

LABORATOIRE DES SCIENCES DU CLIMAT  
ET DE L'ENVIRONNEMENT

---

# Upscaling et Downscaling dans la modélisation hydrologique

---

*Auteur*

MATHIS DERONZIER  
MINES SAINT-ÉTIENNE

*Maîtres de stage*

EMMANUEL MOUCHE  
C.E.A.  
MATHIEU VRAC  
C.E.A.

STAGE DE RECHERCHE DE MASTER 2

Avril-Septembre  
2021

# Contents

<b>1</b>	<b>Downscaling</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction à la problématique du downscaling . . . . .	3
1.2	Cumulative Distribution Function transform (CDFt) . . . . .	5
1.2.1	Quantile-Quantile . . . . .	5
1.2.2	CDFt . . . . .	5
1.3	Transport optimal . . . . .	7
1.3.1	Problématique . . . . .	7
1.3.2	Résolution du problème dans le cas fini et downscaling . . . . .	8
1.4	Analyse des résultats obtenus par downscaling . . . . .	8
1.4.1	Quelques outils mathématiques . . . . .	9
1.4.2	Distance de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	10
1.4.3	Distance de Cramér-von Mises . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Upscaling des modèles hydrologiques</b>	<b>11</b>
2.1	Généralités sur les interactions atmosphère - surface continentale - sol . . . . .	11
2.1.1	Les écoulements . . . . .	11
2.1.2	Transferts d'eau entre le sol et l'atmosphère . . . . .	13
2.2	Les concepts hydrologiques . . . . .	14
2.2.1	Quelques définitions pour l'étude en milieu poreux . . . . .	14
2.2.2	Les équations pour modéliser l'écoulement . . . . .	15
2.2.3	La loi de Darcy et l'équation de diffusivité en milieu poreux . . . . .	16
2.3	Les modèles . . . . .	17
2.3.1	Modèle de surface continentale Orchidée . . . . .	17
2.3.2	Modèle à base physique: Hydrogéosphère . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Projections climatiques et modélisation hydrologique</b>	<b>17</b>
3.1	Analyse de la structure spatiale des données NARRs . . . . .	18
3.2	Présentation des résultats de projection climatiques . . . . .	22
3.2.1	La dégradation des données . . . . .	22
3.3	Les résultats de la dégradation et du downscaling sur les données . . . . .	22
3.3.1	Tracé des Boxplot . . . . .	22
3.3.2	Affichage des données projetées en fonction des données réelles . . . . .	23
3.3.3	Différence analyse Root Mean Square error et distance de Cramér-von Mises . . . . .	24
3.4	Les résultats hydrologiques . . . . .	26
3.4.1	Modèle de pente simple pour la modélisation hydrologique du modèle du Little Washita . . . . .	27
3.4.2	Les données d'entrées dans HydroGéoSphère et l'initialisation . . . . .	28
3.5	L'influence de la pluie sur les débits . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Indexes</b>	<b>31</b>
4.1	Indexe 1: La statistique de Cramér-von Mises . . . . .	31
4.2	Indexe 2: Projection conique conforme de Lambert . . . . .	32
4.3	Indexe 3: Classification des populations de débit . . . . .	35

# 1 Downscaling

Le downscaling statistique (voir par exemple Vrac et al. (2012) et Ayar et al. (2016)) est une méthode utilisée dans les sciences du climat permettant d'améliorer les projections des modèles climatiques. À partir des données obtenues par un modèle climatique (modèle de circulation général, modèle climatique régional) et des données observées, on cherche à observer et corriger les biais systématiques introduits par les modèles. Le nom "downscaling" vient du domaine d'application de cette méthode. On passe d'un modèle à grande échelle à des données observées à petite échelle. Cette méthode est très utile dans la pratique où l'on a des modèles de climat donnant des informations sur des maillages de grande échelle ( $\sim 200km \times 200km$ ). Dans notre cas, nous utilisons le downscaling pour projeter les variables climatiques de *précipitation* et d'*évapotranspiration* sur le bassin du **Little Washita** un bassin d'une centaine de kilomètres carrés. Nous n'avons testé qu'une méthode de downscaling mais d'autre existent. Nous l'avons testée à partir du jeu de données: les données NARRs (de taille de grille de  $30km \times 30km$ ) ainsi que celles de l'IPSL (de taille de grille de  $200 \times 200km^2$ ), nous décrivons ce travail dans la section 3.

Pour formuler rigoureusement l'approche du downscaling nous introduisons des hypothèses communément admises dans les sciences du climat. On suppose que les variables étudiées sont des variables aléatoires réelles dépendantes du temps et de l'espace. On appelle  $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$  l'espace des variables aléatoires réelles et  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$ , on suppose de plus que l'on peut faire correspondre chaque point de la terre à un point de la sphère unité. Nous travaillerons par la suite sur la sphère unité que l'on considérera être la terre.

**Définition 1.** *Pour une variable quantitative  $V$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , on appelle  $\mathcal{T}_V$  la fonction donnant les valeurs réelles de cette variable sur la terre à un moment donné, formellement (en considérant la terre comme une sphère  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ) nous avons*

$$\mathcal{T}_V : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}). \quad (1)$$

*Alors,  $\mathcal{T}_V(t, x)$  est la valeur de la variable au temps  $t$  au point de coordonnée  $x$  sur terre.*

**Définition 2.** *On appelle simulateur de variable quantitative  $V$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , une fonction  $S_V$  satisfaisant:*

$$S_V : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}). \quad (2)$$

On peut alors estimer la qualité des simulations en mesurant une distance entre la réalisation  $\mathcal{T}_V([0, T])$  et celle de  $S_V([0, T])$ . Le travail du downscaling est de trouver des transformations sur les variables aléatoires  $S_V(t, x)$  pour minimiser ces distances. Plusieurs méthodes peuvent-être utilisées pour réduire ces distances et les géostatistiques essaient entre autres d'étudier la structure de covariance sur l'espace sur lequel on considère ces variables. Des méthodes de résolution d'équations différentielles permettent d'interpoler les résultats (voir par exemple Lindgren et al. (2011)). Ces méthodes ne sont pas celles que nous allons étudier, mais il semble important de

## 1.1 Introduction à la problématique du downscaling

Le downscaling consiste donc à effectuer des transformations sur des variables aléatoire réelles. Pour étudier ces variables aléatoires et construire les transformation on commence par introduire

ici les notions de **fonction de répartition** et de **fonction de répartition empirique** ainsi que celle de **fonction de densité**. Ces notions sont centrales dans les méthodes de downscaling que nous allons expliquer.

**Définition 3.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, on appelle **fonction de répartition de  $X$** ,  $\mathcal{F}_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  la fonction vérifiant

$$\mathcal{F}_X(x) = P(X \leq x). \quad (3)$$

**Définition 4.** Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  réalisations indépendantes d'une variable aléatoire réelle  $X$ , on appelle **fonction de répartition empirique de  $X$** , la fonction  $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X_i, +\infty)}(x). \quad (4)$$

**Définition 5.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, on note  $f_X$  la **fonction de densité de  $X$** ,  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  la fonction vérifiant

$$f_X(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + t)}{t}. \quad (5)$$

Remarquons qu'une variable aléatoire ne possède pas nécessairement de fonction de répartition (notamment les variables aléatoires à valeurs discrètes), on peut cependant les étudier dans la théorie des distributions.

Commençons par établir notre problématique dans le cas le plus simple où l'on cherche à projeter une variable  $V$  dans l'avenir alors que nous connaissons ses réalisations dans le passé à un endroit donné  $x$ . On peut alors considérer deux processus aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}} = (\mathcal{S}_V(t, x))_{t \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}} = (\mathcal{T}_V(t, x))_{t \in \mathbb{N}}$ .

La problématique à laquelle nous cherchons de répondre est la suivante: connaissant  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  les réalisations jusqu'au temps  $n$  ainsi que  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}$  (pour des temps futurs), on cherche une fonction  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les tirages  $G(X_{i_1}), \dots, G(X_{i_m})$  et  $Y_{i_1}, \dots, Y_{i_m}$  soient proches du point de vu de leur loi (nous éclaircirons ce point par la suite dans la section 1.4).

Autrement dit, en appelant  $X$  et  $Y$  les réalisations de  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  sur  $\{1, \dots, n\}$  et  $X'$  et  $Y'$  les réalisations de  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$  et de  $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$  sur  $\{i_1, \dots, i_m\}$ , on cherche à définir  $G_{X,Y}$  à partir de  $X, Y$  tel que  $G_{X,Y}$  minimise

$$d(\mathcal{F}_{G_{X,Y}(X)}, \mathcal{F}_{Y'}),$$

où  $d$  est une distance définie sur les fonctions. Nous voulons aussi que  $G_{X,Y}$  respecte certaines propriétés. Une des propriété qui nous intéresse est celle de la consistance de notre transformation.

**Définition 6.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles et  $G_{X,Y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une transformation, on dit que  $G_{X,Y}$  est **consistante vis à vis de  $X$  et de  $Y$**  si elle vérifie

$$\mathcal{F}_{G_{X,Y}(X)} = \mathcal{F}_Y. \quad (6)$$

Dans la suite les transformations que nous considérerons satisferont toujours l'équation (6).

## 1.2 Cumulative Distribution Function transform (CDFt)

Nous allons ici présenter l'algorithme principalement étudié et utilisé dans ce stage, l'algorithme CDF-t Vrac et al. (2012). Nous commencerons par présenter l'algorithme de quantile-quantile (voir ) permettant de comprendre l'esprit des transformations  $G$  affectées aux processus aléatoires. Puis nous décrirons l'algorithme de CDFt-t.

### 1.2.1 Quantile-Quantile

Le quantile-quantile consiste simplement à définir  $G_{X,Y}$  la transformation permettant de passer de la fonction de distribution de  $X$  à celle de  $Y$ .

**Proposition 1.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles ayant des fonctions de répartition  $\mathcal{F}_X$  et  $\mathcal{F}_Y$  continues, alors  $\mathcal{F}_Y^{-1}(\mathcal{F}_X(X))$  et  $Y$  suivent la même loi.*

*Proof.* Montrons que  $\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X)$  et  $Y$  possède la même fonction de densité.

$$\mathcal{F}_{\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X)}(y) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_Y^{-1}(\mathcal{F}_X(X)) \leq y) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_X(X) \leq \mathcal{F}_Y(y)),$$

comme  $\mathcal{F}_X(X)$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  si  $\mathcal{F}_X$  est continue cette égalité se réécrit

$$= \mathbb{P}(\mathcal{U}(0, 1) \leq \mathcal{F}_Y(y)) = \mathcal{F}_Y(y).$$

□

Le principe de l'algorithme **quantile-quantile** est de calculer la transformation  $G = \mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X$ . Ainsi,  $\mathcal{F}_{G(X)} = \mathcal{F}_Y$  et l'on définit alors  $G_{X,Y} = G$ . L'une des limites de cette méthode est que le support de  $f_{G(X)}$  est inclus dans celui de  $f_Y$ , alors les valeurs prises par  $G_{X,Y}(X')$  seront incluses dans le support de  $f_Y$ . Nous aimerions que  $X'$  ait aussi une influence sur le support des valeurs prises. Ce qui n'est pas le cas dans la transformation  $G$  que nous avons considérée. C'est en partie cette observation qui a motivé l'étude d'autres transformations.

### 1.2.2 CDFt

L'algorithme de **Cumulative Distribution Function transfer** (CDFt) vise à remédier au problème des bornes en appliquant des transformations sur les lois  $X$  et  $Y$ . On considère les réalisations  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  ainsi que  $X'_1, \dots, X'_m$ .

**CDFt avec support égale:**

On peut par exemple faire en sorte que la transformation sur les projections conserve le support de celles-ci en d'autres mots on veut

$$\min_{i \in I}(X'_i) = \min_{i \in I}(G_{X,Y}(X'_i)) \quad \text{et} \quad \max_{i \in I}(X'_i) = \max_{i \in I}(G_{X,Y}(X'_i)).$$

Il suffit de transformer la loi de  $Y$  sur  $[0, 1]$ , de réaliser un quantile-quantile puis d'effectuer la transformation inverse. Concrètement, nous posons

$$\tilde{Y} = \frac{(Y - \min_{i \in I} Y_i)}{\max_{i \in I} Y_i - \min_{i \in I} Y_i}.$$

Alors quelque soit  $i$  dans  $\mathcal{I}$  on a  $\tilde{Y}_i \in [0, 1]$ . En appelant  $G = \mathcal{F}_{X, \tilde{Y}}$  la transformation quantile-quantile de  $X$  à  $\tilde{Y}$  on a  $G_{X,Y}(X'_i) \in [0, 1]$ , la transformation s'imposant naturellement est alors

$$G_{X,Y} = (\max_{i \in I} Y_i - \min_{i \in I} Y_i)G + \min_{i \in I} Y_i.$$

C'est l'une des premières idées qui viennent-t-en tête lorsqu'on parle de transformations que l'on peut appliquer sur nos variables. Notons que l'on a aussi une grosse base de données et que l'on peut aussi essayer d'utiliser des méthodes de régression linéaire ou de machine learning pour estimer les max et les min de  $Y'$  en fonction de  $X$ . Nous allons illustrer l'usage d'une de ces méthodes dans la prochaine partie 1.2.2.

### CDFt avec méthode de prédiction

Supposons que l'on ait des fonctions estimant la variance et la moyenne de  $Y'$  à partir de  $X'$ , s'exprimant sous la forme  $\overline{f(X')} = \overline{Y'}$  ainsi que  $\overline{g(X')} = \overline{\sigma(Y')}$ <sup>1</sup>. Ces fonctions peuvent être obtenues par des méthodes de régression linéaire sur des sous échantillons des données de  $X$  et  $Y$  soit après les avoir ordonnées si les  $X_i$  et les  $Y_i$  sont indépendants soit en fonction de leur indice.

On aimerait alors que  $G_{X,Y}$  conserve la moyenne ainsi que la variance. Formellement, on voudrait définir  $G_{X,Y}$  telle que quelque soient  $\{i_1, \dots, i_m\}$  un ensemble d'entiers consécutifs et  $X'$  et  $Y'$  les vecteurs des variables aléatoires des  $X_{i_j}$  et  $Y_{i_j}$  sur cet ensemble, on ait :

$$\overline{G_{X,Y}(X')} = \overline{Y'}, \quad (7)$$

ainsi que

$$\sigma(G_{X,Y}(X')) = \sigma(Y'), \quad (8)$$

et que  $G$  respecte la condition de consistance (6). Concrètement, nous allons faire des transformations sur les variables aléatoires pour avoir ces conditions là. En appelant  $G_{X,Y} = \mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X$  on peut définir la transformation  $G_{X,Y,X'}$

$$G_{X,Y}(X') = \overline{g(X')} \frac{\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X') - \overline{\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X')}}{\sigma(\mathcal{F}_Y^{-1} \circ \mathcal{F}_X(X'))} + \overline{f(X')}.$$

On peut vérifier facilement que  $G_{X,Y}$  ainsi défini respecte bien les propriétés (6) (7) et (8). L'idée est alors de trouver les fonctions  $f$  et  $g$  par des méthodes de régression linéaires. Remarquons aussi que lorsque la loi est bornée cela ajoute une condition supplémentaire à  $G_{X,Y}$  et l'on ne peut pas nécessairement avoir les conditions sur la moyenne et la variance. Il faut alors choisir parmi l'une des conditions (7) et (8), c'est par exemple le cas pour les précipitations qui ne peuvent être négatives.

**Note 1.** Remarquons que l'efficacité des transformations que nous avons décrites repose en partie sur la stationnarité des lois suivies par les variables aléatoires au cours du temps. Les questions de stationnarité ont été abordées dans Maraun (2012), Christensen et al. (2008) ainsi que Nahar et al. (2017).

---

<sup>1</sup>On définit par  $\overline{X}$  la moyenne  $X$  et par  $\sigma(X)$  son écart type

### 1.3 Transport optimal

Nous voulons à la fois projeter la précipitation et l'évapotranspiration, on peut alors considérer une seule variable aléatoire dans  $\mathbb{R}^2$ . On peut généraliser l'idée utilisée précédemment pour trouver une méthode permettant de corriger les biais statistiques introduits par les modèles de projection. Cette méthode a d'autant plus d'intérêt que la variable utile dans les modèles hydrologique est

$$\text{pluie entrant dans le sol} = \text{précipitation} - \text{évapotranspiration}.$$

Comme l'objectif final est de projeter des résultats hydrologiques sur le bassin du Little Washita, il semble particulièrement pertinent de considérer la loi conjointe (précipitation, évapotranspiration). La théorie généralisant cette idée est la théorie du **transport optimal**.

La problématique du transport optimal a premièrement été introduite en par Gaspard Monge en 1781 puis a été développée par Kantorovitch en 1971 et ses travaux pour l'allocation des ressources lui ont valu un prix nobel d'économie en 1975.

#### 1.3.1 Problématique

Précédemment nous avons cherché à définir une transformation  $G$  de la variable aléatoire  $X$  telle  $G(X)$  suive la même loi que  $Y$ . En considérant les fonctions de densité de  $X$  et de  $Y$  on a cherché à ce que la fonction de densité de  $G(X)$  soit la même que celle de  $Y$ . On peut considérer une fonction de densité comme une mesure sur l'espace sur lequel on travail on a alors transformé une mesure  $f_X$  en une autre mesure  $f_Y$ . Comme ces deux mesures sont de mesure totale égale à 1, on peut dire que d'une certaine manière chaque "poids" de la mesure  $f_X$  a été déplacé vers un poids de la mesure  $f_Y$ . L'idée du transport optimal est de trouver les déplacements naturels des poids d'une fonction de densité à une autre.

Nous présenterons ici la formulation établie par Kantorovitch dans les années 70 qui a l'avantage d'inclure celle de Monge. Le livre Villani (2003) donne un cours de référence internationale sur les problématiques de transport optimal.

Considérons deux fonctions de répartitions pour des variables aléatoires  $U$  et  $V$  à valeurs dans  $A$  et  $B$ , on appelle ces fonctions  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  et on appelle  $f$  et  $g$  leurs fonctions de densités. On cherche alors une mesure  $\pi$  sur  $A \times B$  satisfaisant

$$\int_B d\pi(x, y) = f(x), \quad \int_A d\pi(x, y) = g(y),$$

de plus on veut que  $\pi$  satisfaisant l'équation précédente minimise la quantité

$$\mathcal{I}[\pi] = \int_{A \times B} d(x, y) d\pi(x, y),$$

où  $d$  est une certaine distance définissant le coût de transport de  $x$  à  $y$ . Dans notre cas  $U$  et  $V$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous voyons que le choix de la distance a une influence majeure sur la mesure obtenue. Alors on peut voir  $d\pi(x, y)$  comme la quantité déplacée de  $x$  à  $y$ .

### 1.3.2 Résolution du problème dans le cas fini et downscaling

La résolution de ce problème dans le cas fini a été traité de nombreuses fois. On utilisera les idées développées dans le papier Robin et al. (2019). Appelons  $\pi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  une matrice de transfert de poids dans le cas fini. On a  $X_1, \dots, X_n$  ainsi que  $Y_1, \dots, Y_m$  des réalisations de  $X$  et de  $Y$  et on cherche alors une matrice  $\pi$  telle que

$$\sum_{j=1}^n \pi_{i,j} = P(X = X_i) \text{ et } \sum_{i=1}^m \pi_{i,j} = P(Y = Y_j),$$

avec  $\pi$  minimisant

$$\mathcal{I}[\pi] = \sum_{i,j} d(X_i, Y_j) \pi_{i,j}.$$

Le papier utilise la norme euclidienne comme distance, l'obtention de cette solution peut se faire par un algorithme de simplexe, voir par exemple Huang and Chen (2012). Pour corriger le biais d'estimation on peut alors pour chaque  $x$  tirés récupérer (par méthode de krigeage par exemple) le  $\pi(x, \cdot)$ . D'après la construction de  $\pi$ , on peut alors normaliser la fonction  $y \mapsto \pi(x, y)$  et tirer aléatoirement un point selon la loi ainsi trouvée (voir Robin et al. (2019) pour plus de détails).

### 1.4 Analyse des résultats obtenus par downscaling

Concrètement nous allons faire de la validation croisée, nous allons apprendre sur 50% de nos données et faire nos projections. La partie à laquelle nous allons nous intéresser ici est la distance que nous utilisons pour évaluer nos projections. Contrairement à la manière habituelle de faire, consistant à estimer une distance entre chaque point projeté (souvent RMSE), en climatologie nous cherchons à comprendre la tendance générale. En effet, le paradigme d'évaluation en prévisions climatiques sur plusieurs années n'a pas l'ambition de prédire ponctuellement chaque prévision, mais il a pour objectif de décrire une tendance générale. On s'intéresse alors à des informations plus générales, c'est à dire que l'on travaille sur les lois de répartitions. Il faut alors réfléchir à des normes ou des distance pour évaluer la qualité de nos projections.

Dans notre cas nous faisons des tests non-paramétriques, c'est à dire que l'on ignore tout des lois que nous comparons. Différentes méthodes pour tester l'égalité de lois sont connues, nous n'en développerons que deux. Le mémoire Éthier (2011) donne une présentations de principaux tests statistiques permettant d'évaluer si oui ou non à partir des réalisations  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  de deux lois inconnues sont les mêmes.

Nous posons habituellement en statistiques deux hypothèses:

$$\mathcal{H}_0 : \mathcal{F}_X = \mathcal{F}_Y \text{ et } \mathcal{H}_1 : \mathcal{F}_X \neq \mathcal{F}_Y,$$

où les égalités sur les lois sont en norme  $L^p$ . On suppose  $\mathcal{H}_0$  et on définit une statistique sur  $\|\mathcal{F}_X - \mathcal{F}_Y\|_{L^p(\mathbb{R})}$  permettant à partir de nos observations d'accepter ou de rejeter l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ . Les tests de Kolmogorov-Smirnov et Cramer-von Mises utilisent à-peu-près cette idée.



### 1.4.1 Quelques outils mathématiques

**Proposition 2.** Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  réalisations d'une variable aléatoire réelle  $X$  et  $\mathcal{F}_n$  sa fonction de répartition empirique nous avons

$$E[\mathcal{F}_n] = F_X,$$

alors la fonction de répartition empirique est un estimateur sans biais de la lois de  $F$ .

*Proof.* C'est en effet évident puisque  $\mathbb{1}_{[X, +\infty)}(x)$  suit une lois de Bernoulli de paramètre  $\mathcal{F}(x)$  alors

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X_i, +\infty)}(x)\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[\mathbb{1}_{[X_i, +\infty)}] = \mathcal{F}_X(x).$$

□

**Théorème 1.1.** (Glivenko-Cantelli) Soient  $\mathcal{F}_X$  et  $\mathcal{F}_n$  respectivement la fonction de répartition et la fonction de répartition empirique. Alors

$$\|\mathcal{F}_X - \mathcal{F}_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{prob} 0. \quad (9)$$

*Proof.* (Cas où  $\mathcal{F}_X$  est continue) On commence par remarquer que quelque soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathcal{F}_X(x)$$

d'après la loi forte des grands nombres et la proposition (2). Pour  $q$  dans  $\mathbb{Q}$ , on définit

$$\Omega_q = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(q) = \mathcal{F}_X(q)\},$$

d'après ce que nous avons dit, sa mesure pour la probabilité  $P(\Omega_q) = 1$  comme  $\mathbb{Q}$  est dénombrable nous avons

$$P\left(\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \Omega_q\right) = 1.$$

Alors, comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  et que  $\mathcal{F}_X$  et les  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont continues on peut assurer que

$$\|\mathcal{F}_X - \mathcal{F}_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{prob} 0.$$

□

Le cas où  $\mathcal{F}_X$  n'est pas continue est géré par Durrett (2019) (ex 7.2 chap 1). On voit d'après le théorème 1.1 que la fonction de répartition empirique est le bon estimateur de la fonction de répartition.

### 1.4.2 Distance de Kolmogorov-Smirnov

Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov Büning (2002) est l'un des plus utilisé pour tester l'égalité de deux lois de probabilités. Dans le contexte de l'égalité de lois de probabilité, la statistique de test est

$$K_{n,m} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_n\|_\infty.$$

La suite de variables aléatoires  $K_{n,m}$  converge vers une variable aléatoire  $K$  dont la fonction de survie est donnée par:

$$Q(x) = P(K > x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2(jx)^2) \quad (10)$$

On peut alors l'approximer avec les premiers termes de la série pour construire le test statistique. La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans le livre Fisz (1963)(chap 12.5). Nous voyons cependant que ce test est sensible aux données aberrantes, nous privilégierons alors le test de **Cramér-von Mises** Büning (2002) (section 1.4.3).

### 1.4.3 Distance de Cramér-von Mises

On considère ici les deux fonctions de répartitions  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{G}_m$  continues des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Nous voulons tester les hypothèses

$$\mathcal{H}_0 : \mathcal{F}_n = \mathcal{G}_m \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 : \mathcal{F}_n \neq \mathcal{G}_m.$$

Dans les tests proposés les statistiques sont construites à partir de deux échantillons indépendants des tests dans les cas où les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes peuvent être trouvés dans Éthier (2011). On définit aussi la fonction de répartition empirique  $\mathcal{F}_n$ .

Nous avons donc  $n$  réalisations de  $X$  et  $m$  réalisations de  $Y$  de lois de répartitions  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . La statistique du test est définie par

$$C_{n,m} = \frac{nm}{n+m} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_n(x) - \mathcal{G}_m(x)]^2 d\mathcal{H}_{m,n}(x), \quad (11)$$

avec,

$$\mathcal{H}_{n,m} = \frac{n}{n+m} \mathcal{F}_n + \frac{m}{n+m} \mathcal{G}_m. \quad (12)$$

$\mathcal{H}_{n,m}$  est alors la fonctions de répartitions empirique d'une variable aléatoire  $Z$  construite à partir des  $n+m$  réalisations indépendantes  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ . On peut simplement réécrire la valeur  $C_{n,m}$

$$C_{n,m} = \frac{mn}{(m+n)^2} \sum_{i=1}^{m+n} (\mathcal{F}_n(Z_i) - \mathcal{G}_m(Z_i))^2 \quad (13)$$

**Lemme 1.** *On peut simplifier cette formule en supposant que les  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  et  $(Y_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  sont triés on a:*

$$C_{n,m} = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{4nm-1}{6(m+n)}. \quad (14)$$

où  $R_{X_i}$  est le rang de  $X_i$  dans  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$  autrement dit

$$R_{Z_i} = \text{Card}(\{z \in Z, z \leq Z_i\}).$$

**Note 2.** La démonstration de cette formule se trouve dans l'indexe 1 et la formulation de cette égalité diffère de celle contenue dans le mémoire Éthier (2011)(sec 2.3.2) qui contient une erreur.

Cette formulation a le bon goût de nous indiquer que la statistique ne dépend pas de la loi. On peut alors calculer simplement sa statistique sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$  pour la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et ainsi retrouver les quantiles présentés dans l'article de Büning (2002). Nous voyons que l'idée du test est aussi de pondérer la différence des fonctions de répartition empiriques par les observations (l'intégration selon  $\mathcal{H}_{m,n}$ ). Ainsi, si le test de Kolmogorov-Smirnov est sensible aux outliers, celui-ci l'est beaucoup moins lorsque les échantillons sont suffisamment grands.

## 2 Upscaling des modèles hydrologiques

Comme nous l'avons vu dans la précédente partie, il existe différentes échelles d'étude. L'enjeu du downscaling est de passer de la grande échelle à la petite échelle. L'objectif de l'upscaling inverse. La différence entre ces deux méthodes est que le domaine d'application du downscaling est le traitement des données alors que celui de l'upscaling est la modélisation.

L'upscaling est une réflexion sur le changement d'échelle des modèles. L'objectif est d'avoir des modèles efficaces et applicables à grande échelle. On cherche alors à simplifier les modèles tout en gardant des propriétés intéressantes. Par exemple l'upscaling des équations de Navier-Stokes est un enjeu majeur de l'hydrologie (voir 2.2.2), on cherche à les simplifier pour pouvoir les résoudre à grandes échelles. Le temps de calcul informatique pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur de grand domaine par toutes les méthodes explose bien que le temps de résolution algorithmique est classiquement  $O(n^3)$  où  $n$  est le nombre de mailles de notre modèle. Pour résoudre ces problèmes, des modèles simplificateurs ont vu le jour comme les modèles de colonne, modèles qui ne reposent à première vue sur aucune loi physique mais qui fonctionnent empiriquement.

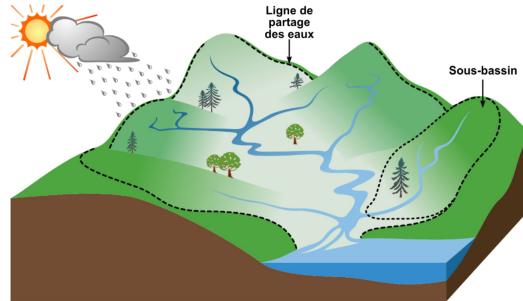
### 2.1 Généralités sur les interactions atmosphère - surface continentale - sol

Cette section reprend brièvement les principaux mécanismes entrant en compte dans les modélisations hydrologiques. Ces mécanismes seront présentés brièvement mais des sources seront données pour les lecteurs voulant étudier plus en détails ces mécanismes. Cette section s'inspire très largement de la thèse Maquin (2016) sur les modèles hydrologiques de colonne appliqués sur le bassin du Little Washita.

#### 2.1.1 Les écoulements

Les processus hydrologiques sont classiquement étudiés à l'échelle du bassin versant (voir). En hydrologie, le bassin versant est une unité géographique définie par les limites topographiques que sont les lignes de crête. L'ensemble des écoulements converge vers les dépressions, formant ainsi un réseau hydrographique qui se dirige vers le point bas du bassin versant, l'exutoire.

Il possède son équivalent en mathématiques, soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $S : E \rightarrow E$  un endomorphisme sur  $E$ . On définit le bassin d'attraction d'un point  $a$  qu'on appelle  $B(a)$  l'ensemble des points  $x$  dans  $E$  tels que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (S^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a$ . En considérant qu'il existe une fonction  $S$  définissant la trajectoire d'une goutte d'eau déposée au point  $x$  les deux définitions ont la même signification.



**Figure 1:** Bassin versant (Source :<http://rques-gries.ca/>).

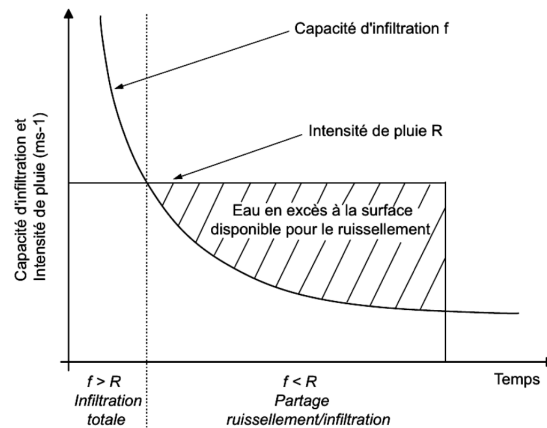
À l'échelle du bassin versant, on distingue deux types d'écoulements: les écoulements de subsurface, les écoulements de surface.

#### **Les écoulements de subsurface:**

La notion d'écoulement de subsurface se rapporte à l'écoulement de l'eau dans les pores du sol. L'écoulement de subsurface dépend de plusieurs paramètres comme les caractéristiques du sol (la porosité, la perméabilité), la saturation en eau du sol la topographie et le climat (précipitation, évaporation, transpiration). Ces écoulements sont traités par les équations de la mécanique des fluides (voir section 25) et pour plus de détails Maquin (2016) et De Marsily (1986).

#### **Les écoulements de surface:**

Les écoulements de surface, aussi qualifiés de ruissellement. Le ruissellement apparaît lorsque le sol est saturé en surface et que le débit d'eau sur le sol est supérieur à sa capacité d'infiltration. Deux phénomènes distincts sont responsables du ruissellement, lorsque le sol est saturé, l'eau ne peut plus s'y infiltrer Cappus (1960). Cette condition de saturation à la surface du sol peut être la conséquence d'une nappe affleurant la surface, la zone satisfaisant cette propriété est appelée zone de suintement. Cela arrive aussi naturellement lors d'épisode pluvieux pour les nappes peu profondes. Le ruissellement peut aussi être causé par de fortes précipitations, ainsi le débit surfacique peut devenir supérieur à la quantité d'infiltration et ainsi créer un ruissellement. La quantité d'infiltration décroît exponentiellement lors d'événements pluvieux Horton (1933).



**Figure 2:** Estimation du ruissellement en fonction du temps modèle de Horton

### 2.1.2 Transferts d'eau entre le sol et l'atmosphère

La végétation constitue le lien entre l'atmosphère et le sol. Les végétaux transfèrent de l'eau dans les deux sens, via les racines et la canopée. Il y a aussi des interactions directes entre le sol et l'atmosphère. Les trois principaux processus décrits sont l'évaporation du sol, la transpiration des végétaux ainsi que l'évaporation de l'eau interceptée par la canopée (mécanisme visant à conserver l'eau).

#### la transpiration:

La "transpiration" des plantes consiste en une libération de vapeur d'eau par les plantes dans l'atmosphère. Ce phénomène constitue une réponse passive à l'environnement atmosphérique dû à l'existence d'un gradient de pression positif de l'atmosphère à la canopée, on parle alors de demande atmosphérique. La description des processus d'évaporations ont été traités dans la thèse Maquin (2016).

#### Évaporation:

Sur les surfaces de sol non recouvertes de végétation (sol nu), l'eau présente dans le sol, à proximité de la surface, peut s'évaporer. Ce phénomène apparaît en présence d'un gradient de pression de vapeur d'eau entre le sol et l'atmosphère et d'un apport d'énergie. L'évaporation effective dépend de l'état hydrique de la surface du sol, l'énergie pour extraire l'eau du sol augmentant à mesure que le sol s'assèche et des propriétés conductrices du sol (voir Hillel (2003)).

#### Pertes par interception:

Lors d'un épisode pluvieux, une partie de l'eau incidente est interceptée par le feuillage. Il s'agit du phénomène dit d'interception. Cette eau présente sur la canopée peut ensuite s'évaporer directement. On désigne ce processus d'évaporation sur la canopée comme les pertes par inter-

ception. L'importance de ce flux d'eau dépend de l'ampleur du feuillage et de la capacité de stockage d'eau de la canopée, c'est-à-dire de l'épaisseur maximale de la lame d'eau par unité de surface de feuillage.

### **l'évapotranspiration potentielle:**

On désigne par "évapotranspiration potentielle" la quantité d'eau maximale que l'atmosphère peut extraire via les trois processus décrits précédemment. Elle correspond ainsi à la demande atmosphérique évoquée auparavant. L'évapotranspiration potentielle correspond à l'évaporation d'une surface saturée en eau. Elle dépend de paramètres atmosphériques comme l'humidité de l'air, le vent et la température. Ce taux potentiel a la propriété de majorer la somme des flux de transpiration, d'évaporation et des pertes par interception. Attention l'évapotranspiration potentielle ne dépend pas de la couverture végétale (on la pondère généralement par la densité de la végétation présente sur le sol).

## **2.2 Les concepts hydrologiques**

Nous allons ici introduire les principales notions propres à l'étude hydrologique des sols. Plusieurs caractéristiques définissent un sol, mais avant d'étudier plus en détail ce qui définit un sol, il est important de comprendre que l'étude hydrologique d'un sol est simplement un bilan d'eau dans celui-ci. Il faut alors commencer par déterminer ce qui rentre et ce qui sort. L'estimation de ces quantités est l'objet d'étude du downscaling qui cherche à prévoir la précipitation et l'évapotranspiration réelle (l'eau drainée par les plantes recouvrant la surface).

### **2.2.1 Quelques définitions pour l'étude en milieu poreux**

**Définition 7.** On appelle **porosité totale**  $\omega$  la valeur définie par

$$\omega = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total de la roche}}. \quad (15)$$

On appelle aussi **indice des vides**  $e$  la valeur définie par

$$e = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume du solide plein}}. \quad (16)$$

On peut passer d'une formule à l'autre par la relation

$$e\omega = e - \omega,$$

Mais l'on utilise toujours la notion de porosité en hydrologie.

L'on peut trouver des méthodes de mesure de la porosité d'un sol dans l'ouvrage (De Marsily (1986)). On dit aussi que le sol n'est pas saturé lorsque l'eau n'a pas pris tout l'espace disponible, on parle alors de saturation volumique.

**Définition 8.** On parle de **saturation volumique**  $\theta$ , la saturation définie par le rapport

$$\theta = \frac{\text{Volume d'eau contenu}}{\text{Volume total}}, \quad (17)$$

on a  $0 \leq \theta \leq \omega$ . Et la **saturation volumique**  $s$

$$s = \frac{\text{Volume d'eau contenu}}{\text{Volume total des pores}}. \quad (18)$$

En fonction de la saturation volumique les échelles de temps et les forces misent en action ne sont pas les mêmes.

### 2.2.2 Les équations pour modéliser l'écoulement

On commence par rappeler les équations essentielles à la dynamiques des fluides. L'équation de conservation de la matière:

$$\text{div}(\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique et  $\vec{u}$  le vecteur vitesse du fluide. On écrit maintenant l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} (\text{div} \vec{u}) - \mu \nabla^2 u^i = \rho \left(F^i - \frac{du^i}{dt}\right). \quad (20)$$

$\zeta$  coefficient de viscosité du volume, (très souvent négligeable de vant  $\mu$ )  $[ML^{-1}T^{-1}]$ ,

$\mu$  coefficient de viscosité dynamique,  $[ML^{-1}T^{-1}]$

$\nabla^2$  le laplacien,

$F^i$  composante des forces à distance par unité de masse,

$i$  un vecteur unitaire de l'espace  $3D$ .

En milieu poreux les équations de Navier-Stokes deviennent difficilement applicables car le milieu dans lequel s'écoule le fluide dépend lui-même de l'écoulement du fluide. On donne des hypothèse simplificatrices pour résoudre l'équation de Navier-Stokes.

#### Hypothèses simplificatrice:

En milieu poreux on peut émettre de nombreuses hypothèses simplificatrices qui permettent de simplifier l'équation de Navier Stokes, on commence par supposer les écoulement permanents

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = 0,$$

on suppose aussi que le fluide est incompressible ( $\rho$  constant) alors

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

et finalement,

$$\text{div} \vec{u} = 0.$$

Dans ces hypothèses l'équation de Navier-Stokes devient

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} - \mu \nabla^2 u^i - \rho F^i = 0. \quad (21)$$

Plusieurs méthodes numériques permettent de trouver des solutions à ce problèmes notamment la méthode de Galerkin ou des méthodes de différences finies voir Allaire (2005) (chap 2, chap 6).

Remarquons que ces équations ne prennent pas en compte la porosité du milieu, l'équation (19) peut être modifié en prenant en compte  $\omega$  le coefficient de porosité et un terme source  $q$  lié à la matière créant des interstices sans fluide (le coefficient est compté négativement). Alors l'équation de conservation s'écrit finalement

$$\operatorname{div}(\vec{U}) + \frac{\partial}{\partial t}(\theta) + q = 0. \quad (22)$$

Remarquons que l'on considère la porosité  $w$  comme continue nous étudions des éléments de longueurs  $dx$  suffisamment petite pour que les équations de continuité (21) et (22) soient considérées vraies et suffisamment grandes pour que l'on puisse considérer une porosité moyenne dans un élément de volume.

### 2.2.3 La loi de Darcy et l'équation de diffusivité en milieu poreux

Henry Darcy alors qu'il étudiait les fontaines de la ville de Dijon (1856) établit expérimentalement que le débit d'eau s'écoulant à travers un massif de sable peut se calculer

$$Q = KA \frac{\Delta h}{L}. \quad (23)$$

$A$  est la section du massif sableux

$\Delta h$  la perte de charge de l'eau entre le sommet et la base du massif sableux

$K$  est une constante dépendant du milieu poreux, baptisée coefficient de perméabilité

$L$  est l'épaisseur du massif sableux.

On appelle  $U = Q/A$  la **vitesse de filtration** d'un sol. À partir des équations de Navier-Stokes on sait que les causes du déplacement du fluide sont dûs au gradient de pression ainsi qu'aux forces extérieures. La loi de Darcy peut alors s'exprimer sous la forme générale

$$\vec{U} = \frac{k}{\mu} (\vec{\nabla} p + \rho g \vec{\nabla} z). \quad (24)$$

On peut réécrire cette équation

$$\vec{U} = -K(\vec{\nabla} h + \vec{\nabla} z),$$

avec  $K = k(\mu\rho g)^{-1} [LT^{-1}]$  et  $h = p(\rho g)^{-1} [L]$ . En posant

$$H = h + z,$$

on peut alors injecter l'équation de Darcy (24) dans l'équation de conservation de la masse (22) pour finalement obtenir

$$-\vec{\nabla} \cdot (K\vec{\nabla} H) + \frac{\partial \theta}{\partial t} + q = 0. \quad (25)$$

On définit parfois des lois de porosité liées à la grandeur  $f(H) = \theta$  la quantité d'eau est liée à la cote piézométrique <sup>2</sup> et l'on pose

$$S_s(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

---

<sup>2</sup>Le niveau, la cote ou la surface piézométrique est l'altitude ou la profondeur (par rapport à la surface du sol) de la limite entre la nappe phréatique et la zone vadose dans une formation aquifère. Ce niveau est mesuré à l'aide d'un piézomètre.



$S_s$  est appelé le coefficient d’emmagasinement. On appelle l’équation ainsi obtenu en injectant la formule sur la porosité, **l’équation de Richard généralisée**

$$S_s(H) \frac{\partial H}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (K(\theta) \vec{\nabla} H) + q = 0. \quad (26)$$

Ceux sont avec ces équations que les géologues travaillent, nous pouvons remarquer que cette simplification des équations peut être considérée comme un processus d’upscaling. Notons que les équations de Darcy ont été justifiées dans les travaux de Matheron et Marle à partir de l’intégration dans un milieu réel des équations de Navier.

## 2.3 Les modèles

Il existe plusieurs modèles permettant de prédire les écoulements d’eau. Les premiers modèles sont issus de la résolution des équations de la mécanique des fluides en milieu poreux. Cependant, bien que cette méthode assure une grande précision sur les résultats obtenus, leur temps de calcul les rendent inutilisables sur de grands domaines. On utilise alors des modèles moins précis mais aussi moins coûteux c’est le cas du modèle Orchidée et des domaines de surface continentale.

### 2.3.1 Modèle de surface continentale Orchidée

Le modèle continentale Orchidée est un modèle dynamique, développé à l’échelle globale simulant les processus continentaux à partir des interactions sol-végétation-atmosphère. Ses résultats sont intégrés comme condition à la limite basse du modèle général de circulation atmosphérique du Laboratoire de Météorologie Dynamique (modèle LMDZ). Il modélise les interactions entre surface continentale et atmosphère, en particulier les flux d’énergie, d’eau et de carbone.

### 2.3.2 Modèle à base physique: Hydrogéosphère

HydroGéoSphère (HGS) est un code de calcul hydrologique tri-dimensionnel, intégré et à base physique. Il a été développé par R. Therrien puis conjointement à l’Université de Laval, à Québec et à l’Université de Waterloo. Ce code de calculs permet de simuler les écoulements de surface et de subsurface, ainsi que le transport de solutés et d’énergie de manière intégrée, c’est-à-dire que les équations gouvernant ces processus sont résolues simultanément. Le code est parallélisé permettant une efficacité numérique élevée et donc des applications à des échelles spatio-temporelles importantes.

## 3 Projections climatiques et modélisation hydrologique

L’étude que nous avons menée a été réalisée sur le bassin du Little Washita. Nous avons eu accès aux données NARR (North American Real Reanalysis) de 1979 à 2014 qui se présentent sous la forme d’un maillage de largeur de maille de  $32km$  ainsi qu’aux données de l’IPSL qui se présentent elles sous la forme d’un maillage de largeur de maille  $200km$ .

Les données NARR (North American Regional Reanalysis) couvrent l’entièreté du continent nord américain. La méthode de projection pour passer de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  à  $\mathbb{R}^2$  est ce qu’on appelle la **projection Lambert**. Cette projection d’après le théorème de Gauss ne pas être une isométrie, cependant nous verrons que l’on pourra faire l’approximation que la géométrie pour le bassin du

Washita et ses alentours peut être considérée comme euclidienne (voir 4.2). Dans notre étude nous ferons comme si nous étions dans  $\mathbb{R}^2$  en considérant le maillage carré, la longueur de grille du maillage est d’une trentaines de kilomètres (voir figure 1).

Afin de déterminer l’efficacité du downscaling dans le cas où l’on ajoute du bruit à la variable que l’on cherche à projeter, nous avons dégradé spatialement nos données en moyennant sur différentes échelles de grille (voir 3.2.1). Nous les avons ensuite downscalées et puis les avons injectées dans un modèle hydrologique (voir à citer) et nous avons finalement comparé les résultats à partir des méthodes expliquées dans la section 1.4.

<b>GRID DESCRIPTIONS</b>	
Regional North American Grid (Lambert Conformal) used by NAM, SREF and RAP	
Nx	349
Ny	277
La1	1.000N
Lo1	214.500E = 145.500W
Res. & Comp. Flag	0 0 0 0 1 0 0 0
Lov	253.000E = 107.000W
Dx	32.46341 km
Dy	32.46341 km
Projection Flag (bit 1)	0
Scanning Mode (bits 1 2 3)	0 1 0
Latin1	50.000N
Latin2	50.000N
<b>Lat/Lon values of the corners of the grid</b>	
(1,1)	1.000N, 145.500W
(1,277)	46.635N, 148.639E
(349,277)	46.352N, 2.566W
(349,1)	0.897N, 68.318W
<b>Pole point</b>	
(I,J)	(174.507, 307.764)

The Dx, Dy grid increment (at 50 deg north) was selected so that the grid spacing would be exactly 32.000 km at 40 deg north; the intersection of 40N & 107W falls on point (174.507,108.664)

**Figure 3:** Description du maillage NARR

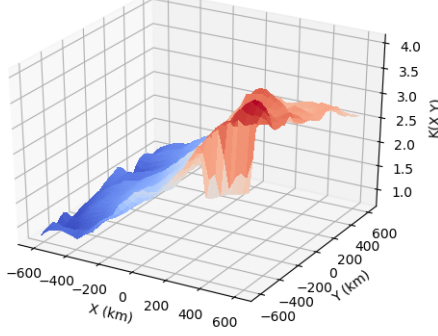
### 3.1 Analyse de la structure spatiale des données NARRs

Nous avons considéré les coordonnées du Little Washita à  $34.981^\circ N, -97.859^\circ W$ . Nous repérons les coordonnées du point sur le maillage NARR étant le plus proche de ces coordonnées pour définir le point correspondant au Little Washita. En effet l’échelle de maillage NARR correspond à l’échelle du Little Washita, il est donc suffisant de ne considérer qu’un seul point.

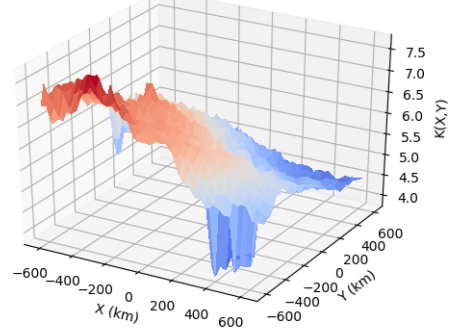
On commence par regarder les résultats autour du bassin du little washita, on fait un moyennage des précipitations et de l’évaporation sur un carré autour du little washita, le point de coordonnée (0,0) est le point correspondant au Little Washita sur ces figures. La méthode de moyennage est expliquée dans la section

Comme nous faisons une dégradation spatiale, il est intéressant comprendre la structure spatiale des données. Nous avons une grille spatiale pour laquelle nous avons vu que la géométrie pouvait être considérée comme euclidienne (voir 4.2). Les données NARRs que nous manipulons

moyenne des précipitations des années 1979 aux années 2014



moyenne de l'évapotranspiration des années 1979 aux années 2014



**Figure 4:** Tracé des précipitations et de l'évapotranspiration moyenne de 1979 à 2014

se présentent sous la forme d'un tenseurs  $\mathcal{T}$  de dimensions  $T \times M \times N \times v$  où  $T$  est le nombre de jours sur lesquels ont a ces observations,  $(M+1) \times (N+1)$  la dimension de la grille d'observation et  $v$  le nombre de variables observées. Nous faisons l'hypothèse la fonction  $S_V$  possède un noyau de covariance spatial  $K$  et nous chercherons à déterminer sa forme.

**Définition 9.** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction aléatoire, on définit un noyau de covariance sur cette fonction en faisant l'hypothèse que  $f$  est stationnaire en temps et espace, on a alors

$$\text{Cov}(f(t, x), f(t, x + y)) = K(y), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}^2.$$

On remarque de plus que la fonction  $K$  ainsi définie est symétrique,  $K(y) = K(-y)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}^2$ . On peut alors simplement calculer la covariance empirique à partir de l'estimateur sans biais de la variance.

$$K(m, n) = \frac{1}{T(M - m + 1)(N - n + 1) - 1} \sum_{t=1}^T \sum_{i=m}^M \sum_{j=n}^N (\mathcal{T}_{t,i,j} - \bar{\mathcal{T}}_{1,m,n})(\mathcal{T}_{t,i-m,j-n} - \bar{\mathcal{T}}_{2,m,n}),$$

où,

$$\bar{\mathcal{T}}_{1,m,n} = \frac{1}{T(M - m + 1)(N - n + 1)} \sum_{t=1}^T \sum_{i=m}^M \sum_{j=n}^N (\mathcal{T}_{t,i,j}),$$

et

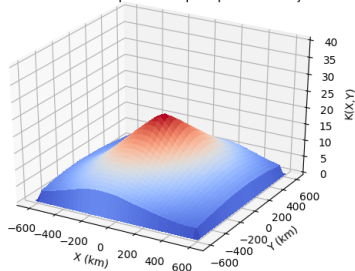
$$\bar{\mathcal{T}}_{2,m,n} = \frac{1}{T(M - m + 1)(N - n + 1)} \sum_{t=1}^T \sum_{i=0}^{M-m} \sum_{j=0}^{N-n} (\mathcal{T}_{t,i,j}).$$

On peut donc tracer le noyau de covariance  $K(i, j)$ ,  $i \in \{-N/2, N/2\}$ ,  $j \in \{-M/2, M/2\}$ .

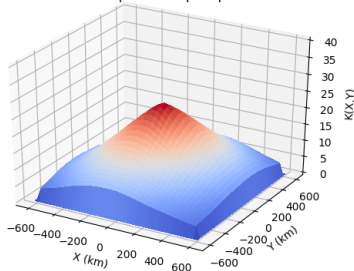
### Résultats:

Pour obtenir nos résultats, nous avons pris en compte la saisonnalité. En effet, les résultats ont été obtenus sur chaque mois. Voici les résultats obtenus en fonction des mois de l'année.

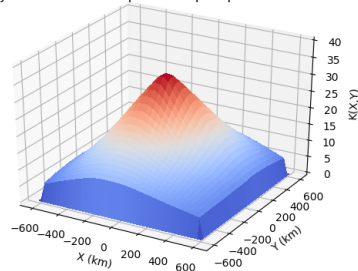
Noyau de covariance spatial des précipitations en janvier



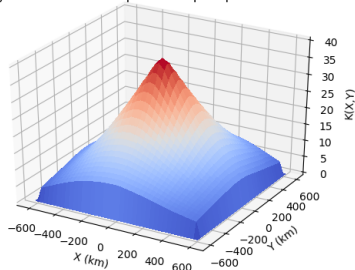
Noyau de covariance spatial des précipitations en février



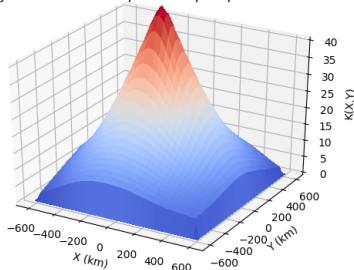
Noyau de covariance spatial des précipitations en mars



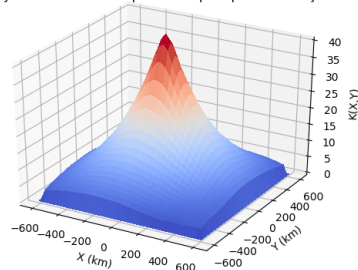
Noyau de covariance spatial des précipitations en avril



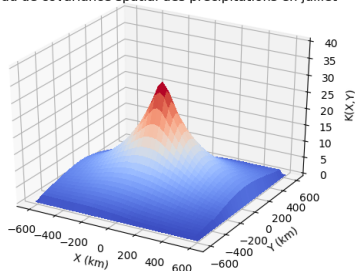
Noyau de covariance spatial des précipitations en mai



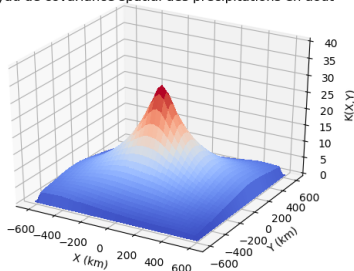
Noyau de covariance spatial des précipitations en juin



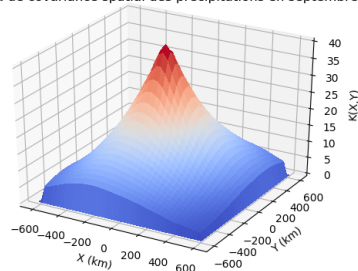
Noyau de covariance spatial des précipitations en juillet



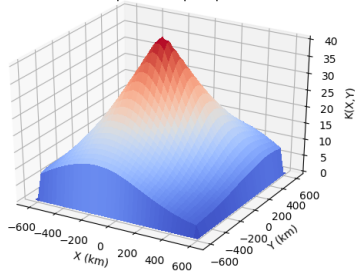
Noyau de covariance spatial des précipitations en août



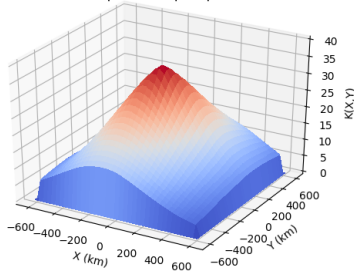
Noyau de covariance spatial des précipitations en septembre



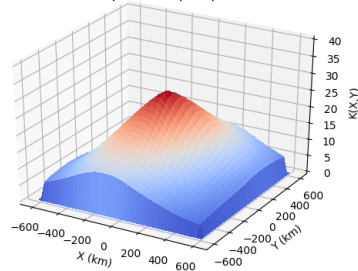
Noyau de covariance spatial des précipitations en octobre



Noyau de covariance spatial des précipitations en novembre



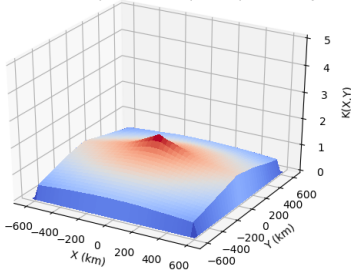
Noyau de covariance spatial des précipitations en décembre



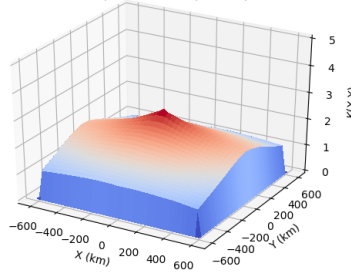
Rappelons que l'axe  $X$  correspond aux latitudes et l'axe  $Y$  aux longitudes. Nous voyons qu'en été la covariance entre deux points s'effondre relativement vite alors qu'en hiver c'est plutôt l'inverse. Il semble intéressant de constater que même à plusieurs centaines de kilomètres

il y a encore une covariance entre les précipitations. On voit aussi que la covariance spatiale diminue plus vite selon l'axe  $X$  qui correspond à la latitude.

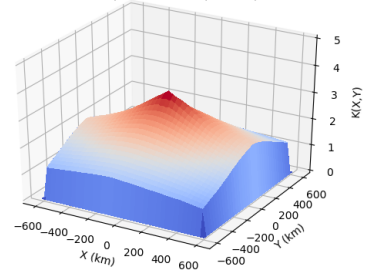
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en janvier



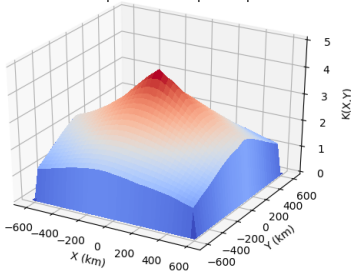
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en février



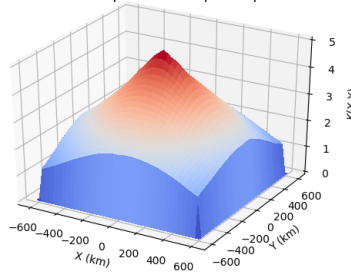
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en mars



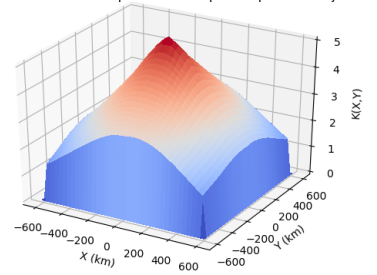
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en avril



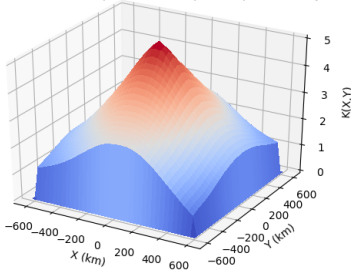
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en mai



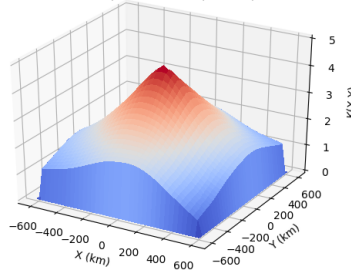
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en juin



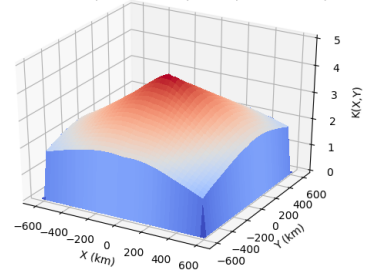
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en juillet



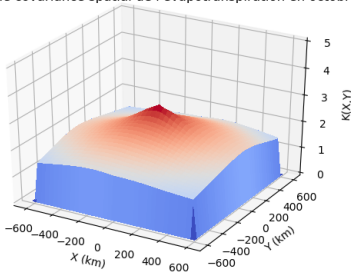
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en août



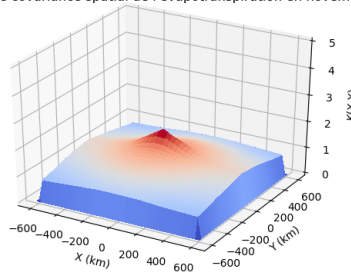
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en septembre



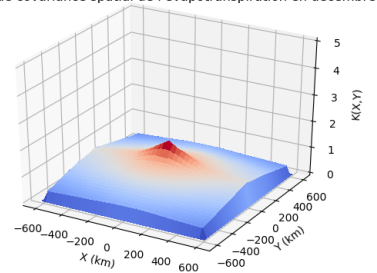
Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en octobre



Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en novembre



Noyau de covariance spatial de l'évapotranspiration en décembre



Nous voyons que la variance est aussi liée à la saisonnalité et que bien que la variance semble

diminuer moins vite selon la distance pour l'évapotranspiration que pour la précipitation, elle semble tout de même diminuer ce qui semble contradictoire avec les résultats obtenus avec la dégradation de l'etp. On voit alors l'impact de la saisonnalité sur le noyau de covariance des précipitations.

### 3.2 Présentation des résultats de projection climatiques

Nous avons travaillé avec plusieurs séries, la série de référence, des estimateurs de la série de référence et ces mêmes séries après transformation pour qu'elle réduisent leur distance de Cramer-Von Mises. On commence par réintroduire le tenseur  $\mathcal{T}$  de dimension  $T \times M \times N$ , nous pouvons représenter les données NARRs par le tenseur  $\mathcal{T}$ .

$$\mathcal{T}_{t,m,n} = \mathcal{S}_V(t, lat_m, lon_n).$$

où  $t$  correspond à un temps et  $(m, n)$  une position, et  $\mathcal{S}_V$  la fonction aléatoire introduite à la définition 2.

#### 3.2.1 La dégradation des données

Nous avons dégradé les valeurs par un moyennage spatial. Nous avons fait 4 dégradations différentes nous allons les numéroter ainsi  $\{1, 2, 3, 4\}$  et on appellera  $\mathcal{T}^d$  le tenseur issu de la dégradation  $d$ , défini par

$$\mathcal{T}^{d,t,m,n} = \frac{1}{(2d+1)^2} \sum_{i=-d}^d \sum_{j=-d}^d \mathcal{T}_{t,m+i,n+j} \quad \forall (m,n) \in \{d+1, \dots, M-d\} \times \{d+1, \dots, N-d\}. \quad (27)$$

Nous avons alors étudié le point correspondant au bassin du Little Washita de coordonnées  $(a, b)$  et l'on appellera,  $(X_t^d)_{t \in \llbracket 1, T \rrbracket}$  les séries temporelles  $\mathcal{T}^{d,t,a,b}$ . Nous avons cherché à projeter la série  $(Y_t)_{t \in \llbracket 1, T \rrbracket} = \mathcal{T}^{0,t,a,b}$  à partir des séries  $(X_t^d)_{t \in \llbracket 1, T \rrbracket}$  et ainsi regarder l'impacte de la dégradation puis du downscaling sur les données.

### 3.3 Les résultats de la dégradation et du downscaling sur les données

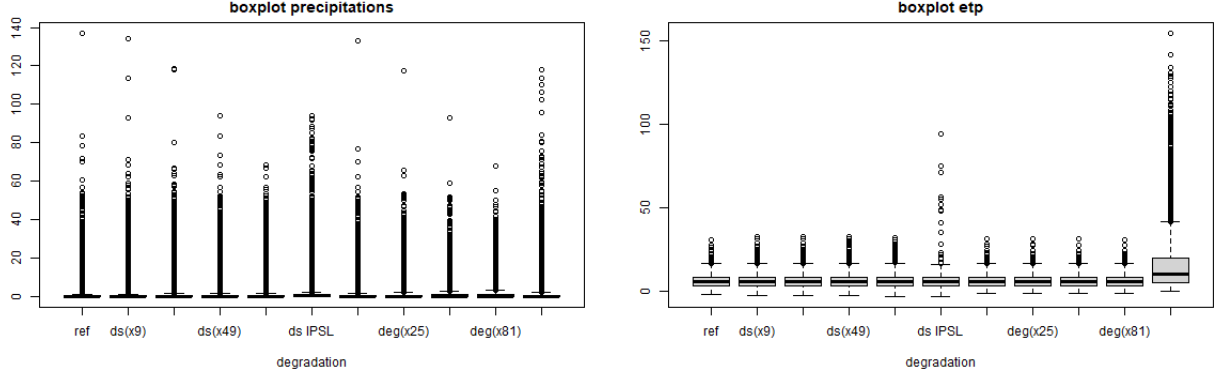
Pour évaluer nos projections nous avons utilisé des méthodes de validations croisées. Nous avons utilisé les données NARRs, NARRs dégradée ainsi que celles de l'IPSL pour tester les méthodes citées précédemment. On a défini la transformation sur les années 1979 à 1996, et la période de 1996 à 2014 pour projeter et vérifier la qualité de nos projections. Nous utiliserons les outils définis dans la section 1.4 pour analyser nos projections.

#### 3.3.1 Tracé des Boxplot

Pour avoir une première idée des données que nous avons récupérées, nous tracons les boxplots de chaque série temporelle. Nous avons ainsi les boxplot pour la précipitation et l'évapotranspiration pour juger de la répartition des points pour chaque série.

Les colonnes représentent pour chaque variable:

- 1- la série de observée sur le Little Washita.



**Figure 5:** Boxplot en fonction des séries pour la précipitation et l'évapotranspiration

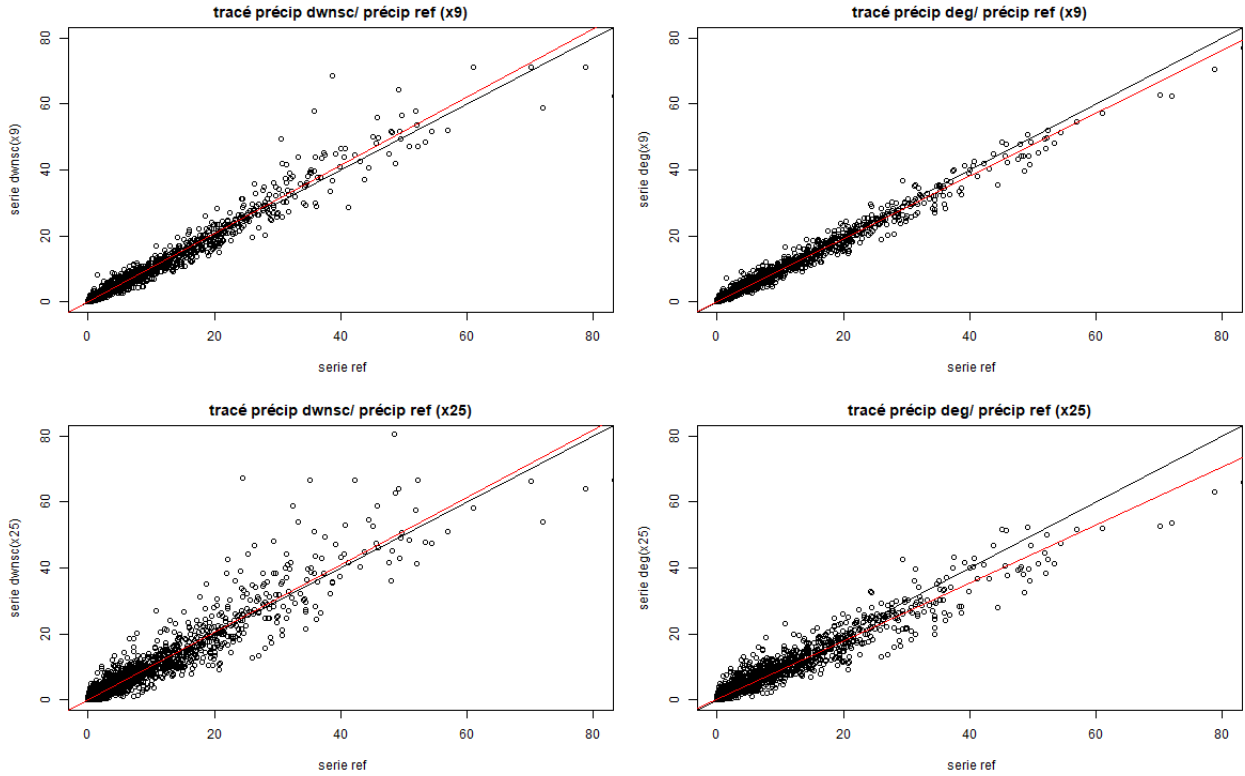
- 2-3-4-5- Les séries downscalées des dégradations  $d \in \{2, 3, 4, 5\}$ .
- 6- La série downscalée de l'IPSL.
- 7-8-9-10- Les séries des dégradations  $d \in \{2, 3, 4, 5\}$ .
- 11- La série de l'IPSL.

On voit que la dégradation de l'évapotranspiration n'a quasiment aucune influence sur les séries temporelle, ce qui été à prévoir d'après le noyau de covariance que nous obtenu précédemment pour l'évapotranspiration. On peut aussi voir que le modèle de climat de l'IPSL projette relativement mal l'évapotranspiration sur la région du Little Washita. On peut aussi voir la méthode de projection utilisée pour downscaler les série temporelles dégradées est la méthode **CDF-t avec support égale** (cf section 1.2.2).

### 3.3.2 Affichage des données projetées en fonction des données réelles

On commence par afficher les résultats sur un graphique en mettant les données de précipitation projetées (dégradée ou dégradées puis downscalées) en fonction des données de précipitation réelles. Cette méthode, permet de juger visuellement de l'efficacité du downscaling sur les données. Les figures qui sont affichées en dessous ont un titre indiquant le degré de déformation dans leur titre sous la forme  $(2d - 1)^2$  où  $d$  est le degré de l'équation (27). Les figures de gauches sont les figure dégradées puis downscalées et celles de droites les figures dégradée, une ligne correspond à la même dégradation.

Visuellement il semble que le downscaling améliore les projections. Nous avons tracé pour chaque figure en noir la droite identité et en rouge les droites de régression linéaire de la forme  $y = ax + b$ , où  $x$  est la précipitation de référence et  $y$  la donnée projetée de  $x$ . Dans notre cas c'est soit la dégradation  $\mathcal{T}_{d,a,b}$ , soit son downscalé à partir de la méthode définie dans la section 1.2.2. Remarquons que la dégradation de nos données ne crée pas de changement important de l'éparpillement des points dans les graphiques, c'est en accord avec les figures obtenues dans la section 3.1 montrant une grande corrélation spatiale. Il semble cependant que la dégradation



**Figure 6:** Tracé des débit en fonctions des précipitations pour différentes dégradations

ait une tendance à sous-évaluer les précipitations élevées, ce qui ne semble pas aberrant si l'on considère les tailles des cumulonimbus<sup>3</sup>, inférieur à la largeur de grille des données NARRs (32km). Alors on peut considérer une grosse précipitation comme un évènement localisé sur un seul point de grille NARR.

### 3.3.3 Différence analyse Root Mean Square error et distance de Cramér-von Mises

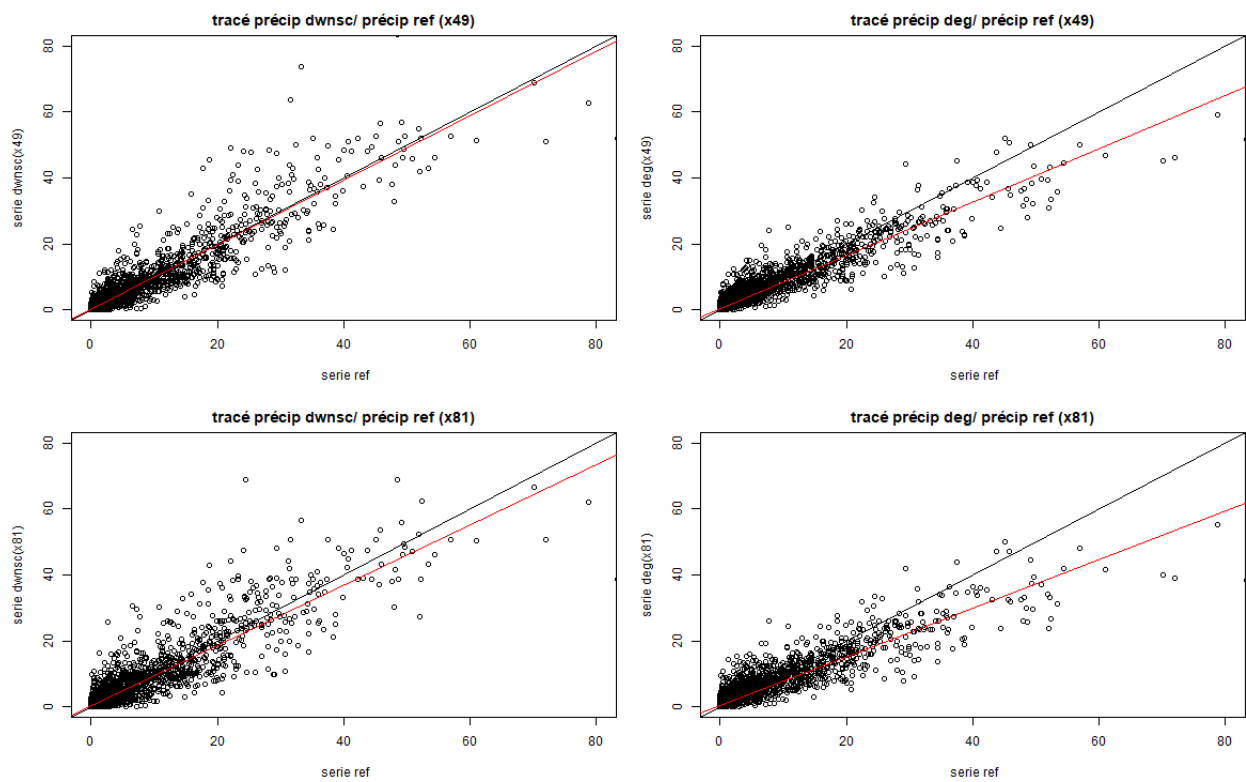
Nous avons calculé la distance quadratique moyenne entre la série de référence et les différentes séries de dégradation. Les résultats ainsi obtenus sont:

Nous voyons que les résultats sont plus mauvais pour les séries downscalées. C'était à prévoir d'après les figures de la section précédente 3.3.2 car la dispersion semblait plus grande pour les séries downscalées. Mais encore une fois, ce n'est pas cette distance que nous cherchons à minimiser avec le downscaling, mais une distance sur les fonctions de répartition. Regardons maintenant la distance de Cramér-Von Mises présentée en section 1.4.3.

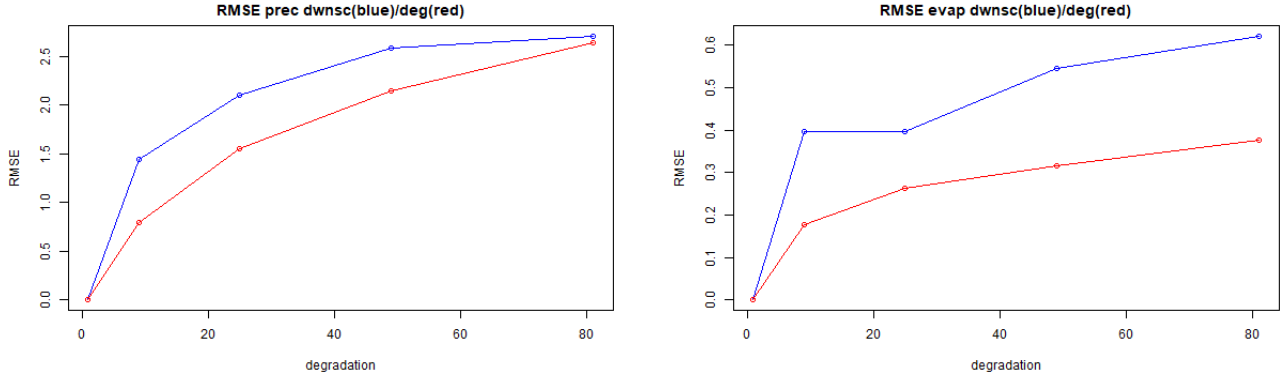
L'on voit qu'encore une fois la projection après downscaling est plus mauvaise que seulement la série dégradée, jusqu'à la dégradation  $d = 4$ , et qu'à partir de la dégradation 5 la série downscalées est plus efficace ( $d = 6$  sont les données *IPSL*). L'algorithme effectue une grosse

<sup>3</sup>Les cumulonimbus sont des nuages responsables des gros orages en été et leur taille va de 2 à 10km de diamètre

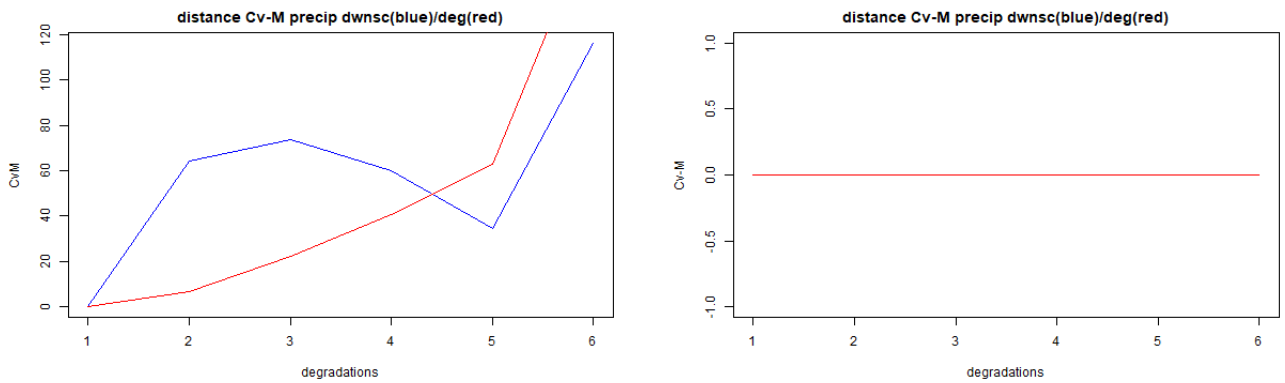




**Figure 7:** Tracé des débit en fonctions des précipitations pour différentes dégradations



**Figure 8:** Tracé des résultats de Root Mean Square error



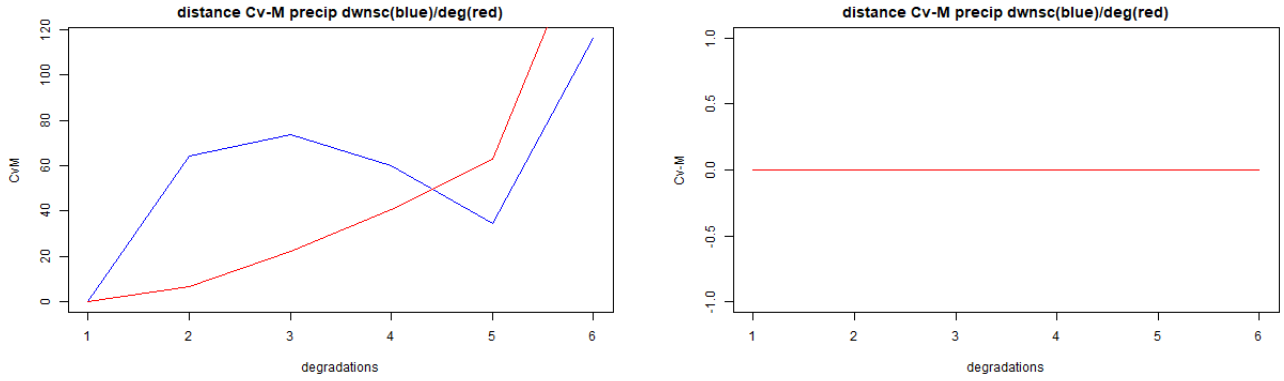
**Figure 9:** Tracé de la distance de Cramér-von Mises les échantillons sans valeurs nulle

correction pour les données IPSL, il semble que la correction soit efficace à partir d’une certaine dégradation ce qui paraît tout de même étonnant. Cette erreur de projection soulève un point que nous n’avons pas encore abordé jusqu’à présent, c’est le fait que notre échantillon de précipitation possède de nombreuses valeurs à 0, ce qui signifie que la densité n’est plus une fonction mais une distribution avec un poids non nul en 0. C’est ce détail qui rend l’analyse CDF-t “inconsistante”, si on enlève les précipitations nulle, nous obtenons:

Donc le downscaling diminue la distance de Cramer-von Mises, on peut considérer la méthode comme efficace

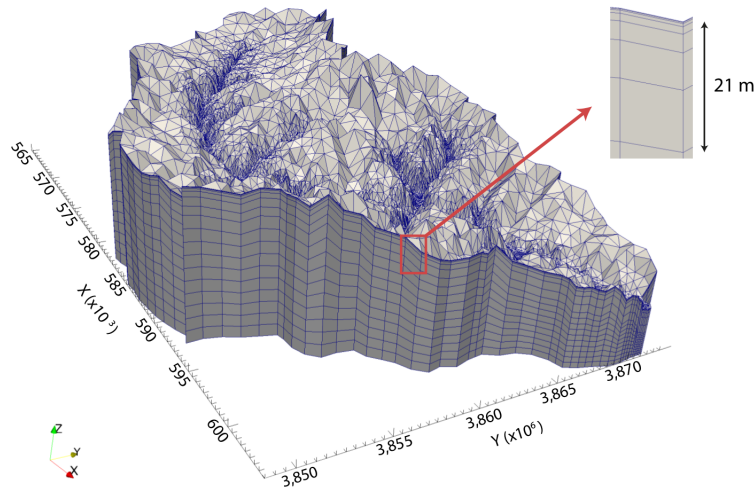
### 3.4 Les résultats hydrologiques

Nous avons donc récupéré les données climatiques de précipitation et d’évapotranspiration et nous les avons injectées dans le modèle d’hydrogéosphère, pour faire les prévisions hydrologiques. Nous avons vu précédemment qu’HydroGéoSphère est un modèle à base physique donc un modèle 3D. Mathilde Maquin a fait tourner HydroGéoSphère sur le Little Washita en faisant une triangulation du domaine d’étude. Cependant, nos prévisions étant sur 18 ans les temps de calculs n’étaient pas à l’échelle du stage (environ 3 mois). Nous avons utilisé un modèle



**Figure 10:** Tracé de la distance de Cramér-von Mises en fonction des échantillons

simplifié, proposé par Fanny Picourlat l'article est encore en cours de publication. Ce modèle a l'avantage de réduire énormément les temps de calcul (de quelques heures). Nous avons alors fait tourner HydroGéosphère sur toutes nos différentes séries et nous avons réaliser encore une fois les mêmes études que dans la partie précédente.



**Figure 11:** Maillage tridimensionnel du bassin versant du Little Washita, image issue de la thèse Maquin (2016)

### 3.4.1 Modèle de pente simple pour la modélisation hydrologique du modèle du Little Washita

Le modèle que nous avons utilisé est un modèle de pente simple. Les paramètres ont été ajustés pour être les plus proches possibles des résultats obtenus à partir du modèle 3D. C'est un modèle 2D, on considère un pente simple d'angle  $\alpha$  et longueur  $L$ .  $L$  et  $\alpha$  ont été choisis pour que les résultats des débits sortis par le modèle soient le plus proche de ceux produits par le modèle 3D d'Hydrogéosphère. Au lieu de faire une analyse fonctionnelle ou topographique du bassin du Washita pour déterminer les paramètres  $L$  et  $\alpha$ , ceux-ci ont été déterminés par des

méthodes d'optimisation, on les a choisis pour minimiser les distances entre les débits sortis par les deux modèles. Il ne semble cependant pas impossible de trouver une méthode pour déterminer rigoureusement les coefficients  $\alpha$  et  $L$ . (Insérer une figure de modèle de pente simple).

### 3.4.2 Les données d'entrées dans HydroGéoSphère et l'initialisation

Plusieurs problèmes se posent à nous lorsque l'on est confronté à une modélisation hydrologique. Le premier problème qui vient en tête est : Comment est la nappe à l'état initial? En effet, l'état initial de la nappe créera une grande différence sur les débit sortant comme nous l'avons brièvement expliqué dans la section 2.1.2 (c'est causé par la saturation en eau du sol en surface). Afin de déterminer l'état initial de la nappe les hydrologues ont l'habitude d'utiliser des méthodes de **spin-up**. Le spin up consiste à faire tourner le modèle plusieurs fois sur les données d'entrées d'une année et de s'arrêter lorsque les résultats ont convergé. Théoriquement on suppose que les résultats du modèle converge, cependant sur le modèle à pente simple du bassin du Little washita, les résultats ne convergent pas et l'on observe un phénomène d'aridification de la nappe. Ce phénomène est peut-être lié au faible stockage d'eau dans le modèle simplifié de bassin (constitué de deux maille en largeur au lieu de plusieurs centaines). Nous avons, comme conseillé dans la thèse de Mathilde Maquin décidé de faire un spin-up pendant trois ans sans évapotranspiration potentielle puis pendant six ans en ajoutant l'évapotranspiration.

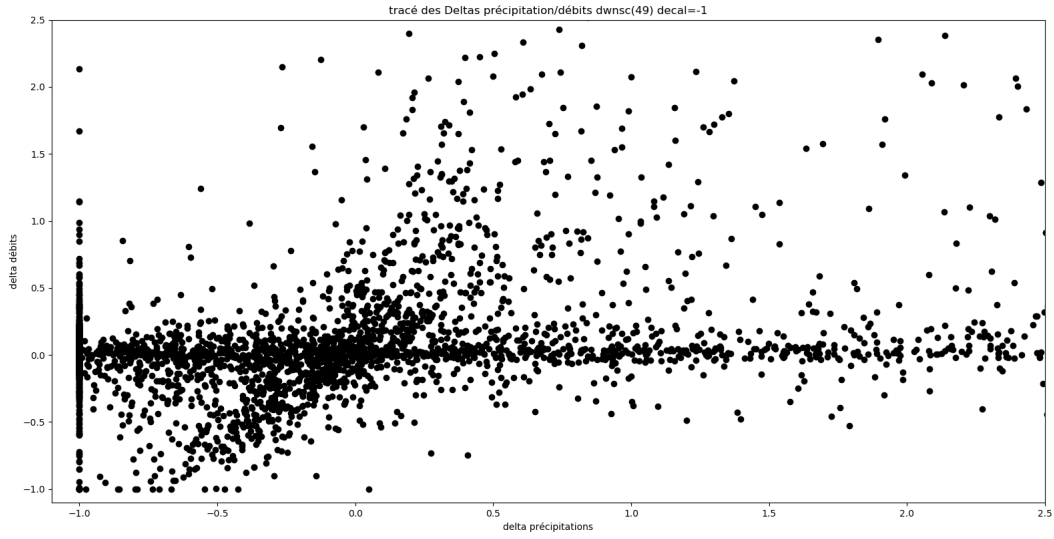
Une deuxième question vient alors naturellement doit-on utiliser la méthode de spin-up pour chaque série temporelle ou alors définir une même nappe dans l'état initiale. Nous avons fait le spin-up seulement pour la série de référence et utiliser le même résultat de nappe pour tous les modèles obtenus.

## 3.5 L'influence de la pluie sur les débits

Nous allons regarder l'influence de la pluie sur les résultats de débits. Nous étudions les séries des différences des précipitations en fonction des séries des différences des débits. Soient  $(R_t^*)_{t \in \llbracket 0, T \rrbracket}$  une série projetée de précipitation et  $(R_t)_{t \in \llbracket 0, T \rrbracket}$  la série réelle des précipitations, ainsi que  $(Q_t^*)_{t \in \llbracket 0, T \rrbracket}$  et  $(Q_t)_{t \in \llbracket 0, T \rrbracket}$  les séries de débits projetées et réelles. On s'intéresse alors à voir l'influence de la différence entre les séries projetées et la série réelle de précipitation sur la différence entre les débits projetés et les débits réels. On appelle alors quand c'est défini  $\Delta R$  et  $\Delta Q$  la différence à la série de référence

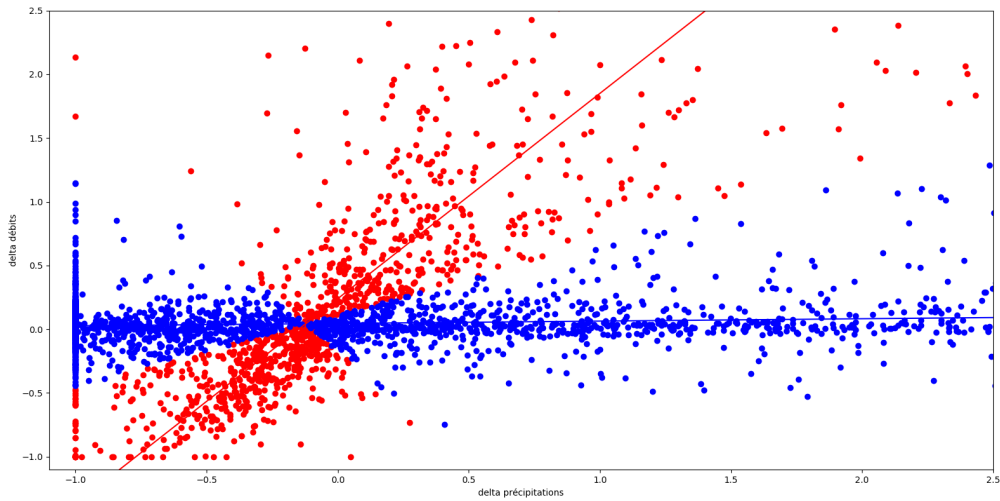
$$\Delta R_t = \frac{R_t^* - R_t}{R_t}, \quad \frac{Q_t^* - Q_t}{Q_t}.$$

Voici les résultats obtenus pour la série downscalée correspondant à la dégradation



**Figure 12:** Tracé des  $\Delta Q_t$  en fonction des  $\Delta R_{t+1}$  pour la dégradation ( $\times 49$ )

Nous avons en effet affiché les débits du temps  $t$  en fonction des précipitation du temps  $t + 1$ , on voit clairement un phénomène corrélation linéaire pour certains débits. Nous cherchons donc à trouver les droites de corrélation (voir section 4.3). Après avoir classifié nos points en deux échantillons, la méthode classification est très simple on associe chaque point à sa droite la plus proche. On obtient visuellement cette classification

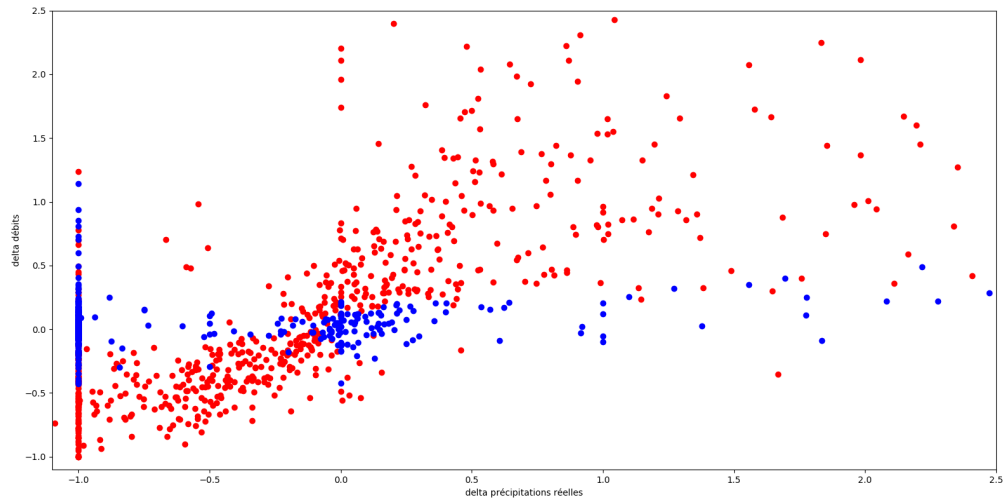


**Figure 13:** Classification des points selon leur droite de régression dégradation ( $\times 49$ )

On considère maintenant les précipitations réelles entrée dans le sol, HydroGéosphère considère la pluie entrant dans le sol comme étant:

$$pluie\ entrant\ dans\ le\ sol = \max(précipitation - évapotranspiration, 0).$$

On regarde alors la figure des points correspondants pour la pluie entrant dans le sol (on a enlevé toutes le points où la pluie entrant dans le sol était nulle).



**Figure 14:** Classification des points selon leur droite de régression pour la pluie entrant dans le sol

Il semble que de nombreux points bleus ont été supprimés.

## 4 Indexes

### 4.1 Indexe 1: La statistique de Cramér-von Mises

Soient  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et  $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  des réalisations indépendantes issues des variables aléatoires réelles  $X$  et  $Y$ . On appelle  $\mathcal{F}_n$  et  $\mathcal{G}_m$  les fonctions de répartition empiriques définies à partir de ces réalisations et  $\mathcal{H}_{m,n}$  la fonction de répartition empirique définie à partir des réalisations  $(Z_i)_{i \in \llbracket 1, m+n \rrbracket} = X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ . Par la suite on considérera que tous les éléments sont triés dans leur ensemble (c.à.d.  $i \leq j \Rightarrow E_i \leq E_j$ ). Nous avons alors l'égalité suivante

$$C_{n,m} = \frac{nm}{n+m} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_n(x) - \mathcal{G}_m(x)]^2 d\mathcal{H}_{m,n}(x) = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{4nm-1}{6(m+n)}. \quad (28)$$

où  $R_{Z_i}$  est le rang de  $Z_i$  dans  $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$  autrement dit

$$R_{X_i} = \text{Card}(\{j \in \llbracket 1, m+n \rrbracket, Z_j \leq Z_i\}).$$

Notons que cette égalité transforme un problème d'analyse en un problème de dénombrement beaucoup plus simple. On rappelle la définition de l'intégrale par rapport à une fonction.

**Définition 10.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues par morceaux on définit l'intégrale de  $f$  par rapport à  $g$  comme étant

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dg(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(x_{i,n}) (g(x_{i,n}) - g(x_{i,n-1})), \quad x_{i,n} = i/n.$$

*Proof.* Commençons par montrer l'égalité

$$\frac{nm}{n+m} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}_n(x) - \mathcal{G}_m(x)]^2 d\mathcal{H}_{m,n}(x) = \frac{mn}{(m+n)^2} \sum_{i=1}^{m+n} (\mathcal{F}_n(Z_i) - \mathcal{G}_m(Z_i))^2.$$

On pose  $\delta = \inf\{|Z_i - Z_j|, Z_i \neq Z_j\}$ , quel que soit  $n \geq n_0$  tel que  $1/n_0 < \delta$  on a :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}_n(\frac{i}{n}) - \mathcal{G}_m(\frac{i}{n}))^2 \left( \mathcal{H}_{m,n}(\frac{i}{n}) - \mathcal{H}_{m,n}(\frac{i-1}{n}) \right) = \sum_{i=1}^{m+n} (\mathcal{F}_n(Z_i) - \mathcal{G}_m(Z_i))^2,$$

on obtient donc directement l'égalité voulue en passant à la limite.

Observons maintenant que  $\mathcal{F}_n(X_i) = i/n$  et  $\mathcal{G}_m(X_i) = (R_{X_i} - i)/m$  ainsi que  $\mathcal{F}_n(Y_i) = (R_{Y_i} - i)/n$  et  $\mathcal{G}_m(Y_i) = i/m$ . On peut alors réécrire  $C_{n,m}$  en séparant la somme sur les  $X_i$  et  $Y_i$

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= \frac{mn}{(m+n)^2} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} - \frac{R_{X_i} - i}{m} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left( \frac{R_{Y_i} - i}{n} - \frac{i}{m} \right)^2 \right] \\ &= \frac{mn}{(m+n)^2} \left[ \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^n \left( R_{X_i} - i \frac{m+n}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^m \left( R_{Y_i} - i \frac{m+n}{m} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Remarquons que  $C_{n,m}$  est de la forme

$$C_{n,m} = \frac{mn}{(m+n)^2} \left[ \frac{C_1}{m^2} + \frac{C_2}{n^2} \right],$$

et que  $C_1$  et  $C_2$  sont symétriques en  $n$  et  $m$ . On définit  $\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n R_{X_i}^2$ ,  $\Sigma_2 = \sum_{i=1}^m R_{Y_i}^2$  et  $\mathcal{S}_k = \sum_{i=1}^k i^2$  nous allons travailler sur l'expression

$$C_1 = \sum_{i=1}^n \left( R_{X_i} - i \frac{m+n}{n} \right)^2.$$

On la développe puis factorise pour obtenir

$$C_1 = \frac{m+n}{n} \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 - \frac{m}{n} \Sigma_1 + \frac{m(m+n)}{n^2} \mathcal{S}_n.$$

On obtient de la même manière

$$C_2 = \frac{m+n}{m} \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 - \frac{n}{m} \Sigma_2 + \frac{n(m+n)}{m^2} \mathcal{S}_m.$$

D'après ce qu'on a dit précédemment on a donc:

$$C_{n,m} = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{(m+n)^2} + \frac{\mathcal{S}_n}{n(n+m)} + \frac{\mathcal{S}_m}{m(m+n)}.$$

On remarque  $\Sigma_1 + \Sigma_2 = \mathcal{S}_{m+n}$  et que l'on a la première moitié de notre somme. Il ne reste plus qu'à développer l'expression

$$\begin{aligned} & -\frac{\mathcal{S}_{m+n}}{(m+n)^2} + \frac{\mathcal{S}_n}{n(n+m)} + \frac{\mathcal{S}_m}{m(m+n)} \\ &= -\frac{(m+n+1)(2m+2n+1)}{6(m+n)} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6(m+n)} + \frac{(m+1)(2m+1)}{6(m+n)} = -\frac{4mn-1}{6(m+n)} \end{aligned}$$

En regroupant nos deux résultats nous avons finalement:

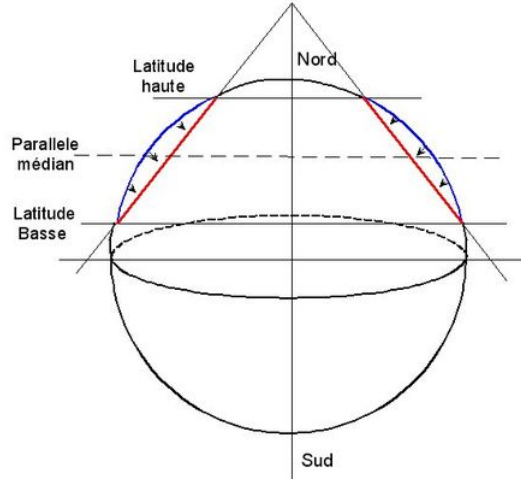
$$C_{n,m} = \frac{1}{nm(m+n)} \left[ n \sum_{i=1}^n (R_{X_i} - i)^2 + m \sum_{i=1}^m (R_{Y_i} - i)^2 \right] - \frac{4nm-1}{6(m+n)}$$

□

## 4.2 Indexe 2: Projection conique conforme de Lambert

La plupart des fonctions de projection de  $S(\mathbb{R}^3)$  dans  $\mathbb{R}^2$  sont des surfaces développables sur lesquelles ont projeté les points de la terre. Par exemple des cônes, des cylindres et des plans (projection stéréographique) sont les surfaces développables les plus connues. Le **projection Lambert** est une projection conique aussi appelée la projection orthomorphique. Ses caractéristiques sont décrites dans le livre Grafarend and Krumm (2014). Elle possède la caractéristique de préserver les angles et les distances pour deux latitudes choisies, pour les données NARR les latitudes choisies sont 33°N et 45°N. De plus les lignes de latitudes égales sont des cercles et celles de longitudes égales des lignes droites. Les coordonnées que nous étudions sont entre 33°N et 36°N. On va montrer que les longueurs étudiées dans cette zone de l'espace ne souffrent que de très peu de déformation.





**Figure 15:** Projection conique conforme de Lambert

**Définition 11.** On définit les fonctions  $lat : S(\mathbb{R}^3) \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  et  $lon : S(\mathbb{R}^3) \rightarrow [-\pi, \pi]$  qui associent à chaque point  $x$  de  $S(\mathbb{R}^3)$  sa latitude et sa longitude en radian.

**Définition 12.** On définit le cône convexe  $\zeta_{\theta, \theta+\epsilon}$  comme l'ensemble des droites passant les points  $x_1$  et  $x_2$  de même longitudes de latitudes égale à  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$ . Autrement dit

$$\zeta_{\theta, \theta+\epsilon} = \{D(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S(\mathbb{R}^3), lon(x_1) = lon(x_2), lat(x_1) = \theta, lat(x_2) = \theta + \epsilon\}.$$

où  $D(x_1, x_2)$  est la droite passant par  $x_1$  et  $x_2$ .

Il est évident que pour les lignes de latitude haute ( $\theta + \epsilon$ ) et basse ( $\theta$ ) les longueurs sont conservées. On définit  $\epsilon = \pi(45 - 33)/180$ .

**Proposition 3.** Pour toute courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S(\mathbb{R}^3)$  continue dont les latitudes sont comprises entre  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$ , on a

$$\min \left( \cos(\epsilon/2), \frac{\cos(\theta + \epsilon)}{\cos(\theta)} \right) \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\cdot} \cdot \|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}}{\|\gamma\|_{\cdot} \cdot \|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^3)}} \leq 1.$$

Où  $P$  est la projection de Lambert conservant les longueurs pour les latitudes  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$ .

Ce résultat permettra de conclure que la géométrie des lieux peut être considérée comme euclidienne si  $\epsilon$  est suffisamment petit.

*Proof.* (Esquisse) On montrera cette inégalité pour les courbes de latitudes constantes et pour celles de longitudes constantes et la densité des fonctions de longitude ou de latitude par morceaux constantes dans l'ensemble des courbes permettra de conclure cette inégalité pour toutes les courbes.

On définit trois ensembles de courbes,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_m$  tels que

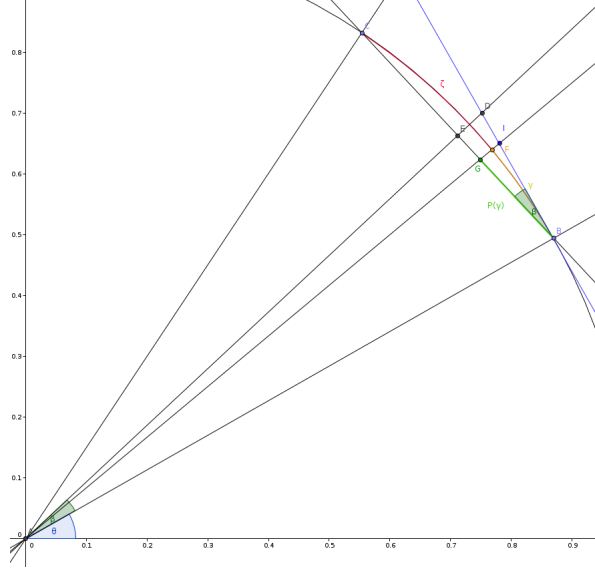
$$\mathcal{C}_1 = \{\gamma \in \mathcal{C}, lon(\gamma(t)) = c, \forall t \in [0, 1],$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\gamma \in \mathcal{C}, \text{lat}(\gamma(t)) = c, \forall t \in [0, 1]\},$$

$$\mathcal{C}_m = \{\gamma \in \mathcal{C}, \exists t_1 < \dots < t_n, \forall \leq i < n, \gamma_i : t \mapsto \gamma(t_i + t(t_{i+1} - t_i)) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}.$$

On commence par étudier les courbes  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_1$  injectives, on peut alors sans perte de généralité se placer dans le cas du cercle unité dans  $\mathbb{R}^2$  (le cercle de longitude constante). On a alors l'égalité

$$\|\gamma\|_{\|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^3)}} = \|\gamma\|_{\|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^2)}} = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$



**Figure 16:** Figure explicative de la projection lambert conforme

D'après ce schéma, on voit que pour tout point  $F$  sur le cercle la longueur de la courbe  $\gamma$  allant de  $B$  à  $F$  est majorée par la longueur du segment  $BI$ , de plus sur la figure on a  $\epsilon/2 = \beta$ . On obtient facilement l'inégalité

$$\cos(\epsilon/2) \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}}}{\|\gamma\|_{\|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^3)}}}.$$

Étudions maintenant les courbes  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_2$  de latitude égale à  $\theta + \epsilon$  et injectives. On sait que la courbe  $\gamma$  ainsi que sa projection  $P(\gamma)$  décrivent un arcs de cercle dans  $\mathbb{R}^3$ . Le rapport entre la longueur de l'arc de cercle défini par  $P(\gamma)$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^3$  est majoré grossièrement par  $\cos(\theta + \epsilon)/\cos(\beta)$ . Alors, quelque soit  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_2$  on

$$\frac{\cos(\theta + \epsilon)}{\cos(\beta)} \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}}}{\|\gamma\|_{\|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^3)}}}$$

Pour chaque courbe  $\gamma$  dans  $\mathcal{C}_m$  on a alors

$$\min\left(\frac{2\sin(\epsilon/2)}{\epsilon}, \frac{\cos(\theta + \epsilon)}{\cos(\theta)}\right) \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}}}{\|\gamma\|_{\|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^3)}}} \leq 1,$$

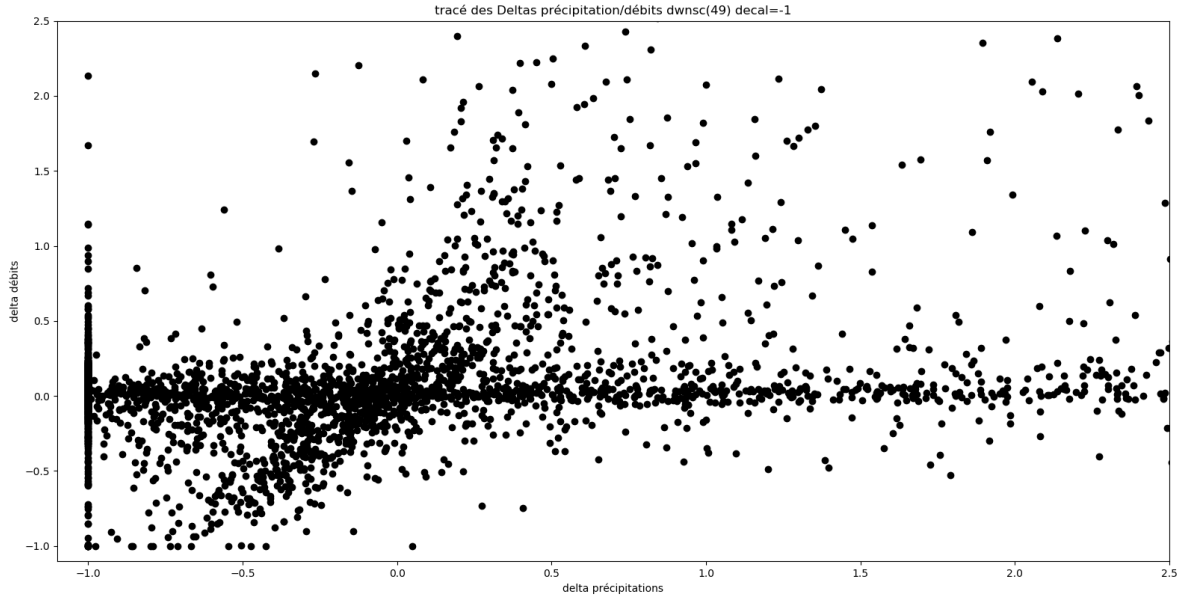
la densité de  $\mathcal{C}_m$  dans l'ensemble des courbes continues permet de conclure.  $\square$

Finalement, on peut voir que dans notre cas où  $\theta = \pi 33/180$  et  $\epsilon = \pi 12/180$ . On a que pour toute courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S(\mathbb{R}^3)$  dont la latitude est comprise entre  $\theta$  et  $\theta + \epsilon$  on a

$$0.84 \leq \frac{\|P(\gamma)\|_{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}}}{\|\gamma\|_{\|\cdot\|_{S(\mathbb{R}^3)}}} \leq 1.$$

### 4.3 Indexe 3: Classification des populations de débit

On commence par rappeler ce que sont les données  $\Delta Q$  et  $\Delta R$ , sont les différences entre les séries projetées et les séries de référence ( $R$  correspond à la pluie et  $Q$  au débit). Nous avons vu que les schémas nous incitent à considérer deux classes de points (citer la partie correspondante).



**Figure 17:** tracé des  $\Delta Q(t)$  en fonction des  $\Delta R(t-1)$

On définit alors les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  tels que

$$\mathcal{C} = \{(\Delta Q(t), \Delta R(t-1)), \Delta Q(t) = f(\Delta R(t-1)) + \epsilon(t)\},$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc et  $f$  une fonction affine, et

$$\mathcal{I} = \{(\Delta Q(t), \Delta R(t-1)), \text{cov}(\Delta Q(t), \Delta R(t-1)) = 0\},$$

c'est à dire les lorsque les points  $\Delta Q(t)$  et  $\Delta R(t-1)$  sont indépendants.

Il paraît alors pertinent d'utiliser deux droites  $D_1$  et  $D_2$  pour classifier ces débits. Et l'on va chercher à définir les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{I}$  à partir de ces deux droites. Soit  $X$  un ensemble de points  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$ , on cherche deux droites  $D_1$  et  $D_2$  minimisant la valeur

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, D_1 \cup D_2),$$

où  $d$  est la distance définie par

$$d(x, E) = \min_{e \in E} |x - e|^2.$$

On peut définir les droites de  $\mathbb{R}^2$  par un couple de points  $(u, v)$  dans  $\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$ , où  $\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2)$  est le cercle unité et  $u$  définit la direction de la droite et  $v$  sont orientation. Alors, on peut redéfinir le problème dans ce cadre. On cherche les couples  $(u_1, v_1)$  et  $u_2, v_2$  minimisant la fonction  $F$  satisfaisant

$$F : (\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ ((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \mapsto \sum_{i=1}^n \min(d(x_i, \mathbb{R}u_1 + v_1), d(x_i, \mathbb{R}u_2 + v_2)) \quad (29)$$

On commence par développer la distance d'un point à une droite, c'est une formule de projection classique. On appelle  $f$  la fonction  $f : (\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f((u, v), x) = d(x, \mathbb{R}u + v)$ .

$$\begin{aligned} f_x(u, v) &= d(x, \mathbb{R}u + v) \\ &= |x - v - u\langle x - v, u \rangle|^2 \\ &= |x - v|^2 - \langle x - v, u \rangle^2 \\ &= |x|^2 - 2\langle x, v \rangle + |v|^2 - \langle x, u \rangle^2 + 2\langle x, u \rangle \langle v, u \rangle - \langle v, u \rangle^2. \end{aligned} \quad (30)$$

On cherche maintenant à calculer  $\vec{\nabla} f_x$ , le gradient étant une application linéaire, on a

$$\vec{\nabla} f_x(u, v) = \vec{\nabla} |x|^2 - \vec{\nabla} 2\langle x, v \rangle + \vec{\nabla} |v|^2 - \vec{\nabla} \langle x, u \rangle^2 + \vec{\nabla} 2\langle x, u \rangle \langle v, u \rangle - \vec{\nabla} \langle v, u \rangle^2,$$

après avoir développé puis factoriser on obtient finalement,

$$\vec{\nabla} f_x(u, v) = 2 \begin{pmatrix} (v - x)\langle u, x - v \rangle \\ v - x + u\langle u, x - v \rangle \end{pmatrix}. \quad (31)$$

On peut donc en déduire une formule pour la fonction  $F$  définie dans (29)

$$\begin{aligned} F((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= \sum_{i=1}^n \min(f_{x_i}(u_1, v_1), f_{x_i}(u_2, v_2)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f_{x_i}(u_1, v_1) + f_{x_i}(u_2, v_2) - |f_{x_i}(u_1, v_1) - f_{x_i}(u_2, v_2)|}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

On obtient finalement une expression pour  $\vec{\nabla} F$ ,

$$\vec{\nabla} F(u_1, v_1, u_2, v_2) = \left( \sum_{i=1}^n \mathcal{I}^-_{x_i}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \vec{\nabla} f_{x_i}(u_1, v_1) \right) \\ \left( \sum_{i=1}^n \mathcal{I}^+_{x_i}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \vec{\nabla} f_{x_i}(u_2, v_2) \right) \quad (33)$$

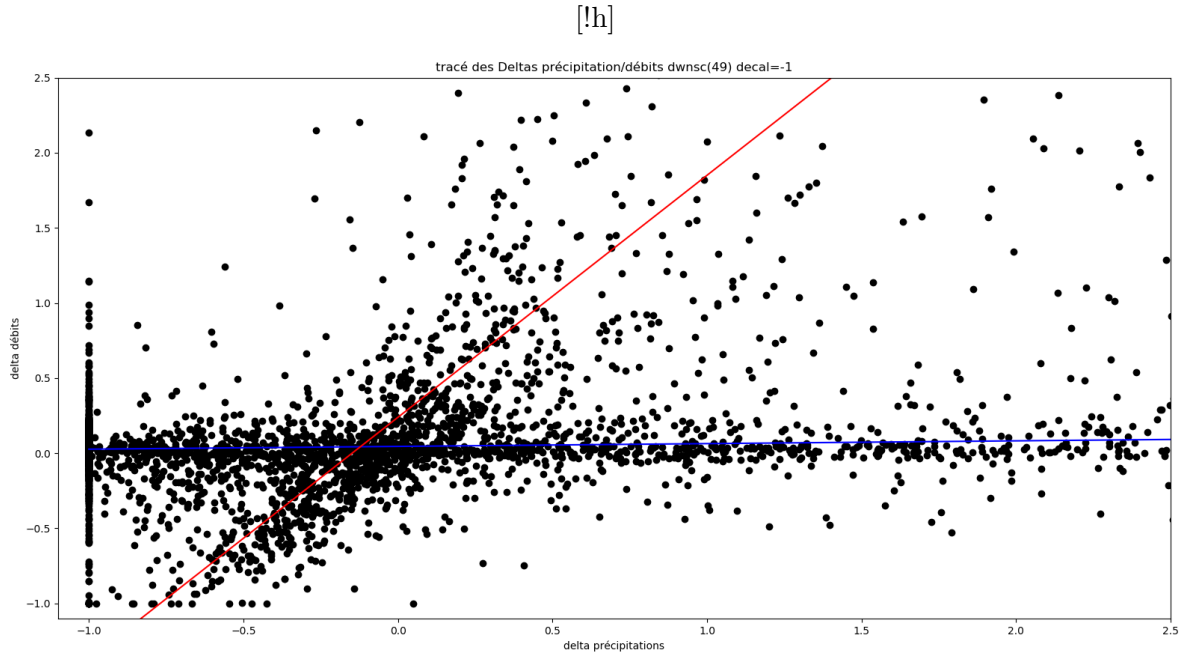
où

$$\mathcal{I}^-_{x_i}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(f_{x_i}(u_1, v_1) - f_{x_i}(u_2, v_2))$$

et

$$\mathcal{I}^+_{x_i}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \mathbb{1}_{[0, \infty[}(f_{x_i}(u_1, v_1) - f_{x_i}(u_2, v_2)).$$

On peut appliquer l'algorithme d'Uzawa (voir par exemple Boyd et al. (2004)) pour trouver le minimum sur  $(\mathcal{U}_1(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2)^2$  en considérant le plongement de  $F$  dans  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)^2$  avec les contraintes  $|u_i| = 1$ . Nous avons cherché ces droites avec la fonction de minimize de "scipy.optimize" voir Jones et al. (01). Les deux droites trouvées sont alors



**Figure 18:** tracé des  $\Delta Q(t)$  en fonction des  $\Delta R(t-1)$  avec droites de classification

Nous verrons qu'on peut alors classifier les points en deux groupes dont nous essayons de donner une interprétation physique dans la section 3.5.

## References

- Allaire, G. (2005). *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique.
- Ayar, P. V., Vrac, M., Bastin, S., Carreau, J., Déqué, M., and Gallardo, C. (2016). Inter-comparison of statistical and dynamical downscaling models under the euro-and med-cordex initiative framework: present climate evaluations. *Climate dynamics*, 46(3-4):1301–1329.
- Boyd, S., Boyd, S. P., and Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Bünig, H. (2002). Robustness and power of modified lepage, kolmogorov-smirnov and cramér-von mises two-sample tests. *Journal of Applied Statistics*, 29(6):907–924.
- Cappus, P. (1960). Etude des lois de l’écoulement-application au calcul et à la prévision des débits. *La houille blanche*, pages 493–520.
- Christensen, J. H., Boberg, F., Christensen, O. B., and Lucas-Picher, P. (2008). On the need for bias correction of regional climate change projections of temperature and precipitation. *Geophysical Research Letters*, 35(20).
- De Marsily, G. (1986). Quantitative hydrogeology. Technical report, Paris School of Mines, Fontainebleau.
- Durrett, R. (2019). *Probability: theory and examples*, volume 49. Cambridge university press.
- Éthier, F. (2011). *À propos de divers tests statistiques pour l’égalité des lois*. PhD thesis, Université du Québec à Trois-Rivières.
- Fisz, M. (1963). Probability theory and mathematical statistics.
- Grafarend, E. W. and Krumm, F. W. (2014). *Map projections*. Springer.
- Hillel, D. (2003). *Introduction to environmental soil physics*. Elsevier.
- Horton, R. E. (1933). The role of infiltration in the hydrologic cycle. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 14(1):446–460.
- Huang, W.-L. and Chen, S.-P. (2012). Optimal aggregate production planning with fuzzy data. *International Journal of Industrial and Manufacturing Engineering*, 6(8):1633–1638.
- Jones, E., Oliphant, T., Peterson, P., et al. (2001–). SciPy: Open source scientific tools for Python.
- Lindgren, F., Rue, H., and Lindström, J. (2011). An explicit link between gaussian fields and gaussian markov random fields: the stochastic partial differential equation approach. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 73(4):423–498.
- Maquin, M. (2016). *Développement d’un modèle hydrologique de colonne représentant l’interaction nappe-végétation-atmosphère et applications à l’échelle du bassin versant*. PhD thesis, Université Paris-Saclay (ComUE).

- Maraun, D. (2012). Nonstationarities of regional climate model biases in european seasonal mean temperature and precipitation sums. *Geophysical Research Letters*, 39(6).
- Nahar, J., Johnson, F., and Sharma, A. (2017). Assessing the extent of non-stationary biases in gcms. *Journal of Hydrology*, 549:148–162.
- Robin, Y., Vrac, M., Naveau, P., and Yiou, P. (2019). Multivariate stochastic bias corrections with optimal transport. *Hydrology and Earth System Sciences*, 23(2):773–786.
- Villani, C. (2003). *Topics in optimal transportation*. Number 58. American Mathematical Soc.
- Vrac, M., Drobinski, P., Merlo, A., Herrmann, M., Lavaysse, C., Li, L., and Somot, S. (2012). Dynamical and statistical downscaling of the french mediterranean climate: uncertainty assessment. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 12(9):2769–2784.