b) Sei $F \subseteq P$ Seitenfläche mit $z \in F$, $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta\}$.

Insbesondere gilt: $y^T z = \beta$. Wir zeigen $F = P$.

Da $A_{\bar{I}.} z < b_{\bar{I}}$ gibt es $\varepsilon > 0$: $A_{I.}(z+z') = b_I$, $A_{\bar{I}.}(z+z') \leq b_{\bar{I}}$

für $\|z'\| \leq \varepsilon$, $z' \in \text{Kern}(A_{I.})$. Somit gilt:

$\boxed{\{z+z' \mid \|z'\| \leq \varepsilon, z' \in \text{Kern}(A_{I.})\} \subseteq P} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq \beta\}$

Für $z' \in \text{Kern}(A_{I.})$, $\|z'\| \leq \varepsilon$: $\beta \geq y^T \underbrace{(z+z')}_{\in P} = \underbrace{y^T z}_{=\beta} + y^T z'$

$\Rightarrow y^T z' \leq 0$. Darüber hinaus gilt: $-z' \in \text{Kern}(A_{I.})$, $\|-z'\| = \|z'\| \leq \varepsilon$.

Mit selber Rechnung für $-z'$ $\Rightarrow$ $y^T z' \geq 0$ $\Rightarrow$ $y^T z' = 0$

Sei nun $b_1, \dots, b_M$ Basis von $\text{Kern}(A_{I.})$. Dann gibt es

$\delta > 0$ mit $\|\delta b_i\| \leq \varepsilon$ $\forall 1 \leq i \leq M$ $\Rightarrow$ $y^T b_i = 0$ $\forall 1 \leq i \leq M$

$\Rightarrow y^T z' = 0$ $\forall z' \in \text{Kern}(A_{I.})$ $\Rightarrow$ $y^T(z+z') = \beta$ $\forall z' \in \text{Kern}(A_{I.})$

Somit $\boxed{P = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I.} x = b_I\} = \underline{P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : z + \text{Kern}(A_{I.})\}}} \subseteq$

$\subseteq P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta\} = F$ $\Rightarrow$ $F = P$ $\square$

Wir wissen: $\{x\}$ Ecke $\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(A_{eq(x).}) = n$

Satz 3.15: Sei $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$, $P \neq \emptyset$, $F \subseteq P$ Seitenfläche. Dann:

$\dim(F) = n - \text{Rang}(A_{eq(F).})$ „Dimensionsformel für Polyeder"

Beweis: $I = eq(F)$, $\bar{I} = Z \setminus I$. Weiter sei $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta, Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta, A_{I.} x = b_I, A_{\bar{I}.} x \leq b_{\bar{I}}\}$

Mit Lemma 3.14 auf F angewandt: es gibt inneren Punkt $z \in F$

mit $y^T z = \beta$, $A_{I.} z = b_I$, $A_{\bar{I}.} z < b_{\bar{I}}$ und für ein $\varepsilon > 0$

$\{z+z' \mid \|z'\| \leq \varepsilon, z' \in \text{Kern}(\begin{pmatrix} y^T \\ A_{I.} \end{pmatrix})\} \subseteq F \subseteq \{z+z' \mid z' \in \text{Kern}(\begin{pmatrix} y^T \\ A_{I.} \end{pmatrix})\}$

Aus 2. Inklusion: $\dim(F) \leq \dim(z + \text{Kern}(\begin{pmatrix} y^T \\ A_{I.} \end{pmatrix})) = \dim(\text{Kern}(\begin{pmatrix} y^T \\ A_{I.} \end{pmatrix}))$

Aus 1. Inklusion: Sei V Vektorraum. Dann gilt für $\varepsilon > 0$:

$\dim(\{z+z' \mid z' \in V, \|z'\| \leq \varepsilon\}) = \dim(V)$

$\Rightarrow \dim(F) = \dim(\text{Kern}(\begin{pmatrix} y^T \\ A_{I.} \end{pmatrix}))$

(*) Wir zeigen: $\mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} y^T \\ A_{I\cdot}\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Kern}(A_{I\cdot})$. Dimensionsformel

Daraus folgt: $\dim(F) = \dim(\mathrm{Kern}(A_{I\cdot})) = n - \mathrm{Rang}(A_{I\cdot})$

Beweis von (*): (durch Widerspruch): Sei $v \in \mathrm{Kern}(A_I)$ mit $y^T v > 0$.

Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $A_{I\cdot}(z+\varepsilon v) = b_I$, $A_{\bar{I}\cdot}(z+\varepsilon v) \leq b_{\bar{I}}$

also $z+\varepsilon v \in P$, also auch $y^T(x+\varepsilon v) \leq \beta$ (weil $y^T x \leq \beta$ gültig ist für P)

Andererseits: $y^T(z+\varepsilon v) = y^T z + y^T \varepsilon v > \beta$ $\lightning$ $\Rightarrow$ so ein v $\nexists$ $\Rightarrow$ (*) $\square$

Satz 3.16 $P = P(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$, $P \neq \emptyset$. Dann:

① $eq(P) = \emptyset \Rightarrow \dim(P) = n$

② $F \subseteq P$ Seitenfläche, dann: $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : A_{eq(F)\cdot} x = b_{eq(F)}\}$ $(= fa(eq(F)))$

③ F echte Seitenfläche $\Rightarrow \dim(F) < \dim(P)$

Bemerkung: Für $I \subseteq Z$ ist $fa(I)$ Seitenfläche und andererseits $F = fa(eq(F))$

$\Rightarrow$ Man erhält genau alle Seitenflächen von P, wenn man für $I \subseteq Z$

$fa(I)$ betrachtet

Beweis des Satzes: ① Aus Satz 3.15: $\dim(P) = n - \mathrm{rank}(A_{\emptyset\cdot}) = n$

② Sei $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta\}$, für $y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, $y^T x \leq \beta$ $\forall x \in P$.

Wir zeigten vorher: $\mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} y^T \\ A_{I\cdot}\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Kern}(A_{I\cdot})$, $I = eq(F)$

Insbesondere $A_{I\cdot} z' = 0 \Rightarrow y^T z' = 0$. Daraus:

$F = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta,\ Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta,\ A_{I\cdot} x = b_I,\ Ax \leq b\}$

Sei $z \in F$, also $y^T z = \beta$, $A_{I\cdot} z = b_I$ (und $Az \leq b$). Dann gilt:

$H := \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I\cdot} x = b_I\} = z + \mathrm{Kern}(A_{I\cdot})$. Damit ist: $H = \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I\cdot} x = b_I,\ y^T x = \beta\}$ $\quad x = z + z'$, $z' \in \mathrm{Kern}(A_{I\cdot})$ $\Rightarrow y^T x = y^T(z+z') = y^T z + y^T z' = \beta$

Insgesamt erhalten wir: $F = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta,\ A_{I\cdot} x = b_I,\ Ax \leq b\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I\cdot} x = b_I,\ Ax \leq b\} = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I\cdot} x = b_I\} = fa(eq(F))$

③ Für jede echte Seitenfläche F gilt: $eq(F) \supset eq(P)$ und $\exists i \in Z \setminus eq(P)$, $i \in eq(F)$ mit $A_{i\cdot}$ linear unabh. von $A_{eq(P)\cdot}$. $\square$