Comprendre les congruences

Nexus Maths

Septembre 2025

Introduction

Quand on divise des nombres, il reste parfois un petit morceau appelé **reste**. Exemple : $7 \div 3 = 2$ reste 1. Les congruences sont juste une façon **stylée et pratique** de parler de ces restes.

1 La divisibilité

Définition simple

On dit qu'un nombre a **divise** un nombre b si la division tombe juste (sans reste). On écrit $a \mid b$.

Exemples :

- $3 \mid 6$ car $6 = 2 \times 3$.
- $5 \nmid 12$ car $12 \div 5$ laisse un reste 2.

Astuce

Dire $a \mid b$ c'est dire que b est **un multiple** de a.

2 Les congruences

Définition

Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$ avec $n > 0$. On dit que a est **congru** à b modulo n si a et b ont le même reste quand on les divise par n. On écrit :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Exemples concrets

- $7 \equiv 1 \pmod 6$ car $7 \div 6 = 1$ reste 1.
- $20 \equiv 2 \pmod 9$ car $20 \div 9 = 2$ reste 2.
- $14 \equiv 2 \pmod{12}$ car $14 \div 12 = 1$ reste 2.
- $-1 \equiv 3 \pmod 4$ car -1 et 3 laissent le même reste quand on les divise par 4.

Idée à retenir

Deux nombres sont **congrus modulo** n s'ils laissent le même reste en divisant par n.

3 Petit exercice corrigé

Exercice : Trouver le plus petit entier $n > 0$ tel que :

$$3^n \equiv 1 \pmod 4$$

Solution : On remarque que :

$$3 \equiv -1 \pmod 4$$

Donc :

$$3^n \equiv (-1)^n \pmod 4$$

- Si n est impair, $(-1)^n = -1 \equiv 3 \pmod 4$.
- Si n est pair, $(-1)^n = 1 \pmod 4$.

Le plus petit n qui marche est donc $n = 2$ car $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 4$.

Pour s'entraîner

1. Trouver le reste de 25 quand on le divise par 7. Écrire le résultat sous forme de congruence.
2. Vérifier que $19 \equiv 4 \pmod 5$.
3. Trouver le plus petit $n > 0$ tel que $2^n \equiv 1 \pmod 3$.