23.10.18

Definition 1.10 Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert

a) linear mit Rate $\gamma \in]0,1[$ gegen $x\in\mathbb{R}^n$, falls $\|x_{k+1}-x\| \leq \gamma\|x_k - x\|$ für fast alle $k\in\mathbb{N}$, $x_k \to x$

b) superlinear gegen $x\in\mathbb{R}^n$, falls $x_k\to x$, $\frac{\|x_{k+1}-x\|}{\|x_k-x\|} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

c) quadratisch gegen $x\in\mathbb{R}^n$, falls $x_k\to x$, $\exists C>0$ mit $\|x_{k+1}-x\|\leq C\cdot\|x_k-x\|^2$

Bemerkung: 1) Lineare Konvergenz bedeutet, dass nach einer beschränkten Anzahl von Schritten wir eine weitere richtige Nachkommastelle erhalten.

z.B. sei $\|x_k - x\| \leq 10^{-1}$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Dann gilt nach 4 Iterationen:

$\|x_{k+4}-x\| \leq 2^{-4}\|x_k-x\| < \frac{1}{10}\|x_k-x\|$

2) Quadratische Konvergenz: für $C\leq 1$ verdoppelt sich die Anzahl richtiger Nachkommastellen in jedem Schritt.

Definition 1.11 Eine Matrixnorm ist eine Abbildung $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\|A\|\geq 0 \quad \forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

b) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\| \quad \forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}, \alpha\in\mathbb{R}$

c) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

d) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\| \quad \forall A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$

e) Submultiplikativität: $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$

Bsp.: Frobeniusnorm: Für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$: $\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, d.h. A wird interpretiert wie ein Vektor im $\mathbb{R}^{n^2}$, und $\|\cdot\|_F$ ist die $\|\cdot\|_2$ dieses Vektors. Damit erfüllt $\|\cdot\|_F$ automatisch a)-d)

Um e) zu zeigen, sei $v\in\mathbb{R}^n$, dann gilt: $\|Av\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$

Cauchy-Schwarz $\to$ $\leq \left(\sum_{i=1}^n\left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n v_j^2\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n v_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|v\|_2\,\|A\|_F$

$\Rightarrow \|Av\|_2 \leq \|v\|_2\,\|A\|_F$. Mit B_j: j-te Spalte von B:

$\|A\cdot B\|_F^2 = \sum_{j=1}^n \|A\cdot B_j\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^n \|A\|_F^2\cdot\|B_j\|_2^2 = \|A\|_F^2\,\|B\|_F^2$

$\Rightarrow \|\cdot\|_F$ ist Matrixnorm

Lemma 1.12 Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\|<1$. Dann konvergiert $\sum\limits_{k\ge0} A^k$ „Neumannsche Reihe" (mit $A^0=E_n$). Insbesondere ist E_n-A invertierbar, $\sum\limits_{k\ge0}A^k=(E_n-A)^{-1}$ („$=\frac{1}{1-A}$") und
$\|(E_n-A)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|A\|}$

Beweis: Sei $S_L=\sum\limits_{k=0}^{L}A^k$, $L\in\mathbb{N}_0$. Für $m\ge L$ erhalten wir:

$$\|S_m-S_L\|=\Big\|\sum_{k=L+1}^{m}A^k\Big\|\overset{d)}{\le}\sum_{k=L+1}^{m}\|A^k\|\overset{e)}{\le}\sum_{k=L+1}^{m}\|A\|^k\le\|A\|^{L+1}\cdot\sum_{m\ge0}\|A\|^m=\frac{1}{1-\|A\|}\|A\|^{L+1}$$

und somit $\|S_m-S_L\|_\infty\xrightarrow{L\to\infty}0$. Damit ist $(S_L)_{L\in\mathbb{N}_0}$ Cauchy-Folge, also konvergiert die Neumannsche Reihe. Ferner gilt: $(E_n-A)\cdot\sum\limits_{k\ge0}A^k=$
$=\sum\limits_{k\ge0}A^k-\sum\limits_{k\ge0}A^{k+1}=E_n$ und somit $\sum\limits_{k\ge0}A^k=(E_n-A)^{-1}$.

Zuletzt: $\Big\|\sum\limits_{k\ge0}A^k\Big\|\le\sum\limits_{k\ge0}\|A\|^k=\frac{1}{1-\|A\|}$ □

Lemma 1.13 (Banach) Sei $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A^{-1}B\|<1$. Dann $A+B$ invertierbar und $\|(A+B)^{-1}\|\le\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}B\|}$, $\|(A+B)^{-1}-A^{-1}\|\le\frac{\|A^{-1}\|^2\|B\|}{1-\|A^{-1}B\|}$

Beweis: Da $\|A^{-1}B\|<1$. mit Lemma 1.12 ist $E_n-A^{-1}B$ invertierbar mit
$(E_n+A^{-1}B)^{-1}=\sum\limits_{k\ge0}(-A^{-1}B)^k$ Damit ist auch $A(E_n+A^{-1}B)=A+B$ invertierbar und $(A+B)^{-1}=(E_n+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$. Daraus: $\|(A+B)^{-1}\|\le\|(E_n+A^{-1}B)^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\|\le$
$\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}B\|}$. Ferner gilt: $(A+B)^{-1}-A^{-1}=(E_n+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}-A^{-1}=$

$$=\left((E_n+A^{-1}B)^{-1}-E_n\right)A^{-1}=\Big(\sum_{k\ge0}(-A^{-1}B)^k-E_n\Big)A^{-1}=\Big(\sum_{k\ge1}(-A^{-1}B)^k\Big)A^{-1}=$$

$$=-A^{-1}B\Big(\sum_{k\ge0}(-A^{-1}B)^k\Big)A^{-1}=-A^{-1}\cdot B\cdot(E_n+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}.$$

Mit Submultiplikativität von $\|\cdot\|$ erhalten wir die 2. Aussage □

Bemerkung: Wir erhalten: 25.10.18

1) Jede invertierbare Matrix hat eine Umgebung invertierbarer Matrizen:
$U(A)=\{\tilde A\in\mathbb{R}^{N\times N}\mid\|A-\tilde A\|<\delta\}$ wobei $\delta=\|A^{-1}\|^{-1}$.
[Für $\tilde A\in U_\delta(A)$ setze $B=A-\tilde A$. Dann $\|B\|<\delta=\|A^{-1}\|^{-1}$ und $\|A^{-1}B\|\le\|A^{-1}\|\,\|B\|<1$]

2) Für jede Folge $A_k\to A$ invertierbarer Matrizen gilt:
$A_k^{-1}\to A^{-1}$
[Sei $B_k=A_k-A$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Dann $\|B_k\|\xrightarrow{k\to\infty}0$. Insbesondere für k groß genug: $\|A_k^{-1}-A^{-1}\|=\|(A+B_k)^{-1}-A^{-1}\|\le\frac{\|A^{-1}\|^2\|B_k\|}{1-\|A^{-1}B_k\|}\xrightarrow{k\to\infty}0$]