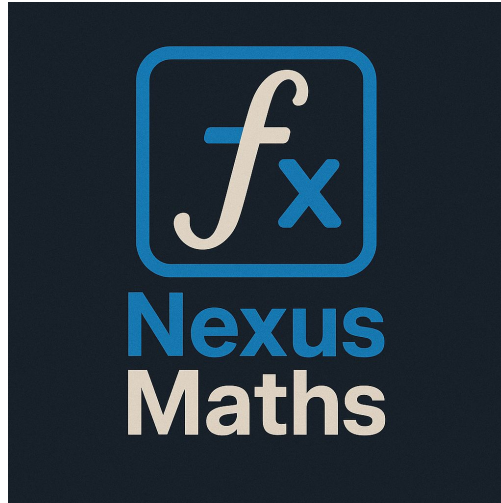


# Cours sur les Propriétés des Nombres Premiers

Nexus Maths



## Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel strictement supérieur à 1 qui n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

## Propriétés fondamentales

- **1. Unicité de la décomposition en facteurs premiers :** Tout entier  $n \geq 2$  peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) comme un produit de nombres premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

où les  $p_i$  sont premiers distincts et les  $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ .

- **2. Infinité des nombres premiers :** Il existe une infinité de nombres premiers. (Démontré par Euclide.)
- **3. Divisibilité :** Si un nombre premier  $p$  divise un produit  $ab$ , alors il divise  $a$  ou  $b$  (ou les deux).

- **4. Nombres premiers consécutifs :** Il n'existe pas de formule simple généralisée qui génère tous les nombres premiers, mais certains modèles approchent leur répartition.
- **5. Théorème de Wilson :** Un entier  $p > 1$  est premier si et seulement si :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

- **6. Théorème de Fermat (petit) :** Si  $p$  est un nombre premier et  $a \in \mathbb{N}$  tel que  $p \nmid a$ , alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

## Applications

- Cryptographie (ex : RSA)
- Tests de primalité
- Théorèmes d'arithmétique modulaire

## Exercice

Déterminer les facteurs premiers de 1260.

*Solution :*

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

## Exercices complémentaires

- 1. Décomposition en facteurs premiers** Décomposer les entiers suivants en produit de facteurs premiers :  

$$a) 210 \quad b) 693 \quad c) 924$$
- 2. Application du petit théorème de Fermat** Vérifier si les congruences suivantes sont vraies :  

$$a) 3^6 \equiv 1 \pmod{7} \quad b) 5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$
- 3. Critère de primalité (Wilson)** Vérifier si  $p = 5$  et  $p = 7$  satisfont la condition du théorème de Wilson.
- 4. Produit de deux nombres premiers** Trouver deux nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que  $p \cdot q = 221$ .

5. **Nombre premier entre deux carrés** Montrer qu'il existe au moins un nombre premier entre  $10^2$  et  $11^2$ .
6. **Somme de deux nombres premiers** Trouver toutes les façons d'écrire les entiers suivants comme somme de deux nombres premiers :
- a) 10   b) 28   c) 36
7. **Suite de nombres premiers** Trouver les cinq plus petits nombres premiers formant une suite arithmétique de raison 6.
8. **Nombre premier et diviseur** Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que si  $p \mid a^2$ , alors  $p \mid a$ .
9. **Trouver le plus petit nombre divisible par 3 nombres premiers distincts** Trouver le plus petit entier naturel divisible par trois nombres premiers distincts dont la somme est égale à 20.
10. **Propriété de divisibilité** Soit  $a, b \in \mathbb{N}$  et  $p$  un nombre premier. Montrer que si  $p \mid (a + b)$  et  $p \mid (a - b)$ , alors  $p \mid a$  et  $p \mid b$ .

**NB:** le symbole  $\mid$  signifie "divise" et on dit que  $a \mid b$  s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $b = k.a$