# Zéros certifiés des fonctions D-finies

Mathis Deronzier

# Sommaire

# 1 Introduction

# 2 Fonctions D-finies

Fonctions vérifiants une équation différentielles de la forme

$$a_r(z)y^{(r)}(z) + a_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + ... + a_0(z)y(z) = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}[z].$$

# 3 Approximation uniforme sur un segment

Dans cette section on approchera les fonctions D-finies à l'aide des polyonômes. Wierstrass a montré qu'il était possible d'approximer sur un segment n'importe quelle fonction continue à partir de polynômes. Cependant, toutes les méthodes d'interpollation de polynômes ne convergent pas. Un exemple est donné par Runge, la suite de polynômes qui interpollent à intervalles égaux la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[-5, 5]$ diverge lorsque $N \to \infty$.

## 3.1 Polynômes de Tchebychev méthode de Boyd

Le mathématicien Russe Sergei Bernstein (1880-1968) a montré que la série de Chebychev d'une fonction analytique a une convergence quadratique par rapport à la norme infinie. C'est à dire que l'erreur après avoir tronqué la série après le Nème termes est $O(exp(-N\mu))$. On s'intéressera plus tard à une vrai majoration du reste de la série. C'est cette majoration avec le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permettra de certifier les zéros de notre fonction D-finie f.

**Proposition 1** *Soit f une fonction continue, soit g une fonction telle que* $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$. *Alors, si il existe a et b tels que* $\|g(a)\| \geq \epsilon$ *et* $\|g(b)\| \geq \epsilon$ *avec* $g(a)g(b) < 0$, *alors f s'annule sur l'intervalle [a,b].*

## 3.2 L'algorithme d'approximation

**Algorithm 1** Chebyshev approximation

**Entrée:** fonction D-finie $f(x) = \sum_{n \geq \beta} f(n)x^n$. Entier N
**Sortie:** polynôme d'interpolation g

1: création des points d'interpolation:$x_k = \frac{b-a}{2}cos(\pi\frac{k}{N}) + \frac{b+a}{2}$ $k = 0, 1, .., N$
2: création des points à approximer: $f_k = f(x_k)$ $k = 0, 1, .., N$
3: création de la matrice d'interpolation M de taille $(N + 1) \times (N + 1)$:
$p_j = 2$ $j \in \{1, 2\}$ et $p_j = 1$ sinon, alors: $M_{jk} = \frac{2}{p_j p_k N}cos(j\pi\frac{k}{N})$
4: $a_j = \sum_{k=0}^{N} M_{jk}f_k$ j=0,1,..,N
5: $g(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j T_j(\frac{2x-(b+a)}{b-a})$
6: Renvoyer g

$T_j(x) = cos(j\ arccos(x))$
On voit ici la limite de cet algorithme, il necessite une connaissance de la fonction, et c'est justement ce que nous cherchons ici.

## 3.3 La méthode des éléments finis

Une bonne méthode de résolution d'équations différentielles est la méthode des éléments finis. Il faut réflechir à une famille de fonctions qu'il pourrait-être intéressant de prendre ici. La famille usuelle des fonctions en "escalier" ne semble pas être suffisante puisqu'elle ne satisfait la condition $C^\infty$. La famille des polynômes de Tchebyshev semble donc la solution.

### 3.4 Méthode de Sturm

Sur un intervalle donné, on veut maintenant voir si il y a des zéros grace à l'approximation de Tchebychev et la proposition 1. Nous allons utiliser le principe d'exclusion en comptant le nombre de racines dans l'intervalle à l'aide du théorème de Sturm.

Soit P un polynome unitaire, $P(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, *la suite de Sturm* est une suite finie de polynôme défini à partir de P comme suit:
$P_0 = P$, $P_1 = P'$, et pour $k > 1$ si $P_k \neq 0$, $P_{k+1}$ vérifie

$$P_{k-1} = P_k Q_k - P_{k+1}, \text{ avec } deg(P_{k+1}) < deg(P_k)$$

$P_{k+1}$ est l'opposée du reste dans la division euclidienne de $P_{k-1}$ par $P_k$. On a alors le théorème suivant

**Théorème 3.1** *(Sturm-Habicht) Notons $\sigma(\xi)$ le nombre de fois où la suite $P(\xi), P_1(\xi), ..., P_m(\xi)$ change de signe (un zéro ne comptant pas comme changement de signe). Pour deux réels $a, b$ avec $a < b$ où $a$ et $b$ ne sont pas des racines de P, le nombre de racines dans l'intervalle $[a, b]$ vaut $\sigma(a) - \sigma(b)$.*

## 4 Méthode de Newton

La méthode de Newton définie par la suite $x_{k+1} = N_f(x_k)$ avec $N_f(x) = x - Df(x)^{-1}f(x)$ dans notre cas, nous sommes dans $\mathbb{R}$ alors la méthode de Newton se réécrit $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

### 4.1 Les applications contractantes

### 4.2 L'algorithme de Newton

**Algorithm 2** Newton iteration

**Entrée:** fonction $f(x)$. rationel a
**Sortie:** point b
1: return $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = N_f(a)$

Cependant comme nous avons vu précèdement, il faut s'assurer que cette application est contractante. La théorie alpha de Smale permet d'assurer la convergence de l'algorithme de Newton ainsi que de certifier les zéros, les principaux résultats de cette théorie sont rappelés dans la prochaine section.

### 4.3 Théorie alpha de Smale

Dans cette section les espaces considérés sont des espaces de Banach, $U$ est un ouvert de l'espace. Et les fonctions $f : U \to \mathbb{F}$ sont analytiques sur U. Nous sommes dans le cas particulier de $\mathbb{R}$ mais cette théorie s'applique sur tout espace métrique complet.

**Définition 1** *On définit les trois opérateurs $\gamma(f, x)$, $\beta(f, x)$, et $\alpha(f, x)$ sur les fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$:*

$$\gamma(f, x) = \limsup_{k \geq 2} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\beta(f, x) = \left\| Df(x)^{-1} f(x) \right\|$$

$$\alpha(f, x) = \gamma(f, x)\beta(f, x)$$

**Théorème 4.1** *(Théorème gamma) Soit $\zeta \in U$ tel que $f(\zeta) = 0$ et $Df(\zeta)$ soient inversibles. Soit $x_0 \in U$ tel que*

$$\|x_0 - \zeta\| \, \gamma(f, \zeta) \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = 0.17712....$$

*Alors la suite de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$ converge vers $\zeta$. De plus*

$$\|x_k - \zeta\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \|x_0 - \zeta\|$$

**Théorème 4.2** *(Wang-Han) Pour tout $\alpha \in [0, 3 - 2\sqrt{2}]$, la quantité $(1 + \alpha^2) - 8\alpha$ décroît de 0 à 1. Posons*

$$q = \frac{1 - \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}{1 - \alpha + \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha}}$$

*On a*

$$0 \leq q < 1 \ \textit{si} \ 0 \leq a < 3 - 2\sqrt{2}$$
$$q = 1 \ \textit{si} \ 0 \leq a < 3 - 2\sqrt{2}$$

*Pour tout $x \in U$ tel que $\alpha = \alpha(f, x) \leq 3 - 2\sqrt{2}$, il existe un et un seul zéro $\zeta$ de $f$ tel que*

**Corollaire 1** *Pour tout $x \in U$ tel que $\alpha = \alpha(f, x) \leq 3 - 2\sqrt{2}$, il existe un et un seul zéro $\zeta$ de $f$ tel que*

$$\|\zeta - x\| \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2\gamma(f, x)}$$

*De plus, la suite de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$, $x_0 = x$, est définie et converge vers $\zeta$.*

**Esquisse de démonstration** $(2 - \sqrt{(2)}/2$ est le maximum de $(1 + \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 8\alpha})/4$ lorsque $\alpha \in [0, 3 - 2\sqrt{(2)}]$.

(À compléter) Opérateur $\gamma(f, x)$

Ce sera ce dernier théorème qui nous permettra de vérifier si nous avons bien un zéro. Cependant le calcule de $\gamma$ et donc de $\alpha$ sont encore difficiles pour des coefficients de fonctions D-finies vérifiant une récurrence polynomiale. Le chapitre sur les séries majorantes fournie une majoration du coefficient $\alpha$

# 5 Majoration des suites P-récursives

Ce chapitre est quasiment une réécriture du chapitre 5 de la thèse de Marc Mezzarobba. Il majore les suites P-réccursives à l'aide du théorème de Perron-Kreuser. L'avantage de cette majoration est qu'elle sera fine, c'est à dire qu'on peut quantifier la différence entre la majoration et la solution. Cette majoration terme à terme permettra donc de trouver une majoration fine du coefficient alpha et donc des bassins d'attractions donnés par le théorème de (Wang-Han), ce qui permettra à notre algorithme de certifier ses zéros.

Considérons une suite P-récursive u, définie par la récurrence

$$p^{[0]}(n + s)u_n + p^{[1]}(n)u_{n+s-1} + ... + p^{[s]}(n)u_n = 0, \quad p^{[k]} \in \mathbb{Q} \qquad (*)$$

**Théorème 5.1** *Soit $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite P-récursive solution de la récurrence homogène (*), avec $p^{[s]}(n) \neq 0$ et $p^{[0]}(n) \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Étant donnée la récurrence (*) et les conditions initiales $u_0, ..., u_{s-1}$, l'algorithme définit dans cette section calcule un réel positif $A$, un rationnel $\kappa$, un nombre algébrique $\alpha$ et une fonction $\phi$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leq An!^{\kappa} \alpha^n \phi(n)$$

*Avec $\phi(n) = e^{o(n)}$. Pour choix générique des conditions initiales, les paramètres $\kappa$ et $\alpha$ sont optimaux.*

La fonction $\phi$ est donnée par une formule explicite, elle-même décrite par un petit nombre de paramètres. Les formes qu'elle peut prendre sont détaillées par la suite.

## 5.1 Le théorème de Perron-Kreuser

On s'interesse ici au comportement asymptotique des solutions des récurrences. Supposons que les coefficients $b_n(n)$ de l'équation

$$b_s(n)u_{n+s} + b_{s-1}(n)u_{n+s-1} + ... + b_{s'}(n)u_{n+s'} = 0 \qquad (*)$$

(où s' peut être négatif) ont des comportements asymptotiques de la forme

$$\forall k, \;\; b_k(n) \sim c_k n^{d_k} \;\text{ quand } n \to \infty$$

avec $c_k \in E$ et $d_k \in \mathbb{Z}$. Supposons de plus que $u_n$ est une solution de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \lambda n^{\kappa} \;\text{ quand} n \to \infty$$

En réécrivant l'équation séquencielle avec ses coefficient asymptotiques $n \to \infty$

$$c_s\lambda^s n^{d_s+s\kappa} + c_{s-1}u_n\lambda^{s-1}n^{d_{s-1}+(s-1)\kappa} + ... + c_{s'}\lambda^{s'}n^{d_{s'}+s'\kappa}u_n$$

pour que cette expression s'annule, il est nécessaire que les termes asymptotiquement dominants se compense, et donc que l'exposant $d_k + k\kappa$ le plus grand soit atteint au moins deux fois. Alors $-\kappa$ doit être parmis les pentes des tes du *polygone de newton* de l'équation.

**Définition 2** *Le polygône de Newton est l'envellope convexe supérieure des points $(k, d_k) \in \mathbb{R}$, si E=[A,B] désigne une arête du polygône de Newton, on note $\kappa(E)$ l'opposée de sa pente, et on définit l'équation caractéristique associée à E (ou à $\kappa(E)$) par*

$$\chi_E(\lambda) = \sum_{(k,d_k)\in E} c_k\lambda^{k-t}$$

*Où $(t, d_t) = A$ l'extrémité gauche du segment E.*

Remarquons que la somme des degrés des différentes équations caractéristiques est égale à l'ordre de l'équation de récurrence

**Théorème 5.2** *(Perron-Kreuser) Pour toute arête E du polygone de Newton de la récurrence (*) notons $\lambda_{E_1}, \lambda E_2, ...$ les racines de $\chi(E)$ comptées avec leur multiplicité.*

*(a) supposons que pour toute arête E, les modules $|\lambda_{E_i}|$ des racines de $\chi(E)$ sont deux à deux distincts. Alors toute solution non ultimement nulle de (*) satisfait*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \lambda_{E_i} n^{\kappa(E)} \;\; \textit{quand } n \to \infty$$

*Pour une certaine arête E et un certain i.*

*(b)Si en outre (*) est réversible, elle admet une base de solution*

$$(u_n^{[E_i]})_{E_i \leq i \leq deg\chi_E}$$

*telle que*

$$\frac{u_{n+1}^{[E_i]}}{u_n^{[E_i]}} \sim \lambda n^{\kappa(E)} \;\; \textit{quand } n \to \infty$$

*(c)Dans le cas où il existe E et $i \neq j$ tels que $|\lambda_{E_i}| = |\lambda_{E_j}|$ les analogues des deux assertions précédente subsistent mais avec la conclusion plus faible*

$$\limsup_{n\to\infty} |\frac{u_n^{E_i}}{n!^{\kappa(E)}}|^{\frac{1}{n}} = |\lambda_{E_i}|$$

Certains résultats sont plus précis dans des cas particuliers dans le Schäfke et Noble.

## 5.2 Esquisse de l'algorithme

On commence par étudier le polygone de Newton de la récurrence et les équations caractéristiques de la récurrence, pour délimiter à l'aide du théorème de Perron-Kreuser les comportements asymptotiques possibles de $u_n$.

## 5.3 Pôles et singularités dominantes

**Définition 3** *Si $P \in \mathbb{Q}[z]$ est un polynôme non réduit à un monôme, on note respectivement*

$$\delta(P) = min\{|\zeta| \neq 0 : P(\zeta) = 0\} \text{ et } \mu_\delta = max\{\mu(\zeta, P) : |\zeta| = \delta(P)\}$$

*On appelle pôles dominants d'une fraction rationelle et $\delta$-racines de son dénominateur, et singularités dominantes d'un opérateur différentielle à coefficient polynomiaux celles de son coefficient de tête.*

## 5.4 Croissance générique des solutions

**Définition 4** *Soit $R \in \mathbb{Q}[n]\langle S\rangle$ unn opérateur réversible non singulier, d'ordre s. Une solution $(u_n)$ de la récurrence R.u=0 est alors déterminée de façon unique par ses s premières valeurs. Nous dirons qu'une proposition est vrai pour une solution générique si elle est satisfaite pour $(u_0, u_1, ..., u_{s-1}) \in \mathbb{Q}^s/V$ où V est un sous-espace strict de $\mathbb{Q}^s$*

**Algorithm 3** Asympt(R)

**Entrée:** $R = \sum_{k=0}^{s} b^{[k]}(n)S^k \quad \in \mathbb{Q}[n]\langle S\rangle$
**Sortie:** $\kappa \in \mathbb{Q}, P_\alpha \in \mathbb{Q}[z]$.

1: $\kappa := max_{k=0}^{s-1} \frac{\deg b^{[k]} - \deg b[s]}{s-k}$

2: $P_\alpha := \sum_{l=0}^{s} b_{d+l\kappa}^{[s-l]}$ où $d = \deg b^{[s]}$

3: Renvoyer $(\kappa, P_\alpha)$

D'après le théorème de Perron-kreuser les solutions dont "la croissance est la plus rapide", c'est à dire celle dont le coeffficient *kappa* est le plus grand est celle la plus à droite du polygone de Newton, et les racine de module maximal de son équation caractéristique.

l'algorithme renvoie le *kappa* maximale et le polynôme réciproque de l'équation caractéristique correspondante à celui-ci.

**Proposition 2** *Posons $R = \sum_{k=0}^{s} b^{[k]}(n)S^k \quad \in \mathbb{Q}[n]\langle S\rangle$ et supposons que R n'est pas réduit à un terme $b^{[s]}S^k$. On a donc*

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{n!^k}\right|^{\frac{1}{n}} \quad \text{où } \alpha = \frac{1}{\delta(P_\alpha)}$$

*Pour toute solution $(u_n)$ vérifiant R.u=0 avec égalité pour une solution générique.*

**Esquisse de démonstration** Le polygone de Newton étant convexe, le coefficient $\kappa$ le plus élevé correspond à un segment relié au sommet le plus à droite du polygone.
Aussi, en écrivant prenant le polynôme caractéristique correspondant, le dérivant par $\lambda^s$ et en posant $\beta = \frac{1}{\lambda}$ le polynôme en $\beta$ est le même que celui renvoyé par l'algorithme *asympt.* Pour ce qui est du rayon de l'inégalité, elle résulte du (c) du théorème de Perron-Kreuser. Il reste à démontrer l'inégalité pour des conditions initiales génériques. Soit $V = ker\ R \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, d'après le théorème (vrai?????)
Il existe une solution $u^{[0]}$ telle que $\limsup \left|u_n^{[0]}/n!^k\right|^{1/n} = \alpha$.
Étendons cette solution en une base $(u^{[0]}, u^{[1]}, .., u^{[s-1]})$ de V. Soit $u = \sum_k \lambda^{[k]} u^{[k]}$ Par construction

de $\kappa$ et $\alpha$, on a $\limsup \left|u_n/n!^\kappa\right|^{1/n} \leq \alpha$. Quitte à extraire des sous-suites pour $u_n$ on peut supposer que $u_n^{[0]}$ n'est jamais nul,il existe donc $\beta$ tel que

$$\left|\lambda^{[0]} + \frac{\lambda^{[1]}u_n^{[1]} + ... + \lambda^{[s-1]}u_n^{[s-1]}}{u_n^{[0]}}\right| \to_{n\to\infty} \frac{\beta}{\alpha}$$

et $\beta = \alpha$ à moins que

$$\frac{\lambda^{[1]}u_n^{[1]} + ... + \lambda^{[s-1]}u_n^{[s-1]}}{u_n^{[0]}} \to_{n\to\infty} -\lambda^{[0]}$$

Condition fausse pour des $\lambda^{[k]}$ génériques.

**Définition 5** *On appelle arête dominante l'arête la plus à droite du polygone de Newton, équation caractéristique dominante son équation caractéristique associée, et réccurence normalisé une récurrence pour laquelle cette arête est horizontale. C'est à dire que le comportement asymptotique est purement exponentiel, et non factoriel ($\kappa = 0$).*

## 5.5 Fonction génératrice normalisée

**Algorithm 4** RecToDiffeq

**Entrée:** $R = \sum_{k=0}^{s} b^{[k]}(n)S^k \quad \in \mathbb{Q}[n]\langle S\rangle$
**Sortie:** Un opérateur $D \in \mathbb{Q}[z]\langle\theta\rangle$ tel que $\forall (u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ R.u=0 $\iff D.\sum u_n x^n = 0$

1: g:=pgcd($b^{[s]}, \pi$) où $\pi = \prod_{k=1}^{s}(n+k)$

2: calculer les $c_{jk}$ tels que $g.R = \sum_{k=0}^{s}\sum_j c_{jk}n^jS^k$

[*on a ainsi* $g.R = \sum_{k=0}^{s}\sum_j c_{jk}S^k(n-k)^j$]

3: développer $\sum_{k=0}^{s}\sum_j c_{jk}z^{s-k}(\theta-k)^j$ sous la forme $D = \sum_{k=0}^{r} a^{[k]}\theta^k$

4: renvoyer D

La multiplication par g s'assure que les premier termes $u_0, ..., u_{s-1}$ s'affranchissent des potentielles contraintes crées par les termes indéxés sur les coefficients négatifs. Mais ne change pas la relation pour les termes supérieurs à s.

Considérons $R \in \mathbb{Q}[n]\langle S\rangle$ un opérateur non singulier, d'ordre s. Une solution $(u_n)$ de la récurrence R.u=0, u(z) est annulée par l'opérateur RecToDiffeq$(R)(\theta) = \sum_{k=0}^{r} a^{[k]}\theta^k \in \mathbb{Q}[z]\langle\theta\rangle$. En divisant par $a^{[r]}$ on obtient

$$(\theta^r + \frac{a^{[r-1]}\theta^{r-1} + ... + a^{[0]}}{a^{[r]}}).u = 0$$

**Proposition 3** *Si l'opérateur R est normalisé, alors l'origine est un point régulier de D=RecToDiffeq et l'équation caractéristique dominante de R est le polynôme réciproque de $a^{[r]}$*

Dans le cas général, on commence par normaliser R. Le produit symétrique n'est pas quelconque, regarder Barkatou et al.

**Algorithm 5** Normalize$(R, \kappa)$

**Entrée:** Un opérateur de récurrence $R = \sum_{k=0}^{s} b^{[k]}(n)S^k \in \mathbb{Q}[n]\langle S\rangle$, un rationnel $\kappa$
**Sortie:** Un opérateur $D \in \mathbb{Q}[x]\langle\theta\rangle$

1: $p/q := \kappa$, avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$

2: calculer les coefficients $\hat{b}^{[k]}(n)$ du produit symétrique $\hat{R} = \sum_{k=0}^{qs} \hat{b}^{[k]}(n)S^k$ de $R$ par $(n + k)^p S^q - 1$

3: renvoyer RecToDiffeq$(\hat{R})$

**Proposition 4** *Soit $R \in \mathbb{Q}[n]\langle S\rangle$ un opérateur non singulier, réversible de coefficient constant par rapport à $S$ non nul. Soient $p/q, P_\alpha$ le comportement asymptotique génériquee renvoyé par Asympt. On suppose que $\delta(P_\alpha) < \infty$ alors $Normalize(R, p/q)$ calcule un opérateur différentiel $D$ qui annule la série*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n u_n x^n$$

*pour toutes suites $\psi$ et $u$ solutions de*

$$(n + q)^p \psi_{n+q} = \psi_n$$

*et $R.u = 0$, l'opérateur $D$ est régulier à l'origine et le module de sa singularité dominante est égale à $\delta(P_\alpha)$.*

## 5.6 Séries majorantes

**Définition 6** *Une série formelle $v \in \mathbb{R}_+[[\mathbb{Z}]]$ est appelée série majorante de $u \in \mathbb{R}[[\mathbb{Z}]$ si $v$ domine $u$ coefficient par coefficient, $\forall n |u_n| \le v_n$. On note $u \trianglelefteq v$.*

**Proposition 5** *Soient $u, u^{[1]}, u^{[2]} \in \mathbb{R}[[x]]$, et $v, v^{[1]}, v^{[2]} \in \mathbb{R}_+[[x]]$ tels que $u \le v, u^{[1]} \le v^{[1]}$ et $u^{[2]} \le v^{[2]}$ alors*
*(a)Le rayon de convergence de $v$ est inclus dans celui de $u$;*
*(b)Si $\zeta$ appartient qu disque de convergence de $v$, alors $|u(\zeta)| \le v(|\zeta|)$;*
*(c)On a les majorations*

$$u' \trianglelefteq v'; \qquad u^{[1]} + u^{[2]} \trianglelefteq v^{[1]} + v^{[2]}; \qquad u^{[1]}u^{[2]} \trianglelefteq v^{[1]}v^{[2]};$$

*(e)Si $v^{[1]}(0) = 0$ alors $u^{[2]} \circ u^{[1]} \trianglelefteq v^{[2]} \circ v^{[1]}$.*

**Méthode de majoration avec un example simple**
On choisit une série a(z) définie sur $D = \{z, |z| < \rho\}$ soit $u$ une autre série vérifiant $u'(z) = a(z)u(z)$ alors le rayon de convergence de $u$ est le même que celui de a.

**Démonstration** Pour commencer, $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n\ |a_n| \le M\rho^{-n}$. On écrit la relation sur u en terme de séries: $(n+1)u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-j}a_j$ en considérant $v$ telle que $(n+1)v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_{n-j}M\rho^{-j}$ on observe $v'(z) = \frac{M}{1-z\rho^{-1}}v(z)$
On a $v = v_0(1 - z\rho^{-1})^{-M\rho}$. Si $|u_0| \le v_0$ la récurrence permet de conclure $u \trianglelefteq v$. On sait que le rayon de convergence de $v$ est $\rho$ donc celui de $u$ est supérieur à $\rho$.

## 5.7 Séries majorantes pour les fonctions D-finies normalisées

Soit D une équation différentielle normalisée,

$$\theta^r + \frac{a^{[r-1]}\theta^{r-1} + ... + a^{[0]}}{a^{[r]}}$$

Le procédé de majoration est le suivant. En isolant le coefficient constant du développement de Taylor en zéro de chaque coefficient, l'équation se réecrit

$$Q(\theta).u = z(a^{[r-1]}\theta^{r-1} + ... + a^{[0]}).u$$

# 6 Étude de la fonction de majoration et détermination d'un majorant de alpha

La fonction de majoration renvoyée par la fonction Bound NormalDiffeq$(D, P_\alpha, u)$ est de la forme

$$g(z) = \frac{A}{(1-\alpha z)^K} \text{ si T=0} \qquad g(z) = \text{A } \exp(\frac{K/T}{(1-\alpha z)^T}) \text{ sinon.}$$

L'objectif ici est de borner le coefficient $\gamma(f,z) = \sup_{k\geq 2} \left\| f'(z)^{-1} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}$ en utilisant la fonction majorante développée dans la partie précèdente. Elle respecte la propriété interessante $f \trianglelefteq g$ et donc trouver $\alpha(g,z)$ sur cette fonction reviendrai à majorer $\alpha(f,z)$. L'objectif serait de trouver N à partir du quel $\left\| f'(z)^{-1} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}$ est décroissante. Alors

$$\gamma(g,z) = max_{k=2}^{N} \left\| f'(z)^{-1} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}$$

En étudiant l'expression de la fonction de majoration pour $T = 0$ on obtient

$$g^{(k)}(z) = \frac{A\alpha^k \prod_{i=0}^{k-1}(K+i)}{(1-\alpha z)^{K+k}}$$

On peut la réécrire comme

$$\frac{g^{(k)}(z)}{k!} = \frac{A\alpha^k}{(1-\alpha z)^{K+k}} \binom{K+k-1}{k} \tag{1}$$

on peut la majorer par

$$\frac{g^{(k)}(z)}{k!} = \frac{A\alpha^k}{(1-\alpha z)^{K+k}} (K+k-1)^K \tag{2}$$

Étudions la fonction $h(x) = (f(x))^{\frac{1}{x-1}}$ où f est strictement positive, on peut la réecrire

$$h(x) = \exp(\frac{ln(f(x))}{x-1})$$

Une étude de signe donne à nous intéresser au signe de l'expression

$$(x-1)f'(x) - f(x)ln(f(x)) \tag{3}$$

qui détermine le signe de la dérivée de h

Il faut injecter l'expression que nous avons obtenue dans la fonction f au dessus, remarque: la majoration obtenue en expression (2) doit avoir une croissance plus rapide

On s'intéresse maintenant au cas où $T \neq 0$ de l'expression, on veut développer $f(z)$ dans le cas où $T \neq 0$. En posant $\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \alpha_k(z)$, on obtient l'expression suivante

$$f(z+t) = \text{A } \exp\left(K/T \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(z) t^k\right)$$

$$= \text{A}\Big[1 + (K/T)\frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k(z)t^k}{1!} + (K/T)^2 \frac{\left(\sum_0^{+\infty} \alpha_k(z)t^k\right)^2}{2!} + ... + (K/T)^l \frac{\left(\sum_0^{+\infty} \alpha_k(z)t^k\right)^l}{l!} + ...\Big]$$

En identifiant les coefficients correspondants à $t^k$

$$\frac{g^{(k)}(z)}{k!} = \text{A} \sum_{i=1}^{k} \frac{(K/T)^i}{i!} \Big( \sum_{r_1 \leq r_2 \leq ... \leq r_i} \Pi(r_1, ..., r_i) \prod_{h=1}^{i} \alpha_{r_h}(z) \Big) \text{ avec } \sum r_h = k$$

Où $\Pi(r_1, ..., r_i)$ est définie comme suit:
On regroupe les $r_h$ en $g$ groupes $\Gamma$ de coefficients égaux, soit $\Gamma_h$ leur taille telle que $\sum_{h=1}^{g} \Gamma_h = i$, alors

$$\Pi(r_1, r_2, ..., r_i) = \binom{i}{\Gamma_g} \times \binom{i-\Gamma_g}{\Gamma_{g-1}} \times ... \times \binom{\Gamma_1}{\Gamma_1}$$

# 7 Les méthodes d'exclusion de zéros

## 7.1 L'algorithme de Bissection-exclusion de J.-C.Yakoubsohn

**Algorithm 6** bisection-exclusion method

**Entrée:** fonction D-finie $F(x) = \sum_{n \geq \beta} f(n)x^n$. interval (a,b)
**Sortie:** $(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$

1: $g(x) = |g(\frac{a+b}{2})| - maj(F(x - \frac{a+b}{2}) - F(\frac{a+b}{2}))$
2: c=premier_zero_positif(g)
3: Renvoyer$((a, \frac{a+b}{2} - c) \cup (\frac{a+b}{2} + c, b))$

maj: fonction de majoration fournie dans le module Ore_algebra.analytic de Marc Mezzarobba
zéropositif(g): le premier zéro sur lequel la fonction g s'annule sur $R$

## 7.2 Séparation des zéros via la méthode de Rouché