Aufgabe 1)

Betrachte: $\int_X f_+ \, d\delta_a$ und $\int_X f_- \, d\delta_a$.

Fall 1: $f(a) > 0$: $\Rightarrow \int_X f_- \, d\delta_a = 0 < \infty$. Es gilt: $f_+ \in E^* \Rightarrow \exists (f_n^+) \subseteq E$ isoton mit $f_n^+ \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} f_+$.

mon. Konv. | $\forall n: f_n = \sum_{i=1}^{N} a_i^{(n)} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}}$ mit $a_i^{(n)} \geq 0$ eindeutig und $(A_i^{(n)}) \subseteq \mathcal{A}$ paarw. disj.

$$\int_X f_+ \, d\delta_a = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n^+ \, d\delta_a \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n^+ \, d\delta_a = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} a_i^{(n)} \delta_a(A_i^{(n)}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_j^{(n)} \underbrace{\delta(A_j^{(n)})}_{=1} = \lim_{n\to\infty} a_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} f_n^+(a) \overset{f_n^+ \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} f}{=} f_+(a) \overset{f(a)>0}{=} f(a) \overset{\text{n.V.}}{<} \infty$$

da $(A_i^{(n)})$ paarw. disj. $\exists j \in \mathbb{N}$ mit $a \in A_j^{(n)}$

$$\Rightarrow \int_X f_+ \, d\delta_a < \infty, \int_X f_- \, d\delta_a < \infty \text{ und da } f \text{ m.b.} \overset{12.20}{\Longrightarrow} \int_X f \, d\delta_a = \int_X f_+ \, d\delta_a - \int_X f_- \, d\delta_a = f(a)$$

Fall 2: $f(a) < 0$: analog vert. „f_+" mit „f_-"

Fall 3: $f(a) = 0$ analog zu Fall 1 $\rightsquigarrow \int f_+ \, d\delta_a = 0 = \int f_- \, d\delta_a < \infty$ $\square$

ii) Nicht Riemann-integrierbar, da für $h_n \nearrow f$: $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ und für $g_n \searrow f$: $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} g_n$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar $\Rightarrow \exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\} = \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \underset{\in E}{f_n} := \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n}\{q_i\}} \nearrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x) \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \lim \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, d\lambda x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2} a_i^{(n)} \lambda(X_i^{(n)}) =$$

$f_n = \sum_{i=1}^{2} \underbrace{a_i^{(n)}}_{\in\{0,1\}} \mathbb{1}_{X_i^{(n)}}$, $(X_1^{(n)} = \mathbb{Q}, X_2^{(n)} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

$$= \lim_{n\to\infty} a_1^{(n)} \underbrace{\lambda(\mathbb{Q})}_{=0} + \underbrace{a_2^{(n)}}_{=0} \lambda(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0$$

Aufgabe 3)

i) $|\sqrt[n]{\sin x}| \leq 1 \in \mathcal{L}^1([0,\pi], \lambda)$

$$\Rightarrow \lim_n \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\sin(x)} \, d\lambda x = \int_{[0,\pi]} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin(x)} \, d\lambda x = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,\pi[}(x) \, d\lambda(x) = \pi$$

maj. Konv.

ii) $|x^n| \leq 1 \; \forall x \in [0,1]$, $1 \in \mathcal{L}^1([0,\pi], \lambda)$

$$\Rightarrow \lim_n \int_{[0,1]} x^n \, d\lambda x = \int_{[0,1]} \lim_n x^n \, d\lambda x = \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{\{1\}} \, d\lambda = 0$$

maj. Konv.

iii) $\left| \frac{n \cdot \sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{n}{1+n^2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1([0,1], \lambda)$

$$\Rightarrow \lim_n \int_{[0,1]} \frac{n \cdot \sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}} \, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \lim_n \frac{n \sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}} \, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} 0 \, d\lambda(x) = 0$$

Aufgabe 4)

i) „a) ⇒ b)": nach Def.

„b) ⇒ c)": $|f| = f^+ + f^- \in \overline{\mathcal{L}}^1$

„c) ⇒ d)": nach Def.

„d) ⇒ e)": $\infty > \int |f| = \underbrace{\int f^+}_{<\infty} + \underbrace{\int f^-}_{<\infty} \Rightarrow f^+, f^- \in \overline{\mathcal{L}}^1$

„e) ⇒ f)": $|f| = f^+ + f^- \leq g_1 + g_2 =: g \in \overline{\mathcal{L}}^1$

„f) ⇒ a)": $\int f^{(\pm)} d\lambda \leq \int f d\lambda \leq \int g d\lambda < \infty \Rightarrow f^{(\pm)} \in \overline{\mathcal{L}}^1 \Rightarrow f \in \overline{\mathcal{L}}^1$

ii) Sei $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu) \Leftrightarrow |f| \in \overline{\mathcal{L}}^1 \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu < \infty$

Nun gilt: $\infty > \int_X |f| d\mu \geq \int_X \mathbb{1}_{\{|f| = \infty\}} d\mu = \infty \cdot \underbrace{\mu(\{|f| = \infty\})}_{\geq 0,\ \text{da } \mu \text{ Maß}} \Rightarrow \mu(\{|f| = \infty\}) = 0$

Achtung Umkehrung gilt nicht! Sei $\mu = \lambda$, $f = 1$, dann gilt: $\mu(\underbrace{\{|f| = \infty\}}_{= \emptyset}) = 0$.

Aber $\int_X f d\lambda = \infty \Rightarrow f \notin \overline{\mathcal{L}}^1(\lambda)$

Aufgabe 2)

ii) TB4, A3: $C = \overline{C}$ ($\Leftrightarrow C$ abgeschlossen)

$\Rightarrow C$ enthält kein Intervall mit pos. Länge (λ Maß), da $\lambda(C_n) = (\frac{2}{3})^n$ mit $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$

Ang.: $\mathring{C} \neq \emptyset \Rightarrow C$ enthält mind. ein offene Intervall U von $c \in C$ mit $U \subseteq C$

aber offene Intervalle die einen Punkt enthalten, haben positive Länge ↯

$\Rightarrow \mathring{C} = \emptyset$ □

i) Die Elemente der Cantor Menge können genau als diejenigen reelen Zahlen zwischen 0 und 1 beschrieben werden, deren triadische Darstellung keine Einsen enthält. (Erinnerung: Eine Zahl $x \in [0,1]$ können wir in der triadischen Darstellung als $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ mit $x_k \in \{0,1,2\}$ schreiben.) Es gilt: $x \in C \Leftrightarrow x_k \neq 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$, denn alle Zahlen die sich als $(0.1\ldots)_3$ darstellen lassen, wurde gerade im 1.ten Schritt entfernt. Analog

wurden alle Zahlen der Form $(0{,}01..)_3$ und $(0{,}21..)_3$ im zweiten Schritt entfernt usw. Widerspruchsannahme: C abzählbar. $\Rightarrow \exists$ Bij. von C nach $\mathbb{N}$.
$\Rightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ s.d. $C = \{a_1, a_2, ...\}$. Sei nun für $n,i \in \mathbb{N}$ $a_{n,i}$ die i-te Nachkommastelle (in Tenärdarstellung) des n-ten Folgeglieds. Sei l_i die i-te Nachkommastelle der Zahl $l \in [0,1]$. Sei $l_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{ii} = 2 \\ 2 & \text{falls } a_{ii} = 0 \end{cases}$. $\Rightarrow l_i \neq a_{i,i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Da aber $l_i \in \{0,2\}$ $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow l_i \in C$. Somit haben wir einen Punkt konstruiert der in der Bij. nicht getroffen wird, aber in C enthalten ist. ↯
$\Rightarrow C$ überabzählbar. $\square$