Aufgabe 1)

Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \infty$. Sei nun $M \subseteq J$ abzählbar

$\infty > \mu(B) \geq \mu(\dot{\bigcup}_{j \in J_n(B)} (B \cap A_j)) = \sum_{j \in J_n(B)} \mu(B \cap A_j) > \sum_{j \in J_n(B)} \frac{1}{n} = |J_n(B)| \cdot \frac{1}{n} \geq 0$

$\Rightarrow J_n(B)$ endlich

$\Rightarrow J(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n(B)$ abzählbar

n.V. gilt, dass μ σ-endl. ist $\Rightarrow \exists (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = X$ und $\mu(B_k) < \infty$

$\forall k \in \mathbb{N}$. Betrachte, dann $(B_k')_{k \in \mathbb{N}}$ mit $B_k' = \bigcup_{j=1}^{k} B_k$. $\Rightarrow B_k' \nearrow X$

Wenn man nun zeigen könnte, dass $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J(B_k')$ wäre man fertig, da eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.

„$\supseteq$" nach Def. von $J(B)$

„$\subseteq$" Sei $j \in J$. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k' \cap A_j) \geq \mu(A_j) > 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(B_k' \cap A_j) > 0$

$\Rightarrow j \in J(B_k')$ nach Def. $\Rightarrow j \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J(B_k')$ $\square$

Bem: $\mu(A_j) = \mu(X \cap A_j) = \mu((\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k') \cap A_j) = \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (B_k' \cap A_j)) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k' \cap A_j)$

Aufgabe 3)

i) $\{x\}$ ist abgeschlossen nach Analysis 2 $\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{B}^d$

Annahme: $\lambda^d(\{x\}) =: \varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N\varepsilon > 1$.

Sei $A := \{(\frac{i}{N+1}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^d \mid i \in \{0, ..., N\}\} \subset [0,1[^d$

$\Rightarrow \lambda^d(A) = \lambda^d(\dot{\bigcup}_{i=0}^{N} \{(\frac{i}{N+1}, 0, ..., 0)\}) = \sum_{i=0}^{N} \lambda^d(\{(\frac{i}{N+1}, 0, ..., 0)\}) \overset{\text{translationsinvariant}}{=} \sum_{i=0}^{N} \lambda^d(\{x\}) = N \cdot \varepsilon > 1$

Aber wegen $A \subset [0,1[^d$: $\lambda^d(A) \leq \lambda^d([0,1[^d) = 1$ ↯

$\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) = 0$

[Alternativ: $\{x\} \subseteq H$ mit H Hyperebene $\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) \leq \lambda^d(H) = 0$ (Aufgabe 2)]

ii) M abzählbar $\Rightarrow M = \{x_1, x_2, ...\}$ wobei $x_i \in \mathbb{R}^d$ mit $i \in \mathbb{N} \Rightarrow M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$

Da $\{x_i\} \in \mathcal{B}^d$ $\forall i \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B}^d$ $\cup_\infty$-stabil ist $\Rightarrow M \in \mathcal{B}^d$

$\lambda^d(M) = \lambda^d(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\lambda^d(\{x_n\})}_{=0 \text{ (mit i))}} = 0$

iii) $M \in \mathcal{B}^1$, da $[0,1[, \{1\}, \mathbb{Q} \in \mathcal{B}^1$ und $\mathcal{B}^d$ ist $\cup, \setminus$-stabil.

$\lambda_\varepsilon([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) - \underbrace{\lambda(\mathbb{Q})}_{=0} = \lambda([0,1[) + \underbrace{\lambda(\{1\})}_{=0} = 1$

iv) $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\ y\in[0,1]\}=(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times[0,1]=\dot{\bigcup}_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}\{x\}\times[0,1]\in\mathcal{B}^2$

$\lambda^2(M)=\lambda^2(\dot{\bigcup}_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}\{x\}\times[0,1])=\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}\lambda^2(\{x\}\times[0,1])=0$, da

$\forall x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$: $\{x\}\times[0,1]=[x,x]\times[0,1]\Rightarrow\lambda^2([x,x]\times[0,1])\underset{\wedge}{=}(x-x)\cdot(1-0)=0$

einzelne Punkte machen keinen Unterschied

Aufgabe 2)

n.V. ist λ^d translationsinvariant $\Rightarrow\lambda^d(V+w)=\lambda^d(V)$ bzw. $\lambda^d(H+w)=\lambda^d(H)$

$\xrightarrow{\text{Bewegung}}$ o.B.d.A. sei H eine n-1 dim. Hyperebene, die orthogonal zu einer Koordinaten-Achse ist. Hier zu i-ten Achse mit $i\in\{1,\dots,d\}$.

$\Rightarrow H=\{x\in\mathbb{R}^d \mid x_i=\alpha\}$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$ bel. (Schnittpunkt mit der i-ten Achse)

Seien nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^d$ mit $x_{n_m}=\begin{cases}\alpha & \text{für } m=i\\ -n & \text{sonst}\end{cases}$, $y_{n_m}=\begin{cases}\alpha+2^{-n}(2n)^{1-d}\varepsilon & \text{für } m=i\\ n & \text{sonst}\end{cases}$

mit $\varepsilon>0$. $Q_n:=\bigtimes_{j=1}^{d}[x_{n_j},y_{n_j}[$. $\lambda^d(Q_n)=\prod_{j=1}^{d}(y_{n_j}-x_{n_j})=(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{d}(y_{n_j}-x_{n_j}))\cdot(y_{n_i}-x_{n_i})=$

$=(\prod_{j=1}^{d-1}(n-(-n)))\cdot(\alpha+2^{-n}(2n)^{1-d}\varepsilon-\alpha)=(2n)^{d-1}2^{-n}(2n)^{1-d}\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2^n}$

Nun gilt $H\subseteq Q:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Q_n\ \forall\varepsilon>0\Rightarrow\lambda^d(H)\leq\lambda^d(Q)=\lambda^d(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Q_n)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda^d(Q_n)=$
$=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\cdot2^{-n}=\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon\to0}0$ $\square$

Für diese Schritte muss gelten: $H,Q,Q_n\in\mathcal{B}^d$

Q_n ist nach Def. ein Element in $\mathcal{B}^d$, Q nach Def. somit auch.

$H\in\mathcal{B}^d$, da $\mathbb{R}^d\setminus H$ zwei offene Halbräume gibt. Somit ist H abg.