



தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
இரண்டாம் தவணைப் பரீட்சை - 2023
National Field Work Centre, Thondaimanaru.
2nd Term Examination - 2023

இணைந்த கணிதம் - (B)
Combined mathematics - (B)

Gr -12 (2024)

10

T

B

பகுதி - B

11) (a) $p > q > 0$ எனவும் $f(x) = x^2 - 2px + q^2$ எனவும் $g(x) = x^2 - 2qx + p^2$ எனவும் கொள்வோம். சமன்பாடு $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் மெய்யானவையும் வேறுவேறானவையும் எனவும் சமன்பாடு $g(x) = 0$ இன் மூலங்கள் கற்பனையானவை எனவும் காட்டுக.

$f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனவும் $g(x) = 0$ இன் மூலங்கள் γ, δ எனவும் கொள்வோம்.

$\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 - 4pqx + 4(p^4 - p^2q^2 + q^4) = 0$ எனக் காட்டுக.

மேலும் இச்சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் கற்பனையானவை எனவும் காட்டுக.

$x \in \mathbb{R}$ இற்கு $f(x) + g(x) \geq \frac{1}{2}(p - q)^2$ எனக் காட்டுக.

(b) $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + c$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு a, b, c என்பன மெய்ம் மாறிலிகள் ஆகும். $x, x - 1$ என்பன $p(x)$ இன் காரணிகள் எனவும் $p(x)$ ஐ $x + 1$ இனால் வகுக்க வரும் மீதி 10 எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. a, b, c இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

$p(x)$ ஐ இரு ஏகபரிமாணக் காரணிகளினதும் ஒரு இருபடிக் காரணியினதும் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க.

இதிலிருந்து $p(x)$ ஐ $x(x - 1)(x - 2)$ இனால் வகுக்க வரும் ஈவையும் மீதியையும் காண்க.

12) (a) பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+7}}{x-2}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{(x-1)(2x-1)}$

(b) முதற் தத்துவங்களில் இருந்து x குறித்து $\sin x$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

இதிலிருந்து, x குறித்து $\sin^{-1} x$ இன் பெறுதியைப் பெறுக.

$y = \sin(m \sin^{-1} x)$ எனின், $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + m^2 y = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு m ஒரு மெய்ம் மாறிலி.

- (c) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ இற்கு $x = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$ எனவும் $y = 2 \cos \theta - \cos 2\theta$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{8} \operatorname{cosec}^3 \frac{3\theta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ இல் } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ஐயும் காண்க.}$$

- 13) (a) பின்வரும் சர்வசமன்பாடுகளை நிறுவுக.

$$(i) \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = 2 \sec \theta,$$

$$(ii) \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta.$$

- (b) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ எனவும் $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ எனவும் நிறுவுக; இங்கு $t = \tan \frac{x}{2}$.

$a, b \in \mathbf{R}^+$ இற்கு $(a^2 - b^2) \sin \alpha + 2ab \cos \alpha = a^2 + b^2$ எனின் $\sin \alpha$ ஐயும் $\cos \alpha$ ஐயும் a, b சார்பில் காண்க.

- (c) சமன்பாடு $2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ இன் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

- 14) (a) $\cos(A+B)$ ஐ $\sin A, \cos A, \sin B, \cos B$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக.

இதிலிருந்து, $\cos(A-B)$ இற்கான ஓர் ஒத்த விரிவைப் பெறுக.

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

- (b) வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும்

ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு சைன் நெறியைக் கூறி நிறுவுக.

உருவில் காட்டப்பட்ட முக்கோணி ABC யின் பக்கம் BC யின் நடுப்புள்ளி D ஆகும். $B\hat{D}A = \frac{\pi}{4}$, $B\hat{C}A = \frac{\pi}{6}$, $B\hat{A}D = \alpha$ ஆகும்.

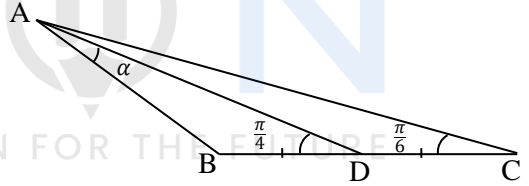
முக்கோணிகள் ABD, ADC ஆகியவற்றிற்கு சைன் நெறியைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம்

$$2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{12} = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ எனக் காட்டுக. [$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ எனக் கொள்க.]

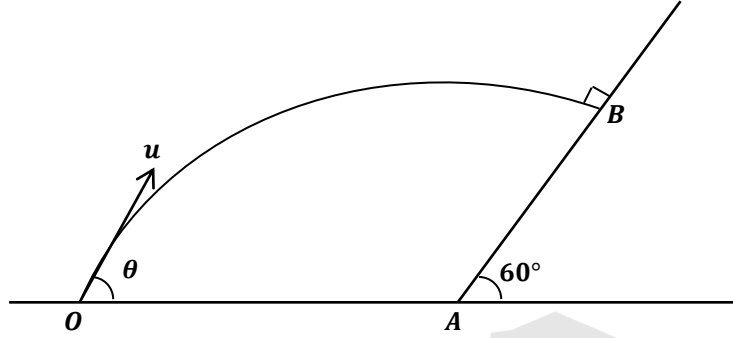
- (c) $x > 0$ இற்கு $\tan^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$ ஐத் தீர்க்க.

- 15) (a) நிலையம் A இல் ஓய்வில் இருந்து புறப்படும் ஒரு புகையிரதம் ஒரு நேரான கிடையான புகையிரதப் பாதை வழியே இயங்கிச் செல்கிறது. அது தன் பயணத்தின் முதல் $5T$ செக்கனுக்கு சீரான ஆர்முடுகல் $8f \text{ ms}^{-2}$ உடன் இயங்கி அடுத்த $12T$ செக்கன்களுக்கு சீரான ஆர்முடுகல் $5f \text{ ms}^{-2}$ உடன் இயங்கி பெற்ற வேகத்துடன் T_0 செக்கன்களுக்கு சீராக இயங்கி பின் $20f \text{ ms}^{-2}$ அமர்முடுகலுடன் இயங்கி நிலையம் B இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது.



- (i) புகையிரதத்தின் இயக்கத்திற்கான வேக நேர வரைபை வரைக.
- (ii) புகையிரதம் இயங்கத் தொடங்கி $17T$ செக்கனில் புகையிரதத்தின் கதியாது?
- (iii) புகையிரதத்தின் இயக்கத்தின் முதல் $17T$ செக்கனில் புகையிரதம் சென்ற தூரம் யாது?
- (iv) நிலையம் A இல் இருந்து நிலையம் B இற்கான தூரம் முதல் $17T$ செக்கனில் இயங்கிய தூரத்தின் 6 மடங்கு எனின் T_0 ஐ T சார்பில் கண்டு இயக்கத்திற்கு எடுத்த மொத்த நேரத்தைக் காண்க.

(b)



கிடைத்தரையில் உள்ள புள்ளி O இல் இருந்து கிடையுடன் θ கோணத்தில் u கதியுடன் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படும் துணிக்கை அதே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் கிடைத்தரையில் உள்ள புள்ளி A இன் ஊடாக OA உடன் 60° சாய்வில் அமைந்துள்ள நிலைத்த தளத்தை $\sqrt{3ag}$ கதியுடன் $\sqrt{\frac{12a}{g}}$ நேரத்தில் செங்குத்தாக புள்ளி B இல் அடிக்கின்றது.

- (i) $u = 3\sqrt{ag}$ எனக் காட்டுக.
- (ii) θ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.
- (iii) \overrightarrow{OA} மட்டத்தில் இருந்து B இன் உயரத்தைக் காண்க.
- (iv) துணிக்கை B ஐ அடித்து அடிக்கும் திசைக்கு நேர் எதிர்திசையில் v வேகத்துடன் பின்னதைத்து A இல் விழுகின்றது எனில் v ஐக் காண்க.

- 16) (a) O என்ற உற்பத்தி குறித்து A, C என்ற புள்ளிகளில் தானக்காவிகள் முறையே $a, a+b$ ஆகும். D இன் தானக்காவி $2a$. AC க்கு சமாந்தரமாக O ஊடாக வரையும் கோட்டில் $AC = OB$ ஆகுமாறு B ஐக் குறிக்க. DB, OC ஐ M இல் சந்திக்கும். $OM = \lambda OC, MB = \mu DB$ ஆகக் கொள்க.

- (i) B இன் தானக்காவியைக் காண்க.
- (ii) \overrightarrow{DB} ஐ a, b சார்பாக தருக.
- (iii) $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MB}$ என்பவற்றை λ, μ, a, b சார்பாக தருக.
- (iv) $DM : MB, OM : MC$ என்பவற்றைக் காண்க.

- (b) முக்கோணி ABC இன் நிமிர் மையம் H . \overrightarrow{HA} , \overrightarrow{HB} , \overrightarrow{HC} திசைகளில் முறையே P , Q , R என்ற விசைகள் தாக்குகின்றன. விசைத்தொகுதி சமனிலையிலிருப்பின் $\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c}$ எனக் காட்டுக.
- 17) (a) $ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. $3, 4\sqrt{3}, 8, \sqrt{3}, 2N$ விசைகள் முறையே \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{FA} திசைகளில் தாக்குகின்றன.
- (i) தொகுதியின் விளையுளின் பருமன், திசையைக் காண்க.
- (ii) இத்தொகுதியை சமனிலையடையச் செய்ய சேர்க்க வேண்டிய விசையின் பருமன் திசையைக் காண்க.
- (b) $4m$ நீளமும் 40 kg நிறையுமுள்ள சீரான கோல் அதன் நுனிகளில் இணைக்கப்பட்ட இழைகளால் தாங்கப்படுகிறது. இழைகள் அறாது தாங்கக்கூடிய இழுவை 35 kg எனின் 20 kg நிறையை மையத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் தொங்கவிட முடியும் எக் காண்க.

