Nach dem Lemma gilt: $| \|x\|' - \|y\|' | \leq \|x-y\|' \leq C \cdot \|x-y\|_2$

D.h. $x \mapsto \|x\|'$ ist stetig bzgl. der eukl. Norm.

Daher nimmt die Funktion auf der kompakten Menge

$\{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\}$ ihr Minimum an. Sei $c := \min_{\|x\|_2 = 1} \|x\|'$, dann ist $c > 0$.

Für jedes $x \in \mathbb{K}^N$ ist: $\| \frac{x}{\|x\|_2} \|_2 = 1 \Rightarrow \| \frac{x}{\|x\|_2} \|' \geq c \Rightarrow c\|x\|_2 \leq \|x\|'$

Insgesamt: $c\|x\|_2 \leq \|x\|' \leq C\|x\|_2$ $\square$

$A = (a_{nm})_{n,m=1}^N \in \mathbb{K}^{N \times N}$

Bsp.: 1) Spaltensummennorm: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq m \leq N} \sum_{n=1}^N |a_{nm}|$

2) Zeilensummennorm: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{m=1}^N |a_{nm}|$

3) Frobenius-Norm: $\|A\|_F = \left(\sum_{n,m=1}^N |a_{nm}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (auch Hilbert-Schmidt-Norm)

Proposition: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^N$. Dann definiert

$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ eine Norm, die sog. induzierte Matrixnorm

und für diese Norm gilt die Submultiplikativität: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

Bemerkung: $\|A\|_1$ ist die von $\|x\|_1$ induzierte Matrixnorm und 17.10.18

$\|A\|_\infty$ ist die von $\|x\|_\infty$ induzierte Matrixnorm, d.h.

$\|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$, entspr. für $\|A\|_\infty$

$\|Ax\|_1 = \sum_{n=1}^N |(Ax)_n| = \sum_{n=1}^N \left| \sum_{m=1}^N a_{nm} x_m \right| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |a_{nm}| \, |x_m| = \sum_{m=1}^N \underbrace{\left(\sum_{n=1}^N |a_{nm}| \right)}_{\leq \|A\|_1} |x_m| \leq$

$\leq \|A\|_1 \|x\|_1 \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1$

Umgekehrt, wähle m sd. $\sum_{n=1}^N |a_{nm}| = \|A\|_1$ und $x = e_m \Rightarrow (Ax)_n = a_{nm}$

$\Rightarrow \|Ax\|_1 = \sum_{n=1}^N |a_{nm}| = \|A\|_1$, $\|x\|_1 = 1$ $\square$

Warnung: $\|A\|_F$ ist nicht die von $\|x\|_2$ induzierte Matrixnorm.

(denn $\|\mathbb{1}\|_F = \sqrt{N}$, aber für jede ind. Matrixnorm ist $\|\mathbb{1}\| = 1$)

Sei $\|A\|_2$ die von $\|x\|_2$ induzierte Matrixnorm.

Lemma: $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$ und $\|A\|_2 \leq \left(\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty\right)^{\frac{1}{2}}$

Beweis: $\|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^N \left|\sum_{m=1}^N a_{nm} x_m\right|^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{n=1}^N \left(\left(\sum_{m=1}^N |a_{nm}|^2\right)\overbrace{\left(\sum_{m=1}^N |x_m|^2\right)}^{\|x\|_2^2}\right) =$

$= \|A\|_F \, \|x\|_2$

Sei $y = Ax$

$\|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^N \overline{y_n} (Ax)_n = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{y_n} a_{nm} x_m \leq \sum_{n,m=1}^N \left(|y_n| |a_{nm}|^{\frac{1}{2}}\right)\left(|a_{nm}|^{\frac{1}{2}} |x_m|\right) \leq$

$\leq \left(\sum_{n,m=1}^N |y_n|^2 |a_{nm}|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n,m=1}^N |a_{nm}| |x_m|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^N \underbrace{\left(\sum_{m=1}^N |a_{nm}|\right)}_{\leq \|A\|_\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{m=1}^N \underbrace{\left(\sum_{n=1}^N |a_{nm}|\right)}_{\|A\|_1} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$

$\leq \|A\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|y\|_2 \; \|A\|_1^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \quad \Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \left(\|A\|_\infty \cdot \|A\|_1\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$ $\square$

Erinnerung: Eine Matrix $H \in \mathbb{K}^{N \times N}$ heißt hermitesch falls $h_{nm} = \overline{h_{mn}} \; \forall m,n$.

Ist H hermitesch, so besitzt $\mathbb{K}^N$ eine Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_N)$

(d.h. $u_n^* u_m = \delta_{nm}$) mit $H u_n = \lambda_n u_n \; \forall n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ Eigenwerte von H.

Ist H positiv semidefinit (d.h. $x^* H x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{K}^N$) so gilt $\lambda_n \geq 0 \; \forall n$

Proposition: Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ und seien $\lambda_n(A^*A)$ die EW der herm., positiv semidef. Matrix A^*A. Dann ist $\|A\|_2 = \left(\max_{1 \leq n \leq N} \lambda_n(A^*A)\right)^{\frac{1}{2}}$

Insbesondere für A hermitesch ist $\|A\|_2 = \max_{1 \leq n \leq N} |\lambda_n(A)|$

Bemerkung: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{n=1}^N \lambda_n(A^*A)}$

Beweis (der Prop.): Sei $(u_n)_{n=1}^N$ eine ONB aus EV von A^*A.

Wir schreiben $x = \sum_{n=1}^N c_n u_n$, $c_n \in \mathbb{K} \Rightarrow \|x\|_2^2 = x^* x = \sum_{n,m=1}^N \overline{c_n} u_n^* c_n u_n =$

$= \sum_{n=1}^N |c_n|^2$

$A^*Ax = \sum_{n=1}^N c_n A^*A u_n = \sum_{n=1}^N c_n \lambda_n u_n$ mit $\lambda_n := \lambda_n(A^*A)$

$\|Ax\|_2^2 = x^* A^* A x = \sum_{n,m=1}^N \overline{c_n} u_n^* c_m \lambda_m u_m = \sum_{n=1}^N \lambda_n |c_n|^2$

$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^N \lambda_n |c_n|^2 \leq \left(\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n\right) \sum_{n=1}^N |c_n|^2 = \left(\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n\right) \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \left(\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n\right)^{\frac{1}{2}}$

Umgekehrt wähle n sd. $\lambda_n = \max_{n'=1,\dots,N} \lambda_{n'}$ und betrachte $x = u_n$.

Dann ist $c_{n'} = \begin{cases} 1 & \text{für } n'=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und daher ist obige Ungl.

saturiert, d.h. $\|Ax\|_2^2 = (\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n)\, \|x\|_2^2$ $\square$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = \|A\|_\infty = 5$, $\|A\|_F = \sqrt{23}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = 2$, $\|A\|_\infty = 1$, $\|A\|_F = \sqrt{2}$

$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{2}$

<u>Konditionszahl</u>

Definition: Die Konditionszahl einer regulären Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ bzgl. einer Matrixnorm $\|\cdot\|$ ist: $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$

Bemerkung: $\operatorname{cond}(\alpha A) = \operatorname{cond}(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$

$\operatorname{cond}(A) \geq 1$, falls $\|\cdot\|$ von Vektornorm induziert.

Lemma: Bzgl. einer von Vektornorm $\|\cdot\|$ ind. Matrixnorm gilt für jede reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$: $\operatorname{cond}(A) = (\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|) / (\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|)$

Beweis: Wegen Homogenität ist $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$, außerdem

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} \underset{x = A^{-1}y}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Ax\|} = \Big(\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|\Big)^{-1} \quad \square$$

Korollar: Bzgl. der von der eukl. V-Norm ind. M-Norm ist:

$$\operatorname{cond}(A) = \sqrt{\frac{\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n(A^*A)}{\min_{n=1,\dots,N} \lambda_n(A^*A)}}$$

Insbesondere für A hermitesch gilt:

$\operatorname{cond}(A) = (\max|\lambda_n(A)|)/(\min|\lambda_n(A)|)$

Bsp. vom letzten Mal: $A \rightsquigarrow \lambda_4 \approx 30.29,\ \lambda_1 \approx 0.01$

$\Rightarrow cond(A) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \approx 2984$