Licht auf Abwegen – Teil 2: Warum eigentlich geradeaus?

Ergänzung für Fortgeschrittene

12. Januar 2026

Einleitung

Im ersten Teil haben wir angenommen, dass sich Licht innerhalb eines homogenen Mediums (z. B. nur Luft) geradlinig ausbreitet. Aber warum ist das so? Wir wissen aus der Physik (Fermatsches Prinzip):

> **Licht wählt den Weg, der die wenigste Zeit benötigt.**

In einem homogenen Medium ist die Lichtgeschwindigkeit v konstant. Zeitminimierung bedeutet in diesem Fall also Wegminimierung.

Die mathematische Fragestellung lautet daher: **Welche Kurve $y(x)$ zwischen zwei Punkten A und B hat die kürzeste Länge?**

1 Von der Zahl zur Funktion: Das Funktional

In der klassischen Kurvendiskussion suchen wir einen Wert x, der eine Funktion $f(x)$ minimiert. Hier suchen wir jedoch eine *ganze Funktion* $y(x)$, die eine Eigenschaft L (die Bogenlänge) minimiert.

Die Länge L einer Kurve $y(x)$ von x_1 bis x_2 ist gegeben durch das Integral:

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \tag{1}$$

Wir nennen $L[y]$ ein **Funktional**: Es ist eine „Maschine“, die eine Funktion als Eingabe erhält und eine Zahl (die Länge) als Ausgabe liefert.

2 Die Variation – Wir „wackeln“ am Weg

Wie prüfen wir, ob wir das Minimum gefunden haben?

- **Klassisch:** Wir gehen ein Stückchen ε zur Seite ($x + \varepsilon$). Wenn wir im Minimum sind, darf sich der Funktionswert in erster Näherung nicht ändern (die Ableitung ist 0).

- **Hier:** Wir verändern die *ganze Kurve* ein bisschen.

Wir nehmen an, die Funktion $y(x)$ sei die optimale Lösung (die Gerade). Nun addieren wir eine beliebige „Störfunktion" oder „Testfunktion" $\eta(x)$ (sprich: Eta), die wir mit einem kleinen Faktor ε skalieren:

$$y_{\text{neu}}(x) = y(x) + \varepsilon \cdot \eta(x) \tag{2}$$

Wichtig: Damit Start- und Zielpunkt gleich bleiben, darf die Störung an den Rändern keine Auswirkung haben. Es muss also gelten:

$$\eta(x_1) = 0 \quad \text{und} \quad \eta(x_2) = 0$$

3 Die Fréchet-Ableitung: Linearität im Funktionenraum

Um das Konzept der Ableitung auf Funktionale zu übertragen, betrachten wir die lokale Änderung. Bei einer gewöhnlichen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreibt die Ableitung $A = f'(x)$ die lineare Änderung in der Nähe von x:

$$f(x + h) \approx f(x) + A \cdot h$$

Analog suchen wir für unser Funktional L einen linearen Operator A, die sogenannte **Fréchet-Ableitung** (oft bezeichnet als erste Variation δL), sodass gilt:

$$L[y + \eta] \approx L[y] + \delta L[y](\eta)$$

Hierbei spielt die Störung η die Rolle des kleinen Schrittes h. Der Term $\delta L[y](\eta)$ sagt uns, wie stark sich die Länge ändert, wenn wir den Pfad in die spezifische Richtung η „ausbeulen".

Berechnung als Richtungsableitung

In der Praxis berechnen wir diese Ableitung, indem wir die Änderung entlang einer festen „Richtung" η betrachten. Wir führen den Parameter ε ein und definieren eine Hilfsfunktion $L(\varepsilon)$, die nur noch von einer Zahl abhängt:

$$L(\varepsilon) := L[y + \varepsilon\eta]$$

Wenn $y(x)$ der kürzeste Weg ist, muss für *jede beliebige* erlaubte Störung $\eta(x)$ gelten, dass die Länge bei $\varepsilon = 0$ minimal ist. Die notwendige Bedingung ist also:

$$\frac{d}{d\varepsilon} L[y + \varepsilon\eta] \bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } \eta. \tag{3}$$

Diese Ableitung nach dem Parameter ε entspricht der Gâteaux-Ableitung (Richtungsableitung). In der Physik führt das Auswerten dieser Gleichung (via partieller Integration) direkt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen und damit auf $y''(x) = 0$ (die Gerade).

4 Visualisierung der Variation

Die folgende Abbildung veranschaulicht das Prinzip: Wir starten mit der Geraden (schwarz) und addieren eine Störung $\varepsilon \cdot \sin(x)$ (gestrichelt). Das rechte Diagramm zeigt die Länge des Pfades in Abhängigkeit von der Stärke ε der Störung. Man erkennt deutlich, dass jede Abweichung ($\varepsilon \neq 0$) den Weg verlängert und das Minimum genau bei der Geraden ($\varepsilon = 0$) liegt.

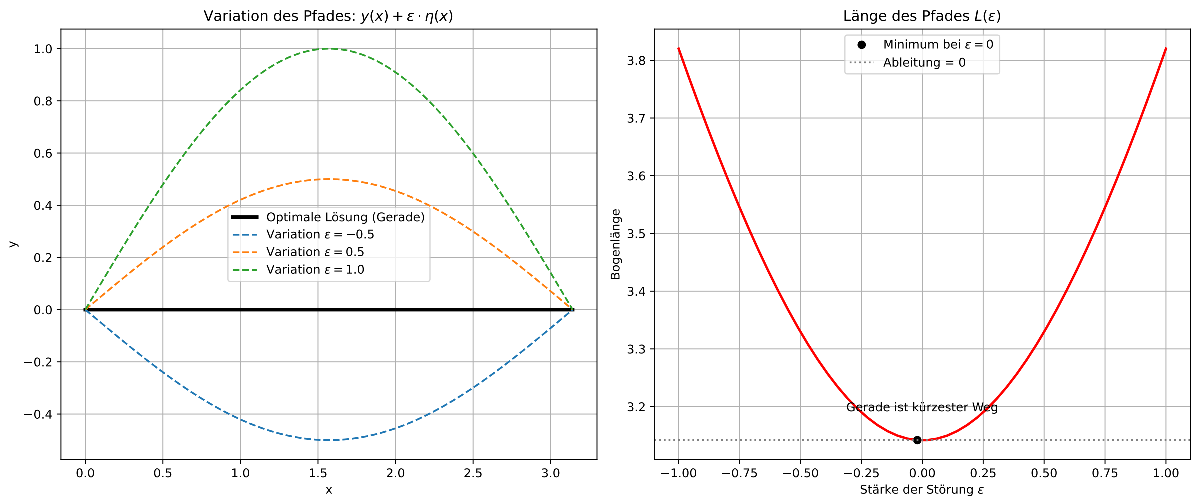

Abbildung 1: Links: Variation des optimalen Pfades (Gerade) durch eine Sinus-Störung. Rechts: Die Länge des Pfades $L(\epsilon)$ ist minimal bei $\epsilon = 0$. Dort verschwindet die Steigung (Fréchet-Ableitung).