Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Partie I : La divisibilité

Nexus Maths

Juillet 2025

1 Introduction

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui étudie les nombres, leurs propriétés et les opérations qui peuvent être effectuées sur eux : addition, soustraction, multiplication, division, etc. Nous allons ici nous concentrer sur la notion de **divisibilité** dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

2 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \neq 0$. On dit que a **divise** b, et on note $a \mid b$, s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$b = k \cdot a.$$

Propriétés fondamentales

— **(Transitivité)** Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.

— Si $a \mid b$ et $c \mid d$, alors $ac \mid bd$.
Preuve :
Il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $b = k_1 a$ et $d = k_2 c$.
Donc :

$$bd = (k_1 a)(k_2 c) = (k_1 k_2)(ac),$$

ce qui prouve que $ac \mid bd$.

— Si $a \mid b$, alors $|a| \leq |b|$.
Preuve :
Si $b = k \cdot a$, alors $|b| = |k \cdot a| = |k| \cdot |a|$.
Comme $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a $|k| \geq 1$, donc $|b| \geq |a|$.

— Si p est un nombre premier, alors ses seuls diviseurs dans $\mathbb{Z}$ sont :

$$\pm 1 \quad \text{et} \quad \pm p.$$

3 Exercices

1. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^2 + 1 \mid n + 1$.
2. Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 + 5n + 6$ est un nombre premier.
   Indice : Factoriser l'expression et utiliser les propriétés de divisibilité des nombres premiers.
3. Montrer que si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.
4. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $a \mid bc$ et $pgcd(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.
5. Montrer que si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (bx + cy)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$.