



LABORATOIRE DES SCIENCES DU CLIMAT  
ET DE L'ENVIRONNEMENT

---

**Changement d'échelles dans les projections  
climatiques et leurs impacts hydrologiques:  
Cas des grandes plaines américaines**

---

*Auteur*

MATHIS DERONZIER  
MINES SAINT-ÉTIENNE

*Maîtres de stage*

EMMANUEL MOUCHE  
C.E.A.  
MATHIEU VRAC  
C.N.R.S.

STAGE DE RECHERCHE DE MASTER 2

Avril-Septembre  
2021

# Contents

<b>0 Introduction</b>	<b>4</b>
0.1 Remerciements . . . . .	4
0.2 Contextualisation et motivations du stage . . . . .	4
0.3 Présentation du plan . . . . .	6
<b>1 Changement d'échelle, downscaling et analyse des résultats</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction à la problématique du downscaling . . . . .	8
1.2 Cumulative Distribution Function transform (CDFt) . . . . .	9
1.2.1 Quantile-Quantile . . . . .	9
1.2.2 CDFt . . . . .	9
1.3 Analyse des résultats obtenus par downscaling . . . . .	11
1.3.1 Distance de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	12
1.3.2 Distance de Cramér-von Mises . . . . .	12
<b>2 Présentation des modèles de climat et hydrologiques</b>	<b>14</b>
2.1 Généralités sur les interactions atmosphère - surface continentale - sol . . . . .	15
2.1.1 Les précipitations . . . . .	15
2.1.2 Les écoulements . . . . .	16
2.1.3 Transferts d'eau entre le sol et l'atmosphère . . . . .	18
2.2 Les concepts hydrologiques: modélisation de l'écoulement dans le sol . . . . .	19
2.2.1 Quelques définitions pour l'étude en milieu poreux . . . . .	19
2.2.2 Les équations pour modéliser l'écoulement . . . . .	20
2.2.3 Les équations des écoulements en milieu poreux . . . . .	21
2.3 La problématique de l'upscaling dans l'étude des modèles hydrologiques . . . . .	23
2.3.1 Le modèle d'hydrogéosphère . . . . .	23
2.3.2 Le modèle d'Orchidée . . . . .	24
2.3.3 Questions ouvertes par la problématique de l'upscaling . . . . .	26
<b>3 Projections Climatiques et modélisation hydrologique sur le bassin versant du Little Washita</b>	<b>27</b>
3.1 Étude du Little Washita et des données NARR . . . . .	28
3.1.1 Le bassin versant du Little Washita . . . . .	28
3.1.2 Les données North American Regional Reanalysis (NARR) . . . . .	29
3.2 Dégradation spatiale des données NARR . . . . .	30
3.2.1 Méthode de dégradation . . . . .	30
3.2.2 Analyse spatiale de la région du Washita . . . . .	31
3.3 Downscaling des données dégradées et des données IPSL . . . . .	35
3.3.1 Analyse variationnelle des différentes séries de projection . . . . .	35
3.3.2 Étude du downscaling sur la correction de biais . . . . .	36
3.3.3 Analyse des séries downscalées et explication du choix de la méthode de downscaling . . . . .	38
3.4 Simulation hydrologique avec HydroGéosphère . . . . .	39
3.4.1 Modélisation Little Washita HGS . . . . .	39
3.4.2 La problématique du spin-up . . . . .	40
3.5 Comparaison et analyse des résultats des simulations hydrologiques . . . . .	41
3.5.1 L'efficacité du downscaling . . . . .	41

3.5.2	Étude de la réponse débit/précipitation . . . . .	44
3.5.3	Classifications des données réactives et non réactives aux précipitations .	45
3.6	Conclusion et perspectives de l'analyse des données sur le bassin du Little Washita	47
<b>4</b>	<b>Annexes</b>	<b>49</b>
4.1	Annexe 1: Preuves et outils utilisés dans le downscaling . . . . .	49
4.2	Annexe 2: Transport optimal . . . . .	50
4.2.1	Problématique . . . . .	50
4.2.2	Résolution du problème dans le cas fini et downscaling . . . . .	51
4.3	Annexe 3: La statistique de Cramér-von Mises . . . . .	51
4.4	Annexe 4: La projection conique conforme de Lambert . . . . .	53
4.5	Annexe 5: Classification des populations de débit . . . . .	56

# 0 Introduction

## 0.1 Remerciements

Je tiens à remercier Emmanuel Mouche et Mathieu Vrac de m'avoir fait confiance pour réaliser ce stage. Je les remercie aussi pour leur précieuse aide et leurs commentaires sur ma soutenance et ce rapport.

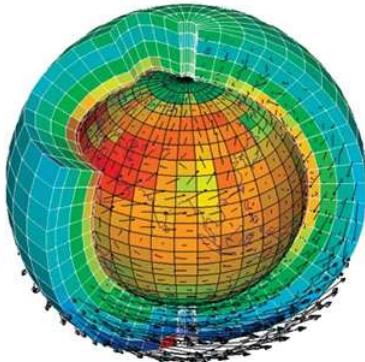
Plus précisément, j'aimerais remercier Emmanuel pour le temps qu'il a pris à m'introduire les problématiques de l'upscaling et la physique des écoulements en milieu poreux. J'ai grâce à lui, pu retrouver des réflexions physiques avec lesquelles j'avais perdu contact. Ces réflexions m'ont enrichi et j'ai l'impression de mieux saisir les enjeux des simplifications des modèles physiques. Je le remercie aussi de m'avoir fait découvrir un excellent groupe de rock des 70's: *Grateful Dead*.

Je remercie aussi Mathieu pour le temps qu'il m'a accordé, de m'avoir présenté la problématique du downscaling et d'avoir répondu à mes interrogations. J'ai pu mieux comprendre les enjeux climatiques ainsi qu'entrevoir les problématiques actuelles de la recherche dans les statistiques appliquées au climat à travers ses remarques.

## 0.2 Contextualisation et motivations du stage

Alors que le rapport du GIEC 2021 sorti cet été projette une augmentation de la température mondiale moyenne de  $1.5^{\circ}\text{C}$  d'ici 2050 ainsi que des modifications des climats dans plusieurs régions du monde, il semble aujourd'hui primordial de comprendre les conséquences locales d'un changement climatique global. Les changements climatiques locaux sont des problématiques politiques et économiques majeurs, leur projection est aujourd'hui un enjeux central pour la population mondiale.

Les modèles de climat simulent les interactions entre l'atmosphère, l'océan et les surfaces continentales afin de fournir ces projections. Grâce aux modèles, les scientifiques ont des représentations numériques de la répartition géographique de différents paramètres, tels que la répartition des vents, des nuages, des masses d'eau... Ce modèles possèdent un maillage de l'ordre d'une centaine de kilomètres en 3 dimensions de la terre (voir figure 1).



**Figure 1:** Illustration d'un maillage multidimensionnel pour les modèles de climat

La complexité des interactions entre les différents noeuds peuvent rendre les calculs laborieux et la puissance informatique actuelle ne permet pas de considérer des maillages plus fins.

On distingue trois sous-modèles des modèles de climats, les modèles océaniques, atmosphériques et continentaux. Nous nous intéresserons dans ce stage aux interactions entre les deux derniers modèles. La problématique à laquelle nous avons cherché de répondre est:

- Dans quelle mesure les méthodes de changement d'échelle permettent-elles de corriger les simulations hydrologique dans un bassin?

Le domaine du climat étudiant les questions de changement d'échelle du global au local est le *downscaling*. La question inverse du changement d'échelle du local au global est tout aussi intéressante pour les climatologues. En effet, comment savoir si les modèles à grande échelle sont vraiment représentatifs de la réalité? Alors que les modèles climatiques et hydrologiques travaillent sur des échelles globales, les lois de la physique sont elles, locales. On cherche alors à comprendre à partir des équations de la physique les interactions ou équations qu'elles engendrent à grande échelle, ce domaine de recherche s'appelle l'*upscaling*.

C'est dans ces problématiques de changement d'échelle que s'ancre ce stage. Pour concentrer et enrichir nos réflexions, nous nous intéresserons plus précisément à la question de l'impact du downscaling sur les modélisations hydrologiques. Afin de concrétiser ces problématiques, nous avons modélisé le fonctionnement hydrologique du bassin du Little Washita. Ce bassin, situé aux États-Unis dans l'état d'Oklahoma, possède de nombreuses caractéristiques qui le rendent intéressant. Sa superficie de  $611km^2$  est de l'ordre de grandeur d'une maille de modèle régional et il a déjà fait l'objet de nombreuses études (voir par exemple Maxwell et al. (2007), Rosero et al. (2011), Maquin (2016)).

Pour s'intéresser à la question du changement d'échelle il faut pouvoir comparer des données à grande échelle et à petite échelle. Les données NARR (North American Regional Reanalysis<sup>1</sup>) allant de l'année 1979 à 2014 constituent un jeu de données très pertinent pour l'étude du Little Washita. En effet, sa longueur de maille de  $32km$  permet à la fois de considérer l'*upscaling* hydrologique sur de ce bassin et le downscaling pour des jeux de données sur des échelles plus larges.

Pour obtenir ces données à grande échelle nous avons opté pour deux types de données: les données de l'institut Pierre Simon Laplace<sup>2</sup> / (IPSL) qui possèdent une longueur de maille de  $200km$  ainsi que les données NARR considérées à plusieurs échelles différentes (ce point sera développé dans la section 3). L'objectif aura été dans un premier temps d'étudier différentes méthodes de downscaling pour améliorer les projections des données à petite échelle. Une fois cette étape effectuée, il s'agissait de réaliser une simulation hydraulique sur les années prédictives et de comparer l'impact du downscaling sur les résultats des simulations hydrologiques. La problématique de l'*upscaling* sera en fait cachée dans la modélisation hydrologique du bassin

---

<sup>1</sup>Les reanalyses sont des modèles de climats simulés que l'on force à prendre certaine valeurs mesurées pour certains points et certains temps, nous considérerons les données NARR comme les données climatiques réelles.

<sup>2</sup> L'IPSL est un institut de recherche universitaire Français qui fédère 9 laboratoires regroupant 1400 membres avec à part égale des chercheurs, des ingénieurs et des étudiants. Il y est développé en son sein un modèle de climat.

du Little Washita, bien qu'elle n'ait pas été concrètement traitée dans les faits, elle a été un fil conducteur dans notre réflexion. Finalement, nous donnons les résultats obtenus ainsi que les conclusions que nous en avons tirées dans la section 3.

### 0.3 Présentation du plan

Dans la première partie nous allons introduire rigoureusement le concept de downscaling et les outils utilisés pour mesurer la qualité de nos projections. Nous verrons l'algorithme *Cumulative Distribution Function transfert* (CDFT), celui utilisé pour downscaler nos séries. Nous verrons ensuite comment estimer la qualité de nos projections, puis nous étudierons les distances de Kolmogorov Smirnov et celle de Cramér-von Mises permettant de quantifier la différence entre deux lois.

La seconde partie sera consacrée à la physique et la modélisation. Elle présentera les principaux mécanismes de la modélisation hydrologique ainsi que les modèles d'Orchidée et d'HydroGéoSphère. Dans un premier temps nous présenterons les interactions sol-atmosphère ainsi que les caractéristique des sols et leur influence sur les débits. Nous présenterons ensuite les principales équations de la mécanique des fluides en milieu poreux, puis deux modèles utilisés pour les modélisations hydrologiques, Orchidée et HydroGéoSphère, en expliquant plus en détail la problématique de l'upscaling.

La troisième et dernière partie présentera la démarche, les résultats ainsi que les questionnements que nous avons eu à mesure de nos résultats. Nous commencerons par expliquer en détail la méthodologie que nous avons suivie, puis nous présenterons pas à pas les résultats obtenus.

# 1 Changement d'échelle, downscaling et analyse des résultats

Cette section se concentre sur la partie statistique du stage, on cherchera à partir de données à grande échelle issues de modèles climatiques et de données réelles à améliorer les projections des variables de précipitation et d'évapotranspiration sur le bassin versant du Little Washita.

Nous commencerons par formaliser rigoureusement le downscaling statistique, puis nous réintroduirons les concepts mathématiques essentiels à la compréhension de l'algorithme CDFT. Pour terminer nous verrons les méthodes de test pour évaluer la qualité des projections sur plusieurs années.

Il existe plusieurs méthodes de downscaling, le downscaling dynamique et le downscaling statistique, nous n'avons étudié que la deuxième méthode de downscaling. Le downscaling statistique (voir par exemple Vrac et al. (2012) et Ayar et al. (2016)) est une méthode utilisée dans les sciences du climat permettant d'améliorer les projections des modèles climatiques. À partir des données obtenues par un modèle de climat (modèle de circulation général, modèle climatique régional) et des données observées sur la zone que l'on cherche à prédire, on essaie de corriger les biais systématiques introduits par les modèles. Le nom "downscaling" vient du domaine d'application de cette méthode. On passe généralement d'un modèle à grande échelle à des données observées à petite échelle. Nous n'expliquerons que deux méthodes de downscaling mais d'autres méthodes existent, l'article de Ayar et al. (2016) donne un aperçu des différentes méthodes existantes.

Pour formuler rigoureusement l'approche du downscaling nous introduisons des hypothèses communément admises dans les sciences du climat. On suppose que les variables étudiées sont des variables aléatoires réelles dépendantes du temps et de l'espace, on appelle  $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$  l'espace des variables aléatoires réelles et  $S(\mathbb{R}^3)$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$ . On suppose de plus que l'on peut faire correspondre chaque point de la terre à un point de la sphère unité. Nous travaillerons par la suite sur la sphère unité que l'on considérera être la terre.

**Définition 1.** *Pour une variable quantitative  $V$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , on appelle  $\mathcal{T}_V$  la fonction donnant les valeurs réelles de cette variable sur la terre à un moment donné, formellement (en considérant la terre comme une sphère  $S(\mathbb{R}^3)$ ) nous avons*

$$\mathcal{T}_V : \mathbb{R}_+ \times S(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}). \quad (1.1)$$

Alors,  $\mathcal{T}_V(t, x)$  est la valeur de la variable au temps  $t$  au point de coordonnée  $x$  sur terre.

**Définition 2.** *On appelle simulateur de variable quantitative  $V$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , une fonction  $S_V$  satisfaisant:*

$$S_V : \mathbb{R}_+ \times S(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}). \quad (1.2)$$

On peut alors estimer la qualité des simulations en mesurant une distance entre la réalisation  $\mathcal{T}_V([0, T])$  et celle de  $S_V([0, T])$ . Le travail du downscaling est de trouver des transformations sur les variables aléatoires  $S_V(t, x)$  pour minimiser ces distances. Plusieurs méthodes peuvent-être utilisées pour réduire ces distances. Une approche géostatistique existe pour étudier ces problématiques. Par exemple, des méthodes de résolution d'équations différentielles permettent d'interpoler les résultats (voir par exemple Lindgren et al. (2011)), ce n'est pas cette axe que nous allons prendre dans ce stage mais plutôt celui des transformations sur les variables aléatoires à une autre.

## 1.1 Introduction à la problématique du downscaling

Le downscaling que nous étudions ici, consiste donc à considérer des transformations sur des variables aléatoires réelles. Pour étudier ces variables aléatoires et construire les transformations on commence par introduire ici les notions de **fonction de répartition**, **fonction de répartition empirique** ainsi que celle de **fonction de densité**. Ces notions sont centrales dans les méthodes de downscaling que nous allons expliquer.

**Définition 3.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, on appelle **fonction de répartition de  $X$** ,  $\mathcal{F}_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  la fonction vérifiant

$$\mathcal{F}_X(x) = P(X \leq x). \quad (1.3)$$

**Définition 4.** Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  réalisations indépendantes d'une variable aléatoire réelle  $X$ , on appelle **fonction de répartition empirique de  $X$** , la fonction  $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i, +\infty)}(x). \quad (1.4)$$

**Définition 5.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, on note  $f_X$  la **fonction de densité de  $X$** ,  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  la fonction vérifiant

$$f_X(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x+t)}{t}. \quad (1.5)$$

Remarquons qu'une variable aléatoire ne possède pas nécessairement de fonction de répartition (notamment les variables aléatoires à valeurs discrètes), on peut cependant les étudier dans la théorie des distributions Golse (2020).

Commençons par établir notre problématique dans le cas le plus simple où l'on cherche à projeter une variable  $V$  dans l'avenir alors que nous connaissons ses réalisations dans le passé à un endroit donné  $x$ . On peut alors considérer deux processus aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,

$$(X_t)_{t \in \mathbb{N}} = (\mathcal{S}_V(t, x))_{t \in \mathbb{N}} \text{ et } (Y_t)_{t \in \mathbb{N}} = (\mathcal{T}_V(t, x))_{t \in \mathbb{N}}.$$

La problématique à laquelle nous cherchons de répondre est la suivante: connaissant  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  les réalisations jusqu'au temps  $n$  ainsi que  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}$  (pour des temps futurs), on cherche une fonction  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les tirages  $G(X_{i_1}), \dots, G(X_{i_m})$  et  $Y_{i_1}, \dots, Y_{i_m}$  soient proches du point de vu de leur loi (nous éclaircirons ce point dans la section 1.3).

Autrement dit, en appelant  $X$  et  $Y$  les réalisations de  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  sur  $\{1, \dots, n\}$  et  $X'$  et  $Y'$  les réalisations de  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  et de  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  sur  $\{i_1, \dots, i_m\}$ , on cherche à définir  $G_{X,Y}$  à partir de  $X, Y$  tel que  $G_{X,Y}$  minimise

$$d(\mathcal{F}_{G_{X,Y}(X')}, \mathcal{F}_{Y'}),$$

où  $d$  est une distance définie sur les fonctions. Nous voulons aussi que  $G_{X,Y}$  respecte certaines propriétés. Une des propriétés qui nous intéresse est celle de la consistance de notre transformation.

**Définition 6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles et  $G_{X,Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une transformation, on dit que  $G_{X,Y}$  est **consistante vis à vis de  $X$  et de  $Y$**  si elle vérifie

$$\mathcal{F}_{G_{X,Y}(X)} = \mathcal{F}_Y. \quad (1.6)$$

Dans la suite les transformations que nous considérerons satisferont toujours l'équation (1.6).

## 1.2 Cumulative Distribution Function transform (CDFt)

Nous allons ici présenter l'algorithme principalement étudié et utilisé dans ce stage, l'algorithme CDFt (voir Vrac et al. (2012)). Nous commencerons par présenter l'algorithme **quantile-quantile** permettant de comprendre l'esprit des transformations  $G$  affectées aux processus aléatoires. Puis nous décrirons l'algorithme de CDFt-t.

### 1.2.1 Quantile-Quantile

Le quantile-quantile consiste simplement à définir  $G_{X,Y}$  la transformation permettant de passer de la fonction de distribution de  $X$  à celle de  $Y$ .

**Proposition 1.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles ayant des fonctions de répartition  $\mathcal{F}_X$  et  $\mathcal{F}_Y$  continues, alors  $\mathcal{F}_Y^{-1}(\mathcal{F}_X(X))$  et  $Y$  suivent la même loi.*

On peut retrouver la démonstration de cette proposition dans les annexes section 4.1. Le principe de l'algorithme **quantile-quantile** est alors de calculer la transformation  $G = \mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X$ . Ainsi,  $\mathcal{F}_{G(X)} = \mathcal{F}_Y$  et l'on définit alors  $G_{X,Y} = G$ . L'une des limites de cette méthode est que le support de  $f_{G(X)}$  est inclus dans celui de  $f_Y$ , alors les valeurs prises par  $G_{X,Y}(X')$  seront incluses dans le support de  $f_Y$ . Nous aimerais alors que  $X'$  ait aussi une influence sur le support des valeurs prises. Ce qui n'est pas le cas dans la transformation  $G$  défini par la proposition 1. C'est en partie cette observation qui motive l'étude d'autres transformations.

### 1.2.2 CDFt

L'algorithme de **Cumulative Distribution Function transfer** (CDFt) vise à remédier au problème des bornes en appliquant des transformations sur les lois  $X$  et  $Y$ . On considère les réalisations  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  ainsi que  $X'_1, \dots, X'm$ .

#### CDFt avec support égale:

On peut par exemple faire en sorte que la transformation sur les projections conserve le support de celles-ci en d'autres mots on veut

$$\min_{i \in I}(X'_i) = \min_{i \in I}(G_{X,Y}(X'_i)) \quad \text{et} \quad \max_{i \in I}(X'_i) = \max_{i \in I}(G_{X,Y}(X'_i)).$$

Il suffit de transformer la loi de  $Y$  sur  $[0, 1]$ , de réaliser un quantile-quantile puis d'effectuer la transformation inverse. Concrètement, nous posons

$$\tilde{Y} = \frac{(Y - \min_{i \in I} Y_i)}{\max_{i \in I} Y_i - \min_{i \in I} Y_i}.$$

Alors, quelque soit  $i$  dans  $I$  on a  $\tilde{Y}_i \in [0, 1]$ . En appelant  $G = \mathcal{F}_{X,\tilde{Y}}$  la transformation quantile-quantile de  $X$  à  $\tilde{Y}$  on a  $G_{X,Y}(X'_i) \in [0, 1]$ , la transformation s'imposant naturellement est alors

$$G_{X,Y} = (\max_{i \in I} Y_i - \min_{i \in I} Y_i)G + \min_{i \in I} Y_i.$$

C'est l'une des premières idées lorsqu'on parle de transformations que l'on peut appliquer sur nos variables. Notons que l'on a aussi une grosse base de données et que l'on peut aussi essayer d'utiliser des méthodes de regression linéaire ou de machine learning pour estimer les max et

les min de  $Y'$  en fonction de  $X$ . Nous allons illustrer l'usage d'une de ces méthodes dans la prochaine partie 1.2.2.

### CDFt avec méthode de prédiction

Supposons que l'on ait des fonctions estimant la variance et la moyenne de  $Y'$  à partir de  $X'$ , s'exprimant sous la forme  $\overline{f(X')} = \overline{Y'}$  ainsi que  $\overline{g(X')} = \overline{\sigma(Y')}$  (on définit par  $\overline{X}$  la moyenne  $X$  et par  $\sigma(X)$  son écart type). Ces fonctions peuvent être obtenues par des méthodes de régression linéaire sur des sous échantillons des données de  $X$  et  $Y$  soit après les avoir ordonnées si les  $X_i$  et les  $Y_i$  sont indépendants soit en fonction de leur indice.

On aimerait alors que  $G_{X,Y}$  conserve la moyenne ainsi que la variance. Formellement, on voudrait définir  $G_{X,Y}$  telle que quelque soient  $\{i_1, \dots, i_m\}$  un ensemble d'entiers consécutifs et  $X'$  et  $Y'$  les vecteurs des variables aléatoires des  $X_{i_j}$  et  $Y_{i_j}$  sur cet ensemble, on ait :

$$\overline{G_{X,Y}(X')} = \overline{Y'}, \quad (1.7)$$

ainsi que

$$\sigma(G_{X,Y}(X')) = \sigma(Y'), \quad (1.8)$$

et que  $G$  respecte la condition de consistance (1.6). Concrètement, nous allons faire des transformations sur les variables aléatoires pour avoir ces conditions là. En appelant  $G_{X,Y} = \mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X$  on peut définir la transformation  $G_{X,Y,X'}$

$$G_{X,Y}(X') = \overline{g(X')} \frac{\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X') - \overline{\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X')}}{\sigma(\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X'))} + \overline{f(X')}.$$

On peut vérifier facilement que  $G_{X,Y}$  ainsi défini respecte bien les propriétés (1.6) (1.7) et (1.8). L'idée est alors de trouver les fonctions  $f$  et  $g$  par des méthodes de régression linéaires. Remarquons aussi que lorsque la loi est bornée cela ajoute une condition supplémentaire à  $G_{X,Y}$  et l'on ne peut pas nécessairement avoir les conditions sur la moyenne et la variance. Il faut alors choisir parmi l'une des conditions (1.7) et (1.8), c'est par exemple le cas pour les précipitations qui ne peuvent être négatives.

### CDFt avec interpolation linéaire Michelangeli et al. (2009)

Pour répondre à la question du support Michelangeli et al. (2009) propose une approche d'interpolation des points. En appelant  $m_X$  et  $M_X$  le minimum et le maximum des valeurs de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , on suppose que l'on corrige bien les points dans l'ensemble  $[m_X, M_X]$  à partir de la méthode quantile-quantile. En appelant  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{G}_n$  les fonctions de répartitions empiriques avec interpolation des points. C'est à dire en supposant les points  $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ , soit  $x \in [m_X, M_X]$  tel qu'il y ait  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  vérifiant  $X_i \leq x < X_{i+1}$ , on définit  $t$  tel que  $x = tX_i + (1-t)X_{i+1}$ , on pose alors

$$\mathcal{F}_n(x) = t \frac{i}{n} + (1-t) \frac{i+1}{n} = \frac{i+1-t}{n}.$$

La fonction  $G = \mathcal{G}_n^{-1} \circ \mathcal{F}_n$  est alors définie sur  $[m_X, M_X]$ . Si  $x \notin [m_X, M_X]$  alors on cherche à extrapolier le résultat. La méthode proposée est de récupérer les fonctions tangentes à la courbe  $G$  en  $m_x$  et  $M_X$  appelées  $T_m$  et  $T_M$  et de prolonger  $G$  sur  $\mathbb{R}$ . On a alors,

$$G(x) = \begin{cases} \mathcal{G}_n^{-1} \circ \mathcal{F}_n(x) & \text{si } x \in [m_X, M_X] \\ T_m(x) & \text{si } x < m_X \\ T_M(X) & \text{si } x > M_X. \end{cases} \quad (1.9)$$

**Note 1.** Remarquons que l'efficacité des transformations que nous avons décrites repose en partie sur la stationnarité des lois suivies par les variables aléatoires aléatoires au cours du temps. Les questions de stationnarité ont été abordées dans Maraun (2012), Christensen et al. (2008) ainsi que Nahar et al. (2017). Il est notamment évident que la loi suivie par la température en été n'est pas la même que celle en hiver, il en est de même pour toutes les autres variables climatiques.

Finalement, une des limites de l'algorithme de CDFT est dans le cas où plusieurs réalisations de  $X'$  sont égales, elle seront renvoyées sur le même points. C'est vraiment problématique dans le cas où  $X'$  possède plusieurs réalisations égales et que  $\mathcal{F}_Y$  est une fonction continue (sans Dirac).

**Exemple 1.** Soit  $X$  une variable aléatoire qui possède comme probabilité

$$P(X = 0) = \frac{1}{2} \text{ et } P\left(\frac{1}{2} \leq a \leq X \leq b \leq 1\right) = b - a.$$

et  $Y$  une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour transformer  $X$  en  $Y$  on aimeraient que pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $X_i = 0$ ,  $G(X_i)$  suivent une loi uniforme sur  $[0, 1/2]$  ce qui n'est pas possible avec les transformations que nous avons considérées.

L'algorithme CDFT-SSR (voir Vrac et al. (2012)) répond à cette problématique. Une autre limite que l'on peut voir dans ces méthodes c'est qu'elles ne considèrent qu'une variable à la fois. C'est en partie à ce problème que répond le transport optimal (voir Annexe 4.2).

### 1.3 Analyse des résultats obtenus par downscaling

L'analyse de nos résultats se fera par validation croisée, nous allons apprendre sur 50% de nos données et faire nos projections sur les 50% restants. La question à laquelle nous allons répondre dans cette partie est la suivante:

Comment évaluer la qualité de nos projections alors qu'il est aujourd'hui impossible de prédire les réalisations précises du climat sur plusieurs années?

Contrairement à la manière habituelle de faire, consistant à estimer une distance entre chaque point projeté (souvent RMSE), en climatologie nous cherchons à comprendre la tendance la nature, c'est à dire la loi de la variable climatique que l'on étudie. En effet, le paradigme d'évaluation en prévisions climatiques sur plusieurs années n'a pas l'ambition de prédire ponctuellement chaque prévision, mais il a pour objectif de décrire la structure générale. On s'intéresse alors à une autre informations, on travaille sur les lois de répartitions. Il faut alors réfléchir à des normes ou des distance pour évaluer la qualité de nos projections.

Dans notre cas nous faisons des tests non-paramétriques, c'est à dire que l'on ignore tout des lois que nous comparons. Différentes méthodes pour tester l'égalité de lois sont connues, nous n'en développerons que deux. Le mémoire Éthier (2011) donne une présentations de principaux tests statistiques permettant d'évaluer si oui ou non à partir des réalisations  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  de deux lois inconnues sont les mêmes.

Nous posons habituellement en statistiques deux hypothèses:

$$\mathcal{H}_0 : \mathcal{F}_X = \mathcal{F}_Y \text{ et } \mathcal{H}_1 : \mathcal{F}_X \neq \mathcal{F}_Y,$$

où les égalités sur les lois sont en norme  $L^p$ . On suppose  $\mathcal{H}_0$  et on définit une statistique sur  $\|\mathcal{F}_X - \mathcal{F}_Y\|_{L^p(\mathbb{R})}$  permettant à partir de nos observations d'accepter ou de rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Les tests de Kolmogorov-Smirnov et Cramér-von Mises utilisent à-peu-près cette idée.

### 1.3.1 Distance de Kolmogorov-Smirnov

Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov Büning (2002) est l'un des plus utilisé pour tester l'égalité de deux lois de probabilités. Dans le contexte de l'égalité de lois de probabilité, la statistique de test est

$$K_{n,m} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_n\|_\infty.$$

La suite de variables aléatoires  $K_{n,m}$  converge vers une variable aléatoire  $K$  dont la fonction de survie est donnée par:

$$Q(x) = P(K > x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2(jx)^2) \quad (1.10)$$

On peut alors l'approximer avec les premiers termes de la série pour construire le test statistique. La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans le livre Fisz (1963)(chap 12.5). Nous voyons cependant que ce test est sensible aux données aberrantes, nous privilégierons alors le test de **Cramér-von Mises** Büning (2002) (section 1.3.2).

### 1.3.2 Distance de Cramér-von Mises

On considère ici les deux fonctions de répartitions empiriques  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{G}_m$  continues des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Nous voulons tester les hypothèses

$$\mathcal{H}_0 : \mathcal{F}_n = \mathcal{G}_m \text{ et } \mathcal{H}_1 : \mathcal{F}_n \neq \mathcal{G}_m.$$

Dans les tests proposés les statistiques sont construites à partir de deux échantillons indépendants des tests dans les cas où les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes peuvent être trouvés dans Éthier (2011). On définit aussi la fonction de répartition empirique  $\mathcal{F}_n$ .

Nous avons donc  $n$  réalisations de  $X$  et  $m$  réalisations de  $Y$  de lois de répartitions  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . La statistique du test est définie par

$$C_{n,m} = \frac{nm}{n+m} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_n(x) - \mathcal{G}_m(x)]^2 d\mathcal{H}_{m,n}(x), \quad (1.11)$$

avec

$$\mathcal{H}_{n,m} = \frac{n}{n+m} \mathcal{F}_n + \frac{m}{n+m} \mathcal{G}_m. \quad (1.12)$$

$\mathcal{H}_{n,m}$  est alors la fonction de répartition empirique d'une variable aléatoire  $Z$  construite à partir des  $n+m$  réalisations indépendantes  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ . On peut simplement réécrire la valeur  $C_{n,m}$

$$C_{n,m} = \frac{mn}{(m+n)^2} \sum_{i=1}^{m+n} (\mathcal{F}_n(Z_i) - \mathcal{G}_m(Z_i))^2. \quad (1.13)$$

**Lemme 1.** *On peut simplifier cette formule en supposant que les  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  et  $(Y_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  sont triés on a:*

$$C_{n,m} = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{4nm - 1}{6(m+n)}. \quad (1.14)$$

où  $R_{X_i}$  est le rang de  $X_i$  dans  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$  autrement dit

$$R_{Z_i} = \text{Card}(\{z \in Z, z \leq Z_i\}).$$

Ce lemme permet de simplifier algorithmiquement le calcul de cette intégrale.

**Note 2.** *La démonstration de cette formule se trouve dans l'indexe 1 et la formulation de cette égalité diffère de celle contenue dans le mémoire Éthier (2011)(sec 2.3.2) qui contient une erreur.*

Cette formulation a le bon goût de nous indiquer que la statistique ne dépend pas de la loi. On peut alors calculer simplement sa statistique sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  pour la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et ainsi retrouver les quantiles présentés dans l'article de Büning (2002). Nous voyons que l'idée du test est aussi de pondérer la différence des fonctions de répartition empiriques par les observations (l'intégration selon  $\mathcal{H}_{m,n}$ ). Ainsi, si le test de Kolmogorov-Smirnov est sensible aux outliers, celui-ci l'est beaucoup moins lorsque les échantillons sont suffisamment grands. Malheureusement, dans la pratique des projections des variables climatiques, les résultats renvoient très souvent que les lois ne sont pas les mêmes. Nous considérerons tout de même cette distance, qui nous l'avons vu, possède une interprétation statistique.

## 2 Présentation des modèles de climat et hydrologiques

Cette section se concentre sur la partie physique du stage, nous développerons les concepts clés à la compréhension des modèles hydrologiques donnerons un aperçu du fonctionnement des modèles climatiques en générale.

Nous commencerons par contextualiser l'étude hydrologique dans les modèles de climat en présentant brièvement les interactions entre ces différents modèles. Nous introduirons ensuite les principaux phénomènes physiques intervenant dans l'étude hydrologique d'un bassin. Nous irons ensuite plus dans les détails des équations de Navier-Stokes et développerons la construction des principales équations de la mécanique des fluides en milieu poreux. Et pour finir nous présenterons deux modèles continentaux de simulation hydrologique, HydrogéoSphère et Orchidée, tous deux très différents dans leur approche. Nous essaierons à travers la présentation de ces deux modèles de faire comprendre au lecteur les enjeux de l'upscaling dans modélisation hydrologique.

Voici, figure 2, une présentation des principales interactions dans le modèle de climat IPSL.

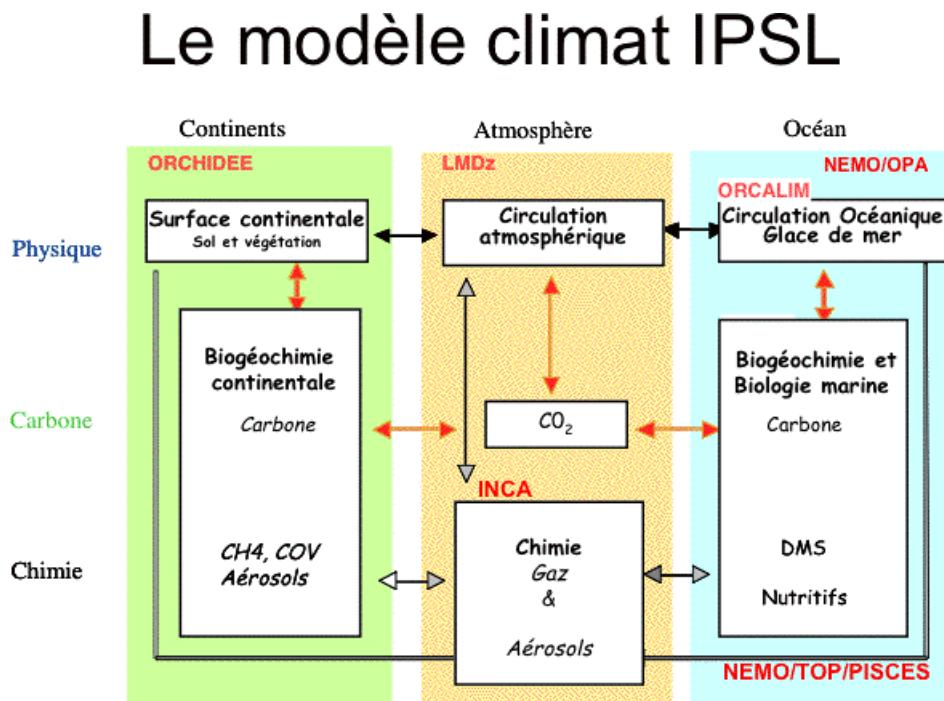


Figure 2: Présentation sommaire des différentes interactions dans le modèle de climat IPSL

Comme nous avons dit dans l'introduction, les modèles de climats peuvent-être séparés en trois sous modèles, les modèles océanique, atmosphériques et continentaux. Dans ce stage, nous nous sommes concentrés sur les modélisations continentales, à savoir, sur les interactions entre le modèle atmosphérique et celui de surface continentale. Nous avons aussi étudié les mécanismes d'écoulement de l'eau dans les sols et les rivières.

## 2.1 Généralités sur les interactions atmosphère - surface continentale - sol

Nous allons présenter ici les principales interactions entre la surface continentale et l'atmosphère. Cette étude a seulement pour objectif de donner un aperçu des différentes problématiques rencontrées dans l'élaboration des modèles continentaux. En effet, nous n'avons pas eu à nous soucier de toutes ces interactions dans l'étude que nous avons menée (section 3) puisque les deux variables que nous avons utilisées étaient la précipitation et l'évapotranspiration potentielle: la première indiquant la quantité d'eau entrant dans le sol et la seconde la quantité d'eau retournant vers l'atmosphère par la transpiration du couvert végétal et l'évaporation de l'eau du sol. Le plan de cette sous-section s'inspire très largement de la thèse Maquin (2016)[chap 1] qui fournit d'avantage de détails et traite de la modélisation de l'ensemble des interactions dont nous allons parler.

### 2.1.1 Les précipitations

Ici, nous allons majoritairement utiliser les explications de la page internet cours EPFL sur les précipitations pouvant être trouvé [ici](#), nous avons reformulé certaines parties et enlevé des détails mais la majorité de ce qui est écrit dans cette section provient de cette page internet.

Sont dénommées précipitations, toutes les eaux tombant sur la surface de la terre, tant sous forme liquide (bruine, pluie, avverse) que sous forme solide (neige, grésil, grêle) et les précipitations déposées ou occultes (rosée, gelée blanche, givre,...). Elles sont provoquées par un changement de température ou de pression. Les précipitations constituent l'unique "entrée" des principaux systèmes hydrologiques continentaux que sont les bassins versants.

La formation des précipitations nécessite la condensation de la vapeur d'eau atmosphérique. La saturation est une condition essentielle à tout déclenchement de la condensation. Divers processus thermodynamiques sont susceptibles de réaliser la saturation des particules atmosphériques initialement non saturées et provoquer leur condensation:

- Saturation et condensation par refroidissement isobare (pression constante),
- saturation et condensation par détente adiabatique (changement de pression sans échange de chaleur),
- saturation et condensation par apport de vapeur d'eau,
- saturation par mélange et par turbulence.

La saturation n'est cependant pas une condition suffisante à la condensation, cette dernière requiert également la présence de noyaux de condensation (impuretés en suspension dans l'atmosphère d'origines variées). Selon ces différents type de condensations les nuages créés et ainsi les précipitations varient.

### Types de précipitations

- **Les précipitations convectives.** Elles résultent d'une ascension rapide des masses d'air dans l'atmosphère. Elles sont associées aux cumulus et cumulo-nimbus, à développement vertical important. Les précipitations résultantes de ce processus sont en général orageuses, de courte durée (moins d'une heure), de forte intensité et de faible extension spatiale.

- **Les précipitations orographiques.** Comme son nom l'indique (du grec oros, montagne), ce type de précipitations résulte de la rencontre entre une masse d'air chaude et humide et une barrière topographique particulière. Par conséquent, ce type de précipitations n'est pas "spatialement mobile" et se produit souvent au niveau des massifs montagneux. Les caractéristiques des précipitations orographiques dépendent de l'altitude, de la pente et de son orientation, mais aussi de la distance séparant l'origine de la masse d'air chaud du lieu de soulèvement. En général, elles présentent une intensité et une fréquence assez régulières.
- **Les précipitations frontales ou de type cyclonique.** Elles sont associées aux surfaces de contact entre deux masses d'air de température, de gradient thermique vertical, d'humidité et de vitesse de déplacement différents, que l'on nomme "fronts". Les fronts froids (une masse d'air froide pénètre dans une région chaude) créent des précipitations brèves, peu étendues et intenses. Du fait d'une faible pente du front, les fronts chauds (une masse d'air chaude pénètre dans une région occupée par une masse d'air plus froide) génèrent des précipitations longues, étendues, mais peu intenses.

### 2.1.2 Les écoulements

Les processus hydrologiques sont classiquement étudiés à l'échelle du bassin versant<sup>3</sup>. En hydrologie, le bassin versant est une unité géographique définie par les limites topographiques que sont les lignes de crête. L'ensemble des écoulements converge vers les dépressions, formant ainsi un réseau hydrographique qui se dirige vers le point bas du bassin versant, l'exutoire. la figure 3 définit un bassin versant.



**Figure 3:** Bassin versant (Source :<http://rques-gries.ca/>).

À l'échelle du bassin versant, on distingue deux types d'écoulements: les écoulements de subsurface, les écoulements de surface. Les premiers sont des écoulements ayant lieu dans les pores du sols dans la région non saturée en eau (voir def 8) et les seconds en surface.

---

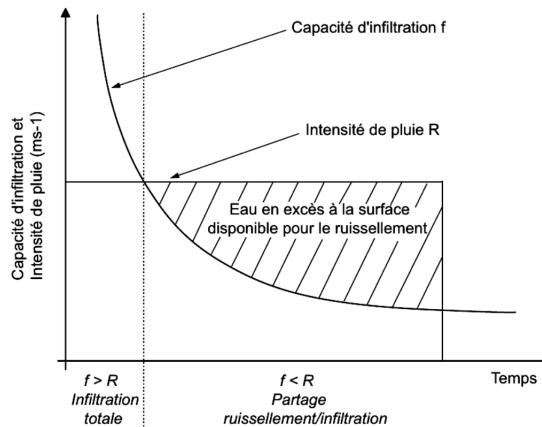
<sup>3</sup>Un bassin versant comme il est défini en hydrologie possède son équivalent en mathématiques, soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $S : E \rightarrow E$  un endomorphisme sur  $E$ . On définit le bassin d'attraction d'un point  $a$  qu'on appelle  $B(a)$  l'ensemble des points  $x$  dans  $E$  tels que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (S^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$ . En considérant qu'il existe une fonction  $S$  définissant la trajectoire d'une goutte d'eau déposée au point  $x$  les deux définitions ont la même signification en considérant le plus grand bassin d'attraction contenant un point  $x$  choisi.

## Les écoulements de subsurface:

La notion d'écoulement de subsurface se rapporte à l'écoulement de l'eau dans les pores du sol. Il dépend de plusieurs paramètres comme les caractéristiques du sol (sa porosité, sa perméabilité) c'est à dire la capacité qu'a l'eau à s'infiltrer dans le sol ainsi que la saturation en eau du sol, la topographie et le climat (précipitation, évaporation, transpiration). Ces écoulements sont traités par les équations de la mécanique des fluides (voir section 2.11), pour plus de détails se référer à Maquin (2016) et De Marsily (1986).

## Les écoulements de surface:

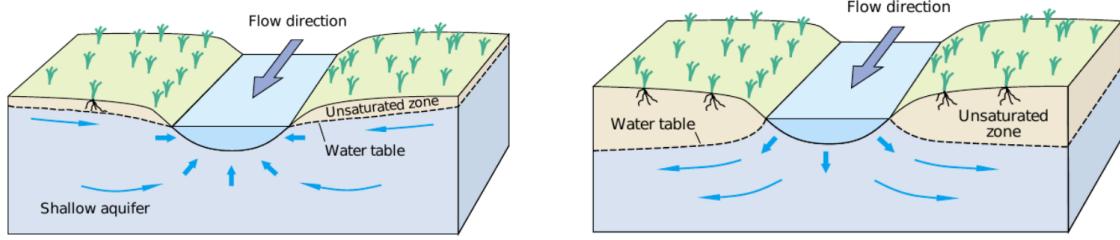
Les écoulements de surface, aussi qualifiés de ruissellement, apparaissent lorsque le sol est saturé en surface et que le débit d'eau sur le sol est supérieur à sa capacité d'infiltration. Deux phénomènes distincts sont responsables du ruissellement, lorsque le sol est saturé, l'eau ne peut plus s'y infiltrer (voir Cappus (1960)). Cette condition de saturation à la surface du sol peut être la conséquence d'une nappe affleurant la surface, la zone satisfaisant cette propriété est appelée zone de suintement. Cela arrive aussi naturellement lors d'épisode pluvieux pour les nappes peu profondes. Le ruissellement peut aussi être causé par de fortes précipitations, ainsi le débit surfacique peut devenir supérieur à la quantité d'infiltration et ainsi créer un ruissellement. La quantité d'infiltration décroît exponentiellement lors d'événements pluvieux (voir Horton (1933) et figure 4).



**Figure 4:** Estimation du ruissellement en fonction du temps, modèle de Horton (Maquin (2016))

## Les interactions nappe rivière:

Selon la position de la rivière par rapport à la nappe soit la nappe nourrit la rivière, soit c'est l'inverse, la figure 5 présente ce mécanisme.



(a) Cas où la nappe se décharge dans la rivière.

(b) Cas où la rivière alimente la nappe.

**Figure 5:** Différente interactions entre la nappe et la rivière (thèse Maquin (2016))

### 2.1.3 Transferts d'eau entre le sol et l'atmosphère

La végétation constitue le lien entre l'atmosphère et le sol. Les végétaux sont les principales voies de transfert entre le sol et l'atmosphère, via les racines et la canopée. Il y a aussi des interactions directes entre la couche de surface du sol et l'atmosphère. Les trois principaux processus décrits sont: l'évaporation du sol, la transpiration des végétaux ainsi que l'évaporation de l'eau interceptée par la canopée. L'influence de la végétation a un très gros impact sur les modélisations hydrologiques, puisqu'elle influencent directement les flux d'eau dans le sol.

#### la transpiration:

La “transpiration” des plantes consiste en une libération de vapeur d'eau par les plantes dans l'atmosphère. Ce phénomène constitue une réponse passive à l'environnement atmosphérique dû à l'existence d'un gradient de pression positif de l'atmosphère à la canopée, on parle aussi de demande atmosphérique. L'évaporation de l'eau par les plantes se produit dans les stomates des feuilles, de petites ouvertures où s'effectuent les échanges gazeux entre l'intérieur et l'extérieur de la plante. L'ouverture des stomates peut varier, régulant ainsi le flux de transpiration. Cette variation dans l'ouverture et la fermeture des stomates dépend de différents paramètres comme l'état hydrique du végétal ou les conditions climatiques.

La transpiration amène l'eau du sol par les racines puis les stomates vers l'atmosphère. La quantité d'eau transpirée dépend aussi du volume du sol couvert par les racines ainsi que de la teneur en eau du sol. Il arrive souvent en été, dans les régions arides, que la densité d'eau dans le sol ne soit pas suffisante pour qu'il y ait transpiration.

#### Évaporation:

Sur les surfaces de sol non recouvertes de végétation (sol nu), l'eau présente dans le sol, à proximité de la surface, peut s'évaporer. Ce phénomène apparaît en présence d'un gradient de pression de vapeur d'eau entre le sol et l'atmosphère et d'un apport d'énergie. L'évaporation effective dépend de l'état hydrique de la surface du sol, l'énergie pour extraire l'eau du sol augmentant à mesure que le sol s'assèche et des propriétés conductrices du sol (voir Hillel (2003)).

### Pertes par interception:

Lors d'un épisode pluvieux, une partie de l'eau incidente est interceptée par le feuillage. Il s'agit du phénomène dit d'interception. Cette eau, présente sur la canopée, peut ensuite s'évaporer directement. On désigne ce processus d'évaporation sur la canopée comme les pertes par interception. L'importance de ce flux d'eau dépend de l'ampleur du feuillage et de la capacité de stockage d'eau de la canopée, c'est-à-dire de l'épaisseur maximale de la lame d'eau par unité de surface de feuillage.

### L'évapotranspiration potentielle:

On désigne par "évapotranspiration potentielle" la quantité d'eau maximale que l'atmosphère peut extraire via les trois processus décrits précédemment. Elle correspond ainsi à la demande atmosphérique évoquée auparavant. Elle correspond à la quantité d'eau fournie par un sol saturé en eau. Les articles Kristensen and Jensen (1975), Zhifang et al. (2010) donnent des méthodes pour passer de l'évapotranspiration potentielle à l'évapotranspiration réelle, cependant il semble que ce sujet soit encore controversé dans la communauté des hydrologues.

## 2.2 Les concepts hydrologiques: modélisation de l'écoulement dans le sol

Nous allons ici introduire les principales notions propres à l'étude hydrologique des sols. Plusieurs caractéristiques définissent un sol, mais avant d'étudier plus en détail ce qui définit un sol, il est important de comprendre que l'étude hydrologique d'un sol est simplement un bilan d'eau dans celui-ci. De façon plus générale, la grandeur qui va nous intéresser dans notre étude ne sera pas la hauteur de nappe, mais les débits de l'eau sortante. Il faut alors commencer par déterminer ce qui rentre et ce qui sort. L'estimation de ces quantités est l'objet d'études du downscaling qui cherche à prévoir la précipitation et l'évapotranspiration potentielle.

### 2.2.1 Quelques définitions pour l'étude en milieu poreux

On comprends intuitivement que la nature du sol aura un impact dans l'écoulement de l'eau. Par exemple un sol très sableux permet un écoulement beaucoup plus rapide qu'un sol argileux. Ceci est lié au volume de vides relatifs. Nous introduirons ici les concepts principaux de l'étude hydrologique en milieu poreux.

**Définition 7.** *On appelle porosité totale  $\omega$  la valeur définie par*

$$\omega = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total de la roche}}. \quad (2.1)$$

*On appelle aussi indice des vides e la valeur définie par*

$$e = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume du solide plein}}. \quad (2.2)$$

*On peut passer d'une formule à l'autre par la relation*

$$e\omega = e - \omega.$$

L'on peut trouver des méthodes de mesure de la porosité d'un sol dans le très bon cours de De Marsily (1986). On dit aussi que le sol n'est pas saturé lorsque l'eau n'a pas pris tout l'espace disponible, on parle alors de saturation volumique. Ce concept est fondamental dans

la compréhension de la dynamique de l'écoulement, par exemple en dessous d'une certaine saturation les forces gravitationnelle seront négligeables par rapport aux forces de capillarités, il n'y a pas d'écoulement.

**Définition 8.** On parle de **saturation volumique**  $\theta$ , la saturation définie par le rapport

$$\theta = \frac{\text{Volume d'eau contenu}}{\text{Volume total}}, \quad (2.3)$$

on a  $0 \leq \theta \leq \omega$ . Et la **saturation volumique**  $s$

$$s = \frac{\text{Volume d'eau contenu}}{\text{Volume total des pores}}. \quad (2.4)$$

En fonction de la saturation volumique les échelles de temps et les forces misent en action ne sont pas les mêmes.

### 2.2.2 Les équations pour modéliser l'écoulement

L'objectif de cette section sera de montrer quelques équations fondamentales que manipulent les hydrologues pour modéliser les écoulements en milieu poreux. Nous allons par la suite montrer la démarche physique permettant d'obtenir ces équations. On commence par rappeler les équations de la dynamique des fluides. L'équation de conservation de la matière:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $\vec{u}$  le vecteur vitesse du fluide. On écrit maintenant l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - (\zeta + \frac{\mu}{3}) \frac{\partial}{\partial x^i} (\operatorname{div} \vec{u}) - \mu \nabla^2 u^i = \rho(F^i - \frac{du^i}{dt}). \quad (2.6)$$

$\zeta$  coefficient de viscosité du volume, (très souvent négligeable devant  $\mu$ ) [ $ML^{-1}T^{-1}$ ],

$\mu$  coefficient de viscosité dynamique, [ $ML^{-1}T^{-1}$ ]

$\nabla^2$  le laplacien,

$F^i$  composante des forces à distance par unité de masse,

$i$  un vecteur unitaire de l'espace 3D.

En milieu poreux les équations de Navier-Stokes deviennent difficilement applicables car la conductivité hydrique du milieu dans lequel s'écoule le fluide dépend elle-même de la vitesse du fluide. On peut en effet imaginer un agencement des pores pour faciliter l'écoulement. On va alors simplifier l'équation de Navier-Stokes en posant certaines hypothèses propres au milieu dans lequel on les étudie.

#### Hypothèses simplificatrices:

En milieu poreux, on peut émettre de nombreuses hypothèses permettant de simplifier l'équation de Navier Stokes, on peut supposer les écoulements permanents,

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = 0.$$

On suppose aussi que le fluide est incompressible ( $\rho$  constant) alors

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

et finalement,

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Dans ces hypothèses l'équation de Navier-Stokes devient:

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - \mu \nabla^2 u^i - \rho F^i = 0. \quad (2.7)$$

Plusieurs méthodes numériques permettent de trouver des solutions à ce problèmes notamment la méthode de Galerkine ou des méthodes de différences finies voir Allaire (2005) (chap 2, chap 6).

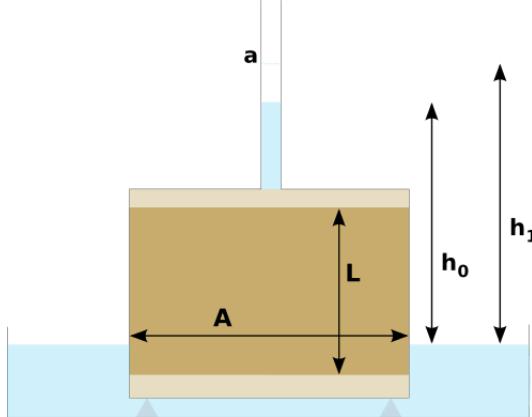
Remarquons que ces équations ne prennent pas en compte la porosité du milieu, l'équation (2.5) peut être modifiée en prenant en compte  $\omega$  le coefficient de porosité et un terme puits  $q$  lié à la matière créant des interstices sans fluide (le coefficient est compté négativement). Alors l'équation de conservation devient en milieu poreux:

$$\operatorname{div}(\vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t}(\theta) + q = 0. \quad (2.8)$$

Remarquons que l'on considère la porosité  $w$  comme continue, nous étudions des éléments de longueurs  $dx$  suffisamment petits pour que les équations (2.7) et (2.8) soient considérées vraies et suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer une porosité moyenne dans un élément de volume.

### 2.2.3 Les équations des écoulements en milieu poreux

Henry Darcy, alors qu'il étudiait les fontaines de la ville de Dijon (1856), établit expérimentalement que le débit d'eau s'écoulant à travers un massif de sable peut se calculer. Il établit une expérience représentée en figure 6: consistant à toujours alimenter un massif de sable par un débit constant  $a$  et à mesurer la quantité d'eau passant à travers le massif.



**Figure 6:** Schéma de l'équipement utilisé par Darcy pour obtenir l'équation (2.9)

Il en déduit une formule expérimentale

$$Q = KA \frac{\Delta H}{L}. \quad (2.9)$$

$Q$  est le débit volumique s'écoulant à travers  $A$  est la section du massif sableux  
 $\Delta H$  la perte de charge<sup>4</sup> de l'eau entre le sommet et la base du massif sableux  
 $K$  est une constante dépendant du milieu poreux, baptisée coefficient de perméabilité  
 $L$  est l'épaisseur du massif sableux.

On appelle  $U = Q/A$  la **vitesse de filtration** d'un sol. À partir des équations de Navier-Stokes on sait que les causes du déplacement du fluide sont dues au gradient de pression ainsi qu'aux forces extérieures. La loi de Darcy s'exprime alors sous la forme générale

$$\vec{U} = \frac{k}{\mu} (\vec{\nabla} p + \rho g \vec{\nabla} z). \quad (2.10)$$

On peut réécrire cette équation

$$\vec{U} = -K(\vec{\nabla} h + \vec{\nabla} z),$$

avec  $K = k(\mu \rho g)^{-1}$  [LT<sup>-1</sup>] et  $h = p(\rho g)^{-1}$  [L]. On a donc

$$H = h + z,$$

on peut alors injecter l'équation de Darcy (2.10) dans l'équation de conservation de la masse (2.8) pour finalement obtenir

$$-\vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} H) + \frac{\partial \theta}{\partial t} + q = 0. \quad (2.11)$$

On définit parfois des lois de porosité liées à la grandeur  $f(H) = \theta$  la quantité d'eau est liée à la cote piézométrique<sup>5</sup> et l'on pose

$$S_s(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$S_s$  est appelé le coefficient d'emmagasinement. En supposant que  $K$  est une fonction de *theta* (nous avons expliqué que l'écoulement dépendait du rapport entre les forces de capillarité et celles gravitationnelles), ainsi en injectant l'équation (2.12) dans (2.11) on obtient **l'équation de Richard généralisée**

$$S_s(H) \frac{\partial H}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (K(\theta) \vec{\nabla} H) + q = 0. \quad (2.13)$$

Ceux sont avec ces équations que les hydrologues travaillent. Nous pouvons remarquer que cette simplification des équations peut être considérée comme le début d'un processus d'upsampling. On cherche à simplifier le modèle pour qu'il soit encore vrai à grande échelle. Notons que les équations de Darcy ont été justifiées dans les travaux de Matheron et Marle à partir de l'intégration dans un milieu réel des équations de Navier.

---

<sup>4</sup>En hydraulique la charge est une grandeur homogène à une longueur, on l'exprime parfois sous la forme d'une pression: *cste*  $\times \rho g$ . Elle est proportionnelle à l'énergie mécanique d'une molécule de fluide, on écrit

$$H = \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g}.$$

Remarquons ici que la vitesse est considérée nulle.

<sup>5</sup>La cote piézométrique est l'altitude ou la profondeur (par rapport à la surface du sol) de la limite entre la nappe phréatique et la zone non saturée. Ce niveau est mesuré à l'aide d'un piézomètre.

## 2.3 La problématique de l'upscaling dans l'étude des modèles hydrologiques

Nous allons présenter dans cette partie deux modèles hydrologiques, le premier HydroGéoSphère, est celui que nous avons utilisé pour réaliser les modélisations hydrologiques sur le bassin du Little Washita. Le second, Orchidée est le modèle de surface continentale utilisé par l'IPSL.

### 2.3.1 Le modèle d'hydrogéosphère

HydroGéoSphère (HGS) est un code de calcul hydrologique tri-dimensionnel, intégré et à base physique. Il a été développé par R. Therrien puis conjointement à l'Université de Laval, à Québec et à l'Université de Waterloo. Ce code de calcul permet de simuler les écoulements de surface et de subsurface, ainsi que le transport de solutés et d'énergie de manière intégrée, c'est-à-dire que les équations gouvernant ces processus sont résolues simultanément. Le code est parallélisé permettant une efficacité numérique élevée et donc des applications à des échelles spatio-temporelles importantes (échelle d'un bassin).

À chaque pas de temps le modèle résout les équations de transport d'eau de surface et de subsurface ainsi que celles conservation de la masse en même temps. D'après la figure 7, la conservation des quantités d'eau en surface s'écrit

$$P = (Q_{S2} - Q_{S1}) - Q_{GS} + I + ET_S + Q_S^W + \Delta S_S / \Delta t, \quad (2.14)$$

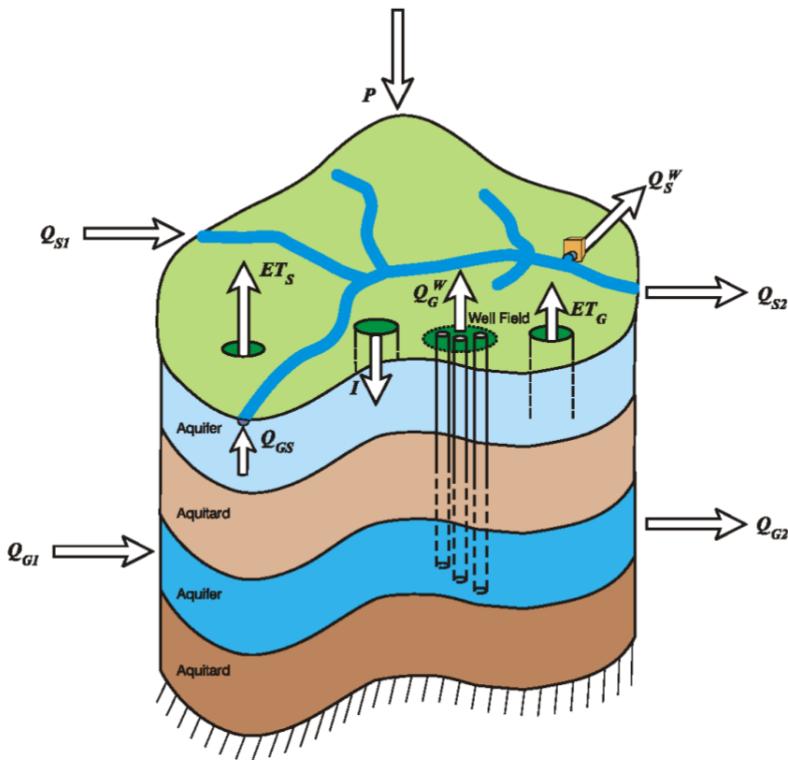
et les équations de subsurface s'écrivent

$$I = (Q_{G2} - Q_{G1}) + Q_{GS} + ET_G + Q_G^W + \Delta S_G / \Delta t. \quad (2.15)$$

On a finalement,

$$P = (Q_{S2} - Q_{S1}) + (Q_{G2} - Q_{G1}) + (ET_S + ET_G) + (Q_S^W + Q_G^W) + (\Delta S_S + \Delta S_G) / \Delta t \quad (2.16)$$

Avec  $Q_{S1}$  et  $Q_{S2}$  les flux entrant et sortant,  $Q_{GS}$  le flux d'interaction entre la surface et la subsurface,  $ET_S$  l'évapotranspiration de surface.  $Q_S^W$  et  $Q_G^W$  les termes puits définis précédemment (2.8).  $\Delta S_S$  et  $\Delta S_G$  les différences de stockage d'eau en surface et en subsurface sur le temps  $\Delta t$ .



**Figure 7:** Schéma des cycles hydrologiques pris en compte par hydrogéosphère

Hydrogésphère résout rigoureusement les équations de la physique cités dans la partie 2.2.2 et donne des résultats très précis. Cependant, la capacité informatique actuelle ne permet pas d'implémenter HydroGéoSphère dans un modèle de climat. Il faut donc créer des modèles plus simples et plus grossiers pour résoudre le problème de la circulation de l'eau à l'échelle de la terre. C'est le principe du modèle de surface continentale Orchidée (section 2.3.2).

### 2.3.2 Le modèle d'Orchidée

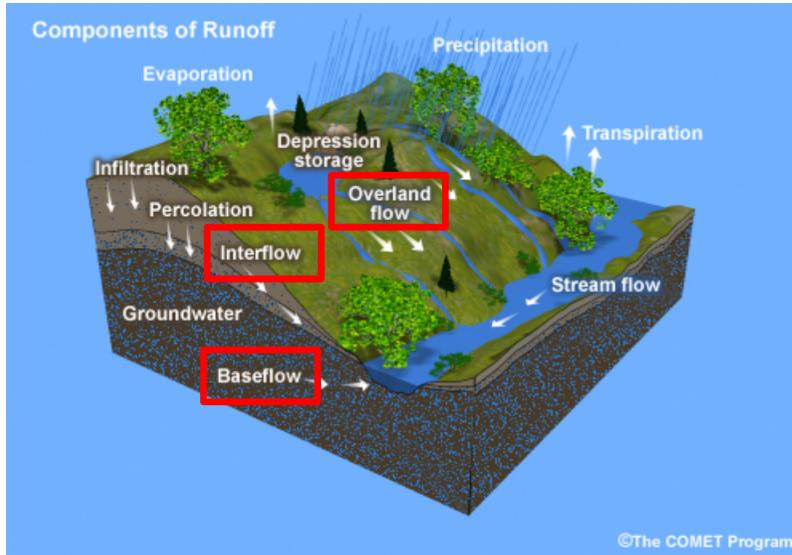
Orchidée est un modèle continental dans le continuum sol-végétation-atmosphère. Ses résultats sont intégrés comme condition à la limite basse du modèle général de circulation atmosphérique du Laboratoire de Météorologie Dynamique. Orchidée simule en particulier les flux d'énergie, d'eau et de carbone entre les surfaces continentales et l'atmosphère. Il est composé de trois modules qui représentent des processus différents et agissant à des échelles de temps différentes: SECHIBA (Schématisation des Échanges Hydriques à l'Interface entre la Biosphère et Atmosphère), STOMATE, qui modélise principalement la phénologie végétale<sup>6</sup>. Dans le cadre de ce stage, seul le module SECHIBA a été étudié.

La description que nous allons en donner ici est très sommaire et rassemble ce que nous

---

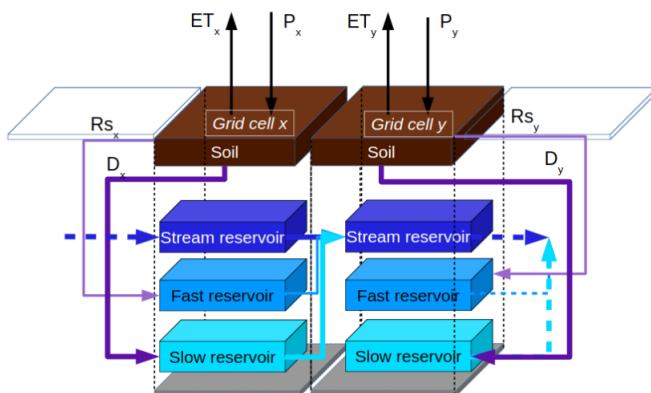
<sup>6</sup>La phénologie végétale étudie les phases de développement saisonnier des plantes liées au cycle climatique annuel et les échanges de carbone dans la biosphère.

en avons compris au cours de discussions avec Emmanuel Mouche et durant la lecture de la présentation Guimberteau (2016). Le modèle d'Orchidée est un modèle de réservoir, c'est à dire qu'on discrétise l'espace en plusieurs colonnes pouvant contenir de l'eau. Nous avons vu qu'il y avait plusieurs types d'écoulements qui intervenaient à différentes échelles de temps et à différents endroits dans le sol. Orchidée considère alors trois types de transfert d'eau dans trois types de réservoirs. Les écoulements considérés sont: les écoulements de surface (et l'eau de la rivière), de subsurface et finalement les échanges entre la rivière et la nappe.



**Figure 8:** Schéma des cycles hydrologiques pris en compte par Orchidée (présentation Guimberteau (2017))

Orchidée discrétise donc le sol par colonnes. Dans chacune des colonnes considérées, il y a trois réservoirs d'eau. Un réservoir pour les écoulements de surface, un pour les écoulements de subsurface et un pour les interactions nappe-rivière (décrit dans la section 2.1.2). La figure 9 présente les interactions entre deux colonnes discrétisant l'espace.



**Figure 9:** Modèle de réservoir utilisé par Orchidée, image issue de Guimberteau (2017)

Remarquons que la couche du haut dont nous n'avons pas parlé est le sol sur lequel on considère les précipitations ( $P_X, P_Y$ ) et l'évapotranspiration ( $ET_X, ET_Y$ ). Le *stream réservoir* est le réservoir des écoulements de la rivière, le *fast réservoir* correspond au réservoir des écoulements de subsurfaces et le *slow réservoir* correspond à la nappe. Les écoulements verticaux ( $Rs_X, Rs_Y$ ) et ( $D_X, D_Y$ ) simulent les proportions des précipitations stockées dans chaque sous-colonne. Le calcul de  $Rs$  et  $D$  en fonction des précipitations est détaillé dans la présentation Guimberteau (2017). On peut remarquer que d'après ce schéma il n'y a pas d'écoulement de surface. De plus, les écoulements vont que d'un réservoir à l'autre, ce paradigme semble raisonnable dans la mesure où les écoulements vont toujours dans le sens de la plus forte pente et ne se dispersent pas en général (le Nil). Cependant, considérant la surface des colonnes ( $> 0.5^\circ$ ), il est fréquent que plusieurs bassins soient contenus dans la même colonne, alors ce choix devient discutable.

### 2.3.3 Questions ouvertes par la problématique de l'upscaling

Ayant vu deux modélisations d'une surface continentale, leur comparaison peut enrichir la réflexion de l'upscaling. Voici, ci-dessous, les questionnements que nous avons eu par rapport à la problématique de l'upscaling du modèle Orchidée:

- Quelles propriétés intéressantes voudrions nous pour les modèles upscalés?

Convergence du modèle upscalé vers le modèle réel lorsqu'on fait tendre la discréétisation vers 0?

Majoration de la différence des grandeurs simulées par le modèle downscalé et les grandeurs simulées par le modèle physique réel?

- Comment quantifier la différence d'un modèle upscalé à un modèle réel?
- Peut-on segmenter le modèle d'HydroGéoSphère en trois réservoirs et regarder les bilans sur les différents réservoirs, puis injecter ces résultats dans le modèle Orchidée?
- Faut-il commencer par résoudre les équations de la physique dans chaque réservoir?
- Pourquoi ne pas rajouter un paramètre au modèle d'Orchidée, celui de la pente, qui permettrait aussi de définir un écoulement dans plusieurs autres blocks.

L'étude de ces questions pourrait faire l'objet d'un stage entier.

Une étude qu'il aurait été intéressant de traiter pendant ce stage est la comparaison des résultats obtenus pour une modélisation hydrologique pour les deux modèles énoncés précédemment.

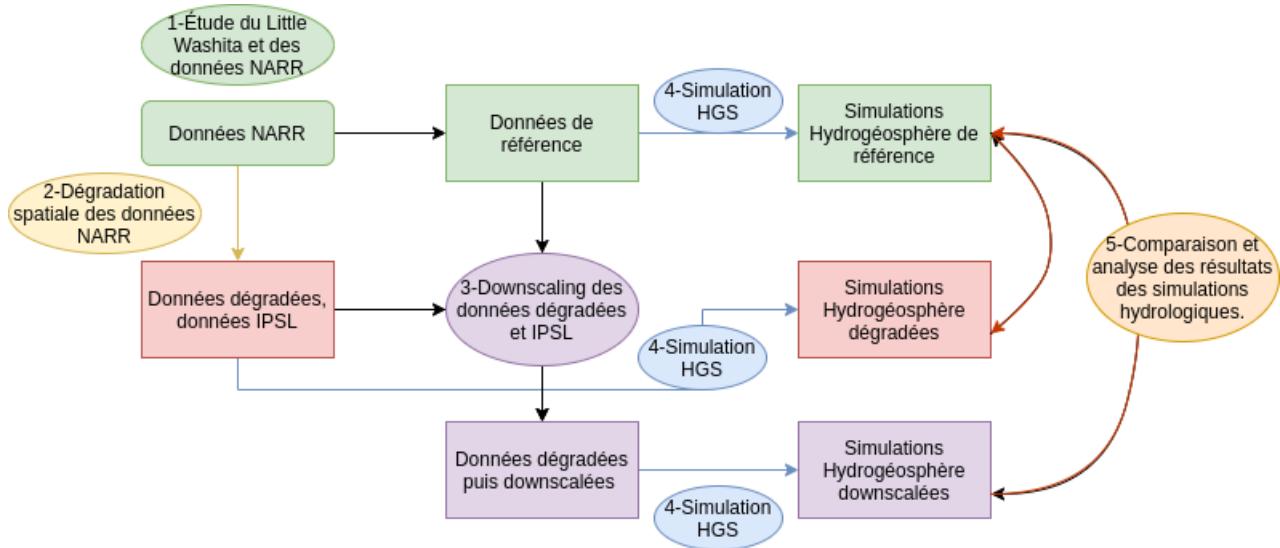
### 3 Projections Climatiques et modélisation hydrologique sur le bassin versant du Little Washita

Dans cette section nous présentons les résultats que nous avons obtenus par l'analyse des données NARR sur le bassin du Little Washita. L'organisation de notre travail est résumée dans la figure 10.

Commençons par rappeler les enjeux de ce stage, nous cherchons à étudier l'impact du changement d'échelle sur les prédictions climatiques et les modélisations Hydrologiques. Avant de commencer notre travail, nous avons fait l'étude de la région du Little Washita ainsi que des données NARR.

Nous avons ensuite considéré des dégradations sur plusieurs échelles des données de précipitation et d'évapotranspiration NARR (le processus de dégradation est expliqué dans la section 3.2). Les données de référence sont celles du point de maille NARR couvrant la majeur partie du bassin du Little Washita (voir figure 13). Nous avons ensuite considéré la moyenne des variables sur des ensembles de mailles entourant le point correspondant au Little Washita de surface croissante (voir section 3.2). Ces dégradations permettent d'avoir des données à plusieurs échelles.

Finalement, nous avons considéré le jeu de données du modèle de climat de l'IPSL qui possède une largeur de maille de  $200\text{km} \times 200\text{km}^2$ . Une fois récupérées les séries des réalisations des variables à ces différentes échelles nous avons appliqué la méthode CDFt pour les downscaler, donc transformer les données à grande échelle pour améliorer les projections sur la maille du Little Washita à petite échelle. Nous avons ensuite simulé le bassin du Little Washita avec les différentes données de précipitation et d'évapotranspiration. Enfin, nous avons étudié et comparé les résultats des débits renvoyés par les différentes simulations. Comme un schéma vaut mieux qu'un long discours, voici celui résumant notre travail sur les données NARR (figure 10).



**Figure 10:** Méthodologie d'étude du changement d'échelle

### 3.1 Étude du Little Washita et des données NARR

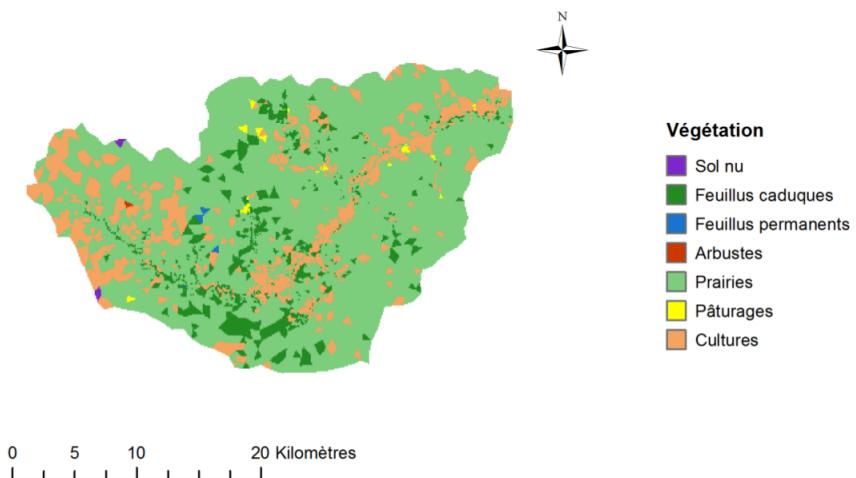
Nous allons donc étudier l'impact du changement d'échelle des données de précipitation et d'évapotranspiration (NARR, NARR dégradées et IPSL) sur la modélisation hydrologique du bassin versant du Little Washita. Afin de mieux interpréter nos résultats, nous commençons par faire une étude du lieu et des données.

#### 3.1.1 Le bassin versant du Little Washita

Le bassin versant du Little Washita est situé dans l'État de l'Oklahoma, aux États-Unis. Ce bassin versant possède la particularité d'avoir fait l'objet de nombreuses études, dont les premières ont commencées dès les années 1930. Ces études ont permis d'avoir des données climatiques et hydrologiques dans cette région.

Ce bassin couvre une superficie de  $611\text{km}^2$ . Sa topographie est qualifiée de modérément vallonnée Allen (1991), avec une altitude variant de  $320\text{m}$  à  $474\text{m}$ , avec une pente moyenne de 3,4% et une pente maximale d'environ 12%. Le climat sur cette zone est tempéré continental<sup>7</sup> Rosero et al. (2011) et classé dans la catégorie "subhumide" selon la classification de Thornthwaite Allen (1991). La température moyenne annuelle est de  $16^\circ\text{C}$  et la pluviométrie moyenne annuelle est d'environ  $760\text{mm/m}^2$ . Nous ne considérerons jamais des chutes de neige dans la modélisation hydrologique.

Le bassin versant est recouvert à environ 67% de prairies (figure 11). Les cultures constituent environ 20% de la superficie et elles sont majoritairement localisées à proximité de la rivière. La surface restante est principalement recouverte de forêts et de quelques surfaces imperméables.



**Figure 11:** Carte de végétation du Little Washita (thèse Maquin (2016))

<sup>7</sup>Les hivers froids et secs alternent avec des étés chauds et orageux, les saisons intermédiaires sont généralement de courte durée, aussi les amplitudes annuelles de températures sont importantes. C'est au cours de l'été que tombent les pluies les plus abondantes.

### 3.1.2 Les données North American Regional Reanalysis (NARR)

Les données NARR (North American Regional Reanalysis) couvrent l'entièreté de l'Amérique du Nord et fournissent un total de 29 variables climatiques. Pour les latitudes de  $40^{\circ}N$  la longueur de maille est  $32km$ , ce qui en fait un maillage de l'ordre de grandeur des modèles de climat régionaux. Les données NARR sont une extension du modèle NCEP Global Reanalysis couplée avec le système Regional Data Assimilation System (RDAS). Le premier modèle NCEP est un modèle de forçage climatique régional, c'est à dire un modèle climatique sur lequel on peut forcer les variables à avoir des valeurs précises à des temps et positions données (lieu et date des mesures) et RDAS un système utilisant à la fois les données satellites ainsi que les données récoltées sur terre pour fournir l'évaluation des variables climatiques avec une grande précision. Les résultats climatiques résultant de cette association permettent de considérer les données NARR comme des données climatiques d'observation réelles, c'est à dire comme  $\mathcal{T}$  définit dans l'équation (1).

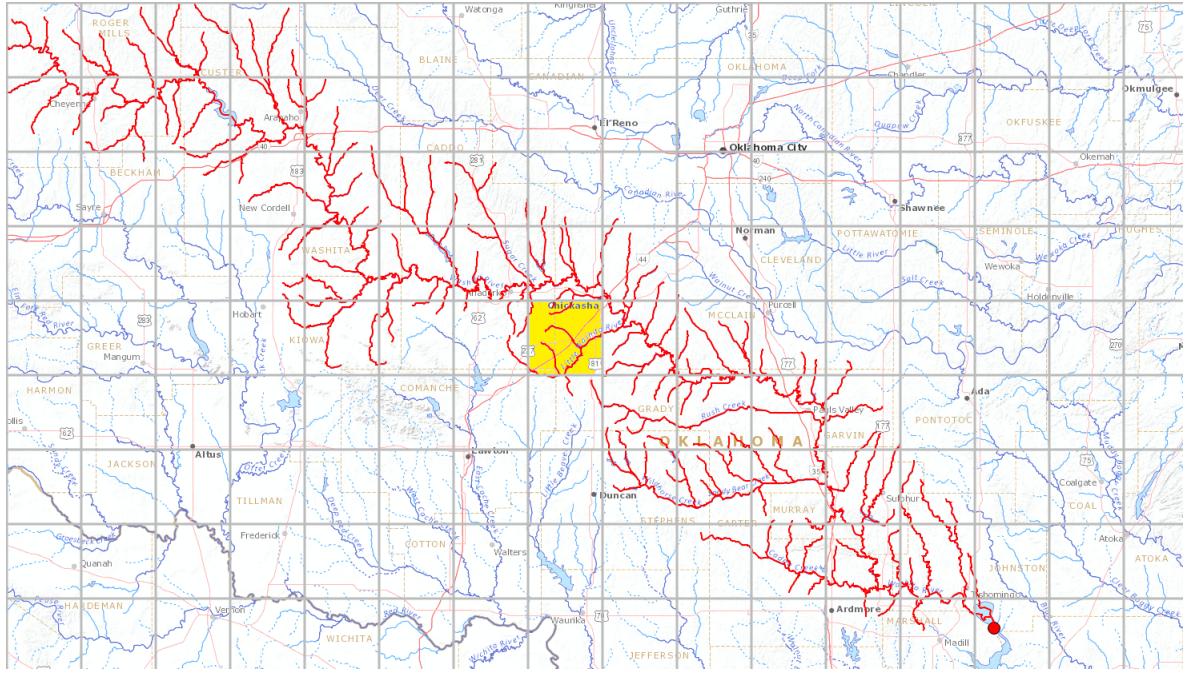
<b><u>GRID DESCRIPTIONS</u></b>	
Regional North American Grid (Lambert Conformal) used by NAM, SREF and RAP.	
Nx	349
<td>277</td>	277
La1	1.000N
Lo1	214.500E = 145.500W
Res. & Comp. Flag	0 0 0 0 1 0 0 0
Lov	253.000E = 107.000W
Dx	32.46341 km
Dy	32.46341 km
Projection Flag (bit 1)	0
Scanning Mode (bits 1 2 3)	0 1 0
Latin1	50.000N
Latin2	50.000N
<b>Lat/Lon values of the corners of the grid</b>	
(1,1)	1.000N, 145.500W
(1,277)	46.635N, 148.639E
(349,277)	46.352N, 2.566W
(349,1)	0.897N, 68.318W
<b>Pole point</b>	
(I,J)	(174.507, 307.764)

The Dx, Dy grid increment (at 50 deg north) was selected so that the grid spacing would be exactly 32.000 km at 40 deg north; the intersection of 40N & 107W falls on point (174.507,108.664)

**Figure 12:** Description du maillage NARR

La méthode de cartographie utilisée par les données NARR est **la projection conique conforme de Lambert** (voir annexe 4.4). Nous allons considérer que la zone sur laquelle nous étudierons les données NARR est euclidienne, c'est à dire que la distance entre deux points adjacents du maillage est la même pour tous les couples de points adjacents du maillage (nous verrons dans l'annexe 4.4 que cette approximation est raisonnable).

Nous nous sommes limités à un sous ensemble des données NARR à savoir la région encadrant le Little Washita.



**Figure 13:** Visualisation du maillage NARR considéré ( $32 \times 32 \text{ km}^2$ ) sur la rivière du Washita (en rouge) le point de grille de référence du Little Washita en jaune

Sur chaque case de ce maillage, nous avons les données de précipitation et d'évaporation des années 1979 à 2014. Nous allons considérer par la suite le tenseur des données NARR,  $\mathcal{T}$  de dimension  $T \times M \times N$  pour les deux variables considérées.  $M$  et  $N$  représentent les dimensions de l'axe vertical (latitudes) et horizontal (longitudes) de notre figure, et  $T$  la période sur laquelle nous avons considéré nos dégradations. Nous voyons que la rivière du Little Washita (au centre du graphique en jaune) chevauche plusieurs cases, on considère les variables sur la case couvrant la plus grande surface de la rivière comme case recouvrant le Little Washita (case jaune de la figure 13).

### 3.2 Dégradation spatiale des données NARR

Nous allons ici éclaircir ce que nous avons appelé la dégradation des données NARR dans les sections précédentes. L'on verra alors qu'il est intéressant d'analyser les variables de précipitation et d'évapotranspiration sur une zone plus large afin de mieux comprendre la structure spatiale des données et ainsi anticiper les résultats de nos dégradations.

#### 3.2.1 Méthode de dégradation

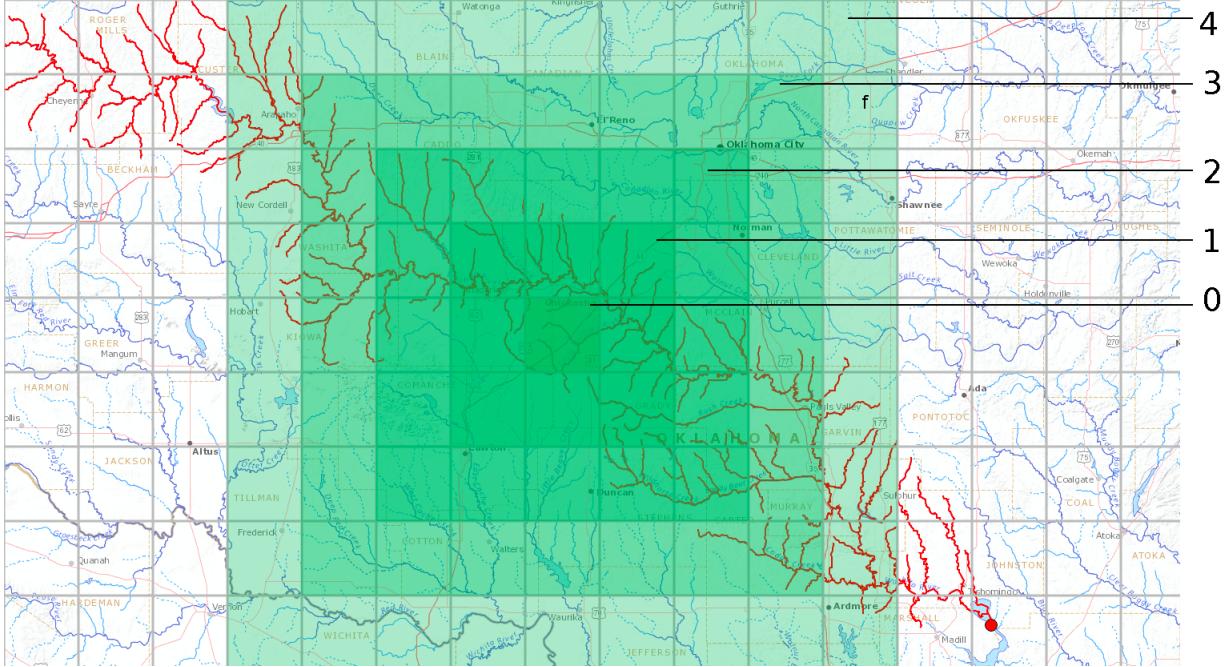
En considérant de nouveau les données NARR comme un tenseur de dimension  $T \times M \times N$ , nous avons dégradé les valeurs par un moyennage spatial. Nous avons fait 5 dégradations différentes, on les numérote de 0 à 4, on appellera  $\mathcal{T}^d$  le tenseur issu de la dégradation  $d$ , défini par

$$\mathcal{T}^d t, m, n = \frac{1}{(2d+1)^2} \sum_{i=-d}^d \sum_{j=-d}^d \mathcal{T}_{t, m+i, n+j} \quad \forall (m, n) \in \{d+1, \dots, M-d\} \times \{d+1, \dots, N-d\}. \quad (3.1)$$

On considère que le point de grille du Little Washita est le point  $(0, 0)$ .

**Définition 9.** Pour  $d \geq 1$ , les séries temporelles  $\mathcal{T}_{t,0,0}^d$  sont appelées **séries dégradées**. On appellera pour coller avec les notations données dans la partie 1,  $X_t^d = \mathcal{T}_{t,0,0}^d$  les séries dégradées.

Nous avons cherché à projeter la série  $(Y_t)_{t \in [1,T]} = \mathcal{T}_{0,0,t}^0$  à partir des séries  $(X_t^d)_{t \in [1,T]}$ ,  $d \geq 1$  et ainsi regarder l'impact de la dégradation puis du downscaling sur les données.



**Figure 14:** Les différentes zones de dégradation considérées

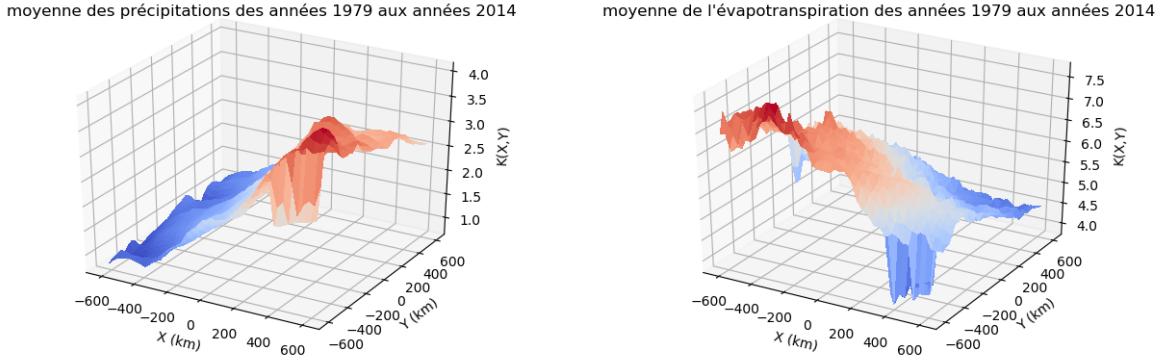
Nous avons pour chaque  $d$  dans  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  la zone de dégradation correspondante à la dégradation  $d$ . Pour chaque  $d$ ,  $(X_t^d)$  vérifie l'égalité

$$X_t^d = \frac{Y_t}{(d+1)^2} + G_t^d,$$

où  $G_t^d$  est une variable aléatoire proportionnelle à la somme des réalisations des voisins du point de grille du Little Washita  $(0,0)$ . On sait dans ce cas là que  $Y_t$  est “contenue” dans  $X_t^d$ , ce qui peut avoir un impact sur downscaling. Dans le cas des données IPSL qu'on appelle  $X_t$ ,  $Y_t$  n'est pas contenu dans  $X_t$ . Nous allons donc regarder l'efficacité du downscaling pour les différentes dégradations ainsi que pour les données de l'IPSL.

### 3.2.2 Analyse spatiale de la région du Washita

Pour les deux variables, nous allons regarder leur valeurs moyennes sur les années 1979 – 2014 pour les différents points de grilles entourant le little Washita. Dans les prochains graphiques l'axe  $X$  correspondra à l'axe de la dimension  $M$  (la latitude) et l'axe  $Y$  celui de  $N$  (la longitude). Les coordonnées du Little Washita seront encore  $(0,0)$ .



**Figure 15:** Tracé des précipitations( $mm.m^{-2}.j^{-1}$ ) et de l'évapotranspiration( $mm.m^{-2}.j^{-1}$ ) moyenne de 1979 à 2014

Nous voyons que les moyennes des précipitations sont croissante selon l'orientation Sud-Nord, le gradient des précipitations semble élevé. On voit qu'au point  $(0,0)$ , la précipitation journalière moyenne est d'environ  $2mm$ , ce qui correspond à peu près aux  $760mm/m^2$  trouvés par Allen (1991). Il semble que le gradient de l'évapotranspiration potentielle soit orienté vers le Sud-Est. Ces deux graphiques semblent cohérents avec une dynamique de désertification dans le sud des États-Unis ainsi que des grandes plaines dans le Nord des États-Unis.

On s'intéresse maintenant à la structure de covariance spatiale de nos données. Tout d'abord,  $\mathcal{T}_V$  possède une fonction de covariance spatiale car les réalisations des ses variables sont bornées. Il est habituel de faire des hypothèses sur cette fonction de covariance afin de pouvoir la manipuler et l'interpréter plus simplement. On appelle cette fonction de covariance  $K$ , le **noyau de covariance**.

**Définition 10.** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction aléatoire, on définit un noyau de covariance sur cette fonction en faisant l'hypothèse que  $f$  est stationnaire en temps et espace, on a alors

$$Cov(f(t, x), f(t, x + y)) = K(y), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}^2.$$

On remarque de plus que la fonction  $K$  ainsi définie est symétrique,  $K(y) = K(-y)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}^2$ . On peut alors simplement calculer la covariance empirique à partir de l'estimateur sans biais de la variance.

$$K(m, n) = \frac{1}{T(M-m+1)(N-n+1)-1} \sum_{t=1}^T \sum_{i=m}^M \sum_{j=n}^N (\mathcal{T}_{t,i,j} - \bar{\mathcal{T}}_{1,m,n})(\mathcal{T}_{t,i-m,j-n} - \bar{\mathcal{T}}_{2,m,n}),$$

où,

$$\bar{\mathcal{T}}_{1,m,n} = \frac{1}{T(M-m+1)(N-n+1)} \sum_{t=1}^T \sum_{i=m}^M \sum_{j=n}^N (\mathcal{T}_{t,i,j}),$$

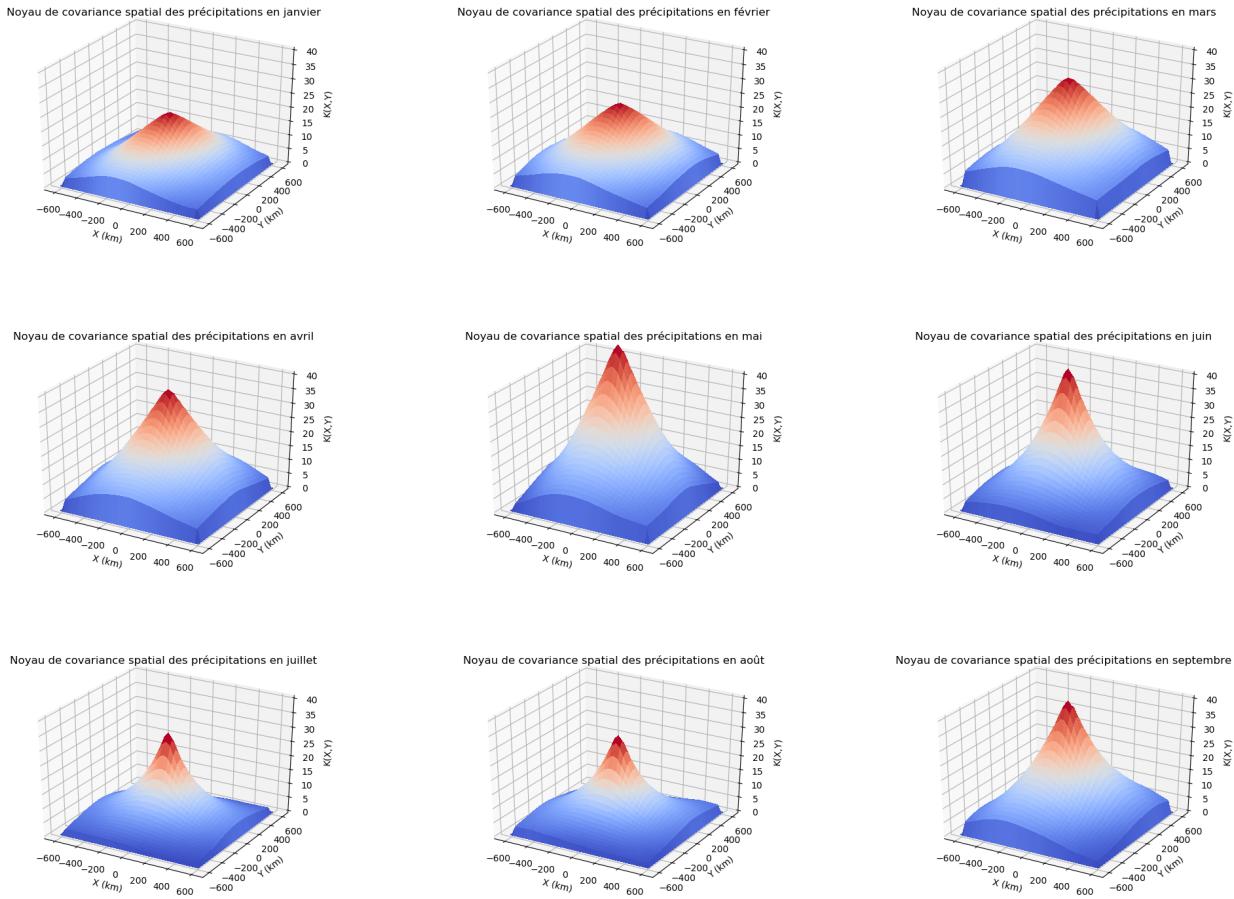
et

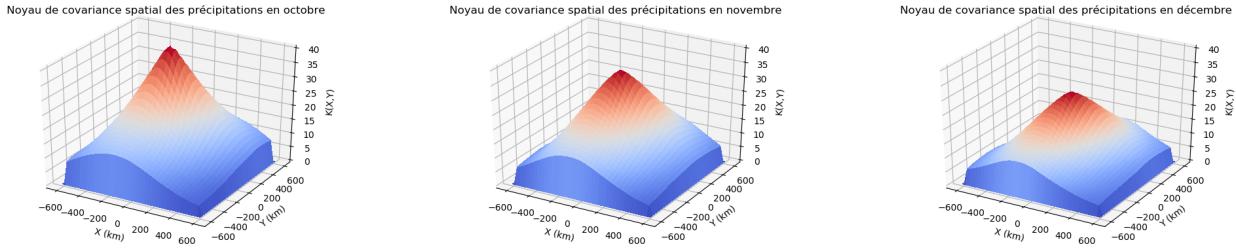
$$\bar{\mathcal{T}}_{2,m,n} = \frac{1}{T(M-m+1)(N-n+1)} \sum_{t=1}^T \sum_{i=0}^{M-m} \sum_{j=0}^{N-n} (\mathcal{T}_{t,i,j}).$$

On peut donc tracer le noyau de covariance  $K(i,j)$ ,  $i \in \{-N/2, N/2\}$ ,  $j \in \{-M/2, M/2\}$ .

## Résultats:

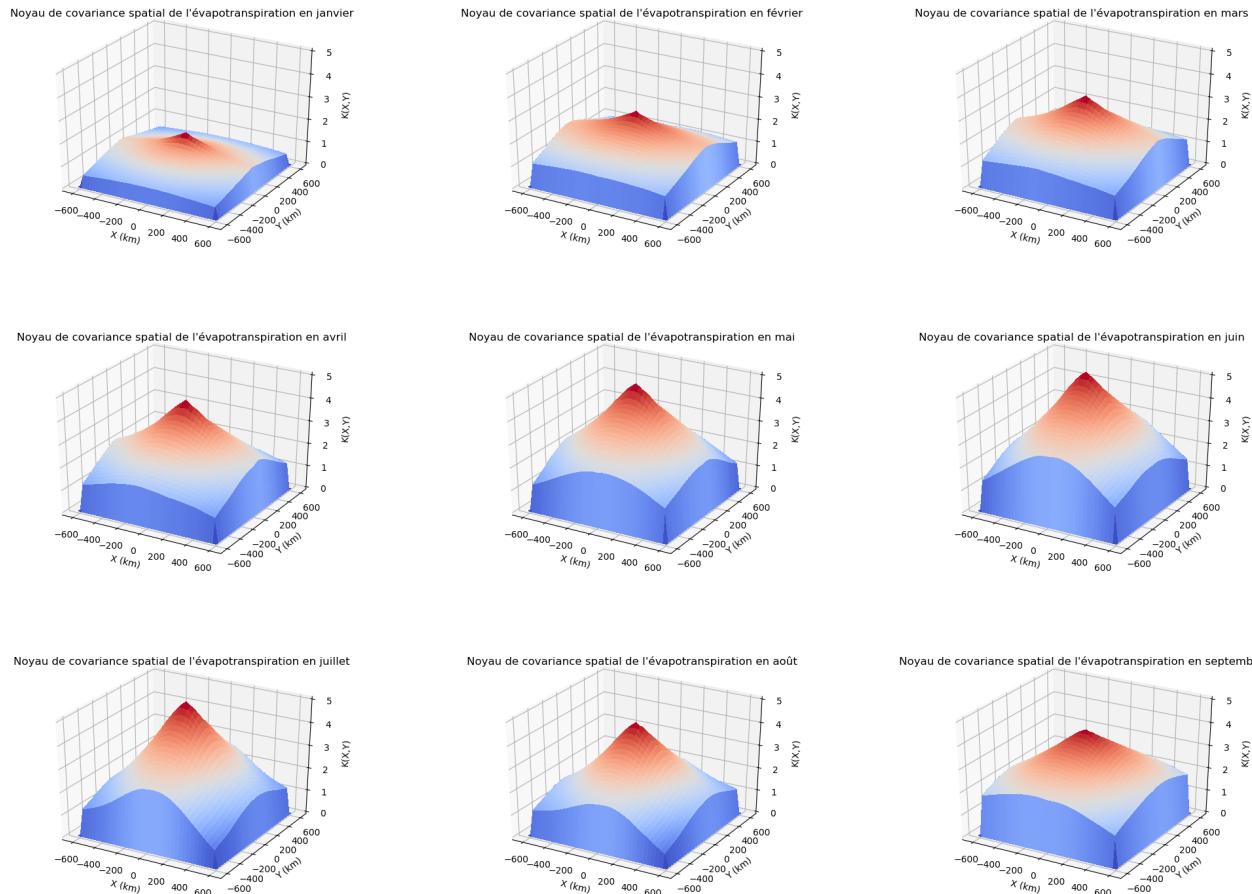
Pour obtenir nos résultats, nous avons pris en compte la saisonnalité. En effet, nous avons séparé notre tenseur  $\mathcal{T}$  en 12 tenseurs en le séparant selon des tranches de temps correspondant aux mois de l'année. Pour chaque série temporelle on les a divisées en 12 séries temporelles (par mois) sur lesquelles on a calculé la transformation  $G$  puis on a downscalé la série de prédiction sur chaque mois. Les figures suivantes (16, 17) montrent l'intérêt de considérer plusieurs sous-séries en fonction des périodes de l'année. Voici les résultats obtenus en fonction des mois de l'année:

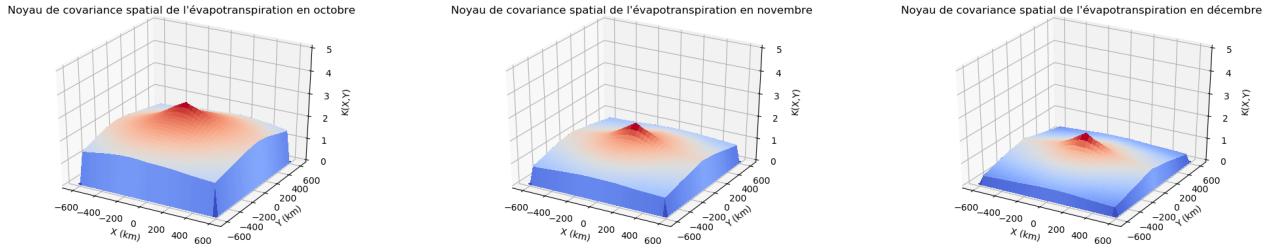




**Figure 16:** Noyau de covariance des précipitations en fonction des différents mois de l'année

D'après la figure 16, nous voyons qu'en été la covariance entre deux points diminue relativement vite alors qu'en hiver c'est plutôt l'inverse. Ce résultat était attendu car en été les précipitations sont essentiellement convectives, donc locales, alors qu'en hiver c'est plus lié à des structures stratiformes à grande échelle donc plus similaire spatialement (c.f. 2.1.1). Il est intéressant de constater que même à plusieurs centaines de kilomètres il y a encore une covariance positive entre les précipitations. On voit aussi que la covariance spatiale des précipitations diminue plus vite selon les latitudes.





**Figure 17:** Noyau de covariance de l’évapotranspiration potentielle en fonction des différents mois de l’année

Dans la figure 17, nous voyons que la variance spatiale de l’évapotranspiration est aussi liée à la saisonnalité. Cependant la variance de l’évapotranspiration semble diminuer moins vite que celle des précipitations. La variance est aussi beaucoup plus faible que pour les précipitations ( $\sim 10 \times$  moins).

### 3.3 Downscaling des données dégradées et des données IPSL

Dans cette partie l’on possède maintenant la série de référence  $((Y_t)_{t \in T})$  ainsi que les séries dégradées  $((X_t^d)_{t \in T})$  pour les variables de précipitation et d’évapotranspiration. Rappelons que les processus stochastiques  $(X_t^d)_{t \in T}$  sont des estimateurs de  $Y_t = \mathcal{T}_{t,0,0}$ . Nous allons considérer les données journalières des précipitations et de l’évapotranspiration sur la période allant de 1979 à 1996 comme données d’apprentissage pour définir la transformation  $G$  définie dans la partie 1.2, puis nous allons downscaler les données de l’année 1997 à 2014.

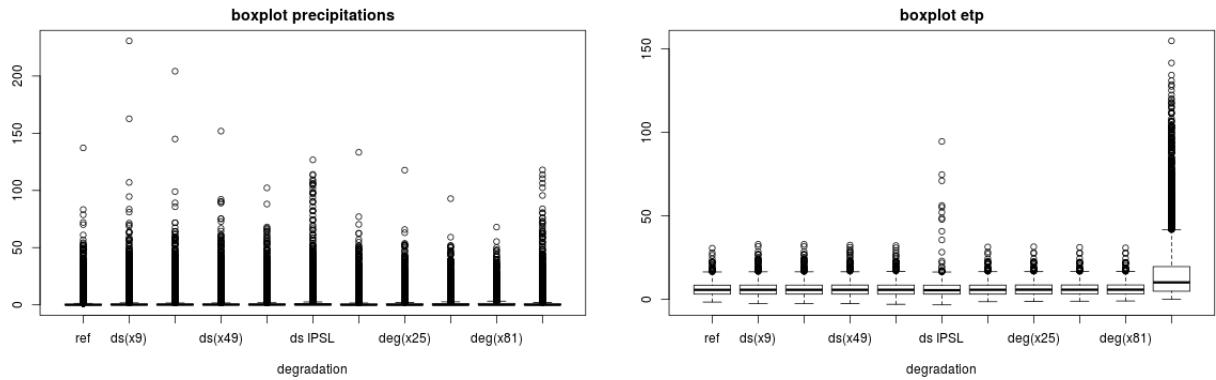
Nous avons essayé plusieurs versions de CDFt avec des méthodes utilisant des prédictions sur la moyenne et la covariance, comme expliqué dans la section 1.2. Cependant, les résultats n’ont pas été convaincants. Après plusieurs tentatives, l’algorithme CDFt le plus convaincant au sens de la distance de Cramér-von Mises était finalement celui où l’on effectuait aucune transformation, c’est à dire, celui où l’on utilisait la transformation du quantile-quantile sur les données. Néanmoins, nous verrons que cette transformation sous-estimait les derniers quantiles.

Il resterait alors très intéressant de développer et de tester les idées énoncées dans la partie 1 car les résultats du quantile-quantile ne prennent pas en compte l’évolution du support des variables  $X^d$  (les résultats obtenus ont montré que la dilatation n’est certainement pas la meilleure option).

Finalement, les résultats utilisés et étudiés par la suite sont les résultats obtenus par l’algorithme CDFt-SSR (voir Vrac et al. (2016)) fourni par Mathieu Vrac pour les données de précipitation, et ceux de l’algorithme CDFt (voir Vrac et al. (2012)) fourni par Mathieu Vrac pour l’évapotranspiration. Nous expliquons ce choix dans ce qui va suivre.

#### 3.3.1 Analyse variationnelle des différentes séries de projection

On commence par afficher un boxplot des différentes séries observées. Nous avons ainsi les boxplot pour la précipitation et l’évapotranspiration pour juger de la répartition des points pour chaque série.



**Figure 18:** Boxplot en fonction des séries pour la précipitation et l'évapotranspiration

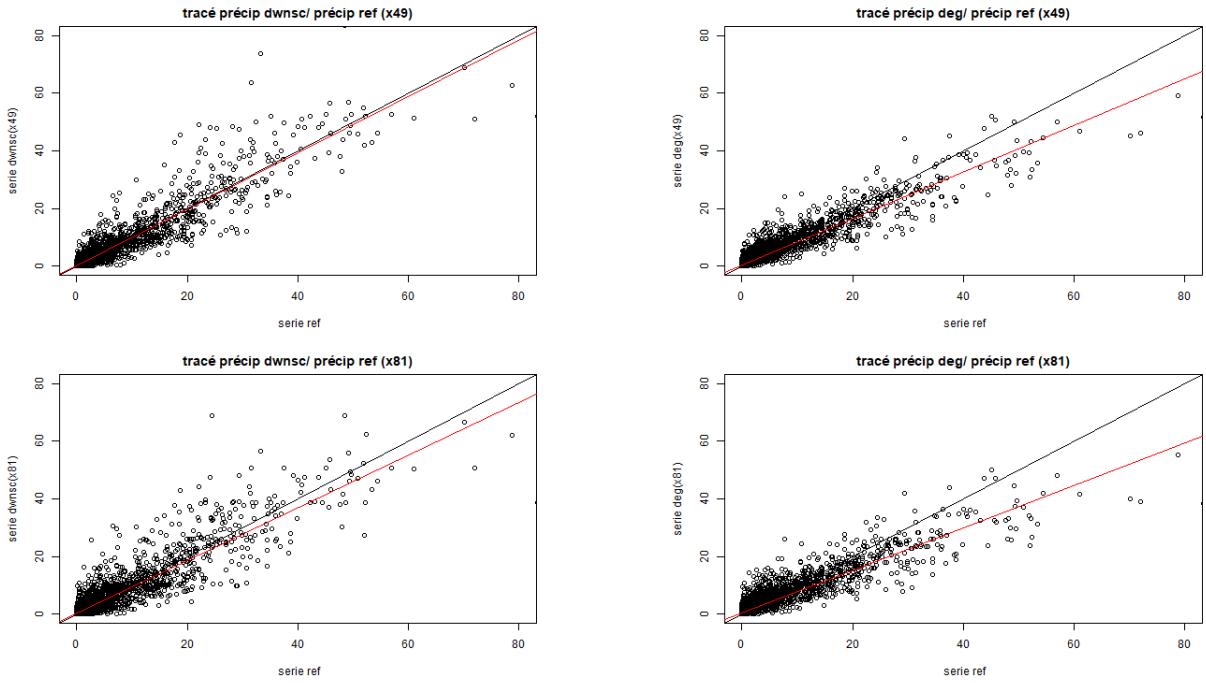
Les colonnes représentent pour chaque variable:

- 1- la série de observée sur le Little Washita ( $Y_t$ ) $_{t \in T}$ .
- 2-3-4-5- Les séries downscalées des dégradations ( $X_t^d$ ) $_{t \in T}$ ,  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
- 6- La série downscalée de l'IPSL.
- 7-8-9-10- Les séries des dégradations  $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
- 11- La série de l'IPSL.

On voit que la dégradation de l'évapotranspiration n'a quasiment aucune influence sur les séries temporelles, ce qui était à prévoir d'après le noyau de covariance que nous obtenu précédemment (figure 17) pour l'évapotranspiration. On peut aussi voir que le modèle de climat de l'IPSL projette très mal l'évapotranspiration sur la région du Little Washita. Nous verrons que le downscaling dans ce cas là améliore nettement les résultats.

### 3.3.2 Étude du downscaling sur la correction de biais

D'après les boxplot il semble que plus la dégradation est grande, plus on sous-estime les données. Nous allons afficher les précipitations projetées (dégradées ou dégradées puis downscalées) en fonction des précipitations réelles. Cette méthode, permet de juger visuellement de l'efficacité du downscaling sur les données. Les figures qui sont affichées en dessous ont un titre indiquant le degré de déformation sous la forme  $(2d + 1)^2$  où  $d$  est le degré dans l'équation de dégradation (3.1). Les figures de gauche sont les figures dégradées puis downscalées et celles de droite les figures dégradées, les dégradations sont les mêmes sur une même ligne.



**Figure 19:** Tracé des précipitations downscalées (CDFt-SSR) en fonction des précipitations de référence pour les dégradations 3 et 4

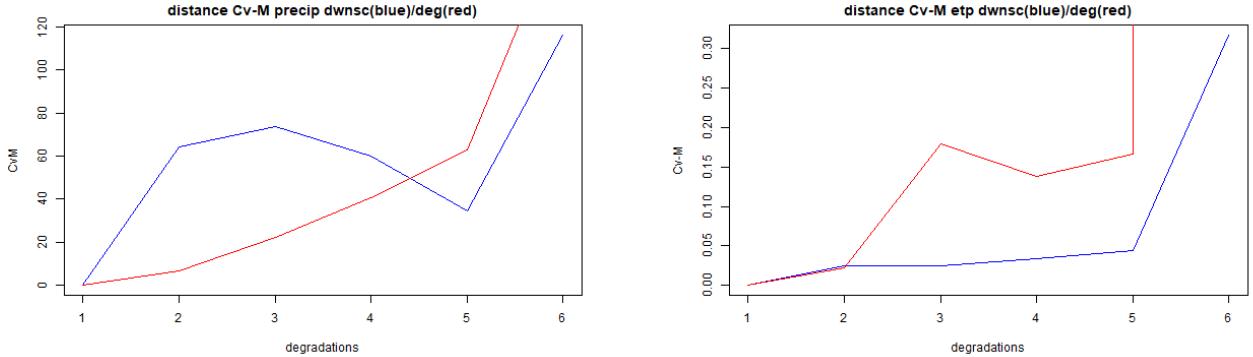
Visuellement, il semble que le downscaling améliore les projections. Nous avons tracé pour chaque figure en noir la droite identité et en rouge les droites de régression linéaire de la forme  $y = ax + b$ , où  $x$  est la précipitation de référence et  $y$  la donnée projetée de  $x$ . Dans notre cas c'est soit la dégradation ( $X_t'^d$ ), soit son downscalé  $G_{X^d, Y}(X_t'^d)$ . Remarquons que la dégradation de nos données ne crée pas de changement important de l'éparpillement des points dans les graphiques, c'est en accord avec les figures obtenues dans la section 3.2.2 montrant une grande covariance spatiale. Remarquons que le downscaling augmente l'éparpillement des points, ce qui ne pose pas de problème, puisque encore une fois nous cherchons à prédire en lois pas en norme RMSE.

Il semble que la dégradation ait une tendance à sous-évaluer les précipitations élevées, ce qui n'est pas aberrant si l'on considère la taille des cumulonimbus<sup>8</sup>, inférieur à la largeur de grille des données NARRs (32km). Alors on peut considérer les précipitations importantes comme des événements localisés sur un seul point de grille NARR.

---

<sup>8</sup>Les cumulonimbus sont des nuages très hauts se formant à partir des mouvements convectifs d'air chaud en été et leur taille va de 2 à 10km de diamètre.

### 3.3.3 Analyse des séries downscalées et explication du choix de la méthode de downscaling

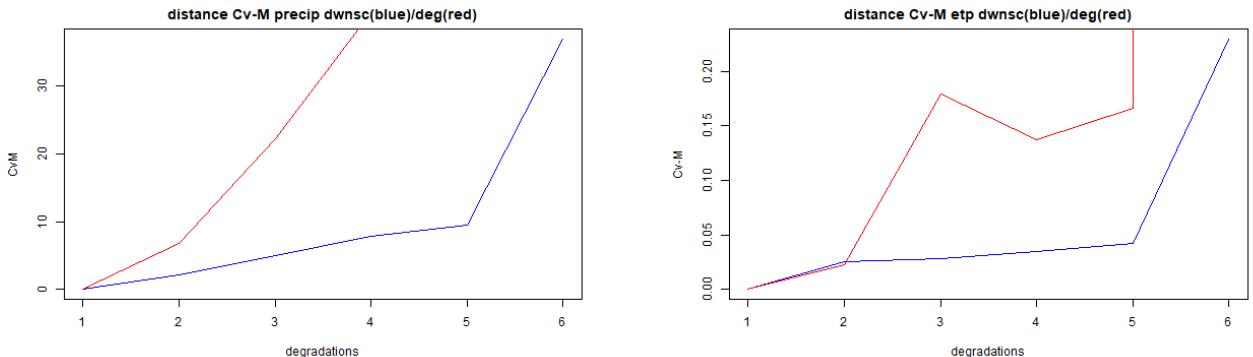


**Figure 20:** Tracé de la distance de Cramér-von Mises: séries dégradées en rouge et séries downscalées avec l'algorithme CDFt en bleu

L'on voit dans la figure 20 que la projection après downscaling est plus mauvaise pour les précipitations pour les petites dégradations. À partir de la dégradation 4 la série donwscalées est plus proche pour la distance de Cramér-von Mises ( $d = 5$  sont les données *IPSL*). L'algorithme CDFt-SSR est très efficace pour les données *IPSL*. Il semble que la correction ne soit efficace qu'à partir d'une certaine dégradation (ou distance entre les lois) ce qui paraît étonnant. Une explication que nous pouvons conjecturer est que les erreurs arithmétiques induites par les manipulation informatique des valeurs numériques peut augmenter naturellement ce type d'erreur. Cette explication ne semble pas vraiment convaincante, puisque la courbe devrait quand même suivre la tendance de dégradation et il semble d'après ce graphique que ca ne soit pas le cas.

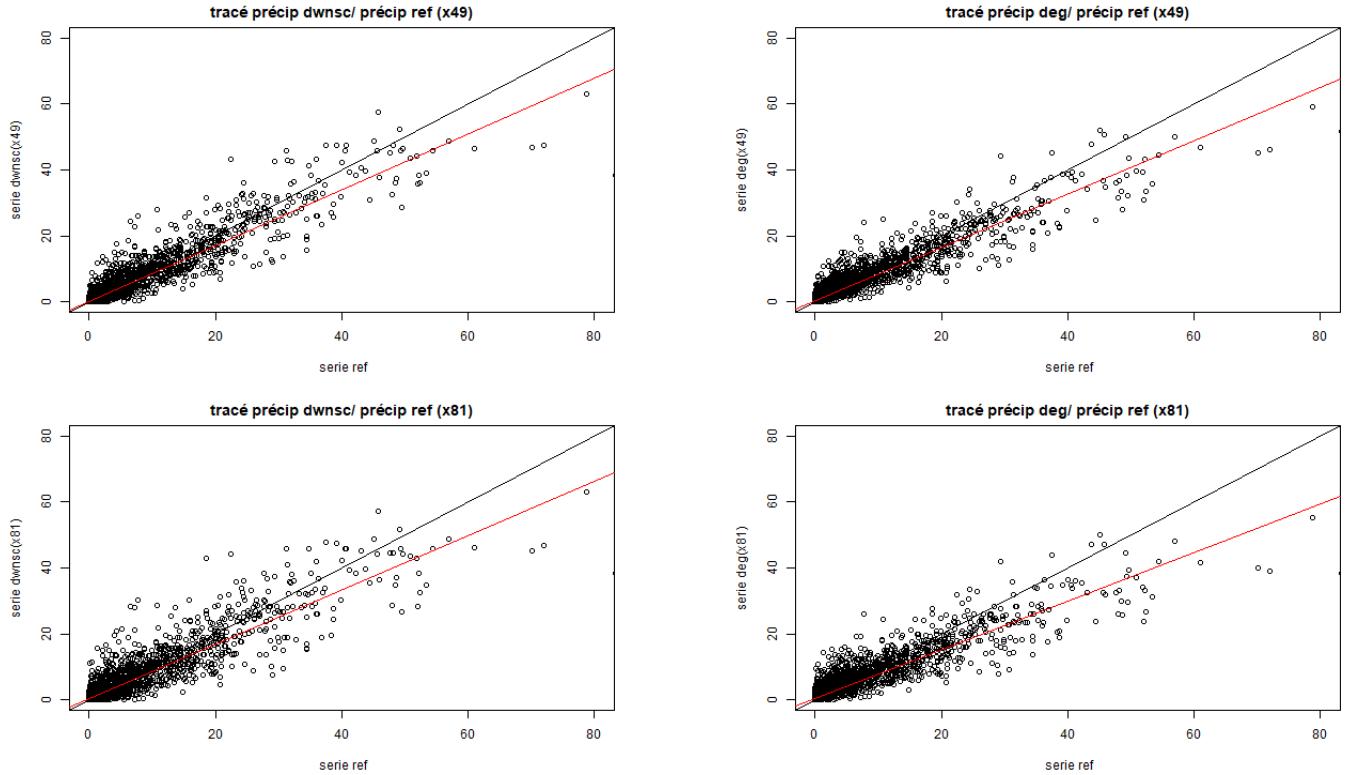
Cette erreur manifestée par la distance Cramér-von Mises soulève un point que nous n'avons pas encore abordé, c'est le fait que notre échantillon des précipitations possède de nombreuses valeurs à 0. Cela signifie que la densité n'est plus une fonction mais une distribution avec une dirac en 0. Nous avons parlé à la fin de la section 1.2 que les transformations de CDFt gérait mal les variables aléatoire à la fois discrètes et continues.

Regardons maintenant les résultats de l'évaluation de la distance de Cramer-Von Mises pour les séries donscalées par l'algorithme quantile-quantile:



**Figure 21:** Tracé de la distance de Cramér-von Mises: séries dégradées en rouge et séries downscalées avec l'algorithme quantile-quantile en bleu

Nous voyons que la distance de Cramér-von Mises s'est considérablement améliorée pour les précipitations, les distances pour l'évapotranspiration sont très semblables entre CDFt et quantile-quantile. Néanmoins regardons les droites de régression quand on affiche les points des séries projetées en fonction des points des séries de référence.



**Figure 22:** Tracé des précipitations downscalées (quantile-quantile) en fonction des précipitations de référence pour différentes dégradations

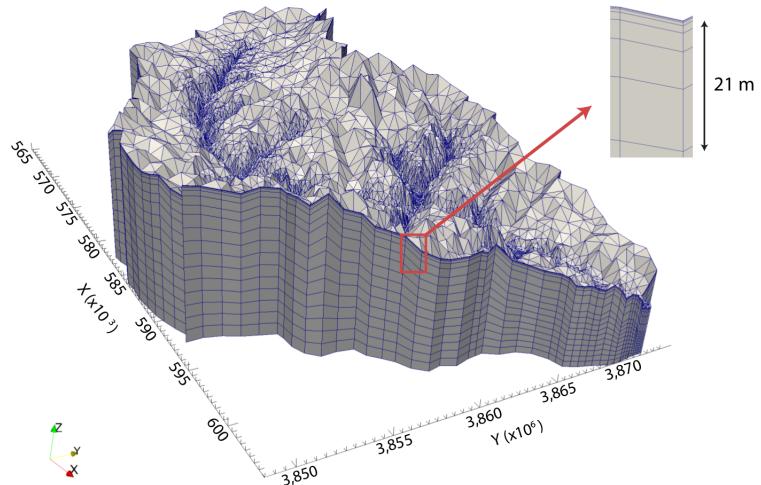
Pour l'algorithme quantile-quantile, on observe (figure 22) que la correction des droites de régression est assez mauvaise comparée à celle obtenue avec CDFt. On choisit finalement les données downscalées par l'algorithme **CDFt-SSR** (voir Vrac et al. (2016)) qui corrige mieux les valeurs extrêmes qui ont un gros impact sur les lois des débits.

### 3.4 Simulation hydrologique avec HydroGéosphère

Une fois que l'on a nos données downscalées, il a fallu faire la simulation hydrologique du bassin du Little Washita. Cependant, une modélisation complète du Little Washita ne permettait pas de faire tourner nos modèles dans des délais raisonnables comparés au temps du stage (plus de 2 mois selon l'étudiante avec qui j'ai eu la chance de travailler). Il fallait donc utiliser le modèle simplifié que celle-ci avait développé. Nous commencerons par expliquer ce modèle, puis nous donnerons un aperçu des problématiques de spin-up pour l'initialisation des modèles.

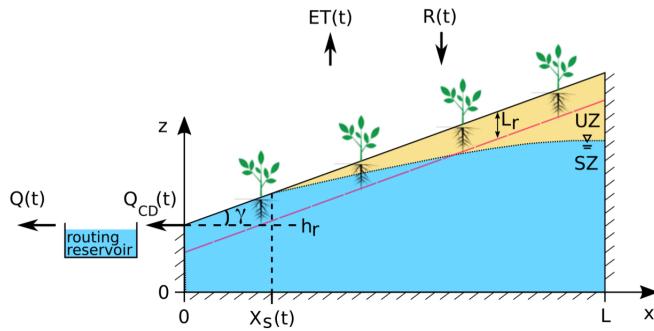
#### 3.4.1 Modélisation Little Washita HGS

Une modélisation très rigoureuse du bassin du Little Washita a été faite durant la thèse de Maquin (2016), elle a discrétisé le bassin versant par triangulation (voir figure 23).



**Figure 23:** Maillage tridimensionnel du bassin versant du Little Washita (thèse Maquin (2016))

L'idée est alors de proposer un modèle beaucoup plus simple permettant de simuler les écoulements ainsi que l'état de la nappe dans un temps de calcul raisonnable (quelques heures au lieu de quelques mois). On passe à un modèle 2D. Voici le modèle 2D proposé par Fanny Picourlat l'étudiante en thèse avec qui j'ai eu la chance de travailler et discuter.



**Figure 24:** Modèle bidimensionnel du bassin versant du Little Washita (travail Fanny Picourlat)

Ce modèle ne dépend que de deux paramètres, la longueur du bassin et sa pente. Elle a trouvé ces deux paramètres tels qu'ils minimisent la distance des écoulements et de l'état de la nappe simulée par le modèle présenté en figure 23. Cette approche est dans l'esprit un modèle d'upsampling. Cependant, la réflexion est plus expérimentale (on cherche expérimentalement les paramètres minimisant une distance) que physique.

### 3.4.2 La problématique du spin-up

Avant de lancer une simulation, il faut déterminer plusieurs paramètres initiaux. Un de ces paramètre est la hauteur de nappe. Il faut alors déterminer un méthode pour initialiser la hauteur de nappe de façon à ce qu'elle soit la plus "réaliste possible". Le spin-up consiste à initialiser le système avec une hauteur de nappe donnée, puis de réaliser la simulation hydrologique sur la première année plusieurs fois, jusqu'à ce que l'on obtienne une hauteur de nappe (ou un débit) périodique.

Cette méthode possède de nombreuses limites, par exemple si la première année est une année plus sèche que les autres, on y verra un phénomène d'aridification qui ne devrait pas avoir lieu. Aussi, si l'on observe naturellement un phénomène d'aridification, sur le bassin qu'on étudie, alors l'état stable du système est un état de nappe vide. C'est ce que l'on observe sur la hauteur de nappe du Little Washita avec le modèle de la figure 24.

Nous avons finalement réalisé une initialisation empirique en décidant de simuler pendant 3 ans en enlevant l'évapotranspiration puis pendant 6 ans avec tous les paramètres (fonctionnement recommandé dans la thèse Maquin (2016)). Nous avons utilisé cette initialisation avec les séries de référence, ces paramètres pour toutes les simulations.

### 3.5 Comparaison et analyse des résultats des simulations hydrologiques

Nous avons rentrer chacune de nos séries (référence, dégradées, downscalées) dans le simulateur HydroGéoSphère et nous nous sommes intéressés à seulement quelques données de sorties telles que les débits et l'évapotranspiration réelle.

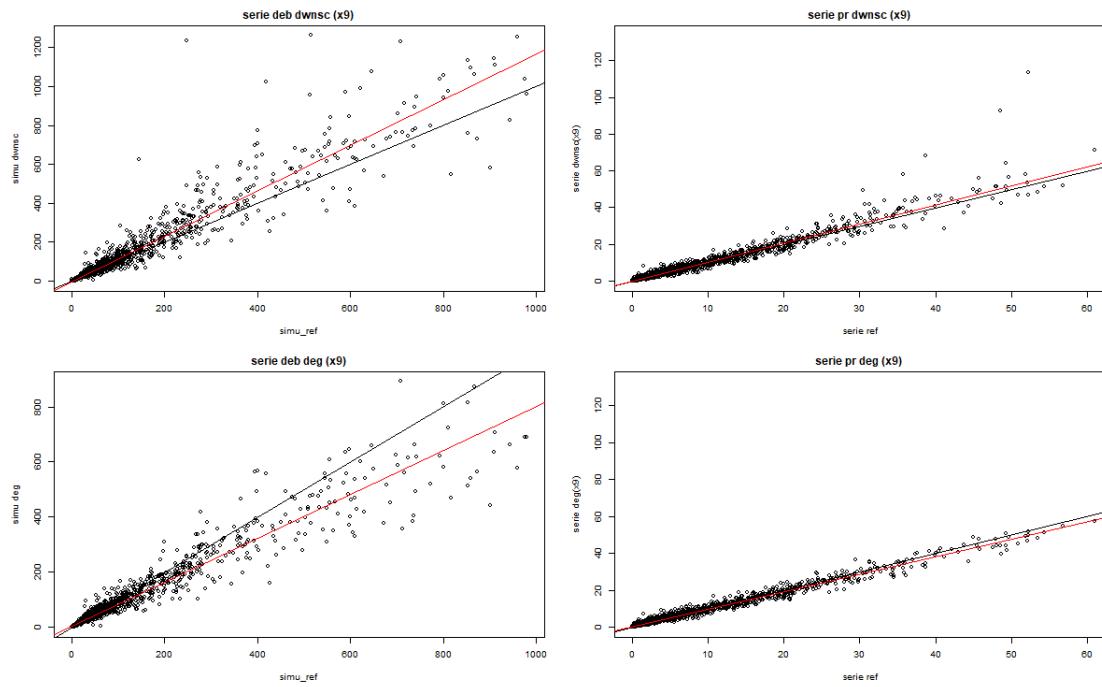
Nous commençons par regarder si la modélisation hydrologique avec downscaling permet de meilleures simulations qu'avec des séries dégradées en comparant les résultats avec ceux obtenus à partir de la série de référence. Nous analyserons ensuite brièvement la réponse des débits de sorti du modèle en fonction des précipitations entrantes. Nous verrons qu'il y a une non linéarité de la réponse des débits en fonction de l'entrée des précipitations.

#### 3.5.1 L'efficacité du downscaling

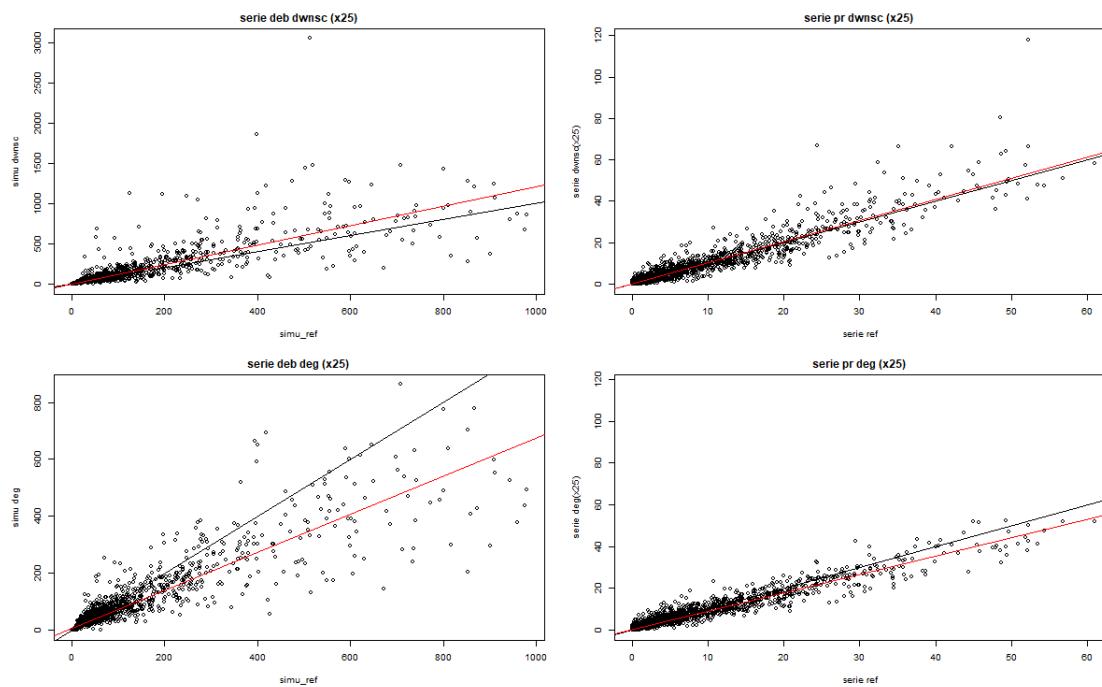
Nous allons utiliser les mêmes outils que ceux utilisés dans la partie 3.3 pour étudier la qualité de nos simulations.

L'on appellera dans la suite, les simulations obtenues à partir des données de référence comme les données de référence, les simulations obtenues à partir des séries dégradées ou downscalées comme des données elles-même dégradées ou downscalées. Les comparaisons seront encore les données conjointes et la distance de Cramér-von Mises.

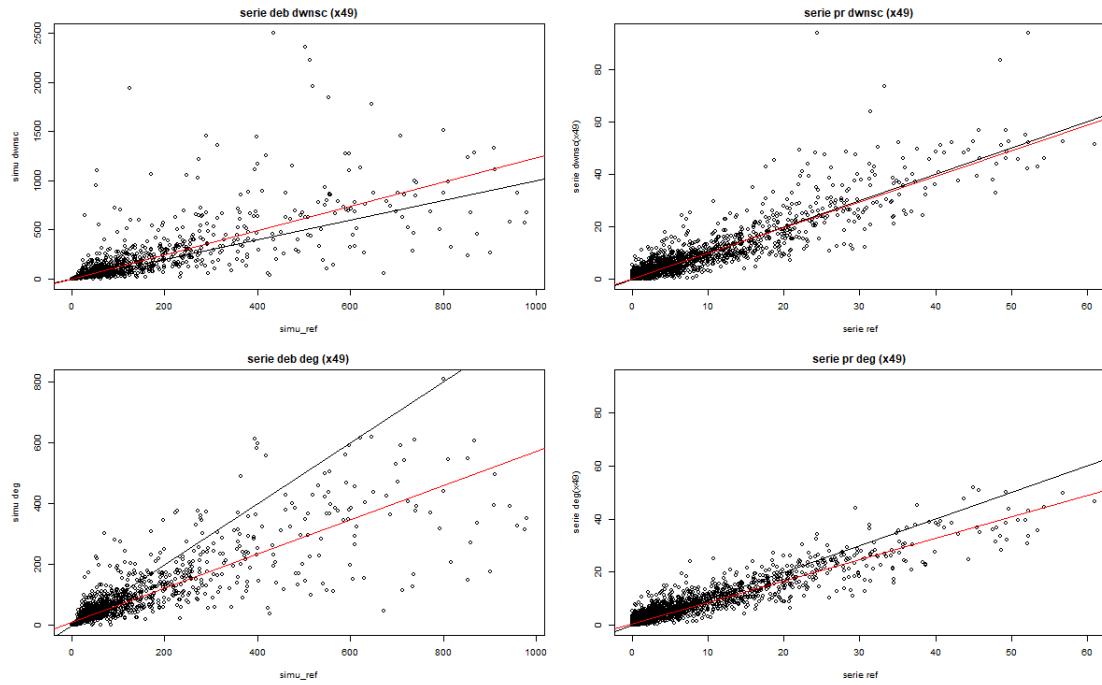
#### Résultats et comparaison conjointe des séries de précipitation et de débit



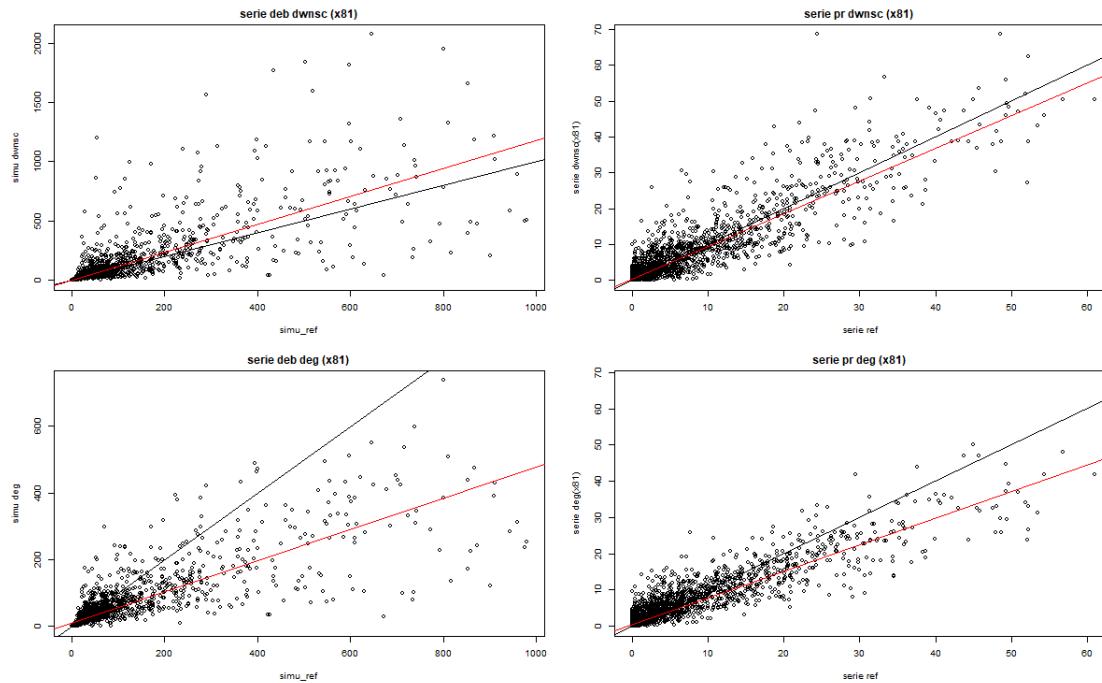
**Figure 25:** Comparaison conjointe des séries de précipitation et de débit pour la dégradation 1



**Figure 26:** Comparaison conjointe des séries de précipitation et de débit pour la dégradation 2



**Figure 27:** Comparaison conjointe des séries de précipitation et de débit pour la dégradation 3

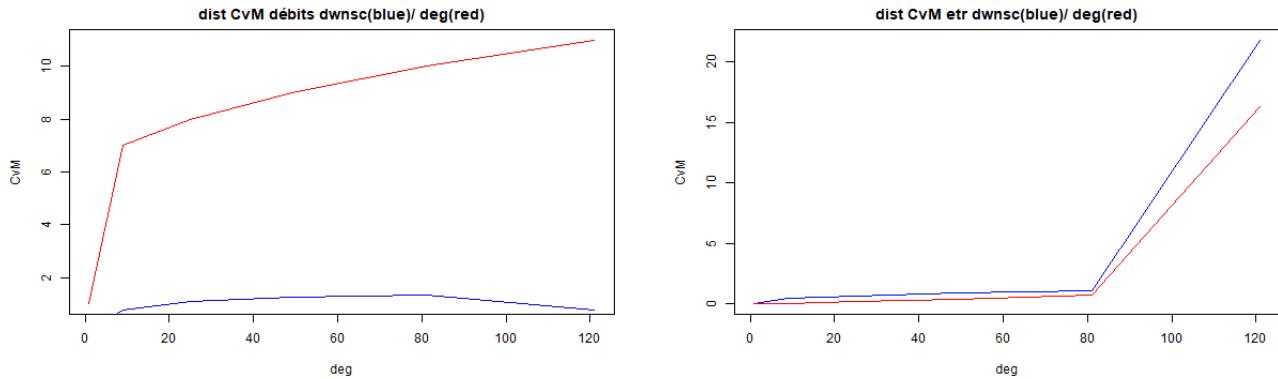


**Figure 28:** Comparaison conjointe des séries de précipitation et de débit pour la dégradation 4

Nous voyons deux choses à partir de ces résultats (figure 28). La première c'est qu'il y a

une forte correspondance entre les droites de régressions pour les séries de précipitation et les séries des débits. La deuxième c'est que la simulation amplifie le biais des séries de précipitation d'entrées. Le fait que les séries d'entrées downscalées sous-estiment légèrement les précipitations et que les séries de débits de sortie les surestiment nous donnent à penser que le comportement entre les données d'entrées et de sorties n'est pas linéaire.

### Études des lois de distribution pour les séries downscalées et dégradées et distance de Cramér-von Mises



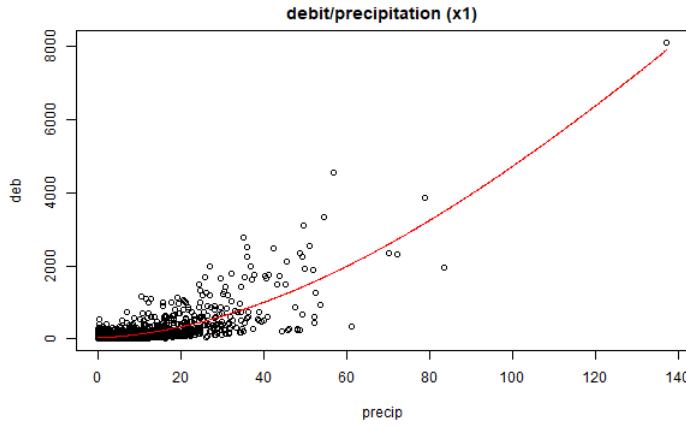
**Figure 29:** Tracé de la distance de Cramér-von Mises: séries dégradées en rouge et séries downscalées en bleu

On remarque que les distances de Cramér-von Mises se sont fortement réduites après passage dans le modèle de simulation hydrologique (environ division par 10). Ce résultat est très intéressant, il montre que le filtre de simulation hydrologique contracte les lois de répartitions.

De plus, les résultats de la distance Cramér-von Mises se sont inversés pour les débits par rapport aux précipitations. Les résultats de l'évapotranspiration réelle sont à très similaires à ceux de l'évaporation potentielle.

#### 3.5.2 Étude de la réponse débit/précipitation

Pour étudier la non linéarité des débits de sortie en fonction des précipitations d'entrée, on trace la série des débits en fonction de la série des précipitations. On fait alors une régression linéaire à l'ordre 3 pour caractériser la non linéarité de la réponse. Nous ne le ferons que pour la série de référence, mais il est intéressant de dire que la régression linéaire donne parfois un coefficient négatif à l'ordre 3.



**Figure 30:** Comparaison conjointe des précipitations et des débits pour la dégradation 4

On voit, dans ce cas que la réponse est quadratique (voir exponentielle). On peut faire un rapprochement entre ce résultat et le modèle de Horton (cf section 2.1.2). La quantité des écoulements de surface en fonction des précipitations est une réponse quadratique.

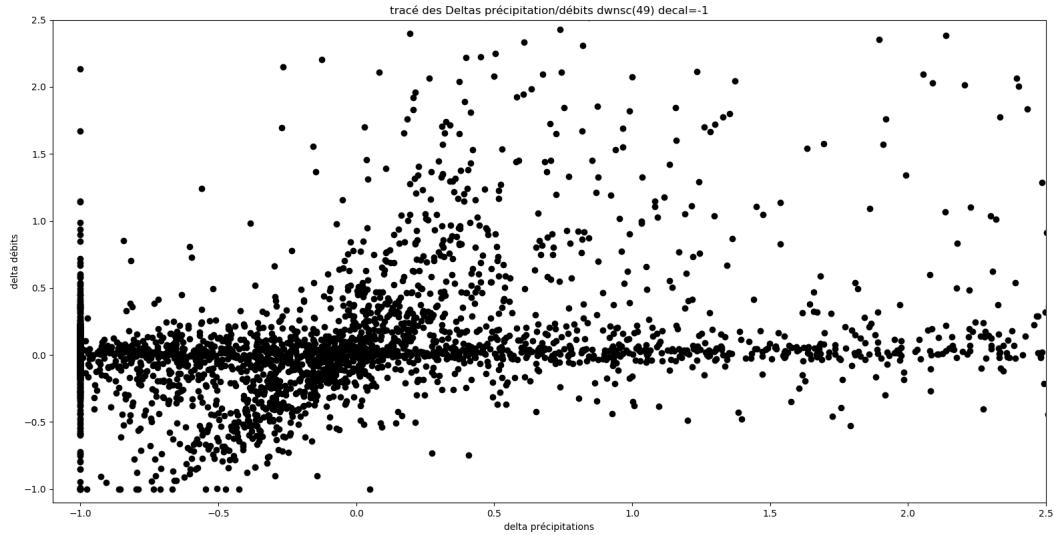
### 3.5.3 Classifications des données réactives et non réactives aux précipitations

Nous allons continuer d'étudier l'influence des précipitations sur les résultats de débits. Nous avons vu que la réponse n'était pas linéaire. Afin de quantifier cette non-linéarité, nous allons considérer la différence des débits dégradés ou downscalés par rapport aux débits de références, que allons comparer aux différences des précipitations dégradées ou downscalées par rapport aux précipitations de référence.

Plus formellement, en définissant  $(R_t^*)_{t \in [0, T]}$  une série projetée (dégradée ou downscalée) de précipitation et  $(R_t)_{t \in [0, T]}$  la série de référence des précipitations, ainsi que  $(Q_t^*)_{t \in [0, T]}$  et  $(Q_t)_{t \in [0, T]}$  une séries de débits projetés et de référence. On s'intéresse alors à l'influence de la différence entre les séries projetées  $(R_t^*)_{t \in [0, T]}$  et la série réelle de précipitation sur la différence entre les débits projetés et les débits réels. On appelle alors quand c'est défini  $\Delta R$  et  $\Delta Q$  la différence de la série projetée à la série de référence

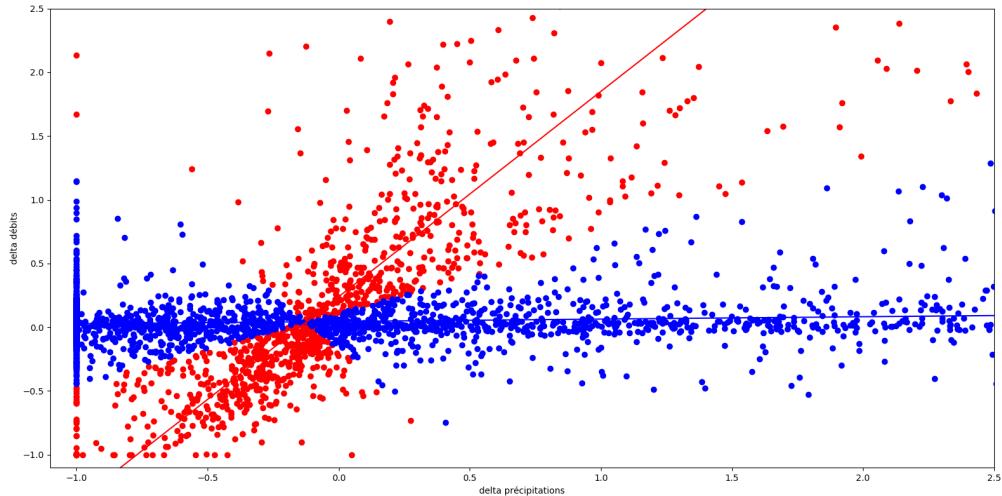
$$\Delta R_t = \frac{R_t^* - R_t}{R_t} \quad \text{et} \quad \Delta Q_t = \frac{Q_t^* - Q_t}{Q_t}.$$

Voici les résultats obtenus pour la série downscalée correspondant à la dégradation 3:



**Figure 31:** Tracé des  $\Delta Q_t$  en fonction des  $\Delta R_t$  pour la dégradation ( $\times 49$ )

On peut voir un phénomène corrélation linéaire pour certains points. Nous cherchons donc à trouver les droites de corrélation (voir section 4.5). Après avoir classifiés nos points en deux catégories, ceux ayant une réponse linéaire, et ceux ayant une corrélation linéaire et ceux ne semblant pas avoir de corrélation.



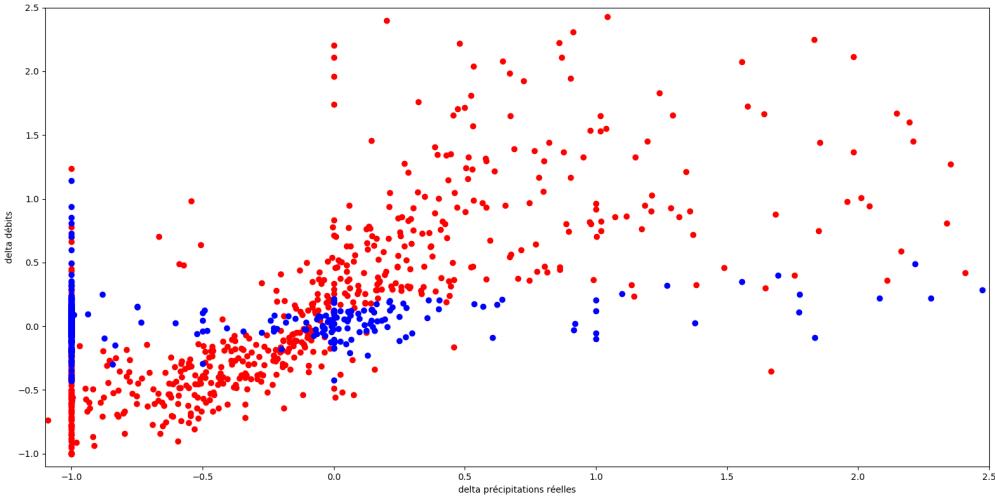
**Figure 32:** Classification des points selon les droites de régression, dégradation ( $\times 49$ )

On se demande alors pourquoi pour certaines précipitations il y a une corrélation linéaire et pas pour d'autres? Une réponse avancée est qu'une partie des précipitations ne puissent même pas entrer dans le sol, donc n'ont aucune influence sur celui-ci. On peut avoir les données des

précipitations réelles dans Hydrogéosphère, c'est à dire l'eau entrant dans le sol, qu'on peut encore écrire:

$$\text{pluie entrant dans le sol} = \max(\text{précipitation} - \text{pertes par interceptions}, 0).$$

On regarde alors la figure des points correspondants pour la pluie entrant dans le sol (on a enlevé toutes les points où la pluie entrant dans le sol était nulle).



**Figure 33:** Classification des points selon les droites de régression pour l'eau entrant dans le sol, dégradation ( $\times 49$ )

Il semble que de nombreux points bleus ont été envoyés sur l'axe  $\Delta R = -1$ , ce qui semble largement conforter notre explication. Cependant nous voyons que la classification reste pertinente. Nous faisons alors une autre hypothèse: les points bleus correspondent à des temps où la surface de la zone de suintement est faible ou que la cote piezométrique soit grande, alors que les points rouges correspondent à des temps où la surface de la zone de suintement est grande. Nous n'avons malheureusement pas pu vérifier cette hypothèse.

Finalement l'hypothèse d'une réponse quadratique des débits en fonction des précipitations est ici encore justifiée par la réponse linéaire de certains  $\Delta Q$  en fonction des  $\Delta R$ . En effet, en considérant que la simulation est une fonction qu'on appelle  $\mathcal{Q}$ , qui prend des précipitations en entrée et sort des débits, on obtient

$$\frac{\mathcal{Q}(R + dr) - \mathcal{Q}(R)}{dr} \sim \frac{\Delta Q}{\Delta R} \sim \alpha,$$

Ce qui implique que  $Q(R) \sim \alpha R^2 + \text{cste}$ . Ce qui explique la réponse quadratique des résultats.

### 3.6 Conclusion et perspectives de l'analyse des données sur le bassin du Little Washita

Cette partie a pour objectif de résumer les résultats que nous avons obtenus ainsi que de souligner les perspectives entrevues durant ce travail.

Les premiers résultats, qui étaient prévisibles, sont que le downscaling améliore les prédictions des variables climatiques des précipitations et d'évapotranspiration. Il reste néanmoins des discussions à avoir sur les méthodes de downscaling à utiliser en fonction des variables auxquelles nous sommes confrontés. Il est certain que les différentes méthodes de downscaling sont adaptées aux différentes variables sur lesquelles on travail et à leur stationnarité dans le temps. Une idée d'amélioration de la méthode de downscaling pourrait être de considérer la non-stationnarité du modèle et de proposer une transformation qui évoluerait dans le temps. Un autre travail qui n'a pas été fait serait de développer un outils informatique permettant de tester rapidement les différentes méthodes de downscaling sur des données et d'afficher les résultats à partir des différentes analyses.

Nous avons aussi vu que la distance de Cramér-von Mises n'est pas toujours le meilleur estimateur de la qualité des prédictions. Il serait intéressant de réfléchir à d'autres tests statistiques pour évaluer la qualité du downscaling.

Nous avons aussi vu que la méthode d'upscaling du bassin du Little Washita (figure 24) qui permettait de réduire les coûts algorithmique de la simulation, négligeait l'étude physique du bassin. Une méthode plus analytique, se basant sur l'étude de la topographie pour déterminer les paramètres caractérisant le système 2D seraient plus dans l'esprit de l'upscaling et pourrait aussi se généraliser aux autres modèles.

Nous avons aussi vu que les résultats du downscaling sur les précipitations et l'évapotranspiration donnaient de très bons résultats après la simulation hydrologique. Mais nous avons aussi vu que l'on pouvait caractériser deux types de réponses en fonction des débits, les réponses décorélées et les réponses corélées en fonction des entrées. Il serait intéressant de trouver ou prouver la cause de ces corrélations en faisant une analyse de l'état de la nappe et la comparant avec les données obtenues.

## 4 Annexes

Ces annexes ont été écrites pour la joie de faire des mathématiques et ne sont en aucun cas nécessaires à la compréhension de ce rapport. Elles ont pour objectif de fournir la plupart des détails mathématiques permettant une compréhension plus complète de certains outils, d'hypothèses ou de méthodes utilisées dans ce mémoire. Il est évident que ce but est loin d'être accompli et qu'il en faudrait beaucoup plus que convenable pour couvrir l'entièreté des sujets abordés dans ce mémoire.

### 4.1 Annexe 1: Preuves et outils utilisés dans le downscaling

Nous introduisons ici quelques propriétés qui montrent que le travail avec les lois empiriques que nous effectuons est pertinent.

**Proposition 2.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles ayant des fonctions de répartition  $\mathcal{F}_X$  et  $\mathcal{F}_Y$  continues, alors  $\mathcal{F}_Y^{-1}(\mathcal{F}_X(X))$  et  $Y$  suivent la même loi.*

*Proof.* Montrons que  $\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X)$  et  $Y$  possède la même fonction de densité.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X)}(y) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_Y^{-1}(\mathcal{F}_X(X)) \leq y) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_X(X) \leq \mathcal{F}_Y(y)),$$

comme  $\mathcal{F}_X(X)$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  si  $F_X$  est continue cette égalité se réécrit

$$= \mathbb{P}(\mathcal{U}(0, 1) \leq \mathcal{F}_Y(y)) = \mathcal{F}_Y(y).$$

□

**Proposition 3.** *Soient  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  réalisations d'une variable aléatoire réelle  $X$  et  $\mathcal{F}_n$  sa fonction de répartition empirique nous avons*

$$E[\mathcal{F}_n] = F_X,$$

*alors la fonction de répartition empirique est un estimateur sans biais de la loi de  $F$ .*

*Proof.* C'est en effet évident puisque  $\mathbb{1}_{[X_i, +\infty)}(x)$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\mathcal{F}(x)$  alors

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X_i, +\infty)}(x)\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[\mathbb{1}_{[X_i, +\infty)}] = \mathcal{F}_X(x).$$

□

**Théorème 4.1.** (*Glivenko-Cantelli*) *Soient  $\mathcal{F}_X$  et  $\mathcal{F}_n$  respectivement la fonction de répartition et la fonction de répartition empirique. Alors*

$$\|\mathcal{F}_X - \mathcal{F}_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{prob} 0. \quad (4.1)$$

*Proof.* (Cas où  $\mathcal{F}_X$  est continue) On commence par remarquer que quelque soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathcal{F}_X(x)$$

d'après la loi forte des grands nombres et la proposition (3). Pour  $q$  dans  $\mathbb{Q}$ , on définit

$$\Omega_q = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(q) = \mathcal{F}_X(q)\},$$

d'après ce que nous avons dit, sa mesure pour la probabilité  $P(\Omega_q) = 1$  comme  $\mathbb{Q}$  est dénombrable nous avons

$$P\left(\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \Omega_q\right) = 1.$$

Alors, comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et que  $\mathcal{F}_X$  et les  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont continues on peut assurer que

$$\|\mathcal{F}_X - \mathcal{F}_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{prob} 0.$$

□

Le cas où  $\mathcal{F}_X$  n'est pas continue est géré par Durrett (2019) (ex 7.2 chap 1). On voit d'après le théorème 4.1 que la fonction de répartition empirique est le bon estimateur de la fonction de répartition.

## 4.2 Annexe 2: Transport optimal

Cette Annexe se lit à la suite de la section 1.

Nous voulons à la fois projeter la précipitation et l'évapotranspiration, on peut alors considérer une seule variable aléatoire dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut généraliser l'idée utilisée précédemment pour trouver une méthode permettant de corriger les biais statistiques introduits par les modèles de projection. Cette méthode a d'autant plus d'intérêt que la variable utile dans les modèles hydrologique est

$$\text{quantité d'eau entrant dans le sol} = \text{précipitation} - \text{évapotranspiration}. \quad (4.2)$$

Comme l'objectif final est de projeter des résultats hydrologiques sur le bassin du Little Washita, il semble particulièrement pertinent de considérer la loi conjointe (précipitation, évapotranspiration<sup>9</sup>). La théorie généralisant cette idée est la théorie du **transport optimal**.

La problématique du transport optimal a premièrement été introduite en par Gaspard Monge en 1781 puis a été développée par Kantorovitch en 1971 et ses travaux pour l'allocution des ressources lui ont valu un prix nobel d'économie en 1975. La formulation que nous en donnons par la suite est issue de Villani (2003).

### 4.2.1 Problématique

Précédemment nous avons cherché à définir une transformation  $G$  de la variable aléatoire  $X$  telle  $G(X)$  suive la même loi que  $Y$ . En considérant les fonctions de densité de  $X$  et de  $Y$  on a cherché à ce que la fonction de densité de  $G(X)$  soit la même que celle de  $Y$ . On peut considérer une fonction de densité comme une mesure sur l'espace sur lequel on travail on a alors transformé une mesure  $f_X$  en une autre mesure  $f_Y$ . Comme ces deux mesures sont de mesure totale égale à 1, on peut dire que d'une certaine manière chaque "poids" de la mesure  $f_X$  a été déplacé vers un

---

<sup>9</sup>Nous utiliserons en réalité l'évaporation potentielle et nous verrons dans la section 2.1 qu'il faut encore travailler pour obtenir l'évaporation finale.

“poids” de la mesure  $f_Y$ . L’idée du transport optimal est de trouver les déplacements naturels des poids d’une fonction de densité à une autre.

Nous présenterons ici la formulation établie par Kantorovitch dans les années 70 qui a l’avantage d’inclure celle de Monge.

Considérons deux fonctions de répartitions pour des variables aléatoires  $U$  et  $V$  à valeurs dans  $A$  et  $B$ , on appelle ces fonctions  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  et on appelle  $f$  et  $g$  leurs fonctions de densités. On cherche alors une mesure  $\pi$  sur  $A \times B$  satisfaisant

$$\int_B d\pi(x, y) = f(x), \quad \int_A d\pi(x, y) = g(y),$$

de plus on veut que  $\pi$  satisfaisant l’équation précédente minimise la quantité

$$\mathcal{I}[\pi] = \int_{A \times B} d(x, y) d\pi(x, y),$$

où  $d$  est une certaine distance définissant le coût de transport de  $x$  à  $y$ . Dans notre cas  $U$  et  $V$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous voyons que le choix de la distance a une influence majeure sur la mesure obtenue. On peut interpréter  $d\pi(x, y)$  comme la quantité déplacée de  $x$  à  $y$ .

#### 4.2.2 Résolution du problème dans le cas fini et downscaling

La résolution de ce problème dans le cas fini a été traité de nombreuses fois. On utilisera les idées développées dans le papier Robin et al. (2019). Appelons  $\pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  une matrice de transfert de poids dans le cas fini. On a  $X_1, \dots, X_n$  ainsi que  $Y_1, \dots, Y_m$  des réalisations de  $X$  et de  $Y$  et on cherche alors une matrice  $\pi$  telle que

$$\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} = P(X = X_i) \text{ et } \sum_{i=1}^m \pi_{i,j} = P(Y = Y_j),$$

avec  $\pi$  minimisant

$$\mathcal{I}[\pi] = \sum_{i,j} d(X_i, Y_j) \pi_{i,j}.$$

Le papier Robin et al. (2019) utilise la norme euclidienne comme distance, l’obtention de cette solution peut se faire par un algorithme de simplexe, voir par exemple Huang and Chen (2012). Pour corriger le biais d’estimation on peut alors pour chaque  $x$  tirés récupérer (par méthode de krigeage par exemple) le  $\pi(x, \cdot)$ . D’après la construction de  $\pi$ , on peut alors normaliser la fonction  $y \mapsto \pi(x, y)$  et tirer aléatoirement un point selon la loi ainsi trouvée (voir Robin et al. (2019) pour plus de détails). Nous n’avons pas utilisé cette méthode, bien qu’il aurait été très intéressant de voir ses résultats.

#### 4.3 Annexe 3: La statistique de Cramér-von Mises

Soient  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  des réalisations indépendante issues des variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$ . On appelle  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{G}_m$  les fonctions de répartitions empiriques définies à partir de ces réalisation et  $\mathcal{H}_{m,n}$  la fonction de répartition empirique définie à partir des réalisations

$(Z_i)_{i \in \llbracket 1, m+n \rrbracket} = X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ . Par la suite on considéra que tous les éléments sont triés dans leur ensemble (c.à.d.  $i \leq j \Rightarrow E_i \leq E_j$ ). Nous avons alors l'égalité suivante

$$C_{n,m} = \frac{nm}{n+m} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_n(x) - \mathcal{G}_m(x)]^2 d\mathcal{H}_{m,n}(x) = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{4nm - 1}{6(m+n)}. \quad (4.3)$$

où  $R_{Z_i}$  est le rang de  $Z_i$  dans  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$  autrement dit

$$R_{X_i} = \text{Card}(\{j \in \llbracket 1, m+n \rrbracket, Z_j \leq Z_i\}).$$

Notons que cette égalité transforme un problème d'analyse en un problème de dénombrement beaucoup plus simple. On rappelle la définition de l'intégrale par rapport à une fonction.

**Définition 11.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues par morceaux on définit l'intégrale de  $f$  par rapport à  $g$  comme étant

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dg(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(x_{i,n}) (g(x_{i,n}) - g(x_{i,n-1})), \quad x_{i,n} = i/n.$$

*Proof.* Commençons par montrer l'égalité

$$\frac{nm}{n+m} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_n(x) - \mathcal{G}_m(x)]^2 d\mathcal{H}_{m,n}(x) = \frac{mn}{(m+n)^2} \sum_{i=1}^{m+n} (\mathcal{F}_n(Z_i) - \mathcal{G}_m(Z_i))^2.$$

On pose  $\delta = \inf\{|Z_i - Z_j|, Z_i \neq Z_j\}$ , quel que soit  $n \geq n_0$  tel que  $1/n_0 < \delta$  on a:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}_n(\frac{i}{n}) - \mathcal{G}_m(\frac{i}{n}))^2 \left( \mathcal{H}_{m,n}(\frac{i}{n}) - \mathcal{H}_{m,n}(\frac{i-1}{n}) \right) = \sum_{i=1}^{m+n} (\mathcal{F}_n(Z_i) - \mathcal{G}_m(Z_i))^2,$$

on obtient donc directement l'égalité voulue en passant à la limite.

Observons maintenant que  $\mathcal{F}_n(X_i) = i/n$  et  $\mathcal{G}_m(X_i) = (R_{X_i} - i)/m$  ainsi que  $\mathcal{F}_n(Y_i) = (R_{Y_i} - i)/n$  et  $\mathcal{G}_m(Y_i) = i/m$ . On peut alors réécrire  $C_{n,m}$  en séparant la somme sur les  $X_i$  et  $Y_i$

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= \frac{mn}{(m+n)^2} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} - \frac{R_{X_i} - i}{m} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left( \frac{R_{Y_i} - i}{n} - \frac{i}{m} \right)^2 \right] \\ &= \frac{mn}{(m+n)^2} \left[ \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^n \left( R_{X_i} - i \frac{m+n}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^m \left( R_{Y_i} - i \frac{m+n}{m} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Remarquons que  $C_{n,m}$  est de la forme

$$C_{n,m} = \frac{mn}{(m+n)^2} \left[ \frac{C_1}{m^2} + \frac{C_2}{n^2} \right],$$

et que  $C_1$  et  $C_2$  sont symétriques en  $n$  et  $m$ . On définit  $\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n R_{X_i}^2$ ,  $\Sigma_2 = \sum_{i=1}^m R_{Y_i}^2$  et  $S_k = \sum_{i=1}^k i^2$  nous allons travailler sur l'expression

$$C_1 = \sum_{i=1}^n \left( R_{X_i} - i \frac{m+n}{n} \right)^2.$$

On la développe puis factorise pour obtenir

$$C_1 = \frac{m+n}{n} \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 - \frac{m}{n} \Sigma_1 + \frac{m(m+n)}{n^2} \mathcal{S}_n.$$

On obtient de la même manière

$$C_2 = \frac{m+n}{m} \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 - \frac{n}{m} \Sigma_2 + \frac{n(m+n)}{m^2} \mathcal{S}_m.$$

D'après ce qu'on a dit précédemment on a donc:

$$C_{n,m} = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{(m+n)^2} + \frac{\mathcal{S}_n}{n(n+m)} + \frac{\mathcal{S}_m}{m(m+n)}.$$

On remarque  $\Sigma_1 + \Sigma_2 = \mathcal{S}_{m+n}$  et que l'on a la première moitié de notre somme. Il ne reste plus qu'à développer l'expression

$$\begin{aligned} & -\frac{\mathcal{S}_{m+n}}{(m+n)^2} + \frac{\mathcal{S}_n}{n(n+m)} + \frac{\mathcal{S}_m}{m(m+n)} \\ & = -\frac{(m+n+1)(2m+2n+1)}{6(m+n)} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6(m+n)} + \frac{(m+1)(2m+1)}{6(m+n)} = -\frac{4mn-1}{6(m+n)} \end{aligned}$$

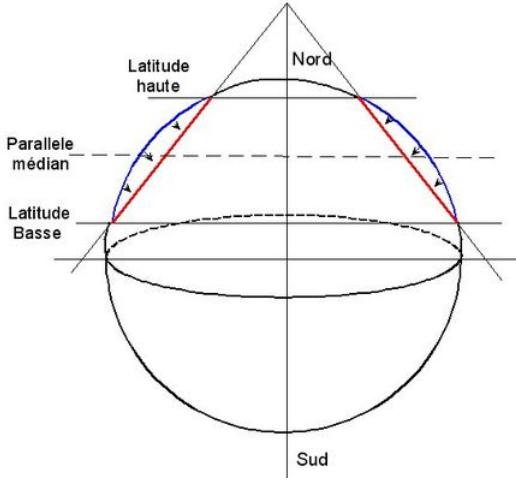
En regroupant nos deux résultats nous avons finalement:

$$C_{n,m} = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{4nm-1}{6(m+n)}$$

□

#### 4.4 Annexe 4: La projection conique conforme de Lambert

La plupart des fonctions de projection de  $S(\mathbb{R}^3)$  dans  $\mathbb{R}^2$  sont des surfaces développables sur lesquelles on projette les points de la terre. Par exemple des cônes, des cylindres et des plans (projection stéréographique) sont les surfaces développable les plus connues. La **projection Lambert** est une projection conique aussi appelée la projection orthomorphique. Ses caractéristiques sont décrites dans le livre Grafarend and Krumm (2014). Elle possède la caractéristique de préserver les angles et les distances pour deux latitudes choisies, pour les données NARR les latitudes choisies sont 33°N et 45°N. De plus les lignes de latitudes égales sont des cercles et celles de longitudes égales des lignes droites. Les coordonnées que nous étudions sont entre 33°N et 36°N. On va montrer que les longueurs étudiées dans cette zone de l'espace ne souffrent que de très peu de déformation.



**Figure 34:** Projection conique conforme de Lambert

**Définition 12.** On définit les fonctions  $lat : S(\mathbb{R}^3) \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  et  $lon : S(\mathbb{R}^3) \rightarrow [-\pi, \pi]$  qui associent à chaque point  $x$  de  $S(\mathbb{R}^3)$  sa latitude et sa longitude en radiant.

**Définition 13.** On définit le cône convexe  $\zeta_{\theta, \theta+\epsilon}$  comme l'ensemble des droites passant les points  $x_1$  et  $x_2$  de même longitudes de latitudes égale à  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$ . Autrement dit

$$\zeta_{\theta, \theta+\epsilon} = \{D(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S(\mathbb{R}^3), lon(x_1) = lon(x_2), lat(x_1) = \theta, lat(x_2) = \theta + \epsilon\}.$$

où  $D(x_1, x_2)$  est la droite passant par  $x_1$  et  $x_2$ .

Il est évident que pour les lignes de latitude haute ( $\theta + \epsilon$ ) et basse ( $\theta$ ) les longueurs sont conservées. On définit  $\epsilon = \pi(45 - 33)/180$ .

**Proposition 4.** Pour toute courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S(\mathbb{R}^3)$  continue dont les latitudes sont comprises entre  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$ , on a

$$\min \left( \cos(\epsilon/2), \frac{\cos(\theta + \epsilon)}{\cos(\theta)} \right) \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\cdot \cdot \cdot \mathbb{R}^2}}{\|\gamma\|_{\cdot \cdot \cdot S(\mathbb{R}^3)}} \leq 1.$$

Où  $P$  est la projection de Lambert conservant les longueurs pour les latitudes  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$ .

Ce résultat permettra de conclure que la géométrie des lieux peut être considérée comme euclidienne si  $\epsilon$  est suffisamment petit.

*Proof.* (Esquisse) On montrera cette inégalité pour les courbes de latitudes constantes et pour celles de longitudes constantes et la densité des fonctions de longitude ou de latitude par morceaux constantes dans l'ensemble des courbes permettra de conclure cette inégalité pour toutes les courbes.

On définit trois ensembles de courbes,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_m$  tels que

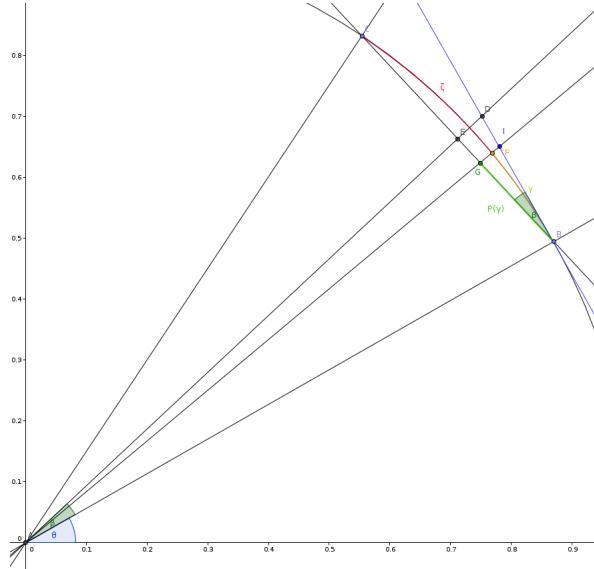
$$\mathcal{C}_1 = \{\gamma \in \mathcal{C}, lon(\gamma(t)) = c, \forall t \in [0, 1]\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\gamma \in \mathcal{C}, lat(\gamma(t)) = c, \forall t \in [0, 1]\},$$

$$\mathcal{C}_m = \{\gamma \in \mathcal{C}, \exists t_1 < \dots < t_n, \forall i \leq n, \gamma_i : t \mapsto \gamma(t_i + t(t_{i+1} - t_i)) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}.$$

On commence par étudier les courbes  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_1$  injectives, on peut alors sans perte de généralité se placer dans le cas du cercle unité dans  $\mathbb{R}^2$  (le cercle de longitude constante). On a alors l'égalité

$$\|\gamma\|_{\cdot\cdot\cdot}_{S(\mathbb{R}^3)} = \|\gamma\|_{\cdot\cdot\cdot}_{S(\mathbb{R}^2)} = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$



**Figure 35:** Figure explicative de la projection conique conforme de Lambert

D'après ce schéma, on voit que pour tout point  $F$  sur le cercle la longueur de la courbe  $\gamma$  allant de  $B$  à  $F$  est majorée par la longueur du segment  $BI$ , de plus sur la figure on a  $\epsilon/2 = \beta$ . On obtient facilement l'inégalité

$$\cos(\epsilon/2) \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\cdot\cdot\cdot}_{\mathbb{R}^2}}{\|\gamma\|_{\cdot\cdot\cdot}_{S(\mathbb{R}^3)}}.$$

Étudions maintenant les courbes  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_2$  de latitude égale à  $\theta + \epsilon$  et injectives. On sait que la courbe  $\gamma$  ainsi que sa projection  $P(\gamma)$  décrivent un arcs de cercle dans  $\mathbb{R}^3$ . Le rapport entre la longueur de l'arc de cercle définit par  $P(\gamma)$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^3$  est majoré grossièrement par  $\cos(\theta + \epsilon)/\cos(\beta)$ . Alors, quelque soit  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_2$  on

$$\frac{\cos(\theta + \epsilon)}{\cos(\beta)} \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\cdot\cdot\cdot}_{\mathbb{R}^2}}{\|\gamma\|_{\cdot\cdot\cdot}_{S(\mathbb{R}^3)}}$$

Pour chaque courbe  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_m$  on a alors

$$\min\left(\frac{2\sin(\epsilon/2)}{\epsilon}, \frac{\cos(\theta + \epsilon)}{\cos(\theta)}\right) \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\cdot\cdot\cdot}_{\mathbb{R}^2}}{\|\gamma\|_{\cdot\cdot\cdot}_{S(\mathbb{R}^3)}} \leq 1,$$

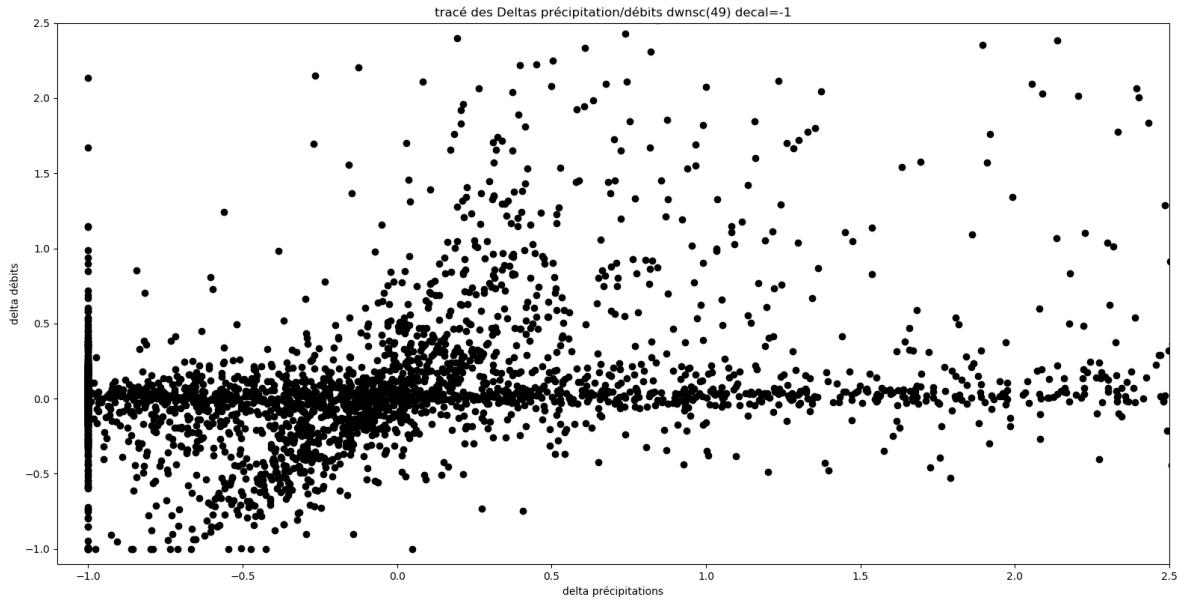
la densité de  $\mathcal{C}_m$  dans l'ensemble des courbes continues permet de conclure.  $\square$

Finalement, on peut voir que dans notre cas où  $\theta = \pi 33/180$  et  $\epsilon = \pi 12/180$ . On a que pour toute courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S(\mathbb{R}^3)$  dont la latitude est comprise entre  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$  on a

$$0.84 \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}}}{\|\gamma\|_{\|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^3)}}} \leq 1.$$

#### 4.5 Annexe 5: Classification des populations de débit

On commence par rappeler ce que sont les données  $\Delta Q$  et  $\Delta R$ , sont les différences entre les séries projetées et les séries de référence ( $R$  correspond à la pluie et  $Q$  au débit). Nous avons vu que les schémas nous incitent à considérer deux classes de points (citer la partie correspondante).



**Figure 36:** Tracé des  $\Delta Q(t)$  en fonction des  $\Delta R(t - 1)$

On définit alors les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  tels que

$$\mathcal{C} = \{(\Delta Q(t), \Delta R(t - 1)), \Delta Q(t) = f(\Delta R(t - 1)) + \epsilon(t)\},$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc et  $f$  une fonction affine, et

$$\mathcal{I} = \{(\Delta Q(t), \Delta R(t - 1)), \text{cov}(\Delta Q(t), \Delta R(t - 1)) = 0\},$$

c'est à dire les lorsque les points  $\Delta Q(t)$  et  $\Delta R(t - 1)$  sont indépendants.

Il paraît alors pertinent d'utiliser deux droites  $D_1$  et  $D_2$  pour classifier ces débits. Et l'on va chercher à définir les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  à partir de ces deux droites. Soit  $X$  un ensemble de points  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ , on cherche deux droites  $D_1$  et  $D_2$  minimisant la valeur

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, D_1 \cup D_2),$$

où  $d$  est la distance définie par

$$d(x, E) = \min_{e \in E} |x - e|^2.$$

On peut définir les droites de  $\mathbb{R}^2$  par un couple de points  $(u, v)$  dans  $\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ , où  $\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2)$  est le cercle unité et  $u$  définit la direction de la droite et  $v$  son orientation. Alors, on peut redéfinir le problème dans ce cadre. On cherche les couples  $(u_1, v_1)$  et  $u_2, v_2$  minimisant la fonction  $F$  satisfaisant

$$\begin{aligned} F : (\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &\mapsto \sum_{i=1}^n \min(d(x_i, \mathbb{R}u_1 + v_1), d(x_i, \mathbb{R}u_2 + v_2)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

On commence par développer la distance d'un point à une droite, c'est une formule de projection classique. On appelle  $f$  la fonction  $f : (\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f((u, v), x) = d(x, \mathbb{R}u + v)$ .

$$\begin{aligned} f_x(u, v) &= d(x, \mathbb{R}u + v) \\ &= |x - v - u\langle x - v, u \rangle|^2 \\ &= |x - v|^2 - \langle x - v, u \rangle^2 \\ &= |x|^2 - 2\langle x, v \rangle + |v|^2 - \langle x, u \rangle^2 + 2\langle x, u \rangle\langle v, u \rangle - \langle v, u \rangle^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

On cherche maintenant à calculer  $\vec{\nabla} f_x$ , le gradient étant une application linéaire, on a

$$\vec{\nabla} f_x(u, v) = \vec{\nabla}|x|^2 - \vec{\nabla}2\langle x, v \rangle + \vec{\nabla}|v|^2 - \vec{\nabla}\langle x, u \rangle^2 + \vec{\nabla}2\langle x, u \rangle\langle v, u \rangle - \vec{\nabla}\langle v, u \rangle^2,$$

après avoir développé puis factoriser on obtient finalement,

$$\vec{\nabla} f_x(u, v) = 2 \begin{pmatrix} (v - x)\langle u, x - v \rangle \\ v - x + u\langle u, x - v \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

On peut donc en déduire une formule pour la fonction  $F$  définie dans (4.4)

$$\begin{aligned} F((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= \sum_{i=1}^n \min(f_{x_i}(u_1, v_1), f_{x_i}(u_2, v_2)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f_{x_i}(u_1, v_1) + f_{x_i}(u_2, v_2) - |f_{x_i}(u_1, v_1) - f_{x_i}(u_2, v_2)|}{2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

On obtient finalement une expression pour  $\vec{\nabla} F$ ,

$$\vec{\nabla} F(u_1, v_1, u_2, v_2) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{I}_{x_i}^-((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \vec{\nabla} f_{x_i}(u_1, v_1)}{\sum_{i=1}^n \mathcal{I}_{x_i}^+((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \vec{\nabla} f_{x_i}(u_2, v_2)} \right) \quad (4.8)$$

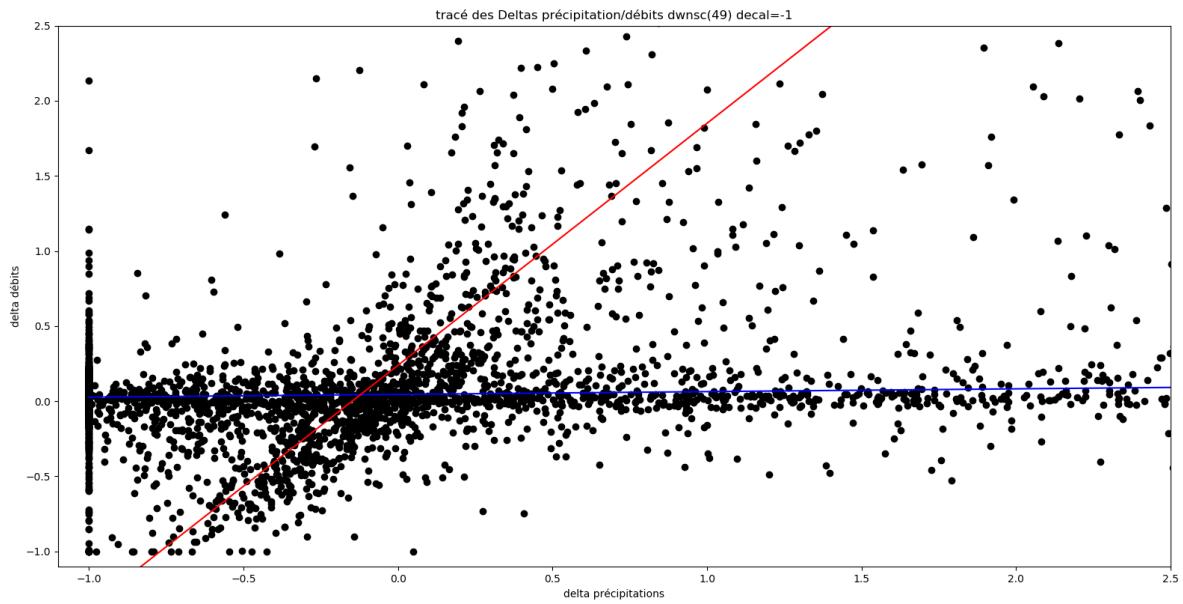
où

$$\mathcal{I}_{x_i}^-((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(f_{x_i}(u_1, v_1) - f_{x_i}(u_2, v_2))$$

et

$$\mathcal{I}_{x_i}^+((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \mathbb{1}_{[0, \infty[}(f_{x_i}(u_1, v_1) - f_{x_i}(u_2, v_2)).$$

On peut appliquer l'algorithme d'Uzawa (voir par exemple Boyd et al. (2004)) pour trouver le minimum sur  $(\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2)^2$  en considérant le plongement de  $F$  dans  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^2$  avec les contraintes  $|u_i| = 1$ . Nous avons chercher ces droites avec la fonction de minimize de “scipy.optimize” voir Jones et al. (01). Les deux droites trouvées sont alors



**Figure 37:** Tracé des  $\Delta Q(t)$  en fonction des  $\Delta R(t - 1)$  avec droites de classification

Nous verrons qu'on peut alors classifier les points en deux groupes dont nous essayons de donner une interprétation physique dans la section 3.5.3.

## References

- Allaire, G. (2005). *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique.
- Allen, P. B. (1991). Hydrology of the little washita river watershed, oklahoma: Data and analysis. *Tech. Rep. ARS-90, US Dept. of Agri., Agri. Res. Serv.*
- Ayar, P. V., Vrac, M., Bastin, S., Carreau, J., Déqué, M., and Gallardo, C. (2016). Inter-comparison of statistical and dynamical downscaling models under the euro-and med-cordex initiative framework: present climate evaluations. *Climate dynamics*, 46(3-4):1301–1329.
- Boyd, S., Boyd, S. P., and Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Büning, H. (2002). Robustness and power of modified lepage, kolmogorov-smirnov and cramér-von mises two-sample tests. *Journal of Applied Statistics*, 29(6):907–924.
- Cappus, P. (1960). Etude des lois de l’écoulement-application au calcul et à la prévision des débits. *La houille blanche*, pages 493–520.
- Christensen, J. H., Boberg, F., Christensen, O. B., and Lucas-Picher, P. (2008). On the need for bias correction of regional climate change projections of temperature and precipitation. *Geophysical Research Letters*, 35(20).
- De Marsily, G. (1986). Quantitative hydrogeology. Technical report, Paris School of Mines, Fontainebleau.
- Durrett, R. (2019). *Probability: theory and examples*, volume 49. Cambridge university press.
- Éthier, F. (2011). *À propos de divers tests statistiques pour l’égalité des lois*. PhD thesis, Université du Québec à Trois-Rivières.
- Fisz, M. (1963). Probability theory and mathematical statistics.
- Golse, F. (2020). *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Les éditions de l’école polytechnique.
- Grafarend, E. W. and Krumm, F. W. (2014). *Map projections*. Springer.
- Guimberteau, M. (2016). Introduction to the current routing schemeand its ongoing evolutions in the land-surface model orchidee.
- Guimberteau, M. (2017). Introduction to the multilayer soil diffusion scheme and the routing scheme in orchidee.
- Hillel, D. (2003). *Introduction to environmental soil physics*. Elsevier.
- Horton, R. E. (1933). The role of infiltration in the hydrologic cycle. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 14(1):446–460.
- Huang, W.-L. and Chen, S.-P. (2012). Optimal aggregate production planning with fuzzy data. *International Journal of Industrial and Manufacturing Engineering*, 6(8):1633–1638.

Jones, E., Oliphant, T., Peterson, P., et al. (2001–). SciPy: Open source scientific tools for Python.

Kristensen, K. and Jensen, S. (1975). A model for estimating actual evapotranspiration from potential evapotranspiration. *Hydrology Research*, 6(3):170–188.

Lindgren, F., Rue, H., and Lindström, J. (2011). An explicit link between gaussian fields and gaussian markov random fields: the stochastic partial differential equation approach. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 73(4):423–498.

Maquin, M. (2016). *Développement d'un modèle hydrologique de colonne représentant l'interaction nappe-végétation-atmosphère et applications à l'échelle du bassin versant*. PhD thesis, Université Paris-Saclay (ComUE).

Maraun, D. (2012). Nonstationarities of regional climate model biases in european seasonal mean temperature and precipitation sums. *Geophysical Research Letters*, 39(6).

Maxwell, R. M., Chow, F. K., and Kollet, S. J. (2007). The groundwater–land-surface–atmosphere connection: Soil moisture effects on the atmospheric boundary layer in fully-coupled simulations. *Advances in Water Resources*, 30(12):2447–2466.

Michelangeli, P.-A., Vrac, M., and Loukos, H. (2009). Probabilistic downscaling approaches: Application to wind cumulative distribution functions. *Geophysical Research Letters*, 36(11).

Nahar, J., Johnson, F., and Sharma, A. (2017). Assessing the extent of non-stationary biases in gcms. *Journal of Hydrology*, 549:148–162.

Robin, Y., Vrac, M., Naveau, P., and Yiou, P. (2019). Multivariate stochastic bias corrections with optimal transport. *Hydrology and Earth System Sciences*, 23(2):773–786.

Rosero, E., Gulden, L. E., Yang, Z.-L., De Goncalves, L. G., Niu, G.-Y., and Kaheil, Y. H. (2011). Ensemble evaluation of hydrologically enhanced noah-lsm: Partitioning of the water balance in high-resolution simulations over the little washita river experimental watershed. *Journal of Hydrometeorology*, 12(1):45–64.

Villani, C. (2003). *Topics in optimal transportation*. Number 58. American Mathematical Soc.

Vrac, M., Drobinski, P., Merlo, A., Herrmann, M., Lavaysse, C., Li, L., and Somot, S. (2012). Dynamical and statistical downscaling of the french mediterranean climate: uncertainty assessment. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 12(9):2769–2784.

Vrac, M., Noël, T., and Vautard, R. (2016). Bias correction of precipitation through singularity stochastic removal: Because occurrences matter. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 121(10):5237–5258.

Zhifang, Y., Hua, O., Xingliang, X., Caiping, Z., Feng, Z., and Bin, S. (2010). Estimation of evapotranspiration from faber fir forest ecosystem in the eastern tibetan plateau of china using shaw model. *Journal of Water Resource and Protection*, 2010.