ESIR 1 — 2019 - 2020

Traitement du Signal 1

Liste n°1

Exercice 1

1. γ étant un contour fermé entourant l'origine, décrit dans le sens direct :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma z^{n-1}dz = \delta_{n0} \quad \left(\delta_{nm} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = m \\ 0 \text{ si } n \neq m \end{cases}\right)$$

Justifier ce résultat en terme de résidu, en distinguant les cas $n \geq 1$, $n = 0$, $n \leq -1$. Avec un paramétrage du cercle de rayon r dans l'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r} z^{n-m-1}dz \text{ , montrer que : } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt = \delta_{nm}.$$

Vérifier ce résultat par une intégration directe.

2. Soit le DSL : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ d'une fonction analytique dans $A(0,r_1,r_2)$, $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$.

La fonction $g(t) = f\left(re^{it}\right)$ de période 2π est une restriction de f au cercle de rayon r, $r_1 < r < r_2$. Montrer que dans le développement en série de Fourier (DSF) de g :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \text{ , on a : } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt = a_n r^n.$$

3. Développer la fonction $\frac{1+z}{1-z}$ en série entière dans le disque $|z| < 1$. En déduire les DSF :

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n \cos nt \quad , \quad \frac{r\sin t}{1+r^2-2r\cos t} = \sum_{n\geq 1} r^n \sin nt \quad , \quad 0 \leq r < 1.$$

Exercice 2

Soit $f(t)$ la fonction de période 2π définie dans $[-\pi;+\pi]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq t \leq 0 \\ \sin t & \text{si } 0 \leq t \leq +\pi \end{cases}$$

1. Développer cette fonction en série de Fourier au moyen d'exponentielles complexes, puis à l'aide des fonctions sinus et cosinus.

Attention : dans le calcul des c_n, on distinguera soigneusement le cas $n \neq \pm 1$ du cas : $n = \pm 1$. Indiquer le type de convergence des séries obtenues.

2. Vérifier les formules : $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{4p^2-1} = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Soit la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \cos\alpha t \qquad \text{pour} \qquad |t| \leq \pi.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f. Etudier la série de Fourier ainsi obtenue. En déduire que si $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^2-n^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}.$$

Vérifier les formules de l'exercice précédent.

Exercice 4

Soit f la fonction de période 2π définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{4}{5-3\cos(t)}$.

1. En intégrant sur le cercle unité $|z| = 1$ du plan complexe, montrer que : $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \dfrac{5}{4}$.

2. En intégrant sur le cercle unité parcouru dans le sens indirect, calculer le coefficient c_n, pour $n \geq 0$, du DSF de f : $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

3. En déduire le DSF de f en termes réels : $1+2\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nt)}{3^n}$, et discuter sa convergence vers f.

4. En calculant une série numérique associée au DSF, retrouver le résultat de la première question.

ESIR
ECOLE SUPERIEURE
D'INGENIEURS DE RENNES

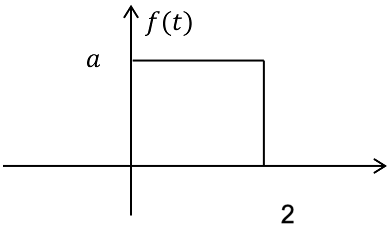
2019 - 2020

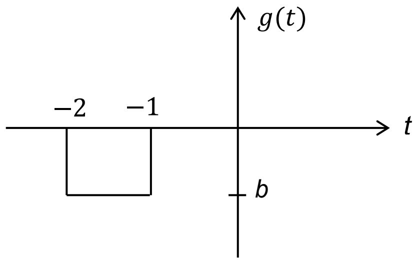
Traitement du Signal 1

Liste n°2

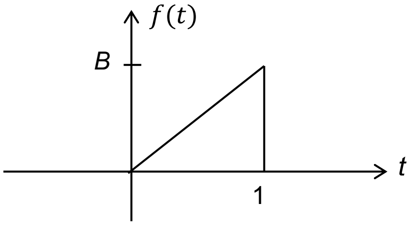
Exercice 1
Calculer le produit de convolution des signaux *f* et *g* dans les deux cas suivants :

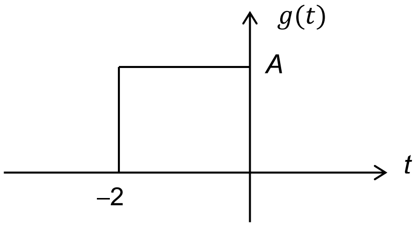
1.





2.





- **i)** directement
- **ii)** en passant par la dérivée.

Représenter graphiquement le résultat.

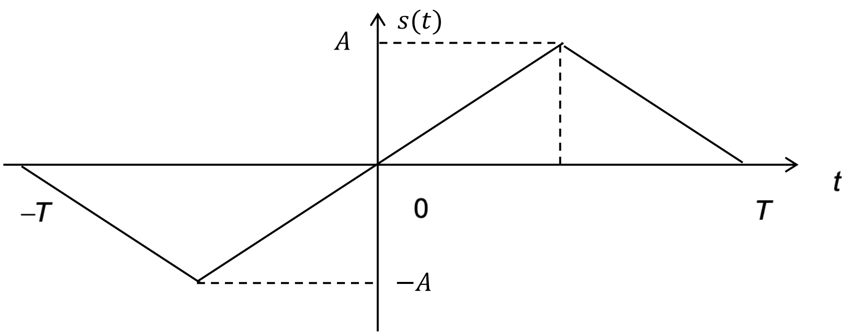
Exercice 2
On donne la fonction $s(t)$ définie par :

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{si } |t| < T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (A \text{ et } T \text{ réels positifs})$$

1. Calculer le produit de convolution $w(t) = (s * s)(t)$.

2. A partir de la relation précédente, calculer la transformée de Fourier de *w*.

Exercice 3
Calculer la transformée de Fourier de la fonction $s(t)$ suivante :



Exercice 4
Soit les 2 fonctions $f(t) = \exp(-|t|)$ et $g(t) = \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le produit de convolution $(f * g)(t)$ à partir de sa définition.

2. Calculer les transformées de Fourier de $f(t)$ et $g(t)$, notées respectivement $\hat{f}(\nu)$ et $\hat{g}(\nu)$.

3. Retrouver le résultat de la première question à partir de la seconde.

Exercice 5
On considère les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ suivantes :

$$f(t)=\begin{cases}B\cdot\exp(-\alpha t) & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad g(t)=\begin{cases}A & \text{si } |t|\leq \dfrac{T}{2}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où α , T , A et B sont des réels positifs.
On note $h(t)$ leur produit de convolution :

$$h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

et $c_{f,g}(t)$ leur intercorrélation, définie par :

$$c_{f,g}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\bar{g}(u-t)du \,.$$

1. Calculer $h(t)$.
2. Sachant que $h'(t)=(f*g')(t)=(f'*g)(t)$, retrouver $h(t)$ à partir de $h'(t)$.
3. Que vaut $c_{f,g}(t)$?
4. Calculer la transformée de Fourier de $h(t)$. Retrouver ce résultat en calculant la transformée de Fourier de $h'(t)$
.
5. Représenter graphiquement les fonctions $h(t)$ et $h'(t)$.
6. Donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\nu)d\nu$ où $\hat{h}(\nu)$ est la transformée de Fourier de $h(t)$.

Exercice 6
Soit $\hat{f}(\nu)$ la transformée de Fourier (TF) de $f(t)$. Calculer la TF de $f(t)=e^{-at}U(t)$ (où $U(t)$ est l'échelon unité). En déduire les TF de $e^{-a|t|}$ et de $\operatorname{sgn}(t)e^{-a|t|}$ en appliquant la propriété de retournement, ainsi que la TF de $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+t^2}$ avec la propriété de réciprocité.

Trouver, par les résidus, la TF de $L_a(t)=\dfrac{a}{\pi\left(a^2+t^2\right)}$, $a>0$. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_{\mathbb{R}} L_a(t)L_b(t)dt$.

Montrer que $\left(L_a * L_b\right)(t)=L_c(t)$, avec $c=a+b$.

Exercice 7
Calculer, par les résidus, les intégrales de Fourier :

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ixt)dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\left(1+|t|\right)\frac{\pi}{2}e^{-|t|} \quad \text{et} \quad f_2(a,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(xt)dx}{x\left(x^2+a^2\right)}=\frac{\pi}{a^2}\operatorname{sgn}(t)\left(1-e^{-a|t|}\right),\ a>0\,.$$

2019 - 2020

Traitement du Signal 1

Liste n°3

Exercice 1

Soit la suite de fonctions suivantes : $\{s_n\}_{1\le n\le N}$ définie par : $s_n(t)=A_n\, e^{-2i\pi n\nu_0 t}.1_{\left[-\frac{1}{2\nu_0},\frac{1}{2\nu_0}\right]}$ où $\nu_0>0$ et $A_n\ge 0$.

1. Calculer les corrélations $c_{n,m}(t)=\int s_n(u)\,\bar{s}_m(u-t)du$.

2. Donner l'expression des $c_{n,m}(0)$, $\left(n,m\in\{1,2,\ldots,N\}\right)$ et interpréter le résultat.

Soit le système constitué par une batterie de filtres de réponses impulsionnelles $h_n(t)=\bar{s}_n(-t)$, $1\le n\le N$. On note par $s(t)$ le signal défini par : $s(t)=\sum_{i=1}^{N}M_i.s_i(t)$ où $M_i=0$ ou 1.

3. Exprimer la corrélation de $s(t)$ avec $s_n(t)$ définie par : $c_n(t)=\int s(u)\,\bar{s}_n(u-t)du$.

4. Quelle est la valeur de $c_n(t)$ pour $t=0$?

5. Expliciter $y_i(t)=(h_i*s)(t)$. Que vaut $y_i(t)$ à $t=0$?

Exercice 2

Soit $f(t)$ la fonction définie par : $f(t)=\dfrac{1}{2^n}$ si $|t|\in\left]nT-\dfrac{T}{2};nT+\dfrac{T}{2}\right[$, $n=0,1,2,\ldots$.

1. Montrer que sa TF vaut : $\hat{f}(\nu)=\dfrac{\sin\pi T\nu}{\pi\nu}\left[1+2\sum_{n\ge1}\dfrac{\cos 2\pi\, nT\nu}{2^n}\right]=\dfrac{\sin\pi T\nu}{\pi\nu}\,\dfrac{3}{5-4\cos 2\pi T\nu}$.

2. Calculer la dérivée de $f(t)$ au sens des distributions.

3. Calculer la TF de cette dérivée, et retrouver le résultat établi en **1.**

Exercice 3

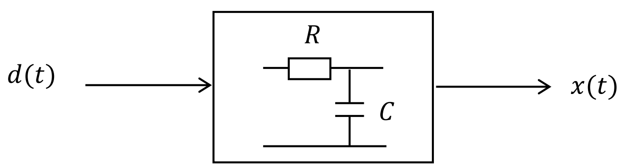
1. Calculer et représenter graphiquement la convoluée des deux fonctions $1_{[-a,a]}(x)$ et $1_{[-b,b]}(x)$ (avec $a\le b$).

2. En déduire les valeurs des intégrales $\int_{\mathbb{R}}\dfrac{\sin^3 x}{x^3}dx$ et $\int_{\mathbb{R}}\dfrac{\sin^4 x}{x^4}dx$.

3. Montrer que si la TF $\hat{f}(\nu)$ de la fonction $f(t)$ est nulle hors de $[-B;B]$, on a pour tout $a>2\pi B$: $f(t)*\dfrac{\sin(at)}{\pi t}=f(t)$ (où $*$ est l'opérateur de convolution).

Exercice 4

On considère le système suivant :



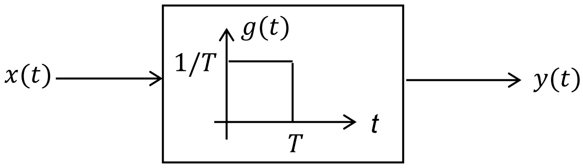
où $d(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT)$.

1. Ecrire la série de Fourier associée à $d(t)$ et donner les coefficients c_n. Donner la transformée de Fourier de $d(t)$.

2. Donner l'expression du filtre ($h(t)$: réponse impulsionnelle). Calculer $x(t)$ sous la forme d'une somme infinie.

3. Montrer que $x(t)$ est périodique de période T. Calculer sa transformée de Fourier. Calculer ses coefficients de Fourier.

4. On introduit un filtre passe-bas ($g(t)$ étant sa réponse impulsionnelle) comme suit :



Calculer $Y(\nu)$. Donner l'expression de $y(t)$.

Exercice 5

Soit le signal $s(t)$ dont le spectre est :

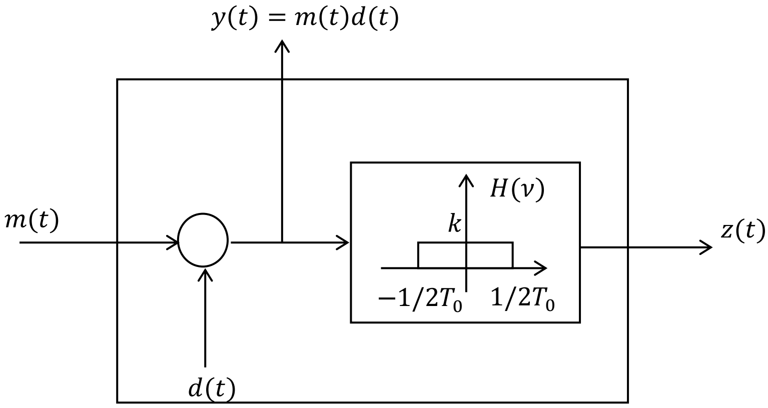
$$S(\nu) = \begin{cases} A^2\left(1+\cos 2\pi T_0 \nu\right) & \text{si } |\nu| \leq \dfrac{1}{2T_0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On construit le signal $m(t)$ de la manière suivante :

$$m(t) = s(t)p(t) \text{ où } p(t) = A_1 \cos\left(2\pi \nu_0 t\right) \left(\nu_0 > \frac{1}{2T_0}\right)$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $m(t)$ et la représenter.

2. $m(t)$ est envoyé à l'entrée du dispositif suivant :



où $d(t) = A_2 \cos\left(2\pi \nu_0 t + \varphi\right)$. Donner l'expression de $y(t)$ et calculer son spectre.

3. Quelle est la valeur de K qui permet de restituer exactement le signal $s(t)$ en sortie $\left(z(t) = s(t)\right)$?

Propriétés élémentaires de la TF des fonctions dans L^1

Rappel :

La TF de $f(t)$: $\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$ est une fonction continue qui s'annule à l'infini.

Formule d'inversion : $\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(\nu)\, e^{i2\pi\nu t} d\nu = \begin{cases} f(t) \\ \big(f(t+0)+f(t-0)\big)/2 \end{cases}$

propriété de	$f(t)$	$\hat{f}(\nu)$
Réciprocité	$\hat{f}(t)$	$f(-\nu)$
Retournement	$f(-t)$	$\hat{f}(-\nu)$
Conjugaison	$\overline{f}(t)$	$\overline{\hat{f}}(-\nu)$
Modulation	$f(t)\, e^{i2\pi\nu_o t}$	$\hat{f}(\nu-\nu_o)$
Translation	$f(t-t_o)$	$\hat{f}(\nu)\, e^{-i2\pi\nu t_o}$
Convolution	$f * g$ fg	$\hat{f}(\nu)\, \hat{g}(\nu)$ $\hat{f} * \hat{g}$
Dérivation	$f^{(n)}(t)$ $t^n f(t)$	$(i2\pi\nu)^n \hat{f}(\nu)$ $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{f}^{(n)}(\nu)$

et si f et $g \in L^2 : \hat{f}$ et $\hat{g} \in L^2$, $(f,g) = (\hat{f},\hat{g})$, $\|f\| = \|\hat{f}\|$ (conservation du produit scalaire par passage à la TF)

TF de fonctions élémentaires

	$f(t)$, $a>0$	$\hat{f}(\nu)$
1	$U(t)\, e^{-at}$	$\dfrac{1}{a+i2\pi\nu}$
2	$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
3	$\mathrm{sgn}(t)\ e^{-a\|t\|}$	$-i\dfrac{4\pi\nu}{a^2+4\pi^2\nu^2}$
4	$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2+t^2}$	$e^{-2\pi a\|\nu\|}$
5	$U(t)\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-at}, n \ge 1$	$\dfrac{1}{(a+i2\pi\nu)^n}$
6	$U(t)\, e^{-at} \sin(2\pi\nu_o t)$	$\dfrac{2\pi\nu_o}{(a+i2\pi\nu)^2+(2\pi\nu_o)^2}$
7	(*) $\mathrm{rect}(t/2a)$	$\dfrac{\sin(2\pi\nu a)}{\pi\nu}$
8	$\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{\|t\|}{a}\right)\ \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{2a}\right)$	$\left[\dfrac{\sin(\pi\nu a)}{\pi\nu a}\right]^2$
9	$(t/a)\, \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{2a}\right)$	$2ia\dfrac{2\pi\nu a\cos(2\pi\nu a)-\sin(2\pi\nu a)}{(2\pi\nu a)^2}$
10	$\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2a^2}\right)$	$\exp\left[-\dfrac{1}{2}(2\pi\nu a)^2\right]$

(*) $\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 1_{[-1/2,1/2]}(x)$

Propriétés élémentaires de la TF des distributions tempérées

propriété de	$T(t)$	$\hat{T}(\nu)$
réciprocité	$\hat{T}(t)$	$T(-\nu)$
retournement	$T(-t)$	$\hat{T}(-\nu)$
conjugaison	$\bar{T}(t)$	$\bar{\hat{T}}(-\nu)$
modulation	$T(t)\ e^{i2\pi\nu_0 t}$	$\hat{T}(\nu-\nu_0)$
translation	$T(t-t_0)$	$\hat{T}(\nu)\ e^{-i2\pi\nu t_0}$
convolution	$(T*G)(t)$ TG	$\hat{T}(\nu)\,\hat{G}(\nu)$ $\hat{T}*\hat{G}$
dérivation	$T^{(n)}(t)$ $t^n T(t)$	$(i2\pi\nu)^n\,\hat{T}(\nu)$ $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \hat{T}^{(n)}(\nu)$

TF de distributions élémentaires

	$T(t)$	$\hat{T}(\nu)$
1	$\delta(t)\quad,\quad\delta(t-a)$ $\delta^{(p)}(t)$	$1\ ,\ e^{-i2\pi\nu a}$ $(i2\pi\nu)^p$
2	$1\ ,\ e^{i2\pi a t}$ t^p	$\delta(\nu)\quad,\quad\delta(\nu-a)$ $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^p\ \delta^{(p)}(\nu)$
3	$vp\left(\frac{1}{t}\right)$	$-i\pi\ \ \mathrm{sgn}(\nu)$
4	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{i\pi} vp\left(\frac{1}{\nu}\right)$
5	$Pf\left(\frac{1}{t^2}\right)$	$-2\pi^2\,\lvert\nu\rvert$
6	$\lvert t\rvert$	$-\frac{1}{2\pi^2}\ \ Pf\left(\frac{1}{\nu^2}\right)$
7	$U(t)$	$\frac{1}{2i\pi}\,vp\left(\frac{1}{\nu}\right)+\frac{1}{2}\,\delta(\nu$
8	Peigne de Dirac de période θ $P_\theta(t)=\sum_n\ \delta(t-n\theta)$ $=\frac{1}{\theta}\sum_n\ e^{in2\pi\frac{t}{\theta}}$ (sa SF)	Peigne de Dirac de période $1/\theta$ $\frac{1}{\theta}\,P_{\frac{1}{\theta}}(\nu)=\frac{1}{\theta}\sum_n \delta\left(\nu-\frac{n}{\theta}\right)$

ESIR ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE RENNES

2019 - 2020

Traitement du Signal 1

Liste n°4

Exercice 1
Calculer par les résidus, selon le signe de t, l'intégrale de Laplace

$$f(t)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{pt}dp}{\left(1-p^2\right)^2}.$$

Exercice 2
Calculer par les résidus, selon le signe de t, les intégrales de Laplace

$$f(t)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{e^{pt}}{p\left(p^2-1\right)}dp,$$

où γ est un chemin rectiligne, parallèle à l'axe $\mathrm{Re}(p)=0$, contenu dans :
a) le demi-plan $\mathrm{Re}(p)>1$;b) la bande $0<\mathrm{Re}(p)<1$;c) la bande $-1<\mathrm{Re}(p)<0$; d)le demi-plan $\mathrm{Re}(p)<-1$.

Exercice 3
En précisant l'abscisse de convergence absolue de l'intégrale de Laplace, calculer les transformées de Laplace (TL) des fonctions causales :

$$U(t)\,e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t\,,\,U(t)\,e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t$$

En déduire les originaux de : $\dfrac{p+1}{p^2+2p+2}$, $\dfrac{1}{p^2+2p+5}$.

Exercice 4
Calculer les transformées de Laplace inverses de :

$$F_1(p)=\frac{p-1}{p^2+2p+1},\mathrm{Re}(p)>-1\ ;\ F_2(p)=\frac{p^2-p+1}{(p+1)^2},\mathrm{Re}(p)>-1\ ;\ F_3(p)=\frac{1}{p^4+p^2\left(a^2-b^2\right)-a^2b^2},\mathrm{Re}(p)>|b|.$$

Exercice 5
Calculer les transformées de Laplace inverses de :

$$F_1(p)=\frac{p}{(p-1)^2(p+1)},-1<\mathrm{Re}(p)<1\ ;\ F_2(p)=\frac{1}{p^2(p-1)(p+2)},0<\mathrm{Re}(p)<1.$$

Exercice 6
Expliciter les deux intégrales définissant le produit de convolution : $y(t)=\left[U(t)\,h(t)\right]*x(t)$. Par une TL calculer l'intégrale $y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-b|\tau|}\,e^{-a(t-\tau)}d\tau$.

Exercice 7
Résoudre par une TL les équations pour les distributions causales $Y=U(t)\,y(t)$:

$$Y=t^3\,U(t)+Y*\left(U(t)\sin t\right),$$

$$Y'+3Y=H(t)*X(t)-2X(t),\ \text{où}\ H(t)=2\delta(t)+3U(t)\,e^{-t},\ \text{et}\ X(t)=U(t)e^{-t},$$

$$Y'-U(t)\,\mathrm{ch}\,t+2Y*\left[U(t)\,\mathrm{ch}\,t\right]=\delta(t).$$

Exercice 8
Déterminer la réponse percussionnelle (rp) d'un filtre linéaire dont la fonction de transfert est :

$$H(p)=\frac{p+1}{p^2+2p+2},\ \text{Re}(p)>-1,$$

et sa réponse au signal d'entrée $x(t)=\exp(-|t|)$.

Exercice 9

La réponse indicielle d'un filtre linéaire est $R_u(t)=U(t)\left[1-e^{-t}-t.e^{-t}\right]$. Pour une fonction d'entrée $x(t)$ inconnue, la fonction de sortie est $y(t)=U(t)\left[2-3.e^{-t}+e^{-3t}\right]$. Déterminer l'entrée $x(t)$.

ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE RENNES

2019 - 2020

Traitement du Signal 1

Liste n°5

Exercice 1

Soit le signal $x(n) = u(n) - u(n-N)$ avec N entier et positif et où $u(n)$ est la fonction échelon discrétisée :

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}.$$

1. Représenter $x(n)$ pour $N = 5$.
2. Calculer la transformée de Fourier $X(\nu)$ du signal $x(n)$, la période d'échantillonnage étant T_e, N entier positif quelconque.
3. Mettre cette transformée de Fourier sous la forme $e^{j\alpha\nu}\dfrac{\sin(\beta\nu)}{\sin(\delta\nu)}$, préciser les termes α, β, δ.
4. Quelle est la valeur de $X(\nu)$ pour $\nu = 0$?
5. Pour quelles valeurs de la fréquence le module de la transformée $X(\nu)$ s'annule-t-il ?
6. En étudiant simultanément les termes $\sin(\beta\nu)$ et $\sin(\delta\nu)$ composant $X(\nu)$, retrouver la période de répétition de $|X(\nu)|$ sur l'axe des fréquences.

Exercice 2

Soit la suite $\{x(n)\}$ définie par :

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \in [0; N-1] \\ 0 & \text{en dehors} \end{cases}$$

Ce signal a été obtenu à partir du signal analogique $x(t)$ échantillonné à la période T_e.

1. Calculer la transformée de Fourier $X(\nu)$ du signal $x(n)$.
2. Mettre cette transformée de Fourier sous la forme $e^{-i\pi\nu\alpha T_e}\dfrac{\sin(\pi\nu\beta T_e)}{\sin(\pi\nu\delta T_e)}$. Préciser les termes α, β, δ. Quelle est la période de répétition sur l'axe des fréquences ?
3. On pose $T_e = 1\text{s}$. Tracer $|X(\nu)|$ sur l'intervalle $[-1/2; 1/2]$, pour $N = 5$.
4. On discrétise $X(\nu)$ au pas $\Delta\nu = 0{,}1\text{Hz}$. En posant $\nu = k.\Delta\nu$, exprimer $X(k)$. Quelle est sa périodicité ?
5. Donner sans calcul la transformée de Fourier inverse de $X(k)$, que l'on notera $x_r(n)$. Représenter le signal obtenu pour $k \in [0; 20]$.

Exercice 3

Soit le signal discret $x(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) défini par

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 0 \\ 1/2 & \text{pour } |k| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On posera $T_e = 1\text{s}$ (T_e : période d'échantillonnage).

1. Déterminer la transformée de Fourier de ce signal, $X(\nu)$.
2. Quelle est la période de répétition sur l'axe des fréquences de $X(\nu)$?

3. Tracer $|X(\nu)|$ sur l'intervalle $[-1/2;1/2]$.
4. On discrétise $X(\nu)$ au pas $\Delta\nu = 1/10$ en posant $\nu = n.\Delta\nu$. Exprimer $X(n)$. Quelle est sa périodicité ?

Exercice 4

Soit le signal discret $x(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) défini par :

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour} |k| \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On posera $T_e = 1\text{s}$ (T_e : période d'échantillonnage).

1. Déterminer la transformée de Fourier de ce signal, $X(\nu)$.
2. Quelle est la période de répétition sur l'axe des fréquences de $X(\nu)$?
3. Tracer $|X(\nu)|$ sur l'intervalle $[-1/2;1/2]$.
4. On discrétise $X(\nu)$ au pas $\Delta\nu = 1/4$ de telle sorte que le spectre alors noté $X(n)$ s'écrive : $X(n) = X(\nu)\sum_n \delta\left(\nu - \frac{n}{4}\right)$. Représenter $X(n)$ pour $n \in [-4;+4]$. Quelle est sa périodicité ?
5. Calculer la transformée de Fourier inverse de $X(n)$, que l'on notera $x_r(k)$. Représenter le signal obtenu pour $k \in [-8;+8]$.

Exercice 5

Soit la suite de N termes complexes $\{x(n)\}$, où N est supposé pair :

$$\{x(n)\} = [x(0), x(1), \ldots\ldots, x(N-1)].$$

La transformée de Fourier discrète de cette suite est définie par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \qquad 0 \le k \le N-1.$$

1. Montrer que pour obtenir les N valeurs de $X(k)$, N^2 multiplications complexes sont nécessaires.

2. Montrer que $X(k)$ est périodique. Préciser la période.

3. On construit les deux suites $\{x_1(n)\}$ et $\{x_2(n)\}$ telles que :

$$\left.\begin{aligned} x_1(n) &= x(2n+1) \\ x_2(n) &= x(2n) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1.$$

On obtient ainsi deux suites de $\frac{N}{2}$ termes chacune :

$$\{x_1(n)\} = [x(1), x(3), \ldots, x(N-1)] = \left[x_1(0), x_1(1), \ldots, x_1(\tfrac{N}{2}-1)\right]$$
$$\{x_2(n)\} = [x(0), x(2), \ldots, x(N-2)] = \left[x_2(0), x_2(1), \ldots, x_2(\tfrac{N}{2}-1)\right].$$

Exprimer les transformées de Fourier discrètes des suites périodiques $\{x_1(n)\}$ et $\{x_2(n)\}$ de période $\frac{N}{2}$, appelées respectivement $X_1(k)$ et $X_2(k)$, $0 \le k \le \frac{N}{2} - 1$. Quelle est la période de $X_1(k)$ (ou de $X_2(k)$) ?

4. Quel est le nombre de multiplications complexes nécessaires pour calculer les $\frac{N}{2}$ valeurs de $X_1(k)$ (ou de $X_2(k)$) ?

5. Décomposer $X(k)$ en deux sommes pour donner la relation exprimant $X(k)$ en fonction de $X_1(k)$ et $X_2(k)$. On désignera par W le terme $e^{-j\frac{2\pi k}{N}}$.

6. Exprimer $X(k+\frac{N}{2})$ en fonction de $X_1(k)$ et $X_2(k)$, $0 \le k \le \frac{N}{2}-1$.

7. Montrer alors qu'on peut exprimer $X(k)$ et $X\left(k+\frac{N}{2}\right)$ pour $0 \le k \le \frac{N}{2}-1$ en fonction de $X_1(k)$ et $X_2(k)$ par des relations voisines.

Exercice 6

Soit le signal discret $x(n) = e^{-an}\left(u(n)-u(n-N)\right)$ que l'on périodise avec une période N et où $u(n)$ est la fonction échelon discrétisée :

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n \ge 0 \\ 0 \text{ pour } n < 0 \end{cases}$$

1. Représenter ce signal périodisé pour $N = 5$, a réel et supérieur à 1.
2. Calculer la transformée de Fourier discrète $X(k)$ du signal $x(n)$ périodisé, N quelconque.
3. Calculer $X(k)$ pour $k = 0$. Justifier.
4. Montrer que $X(k+lN) = X(k)$, l entier. Conclure.

ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE RENNES

2019 - 2020

Traitement du Signal 1

Liste n°6

Exercice 1

Déterminer les transformées en z (tz) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$, $A(r_1,r_2)$, en précisant l'anneau de convergence, des suites :

$x(n)=a^n\, u(n)$, $\quad x(n)=-a^n\, u(-n-1)$,

$x(n)=a^n\left[u(n)-u(n-N)\right]$ (préciser la position des pôles et zéros pour a réel > 0),

$x(n)=a^{|n|}$ (préciser la condition sur a).

Exercice 2

Calculer les transformées en z des suites :

$$r^n \cos(n\omega_o)\, u(n),\, r^n \sin(n\omega_o)\, u(n).$$

Exercice 3

Soit $x(n)$ un signal discret, $X(z)$ sa tz définie dans $A(r_1,r_2)$. Déterminer en fonction de $X(z)$:

a) la tz $X_1(z)$ du signal : $x_1(n)=n\, x(n)$, la tz $X_p(z)$ du signal : $x_p(n)=n^p x(n)$.

b) la tz $X_1(z)$ du signal : $x_1(n)=\begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ pair} \\ 0, & n \text{ impair} \end{cases}$.

Exercice 4

Calculer les transformées en z inverses de :

$$X(z)=\frac{1}{(z-1/2)(z-2)},\, 1/2<|z|<2 \;;\; X(z)=\frac{a\, z^{-1}}{\left(1-a\, z^{-1}\right)^2},\, |z|>|a|.$$

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)\,(1-az)},\; |a|<|z|<\frac{1}{|a|} \;;\; X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}\; z^{-1}}{1+\frac{3}{4}\; z^{-1}+\frac{1}{8}\; z^{-2}},\; |z|>\frac{1}{2}.$$

Exercice 5

En utilisant la transformée en z, calculer la convolution discrète :

$$y(n)=(x*h)(n), \text{où} : x(n)=nu(n), h(n)=e^{-nT/\tau}u(n).$$

Exercice 6

On considère un filtre dont l'entrée est $x(n)$ et la réponse percussionnelle est $h(n)$:

$$x(n)=\begin{cases} 1, 0\le n\le N-1 \\ 0, \text{ailleurs} \end{cases}, \quad h(n)=\begin{cases} a^n, n\ge 0 \\ 0, \quad n<0 \end{cases}.$$

Déterminer la sortie $y(n)$:

a) en effectuant la convolution discrète de $h(n)$ et $x(n)$,

b) en utilisant la tz.

Exercice 7
Un signal $x(n)=u(n)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre dont la réponse impulsionnelle est $h(n)=\exp(-nT)\,u(n)$. Déterminer la sortie $y(n)$ par une transformée en z, puis en calculant un produit de convolution.

Exercice 8
Soient :

- $\left(x_M(n)\right)_{0\leq n\leq M-1}$, une suite nulle hors de $\left[0, M-1\right]$, $X_M(z)$ sa tz,
- $u(n)\,x(n)$ son prolongement sur les $n\geq 0$ avec la période *M*.

a) Calculer $X(z)$, tz de la suite périodisée, en fonction de $X_M(z)$:
  - en appliquant la définition de la tz,
  - en appliquant la propriété de décalage dans le temps.

b) En déduire la tz de la suite $x(n)$, périodisée de $x_M(n)=\begin{cases}1, 0\leq n\leq N-1\\ 0, N-1<n<M\end{cases}$.

Cas particuliers $N = M$ et $N = 1 < M$.

Exercice 9
Un filtre linéaire répond à la suite d'entrée $u(n)$ par la suite $n\,u(n)$. Calculer la réponse $y(n)$ à la suite d'entrée $x(n)=(n-1)\,u(n-1)$. Le filtre est-il stable ?

Exercice 10
Un filtre linéaire est régi par l'équation aux différences, où $x(n)$ représente l'entrée et $y(n)$ la sortie :

$$y(n-1)-\frac{10}{3}y(n)+y(n+1)=x(n).$$

Le filtre est supposé stable : calculer sa réponse percussionnelle. Le filtre est-il réalisable (causal) ?

Exercice 11
La suite d'entrée $x(n)$ et la suite de sortie $y(n)$ d'un filtre sont reliées par l'équation à coefficients réels :

$$y(n)+a_1\,y(n-1)+a_2\,y(n-2)=x(n).$$

a) Calculer la fonction de transfert $H(z)$.

b) En examinant les pôles réels et complexes de $H(z)$, déterminer l'ouvert du plan $\left(a_1, a_2\right)$ dans lequel le filtre est stable et causal.

c) Dans le triangle obtenu, trouver la région où les pôles de $H(z)$ sont réels.

Exercice 12
Soit l'équation $y(n+1)+(1/3)\,y(n)=x(n)$, reliant la sortie *y* et l'entrée *x* d'un filtre. Déterminer la relation entre leurs tz monolatérales (à droite) $Y\left(z\right)$ et $X(z)$. Calculer $y(n)$ pour $x(n)=u(n)$ et $y(0)=1$.

Exercice 13
Soit l'équation $y(n+1)=x(n)+a\,y(n)$, reliant la sortie *y* et l'entrée *x* d'un filtre. Déterminer la relation entre leurs tz monolatérales (à droite) $Y\left(z\right)$ et $X(z)$. Quelle est la condition de stabilité du filtre ? Calculer $y(n)$ pour $x(n)=e^{jn\omega_o T_e}u(n)$ et $y\left(0\right)=k$, et préciser la nature des différents termes.

Exercice 14
Soit l'équation aux différences :

$$y(n+1)-\frac{1}{2}y(n)=x(n+1)+\frac{1}{3}x(n), n\geq 0, y(0)=x(0)=0\,.$$

Calculer la fonction de transfert correspondante $H\left(z\right)=Y\left(z\right)/X\left(z\right)$, la réponse impulsionnelle causale, la réponse $y(n)$ causale à la suite $x(n)=u(n-1)$.