1.2. LR-Zerlegung

Bsp: $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\1&8&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix}x_1 & & +x_3 = 1\\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 = 1\\ x_1 & +8x_2 & = 1\end{matrix} \to \begin{matrix}x_1 & +x_3 = 1\\ 2x_2 & = -1\\ 8x_2 - x_3 & = 0\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix}x_1 & +x_3 = 1\\ 2x_2 & = -1\\ & -x_3 = 4\end{matrix}$

Betrachte das Gleichungssystem:
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2\\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N\end{matrix}$$

Annahme $a_{11} \neq 0$. Für $n = 2, \ldots, N$ multipliziere die erste Zeile mit $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ und subtrahiere das von der n-ten Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1\\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2N}^{(2)}x_N = b_2^{(2)}\\ \vdots \\ a_{N2}^{(2)}x_2 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{NN}^{(2)}x_N = b_N^{(2)}\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Matrixschreibweise: $A^{(2)}x = b^{(2)}$, aber wie entsteht $A^{(2)}$ aus $A^{(1)} := A$?

Sei $y = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_N\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^N$, sei $n \in \{1, \ldots, N\}$ mit $y_n \neq 0$. Setze $l_n = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ y_{n+1}/y_n\\ \vdots\\ y_N/y_n\end{pmatrix}$ ← $n+1$ Zeile

Betrachte $L_n := I - l_n e_n^* = \begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -y_{n+1}/y_n & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -y_N/y_n & & & 1\end{pmatrix}$ ← $n+1$ Zeile ($l_n \in \mathbb{K}^N$, e_n - n-ter Einheitsvektor)

↑ n-te Spalte

L_n wird Frobeniusmatrix / Eliminationsmatrix genannt.

$L_n y = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

Lemma L_n ist regulär mit $L_n^{-1} = I + l_n e_n^*$. Außerdem ist für $a \in \mathbb{K}^N$: 24.10.18

$L_n a = a - a_n l_n = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} - a_n l_{n_{n+1}}, \ldots, a_N - a_n l_{n_N})$ ($l_{n_m} \mathrel{\hat{=}} m$-ter Eintrag v. l_n)

Beweis: $(I - l_n e_n^*)(I + l_n e_n^*) = I - l_n e_n^* l_n e_n^* = I$, da $e_n^* l_n = 0$ □

Falls $a_{11} \neq 0$. Wähle $l_{1_m} = \begin{cases} 0 & m = 1\\ a_{m1}/a_{11} & 2 \leq m \leq N\end{cases}$ $\to L_1 = I - l_1 e_1^*$

$L_1 A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \end{array}\right) =: A^{(2)}$. Falls $a_{22}^{(2)} \neq 0$: Wähle $l_{2_m} = \begin{cases} 0 & m = 1,2\\ a_{m2}^{(2)}/a_{22}^{(2)} & 3 \leq m \leq N\end{cases}$

$\to L_2 = I - l_2 e_2^*$

$$\Rightarrow L_2 A^{(2)} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots \\ \hline 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & * & \end{array}\right) = A^{(3)}$$

Allgemein, falls $a_{nn}^{(n)} \neq 0$, definiere $l_{n_m} = \begin{cases} 0 & m \leq n \\ \frac{a_{mn}^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} & m > n \end{cases}$, $L_n = I - l_n e_n^*$

Dann nach $(N-1)$-Schritten: $L_{N-1} A^{(N-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots \\ 0 & & a_{33}^{(3)} \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix} = A^{(N)} = R$

Mit R obere Dreiecksmatrix und $L_{N-1} A^{(N-1)} = L_{N-1} L_{N-2} A^{(N-2)} = \ldots =$

$= L_{N-1} L_{N-2} \cdot \ldots \cdot L_1 A \Rightarrow A = \underbrace{(L_1^{-1} L_2^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{N-1}^{-1})}_{=L} R = LR$

Lemma: $L = I + l_1 e_1^* + l_2 e_2^* + \ldots + l_{N-1} e_{N-1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ l_{1_2} & 1 & 0 & \cdots \\ l_{1_3} & l_{2_3} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ ← untere Dreiecksmatrix, mit 1 auf der Hauptdiagonalen

Beweis: Induktion über N

$N=2$: vorheriges Lemma

$N \geq 3$: $L_1^{-1} \cdot \ldots \cdot L_{N-1}^{-1} = (I + l_1 e_1^* + \ldots + l_{N-2} e_{N-2}^*)(I + l_{N-1} e_{N-1}^*) =$

$= I + l_1 e_1^* + \ldots + l_{N-2} e_{N-2}^* + l_{N-1} e_{N-1}^* + \sum_{m=1}^{N-2} l_m \underbrace{e_m^* l_{N-1}}_{= l_{N-1_m} = 0, \text{ da } m \leq N-1} e_{N-1}^* =$

$= I + l_1 e_1^* + \ldots + l_{N-1} e_{N-1}^*$ □

Idee: Lsg. Gleichungssystem $Ax = b \rightarrow \underbrace{Lz = b}_{\text{nach } z \text{ lösen}}, \underbrace{Rx = z}_{\text{nach } x \text{ lösen}} \Rightarrow Ax = LRx = Lz = b$

Aufwand: Die Matrix-Matrix-Multiplikation $L_n A^{(n)} = A^{(n+1)}$ kostet $(N-n)^2$-Mult.. Dazu kommen $N-n$ Divisionen zur Berechnung von L_n. Damit ergibt sich ein Gesamtaufwand: $\sum_{n=1}^{N-1} ((N-n)^2 + (N-n)) = \sum_{n=1}^{N-1} (N-n)(N-n+1) =$

$= \sum_{k=1}^{N-1} k(k+1) = \frac{1}{3} N^3 - \frac{1}{3} N$

Bis jetzt Annahme: $a_{nn}^{(n)} \neq 0 \ \forall n = 1, \ldots, N$

Lemma: Ist A strikt diagonal dominant, so ist $a_{nn}^{(n)} \neq 0 \ \forall n = 1, \ldots, N$

Beweis: $|a_{11}^{(1)}| = |a_{11}| > \sum_{m=2}^{N} |a_{1m}| \geq 0$. Schreibe $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ b & B \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ 0 & C \end{pmatrix}$

Beh: C strikt diagonal dominant. ($\Rightarrow a_{22}^{(2)} = C_{11} \neq 0$ und damit durch Iteration das Lemma)

Beweis: Wir wissen: $A^{(2)} = (I - L_1 e_1^*) A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a_{11}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ b & B \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C = B - \frac{1}{a_{11}} b a^T$, $a_{nm}^{(2)} = a_{nm} - \frac{1}{a_{11}} a_{n1} a_{1m} \quad \forall n,m \geq 2$

Sei $2 \leq n \leq N$: $\sum_{\substack{m=2 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm} - \frac{1}{a_{11}} a_{n1} a_{1m}| \leq \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}| + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq n}}^{N} \frac{|a_{n1}||a_{1m}|}{|a_{11}|} =$

$= \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}|\right) - |a_{n1}| + \left(\left(\sum_{m=2}^{N} |a_{1m}|\right) - |a_{1n}|\right) \cdot \frac{|a_{n1}|}{|a_{11}|} <$

$< |a_{nn}| - |a_{n1}| + \frac{|a_{n1}|}{|a_{11}|}(|a_{11}| - |a_{1n}|) = |a_{nn}| - \frac{|a_{n1}||a_{1n}|}{|a_{11}|} \leq$

$\leq |a_{nn} - \frac{a_{n1} a_{1n}}{a_{11}}| = |a_{nn}^{(2)}| \Rightarrow C$ strikt diagonal dominant $\square$

Pivotsuche

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, reg. aber Gaußalgorithmus funktioniert nicht.

Bsp: $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ EW: $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}) \Rightarrow \overset{\text{bzgl. } \|\cdot\|_2}{\mathrm{cond}(A)} = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$

$\varepsilon \neq 0$: LR-Zerl. $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}}_{=:L_\varepsilon} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}}_{=:R_\varepsilon} \Rightarrow \mathrm{cond}(L_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + O(1) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$

$\mathrm{cond}(R_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + O(1) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$

(wobei $O(1)$ eine Größe beschreibt, welche beschränkt ist)

Bevor $A^{(n)}$ mit L_n multipliziert wird, wähle in der n-ten Spalte 29.10.18
von $A^{(n)}$ dasjenige Element aus, das relativ zur Betragssummennorm der jeweiligen Zeile das betragsgrößte ist, d.h. man wählt $p \geq n$ mit
$\frac{|a_{pn}^{(n)}|}{\sum_{m=n}^{N} |a_{pm}^{(n)}|} = \max_{n \leq q \leq N} \frac{|a_{qn}^{(n)}|}{\sum_{m=n}^{N} |a_{qm}^{(n)}|}$ und vertauschen die n-te und p-te Zeile.

Sei $P_n = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0_1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow n \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & \uparrow n & \quad & \uparrow p & \quad & \quad \end{array} \end{array}$ elementare Permutationsmatrix

Mult. einer Matrix A mit P_n von links entspricht einer Vertauschung der n-ten und p-ten Zeile von A, von rechts einer Vertauschung der n-ten und p-ten Spalte von A.