Nach dem Lemma gilt: $\left| \|x\|' - \|y\|' \right| \leq \|x-y\|' \leq C \cdot \|x-y\|_2$

D.h. $x \mapsto \|x\|'$ ist stetig bzgl. der eukl. Norm.

Daher nimmt die Funktion auf der kompakten Menge

$\{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\}$ ihr Minimum an. Sei $c := \min\limits_{\|x\|_2 = 1} \|x\|'$, dann ist $c > 0$.

Für jedes $x \in \mathbb{K}^N$ ist: $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|' \geq c \Rightarrow c\|x\|_2 \leq \|x\|'$

Insgesamt: $c\|x\|_2 \leq \|x\|' \leq C\|x\|_2$ □

$A = (a_{nm})_{n,m=1}^N \in \mathbb{K}^{N \times N}$

Bsp.: 1) Spaltensummennorm: $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq m \leq N} \sum\limits_{n=1}^N |a_{nm}|$

2) Zeilensummennorm: $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq n \leq N} \sum\limits_{m=1}^N |a_{nm}|$

3) Frobenius-Norm: $\|A\|_F = \left(\sum\limits_{n,m=1}^N |a_{nm}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (auch Hilbert-Schmidt-Norm)

Proposition: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^N$. Dann definiert

$\|A\| := \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ eine Norm, die sog. induzierte Matrixnorm

und für diese Norm gilt die Submultiplikativität: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

Bemerkung: $\|A\|_1$ ist die von $\|x\|_1$ induzierte Matrixnorm und 17.10.18

$\|A\|_\infty$ ist die von $\|x\|_\infty$ induzierte Matrixnorm, d.h.

$\|A\|_1 = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$, entspr. für $\|A\|_\infty$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{n=1}^N |(Ax)_n| = \sum_{n=1}^N \left| \sum_{m=1}^N a_{nm} x_m \right| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |a_{nm}| \, |x_m| = \sum_{m=1}^N \underbrace{\left(\sum_{n=1}^N |a_{nm}| \right)}_{\leq \|A\|_1} |x_m| \leq$$

$$\leq \|A\|_1 \|x\|_1 \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1$$

Umgekehrt, wähle m sd. $\sum\limits_{n=1}^N |a_{nm}| = \|A\|_1$ und $x = e_m \Rightarrow (Ax)_n = a_{nm}$

$\Rightarrow \|Ax\|_1 = \sum\limits_{n=1}^N |a_{nm}| = \|A\|_1$, $\|x\|_1 = 1$ □

Warnung: $\|A\|_F$ ist nicht die von $\|x\|_2$ induzierte Matrixnorm.

(denn $\|\mathbb{1}\|_F = \sqrt{N}$, aber für jede ind. Matrixnorm ist $\|\mathbb{1}\| = 1$)

Sei $\|A\|_2$ die von $\|x\|_2$ induzierte Matrixnorm.

Lemma: $\|A\|_2 \le \|A\|_F$ und $\|A\|_2 \le (\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty)^{\frac{1}{2}}$

Beweis: $\|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^N |(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^N |\sum_{m=1}^N a_{nm} x_m|^2 \le \sum_{n=1}^N \Big((\sum_{m=1}^N |a_{nm}|^2) \overbrace{(\sum_{m=1}^N |x_m|^2)}^{\|x\|_2^2} \Big) =$

$= \|A\|_F \|x\|_2$

Cauchy-Schwarz

Sei $y = Ax$

$\|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^N \overline{y_n} (Ax)_n = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{y_n} a_{nm} x_m \le \sum_{n,m=1}^N (|y_n| |a_{nm}|^{\frac{1}{2}}) (|a_{nm}|^{\frac{1}{2}} |x_m|) \le$

$\le (\sum_{n,m=1}^N |y_n|^2 |a_{nm}|)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n,m=1}^N |a_{nm}| |x_m|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{n=1}^N \underbrace{(\sum_{m=1}^N |a_{nm}|)}_{\le \|A\|_\infty} |y_n|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{m=1}^N \underbrace{(\sum_{n=1}^N |a_{nm}|)}_{\|A\|_1} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} \le$

$\le \|A\|_\infty^{\frac{1}{2}} \|y\|_2 \; \|A\|_1^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \quad \Rightarrow \|Ax\|_2 \le (\|A\|_\infty \cdot \|A\|_1)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2$ $\square$

Erinnerung: Eine Matrix $H \in \mathbb{K}^{N \times N}$ heißt hermitesch falls $h_{nm} = \overline{h_{mn}}$ $\forall m,n$.

Ist H hermitesch, so besitzt $\mathbb{K}^N$ eine Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_N)$

(d.h. $u_n^* u_m = \delta_{nm}$) mit $H u_n = \lambda_n u_n$ $\forall n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ Eigenwerte von H.

Ist H positiv semidefinit (d.h. $x^* H x \ge 0$ $\forall x \in \mathbb{K}^N$) so gilt $\lambda_n \ge 0$ $\forall n$

Proposition: Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ und seien $\lambda_n(A^*A)$ die EW der herm., positiv semidef. Matrix A^*A. Dann ist $\|A\|_2 = (\max_{1 \le n \le N} \lambda_n(A^*A))^{\frac{1}{2}}$

Insbesondere für A hermitesch ist $\|A\|_2 = \max_{1 \le n \le N} |\lambda_n(A)|$

Bemerkung: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{n=1}^N \lambda_n(A^*A)}$

Beweis (der Prop.): Sei $(u_n)_{n=1}^N$ eine ONB aus EV von A^*A.

Wir schreiben $x = \sum_{n=1}^N c_n u_n$, $c_n \in \mathbb{K} \Rightarrow \|x\|_2^2 = x^* x = \sum_{n,m=1}^N \overline{c_n} u_n^* c_n u_n =$

$= \sum_{n=1}^N |c_n|^2$

$A^*Ax = \sum_{n=1}^N c_n A^*A u_n = \sum_{n=1}^N c_n \lambda_n u_n$ mit $\lambda_n := \lambda_n(A^*A)$

$\|Ax\|_2^2 = x^* A^* A x = \sum_{n,m=1}^N \overline{c_n} u_n^* c_m \lambda_m u_m = \sum_{n=1}^N \lambda_n |c_n|^2$

$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^N \lambda_n |c_n|^2 \le (\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n) \sum_{n=1}^N |c_n|^2 = (\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n) \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \|A\|_2 \le (\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n)^{\frac{1}{2}}$

Umgekehrt wähle n s.d. $\lambda_n = \max_{n'=1,\dots,N} \lambda_{n'}$ und betrachte $x = u_n$.

Dann ist $c_{n'} = \begin{cases} 1 & \text{für } n'=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und daher ist obige Ungl.

saturiert, d.h. $\|Ax\|_2^2 = (\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n)\, \|x\|_2^2$ $\square$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = \|A\|_\infty = 5$, $\|A\|_F = \sqrt{23}$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = 2$, $\|A\|_\infty = 1$, $\|A\|_F = \sqrt{2}$

$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{2}$

Konditionszahl

Definition: Die Konditionszahl einer regulären Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ bzgl. einer Matrixnorm $\|\cdot\|$ ist: $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$

Bemerkung: $\operatorname{cond}(\alpha A) = \operatorname{cond}(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$

$\operatorname{cond}(A) \geq 1$, falls $\|\cdot\|$ von Vektornorm induziert.

Lemma: Bzgl. einer von Vektornorm $\|\cdot\|$ ind. Matrixnorm gilt für jede reguläre Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$: $\operatorname{cond}(A) = (\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|)/(\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|)$

Beweis: Wegen Homogenität ist $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$, außerdem

$$\|A^{-1}\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} \underset{x = A^{-1}y}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Ax\|} = \left(\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|\right)^{-1} \quad \square$$

Korollar: Bzgl. der von der eukl. V-Norm ind. M-Norm ist:

$$\operatorname{cond}(A) = \sqrt{\frac{\max_{n=1,\dots,N} \lambda_n(A^*A)}{\min_{n=1,\dots,N} \lambda_n(A^*A)}}$$

Insbesondere für A hermitesch gilt:

$$\operatorname{cond}(A) = (\max |\lambda_n(A)|)/(\min |\lambda_n(A)|)$$

Bsp. vom letzten Mal: $A \rightsquigarrow \lambda_4 \approx 30.29,\ \lambda_1 \approx 0.01$

$\Rightarrow \operatorname{cond}(A) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \approx 2984$

22.10.18

Satz: Mit $\|\cdot\|$ werde sowohl die V-Norm als auch die ind. M-Norm bezeichnet. Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ regulär und seien $b, x, \Delta b, \Delta x \in \mathbb{K}^N$ mit $Ax = b$ und $(Ax + A\Delta x) = b + \Delta b$. Dann gilt:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\| \quad \text{und} \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A)\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Beweis: $A\Delta x = \Delta b$, $\Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$

Außerdem ist $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\| \Rightarrow \|x\|^{-1} \leq \|A\|\,\|b\|^{-1}$

Zusammen multipliziert folgt die Beh. $\square$

Störungsresultate für Matrizen

Lemma: Sei $\|\cdot\|$ eine ind. M-Norm. Sei $B \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit $\|B\| < 1$. Dann ist $I + B$ regulär mit $\|(I+B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}$ mit I Einheitsm. in $\mathbb{K}^{N\times N}$

Beweis: Für $x \in \mathbb{K}^N$ ist $\|(I+B)x\| \geq \|x\| - \|Bx\| \geq (1-\|B\|)\|x\|$

$\Rightarrow I+B$ ist regulär. Setzt man $x = (I+B)^{-1}y$ erhält man:

$\|y\| \geq (1-\|B\|)\,\|(I+B)^{-1}y\|$, d.h. $\|(I+B)^{-1}y\| \leq \frac{1}{1-\|B\|}\|y\|$ $\square$

Korollar: Sei $\|\cdot\|$ ind. M-Norm, $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ reg., $\Delta A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit $\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, so ist $A + \Delta A$ reg. mit $\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|\Delta A\|\,\|A^{-1}\|}\|A^{-1}\|$ und

$\|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2\,\|\Delta A\|$ für $\|\Delta A\| \leq \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1}$

Beweis: Wir schreiben $A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$. Wegen $\|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1$ und des Lemmas ist $I + A^{-1}\Delta A$ und damit auch $A + \Delta A$ regulär mit

$(A+\Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} \Rightarrow \|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}\|\,\|A^{-1}\| \leq$

$\leq \frac{1}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\|A^{-1}\| \leq (1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|)^{-1}\|A^{-1}\|$

Es gilt: $(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1} = -(A+\Delta A)^{-1}(\Delta A)A^{-1}$

$\Rightarrow \|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\|\,\|\Delta A\|\,\|A^{-1}\| \leq (1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|)^{-1}\|A^{-1}\|^2\,\|\Delta A\| \leq$

$\leq 2\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|$

für $\|\Delta A\| \leq \frac{1}{2}(\|A^{-1}\|)^{-1}$