Für $\lambda > 0$ klein genug ist auch $A_{\bar{I}}.(x^* + \lambda y) \le b_{\bar{I}}$. Für $\lambda > 0$ klein genug ist $x^* + \lambda y \in P$. Da x^* optimal: $c^T(x^* + \lambda y) \ge c^T x^* \Rightarrow \lambda c^T y \ge 0$

Da $\lambda > 0 \Rightarrow c^T y \ge 0$ ✓

„$\Leftarrow$": Durch Widerspruch: Falls x^* nicht optimal gibt es $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \le b$, $c^T x < c^T x^*$. Sei $y = x - x^*$. Dann: $c^T y = c^T x - c^T x^* < 0$.

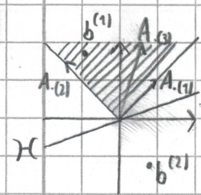
Andererseits: $A_{I.} x \le b_I = A_{I.} x^* \Rightarrow A_I y \le 0$. Damit $y \in Z(x^*)$ ↯ □

4.2. Lemma von Farkas

29.11.18

Lemma 4.5: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat genau eines der folgenden Systeme eine Lösung: $\begin{matrix} Ax = b \\ x \ge 0 \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} y^T A \ge 0 \\ y^T b < 0 \end{matrix}$

Anschaulich: 1) $\{Ax : x \ge 0\}$ ist ein Kegel, der alle nicht-negativen Linearkombinationen der Spalten von A enthält. Falls $Ax = b$, $x \ge 0$ eine Lösung hat, muss sie in dem Kegel liegen.



2) Falls $y^T A \ge 0$, $y^T b < 0$ eine Lösung hat, dann trennt die Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = 0\}$ die Mengen $\{b\}$ und die Spalten von A

Beob.: Es können nicht beide Systeme eine Lösung haben. Aus $x \ge 0$, $y^T A \ge 0$ folgt: $0 \le (y^T A) x = y^T A x = y^T b < 0$ ↯

Erinnerung: Satz von Carathéodory (Satz 2.9): Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{conv}(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ ist Konvexkombination von $n+1$ Elementen in $M\}$

Im Beweis haben wir gezeigt: Falls $y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_m\})$ und $\{x_i - x_m\}_{1 \le i \le m-1}$ linear unabh., dann $\exists i_0 \in \{1, \dots, m-1\}$ mit $y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_{i_0}\})$

Lemma 4.6: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $K = \{Ax \mid x \ge 0\}$ abgeschlossen.

Beweis: Sei Z der Spaltenindexvektor für A und $K_I = \{A_{.I} x \mid x \ge 0\} = \{\sum_{i \in I} A_{.(i)} x_i \mid x \ge 0\}$ für $I \subseteq Z$. Ferner sei $U = \{I \subseteq Z \mid$ die Spalten von $A_{.I}$ sind linear unabhängig$\}$.

Beh.: 1) $K = \bigcup_{I \in U} K_I$

2) K_I abgeschlossen $\forall I \in U$

Aus 1), 2) folgt das K abgeschlossen ✓

Beweis 1): "$\supseteq$" Aus Def.: $K = \{Ax \mid x \geq 0\} = \{\sum_{i \in Z} A_{\cdot(i)} x_i \mid x \geq 0\}$

Damit ist auch $K_I \subset K \ \forall I \subset Z$, also auch $\bigcup_{I \in U} K_I \subset K$.

"$\subseteq$" Sei $y \in K$, d.h. $\exists x \geq 0$ mit $y = Ax$, also:

$y = \sum_{i \in Z} A_{\cdot(i)} x_i = \sum_{i \in S} \frac{1}{n+1} ((n+1) A_{\cdot(i)} x_i) + \frac{1}{n+1} \cdot 0$

Sei $y_i = (n+1) A_{\cdot(i)} x_i$, $i \in Z$, $y_{n+1} = 0 \Rightarrow y \in conv(\{y_i \mid i \in Z\} \cup \{y_{n+1}\})$

Mit Caratheodory: $\exists I \subseteq Z$ mit $y \in conv(\{y_i \mid i \in I\} \cup \{y_{n+1}\})$

und $\{y_i - y_{n+1}\}_{i \in I}$ ist linear unabhängig. Da $y_{n+1} = 0$ ist

$\{y_i\}_{i \in I}$ lin. unabh. $\Rightarrow I \in U$ und $y \in K_I$

2): Sei $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K_I mit $y_l \xrightarrow{l \to \infty} y$.

Wir zeigen $y \in K_I$. Da $y_l \in K_I$ $\exists x_l \geq 0$ mit $y_l = A_{\cdot I} x_l$.

Damit: $A_{\cdot I}^T y_l = A_{\cdot I}^T A_{\cdot I} \cdot x_l$. Da $Rang(B^T B) = Rang(B)$ $\qquad A_{\cdot I} \in \mathbb{R}^{m \times |I|}$

$\forall$ Matrizen $B \Rightarrow A_{\cdot I}^T A_{\cdot I}$ invertierbar da $Rang(B) = |I|$

$\Rightarrow x_l = (A_{\cdot I}^T A_{\cdot I})^{-1} (A_{\cdot I}^T) y_l$ und konvergiert gegen x mit $x \geq 0$

(also $x_l \xrightarrow{l \to \infty} x$). Somit: $\lim_{l \to \infty} y_l = \lim_{l \to \infty} A_{\cdot I} x_l = A_{\cdot I} \lim_{l \to \infty} x_l = A_{\cdot I} x \in K_I$

$\Rightarrow K_I$ abgeschlossen $\square$

Beweis (von Lemma 4.5): Wir zeigen: mindestens ein System hat Lösung,

daraus folgt mit der Beob. die Aussage. Sei dazu $K = \{Ax \mid x \geq 0\}$.

K ist abgeschlossen und konvex. Unterscheide:

Fall 1: $b \in K$:

Dann gibt es $x \geq 0$ mit $Ax = b$, d.h. 1. System hat Lösung

Fall 2: $b \notin K$:

Da $\{b\}$ kompakt, $\exists$ Hyperebene, die $\{b\}$ und K strikt trennt.

O.B.d.A. $y^T z > \beta \ \forall \beta \in \mathbb{R}$, $y^T b < \beta$

Da $A_{\cdot(i)} \in K \ \forall i \in Z$ ist auch $y^T A_{\cdot(i)} > \beta \ \forall i \in Z$

Ferner, da $0 \in K$ muss $\beta \leq 0$. Falls $\beta < 0$. Sei $z \in K$ mit

$y^T z = -\delta$ für ein $\delta > 0$. Damit gilt auch $y^T(\lambda z) = -\lambda\delta \xrightarrow{\lambda\to\infty} -\infty$

Andererseits ist $\lambda z \in K$, d.h. $y^T(\lambda z) \geq \beta$. ↯ Damit $\beta = 0$. Damit gilt

dann $y^T A \geq 0$, $y^T b < 0$ □

Hilfsaussage: $\text{Rang}(M^T M) = \text{Rang}(M)$

M reele Matrix

Beweis: Wir zeigen: $\text{Kern}(M^T M) = \text{Kern}(M)$

$\Rightarrow \text{Rang}(M^T M) = n - \dim(\text{Kern}(M^T M)) = n - \dim(\text{Kern}(M)) = \text{Rang}(M)$

„⊆" Sei $x \in \text{Kern}(M^T M)$. Dann gilt: $M^T M x = 0 \Rightarrow x^T M^T M x = 0$

$\Rightarrow \|Mx\|^2 = 0 \Rightarrow x \in \text{Kern}(M)$

„⊇" Sei $x \in \text{Kern}(M)$. Dann $Mx = 0 \Rightarrow M^T M x = 0 \Rightarrow x \in \text{Kern}(M^T M)$ □

Lemma 4.7: Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat genau eines der Systeme eine Lösung: 1) $Ax \leq b$ oder 2) $y^T A = 0$, $y \geq 0$, $y^T b < 0$

Beweis: Wir bringen (2) in die Form von Lemma 4.5. Beachte, dass

$\{y \mid y^T A = 0\} = \{y \mid y^T A \geq 0, -y^T A \geq 0\}$. Damit ist 2) äquivalent zu:

2') $y^T(A \;\; -A \;\; E_m) \geq 0$, $y^T b < 0$

Mit Farkas Lemma entweder 2') oder 1) $(A \;\; -A \;\; E_m)x = b$, $x \geq 0$ mit $x = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$,

$x, x' \in \mathbb{R}^n$, $x'' \in \mathbb{R}^m$. 1) umgeschrieben lautet: $A(x - x') + x'' = b$, $x, x', x'' \geq 0$

$\Leftrightarrow A(x - x') \leq b$, $x, x' \geq 0$ $\Leftrightarrow$ 1) $Ax \leq b$ □