II Eigenwerte

1. Eigenwerteinschließungen

Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, wenn es ein $0 \neq x \in \mathbb{C}^N$ gibt mit $Ax = \lambda x$.

$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ EW von } A\}$ heißt das Spektrum von A.

Satz (Bauer-Fike): Sei $\|\cdot\|$ eine M-Norm, die wahlweise von der Betragssummen-, der euklidischen oder der Maximumnorm induziert wird, und $\mathrm{cond}(\cdot)$ die entsprechende Konditionszahl. Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ diagonalisierbar, d.h. es gebe eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$ mit $X^{-1}AX$ diagonal, und es sei $\Delta A \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Dann gilt für jeden EW μ von $A + \Delta A$:

$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda - \mu| \leq \mathrm{cond}(X) \|\Delta A\|$$

Beweis: Für $\mu \in \sigma(A)$ ist nichts z.z., sei also $\mu \notin \sigma(A)$ und damit $A - \mu I$ regulär. Sei $x \neq 0$ EV von $A + \Delta A$ bzgl. μ, d.h.

$$(\Delta A)x = (A + \Delta A - A)x = (I\mu - A)x \Rightarrow x = -(A-\mu)^{-1}(\Delta A)x$$ „$A - \mu \hat{=} A - I\mu$"

$$\Rightarrow 1 = \frac{\|(A-\mu)^{-1}(\Delta A)x\|}{\|x\|} \leq \|(A-\mu)^{-1}\| \|\Delta A\|$$

Mit $X^{-1}AX = D$ Diagonal ist $X^{-1}(A-\mu)X = D - \mu$

$$\Rightarrow A - \mu = X(D-\mu)X^{-1} \Rightarrow (A-\mu)^{-1} = X(D-\mu)^{-1}X^{-1}$$

$$\Rightarrow \|(A-\mu)^{-1}\| \leq \|X\| \|(D-\mu)^{-1}\| \|X^{-1}\| = \mathrm{cond}(X) \|(D-\mu)^{-1}\|$$

Also noch z.z.: $\|(D-\mu)^{-1}\| \leq \frac{1}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda - \mu|} \Leftrightarrow \|(D-\mu)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda-\mu|} \|x\| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda - \mu| \|y\| \leq \|(D-\mu)y\|$$

Das folgt aus der Def. der Normen, da die Diagonaleinträge von $D - \mu$ gerade $\lambda - \mu$ sind mit $\lambda \in \sigma(A)$. $\square$

Korollar: Ist $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$ normal (d.h. $AA^*=A^*A$), so gilt für jeden EW μ von $A+\Delta A$: $\min_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda-\mu|\le\|\Delta A\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ von der eukl. V-Norm ind. M-Norm)

Beweis: Aus der lin. Alg. wissen wir, dass es eine unitäre Matrix $X\in\mathbb{C}^{N\times N}$ gibt mit $X^{-1}AX$ diagonal. Wg. X unitär ist $\|X\|_2=1=\|X^{-1}\|_2$
$\Rightarrow cond_2(X)=1$ □

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}a&1\\\varepsilon&a\end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar für $\varepsilon>0$ mit $X=\begin{pmatrix}1&1\\\sqrt{\varepsilon}&-\sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix}$. „$\varepsilon$ klein"

$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\\1&-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\end{pmatrix}\Rightarrow cond_\infty(A)=1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ „X^{-1} falsch"

Satz: (Gerschgorin). Sei $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$ und $K_n=\{\xi\in\mathbb{C}\mid|\xi-a_{nn}|\le\sum_{\substack{m=1\\m\ne n}}^{N}|a_{nm}|\}$
$K_n^*=\{\xi\in\mathbb{C}\mid|\xi-a_{nn}|\le\sum_{\substack{m=1\\m\ne n}}^{N}|a_{mn}|\}$. Dann ist:

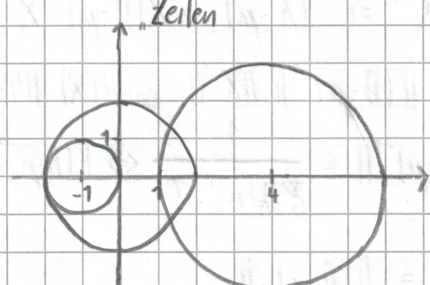
$$\sigma(A)\subseteq\left(\bigcup_{n=1}^{N}K_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{N}K_n^*\right)$$

Beweis: Sei $\lambda\notin\bigcup_{n=1}^{N}K_n\Rightarrow|\lambda-a_{nn}|>\sum_{\substack{m=1\\m\ne n}}^{N}|a_{nm}|\ \forall n$

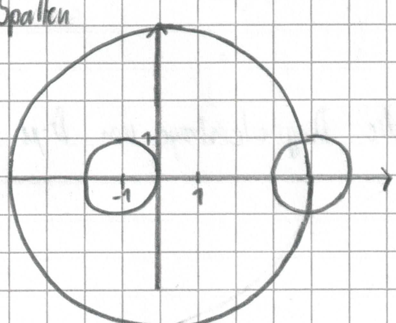
$\Rightarrow \lambda I-A$ strikt diagonal dom. $\Rightarrow \lambda I-A$ regulär $\Rightarrow \lambda\notin\sigma(A)$
Aus der lin. Alg. wissen wir: $\lambda\in\sigma(A)\Leftrightarrow\bar{\lambda}\in\sigma(A^*)$.
Daher folgt $\sigma(A)\subseteq\bigcup_{n=1}^{N}K_n^*$ aus der ersten Inklusion, angewandt auf A^*.

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}4&0&3\\0&-1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\begin{pmatrix}4&0&-1\\0&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}$

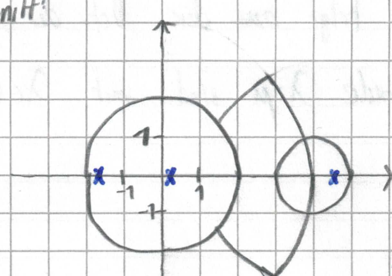
„Zeilen"



„Spalten"



Schnitt:



x ≙ EW von A

Satz: (Courant-Fischer) Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ hermitesch mit EW. $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ mit Vielfachheit gezählt. Sei $1 \leq n \leq N$. Dann gilt für jeden Untervektorraum $\mathcal{L} \subset \mathbb{K}^N$ mit $\dim(\mathcal{L}) = n$, dass: $\min\limits_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_n$ und $\max\limits_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_{N-n+1}$

Gleichheit gilt für $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ bzw. $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x_{N-n+1}, \dots, x_N\}$, wobei $(x_n)_{n=1}^N$ ONB ist mit $Ax_n = \lambda x_n \; \forall n$

z.B. $\lambda_1 = \max\limits_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x}$, $\lambda_N = \min\limits_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x}$

Beweis: $n=1$: Wir müssen zeigen, dass $\frac{x^* A x}{x^* A x} \leq \lambda_1 \; \forall x \neq 0$. Schreibe $x = \sum\limits_{m=1}^N \xi_m x_m$

$$x^* x = \sum_{m=1}^N |\xi_m|^2, \quad x^* A x = \sum_{m,m'} \overline{\xi_m} \, \xi_{m'} \, x_m^* \underbrace{A x_{m'}}_{\lambda_{m'} x_{m'}} = \sum_m \lambda_m |\xi_m|^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{\sum_m \lambda_m |\xi_m|^2}{\sum_m |\xi_m|^2} \underset{\lambda_m \leq \lambda_1 \forall m}{\leq} \lambda_1$$

Und Gleichheit gilt für x mit $\xi_m = 0 \; \forall m$ mit $\lambda_m < \lambda_1$

$n \geq 2$: Wg. $\dim \mathcal{L} = n$ und $\dim(\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}) = n-1$ gibt es ein $0 \neq x \in \mathcal{L}$ mit $x_m^* x = 0 \; \forall m = 1, \dots, n-1$

Schreibe wieder $x = \sum\limits_{m=1}^{n-1} \xi_{m'} x_{m'}$, es ist $0 = x_m^* x = \sum\limits_{m'} \xi_{m'} x_m^* x_{m'} = \xi_m$ $\forall 1 \leq m \leq n-1 \Rightarrow x^* A x = \sum\limits_{m=n}^N \lambda_m |\xi_m|^2 \leq \lambda_n \sum\limits_{m=1}^N |\xi_m|^2 = \lambda_n x^* x$

und Gleichheit gilt für x mit $\xi_m = 0 \; \forall m \geq n$ mit $\lambda_m < \lambda_n$.

Insbes. gilt Gl. für $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$

(Bew. des zweiten Teils entweder analog oder durch Anwenden des 1. Teils auf $-A$) □

Korollar Seien $A, \Delta A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ hermitesch. Dann gilt für $\lambda_1 \geq \dots \lambda_N$ 21.11.18

$$\lambda_n(A) + \lambda_N(\Delta A) \leq \lambda_n(A + \Delta A) \leq \lambda_n(A) + \lambda_1(\Delta A)$$

Insbes. gilt: $|\lambda_n(A + \Delta A) - \lambda_n(A)| \leq \|\Delta A\|_2$