

---

# Zéros certifiés des fonctions D-finies

---

*Auteur*

MATHIS DERONZIER  
MINES SAINT-ÉTIENNE

*Maîtres de stage*

BRUNO SALVY  
I.N.R.I.A  
NICOLAS BRISEBARRE  
C.N.R.S.

STAGE DE RECHERCHE DE MASTER 1

Août  
2020

# Sommaire

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
0.1	Remerciements . . . . .	3
0.2	Cadre . . . . .	3
0.2.1	Élaboration de la problématique . . . . .	3
0.2.2	Plan du rapport . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Les fonctions D-finies</b>	<b>4</b>
1.1	Les suites P-récurrentes et les opérateurs . . . . .	4
1.2	Propriétés des fonctions D-finies . . . . .	5
1.3	Structure des fonctions D-finies . . . . .	6
1.4	Théorème de Perron-Kreuser . . . . .	7
1.4.1	Distance aux singularités . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Séries majorantes des fonctions D-finies</b>	<b>8</b>
2.1	Les séries majorantes . . . . .	8
2.2	Séries majorantes sur le reste de fonctions D-finies . . . . .	9
2.2.1	Restes et résidus . . . . .	10
2.2.2	L'équation majorante . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Les outils pour rechercher des zéros</b>	<b>11</b>
3.1	La méthode de bisection-exclusion . . . . .	11
3.1.1	Convergence de la méthode dans le cas général . . . . .	12
3.1.2	Comportement local proche d'un zéro . . . . .	13
3.2	Localisation des zéros via la méthode de Rouché . . . . .	14
3.2.1	Les zéros répulsifs . . . . .	15
3.2.2	Le théorème de Rouché pour localiser des grappes de zéros . . . . .	16
3.3	Localisation des zéros dans le cas réel . . . . .	17
3.3.1	Cas des zéros de multiplicité 1 . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Algorithmes</b>	<b>19</b>
4.1	Les entrées acceptées par l'algorithme . . . . .	19
4.2	Principe de l'algorithme . . . . .	19
4.3	Algorithme de bisection-exclusion . . . . .	20
4.4	Certification des zéros . . . . .	23
4.5	Algorithme final . . . . .	27

# 0 Introduction

## 0.1 Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à Nicolas Brisebarre ainsi qu'à Bruno Salvy qui ont toujours réussi à trouver du temps pour m'aider et m'orienter dans mon stage. C'est grâce à la confiance et au temps qu'ils m'ont accordés que ce stage de recherche a été aussi agréable et enrichissant.

En particulier, je remercie Nicolas Brisebarre d'avoir accepté de me prendre en stage et d'organiser le stage malgré le contexte compliqué dû à la crise du covid 19. Ses conseils m'ont aiguillé aussi bien dans mon stage que dans mon orientation personnelle.

Je remercie aussi Bruno Salvy pour ses précieuses remarques qui m'ont permis de comprendre plus en profondeur les problématiques de mon stage et qui m'ont donné un vrai enthousiasme dans mon travail.

Je remercie aussi Marc Mezzarobba pour son travail sur les fonctions D-finies sans lequel le mien aurait été irréalisable, ainsi que l'aide qu'il m'a apportée à un moment important de mon stage.

Enfin, je remercie le service administratif de l'E.N.S. Lyon pour leur réactivité et leur amabilité.

## 0.2 Cadre

Cette section a pour objectif de contextualiser et de formaliser les problématiques auxquelles nous répondrons.

### 0.2.1 Élaboration de la problématique

Les zéros certifiés des fonctions D-finies, voilà une formulation qui mérite d'être expliquée plus en détails. Pour commencer, on appelle zéro d'une fonction un point de son domaine de définition où la fonction s'annule. De plus, une fonction D-finie est une fonction satisfaisant une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, de la forme

$$a_r(z)y^{(r)}(z) + a_{r-1}(z)y^{(r-1)}(z) + \dots + a_0(z)y(z) = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}[z],$$

où  $\mathbb{C}[z]$  est l'anneau des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et  $y^{(n)}(z)$  représente la dérivée n-ième de la fonction  $y$ . On peut parler de l'ensemble des fonctions D-finies (nous l'étudierons plus en détails dans la section 1).

Maintenant, que nous en savons un peu plus sur les fonctions D-finies il s'agit de spécifier ce que l'on entend par certifier un zéro. Il est facile de certifier un zéro par équation, cependant l'objectif de ce stage est de certifier un zéro à partir d'une représentation informatique de la fonction D-finie  $y$ . Or, pour les fonctions D-finies il est souvent impossible d'avoir la valeur exacte de leur zéro. C'est par exemple le cas de la fonction sin qui vérifie l'équation différentielle

$$y^{(2)}(z) + y(z) = 0.$$

Ses zéros sont les multiples de  $\pi$ , mais  $\pi$  n'est pas un nombre rationnel, et l'on ne peut par définition avoir sa valeur exacte dans l'ensemble des nombres rationnels. Donc, on ne peut avoir une valeur exacte de ces nombres avec une représentation informatique flottante qui est un nombre rationnel. Si l'on ne peut avoir une valeur exacte, on peut néanmoins approcher à une précision donnée tous les réels par des rationnels. Cependant, pour certifier un zéro, comme toute distance est relative il ne sert à rien d'en être "proche", si ce mot a encore un sens. Ce que nous appellerons un zéro certifié sera un résultat informatique pour lequel il existe un algorithme qui permet, à partir de ce résultat de se rapprocher à une précision donnée du zéro théorique. Nous développerons la forme de ce résultat dans l'équation (10) et dans la partie algorithmique (algorithme `_certification-zéros_`).

Il reste encore des points à éclaircir, en effet une fonction méromorphe peut contenir une infinité de zéros dans  $\mathbb{C}$ , alors le calcul informatique prendrait un temps infini. Il faut donc pour cela se restreindre à un compact, sur lequel le nombre de zéros est fini, cette propriété sera démontrée dans le rapport.

Plus particulièrement, l'objet de ce stage est de trouver les zéros réels des fonctions D-finies à coefficients polynomiaux dans  $\mathbb{R}[z]$ , l'anneau des polynômes à coefficients réels. Nous traiterons des intervalles compacts de la forme  $[a, b]$ . En plus, on ajoutera la condition que la fonction n'admet aucune singularité sur l'intervalle  $[a, b]$ . Bien que ce cadre semble être très précis, les théorèmes utilisés sont dans  $\mathbb{C}$ . Les

algorithmes pourraient sans trop de complications être généralisés dans  $\mathbb{C}$ .

Pour résumer, nous aurons une fonction D-finie  $f$  satisfaisant une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux dans  $\mathbb{R}[z]$ . Notre objectif sera de trouver tous les zéros réels de  $f$  dans un intervalle  $[a, b]$  ne contenant aucune singularité de  $f$ . Nous devrons trouver une façon pertinente de renvoyer un zéro certifié de la fonction.

### 0.2.2 Plan du rapport

La section 1 introduira les notions dont nous aurons besoin, elle rappellera les propriétés des fonctions D-finies qui nous seront utiles. Elle expliquera l'apparition des singularités à partir de l'équation différentielle.

La section 2 sera sur les séries majorantes, elle montrera l'intérêt de ces séries pour évaluer numériquement notre fonction D-finie. Elle présentera aussi la méthode de Marc Mezzarobba [1] pour obtenir des séries majorantes dans sageMath (le logiciel informatique dans lequel est écrit notre code).

La section 3 donnera les outils que nous utiliserons dans nos algorithmes. Elle expliquera la méthode de bisection-exclusion [2] permettant de localiser des intervalles ne contenant pas de zéro. Elle définira aussi une méthode permettant de localiser et de certifier les zéros réels de la fonction. Cette partie répondra aux trois questions :

- (1) Comment certifier un zéro ?
- (2) Quel résultat renvoyer ?
- (3) Comment savoir si l'on a trouvé tous les zéros de la fonction sur l'intervalle ?

Nous verrons qu'il faudra reformuler notre problématique et distinguer les cas selon la multiplicité des zéros (cf. définition 6). Les méthodes introduites dans cette partie ne permettront pas de certifier les zéros de multiplicité supérieur à 1.

La section 4 contiendra nos algorithmes ainsi que des preuves de leur fonctionnement.

Notre code a été développé sur sage : <https://www.sagemath.org/>

## 1 Les fonctions D-finies

Cette section énonce quelques propriétés des fonctions D-finies, de sorte à donner des notions fondamentales au lecteur non familier avec cet ensemble de fonctions. Les preuves des théorèmes ne sont pas toujours présentées ici, mais le sont dans l'article de Stanley [3] et dans le livre *Algorithmes efficaces en calcul formel* [4, chap.14].

On dénotera dans la suite  $\mathbb{K}[z]$  les polynômes à une variable sur le corps  $\mathbb{K}$ , les deux corps sur lesquels nous travaillerons dans ce rapport seront  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ . On dénotera aussi  $\mathbb{K}((z))$ , le corps des séries de Laurent à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{C}(z)$  le corps des fractions rationnelles polynomiales. Nous appellerons l'ensemble des fonctions D-finies  $\mathbb{D}$ . On traitera parfois avec des polynômes à deux variables et l'on notera  $\deg_\mu(P)$  le degré en  $\mu$  du polynôme  $P$ .

**Définition 1.** Soit  $f(x) = \sum_{k \geq n_0} f(n)x^n$  une série de Laurent sur le corps  $\mathbb{C}$ ,  $f$  est dite D-finies si elle satisfait une équation différentielle de la forme

$$a_r(z)y^{(r)}(z) + a_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + \dots + a_0(z)y(z) = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}[z]. \quad (1)$$

### 1.1 Les suites P-récurrentes et les opérateurs

Nous verrons dans le paragraphe suivant le lien entre les fonctions D-finies et les suites P-récurrentes. Avant cela, il faut introduire quelques notions, notamment la notion d'opérateur sur les suites et les séries.

**Définition 2.** Une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite P-récurrente s'il existe un nombre fini de polynômes dans  $\mathbb{C}[z]$ ,  $P_0(n), \dots, P_d(n)$  avec  $P_d$  non nul, tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_d(n)f(n+d) + P_{d-1}(n)f(n+d-1) + \dots + P_0(n)f(n) = 0. \quad (2)$$

Et par abus de notation nous dirons qu'une suite est *P-réursive*, en considérant les suites comme des fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ .

L'équation (2) donne une expression de  $f(n+d)$  en fonction de  $f(n+d-1), \dots, f(n)$  (si  $P_d(n)$  n'est pas nul). On peut, connaissant  $f(0), \dots, f(d-1)$  calculer rapidement les valeurs  $f(n), n \geq d$  à partir d'algorithmes utilisant le scindage binaire introduit dans la thèse de Marc Mezzarobba [5, chap.6].

On introduit ici la notion d'opérateur différentiel et séquentiel. On peut considérer l'équation différentielle (1) satisfaite par  $y$  comme l'application d'un opérateur sur cette fonction. On écrira l'opérateur de différentiation  $\frac{\partial}{\partial z}$  vérifiant  $\frac{\partial}{\partial z} \cdot y(z) = y'(z)$  et l'opérateur de multiplication par  $z$ ,  $z$  vérifiant aussi  $z \cdot y(z) = zy(z)$ . Finalement, notre opérateur différentiel est un polynôme en  $z$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ , donc un polynôme à deux variables, on l'écrira  $\mathcal{D}(z, \frac{\partial}{\partial z})$  ou  $\mathcal{D}(x, Dx)$ , selon si  $y$  est une fonction D-finie de  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ou de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Par exemple, l'opérateur différentiel correspondant à l'équation (1) est

$$\mathcal{D}\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) = a_r(z) \frac{\partial^r}{\partial z^r} + a_{r-1}(z) \frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}} + \dots + a_0(z).$$

De la même manière on peut considérer l'équation de récurrence (2) comme l'application d'un opérateur sur les fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . On introduit l'opérateur  $S_n$  vérifiant  $S_n \cdot f(n) = f(n+1)$  et l'opérateur de multiplication par  $n$  vérifiant  $n \cdot f(n) = nf(n)$ . On a une fois encore un polynôme à deux variables, on l'écrira  $\mathcal{R}(n, S_n)$ . Et donc l'opérateur de récurrence correspondant à l'équation (2) est

$$\mathcal{R}(n, S_n) = P_d(n)S_n^d + P_{d-1}(n)S_n^{d-1} + \dots + P_0(n).$$

Pour terminer, on introduit l'opérateur  $\theta$ , tel que  $\theta \cdot y(z) = zy'(z)$ . En remarquant que l'on ne change pas les solutions de l'équation différentielle (1) en la multipliant par  $z^\nu$ , l'espace des solutions de (1) est le même que l'espace des solutions de

$$z^\nu (a_r(z)y^{(r)}(z) + a_{r-1}(z)y^{(r-1)}(z) + \dots + a_0(z)y(z)) = 0, \quad a_k \in \mathbb{C}[z].$$

Pour un  $\nu$  convenable, on peut réécrire cette équation avec l'opérateur  $\theta$

$$p_r(z)\theta^r(y(z)) + p_{r-1}(z)\theta^{r-1}(y(z)) + \dots + p_0(z)y(z),$$

autrement dit,

$$z^\nu \mathcal{D}\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \tilde{\mathcal{D}}\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

L'opérateur  $\theta$  a un intérêt algorithmique, plus que théorique.

**Remarque 1.** Il y a un lien entre les opérateurs  $\theta$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $S_n$ . Pour une fonction  $F(z) = \sum_{n \geq 0} f(n)z^n$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot F &\sim \mathcal{D}(S_n^{-1}, (n+1)S_n) \cdot f, \\ \mathcal{D}(z, \theta) \cdot F &\sim \mathcal{D}(S_n^{-1}, n) \cdot f, \end{aligned}$$

où le symbole  $\sim$  signifie que l'opérateur de récurrence est vrai à partir d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Une formalisation plus rigoureuse des opérateurs est faite dans la section 3 de la thèse de Marc Mezzarobba [5].

## 1.2 Propriétés des fonctions D-finies

**Théorème 1.1.** Soit  $y$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $y$  est D-finie si et seulement si l'espace vectoriel engendré par  $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est de dimension finie sur le corps  $\mathbb{C}(z)$ .

C'est d'ailleurs sous cette deuxième caractérisation qu'ont été introduites les fonctions D-finies signifiant "differentiably-finite". Ce point n'est que pour la culture, car ce théorème ne sera pas utilisé dans la suite.

**Théorème 1.2.** Soient  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions telles que pour un certain  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = g(n) \quad \forall n \geq n_0$ , alors si  $f$  est P-réursive alors  $g$  l'est aussi.

*Preuve.* Soient  $f$  et  $g$  des fonctions telles que  $f(n) = g(n)$ ,  $\forall n, n \geq n_0$ . Soit l'équation de récurrence de  $f$ ,

$$P_d(n)f(n+d) + P_{d-1}(n)f(n+d-1) + \dots + P_0(n)f(n) = 0$$

alors  $g$  vérifie l'équation de récurrence

$$\Pi_{n_0}(n) \left( P_d(n)g(n+d) + P_{d-1}(n)g(n+d-1) + \dots + P_0(n)g(n) \right) = 0,$$

où  $\Pi_{n_0}(n) = \prod_{k=0}^{n_0-1} (n-k)$ . □

L'intérêt de ce théorème apparaîtra par la suite. Nous devons d'abord introduire le lien entre récurrence polynomiale et équation différentielle polynomiale, qui est une conséquence de la remarque (1). Voici le théorème le plus utile sur les fonctions D-finies.

**Théorème 1.3.** *Soit  $F$  une série formelle s'écrivant  $\sum_{n \geq 0} f(n)z^n$  on a l'équivalence*

- (i)  *$F$  est une série D-finie.*
- (ii) *La suite  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est P-réursive.*

La démonstration de ce théorème se trouve dans l'article de Stanley [3]. Mais nous allons donner une esquisse de démonstration qui utilise les opérateurs introduits dans le paragraphe précédent.

*Preuve.* (Esquisse) En écrivant  $F(z) = \sum_{n \geq 0} f(n)z^n$  on observe que

$$\mathcal{D}\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F) = 0$$

implique que

$$\Pi_{n_0}(n) \mathcal{D}(S_n^{-1}, (n+1)S_n) \cdot (f) = 0,$$

où  $\Pi_{n_0}(n) = \prod_{k=0}^{n_0} (n-k)$ , la multiplication par  $\Pi_{n_0}(n)$  permet de s'affranchir de la récurrence sur les coefficients négatifs, alors  $n_0$  est la différence entre le degré maximal en  $S_n$  et le degré minimale en  $S_n$  de l'opérateur  $\mathcal{D}(S_n^{-1}, nS_n)$ . Si l'on compose suffisamment de fois par  $S_n$  l'égalité ci dessus, on aura bien que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $u_n = f(n)$  est une suite P-réursive. □

Maintenant, nous savons à partir du théorème 1.3 qu'il y a une correspondance entre les équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux et les suites P-réursive. L'esquisse de la démonstration est une méthode pour passer d'une formulation à l'autre. Le théorème 1.2 permet d'assurer que le reste d'une série D-finie à l'ordre  $k$  est encore une série D-finie.

### 1.3 Structure des fonctions D-finies

On a déjà introduit quelques opérateurs sur les séries D-finies. Mais on va ici s'intéresser à la structure de  $\mathbb{D}$ .

**Proposition 1.**  $\mathbb{D}$  est une sous algèbre de  $\mathbb{C}$ .

Autrement dit,  $(\mathbb{D}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{D}$  est stable par multiplication interne.

**Proposition 2.** Les fonctions algébriques sont D-finies.

La classe des fonctions D-finies représente une quantité importante des équations différentielles auxquelles sont confrontés les physiciens et mathématiciens. Ainsi, le *Handbook of Mathematical Functions* [6], référence importante en physique, chimie et mathématiques appliquées, comporte environ 60% de fonctions solutions d'équations différentielles linéaires. Une partie des fonctions spéciales sont aussi D-finies.

**Proposition 3.** Si  $f = \sum_{k \geq 0} u_k z^k$  et  $g = \sum_{k \geq 0} v_k z^k$  sont des séries D-finies, alors le produit d'Hadamard  $f \odot g = \sum_{k \geq 0} u_k v_k z^k$  est encore une série D-finie.

L'inverse d'une fonction D-finie n'est pas nécessairement D-finie. Un exemple simple est la fonction cosinus, cosinus est D-finie, mais son inverse ne l'est pas. On peut s'en convaincre en observant que la fonction tangente n'est pas D-finie, et en écrivant sa dérivée  $1 + \frac{\sin^2}{\cos^2}$ . Une discussion plus complète est faite dans le livre *Algorithmes efficaces en calcul formel* [4].

## 1.4 Théorème de Perron-Kreuser

Ce théorème est très éclairant, et montre le lien entre l'équation de récurrence et la forme des solutions. Il permet aussi de comprendre l'apparition des singularités. Cependant, il n'est pas essentiel à la compréhension du rapport. Un lecteur pressé pourra aller directement au chapitre suivant.

Le théorème de Perron-Kreuser porte sur le comportement asymptotique des suites P-récursive. Nous allons voir qu'il permet d'introduire la notion de singularité et de savoir quels types d'équations différentielles seront admissibles par notre algorithme.

Nous retrouvons ce théorème dans la section 3.4 de la thèse de Marc Mezzarobba [5]. On considère la suite P-récursive  $u_n$  caractérisée par

$$b_s(n)u_{n+s} + b_{s-1}(n)u_{n+s-1} + \dots + b_{s'}(n)u_{n+s'} = 0. \quad (3)$$

Supposons que les coefficients  $b_n(n)$  de l'équation (3) (où  $s'$  peut être négatif) ont un comportement asymptotique de la forme

$$\forall k, \quad b_k(n) \sim c_k n^{d_k} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

avec  $c_k \in E$  et  $d_k \in \mathbb{Z}$ . Supposons de plus que  $u_n$  est une solution telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \lambda n^\kappa \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

En réécrivant l'équation séquentielle avec ses coefficients asymptotiques  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$u_{n+s'} \left( c_s \lambda^s n^{d_s+s\kappa} + c_{s-1} \lambda^{s-1} n^{d_{s-1}+(s-1)\kappa} + \dots + c_{s'} \lambda^{s'} n^{d_{s'}+s'\kappa} \right).$$

Cette expression doit s'annuler d'après l'équation (3), il est alors nécessaire que les termes asymptotiquement dominants se compensent, et donc que l'exposant  $d_k + k\kappa$  le plus grand, soit atteint au moins deux fois. Alors  $-\kappa$  doit être parmi les pentes du *polygone de Newton* de l'équation.

**Définition 3.** *Le polygone de Newton est l'enveloppe convexe supérieure des points  $(k, d_k) \in \mathbb{N}^2$ , si  $E = [A, B]$  désigne une arête du polygone de Newton, on note  $\kappa(E)$  l'opposé de sa pente, et on définit l'équation caractéristique associée à  $E$  (ou à  $\kappa(E)$ ) par*

$$\chi_E(\lambda) = \sum_{(k, d_k) \in E} c_k \lambda^{k-t},$$

où  $(t, d_t) = A$ , l'extrémité gauche du segment  $E$ .

Remarquons que la somme des degrés des différentes équations caractéristiques est égale à l'ordre de l'équation de récurrence. On peut retrouver la démonstration du point (a) de ce théorème dans un article d'Henri Poincaré [7]. La démonstration générale utilise le théorème de Perron sur les suites matricielles.

**Théorème 1.4.** (Perron-Kreuser) *Pour toute arête  $E$  du polygone de Newton de la récurrence (3) notons  $\lambda_{E_1}, \lambda_{E_2}, \dots$  les racines de  $\chi(E)$  comptées avec leur multiplicité.*

(a) *Supposons que pour toute arête  $E$ , les modules  $|\lambda_{E_i}|$  des racines de  $\chi(E)$  sont deux à deux distincts. Alors toute solution non ultimement nulle de (3) satisfait*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \lambda_{E_i} n^{\kappa(E)} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

*Pour une certaine arête  $E$  et un certain  $i$ .*

(b) *Si en outre (3) est réversible (que  $b_0$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{N}$ ), elle admet une base de solution*

$$(u_n^{[E_i]})_{E_i \leq i \leq \deg \chi_E}$$

*telle que*

$$\frac{u_{n+1}^{[E_i]}}{u_n^{[E_i]}} \sim \lambda_{E_i} n^{\kappa(E)} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(c) *Dans le cas où il existe  $E$  et  $i \neq j$  tels que  $|\lambda_{E_i}| = |\lambda_{E_j}|$  les analogues des deux assertions précédentes subsistent mais avec la conclusion plus faible*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n^{E_i}}{n!^{\kappa(E)}} \right|^{\frac{1}{n}} = |\lambda_{E_i}|.$$

Le point (a) du théorème 1.4 s'appelle aussi *théorème de Poincaré* [7].

### 1.4.1 Distance aux singularités

**Définition 4.** On appelle *singularité* de  $f$  une fonction  $D$ -finie un point de  $\mathbb{C}$  où la fonction n'y admet pas de prolongement analytique.

Rappelons la formule de Cauchy-Hadamard, pour  $f(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n$  son rayon de convergence  $R$  satisfait l'équation

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}. \quad (4)$$

À partir de la formule de Cauchy-Hadamard, on peut étudier les singularités de la fonction  $f$  dont les coefficients satisfont l'équation de récurrence (3).

**Cas 1** ( $\kappa > 0$ ) :

C'est à dire que dans l'équation (3) le degré du polynôme  $b_s$  est strictement inférieur à un des degrés des polynômes  $\deg(b_i)$ ,  $0 \leq i < s$ , alors le rayon de convergence est nul puisque toutes les arêtes  $E$  du polygone de Newton ont une pente positive. On est sur une singularité de  $f$ .

**Cas 2** ( $\kappa < 0$ ) :

C'est à dire que le degré du polynôme  $b_s$  est strictement supérieur aux degrés des polynômes  $\deg(b_i)$ ,  $0 \leq i < s$ , le rayon de convergence est  $+\infty$  pour une partie au moins des solutions.

**Cas 3** ( $\kappa = 0$ ) :

La plupart du temps le coefficient  $\kappa$  de l'arête de droite sera nul, alors la distance à la singularité la plus proche est supérieure au minimum des inverses des racines de l'équation caractéristique du segment  $E$  tel que  $\kappa(E) = 0$ .

L'article de Marc Mezzarobba et Bruno Salvy [8] et la thèse de Marc Mezzarobba [5] donnent une discussion beaucoup plus complète du lien entre les opérateurs et les singularités. L'article [8] permet notamment de trouver une majoration des coefficients de la suite  $P$ -récursive  $u_n$ . Voici le théorème qu'il démontre.

**Théorème 1.5.** Soit  $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$  une suite  $P$ -récursive solution de la récurrence homogène (3), avec  $b_s(n) \neq 0$  et  $b_0(n) \neq 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Étant donnée la récurrence (3) et les conditions initiales  $u_0, \dots, u_{s-1}$ , il est possible de décrire un réel positif  $A$ , un rationnel  $\kappa$ , un nombre algébrique  $\alpha$  et une fonction  $\phi$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq A n!^{\kappa} \alpha^n \phi(n)$$

Avec  $\phi(n) = e^{o(n)}$ . Pour choix générique des conditions initiales, les paramètres  $\kappa$  et  $\alpha$  sont optimaux. La fonction  $\phi$  est donnée par une formule explicite.

## 2 Séries majorantes des fonctions $D$ -finies

Cette partie a pour objectif d'introduire la notion de série majorante et d'introduire la méthode utilisée pour obtenir ces séries.

### 2.1 Les séries majorantes

Nous avons vu que l'on pouvait calculer le développement en série de Taylor d'une fonction  $D$ -finie à partir de son équation de récurrence. Cependant l'ordinateur est incapable de calculer tous les coefficients de la série, on cherche donc à majorer la différence entre la fonction réelle et la fonction calculée par l'ordinateur. Il faut donc pouvoir majorer le reste de la série, un outil souvent utilisé est *une série majorante*. L'obtention de cette série peut se faire à partir de l'équation majorante. C'est ce qu'on appelle aussi, la méthode de Cauchy-Kovalevskaya [9].

**Définition 5.** Une série formelle  $v \in \mathbb{R}_+[[z]]$  est appelée *série majorante* de  $u \in \mathbb{R}[[z]]$  si  $v$  domine  $u$  coefficient par coefficient,  $\forall n \quad |u_n| \leq v_n$ , on note  $u \leq v$ .

**Proposition 4.** (Équation majorante) Soient  $u, u^{[1]}, u^{[2]} \in \mathbb{R}[[x]]$ , et  $v, v^{[1]}, v^{[2]} \in \mathbb{R}_+[[x]]$  tels que  $u \leq v, u^{[1]} \leq v^{[1]}$  et  $u^{[2]} \leq v^{[2]}$  alors



- (a) Le rayon de convergence de  $v$  est inférieur à celui de  $u$  ;
- (b) Si  $\zeta$  appartient au disque de convergence de  $v$ , alors  $|u(\zeta)| \leq v(|\zeta|)$  ;
- (c) On a les majorations

$$u' \leq v'; \quad u^{[1]} + u^{[2]} \leq v^{[1]} + v^{[2]}; \quad u^{[1]}u^{[2]} \leq v^{[1]}v^{[2]};$$

- (e) Si  $v^{[1]}(0) = 0$  alors  $u^{[2]} \circ u^{[1]} \leq v^{[2]} \circ v^{[1]}$ .

La démonstration de ces propriétés se trouve dans l'article [10].

Numériquement, il est intéressant de travailler avec les séries majorantes sur les restes des séries. En récupérant une série majorante sur le reste à l'ordre  $k$ . Soit  $f$  une série D-finie telle que

$$f(z) = \sum_{i=0}^k u_i z^i + \sum_{i \geq k+1} u_i z^i,$$

en appelant  $M$  une série majorante du reste à l'ordre  $k$ , on a alors

$$|f(z) - \sum_{i=0}^k u_i z^i| \leq \sum_{k \geq k+1} |u_k| |z|^k \leq M(|z|).$$

Nous pouvons donc avoir une majoration de l'incertitude sur la fonction théorique.

## 2.2 Séries majorantes sur le reste de fonctions D-finies

Plusieurs méthodes d'obtention de séries majorantes ont été étudiées. En effet, des séries majorantes beaucoup plus précises peuvent être trouvées, notamment celles de la forme du théorème 1.5 de l'article [8]. Les séries majorantes de la forme

$$\frac{A}{(1 - \alpha z)^\lambda} \tag{5}$$

ont été étudiées par Joris van der Hoeven [9]. Une méthode simple d'obtention d'un majorant de la forme (5) est expliquée dans le rapport de stage de Thomas Grégoire [11]. Nous n'expliquerons ici que la méthode de majoration de Marc Mezzarobba proposée dans l'article HAL [1] pour la bibliothèque Ore\_algebra de sage.

Toutes les méthodes (explorées pendant ce stage) pour trouver des séries majorantes reposent sur le théorème de l'équation majorante.

**Théorème 2.1.** (Équation majorante) Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions analytiques solutions des équations différentielles

$$\begin{aligned} u^{(r)} &= a^{[r-1]}u^{(r-1)} + \dots + a^{[0]}u, \\ v^{(r)} &= b^{[r-1]}v^{(r-1)} + \dots + b^{[0]}v, \end{aligned}$$

pour des fonctions méromorphes  $(a^{[i]})_{i=0}^{r-1}$  et  $(b^{[i]})_{i=0}^{r-1}$  satisfaisant

$$a^{[i]} \leq b^{[i]}, \quad i = 0 \dots r-1,$$

si de plus, aucune de ces fonctions a une singularité en 0 et

$$|u^{(i)}(0)| < v^{(i)}(0), \quad i = 0 \dots r-1,$$

alors  $u \leq v$ .

La démonstration de ce théorème se trouve dans le chapitre 2 du livre de Carl Einar Hille [10].

La méthode d'obtention est alors de trouver une équation majorante, puis de la résoudre avec des conditions initiales majorant les conditions initiales de la série qu'on veut majorer. C'est pour cela qu'il est pratique d'utiliser des séries majorantes de la forme (5) qui sont des solutions d'équations différentielles d'ordre 1.

### 2.2.1 Restes et résidus

Nous voulons avoir une série majorante du reste de l'équation différentielle, intéressons nous à l'équation différentielle que satisfait ce reste.

On considère l'équation différentielle

$$P(z, \theta) \cdot u(z) = [\theta^r p_r(z) + \theta^{r-1} p_{r-1}(z) + \dots + p_0(z)] \cdot u(z) = 0. \quad (6)$$

Les polynômes  $p_0, p_1, \dots, p_r$  peuvent être considérés premiers entre eux sans perte de généralité. Soit

$$\tilde{u}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n z^n \quad \text{avec} \quad u(z) - \tilde{u}(z) = R_u^N(z)$$

alors,

$$P(z, \theta) \cdot [u(z) - \tilde{u}(z)] = P(z, \theta) \cdot \tilde{u}(z) = q(z),$$

où  $q(z)$  est de la forme  $q_N z^N + \dots + q_{N+s} z^{N+s}$  et  $s = \deg_z P(z, \theta)$ . La raison pour laquelle ce polynôme commence à  $N$  vient de l'observation que  $P(z, \theta) \cdot R_u^N$  est de degré minimale supérieur à  $N$ . Et qu'il soit de degré  $N + s$  de ce que  $P(z, \theta) \cdot \tilde{u}(z)$  est de degré  $N + s$ .

### 2.2.2 L'équation majorante

On pose

$$y(z) = p_r(z)(u(z) - \tilde{u}(z)).$$

Supposons que  $p_r(0) \neq 0$ , c'est à dire qu'on soit sur un point régulier (pas sur une singularité), on a alors

$$\mathcal{L}(z, \theta) \cdot y(z) = \left[ \theta^r + \frac{\theta^{r-1} p_{r-1}(z) + \dots + p_0(z)}{p_r(z)} \right] \cdot y(z) = q(z).$$

On réécrit  $\mathcal{L}(z, \theta)$  en développant  $p_r^{-1}$  en série entière et en réarrangeant les termes

$$\mathcal{L}(z, \theta) = \sum_{j \geq 0} Q_j(\theta) z^j.$$

Comme  $p_r(0) \neq 0$ , la série entière est à coefficients positifs, donc le polynôme  $Q_0$  est de degré  $r$ , et pour  $j \geq 1$ , le degré des polynômes est inférieur à  $r - 1$ . En repassant l'équation sous forme séquentielle, on a

$$L(S_n^{-1}, n) \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} = \sum Q_j(n) S_n^{-j} \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (q_n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

alors

$$y_n = \frac{q_n - \sum_{j \geq 1} Q_j(n) y_{n-j}}{Q_0(n)} = \frac{1}{n} \left[ \frac{n q_n}{Q_0(n)} - \sum_{j \geq 1} \frac{n Q_j(n) y_{n-j}}{Q_0(n)} \right]. \quad (7)$$

Avec ce qui a été dit précédemment, les coefficients  $n q_n / Q_0(n)$  et  $n Q_j(n) / Q_0(n)$  sont bornés. Supposons qu'on ait  $\hat{q}_n$  et  $\hat{a}_n$  bornées aussi telles que

$$|n q_n / Q_0(n)| \leq \hat{q}_n, \quad \forall n \geq n_0, \quad (8)$$

$$|n Q_j(n) / Q_0(n)| \leq \hat{a}_n, \quad \forall n \geq n_0, \quad j \geq 1, \quad (9)$$

avec  $\hat{a}_j = O(\alpha^j)$  pour un certain  $\alpha$  quand  $j \rightarrow \infty$ . On peut alors déduire de (7)

$$y_n \leq |\hat{y}_n| = \frac{1}{n} \left( \hat{q}_n + \sum_{j \geq 1} \hat{a}_n \hat{y}_{n-j} \right). \quad (10)$$

Dans ce cas, si

$$|y_n| \leq \hat{y}_n \quad \forall n, \quad n < n_0, \quad (11)$$

$\hat{y}_n$  est une série majorante de  $y_n$ . En traduisant l'équation (10) en équation différentielle, on obtient

$$[\theta - \hat{a}(z)] \hat{y}(z) = \hat{q}(z) \quad \text{où} \quad \hat{a}(z) = \sum_{j \geq 1} \hat{a}_j z^j, \quad (12)$$

$\hat{a}$  est bien définie car  $\hat{a}_j = O(\alpha^j)$ ,  $j \rightarrow \infty$ . Cette équation différentielle est *l'équation de majorante* associée à l'équation différentielle (6).

On peut écrire une solution générale de l'équation différentielle (12)

$$\hat{y}(z) = h(z) \left( c + \int_0^z \frac{w^{-1} \hat{q}(w)}{h(w)} dw \right), \quad h(z) = \exp \left( \int_0^z w^{-1} \hat{a}(w) dw \right), \quad (13)$$

où  $c$  est un nombre complexe. Il faut maintenant choisir les paramètres  $\hat{a}$ ,  $\hat{q}$  et  $c$  afin que les inégalités (8),(9),(11) soient respectées. On aura alors une série majorante de  $R_u^N$ . La méthode de recherche de ces paramètres est dans [1].

### 3 Les outils pour rechercher des zéros

Remarquons que l'on peut différencier les zéros par leur multiplicité, c'est ce que nous ferons dans cette section.

**Définition 6.** Soit  $f$  une fonction analytique en  $\zeta$  et  $\zeta$  un zéro de  $f$ . On appelle *ordre ou multiplicité du zéro  $\zeta$*  l'unique entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall k < m, \quad f^{(k)}(\zeta) = 0, \quad f^{(m)}(\zeta) \neq 0. \quad (14)$$

Dans cette section, nous allons répondre aux trois questions de l'introduction. Dans la première sous-section, nous répondrons à la question : Comment savoir si l'on a trouvé tous les zéros de la fonction sur l'intervalle ? Il montrera une méthode permettant d'exclure des zones qui ne contiennent pas de zéros.

La deuxième sous-section aura pour objectif de répondre à la question : Comment certifier un zéro ? On introduira un théorème permettant de compter les zéros sur une partie de  $\mathbb{C}$ , dans notre cas ce sera un segment. La forme renvoyée pour nos zéros sera aussi sous forme de segment, elle répondra en partie à la question : Quel résultat renvoyer ? Pour obtenir ces théorèmes nous nous sommes inspirés de la théorie alpha de Smale présentée dans le livre de Dedieu [12].

Ce qui a été fait dans les parties précédentes aura son importance ici. Plus particulièrement, les propriétés des séries majorantes seront utilisées dans nos théorèmes.

**Remarque 2.** Lorsque nous dirons qu'une fonction  $f$  est analytique en  $\zeta$  cela signifiera que la fonction est analytique sur un voisinage de  $\zeta$ .

#### 3.1 La méthode de bisection-exclusion

L'objectif de cette méthode est de certifier qu'il n'y a pas de zéro dans un intervalle. Cette méthode n'est pas nouvelle, elle a premièrement été introduite dans un article de Weyl en 1924 [13], Henrici et Gargantini ont étudié sa complexité pour le cas polynomial dans un article de 1969 [14]. Et finalement J.C. Yakoubsohn l'a étudiée dans le cas des fonctions analytiques en 2005 [2].

**Définition 7.** Soit  $f$  une fonction analytique et non nulle en  $x$ , alors pour  $t$  tel que  $|t|$  soit inférieur au rayon de convergence de la série

$$f(x+t) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} t^k.$$

On définit

$$M(f, x)(t) = |f(x)| - \sum_{k \geq 1} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| t^k.$$

**Proposition 5.** Soit  $f$  une fonction analytique, alors  $M(f, x)$  vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M(f, x)(|t|) \leq |f(x+t)|.$$

*Preuve.* C'est une conséquence directe des propriétés des séries majorantes.  $\square$

**Définition 8.** On définit la fonction  $m : \mathcal{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$  comme l'unique point  $m(x)$  sur  $\mathbb{R}_+$  tel que  $M(f, x)(m(x)) = 0$ . Il existe et est unique si  $|f(x)| > 0$  et que  $f$  n'est pas constante sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 6.** La fonction  $f$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $]x - m(x), x + m(x)[$ .

*Preuve.* Pour tout  $t$  dans l'intervalle  $] - m(x), +m(x)[$ ,

$$f(x + t) \geq M(f, x)(|t|) > M(f, x)(m(x)) = 0.$$

$\square$

La partie négative de  $M(f, x)$  peut être remplacée par une série majorante  $M^1(f, x)$  quelconque et encore respecter ces propriétés. C'est ce que nous ferons concrètement sur ordinateur.

**Remarque 3.** Plus généralement les fonctions de la forme

$$M(f, x)(t) = |f(x) + tf'(x) + \dots + t^n f^{(n)}(x)| - M^{n+1}(f, x)(t), \quad (15)$$

où  $M^n(f, x)$  est la série majorante du reste à l'ordre  $n + 1$  en  $x$ , peuvent aussi avoir leur intérêt. Bien qu'elles ne respectent pas forcément la propriété de stricte décroissance, si les  $n$  premiers coefficients de la séries sont strictement positifs, alors on peut quand même assurer que la fonction a un unique zéro sur  $\mathbb{R}_+$  et la proposition 6 a une équivalence.

Dans la suite on parlera de  $M(f, x)$  comme elle a été introduite dans la définition (7).

### 3.1.1 Convergence de la méthode dans le cas général

Soit  $f$  une fonction analytique sur un compact connexe  $D$ , dans notre cas une fonction D-finie.

Commençons par rappeler brièvement les résultats obtenus dans l'article de J.-C. Yakoubsohn [2]. D'abord, il est démontré que la fonction  $m$  de la définition (8) vérifie la propriété importante qu'il existe un réel  $a$  tel que  $ad(x, Z) < m(x)$  pour  $x \in D$ , où  $d(x, Z)$  est la distance de  $x$  au zéro le plus proche. Le  $a$  dépend du compact connexe sur lequel on travaille. C'est cette propriété qui lui permet d'établir des résultats sur la convergence de l'algorithme et sur sa complexité.

Cependant ce résultat est sur la fonction théorique  $M(f, x)$ , comme nous l'avons dit précédemment, il n'est pas possible de manipuler la fonction théorique sur un ordinateur. Après une recherche infructueuse, nous n'avons pas réussi à établir de lien entre la distance  $d(x, Z)$  et  $\tilde{m}(x)$  où  $\tilde{m}(x)$  est le point d'annulation de la fonction  $\tilde{M} : t \rightarrow |f(x)| - M^1(f, x)(t)$ , avec  $M^1(f, x)$  une série majorante issue de la méthode de majoration de l'article [1]. Les résultats de l'article de Yakoubsohn de 2005, n'ont pas pu être adaptés à notre algorithme de bisection-exclusion. Cependant, nous verrons une proposition beaucoup plus faible qui a le mérite d'assurer la convergence de l'algorithme de bisection-exclusion.

**Conjecture 1.** Soit  $[a, b]$  un intervalle ne contenant aucune singularité de  $f$ . Quelles que soient les fonctions majorantes  $M^k(f, x)$  du reste de  $f$  à l'ordre  $k$ , il existe  $A_k$  et  $\alpha_k$  des réels strictement positifs tels que

$$M^k(f, x)(t) \leq \frac{t^k A_k}{1 - \alpha_k t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a, b].$$

*Preuve.* Une façon intuitive de le comprendre est de voir le lien entre  $\alpha$  et  $d([a, b], S)^{-1}$ , l'inverse de la distance de l'intervalle  $[a, b]$  à la singularité la plus proche.  $\square$

**Proposition 7.** Soit  $f$  une fonction analytique sur un intervalle  $[a, b]$ , alors pour tout  $x$  dans cet intervalle, il existe  $A$  et  $\alpha$  des réels strictement positifs tels que le pas  $m(x)$  de la définition 8 vérifie

$$\frac{|f(x)|}{A + |f(x)|\alpha} \leq m(x).$$

*Preuve.* D'après la conjecture 1 on sait qu'il existe  $A$  et  $\alpha$  deux réels strictement supérieurs à zéro tels que

$$M^1(f, x) \leq \frac{tA}{1 - \alpha t} \quad \forall x \in [a, b].$$

En écrivant

$$|f(x)| - \frac{tA}{1 - \alpha t} = 0,$$

on obtient l'égalité

$$t = \frac{|f(x)|}{A + |f(x)|\alpha}.$$

Comme

$$|f(x)| - M(f, x)(t) \geq |f(x)| - \frac{tA}{1 - \alpha t} \quad \forall x \in [a, b], \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

on conclut que

$$m(x) \geq \frac{|f(x)|}{A + |f(x)|\alpha}.$$

□

On suppose que  $f(a) \neq 0$ , et l'on définit la suite  $u$  :

$$u_n \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + m(u_n) \end{cases} \quad (16)$$

Supposons qu'il existe un zéro supérieur à  $a$  on appelle  $\zeta_a = \min\{\zeta \in ]a, +\infty[, f(\zeta) = 0\}$ . Supposons de plus que la fonction  $f$  est analytique sur  $[a, \zeta_a]$ .

**Proposition 8.** *La suite  $u_n$  converge vers  $\zeta_a$ .*

*Preuve.* La suite  $(u_n)$  est croissante car  $m$  est une fonction positive, majorée par  $\zeta_a$  par définition de  $m$  (8), donc elle converge.

Quel que soit  $\epsilon > 0$  la fonction est non nulle sur le segment  $[a, \zeta - \epsilon]$ . D'après la proposition 7 pour  $x \in [a, \zeta_a]$ ,  $m(x) \geq \frac{|f(x)|}{A + |f(x)|\alpha}$ , alors en posant

$$p = \min_{x \in [a, \zeta_a - \epsilon]} \frac{|f(x)|}{A + |f(x)|\alpha}$$

On a  $p > 0$ , et en on définit la suite  $v$

$$v_n \begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = v_n + p \end{cases} \quad (17)$$

La suite  $v$  est arithmétique, de raison  $p > 0$  donc elle diverge.

D'après la proposition 7  $\forall n \in \mathbb{N}$  tels que  $u_n \in [a, \zeta_a - \epsilon]$ ,  $v_n \leq u_n$ . Donc quelque soit  $\epsilon > 0$  il existe un réel  $n$  tel que que  $u_n > \zeta_a - \epsilon$ , mais par construction  $u_n < \zeta_a$ , alors  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 > 0$  tel que  $\forall n \geq n_0$   $|u_n - \zeta| < \epsilon$ . □

C'est pour définir un pas minimal  $p$  que nous avons établi la proposition 1.

### 3.1.2 Comportement local proche d'un zéro

On s'intéresse ici au comportement local, proche d'un zéro de cette fonction. On va pour cette partie introduire la définition des coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  de Smale.

**Définition 9.** *Soit  $f$  une fonction analytique en  $x$  telle que  $f'(x) \neq 0$ , on peut définir les coefficients*

$$\gamma(f, x) = \sup_{k \geq 2} \left| f'(x)^{-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right|^{\frac{1}{k-1}};$$

$$\beta(f, x) = |f'(x)^{-1} f(x)|.$$

Le coefficient  $\beta$  correspond au pas d'itération de l'algorithme de Newton. Et derrière une formule de  $\gamma$  plutôt compliquée se cache l'idée de majorer le reste du développement en série entière de  $f$  à l'ordre 2 par une fraction rationnelle. Ces coefficients ont été introduits dans la théorie alpha de Smale [12]. On peut écrire

$$|f(x+t)| \leq |f(x)| + |f'(x)|t \left(1 + \sum_{k \geq 2} |f'(x)|^{-1} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| |t|^k \right),$$

On remarque de plus que

$$|f'(x)|^{-1} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| |t|^k \leq \gamma(f, x)^{k-1} |t|^k.$$

On a alors la majoration suivante

$$|f(x+t)| \leq |f(x)| + |t| |f'(x)| \left(1 + \frac{\gamma(f, x) |t|}{1 - \gamma(f, x) |t|}\right),$$

$$|f(x+t)| \leq |f(x)| + \frac{|f'(x)| |t|}{1 - \gamma(f, x) |t|}.$$

**Proposition 9.** Soient  $f$  une fonction analytique telle que  $f'(x) \neq 0$ , et  $m(x)$  tel que  $M(f, x)(m(x)) = 0$ , alors

$$\beta(f, x) \geq m(x) \geq \frac{\beta(f, x)}{\beta(f, x)\gamma(f, x) + 1}.$$

*Preuve.* Pour commencer, on veut

$$M(f, x)(t) = |f(x)| - \sum_{k \geq 1} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| t^k = 0.$$

On le réécrit en utilisant  $\gamma(f, x) = \sup_{k \geq 2} |f'(x)|^{-1} \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| \frac{1}{k-1}$ , et en multipliant par  $|f'(x)|^{-1}$  on obtient l'inégalité

$$|f'(x)|^{-1} M(f, x)(t) \geq \beta(f, x) - t - t \sum_{k \geq 2} \gamma(f, x)^{k-1} t^{k-1},$$

qui peut encore se réécrire

$$\beta(f, x) - t - \frac{t^2 \gamma(f, x)}{1 - \gamma(f, x) t}.$$

On cherche le point de  $\mathbb{R}_+$  tel que cette fonction s'annule et l'on aura une minoration de  $m(x)$ . En multipliant par  $(1 - \gamma(f, x)t)$  puis en réarrangeant,

$$t = \frac{\beta(f, x)}{1 + \gamma(f, x)\beta(f, x)}.$$

On a finalement,

$$m(x) \geq \frac{\beta(f, x)}{\gamma(f, x)\beta(f, x) + 1}.$$

□

Si la dérivée en  $\zeta$  est non nulle la fonction  $x \rightarrow \gamma(f, x)$  est continue sur un voisinage de  $\zeta$ , on remarque que la convergence vers le zéro est quadratique lorsqu'on se rapproche du zéro (voir la théorie de Kantorovitch [12] sur la convergence de la méthode de Newton).

### 3.2 Localisation des zéros via la méthode de Rouché

L'objectif de cette section est de déterminer une méthode pour certifier et compter les zéros sur un intervalle.

**Définition 10.** On appelle courbe de Jordan l'image d'une fonction  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

- (i)  $\gamma(0) = \gamma(1)$  ;
- (ii)  $\forall 0 < s \leq t < 1$  et  $\gamma(t) = \gamma(s)$  entraînent  $s = t$ .

**Théorème 3.1.** (Rouché) Donnons nous un domaine borné  $D \subset \mathbb{C}$  de courbe de Jordan  $S$  et deux fonctions analytiques  $f$  et  $g$  définies sur un voisinage ouvert de  $D$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Si pour tout  $z \in S$

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

alors  $f + g$  admet autant de zéros (comptés avec multiplicités) que  $f$  dans  $D$ .

La démonstration de ce théorème se trouve dans le livre d'analyse complexe [15].

**Définition 11.** On appelle une boule de centre  $c$  et de rayon  $r > 0$ , l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels vérifiant  $|z - c| < r$ . Formellement on a

$$B(c, r) = \{z \in \mathbb{C} | z - c| < r\}.$$

Pour une lecture plus agréable nous introduirons des notations pour parler d'une série majorante sur le reste à l'ordre  $k$  d'une série  $f$  analytique en  $x$ .

**Définition 12.** Soit  $f$  une fonction analytique en  $x$ , alors on peut écrire  $f(x + t) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} t^k$ , Le reste de la série à l'ordre  $k$  est

$$R^k(f, x)(t) = \sum_{i \geq k} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} t^i$$

et une série majorante  $M^k(f, x)$  de ce reste

$$M^k(f, x) \geq R^k(f, x).$$

**Définition 13.** On appelle une grappe de  $m$  zéros une boule de rayon  $r > 0$ ,  $B(x, r)$ , telle qu'il y ait  $m$  zéros dans cette boule.

### 3.2.1 Les zéros répulsifs

**Définition 14.** Soit  $f$  une fonction analytique en  $\zeta$ ,  $\zeta$  un zéro de  $f$ , on appelle  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des zéros de  $f$  sur  $\mathbb{C}$ , on définit alors

$$Sep(f, \zeta) = d(\zeta, \mathcal{Z} \setminus \{\zeta\}).$$

**Définition 15.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . On définit la fonction

$$S : (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

telle que

$$S(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(0) \geq 1 \\ f^{-1}(1) \cap \mathbb{R}_+ & \text{sinon.} \end{cases} \quad (18)$$

**Définition 16.** On appelle série majorante idéale d'une série  $f(z) = \sum_{k \geq 0} u_k z^k$ , la série  $\sum_{k \geq 0} |u_k| z^k$ .

**Définition 17.** Soit l'application  $S_f^m(\zeta) : \mathbb{D} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , vérifiant

$$\mathbb{S}_f^m(\zeta) = S\left(\left|\frac{f^{(m)}}{m!}(\zeta)\right|^{-1} \frac{M^{m+1}(f, \zeta)(t)}{t^m}\right),$$

avec  $\mathbb{D}$  l'algèbre des fonctions  $D$ -finies,  $\mathbb{N}^*$  les entiers strictement positifs et  $M^{m+1}(f, \zeta)$  la série majorante idéale du reste de la série à l'ordre  $m + 1$ .

On peut en effet appliquer  $S$  aux fonctions  $t \rightarrow \left|\frac{f^{(m)}}{m!}(\zeta)\right|^{-1} \frac{M^{m+1}(f, \zeta)(t)}{t^m}$  car  $M^{m+1}(f, x_0)$  est de la forme

$$M^{m+1}(f, x_0)(t) = \sum_{k \geq m+1} m_k t^k,$$

avec  $m_k > 0$  pour au moins un  $k$  dans  $\mathbb{N}^* + m$ , alors

$$\left|\frac{f^{(m)}}{m!}(\zeta)\right|^{-1} \frac{M^{m+1}(f, \zeta)(t)}{t^m} = \left|\frac{f^{(m)}}{m!}(\zeta)\right|^{-1} \sum_{k \geq 1} m_{k+m} t^k$$

est une fonction croissante de  $t$  sur  $\mathbb{R}_+$  et nulle en 0.

**Théorème 3.2.** Soit  $f$  une fonction analytique,  $\zeta$  une racine de multiplicité  $m$  de  $f$ , alors

$$\text{Sep}(f, \zeta) \geq \mathbb{S}_f^m(\zeta).$$

*Preuve.* Soit  $\zeta$  un zéro de multiplicité  $m$ . Pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \neq 0$  plus petit que le rayon de convergence de la série, on écrit à partir du développement en série de Taylor

$$f(\zeta + z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} z^k,$$

or  $f^{(k)}(\zeta) = 0$ ,  $k < m$ , alors

$$f(\zeta + z) = 0 + z^m \left( \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} + \frac{R^{m+1}(f, \zeta)(z)}{z^m} \right),$$

on voit que cette expression s'annule seulement si

$$\frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} + \frac{R^{m+1}(f, \zeta)(z)}{z^m} = 0.$$

Alors,

$$\left| \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} \right| - \left| \frac{R^{m+1}(f, \zeta)(z)}{z^m} \right| \leq 0,$$

et en remplaçant  $R^{m+1}(f, \zeta)$  par sa série majorante

$$\left| \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} \right| - \frac{M^{m+1}(f, \zeta)(|z|)}{|z|^m} \leq 0.$$

Finalement,  $f$  ne s'annule pas tant que

$$\left| \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} \right| - \frac{M^{m+1}(f, \zeta)(|z|)}{|z|^m} > 0.$$

On a donc la conclusion

$$\text{Sep}(f, \zeta) \geq S \left( \left| \frac{f^{(m)}(\zeta)}{m!} \right|^{-1} \frac{M^{m+1}(f, \zeta)(t)}{t^m} \right).$$

□

D'après cette propriété, soit un zéro est d'ordre fini alors il est isolé, soit c'est un zéro d'ordre infini et la fonction est nulle.

### 3.2.2 Le théorème de Rouché pour localiser des grappes de zéros

Nous allons introduire un théorème permettant de certifier le nombre de zéros dans une boule.

**Théorème 3.3.** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique en  $x_0$ , telle que  $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ . Alors, s'il existe un réel  $r > 0$  vérifiant

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right| r^k + M^{m+1}(f, x_0)(r) < \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \right| r^m,$$

il y a  $m$  zéros comptés avec multiplicité de  $f$  dans  $B(x_0, r)$ , la boule ouverte centrée en  $x_0$  de rayon  $r$ .

*Preuve.* Définissons

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

$x_0$  est un zéro de multiplicité  $m$  pour  $g$  et  $R^m(g, x_0) = R^m(f, x_0)$ . D'après le théorème précédent,  $x_0$  est le seul zéro de  $g$  dans la boule  $B(x_0, \mathbb{S}_f^m(x_0))$ , et il est de multiplicité  $m$ .

La série de Taylor de  $g$  est convergente, elle est donnée par

$$g(x) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + \sum_{k \geq m+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$



Nous allons prouver que s'il existe  $r$  vérifiant  $0 < r < \mathbb{S}_f^m(x_0)$ , tel pour tout  $x$  respectant,  $|x - x_0| = r$

$$\left| f(x) - g(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| < |g(x)|.$$

Par le théorème de Rouché  $f$  et  $g$  auront le même nombre de zéros dans la boule  $B(x_0, r)$ .

Remarquons que

$$|f(x) - g(x)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right| |x - x_0|^k,$$

et que

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m = g(x) - \sum_{k \geq m+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

On a donc,

$$\left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x_0) \right| |x - x_0|^m \leq |g(x)| + M^{m+1}(f, x_0)(|x - x_0|).$$

C'est à dire que l'hypothèse du théorème de Rouché est satisfaite si pour tout  $x$  vérifiant  $|x - x_0| = r$

$$\left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| < \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x_0) \right| |x - x_0|^m - M^{m+1}(f, x_0)(|x - x_0|).$$

Donc finalement, si

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \right| r^k + M^{m+1}(f, x_0)(r) < \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x_0) \right| r^m, \quad (19)$$

alors l'hypothèse du théorème de Rouché est satisfaite.

Pour achever la preuve, il faut montrer que l'inégalité (19) implique  $r < \mathbb{S}_f^m(x_0)$ . En divisant par  $\left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x_0) \right| r^m$ . On a l'inégalité

$$\left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x_0) \right|^{-1} \frac{\sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \right| r^i}{r^m} + \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x_0) \right|^{-1} \frac{M^{m+1}(f, x_0)(r)}{r^m} < 1$$

Ce qui implique

$$\left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x_0) \right|^{-1} \frac{M^{m+1}(f, x_0)(r)}{r^m} < 1.$$

Comme

$$g : r \rightarrow \frac{M^{m+1}(f, x_0)(r)}{r^m}$$

est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $r < \mathbb{S}_f^m(x_0)$ . □

### 3.3 Localisation des zéros dans le cas réel

Ramenons la recherche de zéros au cas réel, nous pouvons considérer les fonctions D-finies  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  comme des fonctions de  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  et donc encore pouvoir appliquer les théorèmes précédents, cependant seuls les zéros réels de la fonctions  $f$  nous intéressent, il nous faut donc des résultats sur les segments et pas sur des boules de  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 3.4.** *Soit  $f$  une fonction analytique dont tous les coefficients sont réels, si  $f$  satisfait la propriété du théorème 3.3 pour un  $m$  donné, alors la parité de  $m$ , le nombre de zéros dans la boule  $B(x_0, r)$  décrite par le théorème 3.3 est la même que celle du nombre de zéros dans l'intervalle,  $[x_0 - r, x_0 + r]$ .*

*Preuve.* Nous commencerons par montrer le résultat suivant. Si  $f$  est une fonction analytique à coefficients réels, soit  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  un zéro de  $f$ , alors  $\bar{\zeta}$  est un zéro de  $f$ .

On écrit

$$f(\zeta) = f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} u_n \rho^n e^{i\theta n} = \sum_{n \geq 0} u_n \rho^n (\cos(\theta n) + i \sin(\theta n)) = S_c + i S_s = 0.$$

Comme  $(1, i)$  est une base de  $\mathbb{C}$ , on sait que  $S_c = S_s = 0$ . Alors,  $S_c - i S_s = 0 = f(\rho e^{-i\theta}) = f(\bar{\zeta})$ . Donc  $\bar{\zeta}$  est aussi un zéro de  $f$ . Le nombre de racines à partie imaginaire non nulle dans  $B(x_0, r)$   $m_i$  est paire, ce qui implique que le nombre de racines réelles  $m_r$  est de même parité que  $m$  puisque  $m = m_i + m_r$ .  $\square$

Ce théorème est surtout utile pour  $m = 1$ , on peut alors assurer que la fonction a une unique racine sur le segment  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . Pour  $m > 1$  et  $m$  impaire, on peut seulement assurer qu'il y a au moins une racine réelle sur le segment  $[x_0 - r, x_0 + r]$ .

### 3.3.1 Cas des zéros de multiplicité 1

Nous avons vu, qu'il est impossible avec les outils que nous avons établis dans les deux paragraphes précédents de certifier un zéro de multiplicité supérieure à 1. On est capable de localiser des grappes de zéros, mais pas de différencier une grappe de  $m$  zéros d'un zéro de multiplicité  $m$ . Notre algorithme renverra donc uniquement des zéros certifiés de multiplicité 1. La certification des zéros de multiplicité supérieure à 1 est étudiée par M. Giusti et J.-C. Yakoubsohn [16].

Maintenant, nous allons montrer une proposition qui sera bien utile dans notre algorithme. Commençons par étudier la fonction

$$g(r) = |f'(x_0)|r - |f(0)| - M^2(f, x_0)(r).$$

Pour  $r$  tel que  $g(r) > 0$ , la propriété du théorème 3.3 qui est satisfaite. La dérivée de la fonction  $g$  n'est rien d'autre que  $M(f', x_0)$  définie dans la définition 7.

**Définition 18.** On appelle  $m_1(x)$  le réel tel que  $M(f', x)(m_1(x)) = 0$

**Proposition 10.** Soit  $f$  une fonction analytique,  $x_0, r_0$  et  $x_1, r_1$ , tels que  $f, x_i, r_i$  vérifie l'hypothèse du théorème 3.3 pour le cas  $m = 1$  et  $r_i < m^1(x_i)$ , les segments  $[x_i - r_i, x_i + r_i]$ ,  $i \in \{0, 1\}$  contiennent un unique zéro de  $f$ .

Si de plus,  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \cap [x_1 - r_1, x_1 + r_1] \neq \emptyset$  alors  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \cup [x_1 - r_1, x_1 + r_1]$  contient un unique zéro et ce zéro est inclus dans l'intervalle  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \cap [x_1 - r_1, x_1 + r_1]$ . Et  $f$  est strictement monotone sur l'intervalle  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \cap [x_1 - r_1, x_1 + r_1]$ .

*Preuve.* Si  $f, x_i, r_i$ , vérifient l'hypothèse du théorème 3.3, alors  $[x_i - r_i, x_i + r_i]$  contient un unique zéro de  $f$ . De plus, nous allons montrer que la fonction est strictement monotone sur l'intervalle  $[x_i - r_i, x_i + r_i]$ . Comme  $r_i < m_1(x_i)$ , on a

$$|f'(x_i)| - M^1(f', x_1)(r_1) > 0,$$

la fonction  $|f'|$  est strictement positive sur les intervalles  $[x_i - r_i, x_i + r_i]$   $i \in \{0, 1\}$ . Comme  $f'$  est de signe constant sur  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0]$  et  $[x_1 - r_1, x_1 + r_1]$ ,  $f'$  est de signe constant sur  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \cap [x_1 - r_1, x_1 + r_1]$  et donc finalement sur  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \cup [x_1 - r_1, x_1 + r_1]$ . Alors la fonction  $f$  est bijective sur l'intervalle  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] \cup [x_1 - r_1, x_1 + r_1]$  et donc admet un unique zéro sur cet intervalle. Mais comme ce zéro doit aussi appartenir aux deux intervalles, il appartient à leur intersection.  $\square$

Cette proposition est importante, car elle assure qu'il existe des intervalles contenant des zéros certifiés de multiplicité 1 et vérifiant que la fonction est strictement monotone. Un algorithme de dichotomie classique, permettra de se rapprocher du zéro de cet intervalle à une précision donnée, pour toute précision donnée. Ce seront les intervalles satisfaisant cette propriété que notre algorithme renverra.

## 4 Algorithmes

### 4.1 Les entrées acceptées par l'algorithme

Nous pouvons remarquer que les singularités dont nous avons parlé dans la section 1.4.1 sont des singularités qui indiquent une divergence de la fonction, mais il y a plusieurs types de singularités. Certaines singularités viennent de l'équation de récurrence (3), par exemple lorsque  $b_s(n)$  s'annule, le coefficient  $u_{n+s}$  ne peut plus s'exprimer en fonctions des coefficients  $u_{n+s-1}, \dots, u_n$  de plus cela impose une autre relation sur ces coefficients, faisant chuter la dimension de l'espace des solutions initiales. On appelle cela une singularité de tête de l'équation différentielle.

**Remarque 4.** Soit  $a_r$  le polynôme de (1), si  $a_r$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $[a, b]$ , on peut remarquer alors que le coefficient dominant de l'équation de récurrence (3)  $b_s$  vérifie

$$b_s(n) = a \prod_{i=0}^r (n + i),$$

donc il ne s'annule pas sur  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , de plus il est de degré au moins supérieur aux polynômes  $b_i$ ,  $i \in [0, s-1]$ . D'après les conclusions de 1.4.1, la fonction  $f$  solution de l'équation différentielle n'admet pas de singularité sur l'intervalle.

Nous avons donc une condition suffisante pour que la fonction  $f$  n'admette pas de singularité sur l'intervalle  $[a, b]$ , il suffit que le polynôme de tête  $a_r$  de l'équation différentielle (1) ne s'annule sur  $[a, b]$ . Cependant cette condition n'est pas nécessaire, l'algorithme pourra s'exécuter pour des opérateurs différentiels ne satisfaisant pas cette propriété.

### 4.2 Principe de l'algorithme

Notre algorithme prendra en entrée un intervalle  $[a, b]$  contenant 0, un opérateur différentiel  $\mathcal{L}(x, Dx)$ , des conditions initiales en 0 et un pas d'itération  $n$ . Si la fonction  $f$  solution, n'admet pas de singularité sur  $[a, b]$  l'algorithme renverra un couple comportant une liste d'intervalles contenant un unique zéro  $\mathcal{D}$  tel que la fonction soit strictement monotone sur l'intervalle et une liste d'intervalles encore indéterminés  $\mathcal{I}$  mais qu'on sait de taille inférieure à  $10^{-4n}$ .

Cet algorithme fonctionnera récursivement, il s'exécutera en 2 étapes. La première étape permettra de déterminer les intervalles inclus dans  $[a, b]$  ne contenant aucun zéros, la deuxième certifiera les zéros simples dans les intervalles restant. Si un intervalle a été exclu par l'algorithme de bisection-exclusion ou a été certifié, alors on le considérera comme déterminé. On rappellera l'algorithme sur la liste des intervalles encore indéterminés. L'algorithme s'arrêtera après  $n$  appels récursifs, il est en effet important de limiter le nombre d'appels de notre algorithme. Comme notre algorithme certifie seulement les zéros de multiplicité 1, et se rappelle sur les intervalles encore indéterminés, il pourrait y avoir une boucle infinie. Une méthode algorithmique aura été développée, permettant à l'utilisateur de connaître le nombre de zéros dans des boules contenant les intervalles restant.

**Proposition 11.** Soit  $f$  une fonctions analytique non nulle sur un ouvert connexe  $\Omega$ , soit  $K \subset \Omega$  un compact de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  a un nombre fini de zéros sur  $K$ .

*Preuve.* Raisonnons par l'absurde et supposons le nombre de zéros infini sur  $K$ , on en récupère une sous partie dénombrable  $D$ , appelons  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow D$  l'application bijective entre ces deux ensembles, alors la suite  $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite dans un compact, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite qui converge et la limite de cette suite extraite est encore dans le compact, notons  $\zeta$  cette limite, quelque soit  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $d(\phi(n), \zeta) < \epsilon$ , alors  $\zeta$  n'est pas un zéro isolé, ce qui est absurde.  $\square$

Dans toute cette section on considèrera une opérateur différentiel linéaire  $\mathcal{L}(x, Dx)$  tel que  $\deg_{Dx}(\mathcal{L}) = r + 1$  (introduit dans la sous-section subsection 1.1), des conditions initiales  $u_0, u_1, \dots, u_r$  et  $f$  la solution théorique de l'équation différentielle  $f$  vérifiant  $\mathcal{L}(x, Dx) \cdot f = 0$  avec  $f(0) = u_0, f^{(1)}(0) = u_1, \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} = u_r$ . Nous allons écrire les algorithmes permettant de trouver et de certifier les zéros simples de  $f$ . Le segment sur lequel on travaillera sera noté  $[a, b]$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . On appellera  $\mathcal{Z}_{[a,b]}$  l'ensemble des zéros appartenant à  $[a, b]$ , On sait que le cardinal de  $\mathcal{Z}_{[a,b]}$  est fini d'après la proposition 11. Dans la suite, les réels  $\epsilon$  seront strictement supérieurs à zéro.

Notre algorithme est entièrement codé en sage, et utilise la bibliothèque `ore_algebra.analytic.bounds` pour avoir des séries majorantes. le lecteur pourra le retrouver sur [https://github.com/MathisDeronzier/Certified-zeros-of-D-finite-functions/blob/master/Bissection\\_exclusion\\_methode.sage](https://github.com/MathisDeronzier/Certified-zeros-of-D-finite-functions/blob/master/Bissection_exclusion_methode.sage)

---

**Algorithm 1** `_Majorant_`

---

**Entrée(s) :** Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}(x, Dx)$ . Des conditions initiales  $[f(0), f^{(1)}(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ . Un réel  $x$ . Une précision  $\epsilon > 0$ . Deux entiers  $n$  et  $k$ .

**Sortie :** La liste des coefficients  $[f(x), f^{(1)}(x), \dots, \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}]$ . Une liste d'imprécision  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]$  sur les coefficients et une série majorante  $\tilde{M}^n(f, x)$  sur le reste de la série  $f$  développée en  $x$  à l'ordre  $n$ .

- 1:  $[f(x), f^{(1)}(x), \dots, \frac{f^{(r-1)}(x)}{(r-1)!}]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_r]$  la translation des coefficients et l'imprécision sur les coefficients vérifiant  $\epsilon_i < \epsilon$ ,  $i \in [0, r]$ .
  - 2: **Pour**  $i$  allant de 0 à  $r$  **faire**
  - 3: Calculer la série majorante  $M^{n+k}(f_i, x)$  où  $f_i$  est une solution pour les conditions initiales  $[\delta_{i0}, \dots, \delta_{ir}]$ , où  $\delta$  est le symbole de Kronecker.
  - 4: **fin du Pour**
  - 5: Calculer le développement de la série  $f$  en  $x$  à l'ordre  $n + k - 1$ .
  - 6: **Renvoyer**  $[f(x), \dots, \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]$ ,  $M_\epsilon : t \rightarrow \left( \sum_{k=n}^{n+k-1} \left( \left| \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right| + \epsilon_k \right) t^k \right) + \sum_{i=0}^r \left( \left| \frac{f^{(i)}(i)}{i!} \right| + \epsilon_i \right) M^{n+k}(f_i, x)$
- 

**Proposition 12.** Pour  $k=0$ , et en appelant  $\tilde{M}^n(f, x)$  la série majorante renvoyée par `_Majorant_`, il existe  $A_n$  et  $\alpha_n$  deux réels strictement positifs tels que

$$\tilde{M}^n(f, x)(t) \leq \frac{t^n A_n}{1 - \alpha_n t}, \quad \forall 0 < t, \quad \forall x \in [a, b].$$

*Preuve.* (Esquisse) C'est une reprise de la preuve de la proposition 1, avec les conditions initiales  $|f(x)| + \epsilon_0, \dots, \left| \frac{f^{(r-1)}(x)}{(r-1)!} \right| + \epsilon_r$ .  $\square$

### 4.3 Algorithme de bisection-exclusion

Pour l'algorithme `_bissection-exclusion_`, nous utiliserons la fonction `_M1_`.

---

**Algorithm 2** `_M1_`

---

**Entrée(s) :** Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}(x, Dx)$ . Des conditions initiales  $[f(0), f^{(1)}(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ . Un réel  $x$ . Un réel  $\epsilon$ .

**Sortie :**  $[f(x), [\epsilon']]$  une imprécision telle que  $10^4 \epsilon' < |f(x)| - \epsilon'$  et  $M^1(f, x)$ . Si on n'a pas trouvé  $\epsilon'$ ,  $\epsilon' \geq 10^{-40} \epsilon$  satisfaisant cette inégalité, l'algorithme renverra  $[0], [10^{-40} \epsilon], 0$ .

- 1: `compteur := 0`
  - 2: Calculer  $f(x)$  à la précision  $\epsilon$ .
  - 3: **Tant que** `compteur < 5` et que  $10^4 \epsilon \geq |f(x)| - \epsilon$  **faire**
  - 4:  $\epsilon := 10^{-8} \epsilon$
  - 5: Calculer  $f(x)$  à la précision  $\epsilon$ .
  - 6: `compteur := compteur + 1`
  - 7: **fin du Tant que**
  - 8: **Si** `compteur = 5` **alors**
  - 9: **Renvoyer**  $[0], [\epsilon], 0$
  - 10: **Sinon**
  - 11: **Renvoyer** `_Majorant_`( $\mathcal{L}(x, Dx)$ ,  $[f(0), f^{(1)}(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ ,  $x, \epsilon, 1, 10$ )
  - 12: **fin du Si**
-

**Définition 19.**

Soient  $[f(x), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ ,  $[\epsilon_0]$ ,  $M^{k+1}(f, x) = \text{Majorant}(\mathcal{L}(x, Dx), [f(0), f^{(1)}(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}], x, \epsilon, 1, k)$ . On définira

$$\tilde{M}_\epsilon(f, x) = |f(x)| - \epsilon - \tilde{M}^1(f, x),$$

avec

$$\tilde{M}^1(f, x) : t \rightarrow \sum_{i=1}^k \left( \left| \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \right| + \epsilon_i \right) t^i + M^{k+1}(f, x)(t).$$

**Proposition 13.**  $\tilde{M}_\epsilon(f, x)(\tilde{m}(x)) = 0$  alors  $\tilde{m}(x) < m(x)$  où  $m$  est la fonction de l'équation (8).

*Preuve.*  $\tilde{M}^1(f, x) + \epsilon$  reste une série majorante du reste à l'ordre 1 de la série  $f$ , d'où la conclusion.  $\square$

**Proposition 14.** Le pas  $\tilde{m}(x)$  satisfaisant  $\tilde{M}^1(f, x)(\tilde{m}(x)) = 0$  est encore minoré et il existe  $A$  et  $\alpha$  des réels strictement positifs tels que

$$(1 - 10^{-4}) \frac{|f(x)|}{A + \alpha|f(x)|} \leq \tilde{m}(x).$$

*Preuve.* Pour tout  $x \in [a, b]$  traités par l'algorithme,  $|f(x)| - \epsilon > (1 - 10^{-4})|f(x)|$ , de plus à partir de la proposition 12 il existe deux réels  $A$  et  $\alpha$  strictement positifs tels que

$$|f(x)| - \epsilon - \tilde{M}^1(f, x)(t) > (1 - 10^{-4})|f(x)| - \frac{A}{1 - \alpha t},$$

donc

$$(1 - 10^{-4}) \frac{|f(x)|}{A + \alpha|f(x)|} \leq \tilde{m}(x).$$

$\square$

**Remarque 5.** L'opération  $+$  sur des liste est une opération de concaténation.

---

**Algorithm 3** `_bissection-exclusion_`

---

**Entrée(s) :** Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}(x, Dx)$ . Des conditions initiales  $ini = [f(0), f^{(1)}(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ . Un segment  $[a, b]$ . Une précision  $\epsilon$ .

**Sortie :** Une liste  $\mathcal{L}$  de segments disjoints de taille inférieure à  $\epsilon$  inclus dans  $[a, b]$  telle que  $[a, b] \setminus \mathcal{L}$  ne contient aucun zéro de  $f$ .

```

1: Si  $b - a < \epsilon$  alors
2:   Renvoyer  $[[a, b]]$ 
3: fin du Si
4:  $m := \frac{a+b}{2}$ 
5:  $d := \frac{b-a}{2}$ 
6:  $[f(m)], [\epsilon'], M^1(f, x) = \_M1\_((x, Dx), ini, m, \epsilon)$ 
7: Si  $f(x) = 0$  alors
8:   Renvoyer  $\_bissection-exclusion\_(\mathcal{L}(x, Dx), ini, [a, m - \frac{\epsilon}{3}], \epsilon) + \_bissection-$ 
       $\_exclusion\_(\mathcal{L}(x, Dx), ini, [m - \frac{\epsilon}{3}, m + \frac{\epsilon}{3}], \epsilon) + \_bissection-exclusion\_(\mathcal{L}(x, Dx), ini, [m + \frac{\epsilon}{3}, b], \epsilon)$ 
9: fin du Si
10:  $M_{\epsilon'}(f, x) : t \rightarrow |f(m)| - \epsilon' - M^1(f, x)(t)$ 
11: Tant que  $M_{\epsilon'}(d) \leq 0$  faire
12:    $d := \frac{d}{2}$ 
13: fin du Tant que
14: Si  $d = \frac{b-a}{2}$  alors
15:   Renvoyer  $[]$ 
16: Sinon
17:   Renvoyer  $\_bissection-exclusion\_(\mathcal{L}(x, Dx), ini, [a, m - d], \epsilon) + \_bissection-$ 
       $\_exclusion\_(\mathcal{L}(x, Dx), ini, [m + d, b], \epsilon)$ 
18: fin du Si

```

---

**Définition 20.** On appelle ordre de rappel d'un algorithme récursif, le nombre de rappels de l'algorithme à lui-même. Et ordre de rappel maximal, le maximum des ordres de rappel.

**Proposition 15.** On appelle  $\mathcal{I}_\epsilon([a, b]) = \_bissection-exclusion\_(\mathcal{L}(x, Dx), ini, [a, b], \epsilon)$ . L'algorithme `_bissection-exclusion_` vérifie les propriétés suivantes

- (i) Tous segments de  $\mathcal{I}_\epsilon([a, b])$  est de taille inférieure à  $\epsilon$  ;
- (ii) L'ensemble  $[a, b] \setminus \mathcal{I}_\epsilon([a, b])$  ne contient aucun zéro de  $f$  ;
- (iii) Quelque soit  $\epsilon > 0$ , il existe  $\epsilon' > 0$  tel que  $\mathcal{I}_{\epsilon'}([a, b])$ , vérifie

$$\forall x \in \bigcup_{s \in \mathcal{I}_{\epsilon'}([a, b])} s, \quad d(x, \mathcal{Z}_{[a, b]}) < \epsilon.$$

*Preuve.* (i) La condition d'arrêt de `_bissection-exclusion_` implique que la taille de l'intervalle renvoyé soit inférieur à  $\epsilon$ . Si l'algorithme termine, alors les intervalles renvoyés par l'algorithme vérifient (i). Soit  $n$  un ordre de rappel de l'algorithme. À l'ordre de rappel  $n$ , la taille de l'intervalle pris par l'algorithme est inférieur à  $\frac{b-a}{2^n}$ , donc les ordres de rappel de l'algorithme sont majorés par  $\lceil \frac{\log(b-a)\epsilon^{-1}}{\log 2} \rceil$ . Donc l'algorithme termine toujours et (i) est vérifié.

(ii) On appelle  $c = \frac{a+b}{2}$ . Nous allons montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{b-a}{2^n} < \epsilon < \frac{b-a}{2^{n-1}}$ ,  $[a, b] \setminus \mathcal{I}_\epsilon([a, b])$  ne contient aucun zéro.

**Initialisation :** On commence avec  $\frac{b-a}{2} < \epsilon < b - a$  `_bissection-exclusion_` $(\mathcal{L}(x, Dx), ini, [a, b], \epsilon)$ . Déjà, l'ordre maximal de rappel est 2. Il suffit de montrer que  $[c - d, c + d]$  ne contient pas de zéro, où  $d$

calculé dans le premier appel de `_bissection-exclusion_` tel que  $d < \tilde{m}(c)$ . D'après la proposition 13, on a aussi  $d < m(x)$ , ce qui montre le résultat.

**Induction :** (ii) est vrai pour  $\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$ , montrons que c'est encore vrai pour  $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon < \frac{b-a}{2^n}$  l'algorithme calcule  $d$  tel que  $d < \tilde{m}(\frac{a+b}{2})$ . D'après la proposition 13, on a aussi  $d < m(x)$  alors  $[c-d, c+d]$  ne contient aucun zéro, puis il renvoie `_bissection-exclusion_`( $\mathcal{L}(x, Dx)$ , *ini*,  $[a, c-d], \epsilon$ ) + `_bissection-exclusion_`( $\mathcal{L}(x, Dx)$ , *ini*,  $[c+d, b], \epsilon$ ). Donc  $(\frac{a+b}{2} - d) - a = b - (\frac{a+b}{2} + d) = \frac{b-a}{2} - d$  et donc  $\epsilon > \frac{b-a}{2} - d$ , on peut appliquer l'hypothèse d'induction. On a finalement

$$[a, b] \setminus \mathcal{I}_\epsilon([a, b]) = [a, c-d] \setminus \mathcal{I}_\epsilon([a, c-d]) \cup [c-d, c+d] \cup \mathcal{I}_\epsilon([c+d, b])$$

Comme aucune de ces ensembles ne contient de zéro, leur union ne contient pas de zéro.

**Conclusion :** La proposition est initialisée et héréditaire donc vrai pour tout  $n$  donc pour tout  $\epsilon < b-a$ .

(iii) D'après la proposition 14, on a  $\forall x \in [a, b], (1-10^{-4}) \frac{|f(x)|}{A+\alpha|f(x)|} \leq \tilde{m}(x)$ . On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{Z}_{[a,b]}$  est l'ensemble des zéro de  $f$  sur  $[a, b]$ , on pose

$$\mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon = \bigcup_{\zeta \in \mathcal{Z}_{[a,b]}} [\zeta - \frac{\epsilon}{2}, \zeta + \frac{\epsilon}{2}].$$

En supposant que  $[a, b] \setminus \mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon \neq \emptyset$ , on pose finalement,

$$p = \inf_{x \in [a,b] \setminus \mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon} \frac{(1-10^{-4})}{2} \frac{|f(x)|}{A+\alpha|f(x)|},$$

on sait que  $p > 0$  par définition de  $\mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon$ , la division par 2 vient de la façon d'obtenir  $d$  dans l'algorithme `_bissection-exclusion_` tel que  $d < \tilde{m}(x)$ . On sait finalement que sur l'ensemble  $[a, b] \setminus \mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon$  le pas sera toujours supérieur à  $p$ , alors en prenant  $\epsilon' = \min(\frac{\epsilon}{4}, p)$  soit  $[c, d]$  un segment vérifiant  $2\epsilon' > d-c \geq \epsilon'$ , qui sera forcément atteint à l'avant dernier rappel de l'algorithme à lui-même.

**Cas 1 :**  $\mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon \cap [c, d] \neq \emptyset$ , on a donc

$$d(\mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon, x) \leq \frac{\epsilon}{2} + d - c \leq \epsilon \quad \forall x \in [c, d].$$

**Cas 2 :**  $\mathcal{Z}_{[a,b]}^\epsilon \cap [c, d] = \emptyset$ , on a donc `_bissection-exclusion_`( $\mathcal{L}(x, Dx)$ , *ini*,  $[c, d], \epsilon'$ ) = [].

□

#### 4.4 Certification des zéros

On cherchera des coefficients  $f(x), \dots, \frac{f^{(m)}(x)}{m!}$  et des imprécisions sur ces coefficients  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$  tels que

$$10^4 \epsilon_i < \left| \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \right| - \epsilon_i \quad \forall i \in [1, m]. \quad (20)$$

Nous utiliserons l'algorithme `_M2_`.

**Proposition 16.** Soit  $f$  une fonction analytique en  $x_0$ , s'il existe un  $r > 0$  tel que

$$\sum_{i=0, i \neq m}^{m+k} \left( \left| \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \right| + \epsilon_i \right) r^i + M^{m+k}(f, x_0)(r) < \left( \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \right| - \epsilon_m \right) r^m, \quad (21)$$

alors l'hypothèse du théorème 3.3 est satisfaite.

*Preuve.* Il est facile de se convaincre que l'inégalité (21) implique

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \right| r^i + M^{m+1}(f, x_0)(r) < \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \right| r^m.$$

□

---

**Algorithm 4** \_M2\_

---

**Entrée(s) :** Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}(x, Dx)$ . Des conditions initiales  $[f(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ . Un réel  $x$ .

Un réel  $\epsilon$ . Deux entiers  $m < r - 1$  et  $k$ .

**Sortie :**  $[f(x), \dots, \frac{f^{(m)}(x)}{m!}]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_m]$  et  $M^{m+1}(x)$  tels que  $f(x), \dots, \frac{f^{(m)}(x)}{m!}$  et  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_m$  vérifient (20).

$[f(x), \dots, \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}, 0]$ ,  $[\epsilon_1, \dots, \epsilon_m]$ ,  $M^{m+1}(f, x)$  si les  $10^{-40}\epsilon$  ne vérifient pas (20).  
1: compteur:=0  
2:  $[f(x), \dots, \frac{f^{(r-1)}(x)}{(r-1)!}]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{r-1}] :=$  translation des conditions initiale à la précision  $\epsilon$   
3: **Tant que** compteur < 5 et que  $f(x), \dots, \frac{f^{(m)}(x)}{m!}$ , et  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$  ne vérifient pas (20) **faire**  
4:  $\epsilon := 10^{-8}\epsilon$   
5:  $[f(x), \dots, \frac{f^{(r-1)}(x)}{(r-1)!}]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{r-1}] :=$  translation des conditions initiale à la précision  $\epsilon$   
6: **fin du Tant que**  
7:  $[f(x), \dots, \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}, 0]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_m]$ ,  $M^{m+1}(f, x) = \text{Majorant}(\mathcal{L}(x, Dx), [f(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}], x, \epsilon, m, k)$   
8: **Si** compteur=5 **alors**  
9: **Renvoyer**  $[f(x), \dots, \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!}, 0]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_m]$ ,  $M^{m+1}(f, x)$   
10: **Sinon**  
11: **Renvoyer**  $[f(x), \dots, \frac{f^{(m)}(x)}{m!}]$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_m]$ ,  $M^{m+1}(x)$   
12: **fin du Si**

---

**Remarque 6.** Pour l'algorithme \_certification-zéros\_ nous devons trouver un  $r$  vérifiant la propriété de la proposition (16), rappelons nous que l'algorithme sert à vérifier s'il y a des zéros dans des intervalles indéterminés de taille  $\tau$ . À partir de l'équation (21), on pose

$$\eta = \max_{i \in [1, m-1]} \left| \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \right| + \epsilon_i,$$

en supposant  $\eta \ll \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \right| - \epsilon_m$  et  $\eta \ll 1$ . On cherche un ordre de grandeur des  $r$  vérifiant (21), on néglige la série majorante sur le reste à l'ordre 2 de la série  $f$  et l'on obtient

$$\eta \sum_{i=0}^{m-1} r^i \approx \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \right| r^m.$$

Qui se réécrit

$$\left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \right|^{-1} \eta \approx \frac{r^m - r^{m+1}}{1 - r}.$$

L'ordre de grandeur vérifié par  $r$  est finalement,  $\left( \left| \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \right|^{-1} \eta \right)^{\frac{1}{m}}$ .

---

**Algorithm 5** \_dichotomie-zéro\_

---

**Entrée(s) :** Une fonction  $f$  strictement monotone,  $t_n$  et  $s_n$  deux réels tels que  $f(s_n) > 0$  et  $f(t_n) < 0$ .

**Sortie :**  $t_{n+1}$  et  $s_{n+1}$  tels que  $f(s_{n+1}) > 0$  et  $f(t_{n+1}) < 0$  et  $d(s_{n+1}, t_{n+1}) = d(s_n, t_n)/2$ .

1:  $m = \frac{s_n + t_n}{2}$   
2: **Si**  $f(m) > 0$  **alors**  
3: **Renvoyer**  $m, t$   
4: **Sinon**  
5: **Renvoyer**  $s, m$   
6: **fin du Si**

---

Cet algorithme est simplement une étape de dichotomie.

**Proposition 17.** Si la fonction \_certification-zéro\_( $\mathcal{L}(x, Dx)$ ,  $[f(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ ,  $x_0, \epsilon, 1, 0$ ) renvoie  $[c, s]$  non nuls, alors  $f$  est strictement monotone sur l'intervalle  $[x_0 - s, x_0 + s]$ .



---

**Algorithm 6** \_certification-zéros\_

---

**Entrée(s) :** Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}(x, Dx)$ . Des conditions initiales  $\text{ini}=[f(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ . Un réel  $x$ . Un réel  $\epsilon$ . Deux entiers  $m$  et  $k$ .

**Sortie :** Un couple de réels  $[c, s]$  tels que  $a$  et  $s$  vérifient la propriété de la proposition 16. Le réel  $a$  est le plus grand réel trouvé et  $s$  le plus petit. Si  $m = 1$ ,  $s$  est inférieur à  $m^1(x)$  introduit dans la définition 10.  $[0, 0]$  si l'algorithme n'a pas trouvé de réels satisfaisant la condition (16).

1:  $[f_0(x), \dots, \frac{f^{(m)}(x)}{(m)!}], [\epsilon_0, \dots, \epsilon_m], M^{m+1}(f, x) := \text{M2}(\mathcal{L}(x, Dx), \text{ini}, x, \epsilon, m, k)$

2:  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$   
$$t \rightarrow \left( \left| \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \right| - \epsilon_m \right) t^m - \sum_{i=0}^{m-1} \left( \left| \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \right| + \epsilon_i \right) t^i - M^{m+1}(f, x)(t)$$

3: **Si**  $\frac{f^{(m)}(x)}{m!} = 0$  **alors**

4:     **Renvoyer**  $[0, 0]$

5: **fin du Si**

6:  $\eta := \max \left\{ \left| \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \right| + \epsilon_i, \quad i \in [1, m-1] \right\}$

7:  $r := \left( \left| \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \right|^{-1} \eta \right)^{\frac{1}{m}}$

8: arrêt-condition  $:= \min(5\epsilon, r)$

9:  $c := 512 \times \max(r, \epsilon)$

10: **Tant que**  $T(c) < 0$  et arrêt-condition  $< a$  **faire**

11:      $c := \frac{a}{2}$

12: **fin du Tant que**

13: **Si**  $c > \text{arrêt-condition}$  **alors**

14:     **Tant que**  $T(\frac{s}{2}) > 0$  **faire**

15:          $s := \frac{s}{2}$

16:     **fin du Tant que**

17:     **Si**  $m = 1$  et  $T'(s) \geq 0$  **alors**

18:          $t := \frac{s}{2}$

19:         **Tant que**  $T(t) < 0$  **faire**

20:              $t, s = \text{dichotomie-zéro}_-(T', t, s)$

21:         **fin du Tant que**

22:         **Renvoyer**  $[c, s]$

23:     **Sinon**

24:         **Renvoyer**  $[c, s]$

25:     **fin du Si**

26: **Sinon**

27:     **Renvoyer**  $[0, 0]$

28: **fin du Si**

---

*Preuve.* S'il existe un réel  $c$  satisfaisant la condition (16), on a

$$0 < (1 - 10^{-4})|f'(x_0)|c - (|f(x_0)| + \epsilon_0) - M^2(f, x)(c),$$

Soit  $r_0$  le point où la fonction  $g : t \rightarrow (1 - 10^{-4})|f'(x_0)|t - (|f(x_0)| + \epsilon_0) - M^2(f, x_0)(t)$  atteint son maximum. On sait qu'il est unique car la fonction est concave. On remarque aussi que  $g'(t) < (1 - 10^{-4})|f'(x_0)| - M^1(f', x_0)$ , donc la fonction est strictement monotone sur  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0]$  d'après la proposition 10. Il existe un  $s \leq r_0$  vérifiant (16) donc tel que  $s < m^1(s)$ .  $\square$

**Proposition 18.** *Soit  $\zeta$  un zéro simple de  $f$ , alors il existe un  $\epsilon > 0$  tel que quel que soit  $x$  vérifiant  $d(x, \zeta) < \epsilon$ , la fonction `_certification-zéro_`( $\mathcal{L}(x, Dx), [f(0), f_1(1), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}]$ ,  $x, \epsilon, 1, k > 1$ ) renvoie un couple  $[c, s]$  non nul.*

*Preuve.* Appelons  $\eta = 10^{-4}$ , on réécrit la fonction,

$$g : t \rightarrow (1 - \eta)|f'(x_0)|t - (1 + \eta)|f(x_0)| - M^2(f, x)(t), \quad (22)$$

On veut trouver un  $\epsilon > 0$  tel que  $\forall x_0, |x_0 - \zeta| < \epsilon$ , il existe un  $t > 0$  tel que  $g(t) > 0$ . D'après la proposition 12 on sait que sur  $[a, b]$  on a

$$M^2(f, x)(t) < \frac{t^2 A}{1 - \alpha t}, \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall t > 0,$$

alors  $g(t) > 0$  est induit de l'inégalité

$$(1 - \eta)|f'(x_0)|t - (1 + \eta)|f(x_0)| - \frac{t^2 A}{1 - \alpha t} > 0.$$

Comme  $f$  est analytique,  $f$  et  $f'$  sont uniformément continues, il existe un  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x_0$  vérifiant  $|\zeta - x_0| < \epsilon$ ,  $|f'(\zeta) - f'(x_0)| < \eta|f'(x_0)|$ , et  $|f(x_0)| < \min\left(\frac{((1-2\eta)|f'(\zeta)|)^2}{(1+\eta)18A}, \frac{(1-2\eta)|f'(\zeta)|}{(1+\eta)6\alpha}\right)$ , donc pour  $x_0$  dans le voisinage  $B(\zeta, \epsilon)$ , l'inégalité

$$(1 - \eta)|f'(x_0)|t - (1 + \eta)|f'(x_0)| - \frac{t^2 A}{1 - \alpha t} > 0$$

est induite par l'inégalité

$$(1 - 2\eta)|f'(\zeta)|t - |f(x_0)| - \frac{t^2 A}{1 - \alpha t} > 0.$$

Pour  $t = 3 \frac{(1+\eta)|f(x_0)|}{(1-2\eta)|f'(x_0)|}$ , on a

$$|f(x_0)| \left( 2 - (1 + \eta)|f(x_0)| \left( \frac{3}{(1 - 2\eta)|f'(x_0)|} \right)^2 \frac{A}{\frac{1}{2}} \right) > 0$$

d'après les conditions que vérifie  $\epsilon$ .  $\square$

**Proposition 19.** *La liste de segments renvoyée par l'algorithme `_disjoint_` est une liste de segments deux à deux disjoints sur lesquels la fonction  $f$  est strictement monotone et contient un unique zéro.*

*Preuve.* C'est une conséquence de la proposition 10.  $\square$

Cet algorithme sert à enlever les intervalles renvoyés par `_bissection-exclusion_` qui sont inclus dans les intervalles construits à partir des résultats de `_certification-zéros_`.

---

**Algorithm 7** \_disjoint\_

**Entrée(s) :** Une liste non vide  $\mathcal{L}$  de segments vérifiant la condition de la propriété (10) et triés par ordre de moyenne croissante.

**Sortie :** Une liste de segments disjoints vérifiant la condition de la propriété (10).

```

1: disjoint := []
2: n := la taille de  $\mathcal{L}$ 
3: segment =  $\mathcal{L}[0]$ 
4: i = 1
5: Tant que  $i < n$  faire
6:   intersection := segment  $\cap$   $\mathcal{L}[i]$ 
7:   Si intersection =  $\emptyset$  alors
8:     ajouter segment à la liste disjoint
9:     segment :=  $\mathcal{L}[i]$ 
10:    i := i + 1
11:   Sinon
12:     segment := intersection
13:     i := i + 1
14:   fin du Si
15: fin du Tant que
16: ajouter segment à la liste disjoint
17: Renvoyer disjoint

```

---



---

**Algorithm 8** \_Rectification-indéterminés\_

**Entrée(s) :** Une liste de segments indéterminés  $\mathcal{I}$ . Une liste  $\mathcal{D}$  de segments contenant un unique zéro.

**Sortie :** Une liste de segments composée des segments de  $\mathcal{I}$  tels qu'ils ne soient inclus dans aucun segment de  $\mathcal{D}$ .

1: **Renvoyer** La liste des segments de  $\mathcal{I}$  inclus dans aucun segment de  $\mathcal{D}$ .

---

## 4.5 Algorithmes final

---

**Algorithm 9** \_Concaténation\_

**Entrée(s) :** Deux couples de listes de segments  $(\mathcal{D}_0, \mathcal{I}_0)$  et  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{I}_1)$ .

**Sortie :** Un couple de liste de segments  $(\mathcal{D}, \mathcal{I})$  avec  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1$

1: **Renvoyer**  $(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1, \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1)$

---

**Proposition 20.** *Si la fonction  $f$  n'admet que des zéro simples sur l'intervalle  $[a, b]$ , pour un  $n$  suffisamment grand  $\text{Recherche-zéro}(\mathcal{L}(x, Dx), \text{ini}, [a, b], n)$  renvoie un couple la forme  $(\mathcal{D}, \mathcal{I})$ , où la fonction  $f$  est strictement monotone et s'annule une unique fois sur les intervalles de  $\mathcal{D}$  et tous les zéros simples de l'intervalle sont inclus dans les segments de  $\mathcal{D}$ .*

*Preuve.* L'ensemble des zéros sur  $[a, b]$  est de cardinal fini  $m$  d'après la proposition (11), on appelle  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  les zéros simples de l'intervalle et  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m$  les réels tels que  $\text{certification-zéros}(\mathcal{L}(x, Dx), [f(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}, x, \epsilon', 1, 0) = [c, s] \neq [0, 0]$ , si  $|x - \zeta_i| < \epsilon_i$ , leur existence est prouvée par la proposition 18, si  $\epsilon'$  est suffisamment petit, or pour chaque rappelle de la fonction  $\text{Recherche-zéros}$ ,  $\epsilon'$  dépend de la taille de l'intervalle  $[c, d] \subset [a, b]$  qui est de taille inférieure à  $10^{-n}(b-a)$  à l'ordre de rappel  $n$ . En choisissant  $\epsilon = \min_{i=0}^m \epsilon_i$ , il existe  $\epsilon'$  tel que si  $[c, d] \subset [a, b]$ , alors  $\text{bissection-exclusion}(\mathcal{L}(x, Dx), [f(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}, [c, d], \epsilon')$  renvoie une liste d'intervalles  $\mathcal{I}_{[c,d]}$  vérifiant  $d(x, \mathcal{Z}_{[c,d]}) < \epsilon$  pour tout  $x$  dans les intervalles renvoyés d'après la proposition 15. Finalement, en choisissant  $n \geq \left\lceil \frac{\log(b-a)\epsilon'^{-1}}{4 \log 10} \right\rceil$ , le résultat de la proposition est satisfait.  $\square$

---

**Algorithm 10** Recherche-zéros

---

**Entrée(s) :** Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}(x, Dx)$ . Des conditions initiales  $\text{ini}=[f(0), f^{(1)}(0), \dots, \frac{f^{(r-1)}(0)}{r-1!}]$ .

Un segment  $[a, b]$  tel que  $f$  n'ait pas de singularité sur  $[a, b]$ . Un entier  $n$ . Un entier  $l$  initialisé à zéro dont l'utilisateur ne se souciera pas.

**Sortie :** Un couple de listes  $(\mathcal{D}, \mathcal{I})$ .  $\mathcal{D}$  une liste de segments tels que la fonction  $f$  contienne un unique zéro sur l'intervalle et qu'elle soit monotone sur cet intervalle.  $\mathcal{I}$  une liste de segments encore indéterminés de taille inférieure à  $(b-a)10^{-4n}$ .

```
1: Si  $l = n$  alors
2:   Renvoyer  $([], [[a, b]])$ 
3: fin du Si
4:  $k := 10$ 
5:  $\epsilon = \min(10^{-4}(b-a), 10^{-1})$ 
6:  $\mathcal{I} := \text{\_bissection-exclusion\_}(\mathcal{L}(x, Dx), \text{ini}, [a, b], \epsilon)$ 
7:  $n := \text{la taille de la liste } \mathcal{I}$ 
8:  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_s := [], []$ 
9: Pour  $[c, d] \in \mathcal{I}$  faire
10:    $[a, s] = \text{\_certification-zéros\_}(\mathcal{L}(x, Dx), \text{ini}, d, \epsilon, 1, k)$ 
11:   Si  $r_0 > 0$  alors
12:     ajouter  $[d-a, d+a]$  à  $\mathcal{D}_a$  et  $[d-s, d+a]$  à  $\mathcal{D}_s$ 
13:   fin du Si
14: fin du Pour
15:  $\mathcal{I} := \text{\_Rectification-indéterminés\_}(\mathcal{D}_a, \mathcal{I})$ 
16:  $\mathcal{D} = \text{\_disjoint\_}(\mathcal{D}_s)$ 
17: Si  $\mathcal{I} = \emptyset$  alors
18:   Renvoyer  $(\mathcal{D}, \mathcal{I})$ 
19: Sinon
20:    $\mathcal{R} := (\mathcal{D}, [])$ 
21:   Pour  $[c, d] \in \mathcal{I}$  faire
22:      $\mathcal{R} := \text{\_concaténation\_}(\mathcal{R}, \text{\_Recherche-zéro\_}(\mathcal{L}(x, Dx), \text{ini}, [c, d], n, l+1))$ 
23:   fin du Pour
24: fin du Si
25: Renvoyer  $\mathcal{R}$ 
```

---

## Références

- [1] M. Mezzarobba, “Truncation bounds for differentially finite series,” *Annales Henri Lebesgue*, vol. 2, p. 99–148, 2019. [Online]. Available : [https://ahl.centre-mersenne.org/item/AHL\\_2019\\_\\_2\\_\\_99\\_0](https://ahl.centre-mersenne.org/item/AHL_2019__2__99_0)
- [2] J. Yakoubsohn, “Numerical analysis of a bisection-exclusion method to find zeros of univariate analytic functions,” *J. Complex.*, vol. 21, no. 5, pp. 652–690, 2005. [Online]. Available : <https://doi.org/10.1016/j.jco.2005.06.007>
- [3] R. P. Stanley, “Differentiably finite power series,” *European journal of combinatorics*, vol. 1, no. 2, pp. 175–188, 1980.
- [4] A. Bostan, F. Chyzak, M. Giusti, R. Lebreton, G. Lecerf, B. Salvy, and r. Schost, *Algorithmes Efficaces en Calcul Formel*. Palaiseau : Frédéric Chyzak (auto-édit.), Sep. 2017, 686 pages. Imprimé par CreateSpace. Aussi disponible en version électronique. [Online]. Available : <https://hal.archives-ouvertes.fr/AECF/>
- [5] M. Mezzarobba, “Autour de l’évaluation numérique des fonctions D-finies,” Thèse de doctorat, École polytechnique, Nov. 2011. [Online]. Available : <http://tel.archives-ouvertes.fr/pastel-00663017/>
- [6] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. US Government printing office, 1948, vol. 55.
- [7] H. Poincaré, “Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies,” *American Journal of Mathematics*, vol. 7, pp. 203–258, 1885.
- [8] M. Mezzarobba and B. Salvy, “Effective bounds for P-recursive sequences,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 45, no. 10, p. 1075–1096, 2010. [Online]. Available : <http://arxiv.org/abs/0904.2452>
- [9] J. van der Hoeven, “Fast evaluation of holonomic functions near and in regular singularities,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 31, no. 6, pp. 717–744, 2001.
- [10] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*. Courier Corporation, 1997.
- [11] T. Grégoire, “Certified polynomial approximations for d-finite functions,” *Rapport de stage, École normale supérieure de Lyon*, 2012.
- [12] J.-P. Dedieu, *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*. Springer, 2006.
- [13] H. Weyl, “Randbemerkungen zu hauptproblemen der mathematik,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 20, no. 1, pp. 131–150, 1924.
- [14] P. Henrici and I. Gargantini, “Uniformly convergent algorithms for the simultaneous approximation of all zeros of a polynomial,” *Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra*, pp. 77–113, 1969.
- [15] V. Serov, “Complex analysis,” *University of Oulu, Oulu*, 2015. [Online]. Available : <https://www.oulu.fi/sites/default/files/151/complex.book.pdf>
- [16] M. Giusti and J.-C. Yakoubsohn, “Approximation numérique de racines isolées multiples de systèmes analytiques,” 2019. [Online]. Available : <https://perso.math.univ-toulouse.fr/yak/files/2018/09/Giusti-Yakoubsohn-2018-09-08.pdf>