(All Rights Reserved / முழுப் பதிப்புரிமை உடையது)

தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
மூன்றாம் தவணைப் பரீட்சை - 2024
National Field Work Centre, Thondaimanaru
3rd Term Examination - 2024

FWC

இணைந்த கணிதம்
Combined Maths

Two Hours 10 Min

Gr. 12 (2024)

10 | T | B

11. (a) $p > q$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு $x^2 - p(x+1) + q = 0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.
இம் மூலங்கள் $\alpha, \beta (< \alpha)$ எனக் கொள்வோம்.
(i) $\alpha > 0$ எனவும் $\beta < 0$ எனவும் காட்டுக.
(ii) $|\alpha| + |\beta| = \sqrt{p^2 + 4(p-q)}$ எனக் காட்டுக.
$|\alpha|$, $|\beta|$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை p, q சார்பில் காண்க.
(iii) $(\alpha+1)(\beta+1) = 1 + q$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து,** $\frac{(\alpha+1)^2}{(\alpha+1)^2-1-q} + \frac{(\beta+1)^2}{(\beta+1)^2-1-q} = 1$ எனக் காட்டுக.

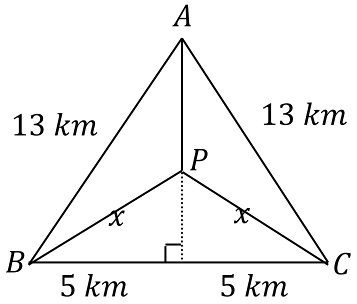
(b) $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 19x + c$ எனக் கொள்வோம் இங்கு a, b, c என்பன மெய்ம் மாறிலிகள் ஆகும். $(x-1)^2$ ஆனது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனவும் $p(x)$ ஐ $x+1$ இனால் வகுக்க வரும் மீதி 24 எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. a, b, c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.
$p(x)$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

12. (a) $x \neq 1$ இற்கு $f(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்.
$x \neq 1$ இற்கு $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\frac{3x+1}{(x-1)^3}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கின்ற ஆயிடையையும் $f(x)$ குறைகின்ற ஆயிடைகளையும் காண்க.
அத்துடன், $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.
$x \neq 1$ இற்கு $f''(x) = \frac{6(x+1)}{(x-1)^4}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி, $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.
$(-\infty, k]$ மீது $f(x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் k இன் மிகப் பெரிய பெறுமானத்தை எடுத்துரைக்க.

Download Pastpaper & Answer Scheme

www.beeon.org

(b) ஒரு நிறுவனம் A, B, C என்னும் நகரங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு கிளை அங்காடியைக் கொண்டுள்ளது. B, C என்பன $10\ km$ தொலைவிலும் A ஆனது B, C ஆகிய ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் $13\ km$ தொலைவிலும் உள்ளன. P என்னும் ஒரு களஞ்சியசாலை B, C இலிருந்து சமதொலைவில் அமைக்க வேண்டியுள்ளது.
$BP = CP = x$ எனவும் $L(x) = AP + BP + CP$ எனவும் கொள்வோம்.



$L(x) = 2x + 12 - \sqrt{x^2 - 25}$ எனக் காட்டுக.
$L(x)$ இழிவாக இருக்கும் x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

13. $P \equiv (x_1, y_1)$ எனவும் l ஆனது $ax + by + c = 0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். புள்ளி P இனூடான l இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் வடிவம் $(x_1 + at, y_1 + bt)$ இல் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக் இங்கு $t \in \mathbf{R}$. P இலிருந்து l இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என **உய்த்தறிக.** புள்ளி A இனூடாகச் செல்லும் l_1, l_2 என்னும் நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே $x - y + 1 = 0$, $7x - y - 5 = 0$ ஆகும். புள்ளி $B \equiv (2, 9)$ இனூடாக l_1 இற்குச் செங்குத்தான கோடு மீதுள்ள ஒரு புள்ளி H ஆகும். H இலிருந்து l_1, l_2 இற்கான செங்குத்துத் தூரங்கள் முறையே $2\sqrt{2}$, $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ஆகும்.

(i) புள்ளி A இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
(ii) புள்ளி $B \equiv (2, 9)$ ஆனது நேர்கோடு l_2 மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.
(iii) புள்ளி $H \equiv (3, 8)$ எனக் காட்டுக.
(iv) புள்ளி H ஆனது முக்கோணி ABC இன் நிமிர்மையமாக அமையத்தக்கதாக உச்சி C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.
(v) B, C இனூடு செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

A CLASSICAL EDUCATION FOR THE FUTURE

14. (a) $\sin(A + B)$ ஐ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக. **இதிலிருந்து,** $\cos(A - B)$ இற்கான ஓர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெறுக.
$k \in \mathbf{R}$, $k \neq 2$ எனவும் $f(x) = k\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ எனவும் கொள்வோம்.

(i) $k > 2$ எனின், $f(x)$ ஐ வடிவம் $p\sin(x + \alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க் இங்கு k இல் $p(> 0)$ உம், $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ உம் துணியப்படவேண்டிய மெய்ம் மாறிலிகள்.

(ii) $k < 2$ எனின், $f(x)$ ஐ வடிவம் $q\sin(x + \beta)$ இல் எடுத்துரைக்க இங்கு k இல் $q(> 0)$ உம், $\beta(\pi < \beta < 2\pi)$ உம் துணியப்படவேண்டிய மெய்ம் மாறிலிகள். **இதிலிருந்து,** சமன்பாடு $f(x) = |k - 2|$ ஐத் தீர்க்க.

(b) முக்கோணி ABC இல் வழமையான குறியீடுகளுடன் $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$ எனக் காட்டுக. முக்கோணி ABC இல் வழமையான குறியீடுகளுடன் $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ எனக் கொள்வோம். $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = 1$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக,** முக்கோணி ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனக் காட்டுக.

(c) சமன்பாடு $\sin^{-1}(2 - x) - 2\sin^{-1}(x - 1) = \frac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

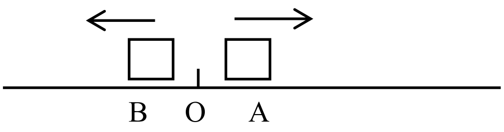
Download Pastpaper & Answer Scheme

www.beeon.org

(All Rights Reserved / முழுப் பதிப்புரிமை உடையது)

15.

(a) மேற்கு கிழக்கான ஒரு கிடை வீதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி O இல் இருந்து A, B ஆகிய மோட்டார் வண்டிகள் ஓய்வில் இருந்து ஒரே நேரத்தில் முறையே கிழக்காக $2f$ ஆர்முடுகலுடனும் மேற்காக f ஆர்முடுகலுடனும் இயங்குகின்றன. நேரம் T இல் A ஆனது தான் பெற்ற வேகத்துடன் சீராக இயங்கும் அதே வேளை, B ஆனது தனது கதியை மாற்றாது தனது பாதையை உடனடியாக A ஐ நோக்கி திருப்பி A ஐ பிடிக்கும் நோக்குடன் ஆர்முடுகல் f உடன் Aஐ நோக்கி பயணிக்கின்றது.



(i) A, B என்பன இயங்கத் தொடங்கியதில் இருந்து B ஆனது A ஐ பிடிக்கும் வரை A, B இன் இயக்கங்களுக்கான வேகநேர வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

(ii) A, B இன் வேகங்கள் சமனாவதற்கு எடுக்கும் நேரம் யாது?

(iii) A, B இரண்டும் இயங்கத் தொடங்கியதில் இருந்து B ஆனது A ஐ பிடிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

(iv) B ஆனது A ஐ பிடிக்கும் கணத்தில் B இன் கதியை காண்க.

(b) ஒரு கப்பல் s வடக்கு நோக்கி $2u$ சீரான கதியுடன் செல்கின்றது. கப்பலின் பாதையில் இருந்து கிழக்கே $\sqrt{3}\,d$ தூரத்தில் ஒரு சிறு தீவு காணப்படுகின்றது. ஒரு குறித்த கணத்தில் தீவானது கப்பலில் இருந்து வடக்குக்கு $60°$ கிழக்கு திசையில் உள்ளது. அக்கணத்தில் கப்பலில் இருந்து ஒரு நேர் கோட்டில் சீரான கதியுடன் பறந்து செல்லும் பறவை B ஆனது தீவை $\frac{d}{u}$ நேரத்தில் அடைகின்றது.

(i) தீவை நோக்கிய பயணத்தில் பறவையின் பூமி சார்பான பாதையை வரைக.

(ii) தீவை நோக்கிய பயணத்தில் பறவையின் கதியை காண்க.

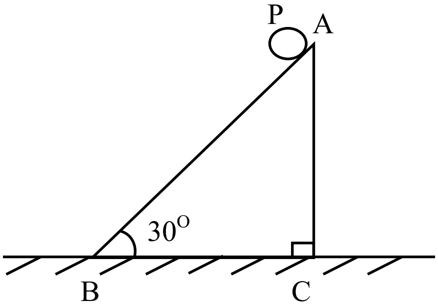
(iii) சார்பு வேக கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி வேக முக்கோணியை வரைவதன் மூலம் தீவை நோக்கிய பயணத்தில் பறவையின் கப்பல் சார்பான வேகத்தைக் காண்க.

(iv) பறவை தீவை அடைந்து உடனடியாக மீண்டும் கப்பலை அடையும் நோக்குடன் $2u$ கதியுடன் ஒரு நேர்கோட்டால் பறப்பின் தீவை அடைய முடியாது என சார்பு வேக கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி காட்டுக.

(v) பறவை ஆனது தீவை அடைந்து உடனடியாக மீண்டும் கப்பலை அடையும் நோக்குடன் $2\sqrt{3}\,u$ சீரான கதியுடன் ஒரு நேர்கோட்டில் பறப்பின் சார்பு வேக கோட்பாட்டை பயன்படுத்தி பறவை கப்பலை அடையும் எனக் காட்டி தீவில் இருந்து பறவை கப்பலை அடைய எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

16.

(a) உருவில் காட்டப்பட்டவாறு $AC = a, A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$ $A\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கும் முக்கோணி ABC ஆனது திணிவு Mஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஊடான நிலைக்குத்து குறுக்கு வெட்டாகும். முகம் BC ஓர் ஒப்பமான கிடைநிலத்தில் இருக்குமாறு AB ஆனது அதனை கொண்டுள்ள முகத்தின் அதி உயர் சரிவுக்கோடு ஆகுமாறு உள்ளது. உருவில் காட்டப்பட்டவாறு m திணிவுள்ள துணிக்கை P ஆனது உச்சி A இல் வைக்கப்பட்டு AB வழியே மெதுவாக விடப்படுகின்றது.



துணிக்கை P ஆனது ஆப்பின் அடியில் உள்ள புள்ளி Bஐ $\sqrt{\frac{6a}{g}}$ நேரத்தில் அடைகின்றது. எனில்,

(i) துணிக்கை P இன் ஆப்பு சார்பான ஆர்முடுகலை g சார்பில் காண்க.

(ii) ஆப்பின் ஆர்முடுகலை g சார்பில் காண்க.

(iii) $M = 2m$ எனக் காட்டுக.

Download Pastpaper & Answer Scheme
BEEON
A CLASSICAL EDUCATION FOR THE FUTURE

www.beeon.org

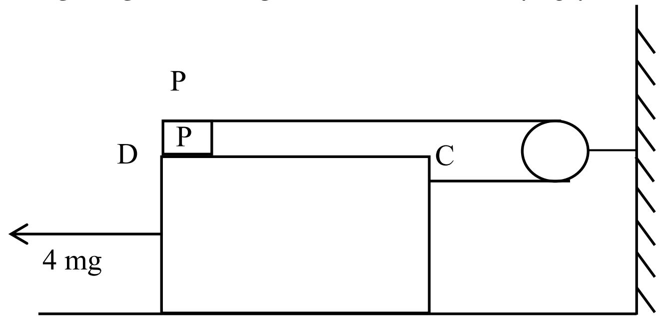
(All Rights Reserved / முழுப் பதிப்புரிமை உடையது)

(iv) துணிக்கை ஆனது ஆப்பில் உள்ள போது

(அ) கிடை நிலத்தினால் ஆப்பின் மீது தாக்கும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(ஆ) ஆப்பினால் துணிக்கை P இல் தொழிற்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(b)



படத்தில் செவ்வகம் $ABCD$ ஆனது $3m$ திணிவுடைய ஓர் ஒப்பமான மரக்குற்றியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஊடான நிலைக்குத்து குறுக்கு வெட்டாகும். முகம் AB ஓர் ஒப்பமான கிடைநிலத்தில் தங்க, படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு ஒரு நிலைக்குத்தான சுவரில் நிலைப்படுத்தப்பட கப்பியின் மேலாக செல்லும் இழையின் ஒரு நுனி மரக்குற்றிக்கு மற்றைய நுனி மரக்குற்றியின் முகம் DC இன் மீது D யில் வைக்கப்பட்ட m திணிவுள்ள துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டு இழையின் பகுதிகள் கிடையாக இறுக்கமாக இருக்க மரக்குற்றிக்கு $4mg$ கிடை விசை படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு கொடுக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில்,

(i) துணிக்கை P, குற்றி ஆகியவற்றின் ஆர்முடுகல்களை துணிவதற்கு போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.

(ii) $AB = 2a$ எனில் துணிக்கை P ஆனது C ஐ அடைய எடுக்கும் நேரம் யாது?

17.

(a) $\overrightarrow{OA} = 4\underline{i} + \underline{j}$

$\overrightarrow{OB} = \underline{i} + 4\underline{j}$

$\overrightarrow{OC} = 7\underline{i} + 7\underline{j}$ ஆகும். இங்கு O உற்பத்தி. R ஆனது $BR : RC = m : 1$ ஆகுமாறு BC இன் மீது உள்ள புள்ளி ஆகும். Q ஆனது AC இன் மீது $\overrightarrow{BQ} = 5\underline{i} + \underline{j}$ ஆகுமாறு ஒரு புள்ளி ஆவதுடன் AR, BQ என்பன P இல் இடைவெட்டுகின்றன.

(i) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ஐ $\underline{i}, \underline{j}$ சார்பில் காண்க.

(ii) $\overrightarrow{AR}$ ஐ $\underline{i}, \underline{j}, m$ சார்பில் காண்க.

(iii) $AR \perp BC$ எனில்

(அ) $m = \frac{1}{4}$ எனக் காட்டுக.

(ஆ) $Q\hat{P}R$ ஐ காண்க.

(இ) $\overrightarrow{BQ} = \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{BC}$ எனில் λ, μ ஐ காண்க.

(b) $AD = AB = 2a, DC = 4a, A\hat{D}C = 60°$ ஆகுமாறு $ABCD$ ஓர் சரிவகம், $AB \parallel DC$ ஆகும். DC இன் நடுப்புள்ளி E $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}$ ஆகியவற்றின் வழியே முறையே $4N, 6N, 6N, 8N, 4\sqrt{3}N, 6N$ விசைகள் தாக்குகின்றன.

(i) விசைத்தொகுதியின் விளையுளைக் காண்க?

(ii) விளையுளானது AB ஐ வெட்டும் புள்ளியை A இல் இருந்து காண்க?

(iii) இவ் விசைத்தொகுதியின் A இன் ஊடாக செல்லும் தனி விசைக்கும் இணை G இற்கும் சமவலுவானது எனில் அவ் விசையையும், இணையின் பருமனையும் காண்க?

(iv) $\overrightarrow{BD}$ வழியே தொழிற்படும் ஒரு புதிய விசை P இனால், புதிய விளையுள் AB க்கு $\perp$ ஆக காணப்படின் அப்புதிய விசை P இன் பருமனைக் காண்க?

Download Pastpaper & Answer Scheme

www.beeon.org