Aufgabe 1)

f $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{E}$ Erzeuger von $\mathcal{A}'$ (Satz 12.3 a))

i) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ m.b.

ii) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \notin \mathcal{A} \Rightarrow f$ nicht m.b.

iii) $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset \in \mathcal{A}$

iv) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \notin \mathcal{A}$

v) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \in \mathcal{A}$

Bem.: Nach Beispiel 11.10 ist $\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ mit $A \subseteq X$

Aufgabe 2)

i) Wähle $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x > 0 \\ 1 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f| = 1$ ist m.b., da konstant.

Aber $f^{-1}(\{-1\}) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \notin \mathcal{A} \Rightarrow f$ nicht m.b.

ii) „$\Rightarrow$" f m.b. $\Rightarrow \{f \geq a\} \in \mathcal{A} \; \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\overset{12.6}{\Longrightarrow} \{f \leq a\} \in \mathcal{A} \; \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\{f \leq a\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{f \geq a\}}_{\in \mathcal{A}} = \{f = a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alternativ: $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}: \{c\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, da $\{c\}$ abg.

$\Rightarrow \{f = c\} = \{x \in X : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{A}$, da f m.b.

„$\Leftarrow$" Sei $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Betrachte $\{a \leq f < b\}$. Da f nur abzählbar viele Werte annimmt $\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $\{a \leq f < b\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f(x) = x_n\}}_{= \{f = x_n\} \in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow f$ m.b. mit Lemma 12.6

Alt.: Sei $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. $f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cap f(X)) = \dot{\bigcup}_{c \in f(X) \cap A} \underbrace{f^{-1}(\{c\})}_{= \{f = c\} \in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

iii) Wähle $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A$ oder A^c abzählbar$\}$, $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \mapsto x$

Dann gilt: $f^{-1}(\pm\infty) = \emptyset \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(\{c\}) = \{c\} \in \mathcal{A}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Aber: $f^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{\in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})}) = [0,1] \notin \mathcal{A}$, da weder $[0,1]$ noch $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ abzählbar ist.

$\Rightarrow f$ nicht m.b.

Aufgabe 3)

1. Teil: C abgeschlossen

Es gilt $C_n \in \mathcal{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow C_n$ abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N}$ nach Def. von C_n und $\mathcal{Z}$.

$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ abg. $\Rightarrow C$ abg.

2. Teil: $\lambda(C) = 0$ (d.h. ohne Lücke, bzw. hier: $] = 1)$

Sei A abg., zusammenhängendes Intervall mit $A = [a_j, b_j] \subseteq [0,1]$

mit $a_j, b_j \in [0,1]$ mit $b_j \geq a_j$

$\Rightarrow \lambda(\Psi(A)) = \left(\frac{2a_j - b_j}{3} - a_j\right) + \left(b_j - \frac{a_j + 2b_j}{3}\right) = \frac{-a_j + b_j}{3} + \frac{b_j - a_j}{3} = \frac{2}{3}(b_j - a_j) =$

$= \frac{2}{3}(\lambda(A))$

Mit Induktion folgt: $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \lambda(C_0)$ mit $C_0 = [0,1]$

$\Rightarrow \lambda(C) = \lim_{n \to \infty} (\lambda(C_n)) = 0$ (Stetigkeit von oben)

3. Teil: $C \neq \emptyset$

Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $\{0,1\} \subseteq C_n \Rightarrow \{0,1\} \subseteq C \Rightarrow C \neq \emptyset$