4. Lineare Optimierungsprobleme (LP's)

Wir betrachten: $\min\limits_{\text{s.t. } x\in P} c^Tx$ bzw. $\max\limits_{\text{s.t. } x\in P} c^Tx$ mit $c\in\mathbb{R}^n$, $P\subseteq\mathbb{R}^n$ Polyeder

Natürliche Form: $P=P(A,b)=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\leq b\}$, wobei $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$

Standardform: $P=P^=(A,b)=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=b,\ x\geq 0\}$

Wir wissen: beide Formen sind äquivalent.

4.1 schwache Dualität

Betrachte: LP $\min\{c^Tx : Ax\leq b\}$. Angenommen x^* ist Lösung (d.h. $Ax^*\leq b$, $c^Tx^*\leq c^Tx$ $\forall x\in P(A,b)$)

Können wir etwas über diesen Wert c^Tx^* sagen?

Konstruiere ein 2. LP, diesmal ein Maximierungsproblem, dessen Wert eine untere Schranke für c^Tx, $x\in P(A,b)$ ist. Insbesondere erhalten wir eine untere Schranke von jedem zulässigen Punkt in 2. LP.

$x\in P(A,b) \Leftrightarrow Ax\leq b \Leftrightarrow -Ax\geq -b \Leftrightarrow \forall y\in\mathbb{R}^m, y\geq 0: -y^TAx\geq -y^Tb$

Angenommen es gibt $y\geq 0$ mit $y^TA=-c^T$. Dann gilt: $c^Tx\geq -y^Tb$

$\Rightarrow$ beste untere Schranke für das y, welches $-y^Tb$ maximiert.

Satz 4.1 (schwache Dualität)

Seien $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$, $c\in\mathbb{R}^n$. Betrachte: $\underbrace{\min\limits_{\text{s.t. } Ax\leq b} c^Tx}_{(P)}$, $\underbrace{\max\limits_{\text{s.t. } A^Ty=-c,\ y\geq 0} -b^Ty}_{(D)}$

Sei x zulässig für (P) ($\hat{=}\ Ax\leq b$), y zulässig für (D) ($\hat{=}\ A^Ty=-c$, $y\geq 0$)

Dann: $c^Tx\geq -b^Ty$

Beweis: Da y zulässig für (D): $y\geq 0$, $A^Ty=-c$. Damit: $c^Tx+b^Ty=-y^TAx+y^Tb=$

$=\underbrace{y^T}_{\geq 0}\underbrace{(-Ax+b)}_{\geq 0,\text{ da } x\in P(A,b)}\geq 0 \Rightarrow c^Tx\geq -b^Ty$ □

Anm.: Wir zeigten sogar: $c^Tx+b^Ty=y^T(b-Ax)\geq 0$

(P) heißt das primale LP, (D) das duale dazu.

Kor. 4.2 Seien x^* zulässig für (P), y^* zulässig für (D) mit $c^Tx^* = -b^Ty^*$.

Dann x^* ist Lösung für (P), y^* Lösung für (D).

Beweis: Mit Satz 4.1: x zuläsig für $(P) \Rightarrow c^Tx \geq -b^Ty$ $\forall y$ zuläsig für (D)

$\Rightarrow c^Tx \geq -b^Ty^* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n.V.}}}{=} c^Tx^*$. Damit x^* optimal / Lösung für (P)

Analog: y zuläsig für $(D) \Rightarrow -b^Ty \leq c^Tx$ $\forall x$ zuläsig für (P)

$\Rightarrow -b^Ty \leq c^Tx^* = -b^Ty^*$. Damit y^* optimal / Lösung für (D) □

Symmetrie zwischen primalen und dualen LP's:

Satz 4.3 Das duale LP zu (P') $\min c^Tx$ s.t. $Ax \geq b$, $x \geq 0$ ist (D') $\max b^Ty$ s.t. $A^Ty \leq c$, $y \geq 0$

Beweis: (P') ist das gleiche wie: (P'') $\min c^Tx$ s.t. $\begin{pmatrix} -A \\ -E_n \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei E_n die

$n \times n$ Einheitsmatrix. Damit ist das duale Problem dazu:

(D'') $\max b^Ty + 0^Ty'$ s.t. $(-A^T \; E_n) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = -c$, $y, y' \geq 0$ | Aber $-A^Ty - y' = -c \Leftrightarrow A^Ty + y' = c$ $(y' \geq 0)$ ist das gleiche wie: $A^Ty \leq c$ □ $\quad y \in \mathbb{R}^m, y' \in \mathbb{R}^n$

Ziel: einfache Optimalitätsbedingungen für (P)

Beob: Falls $x^* \in P(A,b)$ optimal, dann ist die Zielfkt. in einer Umgebung in $P(A,b)$ nicht kleiner

Satz 4.4: Betrachte $\min\{c^Tx \mid Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. x^* ist optimal für dieses LP genau dann wenn $Ax \leq b$ und $c^Ty \geq 0$ $\forall y \in Z(x^*)$ mit $Z(x^*) = \{z \in \mathbb{R}^n : A_{eq(x^*)} \cdot z \leq 0\}$

Bem.: $Z(x^*)$ ist die Menge der zulässigen Richtungen, d.h. für $z \in Z(x^*)$ gibt es $\lambda > 0$ mit $x^* + \lambda z \in P$.

Beweis: Sei $I = eq(x^*)$, $\bar{I} = Z \setminus I$, wobei Z Zeilenindexvektor von A.

„⇒": Mit der Notation: $A_I \cdot x^* = b_I$, $A_{\bar{I}} \cdot x^* < b_{\bar{I}}$. Sei $y \in Z(x^*)$,

d.h. $A_I \cdot y \leq 0$. Dann für $\lambda > 0$ gilt $A_I \cdot (x^* + \lambda y) \leq b_I$

Für $\lambda > 0$ klein genug ist auch $A_{\bar{I}.}(x^* + \lambda y) \le b_{\bar{I}}$. Für $\lambda > 0$ klein genug ist $x + \lambda y \in P$. Da x^* optimal: $c^T(x^* + \lambda y) \ge c^T x^* \Rightarrow \lambda c^T y \ge 0$

Da $\lambda > 0 \Rightarrow c^T y \ge 0$ ✓

„$\Leftarrow$": Durch Widerspruch: Falls x^* nicht optimal gibt es $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \le b$, $c^T x < c^T x^*$. Sei $y = x - x^*$. Dann: $c^T y = c^T x - c^T x^* < 0$.

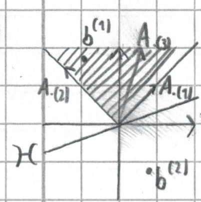
Andererseits: $A_{I.} x \le b_I = A_{I.} x^* \Rightarrow A_{I.} y \le 0$. Damit $y \in Z(x^*)$ ↯ $\square$

4.2. Lemma von Farkas

29.11.18

Lemma 4.5: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat genau eines der folgenden Systeme eine Lösung: $\begin{matrix} Ax = b \\ x \ge 0 \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} y^T A \ge 0 \\ y^T b < 0 \end{matrix}$

Anschaulich: 1) $\{Ax : x \ge 0\}$ ist ein Kegel, der alle nicht-negativen Linearkombinationen der Spalten von A enthält. Falls $Ax = b$, $x \ge 0$ eine Lösung hat, muss sie in dem Kegel liegen.



2) Falls $y^T A \ge 0$, $y^T b < 0$ eine Lösung hat, dann trennt die Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x = 0\}$ die Mengen $\{b\}$ und die Spalten von A

Beob: Es können nicht beide Systeme eine Lösung haben. Aus $x \ge 0$, $y^T A \ge 0$ folgt: $0 \le (y^T A) x = y^T A x = y^T b < 0$ ↯

Erinnerung: Satz von Caratheodory (Satz 2.9) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $conv(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ ist Konvexkombination von $n+1$ Elementen in $M\}$

Im Beweis haben wir gezeigt: falls $y \in conv(\{x_1, \dots, x_m\})$ und $\{x_i - x_m\}_{1 \le i \le m-1}$ linear unabh., dann $\exists i_0 \in \{1, \dots, m-1\}$ mit $y \in conv(\{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_{i_0}\})$

Lemma 4.6: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $K = \{Ax \mid x \ge 0\}$ abgeschlossen.

Beweis: Sei Z der Spaltenindexvektor für A und $K_I = \{A_{.I} x \mid x \ge 0\} = \{\sum_{i \in I} A_{.(i)} x_i \mid x \ge 0\}$ für $I \subseteq Z$. Ferner sei $U = \{I \subseteq Z \mid$ die Spalten von $A_{.I}$ sind linear unabhängig$\}$.

Beh.: 1) $K = \bigcup_{I \in U} K_I$