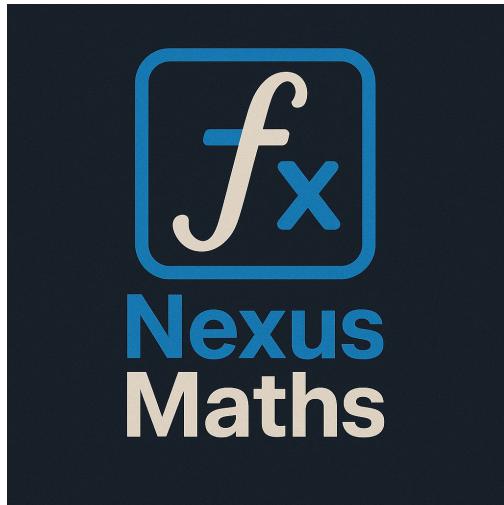


Cours sur les Propriétés des Nombres Premiers

Nexus Maths



Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel strictement supérieur à 1 qui n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

Propriétés fondamentales

- **1. Unicité de la décomposition en facteurs premiers :** Tout entier $n \geq 2$ peut s'écrire de manière unique (à l'ordre près) comme un produit de nombres premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

où les p_i sont premiers distincts et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

- **2. Infinité des nombres premiers :** Il existe une infinité de nombres premiers. (Démontré par Euclide.)
- **3. Divisibilité :** Si un nombre premier p divise un produit ab , alors il divise a ou b (ou les deux).

- **4. Nombres premiers consécutifs** : Il n'existe pas de formule simple généralisée qui génère tous les nombres premiers, mais certains modèles approchent leur répartition.
- **5. Théorème de Wilson** : Un entier $p > 1$ est premier si et seulement si :

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

- **6. Théorème de Fermat (petit)** : Si p est un nombre premier et $a \in \mathbb{N}$ tel que $p \nmid a$, alors :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Applications

- Cryptographie (ex : RSA)
- Tests de primalité
- Théorèmes d'arithmétique modulaire

Exercice

Déterminer les facteurs premiers de 1260.

Solution :

$$1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Exercices complémentaires

1. **Décomposition en facteurs premiers** Décomposer les entiers suivants en produit de facteurs premiers :
 - 210
 - 693
 - 924
2. **Application du petit théorème de Fermat** Vérifier si les congruences suivantes sont vraies :
 - $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$
 - $5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$
3. **Critère de primalité (Wilson)** Vérifier si $p = 5$ et $p = 7$ satisfont la condition du théorème de Wilson.
4. **Produit de deux nombres premiers** Trouver deux nombres premiers p et q tels que $p \cdot q = 221$.

5. **Nombre premier entre deux carrés** Montrer qu'il existe au moins un nombre premier entre 10^2 et 11^2 .
6. **Somme de deux nombres premiers** Trouver toutes les façons d'écrire les entiers suivants comme somme de deux nombres premiers :
- a) 10 b) 28 c) 36
7. **Suite de nombres premiers** Trouver les cinq plus petits nombres premiers formant une suite arithmétique de raison 6.
8. **Nombre premier et diviseur** Soit p un nombre premier. Montrer que si $p \mid a^2$, alors $p \mid a$.
9. **Trouver le plus petit nombre divisible par 3 nombres premiers distincts** Trouver le plus petit entier naturel divisible par trois nombres premiers distincts dont la somme est égale à 20.
10. **Propriété de divisibilité** Soit $a, b \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier. Montrer que si $p \mid (a + b)$ et $p \mid (a - b)$, alors $p \mid a$ et $p \mid b$.

NB: le symbole | signifie "divise" et on dit que $a|b$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k.a$