$\tilde{L}_3 = L_3$, $\tilde{L}_2 = P_3 L_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ & 0 & 1 & \\ & \frac{1}{3} && 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{L}_1 = P_3 P_2 L_1 P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ -2 & 1 && \\ -\frac{1}{2} && 1 & \\ 1 &&& 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ && \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{L}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 1 && \\ & 0 & 1 & \\ & -\frac{1}{3} && 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ 2 & 1 && \\ \frac{1}{2} && 1 & \\ -1 &&& 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L = \tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \tilde{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ 2 & 1 && \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

1.3 Cholesky-Zerlegung

31.10.18

Erinnerung: Eine hermitesche Matrix heißt pos. definit, falls $x^* A x \; \forall 0 \neq x \in \mathbb{K}^N$

Satz: Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ hermitesch und pos. def. Dann gibt es genau eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit pos. Diagonaleinträgen und $A = LL^*$

Beweis: (durch Induktion über N)

$N=1$: A ist eine positive Zahl und $L = \sqrt{A}$ leistet das Gewünschte

$N \geq 2$: Schreibe $A = \begin{pmatrix} B & b \\ b^* & \beta \end{pmatrix}$ mit $B \in \mathbb{K}^{N-1 \times N-1}$, $b \in \mathbb{K}^{N-1}$, $\beta \in \mathbb{K}$

wegen der pos. Definitheit von A ist B pos. definit und $\beta > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $B = MM^*$ mit einer unteren Dreiecksmatrix M mit pos. Diagonaleinträgen. Wir machen den Ansatz:

$L = \begin{pmatrix} M & 0 \\ m^* & \mu \end{pmatrix}$ mit $m \in \mathbb{K}^{N-1}$ und $\mu > 0$, so dass $A = LL^*$. Wegen

$L^* = \begin{pmatrix} M^* & m \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ muss gelten: $A = LL^* = \begin{pmatrix} MM^* & Mm \\ m^* M & m^* m + \mu^2 \end{pmatrix}$, das heißt

$Mm = b$, $m^* m + \mu^2 = \beta$. Weil M als Dreiecksmatrix mit pos. Diagonaleinträgen regulär ist, $\exists !$ Lösung m von $Mm = b$, nämlich $m = M^{-1} b$.

Wir zeigen $m^* m < \beta$. Dann gibt es ein eind. $\mu > 0$ mit $m^* m + \mu^2 = \beta$ und wir erhalten eine Matrix L wie gewünscht. Außerdem ist dann L eindeutig.

Wähle $y \in \mathbb{K}^{N-1}$ mit $M^* y = -m$ (wg. M reg. ist auch M^* reg).

Es ist $y^* b = y^* M m = (M^* y)^* m = (-m)^* m$ und wg. $By = MM^* y =$

$= -Mm = -b$, $y^* B y = -y^* b \Rightarrow 0 \overset{\text{pos. def.}}{<} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}^* A \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} By + b \\ b^* y + \beta \end{pmatrix} =$

$= y^* B y + 2\mathrm{Re}(y^* b) + \beta = -m^* m + \beta \Rightarrow \beta - m^* m > 0$ $\square$

Numerische Berechnung der Cholesky-Zerlegung durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{31}} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \overline{a_{32}} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \cdots \\ l_{21} & l_{22} & & \cdots \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & \overline{l_{21}} & \overline{l_{31}} & \cdots \\ & l_{22} & \overline{l_{32}} & \cdots \\ & & l_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$a_{11} = l_{11}^2 \rightsquigarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$a_{21} = l_{21} l_{11} \rightsquigarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$

$a_{22} = |l_{21}|^2 + l_{22}^2 \rightsquigarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2}$

$a_{31} = l_{31} \cdot l_{11} \rightsquigarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}}$

$a_{32} = l_{31} \overline{l_{21}} + l_{32} l_{22} \rightsquigarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}\overline{l_{21}}}{l_{22}}$

$\vdots \quad \vdots$

Aufwand: Berechnung von l_{nm} mit $m \leq n$ erfordert m Mult., Div. oder Wurzeln

Damit ergibt sich ein Gesamtaufwand von: $\sum_{m=1}^{N} (N+1-m)m =$

$= \frac{(N+1)^2 N}{2} - \frac{N(N+\frac{1}{2})(N+1)}{3} = \frac{1}{6} N^3 + O(N^2)$

1.4 QR-Zerlegung

Satz: Sei $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$ mit $M \geq N$ und $\mathrm{rang}(A) = N$. Dann gibt es eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{K}^{M \times M}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{M \times N}$ mit $A = QR$.

Erinnerung: $R \in \mathbb{K}^{M \times N}$ obere Dreiecksmatrix falls $R = \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ 0 & \ddots & r_{NN} \\ \hline & 0 & \end{pmatrix}$,

$Q \in \mathbb{K}^{M \times M}$ unitär falls $Q^{-1} = Q^* = \overline{Q}^T$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ orthogonal)

Anwendung auf Gleichungssystem $Ax=b$

- Berechne Q^*b
- Löse $Rx=Q^*b$

$\Rightarrow Ax=QRx=QQ^*b=b$

Vorteil der QR-Zerl. gegenüber LR- und Cholesky-Zerl.

Bei LR und Cholesky müssen zwei Gleichungssysteme gelöst werden. $Ax=b$, $Lz=b$, $Rx=z$. Es gilt $\operatorname{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\| \leq$

$\leq \|L\|\,\|R\|\,\|L^{-1}\|\,\|R^{-1}\| = \operatorname{cond}(L)\cdot\operatorname{cond}(R)$

für Cholesky ersetze R mit L^*

Vergleiche dazu QR-Zerl. (mit $M=N$)

$\operatorname{cond}(A)=\|QR\|\,\|R^{-1}Q^{-1}\| = \|R\|\,\|R^{-1}\| = \operatorname{cond}(R)$

bzgl. euklidischer Norm — Q unitär

Außerdem ändert sich in der Fehlerabschätzung $\|Q^*b\|_2=\|b\|_2$ nicht.

Definition: Die Householder-Transformation bzgl. eines Vektors $v\in\mathbb{K}^n$ ist die Matrix $P=I-\frac{2}{v^*v}vv^*\in\mathbb{K}^{n\times n}$

Lemma: Die Householder-Trafo. bzgl. eines Vektors v ist hermitesch, unitär und erfüllt $Pv=-v$ und $Pw=w$ $\forall w\perp v$

Beweis: Offensichtlich ist P hermitesch. Außerdem ist $P^*P=P^2=$

$$= I-\frac{4}{v^*v}vv^*+\frac{4}{(v^*v)^2}v\underbrace{v^*v}_{\in\mathbb{K}}v^* = I$$

$$Pv=v-\frac{2}{v^*v}v\underbrace{v^*v}_{\in\mathbb{K}}=-v, \quad \text{für } w\perp v:\ Pw=w-\frac{2}{v^*v}v\underbrace{v^*w}_{=0}=w \quad \square$$