

Aufgabe 1)

Betrachte: $\int_X f_+ d\delta_a$ und $\int_X f_- d\delta_a$.

Fall 1: $f(a) > 0 \Rightarrow \int_X f_+ d\delta_a = 0 < \infty$. Es gilt: $f_+ \in E \Rightarrow \exists (f_n) \in E$ isoton mit $f_n \nearrow f_+$.

mon. Konv. $\forall n: f_n = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ mit $a_i \geq 0$ eindeutig und $(A_i) \subseteq \mathcal{B}$

$$\int_X f_+ d\delta_a = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\delta_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\delta_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \delta_a(A_i) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_i \underbrace{\delta(A_i)}_{=1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f_+(a) = f(a) < \infty \quad \text{da } (A_i) \text{ paarw. disj. } \exists j \in \mathbb{N} \text{ mit } a \in A_j$$

$$\Rightarrow \int_X f_+ d\delta_a < \infty, \int_X f_- d\delta_a < \infty \text{ und da } f \text{ m.b.} \stackrel{12.20}{\Rightarrow} \int_X f d\delta_a = \int_X f_+ d\delta_a - \int_X f_- d\delta_a = f(a)$$

Fall 2: $f(a) < 0$: analog vert. f_+ mit f_-

Fall 3: $f(a) = 0$ analog zu Fall 1 $\Rightarrow \int_X f_+ d\delta_a = 0 = \int_X f_- d\delta_a < \infty$.

ii) Nicht Riemann-integrierbar, da für $h_n \uparrow f: \lim h_n = 0$ und für $g_n \downarrow f: \lim g_n = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

Da \mathbb{Q} abzählbar $\Rightarrow \exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\} = \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow f_n := \mathbf{1}_{[q_n, \infty)} \nearrow \mathbf{1}_\mathbb{Q} \Rightarrow \int_X f(x) d\lambda(x) = \lim_n \int_X f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 a_i^{(n)} \lambda(X_i) =$$

mon. Konv. $f_n = \sum_{i=1}^2 a_i^{(n)} \mathbf{1}_{X_i}$, $(X_i) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1^{(n)} \underbrace{\lambda(\mathbb{Q})}_{=0} + a_2^{(n)} \underbrace{\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{=0} = 0$$

Aufgabe 3)

i) $|\sqrt{\sin x}| \leq 1 \in L^1([0, \pi], \lambda)$

$$\Rightarrow \lim_n \int_0^\pi \sqrt{\sin(x)} d\lambda(x) = \int_0^\pi \sqrt{\sin(x)} d\lambda(x) = \int_R [0, \pi] (x) d\lambda(x) \cdot \pi$$

maj. Konv.

ii) $|x| \leq 1 \quad \forall x \in [0, 1], 1 \in L^1([0, 1], \lambda)$

$$\Rightarrow \lim_n \int_0^1 x^n d\lambda(x) = \int_0^1 \lim_n x^n d\lambda(x) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,1]} dx = 0$$

maj. Konv.

iii) $\left| \frac{n \cdot \sin(x)}{1+n^2 \sin^2 x} \right| \leq \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \in L^1([0, 1], \lambda)$

$$\Rightarrow \lim_n \int_0^1 \frac{n \cdot \sin(x)}{1+n^2 \sin^2 x} d\lambda(x) = \int_0^1 \lim_n \frac{n \cdot \sin(x)}{1+n^2 \sin^2 x} d\lambda(x) = \int_0^1 0 d\lambda(x) = 0$$

Aufgabe 4)

i) $a) \Rightarrow b)$: nach Def.

$$|b| \in \mathbb{L}^1 : |f| = f^+ + f^- \in \mathbb{L}^1$$

$c) \Rightarrow d)$: nach Def.

$$d) \Rightarrow e) : \infty > \int |f| = \underbrace{\int f^+}_{< \infty} + \underbrace{\int f^-}_{< \infty} \Rightarrow f^+, f^- \in \mathbb{L}^1$$

$$e) \Rightarrow f) : |f| = f^+ + f^- \leq g_1 + g_2 = g \in \mathbb{L}^1$$

$$f) \Rightarrow a) : \int f^2 d\lambda \leq \int f d\lambda \leq \int g d\lambda < \infty \Rightarrow f^2 \in \mathbb{L}^1 \Rightarrow f \in \mathbb{L}^2$$

ii) Sei $f \in \mathbb{L}^2(\mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathbb{L}^1 \Leftrightarrow \int_x |f| d\mu < \infty$

$$\text{Nun gilt: } \infty > \int_x |f| d\mu = \int_x \mathbb{1}_{\{|f|=0\}} d\mu = \infty \cdot \underbrace{\mu(\{|f|=0\})}_{\geq 0, \text{ da } \mu \text{ Maß}} \Rightarrow \mu(\{|f|=0\}) = 0$$

Achtung Umkehrung gilt nicht! Sei $\mu = \lambda$, $f = 1$, dann gilt: $\mu(\{|f|=0\}) = 0$.

$$\text{Aber } \int_x f d\lambda = \infty \Rightarrow f \notin \mathbb{L}^2(\lambda)$$

Aufgabe 2)

i) Gehen in Tenördarstellung

Widerspruchsaussnahme: C abzählbar $\Rightarrow \exists$ bij. $f: C \rightarrow \mathbb{N}$ mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$
 $a_n \rightarrow n$

Dann findet man für jede Folge ein weiteres Element in C das kein Element in C das kein Element in der Folge ist. Nämlich mit:

Sei nun $c_{n,i}, n, i \in \mathbb{N}$ die i -te Nachkommastelle des n -ten Folgegliedes

d_n . Falls nun $d_i \neq a_{n,i}$???

ii) TB4, A3: $C = \bar{C}$ ($\Leftrightarrow C$ abgeschlossen)

$\Rightarrow C$ enthält kein Intervall mit pos. Länge (Maß), da $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ mit $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

Ang.: $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset \Rightarrow C$ enthält mind. ein offene Intervall U von $c \in C$ mit $U \subseteq C$

aber offene Intervalle die einen Punkt enthalten, haben positive Länge $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \overset{\circ}{C} = \emptyset$.

