Aufgabe 3)

Sei $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow f$ m.b., da skalierte Indikatorfunktion und es gilt:

$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]} \, d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = \frac{1}{n}\cdot n = 1 \Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$

Ferner gilt: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n \Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \binom{\inf}{\sup} f_n \, d\lambda$

Insgesamt folgt: $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda < \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$.

Anm.: Beachte, dass es in diesem Beispiel keine integrierbare Majorante gibt und daher der sup-Teil des Lemma von Fatou nicht anwendbar ist.

(Sei $g := \max_{n\in\mathbb{N}} f_n \Rightarrow g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n-1,n[} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\lambda([n-1,n[) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$ (Ana 1))

Aufgabe 4)

Sei $g: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto M$ $\Rightarrow |f_n(x)| \leq M = g(x)$ $\forall x\in X, \forall n\in\mathbb{N}$. g ist m.b., da konstante Fkt.

Es gilt $\int_X g \, d\lambda \overset{\wedge}{\underset{\mathbb{R}}{=}} M\cdot\underbrace{\lambda(X)}_{<\infty\text{, da endl. Maßraum}} < \infty \Rightarrow g\in\mathcal{L}^1 \overset{12.25}{\Rightarrow} f_n\in\mathcal{L}^1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Nun ist maj. Konv. anwendbar und es folgt: $f\in\mathcal{L}^1$ und (da f m.b.)

$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu(x) = \int_X f(x) \, d\mu(x)$.

Aufgabe 2)

Da $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ integrierbar $\Rightarrow f$ m.b. $\overset{12.7}{\Rightarrow} \{f>n\}, \underbrace{\{f<n\}}_{=\{f\geq -n\}} \in \mathcal{A}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \{f>n\}\cup\{-f>n\} = \{|f|>n\}\in\mathcal{A}$ ($\Rightarrow$ m.b.) $\overset{12.2}{\Rightarrow} \mathbb{1}_{\{|f|>n\}}$ m.b. $\overset{12.7}{\Rightarrow} f\cdot\mathbb{1}_{\{|f|>n\}}$ m.b.

Definiere $f_n := f\cdot\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \Rightarrow |f_n| \leq |f|$ $\forall n\in\mathbb{N}$ und da $f\in\mathcal{L}^1 \Rightarrow |f|\in\mathcal{L}^1 \Rightarrow |f_n|\in\mathcal{L}^1 \Rightarrow f_n\in\mathcal{L}^1$

$\Rightarrow \int_X f\cdot\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \, d\mu < \infty$. Sei nun $g := \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}} f$. Hiermit gilt: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} g$. Somit gelten alle Voraus. für maj. Konv. $\underbrace{\text{und}}_{\text{sind erfüllt}}$ es folgt: $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int g \, d\mu = \int \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}} f \, d\mu \underset{\mu(\{|f|=\infty\})=0}{=} 0$

Bem.: Ang.: $\mu(\{|f|=\infty\}) > 0 \Rightarrow \infty \underset{|f|\in\mathcal{L}^1}{>} \int |f| \, d\mu \geq \int |f|\cdot\mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}} \, d\mu = \infty\cdot\underbrace{\mu(\{|f|=\infty\})}_{>0} = \infty$ ↯

Aufgabe 61

i) Definiere $f_n := \frac{1}{1+e^{nx}} e^{-\frac{x^2}{n}} \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n$ ist m.b., da stetig $\forall n \in \mathbb{N}$

Sei $g := 0 \Rightarrow g \in \mathcal{L}^1$. Es gilt: $g \leq f_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Berechnung von $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Fall 1: } x>0: \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{1+e^{nx}}}_{\to 0} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{n}}}_{\to 1} = 0 \\
&\text{Fall 2: } x=0: \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{nx}} e^{-\frac{x^2}{n}} = \frac{1}{2} \\
&\text{Fall 1: } x<0: \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{1+e^{nx}}}_{\to 1} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{n}}}_{\to 1} = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f_n = 0 \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{0\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{]-\infty,0[}$$

Insgesamt: $\liminf\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \, d\lambda \geq \int_{-\infty}^{\infty} \liminf\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0 \cdot \mu(]0,\infty[) + \frac{1}{2} \cdot \mu(\{0\}) + 1 \cdot \mu(]-\infty,0[) = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \infty$

ii) Definiere $f_n := \frac{n}{x(1+x^2)} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) = f_n(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ⊛

Es gilt $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\frac{\sin(y)}{y} \leq 1$ und $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1 \Rightarrow |f_n| \leq \frac{1}{1+x^2} \; \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, n \in \mathbb{N}$

Es gilt: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \, d\lambda x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi < \infty \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f_n \in \mathcal{L}^1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \, d\lambda \underset{\substack{f_n(x) = f_n(-x) \\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}}{=} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \int_{]0,\infty[} f_n \, d\lambda \underset{\text{maj. Konv.}}{=} 2 \int_{]0,\infty[} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{x(1+x^2)} \sin\left(\frac{x}{n}\right)}_{= \frac{1}{1+x^2} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}} d\lambda =$$

$$= 2 \int_{]0,\infty[} \lim_{m\to 0} \frac{1}{1+x^2} \frac{\sin(x \cdot m)}{x \cdot m} \, d\lambda = 2 \int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+x^2} \, d\lambda(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Aufgabe 5)

Da $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mu(\{|f| = \infty\}) = 0$, $|f| \in \mathcal{L}^1$. Definiere: $f_n = |f|^{\frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Hiermit gilt: $|f_n| \leq |f|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |f_n| = f_n \in \mathcal{L}^1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (Satz 12.25). Nun betrachte $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n(x)|$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{|f| = \infty\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fall 1: } x \in X \text{ mit } |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0 \\ \text{Fall 2: } x \in X \text{ mit } 0 < |f(x)| < \infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n = \mathbb{1}_{\{0 \neq |f| < \infty\}} =: f \quad \mu\text{-f.ü.}$$

(Da $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mu(\{|f| = \infty\}) = 0$) Da nun auch f m.b. ist maj. Konv. anwendbar.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_X |f|^{\frac{1}{n}} d\mu = \int_X f \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ Y := X \setminus \{|f| = \infty\}}}{=} \int_Y f \, d\mu = 0 \cdot \mu(\{|f| = 0\}) + 1 \cdot \mu(\{0 < |f| < \infty\}) = \mu(\{0 < |f| < \infty\}) =$$

$$= \mu(\{0 < |f| < \infty\}) + \mu(\{|f| = \infty\}) = \mu(\{|f| \neq 0\}) \quad \square$$

Aufgabe 1)

Definiere $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $g := 0$. Hiermit gilt: $f_n \geq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$, wobei $g \in \mathcal{L}^1$.

Insbesondere ist f_n m.b. $\forall n \in \mathbb{N}$. Nun ist das Lemma von Fatou anwendbar

und es folgt: $\liminf\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \liminf\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X \liminf\limits_{n \to \infty} f_n \, d\mu = \int_X \liminf\limits_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.} \\ \liminf}}{=} \int_X \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ 12.2}}{=} \int_X \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\bigcap_{k \geq n} A_k} \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ 12.2}}{=} \int_X \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k} \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A) \quad \square$$

Alternativ: $\mu(A) = \mu(\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcap_{n \geq m} A_n}_{=: B_m}) \underset{\substack{\uparrow \\ B_m \nearrow}}{=} \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \mu(\bigcap\limits_{n \geq m} A_n) \leq \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \inf\limits_{n \geq m} \mu(A_n) = \liminf\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$