Im k-ten Schritt $(k \geq 1)$: sind die Iterierte $x^{(k-1)}$ und die Suchrichtung $d^{(k-1)} \neq 0$ gegeben. Ansatz für die neue Iterierte $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_{k-1} d^{(k-1)}$ mit $\alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ so gewählt, dass $\alpha \mapsto \Phi(x^{(k-1)} + \alpha d^{(k-1)})$ bei $\alpha = \alpha_{k-1}$ minimal wird. $\Phi(x^{(k-1)} + \alpha d^{(k-1)}) = \Phi(x^{(k-1)}) + |\alpha|^2 d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} + 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} A x^{(k-1)}) - 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} b) =$
$= \Phi(x^{(k-1)}) + |\alpha|^2 d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} - 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} r^{(k-1)})$ mit $r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)}$.

Wähle die Phase von α so, dass $\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} r^{(k-1)}) = |\alpha| |d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|$

Für $d^{(k-1)*} r^{(k-1)} = 0$ gilt das immer, sonst wähle $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{d^{(k-1)*} r^{(k-1)}}{|d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|}$

Der Betrag von α wird bestimmt durch Min. von
$|\alpha|^2 d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} - 2|\alpha| |d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|$, d.h. $2|\alpha| d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} - 2|d^{(k-1)*} r^{(k-1)}| = 0$

$\Rightarrow |\alpha| = \frac{|d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}} \Rightarrow \alpha_{k-1} = \alpha = |\alpha| \frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{d^{(k-1)*} r^{(k-1)}}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}}$

Auch falls $d^{(k-1)*} r^{(k-1)} = 0$, da Nenner immer > 0, da $d^{(k-1)} \neq 0$ und A pos. def. Das neue Residuum ist dann $r^{(k)} = b - Ax^{(k)} =$
$= b - Ax^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A d^{(k-1)} = r^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A d^{(k-1)}$.

Beachte, dass $r^{(k)*} d^{(k-1)} = r^{(k-1)*} d^{(k-1)} - \overline{\alpha_{k-1}}\, d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} = 0$ (*)

und $d^{(k)} = r^{(k)} + \beta_{k-1} d^{(k-1)}$ mit $\beta_{k-1} = -\frac{d^{(k-1)*} A r^{(k)}}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}}$

$\Rightarrow d^{(k)*} A d^{(k-1)} = r^{(k)*} A d^{(k-1)} + \overline{\beta_{k-1}}\, d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} = 0$ (**)

Lemma: Falls $d^{(k)} = 0$, so ist $Ax^{(k)} = b$ (und wir sind fertig) 14.11.18

Beweis: $d^{(k)} = 0 \Rightarrow r^{(k)} = -\beta_{k-1} d^{(k-1)} \Rightarrow \|r^{(k)}\|^2 = r^{(k)*} r^{(k)} = -\beta_{k-1} r^{(k)*} d^{(k-1)} \overset{(*)}{=} 0$

Anm.: D.h. der Algorithmus ist wohl. def. und endet genau dann wenn eine Lösung gefunden wurde.

Lemma: Für $0 \leq j < k$ gilt: a) $r^{(k)*} d^{(j)} = 0$, b) $r^{(k)*} r^{(j)} = 0$,
c) $d^{(k)*} A d^{(j)} = 0$

Korollar: Nach höchstens $\overset{\text{dim des Raumes}}{N}$ Schritten findet der Alg. die exakte Lsg.

Denn die $d^{(j)}$ sind nach c) lin. unab. also gibt es höchstens N davon.

Beweis (vom Lemma): durch Induktion Ind. nach k

$k=1$: ($\Rightarrow j=0$) a) folgt aus ⊛

c) folgt aus ⊛⊛

b) folgt aus a) wegen $d^{(0)}=r^{(0)}$

$k\geq 2$: Induktionsannahme: a, b, c gelten für $k-1$:

a) Für $j=k-1$ folgt a) aus ⊛

Sei $j<k-1 \Rightarrow r^{(k)*}d^{(j)} = \underbrace{r^{(k-1)*}d^{(j)}}_{=0,\ \text{I.V. a)}} - \alpha_{k-1}\underbrace{d^{(k-1)*}Ad^{(j)}}_{=0\ \text{I.V. c)}}$

b) Für $j=0$ folgt b) aus $r^{(0)}=d^{(0)}$ aus a)

Für $j>0$ ist $r^{(j)}=d^{(j)}-\beta_{j-1}d^{(j-1)}$, also

$r^{(k)*}r^{(j)} = \underbrace{r^{(k)*}d^{(j)}}_{=0,\ a)} - \beta_{k-1}\underbrace{r^{(k)*}d^{(j-1)}}_{=0,\ a)} = 0$

c) Für $j=k-1$ folgt c) aus ⊛⊛

Sei $j<k-1 \Rightarrow d^{(k)*}Ad^{(j)} = r^{(k)*}Ad^{(j)} + \beta_{k-1}\underbrace{d^{(k-1)*}Ad^{(j)}}_{=0,\ \text{I.V. c)}} = r^{(k)*}Ad^{(j)}$

w.g. $r^{(j+1)}=r^{(j)}-\alpha_j Ad^{(j)}$ ist, falls $\alpha_j\neq 0$: $r^{(k)*}Ad^{(j)}=$

$= \frac{1}{\alpha_j}\left(\underbrace{r^{(k)*}r^{(j)}}_{=0,\ b)} - \underbrace{r^{(k)*}r^{(j+1)}}_{=0,\ b)}\right) = 0$

Falls $\alpha_j=0$. Für $j=0$: $\alpha_0 = \frac{d^{(0)*}r^{(0)}}{d^{(0)*}Ad^{(0)}} = \frac{\|r^{(0)}\|^2}{d^{(0)*}Ad^{(0)}} > 0$

Für $j>0$: Ist $\alpha_j=0$, so ist $d^{(j)*}r^{(j)}=0 \Rightarrow r^{(j)*}r^{(j)} \overset{\leftarrow \text{Def. } d^{(j)}}{=}$

$= \underbrace{r^{(j)*}d^{(j)}}_{=0} - \underbrace{\beta_{j-1}r^{(j)}d^{(j-1)}}_{=0\ ⊛} = 0 \Rightarrow r^{(j)}=0$ ↯ □

Satz: Sei $\mathbb{K}_k := \mathrm{span}\{r^{(0)}, Ar^{(0)}, \dots, A^{k-1}r^{(0)}\}$. Dann gilt: $x^{(k)} \in x^{(0)} + \mathbb{K}_k$,

$$\Phi(x^{(k)}) = \min_{x \in x^{(0)} + \mathbb{K}_k} \Phi(x)$$

Beweis: Vorbem. 1: $\mathrm{span}\{d^{(0)}, \dots, d^{(k-1)}\} = \mathrm{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\}$

Zeige zunächst, dass $d^{(j)} \in \mathrm{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\} \; \forall j = 0, \dots, k-1$

Durch Induktion: $j=0$ $\quad d^{(0)} = r^{(0)}$ ✓ $\quad j \geq 1$: $d^{(j)} = r^{(j)} - \beta_{j-1} d^{(j-1)} \in \mathrm{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\}$

Da $d^{(0)}, \dots, d^{(k-1)}$ nach c) linear unabhängig sind gilt Gleichheit.

Vorbem. 2: $\mathrm{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}\} = \mathbb{K}_k$

Zeige zunächst $r^{(j)} \in \mathbb{K}_k \; \forall j = 0, \dots, k-1$. Durch Ind. $j=0$: $r^{(0)} \in \mathbb{K}_k$

$$j \geq 1: \; r^{(j)} = \underbrace{r^{(j-1)}}_{\substack{\in \mathbb{K}_k \\ \text{I.V.}}} - \alpha_{j-1} A \underbrace{d^{(j-1)}}_{\substack{\in \mathrm{span}\{r^{(0)}, \dots, r^{(j-1)}\} \in \mathbb{K}_{k-1} \\ \text{Vorbem. 1} \qquad \text{I.V.}}} \in \mathbb{K}_k$$

Da $r^{(0)}, \dots, r^{(k-1)}$ nach Vorbemerkung 1 linear unabhängig sind gilt Gleichheit.

Zeige: $x^{(k)} \in x^{(0)} + \mathbb{K}$: $\quad x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_{k-1} d^{(k-1)} = x^{(k-2)} + \alpha_{k-2} d^{(k-2)} + \alpha_{k-1} d^{(k-1)} = \dots =$

$$= x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j d^{(j)} \in x^{(0)} + \mathbb{K}_k \text{ nach Vorbem. 1 \& 2}$$

Zeige: Minimalität: Nach dem Korollar gibt es ein $k \leq K \leq N$ mit

$x^{(K)} = \hat{x}$, d.h. $\hat{x} = x_0 + \sum_{j=0}^{K-1} \alpha_j d^{(j)} \Rightarrow \hat{x} - x^{(k)} = \sum_{j=k}^{K-1} \alpha_j d^{(j)}$

Sei $x \in x^{(0)} + \mathbb{K}_k$. Dann ist nach Vorbem. 1 & 2: $x = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j d^{(j)}$ mit

$\gamma_j \in \mathbb{K}$. $\quad \hat{x} - x = \hat{x} - x^{(k)} + x^{(k)} - x^{(0)} + x^{(0)} - x = \sum_{j=k}^{K-1} \alpha_j d^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j d^{(j)} - \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j d^{(j)}$

$$\Rightarrow \Phi(x) - \Phi(\hat{x}) = (x - \hat{x})^* A (x - \hat{x}) = \Big(\sum_{j=k}^{K-1} \alpha_j d^{(j)}\Big)^* A \Big(\sum_{j=k}^{K-1} \alpha_j d^{(j)}\Big) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\Big(\Big(\sum_{j=k}^{K-1} \alpha_j d^{(j)}\Big)^* A \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j d^{(j)}\Big)\Big) + \Big(\sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_j - \gamma_j) d^{(j)}\Big)^* A \Big(\sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_j - \gamma_j) d^{(j)}\Big) =$$

$$= \sum_{j=k}^{K-1} |\alpha_j|^2 d^{(j)*} A d^{(j)} + \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_j - \gamma_j|^2 d^{(j)*} A d^{(j)} \geq \sum_{j=k}^{K-1} |\alpha_j|^2 d^{(j)*} A d^{(j)}$$

mit Gleichheit für $\gamma_j = \alpha_j \; \forall j$ $(\Leftrightarrow x = x_k)$

Prop: $\left[(x^{(k)}-\hat{x})^* A(x^{(k)}-\hat{x})\right]^{\frac{1}{2}} \le 2\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond} A}-1}{\sqrt{\operatorname{cond} A}+1}\right)^k \left[(x^{(0)}-\hat{x})^* A(x^{(0)}-\hat{x})\right]^{\frac{1}{2}}$

$$\|x^{(k)}-x\|_2 \le 2 \operatorname{cond}(A)\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond}(A)}-1}{\sqrt{\operatorname{cond}(A)}+1}\right)^k \|x^{(0)}-\hat{x}\|_2$$

mit $\operatorname{cond}(A)$ bzgl. euklidischer Norm.

Beweis: 2.te Ungleichung folgt aus erster, da $\|y\|_2 \le \frac{1}{\lambda_N(A)}\sqrt{y^* A y}$, $\sqrt{y^* A y} \le \lambda_1(A)\|y\|_2$ mit $\lambda_N(A) \le \dots \le \lambda_1(A)$ die EW von A.

1.te Ungleichung: Sei P ein Polynom von Grad k mit $P(0)=1$. Dann ist $Q(t)=\frac{P(t)-1}{t}$ ein Pol. von Grad $k-1$ und daher $x := x^{(0)} + Q(A) r^{(0)} \in x^{(0)} + \mathcal{K}_k$

$\Rightarrow 0 \le \Phi(x) - \Phi(x^{(k)}) = (x-\hat{x})^* A (x-\hat{x}) - (x^{(k)}-\hat{x})^* A (x^{(k)}-\hat{x})$

$\Rightarrow (x^{(k)}-\hat{x})^* A (x^{(k)}-\hat{x}) \le (x-\hat{x})^* A (x-\hat{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ x-\hat{x} = -P(A)(\hat{x}-x^{(0)})}}{=} (\hat{x}-x^{(0)}) A \cdot |P(A)|^2 (\hat{x}-x^{(0)}) =$

$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n |P(\lambda_n)|^2 |\xi_n|^2 \le \circledast$ mit $\hat{x}-x^{(0)} = \sum_{n=1}^{N} \xi_n v_n$ und $Av_n = \lambda_n v_n$, $\|v_n\|=1$

$$\circledast \le \left(\max_m |P(\lambda_m)|^2\right) \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \lambda_n |\xi_n|^2}_{=(\hat{x}-x^{(0)})^* A (\hat{x}-x^{(0)})}$$