Betrachte $\mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i$. Dann gilt: 1) $\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m \mu_i = \sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i =$

$= \sum_{i=1}^m \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 + 0 = 1$

2) Falls $\alpha_i \leq 0$, dann $\mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \geq \lambda_i \geq 0$

Falls $\alpha_i > 0$, dann $\mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i = \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \right) \geq 0$

Daraus folgt insgesamt: $z = \sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m \mu_i x_i$ mit $\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0 \; \forall 1 \leq i \leq M$

$\Rightarrow z$ Konvexkomb. von $(x_i)_{\substack{1\leq i\leq m\\i\neq i_0}}$ $\square$

2.2 Trennungssätze

06.11.18

Definition 2.10: Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \alpha\}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ trennt M_1, M_2, falls mit $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x \geq \alpha\}$, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq \alpha\}$ gilt entweder $M_1 \subseteq H^+$, $M_2 \subseteq H^-$ oder $M_1 \subseteq H^-$, $M_2 \subseteq H^+$.
Die Trennung heißt strikt, falls das gleiche für die offenen Halbräume gilt. ($M_1 \cap H = M_2 \cap H = \emptyset$)

Proposition 2.11 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ abgeschlossen und konvex. Dann gibt es Hyperebene, die M und $\{0\}$ strikt trennt.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ($\alpha > 0$) so dass $B_\alpha(0) \cap M \neq \emptyset$. Dann ist der Schnitt $B_\alpha(0) \cap M$ kompakt, insbesondere nimmt die stetige Funktion $x \mapsto \|x\|_2$ ihr Minimum an einem $y \in B_\alpha(0) \cap M$ an. Da $0 \notin M$ ist $\|y\|_2 > 0$.

Sei $x \in M$ beliebig. Dann ist $\forall \lambda \in [0,1]: \lambda x + (1-\lambda) y \in M$ und $\|\lambda x + (1-\lambda) y\|_2 \geq \|y\|_2$. Äquivalent dazu: $(\lambda x + (1-\lambda) y)^T (\lambda x + (1-\lambda) y) \geq y^T y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda(x-y) + y)^T (\lambda(x-y) + y) \geq y^T y \Leftrightarrow \lambda^2 \|x-y\|_2^2 + 2\lambda y^T (x-y) \geq 0$ (*)

Beh.: $y^T (x-y) \geq 0$

Daraus: $y^T x \geq y^T y = \|y\|_2^2 > 0$. Mit $b = \frac{1}{2} \|y\|_2^2 > 0$ sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = b\}$

Dann ist $M \subseteq H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \geq b\}$, $\{0\} \subseteq H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq b\}$.

Zusätzlich gilt sogar: $M \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x > b\}$, $\{0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x < b\}$

$\Rightarrow H$ trennt $M, \{0\}$ strikt.

Beweis der Beh.: Angenommen $y^T(x-y) = -C$ für ein $C>0$. Wähle

$\lambda \in [0,1]$ so klein, dass $2C > \lambda \|x-y\|_2^2 \; (>0)$

Damit: $\lambda^2 \|x-y\|_2^2 + 2\lambda y^T(x-y) < 2C\lambda - 2\lambda C = 0$ ↯ zu ⊛ $\square$

Lemma 2.12 Seien $A, K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, K kompakt. Dann ist $A+K$ abgeschlossen.

Beweis: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Aus Analysis: M abg. $\Leftrightarrow$ alle Häufungspunkte von M sind in M $\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\} = M$. Sei nun $s \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von Elementen aus $A+K$, d.h. $\exists (s_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq A+K$ mit $s_l \xrightarrow{l\to\infty} s$. Wir zeigen: $s \in A+K$. Seien Folgen $(a_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $(k_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq K$, so dass $s_l = a_l + k_l$, $l \in \mathbb{N}$. Da K kompakt ist, gibt es nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K, also $k_{l_i} \to k$, $(l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Teilfolge, $k \in K$. Insbesondere: $s_{l_i} = a_{l_i} + k_{l_i} \to s$ und damit $a_{l_i} \xrightarrow{i\to\infty} s-k$. Da A abg. ist $s-k \in A$.

$\Rightarrow s = \underbrace{s-k}_{\in A} + \underbrace{k}_{\in K} \in A+K$ $\square$

Satz 2.13 Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, disjunkt, nicht-leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es Hyperebene, die M_1, M_2 strikt trennt. $\boxed{\text{Zusätzlich: } M_2 \text{ kompakt}}$

Beweis: Sei $M = M_1 + (-1)M_2 = \{m_1 - m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$. Mit Lemma 2.12: M ist abgeschlossen. Ferner $0 \notin M$, da $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Mit Proposition 2.11: $\exists H = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = b\}$ die $M, \{0\}$ strikt trennt. Insbesondere y minimiert $\|\cdot\|_2$ über M und $b = \frac{1}{2}\|y\|_2^2 > 0$ und zusätzlich $y^T x \geq 2b$ $\forall x \in M$.

Sei nun $x \in M$ bel. Dann $x = m_1 - m_2$, $m_1 \in M_1$ und $m_2 \in M_2$, und $y^T x > b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y^T m_1 > y^T m_2 + b$. Da x bel. war $\Rightarrow \inf_{m_1 \in M_1} y^T m_1 \geq \sup_{m_2 \in M_2} y^T m_2 + b > \sup_{m_2 \in M_2} y^T m_2$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass: $\inf_{m_1 \in M_1} y^T m_1 > \alpha > \sup_{m_2 \in M_2} y^T m_2$. Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = \alpha\}$. Dann $M_1 \subseteq H^+$, $M_2 \subseteq H^-$ und Trennung durch H ist strikt $(M_1 \cap H = M_2 \cap H = \emptyset)$ $\square$

Proposition 2.14 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ konvex. Dann gibt es Hyperebene die $M, \{0\}$ trennt.

Beweis: Sei $\overline{M}$ der Abschluss von M in $\mathbb{R}^n$. $\overline{M}$ ist konvex. Falls $0 \notin \overline{M}$, dann folgt die Beh. mit Prop. 2.11 (in diesem Fall ist die Trennung sogar strikt)

Sonst: 0 ist auf dem Rand von $\overline{M}$. Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ die gegen 0 konv.

Mit Satz 2.13: $\forall l \in \mathbb{N}\ \exists H_l := \{x \in \mathbb{R}^n \mid y_l^T x = \alpha_l\}$ Hyperebene die $\overline{M}$ und $\{x_l\}$ trennt. O.B.d.A.: $\|y_l\|_2 = 1\ \forall l \in \mathbb{N}$. Aus Definition: $\forall x \in \overline{M}: y_l^T x > \alpha_l > y_l^T x_l$ (strikte Trennung). Da $0 \in \overline{M}$ und $\|y_l^T x_l\|_2 \xrightarrow{l\to\infty} 0$ folgt: $0 = y_l^T 0 > \alpha_l > y_l^T x_l \to 0$

$\Rightarrow \alpha_l \xrightarrow{l\to\infty} 0$. Die y_l's sind alle in der kompakten Menge: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ mit Bolzano-Weierstraß gilt $\exists$ Teilfolge $(y_{l_i})_{i\in\mathbb{N}}$ der $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und y mit $\|y\|_2 = 1$ so dass $y_{l_i} \xrightarrow{i\to\infty} y$. Damit für $x \in \overline{M}$: $y^T x = \lim_{i\to\infty} y_{l_i}^T x \geq \lim_{i\to\infty} \alpha_{l_i} = 0$

Damit trennt die Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = 0\}$ M und $\{0\}$. $\square$

Satz 2.15 Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ disjunkt, nicht leer, konvex. Dann existiert Hyperebene, die M_1, M_2 trennt.

Beweis: Übung.

2.3 Stützeigenschaften

8.11.18

Idee: Beschreibe konv. Mengen von „außen"

Def. 2.16 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, konvex, abgeschlossen. Eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \alpha\}$ mit $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Stützhyperebene für M, falls mit $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x \geq \alpha\}$, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq \alpha\}$ gilt:

i) $M \cap H \neq \emptyset$

ii) Entweder $M \subseteq H^+$ oder $M \subseteq H^-$ (exklusives oder)

H^+ bzw H^- heißt Stützhalbraum für M. (dort wo M enthalten ist)

Für $M \subseteq H^+$ heißt $-y$ bzw für $M \subseteq H^-$ heißt y die äußere Normale für H.