Beweis: Nach Definition von z^*: $c^T x \leq z^*$ $\forall x \in P(A,b)$. Ferner:

$\mathcal{L} = \{x \in P(A,b) : c^T x = z^*\}$ per Def.. Damit: $\mathcal{L} = P(A,b) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ Seitenfläche $\square$

Frage: geg. $Ax \leq b$. wie findet man alle Seitenflächen, wie beschreibt man die Ausdehnung im Raum?

Def. 3.8: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Die affine Hülle ist $\operatorname{aff}(M) = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in M, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$ — $\operatorname{conv}(M) \subseteq \operatorname{aff}(M)$

Bsp.: $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ ist $\operatorname{aff}(\{a,b\})$ die Verbindungsgerade.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ nicht kolinear ist $\operatorname{aff}(\{a,b,c\})$ die Ebene, die alle 3 Punkte enthällt.

Bem.: 1) $\operatorname{aff}(M) = \operatorname{aff}(\operatorname{aff}(M))$

2) $\operatorname{conv}(M) \subseteq \operatorname{aff}(M)$ (vllt. Übung)

3) $\operatorname{aff}(M)$ ist abgeschlossen

Bem.: Falls $\operatorname{aff}(M) \neq \emptyset$, dann gibt es ein $a \in \operatorname{aff}(M)$ eindeutigen Untervektorraum U des $\mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{aff}(M) = a + U$ (Bew. in Notizen auf der Webs.)

Def. 3.9 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Die Dimension von M: $\dim(M) = \dim(\operatorname{aff}(M)) = \dim(U)$

$\Rightarrow \dim(M) = \max\{d \mid \exists a, x_1, \dots, x_d \in M : (x_i - a)_{1 \leq i \leq d}$ sind lin. unabhängig$\}$

3.1 Seitenflächen

20.11.18

Wie sieht man $P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ die Seitenflächen an?

Notation: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Z = Zeilenindexvektor von $A = (z_1, z_2, \dots, z_m)$

S = Spaltenindexvektor von $A = (s_1, \dots, s_n)$

Wir schreiben $I \subseteq Z$ und meinen einen Teilvektor von Z.

Für $I \subseteq Z$, $J \subseteq S$ ist A_{IJ} die Matrix, die alle Zeilen mit Index in I und Spalten mit Index J enthält.

Für $I = Z$. Schreiben wir $A_{\cdot J}$, für $S = J$ schreiben wir $A_{I \cdot}$. $A_{\cdot\cdot} = A$

Für Vektoren $b \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir einfach b_I statt $b_{I \cdot}$.

Def. 3.10: $P \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder, $F \subseteq P$ Seitenfläche. F heißt Ecke, falls
$\dim(F) = 0$

Def. 3.11: Sei $P = P(A,b)$ im $\mathbb{R}^n$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Für $F \subseteq P$ ist
$eq(F) = \{ i \in Z : A_{(i)\cdot}\, x = b_{(i)},\ \forall x \in F \}$ die Menge der bindenden Restriktionen
für F bzgl. $Ax \leq b$. Für $I \subseteq Z$ ist $fa(I) = P \cap \{ x \in \mathbb{R}^n : A_{I\cdot}\, x = b_I \}$
die von I induzierte Seitenfläche.

Bem.: 1) Wir interpretieren $eq(F)$ auch als Teilvektor von Z mit der gleichen Ordnung

2) $fa(I)$ ist tatsächlich eine Seitenfläche von P.

Betrachte dazu $y^T = \sum_{i \in I} A_{(i)\cdot}$, $b = \sum_{i \in I} b_{(i)}$. Dann gilt:

i) $\forall x \in P : Ax \leq b$, also auch $A_{I\cdot}\, x \leq b_I$ also auch $y^T x \leq b$
$\Rightarrow y^T x \leq b$ ist gültig.

ii) Sei $\bar{I} = Z \setminus I$. Dann: $P \cap \{ x \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq b \} = \{ x \in \mathbb{R}^n : y^T x = b,\ Ax \leq b \} =$ $I \neq$ bindenden Restriktionen

$= \{ x \in \mathbb{R}^n : y^T x = b,\ A_{I\cdot}\, x = b_I,\ Ax \leq b \} \cup \{ x \in \mathbb{R}^n : y^T x = b,\ Ax \leq b,\ A_{(i)\cdot}\, x < b_{(i)}$ für $i \in I \} = \{ x \in \mathbb{R}^n : A_{I\cdot}\, x = b_I,\ Ax \leq b \} \cup \emptyset = fa(I)$ Unterteilung „$\leq$" in „$=$" und „$<$"

Satz 3.12 $P = P(A,b)$ Polyeder im $\mathbb{R}^n$. Sei $z \in P$. Dann äquivalent:

① z Ecke ($\dim(z) = 0$, $\{z\}$ Seitenfläche)

② z ist keine Konvexkomb. von Elementen aus P, d.h.
$x, x' \in P$, $\lambda \in (0,1)$, $x \neq x' : z \neq \lambda x + (1-\lambda) x'$

③ $\operatorname{rang}(A_{eq(z)\cdot}) = n$

④ Es gibt $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass z die eindeutige Lösung von $\max\{ y^T x : x \in P \}$

Bem.: Um zu prüfen, ob z Ecke:

a) Ist $z \in P$? $Az \leq b$?

b) Ist $\operatorname{rang}(A_{eq(z)\cdot}) = n$?

Beweis: 1) ⇒ 4). Da $\{z\}$ Seitenfläche gibt es gültige Ungleichung $y^T x \le \beta$.

mit $\{z\} = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \beta\}$. also ist z die eindeutige Lösung von $\max\{y^T x : x \in P\}$. Falls $y = 0$, dann ist $P = \{z\}$ (Lem. 3.6) und y kann bel. gewählt werden.

4) ⇒ 2) Sei $\beta = y^T z$. Falls $z = \lambda x + (1-\lambda)x'$, für $\lambda \in (0,1)$, $x, x' \in P$, $x \neq x'$, dann erhalten wir: $\beta = y^T z = y^T(\lambda x + (1-\lambda)x') \le \lambda b + (1-\lambda) y^T x'$

$\Rightarrow y^T x' = \beta$ (da $x \in P$)

Da $x' \in P$ ist $y^T x' \le \beta$, also $y^T x' = \beta$ ↯ z ist eind. Lösung von $\max\{y^T x \mid x \in P\}$

2) ⇒ 3) Sei $E := eq(\{z\})$. Durch Widerspruch. Falls $\text{rang}(A_{E\cdot}) < n$, dann $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $A_{E\cdot} v = 0$. Da $Az \le b$ gilt: $A_{E\cdot} z = b_E$, $A_{Z\setminus E\cdot} x < b_{Z\setminus E}$

Insbesondere gibt es $t > 0$ mit $A_{E\cdot}(z \pm tv) = b_E$, $A_{Z\setminus E\cdot}(z \pm tv) \le b_{Z\setminus E}$

Damit $z + tv \in P$ und $z - tv \in P$, aber $z = \frac{1}{2}(z + tv) + \frac{1}{2}(z - tv)$ ↯ zur Ann.

3) ⇒ 1) Das lineare Gleichungssystem $A_{eq(\{z\})\cdot} x = b_{eq(\{z\})}$ hat die eind. Lösung z. Damit $\{z\} = fa(eq(\{z\}))$. □

Def. 3.13: Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder. $x \in P$ heißt innerer Punkt, falls x in keiner echten Seitenfläche von P enthalten ist.

Lemma 3.14 Sei $P = P(A,b)$, Z Zeilenindexmenge. Falls $P \neq \emptyset$. Dann:

a) $\exists z \in P$ mit $A_{eq(P)\cdot} z = b_{eq(P)}$, $A_{Z\setminus eq(P)\cdot} z < b_{Z\setminus eq(P)}$

b) Jeder solcher Punkt ist ein innerer Punkt. (in keiner echten Sf enthalten)

Beweis: Sei $I = eq(P)$, $\bar{I} = Z \setminus I$

a) 1. Fall: $I = Z$. Dann $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I\cdot} x = b_I\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$

Da $P \neq \emptyset$ erfüllt sogar jeder Punkt die Bed.

2. Fall: $I \neq Z$, $\bar{I} \neq \emptyset$. Dann $Ax \le b$ gleich zu $A_{I\cdot} x = b_I$, $A_{\bar{I}\cdot} x \le b_{\bar{I}}$. Insbesondere gibt es für $i \in \bar{I}$ ein $z^{(i)}$ mit $A_{I\cdot} z^{(i)} = b_I$, $A_{\bar{I}\cdot} z^{(i)} \le b_{\bar{I}}$, $A_{i\cdot} z^{(i)} < b_i$. Betrachte

$\bar{z} = \frac{1}{|\bar{I}|} \sum_{i \in \bar{I}} z^{(i)} \in P$