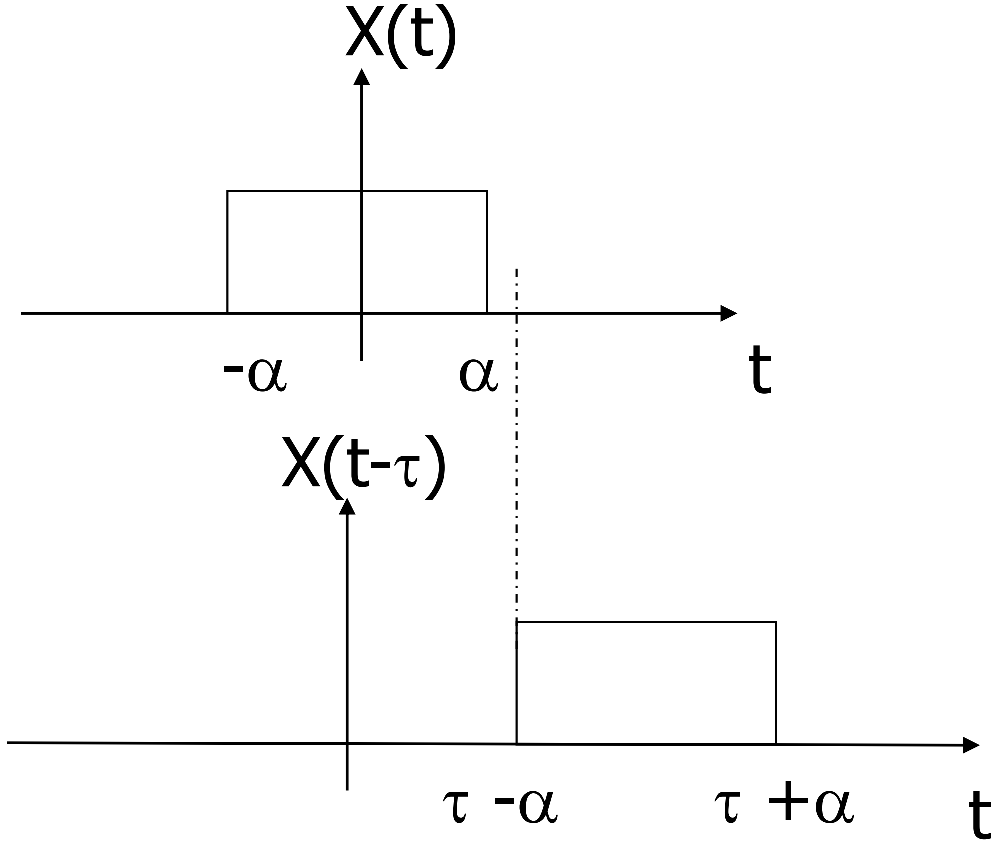
- Exemple de calcul direct de corrélation
  - Fonction « Porte »
    - Ce signal à une énergie finie ($Ex=2A^2\alpha$)
    - X(t) est réelle donc Cxx sera paire



# Corrélation et Densité Spectrale

- 2 cas peuvent se produirent (pour $\tau$ positif)



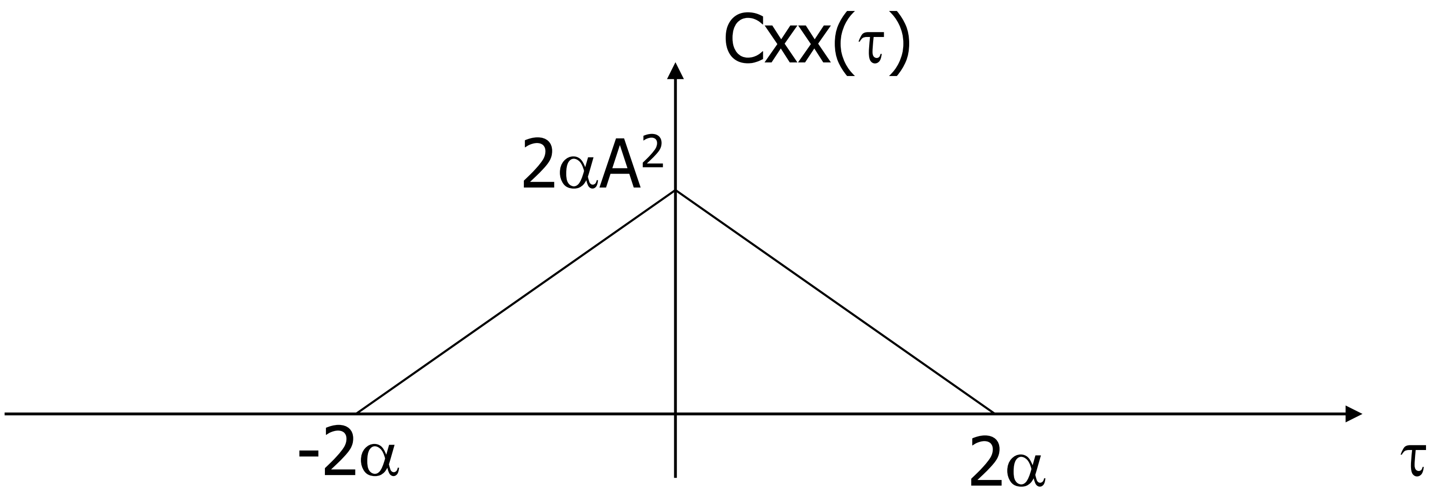

$$\tau - \alpha \leq \alpha \Rightarrow \tau \leq 2\alpha \qquad\qquad \tau - \alpha \geq \alpha \Rightarrow \tau \geq 2\alpha$$

# Corrélation et Densité Spectrale

- Si $\tau \geq 2\alpha \Rightarrow x(t)x(t-\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{xx}(\tau) = 0$

- Si $\tau \leq 2\alpha \Rightarrow x(t)x(t-\tau) = \begin{cases} A^2 & \text{si} \quad t \in [\tau-\alpha, \alpha] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$\Rightarrow C_{xx}(\tau) = \int_{\tau-\alpha}^{\alpha} A^2 dt = A^2(\alpha - \tau + \alpha) = A^2(2\alpha - \tau)$$



# Corrélation et Densité Spectrale

## La Densité Spectrale

- Il s'agit d'un moyen pour représenter l'évolution de l'énergie ou de la puissance d'un signal en fonction de la fréquence

- La Densité Spectrale d'Energie (ou de Puissance) est définie comme étant la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$\gamma_x(f) = TF\left[C_{xx}(\tau)\right]$$

# Corrélation et Densité Spectrale

La DSE correspond à la répartition de l’énergie en fonction de la fréquence

La DSP correspond à la répartition de la puissance en fonction de la fréquence

# Corrélation et Densité Spectrale

- Lien entre autocorrélation et répartition énergétique si x(t) est d 'énergie finie (1/2)

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = [x(t) * x^*(-t)](\tau)$$

$$\Longrightarrow \quad TF(C_{xx}(\tau)) = X(\nu)X^*(\nu) = |X(\nu)|^2$$

**OR** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 e^{2i\pi\nu(t=0)} d\nu = C_{xx}(0)$

# Corrélation et Densité Spectrale

- Lien entre autocorrélation et répartition énergétique si x(t) est d 'énergie finie (2/2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

Donc **$|X(\nu)|^2$** = énergie par intervalle de fréquence = **densité spectrale d 'énergie** (Joule/Herz)

# Corrélation et Densité Spectrale

- Lien entre autocorrélation et répartition de puissance si x(t) est d 'énergie infinie et de puissance finie (1/2)

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$\Phi_x(\nu) = \mathrm{TF}[C_{xx}(\tau)]$$

**OR** $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(\nu)d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(\nu)e^{2i\pi\nu(t=0)}d\nu = C_{xx}(0)$

# Corrélation et Densité Spectrale

- Lien entre autocorrélation et répartition de puissance si x(t) est d 'énergie infinie et de puissance finie (2/2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(\nu) d\nu = C_{XX}(0) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = P_X$$

Donc $\Phi_x(\nu)$ = puissance par intervalle de fréquence = **densité spectrale de puissance** (Watt/Hertz = Joule)

# Corrélation et Densité Spectrale

- On voit donc apparaître les notions de densités spectrales de puissance et d'énergie
  - En résumé :
    - Signaux **d'énergie finie**

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\upsilon)d\upsilon$$

Densité spectrale d'énergie

    - Signaux de **puissance finie**

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\upsilon)d\upsilon$$

Densité spectrale de puissance

# Corrélation et Densité Spectrale

- Autres relations énergétiques importantes :
  - Signaux d'énergie finie
    - Théorème de Parseval
      - Conservation de l'énergie totale par passage à la transformée de Fourier

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\upsilon)|^2 \, d\upsilon}$$

    - On en déduit que pour les signaux déterministes à énergie finie

$$\boxed{\gamma_x(\upsilon) = |X(\upsilon)|^2}$$

# Corrélation et Densité Spectrale Cas Numérique

- Energie et Puissance d 'un signal échantillonné

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

$$P_x = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$$

# Corrélation et Densité Spectrale cas numérique

- Calcul de l'intercorrélation pour un signal échantillonné :

$$C_{xy}(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n-p)$$

$$C_{xy}(p) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n)y^*(n-p)$$

- La DSE (ou DSP) reste définie comme étant la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

# Remise en contexte

1. Déroulement du Module et Introduction sur le Traitement du Signal
2. Traitement des Signaux et des Images Déterministes
   1) L'intérêt de la convolution
   2) Les Représentations Fréquentielles
   3) La Numérisation
   4) La Transformée en Cosinus Discret
   5) La Transformée De Fourier Discrète (TFD)
   6) Corrélation et Densité Spectrale
3. Introduction à l'étude des Signaux et Images Aléatoires

# Remise en contexte

Pour aborder ce chapitre sur l'analyse des signaux aléatoires, il est indispensable d'avoir étudié le chapitre complet dédié au traitement des signaux déterministe

Il est aussi nécessaire de maîtriser les concepts mathématiques liés aux probabilités et aux statistiques

# 3. Introduction à l'étude des signaux aléatoires

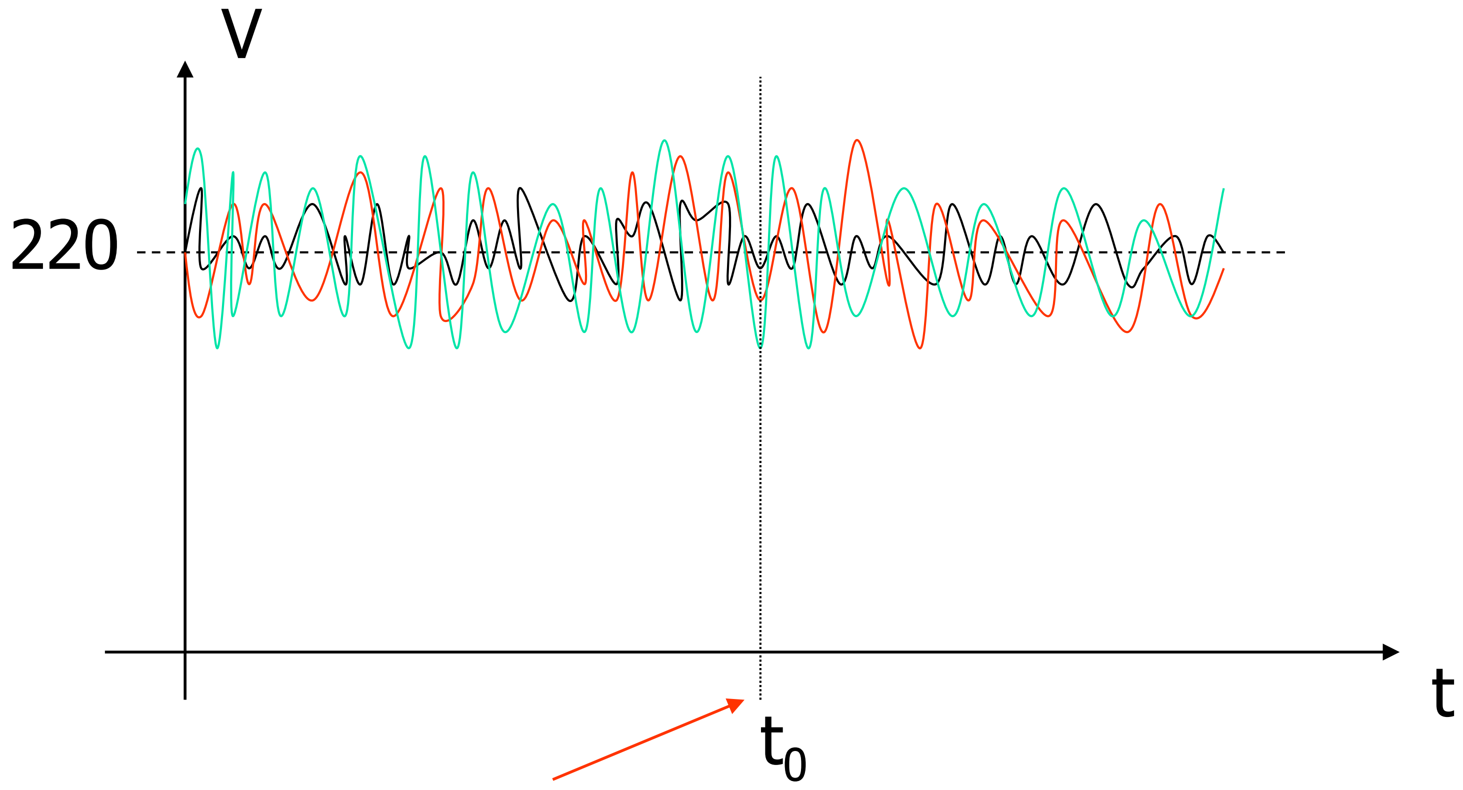
- Il existe peu de signaux purement déterministes car généralement un certain nombre de parasites viennent se superposer au signal que l'on cherche à mesurer
  - Ces parasites sont appelés « bruit »
  - Toute observation est donc un signal aléatoire

- Un signal aléatoire est associé à un **processus stochastique** (ou aléatoire)

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Notion de processus stochastique
  - Il s'agit d'une fonction paramétrée généralement par deux arguments (le temps et un paramètre aléatoire) donc non reproductible
  - Exemple : la tension du réseau EDF
    - Sensée être constante et égale à 220V
    - En réalité cette fonction varie en fonction du temps

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires




Si on « coupe » à $t_0$ donné, on obtient une **variable aléatoire**

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Caractéristiques des signaux aléatoires
  - Moments d'ordre 1 et 2

$$\boxed{E\{x(t)\} = m_1(t)} \longrightarrow$$

Moment d'ordre 1
encore appelée **Moyenne** statistique

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} = m_{11}(t_1, t_2) \longrightarrow$$

covariance

$$\boxed{E\{x^2(t)\} = m_{11}(t, t)}$$

Moment d'ordre 2

$$\boxed{E\{x^2(t)\} - E^2\{x(t)\}} \longrightarrow$$

**variance**

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Stationnarité
  - La stationnarité est une propriété qui traduit l'invariance d'un système par translation de l'origine des temps
  - d'ordre 1 : moyenne invariante dans le temps

$$E\{x(t)\} = m_1(t) = m_1 \qquad \forall t$$

  - d'ordre 2 ou stationnarité au sens large : la covariance ne dépend que de la différence des instants de mesures

$$E\{x(t)\} = m_1(t) = m_1 \qquad \forall t$$

et

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} = m_{11}(t_1, t_2) = m_{11}(0, t_1 - t_2) = m_{11}(\tau)$$

avec $\quad \tau = t_1 - t_2$

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Lorsque un signal possède une moyenne et une variance qui vérifient ces 2 égalités sans autre information supplémentaire sur les propriétés statistiques, le signal aléatoire est dit <u>stationnaire au sens large</u>
  - la covariance d'un signal aléatoire stationnaire s'appelle alors la **fonction d'autocorrélation** centrée

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Densité spectrale de puissance
  - Théorème de Wiener-Kitchine
    - Lorsque que le signal aléatoire est stationnaire, la DSP est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation
    - C'est la seule représentation fréquentielle possible pour un signal aléatoire

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

## Modélisation classique du bruit

Bruit Blanc → Densité spectrale de puissance uniforme sur les fréquences

Processus Gaussien → L'ensemble des valeurs possibles du bruit suit une loi normale

Centré → La moyenne du processus est nulle

Stationnaire →

- Moyenne indépendante du temps
- Fonction d'autocorrélation dépendante uniquement de l'écart des temps de mesure

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Bruit blanc
  - Définition : on appelle bruit blanc un signal aléatoire B(t) stationnaire, généralement centré tel sa fonction d'autocorrélation non centrée vaut :

$$\Gamma_B(\tau) = \Gamma_B(0)\delta(\tau)$$

  - Le qualificatif blanc vient du fait que la DSP est une fonction constante $\forall f$

# Introduction à l’étude des signaux aléatoires

- Processus gaussien
  - Les processus gaussiens jouent un rôle fondamental en pratique
  - La loi de gauss est en effet naturellement présente dans de nombreux phénomènes physiques qui se présentent macroscopiquement comme la somme de phénomènes physiques décorrélés (Théorème central limite)
  - Exemple : le bruit thermique

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Quelques propriétés des processus aléatoires gaussiens
  - Décorrélation ⇔ Indépendance
  - Toute combinaison linéaire finie de variables aléatoires gaussiennes indépendantes est gaussienne
  - On admet que le caractère gaussien se conserve dans toute transformation linéaire et donc par filtrage linéaire
  - On rencontre souvent de pair le caractère blanc et le caractère gaussien parmi les signaux aléatoires mais il n'y a pas d'implications entre ces deux propriétés

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Signal aléatoire stationnaire échantillonné
  - Le signal $X(t,\omega)$ n'est souvent pas utilisé sous sa forme continue pour être traité mais sous sa forme échantillonnée $X(nTe,\omega)$
  - Les notions développées en continue restent valables et notamment la fonction d'autocorrélation

$$\gamma_x(pT_e) = E[X(nT_e)X((n-p)T_e)] - m^2 \equiv \gamma_x(p)$$

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Matrice d'autocorrélation
  - On considère un signal aléatoire X(t,ω) stationnaire au second ordre au moins et échantillonné à la période Te

$$x = [X(nT_e), X((n+1)T_e), \ldots, X((n+N-1)T_e)]^t$$

  - On appelle **matrice d'autocorrélation** du vecteur **x** la matrice $\Gamma_x$ :

$$\Gamma_x = E\left[xx^{*t}\right] - E\left[x\right]E\left[x^{*t}\right]$$

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Donc colonne j, ligne i on retrouve la fonction d'autocorrélation centrée calculée en (i-j)
- Cette matrice est donc  symétrique dans le cas d'un signal aléatoire réel

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires

- Le traitement du signal est en majeure partie destiné à l'analyse des signaux aléatoires quasi omniprésents dans les systèmes électroniques (pour cause de présence de bruit)
- On retrouve cette analyse dans de nombreuses applications comme les domaines du radar, du sonar, de l'imagerie, des télécommunications …

# Introduction à l'étude des signaux aléatoires…

- Pour compléter cette introduction au signaux aléatoires, nous aborderons en exercice le cas de la théorie de la détection qui est classique en traitement de signal
  - Application directe par exemple au radar ou au sonar (cas vu précédemment)
  - Nous allons calculer la probabilité de commettre une erreur dans la détection d'un avion par un radar