Aufgabe 3)

Sei $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow f$ m.b., da skalierte Indikatorfunktion und es gilt:

$\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}\,d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = \frac{1}{n}\cdot n = 1 \Rightarrow 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = \liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = \limsup\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$

Ferner gilt: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n \Rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty}\binom{\inf}{\sup} f_n\,d\lambda$

Insgesamt folgt: $\int_{\mathbb{R}} \liminf\limits_{n\to\infty} f_n\,d\lambda < \liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda$.

Anm: Beachte, dass es in diesem Beispiel keine integrierbare Majorante gibt und daher der sup-Teil des Lemma von Fatou nicht anwendbar ist.

(Sei $g := \max\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \Rightarrow g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n-1,n[} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\lambda([n-1,n[) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n} = \infty$ (Ana 1))

Aufgabe 4)

Sei $g: X\to\mathbb{R}$, $x\mapsto M$ $\Rightarrow |f_n(x)| \le M = g(x)$ $\forall x\in X, \forall n\in\mathbb{N}$. g ist m.b., da konstante Fkt.

Es gilt $\int_X g\,d\mu \overset{\wedge}{\underset{\mathbb{R}}{=}} M\cdot\underbrace{\mu(X)}_{<\infty\text{, da endl. Maßraum}} < \infty \Rightarrow g\in\mathcal{L}^1 \overset{12.25}{\Rightarrow} f_n\in\mathcal{L}^1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Nun ist maj. Konv. anwendbar und es folgt: $f\in\mathcal{L}^1$ und (da f m.b.)

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu(x) = \int_X f(x)\,d\mu(x)$. $\square$

Aufgabe 2)

Da $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ integrierbar $\Rightarrow f$ m.b. $\overset{12.6,\,12.7}{\Rightarrow} \{f>n\}, \underbrace{\{f<n\}}_{=\{f\ge -n\}} \in \mathcal{A}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \{f>n\}\cup\{-f>n\} = \{|f|>n\}\in\mathcal{A}$ ($\Rightarrow$ m.b.) $\overset{12.2}{\Rightarrow} \mathbb{1}_{\{|f|>n\}}$ m.b. $\overset{12.7}{\Rightarrow} f\cdot\mathbb{1}_{\{|f|>n\}}$ m.b.

Definiere $f_n := f\cdot\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \Rightarrow |f_n| \le |f|$ $\forall n\in\mathbb{N}$ und da $f\in\mathcal{L}^1 \Rightarrow |f|\in\mathcal{L}^1 \Rightarrow |f_n|\in\mathcal{L}^1 \Rightarrow f_n\in\mathcal{L}^1$

$\Rightarrow \int_X f\cdot\mathbb{1}_{\{|f|>n\}}\,d\mu < \infty$. Sei nun $g := \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}} f$. Hiermit gilt: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} g$. Somit gelten alle Voraus. für maj. Konv. $\underbrace{\text{und}}_{\text{sind erfüllt}}$ es folgt: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X g\,d\mu = \int_X \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}} f\,d\mu \overset{\mu(\{|f|=\infty\})=0}{=} 0$

Bem.: Ang.: $\mu(\{|f|=\infty\})>0 \Rightarrow \infty \overset{|f|\in\mathcal{L}^1}{>} \int |f|\,d\mu \ge \int |f|\cdot\mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}}\,d\mu = \infty\cdot\underbrace{\mu(\{|f|=\infty\})}_{>0} = \infty$ ↯

Aufgabe 6)

i) Definiere $f_n := \frac{1}{1+e^{nx}} e^{-\frac{x^2}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n$ ist m.b., da stetig $\forall n \in \mathbb{N}$

Sei $g := 0 \Rightarrow g \in \mathcal{L}^1$. Es gilt: $g \leq f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Berechnung von $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$:

Fall 1: $x > 0$: $\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{1+e^{nx}}}_{\to 0} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{n}}}_{\to 1} = 0$

Fall 2: $x = 0$: $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{1+e^{nx}} e^{-\frac{x^2}{n}} = \frac{1}{2}$

Fall 1: $x < 0$: $\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{1+e^{nx}}}_{\to 1} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{n}}}_{\to 1} = 1$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f_n = 0 \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{0\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{]-\infty,0[}$

Insgesamt: $\liminf_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \, d\lambda \geq \int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = 0 \cdot \mu(]0,\infty[) + \frac{1}{2} \cdot \mu(\{0\}) + 1 \cdot \mu(]-\infty,0[) = \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \infty$

ii) Definiere $f_n := \frac{n}{x(1+x^2)} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) = f_n(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ⊛

Es gilt $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\frac{\sin(y)}{y} \leq 1$ und $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ $\Rightarrow |f_n| \leq \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, n \in \mathbb{N}$

Es gilt: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \, d\lambda x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi < \infty \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f_n \in \mathcal{L}^1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \, d\lambda \overset{\substack{f_n(x) = f_n(-x) \\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}}{=} \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \int_{]0,\infty[} f_n \, d\lambda \overset{\text{maj. Konv.}}{=} 2 \int_{]0,\infty[} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{x(1+x^2)} \sin\left(\frac{x}{n}\right)}_{= \frac{1}{1+x^2} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}} d\lambda =$

$= 2 \int_{]0,\infty[} \lim_{m\to 0} \frac{1}{1+x^2} \frac{\sin(x \cdot m)}{x \cdot m} d\lambda = 2 \int_{]0,\infty[} \frac{1}{1+x^2} d\lambda(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

Aufgabe 1)

Definiere $f_n := \mathbb{1}_{A_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $g:=0$. Hiermit gilt: $f_n \geq g$ $\forall n\in\mathbb{N}$, wobei $g\in\mathcal{L}^1$.

Insbesondere ist f_n m.b. $\forall n\in\mathbb{N}$. Nun ist das Lemma von Fatou anwendbar

und es folgt: $\liminf\limits_{n\to\infty}\mu(A_n) = \liminf\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \geq \int_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_X \liminf\limits_{n\to\infty}\mathbb{1}_{A_n}\,d\mu =$

$$\underset{\substack{\text{Def.}\\ \text{liminf}}}{=} \int_X \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\geq n}\mathbb{1}_{A_k}\,d\mu \underset{12.2}{=} \int_X \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{\bigcap_{k\geq n}A_k}\,d\mu \underset{12.2}{=} \int_X \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geq n}A_k}\,d\mu = \int_X \mathbb{1}_A\,d\mu = \mu(A)_\square$$

Alternativ: $\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\underbrace{\bigcap_{n\geq m}A_n}_{=:B_m}\Big) \underset{\substack{m\in\mathbb{N}\\ B_m\nearrow}}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}}\mu\Big(\bigcap_{n\geq m}A_n\Big) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}}\inf_{n\geq m}\mu(A_n) = \liminf\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$

Aufgabe 5)

Da $f\in\overline{\mathcal{L}}^1 \Rightarrow \mu(\{|f|=\infty\})=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu \overset{Y:=X\setminus(\{|f|=\infty\})}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\,d\mu =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\cdot\mathbb{1}_{\{|f|=0\}}\,d\mu + \int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{0<|f|<\infty\}}\,d\mu\Big) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{0<|f|<\infty\}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\cdot\mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}}\,d\mu + \int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{1<|f|<\infty\}}\,d\mu + \int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{|f|=1\}}\,d\mu\Big) =$

$= \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}}\,d\mu}_{} + \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\int_Y |f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{1<|f|<\infty\}}\,d\mu}_{} + 1\cdot\mu(\{|f|=1\}) = \circledast$

mon. Konv. mit $0=g\leq |f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}}$:	maj. Konv. mit $|f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{1<|f|<\infty\}}\leq |f|$:
$= \int_Y \lim\limits_{n\to\infty}|f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{0<|f|<1\}} =$	$= \int_Y \lim\limits_{n\to\infty}|f|^{\frac{1}{n}}\mathbb{1}_{\{1<|f|<\infty\}} =$
$= \mu(\{0<|f|<1\})$	$= \mu(\{1<|f|<\infty\})$

Anm: $0=g\in\mathcal{L}^1$, $|f|\overset{12.25}{\in}\mathcal{L}^1$

$\Rightarrow \circledast = \mu(\{0<|f|<\infty\}) \underset{\mu(\{|f|=\infty\})=0,\ \text{da } f\in\overline{\mathcal{L}}^1}{=} \mu(\{0<|f|\leq\infty\}) = \mu(\{|f|\neq 0\})$