Aufgabe 1)

i) $\sigma(A)=\bigcap_{\substack{\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(X)\ \sigma\text{-Alg}\\ A\subseteq\mathcal{C}}}\mathcal{C}\subseteq\bigcap_{\substack{\mathcal{C}'\subset\mathcal{P}(X)\ \sigma\text{-Alg}\\ B\subset\mathcal{C}'}}\mathcal{C}'=\sigma(B)$

Da $A\subset B$ folgt: alle $\mathcal{C}'$ σ-Alg. enthalten A, aber nicht alle $\mathcal{C}$ enthalten B $\Rightarrow$ Schnitt „links" über mehr σ-Alg.

Nach selbem Schema: $dyn(A)\subseteq dyn(B)$ $\square$

ii) „$\subseteq$" i)

„$\supseteq$" Beh.: $\sigma(\sigma(A))=\sigma(A)$

„$\supseteq$" $A\subseteq\sigma(A)\overset{i)}{\Rightarrow}\sigma(A)\subseteq\sigma(\sigma(A))$

„$\subseteq$" $\sigma(\sigma(A))=\bigcap_{\substack{\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(X)\ \sigma\text{-Alg}\\ \sigma(A)\subseteq\mathcal{C}}}\mathcal{C}\subseteq\sigma(A)$

$\sigma(B)\overset{i)}{\subseteq}\sigma(\sigma(A))=\sigma(A)$ $\square$

Aufgabe 2)

i) Sei $F\in\mathcal{F}\Rightarrow\exists(M_j)\in\mathcal{I}$ mit $j=1,\dots,n$ und $F=\dot{\bigcup}_{j=1}^{n}M_j=\dot{\bigcup}_{j=1}^{2n}M_j$ mit $M_j=\emptyset$ für $j\in\{n+1,\dots,2n\}$ und $E=\emptyset$.

Betrachte M_x mit $x\in\{1,\dots,n\}$

Fall 1: $M_x\cap M_i=\emptyset$ $\forall i\in\{1,\dots,2n\}\setminus\{x\}\Rightarrow$ Setze $M_x=I_x$

Fall 2: $\exists i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{x\}$ sodass $M_x\cap M_i\neq\emptyset\Rightarrow$ Setze $M_x^{(2)}=M_x\cup M_i$,

füge i zu E hinzu und tausche M_i mit $M_{i+n}=\emptyset$ ($\Rightarrow I_i=\emptyset$)

Wiederhole nun dies* für $M_x^{(2)}$ bis $M_x^{(y)}\cap M_j=\emptyset$ $\forall j\in\{2,\dots,2n\}\setminus E$, $y\in\{2,\dots,n-1\}$. Setze dann $M_x^{(y)}=I_x$.

* (Betrachtung) der beiden Fällen.

Führt man nun diesen Alg. für $x=1,\dots,n$ aus, erhält man $I_1,\dots,I_n\in\mathcal{I}$ mit $I_i\cap I_j=\emptyset$ $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$ mit $i\neq j$ und $F=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}I_i$.

ii) $\emptyset$, $\cup$-stabil klar. Es bleibt z.z.: $\mathcal{F}$ ist $\setminus$-stabil

Seien $F,G\in\mathcal{F}$ mit $F_1,\dots,F_n,G_1,\dots,G_m\in\mathcal{I}$ mit $n,m\in\mathbb{N}$, s.d. $F=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}F_i$, $G=\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}G_j$

$\Rightarrow F\setminus G=(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}F_i)\setminus(\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}G_j)=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}(F_i\setminus\underbrace{(\dot{\bigcup}_{j=1}^{m}G_j)}_{\in\mathcal{I}})$

Wenn wir zeigen können, dass $\forall I, I' \in \mathcal{I}: I \setminus I' \in \mathcal{I}$, sind wir fertig.

Somit seien $I, I' \in \mathcal{I}$, $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $a' \leq b'$ s.d.

$I = [a, b[$, $I' = [a', b'[$. Definiere nun $e = \max\{a, a'\}$, $f = \min\{b, b'\}$

$$\Rightarrow I \cap I' = \begin{cases} [e, f[, \text{ falls } e \leq f \\ \emptyset, \text{ sonst} \end{cases}$$

Nun nutzen wir $I \cap I' \neq \emptyset$ andern falls sind wir wegen

$I \setminus I' = I \setminus (I \cap I') = I \in \mathcal{I}$ fertig. Somit können wir $I' \subseteq I$ annehmen.

$\Rightarrow a \leq a'$ und $b' \leq b \Rightarrow [a, b[\setminus [a', b'[= [a, a'[\cup [b', b[\in \mathcal{I}$

$\Rightarrow I \setminus I' \in \mathcal{I}$

$\Rightarrow F \setminus G \in \mathcal{F}$ $\square$

Aufgabe 3)

i) $\mathcal{P}(X)$ σ-Algebra ✓

$\mu(\emptyset) = \#\{x \in X \mid x \in \emptyset\} = 0$ ✓

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $A_j \cap A_k = \emptyset$ $\forall j \neq k$.

$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \#\{x \in X \mid x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\} = \#\{x \in X \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots\} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \#\{x \in X \mid x \in A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ ✓ $\square$

ii) $\mathcal{A}$ σ-Algebra ✓

$\delta_x(\emptyset) = 0$ ✓

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Sei nun $x \in A_m$ für $m \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x \in \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \delta_x(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n) = 1$, da

$\delta_x(A_m) = 1$ und $\delta_x(A_n) = 0$ $\forall n \neq m$

Sei nun $x \notin A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \delta_x(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 0$

Insgesamt folgt: $\delta_x(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n)$ $\forall x \in X$ ✓

iii) $\mathcal{F}$ Ring ✓

Mit Aufgabe 2a): $\forall F \in \mathcal{F}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n$ mit $F = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} [a_j, b_j[$

Definiere $\mu_G(F) := \sum_{j=1}^{n} (G(b_j) - G(a_j)) \geq 0$ (wg. Isotonie), falls $F \neq \emptyset$

$\mu_G(F) := 0$, falls $F = \emptyset$ ✓

Sei $(A^{(i)})_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{F}$ mit $A^{(n')} \cap A^{(m)} = \emptyset \; \forall n' \neq m$ und $I_b^{(i)} \in \mathcal{I}$ mit $A^{(i)} = \dot{\bigcup}_{b=1}^{\tilde{n}} I_b^{(i)}$

$\mu_G\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A^{(i)}\right) = \mu_G\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}\left(\dot{\bigcup}_{b=1}^{\tilde{n}} I_b^{(i)}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{b=1}^{\tilde{n}} \mu_G(I_b^{(i)})\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_G(A^{(i)})$ ✓

$\mu_G(\emptyset) = 0$ ✓