Fiche de corrections

Quiz Nexus Maths

1. **Si $3x + 5y = 3$, calculer $32^y \cdot 8^x$.**

   Correction. On écrit $32 = 2^5$ et $8 = 2^3$, donc

   $$32^y \cdot 8^x = (2^5)^y (2^3)^x = 2^{5y+3x} = 2^{\,3} = 8,$$

   car $3x + 5y = 3$. $\boxed{8}$

2. **Par quel nombre est divisible $10^7 + 1$?**

   Correction. On remarque $10 \equiv -1 \pmod{11}$, donc $10^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \pmod{11}$ et $10^7 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$. Ainsi $10^7 + 1$ est divisible par $\boxed{11}$. (En fait $10^7 + 1 = 11 \times 909\,091$.)

3. **Pour quels entiers n le nombre $7^n - 1$ est-il divisible par 6 ?**

   Correction. Modulo 6, on a $7 \equiv 1$, donc $7^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{6}$ pour tout entier $n \geq 0$. Ainsi $7^n - 1 \equiv 0 \pmod{6}$ pour *tous* les entiers n (naturels).

4. **Déterminer le plus petit entier n tel que $1 + 2 + \cdots + n > 100$.**

   Correction. On a $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} > 100 \iff n^2 + n - 200 > 0$. La racine positive vaut $\dfrac{-1 + \sqrt{801}}{2} \approx 13{,}66$, donc le plus petit entier est $\boxed{n = 14}$ (vérif. : $1 + \cdots + 13 = 91 < 100$ et $1 + \cdots + 14 = 105 > 100$).

5. **Déterminer le plus petit entier n tel que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) > 100$.**

   Correction. La somme des n premiers entiers impairs vaut n^2. On veut $n^2 > 100$, d'où le plus petit n est $\boxed{11}$ (car $10^2 = 100$ et $11^2 = 121$).

6. **Si $2^a \cdot 4^b = 16$ et $a + b = 8$, quelle est la valeur de a ?**

   Correction. Écrivons $4^b = 2^{2b}$. Alors $2^a \cdot 2^{2b} = 2^{a+2b} = 16 = 2^4$, donc $a + 2b = 4$. Avec $a + b = 8$, on soustrait les équations : $(a + 2b) - (a + b) = 4 - 8$ d'où $b = -4$, puis $a = 8 - (-4) = \boxed{12}$.

7. **Combien de carrés parfaits strictement positifs sont ≤ 2025 ?**

   Correction. On a $2025 = 45^2$. Les carrés positifs ≤ 2025 sont $1^2, 2^2, \ldots, 45^2$, soit $\boxed{45}$.

8. **Trois boîtes identiques : l'une contient des billes rouges (R), l'une des bleues (B), la dernière des rouges et bleues (RB). Toutes sont mal étiquetées. En ne tirant qu'une bille d'une seule boîte, peut-on identifier correctement toutes les boîtes ?**

   Correction. Oui. Prendre une bille dans la boîte étiquetée « RB » (puisque toutes les étiquettes sont fausses, cette boîte est en réalité monochrome). Si on tire une rouge, alors cette boîte est **R**. Les deux autres étiquettes « R » et « B » sont fausses : la boîte étiquetée « R » ne peut pas être R, donc elle est **RB** ; la dernière est alors **B**. (Symétriquement si la bille tirée est bleue.)

9. **Île des trois tribus (honnêtes, menteurs, aléatoires). Un habitant répond « Non » à la question « Es-tu honnête ? ». Que conclure avec certitude ?**

   Correction. Un honnête dirait « Oui » ; un menteur, dont la vérité est « Non », mentirait et dirait « Oui » également. La réponse « Non » ne peut donc provenir ni d'un honnête ni d'un menteur. On conclut avec certitude que l'habitant est $\boxed{\textit{aléatoire}}$.