Nexus Maths 107 : Introduction aux factorielles

Mathis Billa

Septembre 2025

Définition

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la **factorielle de** n par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Par convention :

$$0! = 1.$$

Exemple

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

On peut démontrer que $0! = 1$ en prolongeant la fonction $f(x) = x!$ aux nombres complexes (l'ensemble $\mathbb{C}$).

Avertissement

Pour la section qui suit, il faut des notions de limites, de dérivation et de calcul intégral.

Lien avec la fonction Gamma

Introduisons la fonction Gamma :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

En particulier, pour $z \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\, dt.$$

Intégration par parties

Posons :

$$u = t^z, \quad dv = e^{-t} dt.$$

Alors :

$$du = z t^{z-1} dt, \quad v = -e^{-t}.$$

On obtient :

$$\Gamma(z+1) = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Itération

Le terme de bord s'annule :

$$\left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0.$$

Donc :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En itérant :

$$\Gamma(z+1) = z \times (z-1) \times \cdots \times 1 \times \Gamma(1).$$

Or :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Donc :

$$\Gamma(z+1) = z!,$$

et en particulier :

$$0! = \Gamma(1) = 1.$$