30.10.18

Definition 2.3: Seien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ und $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.
Dann heißt $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ Konvexkombination der x_i's. Falls
$\lambda_i < 1 \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$, dann heißt z eine echte Konvexkombination

Satz 2.4 M konvex $\Leftrightarrow$ $\forall m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in M$ ist jede Konvexkombination in M

Beweis: „$\Leftarrow$" trivial, wähle $m = 2$ und benutze Def.

„$\Rightarrow$" Induktion über $m \in \mathbb{N}$. $m = 1, 2$ klar aus Def.

$m \to m+1$: Seien $x_1, \dots, x_{m+1} \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1} \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i$.

Sei nun $z = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i$ (Z.z.: $z \in M$)

Falls $\lambda_{m+1} = 1$, dann $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \Rightarrow z = x_{m+1} \in M$

Sonst $\lambda_{m+1} < 1$ und betrachte $x = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \cdot \frac{1}{\lambda_{m+1}}$

Dann ist x Konvexkombination von $x_1, \dots, x_m$.

$\Rightarrow x \in M$ nach I.A.

Außerdem ist $z = (1 - \lambda_m) x + \lambda_{m+1} x_{m+1}$ eine Konvexkombination von x und x_{m+1}. Da X konvex $\Rightarrow z \in M$ $\square$

Satz 2.5 Sei I Indexmenge, seien $M_i \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex $\forall i \in I$. Dann
$M = \bigcap_{i \in I} M_i$ konvex

Beweis: Falls $M = \emptyset$ oder $|M| = 1$ klar. Sonst seien $x_1, x_2 \in M$.
Dann gilt $x_1, x_2 \in M_i \ \forall i \in I$. Da alle M_i konvex: $\forall i \in I, \lambda \in [0,1]$:
$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in M_i$. Somit auch $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in M \ \forall \lambda \in [0,1]$ $\square$

Satz 2.6 Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann: M, M' konvex $\Rightarrow M + M'$, αM sind konvex.

Beweis: Übung

Bemerkung: Vereinigung und Differenz von konvexen Mengen sind i.A. nicht konvex.

Definition 2.7: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Durchschnitt aller konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$, die M enthalten, ist die konvexe Hülle, $\operatorname{conv}(M)$, von M.

Bem. M konvex, dann $conv(M) = M$.

$M \subseteq M'$, dann $conv(M) \subseteq conv(M')$ (eine konvexe Menge die M enthält, enthält nicht unbedingt M')

Satz 2.8

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann: $conv(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ ist Konvexkombination von Elementen aus $M\}$

Beweis: Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ Konvexkombination von Elementen aus $M\}$

Dann ist $M \subseteq B$. Außerdem ist B konvex, da für $x, x' \in B$ ist $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, $x' = \sum_{i=1}^{m'} \lambda_i' x_i'$ mit $x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_m' \in M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ und $\lambda_1', \dots, \lambda_m' \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^{m'} \lambda_i' = 1$. Wir erhalten:

$\lambda x + (1-\lambda)x' = \sum_{i=1}^{m} \lambda\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{m'} (1-\lambda)\lambda_i' x_i'$ als Konvexkombination von $x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_m'$. $conv(M) \subseteq conv(B) = B$. Für die andere Inklusion sei $B' \supseteq M$ bel. aber konvex. Dann $B' \supseteq B$, da B' alle Konvexkomb. von Elementen aus M enthält (Satz 2.4), mit $B' = conv(M)$ folgt $conv(M) \supseteq B$. $\square$

Satz 2.9 (Caratheodory). Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $conv(M) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x$ ist Konvexkombination von $n+1$ Punkte in $M\}$.

Beweis: Sei $z \in conv(M)$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in M$, so dass $z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \geq 0\ \forall i$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ (vgl. s. Satz 2.8)

Falls $m \leq n+1$ ✓. Sonst sei $m \geq n+2$ und $y_i = x_i - x_m$, $1 \leq i \leq m-1$.

Da $m-1 \geq n+1$ sind $y_1, \dots, y_{m-1}$ linear abhängig im $\mathbb{R}^n$. Somit existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, nicht alle $= 0$, so dass $0 = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (x_i - x_m)$. Sei $\alpha_m := -\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i$. Dann gilt: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$. Da $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \neq 0$, gibt es $1 \leq i \leq m$ mit $\alpha_i > 0$. Sei i_0 geg. durch: $\frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \min\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} : 1 \leq i \leq m, \alpha_i > 0\} \geq 0$

Dann ist $z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i) x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \underbrace{(\lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i)}_{=: \mu_i} x_i$ eine Linearkombination von $n-1$ Elementen aus M

Betrachte $\mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i$. Dann gilt: 1) $\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{m} \mu_i = \sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{m} \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i =$

$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 + 0 = 1$

2) Falls $\alpha_i \leq 0$, dann $\mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i \geq \lambda_i \geq 0$

Falls $\alpha_i > 0$, dann $\mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_i = \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \right) \geq 0$

Daraus folgt insgesamt: $z = \sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{m} \mu_i x_i$ mit $\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{m} \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0$ $\forall 1 \leq i \leq M$

$\Rightarrow z$ Konvexkomb. von $(x_i)_{\substack{1\leq i\leq m\\i\neq i_0}}$. $\square$