

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (யெற்றர)ப் 2023

கூடிய கணிதம்

Combined Mathematics

10 **T** **I**

யெ ஏக்டி
முன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය	- මිනිතු 10 දි
මෙළත්ක වාසිප්පූ තොරය	- 10 නිමිත්කන්
Additional Reading Time	- 10 minutes

வினாத்தானை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங் கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

கால்டெண்ட்						
------------	--	--	--	--	--	--

அறிவுரூபத்தல்கள் :

- இவ்வினாத்தாள் பகுதி A (வினாக்கள் 1 – 10), பகுதி B (வினாக்கள் 11 – 17) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
 - பகுதி A :
எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுறிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிக தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
 - பகுதி B
ஒன்று வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
 - ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A இன் விடைத்தாளானது பகுதி B இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கக்கூடியது. இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரிட்சை மண்டபமேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
 - வினாத்தாளின் பகுதி B **ஐ** மாத்திரம் பரிட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பிட்கர்களின் உபயோத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் ।		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

வினாக்கள்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியடிடன்கள்

விடைத்தாள் பர்ட்சகர்	
பரிசீலித்தவர் :	1
மேற்பார்வை செய்தவர்	2

01. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இறகும் $\sum_{r=1}^n 2^r = 2(2^n - 1)$ என நிறுவுக.

02. $y = |x - 2| - 2$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $|x - 2| - 2 = \frac{x}{2}$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.



03. ஆகண் வரிப்படத்தில், சமனிலி $|z - 2 - 2i| \leq 1, Arg(z - 4i)$ ஜுத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண் z யை வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசம் R இனை நிழற்றுக. நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்தில் உள்ள புள்ளிகளினால் வகைக்குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்கள் Z இற்கு $Im(z)$ இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

04. $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $(1 + x)^n$ இனது ஈருறுப்பு விரிவை x இன் வலு அதிகரிக்கும் மூங்கில் எழுதுக.

$(1 + x + ax^2)^7$ இன் விரியில் உள்ள x^2 இன் குணகம் 14 எனின் $a = -1$ எனக்காட்டுக.

05. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ எனக் காட்டுக.

06. $f(x) = (x+1) \tan^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ எனின் $\frac{df(x)}{dx}$ இணைக் காண்க. இதிலிருந்து இணைப் பெறுக.

$x = 3, y = 0, y = \sqrt{\tan^{-1} \sqrt{x}}$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x அச்சைப்பற்றி 2π ஆரையங்களினாலும் கழற்றப்படுவதால் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{\pi}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$ எனக்காட்டுக.



$07.0 \leq \theta \leq \pi$ இற்கு θ பரமானமாக இருக்க $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ என்பவற்றின் மூலம் C எனும் ஒரு வளையிய பரமானமாக தரப்பட்டுள்ளது. $\theta = \alpha$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி P இல் வளையிய C இற்கு வரையப்பட்ட செவ்வனின் சமன்பாடு $(a \sec \alpha)x - (b \cosec \alpha)y + b^2 - a^2 = 0$ இனால் தரப்படும் எனக்காட்டுக. C இன் மீதுள்ள $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ புள்ளியில் வரையப்பட்ட செவ்வனின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

08. $4x + 3y - k = 0$, $5x - 12y + 7 = 0$ ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினாடு செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $l: y - mx = 0$ எனின் m இன் பெறுமானத்தை k சார்பில் காண்க. மேலும் $l = 0$ என்ற கோடு, $x + y = 0$ என்ற கோட்டுக்குச் செங்குத்து எனத் தரப்படுன், m, k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

09. $x^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதும் y -அச்சின் மீது மையத்தை கொண்டதுமான வட்டம் $S = 0$ இன் பரிதியை $x^2 + y^2 + x - 7y + 5 = 0$ என்ற வட்டமானது இருசமகறிடுகிறது எனின் $S = 0$ இற்கு சாத்தியமான இரு வட்டங்கள் உண்டெனக் காட்டி, அவ்வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

10 $\tan A = \frac{5}{12}$, $\sin B = \frac{4}{5}$ என்க. இங்கு $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ ஆகும். எனின் $\sin(A + B)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

13 (a). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ஆகவிருக்க A உடன் பெருக்கலின் கீழ் பரிவர்த்தனையான B எனும் தாயத்தை $\lambda A + \mu I$ வடிவில் எடுத்துரைக்க முடியுமெனக் காட்டுக. இங்கு λ, μ என்பன மெய் ஒருமைகள், Iஎன்பது வரிசை இரண்டிலான அலகுத் தாயமாகும். $B = A^2$ ஆகுமாறு λ, μ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து A^{-1} ஐக் காண்க.

(b). $Z^6 - 1$ ஐ முற்றாக காரணிப்படுத்துவதன் மூலம் $Z^6 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காண்க. Z_1, Z_2 என்பன $Z^6 = 1$ எனும் சமன்பாட்டின் யாதாயினும் இரு வேறுவேறான மூலங்கள் எனின், ஆகண் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக $|Z_1 - Z_2|$ இனது பெறுமானங்கள் $1, 2, \sqrt{3}$ எனக்காட்டுக.

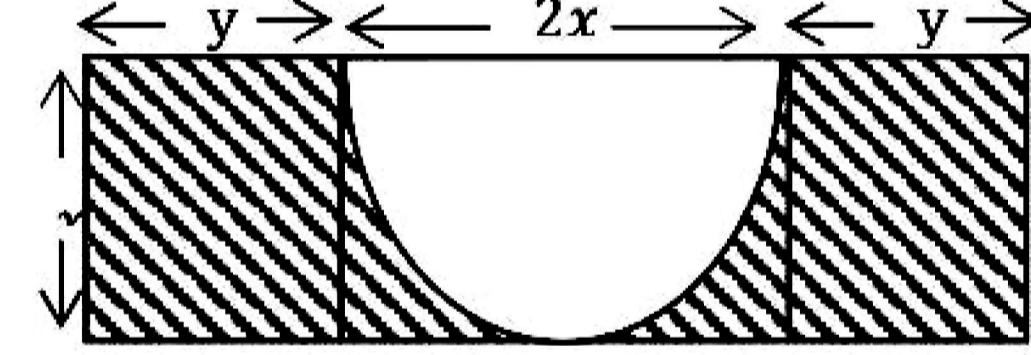
(c). தமோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நேர் நிறைவேண் n இற்கு

$$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = (-1)^n \text{ என்பதை உய்த்தறிக.}$$

14 (a) $x \neq -1$ இற்கு $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ இன் முதலாம் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq -1$ இற்கு $f'(x) = \frac{-(x-3)}{(x+1)^3}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் x இன் ஆயிடையையும் $f(x)$ குறையும் x இன் ஆயிடையையும் காண்க. அத்துடன், $f(x)$ இன் திரும்பல் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க. $x \neq -1$ இற்கு $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. அணுகுகோடுகள், திரும்பற புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி, $y = f(x)$ இன்வரைபை பரும்படியாக வரைக.

(b) உருவில் காட்டியவாறு நீளம் $2(x+y)$ மீற்றர், அகலம் x மீற்றர் ஆகவுள்ள செவ்வக வடிவ தகட்டின்பரப்பளவு $8\pi m^2$ ஆகும். அத்தகட்டிலிருந்து x ம ஆரையுள்ள அரைவட்டப் பகுதியைன்று வெட்டி அகற்றப்பட்டு உருவில் காட்டப்பட்டவாறு நிழற்றப்பட்ட பகுதி பெறப்படுகிறது. $x > 0$ இற்கு, நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் கற்றளவு p ம என்பது $p = \pi\left(x + \frac{6}{x}\right)$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக. p குறைந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



15 (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ கும் $x^4 + 1 = A(x^4 - 1) + B(x^2 + 1)(x + 1) + C(x^2 + 1)(x - 1) - (x^2 - 1)$

ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து $\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1} dx$ ஜக் காண்க.

(b) (i) $y = x + \cos x \sin^3 x$ ஆயின் $\frac{dy}{dx} = 1 + 3 \sin^2 x - 4 \sin^4 x$ எனக் காட்டுக.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x \sin^2 x - 4x \sin^4 x) dx \quad \text{ஆயின் மேற்படி பேறினையும் பகுதிகளாக}$$

தொகையிடல் முறையையும் பயன்படுத்தி $I = \frac{1}{8}(\pi^2 - 2)$ எனக் காட்டுக.

(ii) $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3 \cos^2 x - 4 \cos^4 x) dx \quad J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x \cos^2 x - 4x \cos^4 x) dx$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளதைப் பொதுபடி $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ஜப்பயன்படுத்தி $I = \frac{\pi}{2}J_1 - J_2$ எனக்காட்டுக.

இப்போது $\frac{dy}{dx} = 1 + 3 \cos^2 x - 4 \cos^4 x$ எனத் தரப்படுமிடத்து $J_2 = \frac{1}{8}(\pi^2 + 2)$ எனக் காட்டி J_1 இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(c) $t = \sqrt{x^3 + 1}$ என்ற பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int_0^2 \frac{x^8}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$ இன் பெறுமானத்தை காண்க.

16 $l_1: x - \sqrt{3}y + 1 + k = 0, l_2: x + \sqrt{3}y + 1 - k = 0$ என்ற கோடுகள் புள்ளி $(-1, 3)$ இனாடு

செல்லுமாயின் $k = 3\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக. k இன் இப்பெறுமானத்துக்கு கோடுகள் $l_1 = 0, l_2 = 0$

இன் கோண இருக்கிகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக. இதில் கூர்ங்கோண இருக்கிக்கி $l = 0$ எனக். $l=0$ மீது $A \equiv (2, 3)$ என்ற புள்ளி அமையும் எனக் காட்டுக.

A இனை மையமாகவும் விட்டம் 3 அலகு உடைய வட்டம் S இன் சமன்பாட்டை எழுதுக. புள்ளி A இலிருந்து கோடு $l_1 = 0$ இற்கான செங்குத்துத்தூரத்தை காண்க. இதிலிருந்து $(-1, 3)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து வட்டம் $S = 0$ இற்கு வரையப்படும் தொடவிகளின் சமன்பாடுகளை உய்த்தறிக. $l = 0$ மீதுள்ள புள்ளி P இலிருந்து வட்டம் $S = 0$ இற்கு வரையப்படும் தொடவிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும் எனின் P இற்கு இரு சாத்தியமான நிலைகள் உண்டு எனக் காட்டுக. அப்புள்ளிகளின் ஆள்கறுகளைக் காண்க. மேலும் அத்தொடவிகளினால் அடைக்கப்படும் நாற்பக்கவின் பரப்பளவைக் காண்க

17(a)(i) $\cos A, \cos B, \sin A, \sin B$ என்பவற்றின் சார்பில் $\cos(A + B)$ ஜி எழுதி இதிலிருந்து $\cos 3A$ இற்கான ஒரு கோவையை $\cos A$ இல் பெறுக.

$$(ii) \frac{2 \cos 3x - 4 \cos^5 x + 3 \cos^3 x}{\cos x (1 + \sin^2 x)} = \lambda \cos 2x + k \text{ ஆகுமாறு மெய் மாறிலிகள் } \lambda, k \text{ இனைத் துணிக.}$$

இதிலிருந்து $f(x) = \frac{2 \cos 3x - 4 \cos^5 x + 3 \cos^3 x}{\cos x (1 + \sin^2 x)}$ இன் உயர்வு, இழிவு பெறுமானங்களை கண்டு, சார்பின் வரைபை $x \in [-\pi, \pi]$ எனும் வீச்சில் வரைக.

(b) முக்கோணி ABC யினுள் $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \alpha$ ஆகுமாறு புள்ளி P அமைந்துள்ளது.

பொருத்தமான இரு முக்கோணிகளை தெரிந்து கைன் விதியைப் பயன்படுத்தி PC இற்கான இரு கோவைகளை எழுதுக. அதிலிருந்து $\cot \alpha = \cot A + \cot B + \cot C$ எனக் காட்டுக.

(c) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ இற்கு $2 \tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

