16.10.18

Optimierung

Notation: $\cdot\, x \in X$ heißt zulässiger Punkt, $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt zulässige Menge

$\cdot\, x \in X$ mit $f(x)$ minimal über X heißt Lösung des OP

$\cdot\, x \in X$ Lösung, dann heißt $f(x)$ der Wert des OP

Bemerkung: Das Maximierungsproblem $\max\{f(x) : x \in X\}$ ist äquivalent zu $\min\{f(x) : x \in X\}$ mit $-f$ statt f.

Bsp. 1.1 Um ein Gesamtvolumen $V\,m^3$ zu verschicken, muss entschieden werden, welche Kistengröße die kleinsten Kosten verursacht.

Nebenbedingungen: 1) jede Kiste $\leq 1m^3$

2) Kosten für Transport: 60€/Kiste

3) Kosten für Herstellung der Kiste: 2€/m² Boden/Seiten

1€/m² Deckel

Formulierung als OP:

Sei $x_1 > 0$ die unbekannte Länge, $x_2 > 0$ die Tiefe, $x_3 > 0$ die Höhe der Kiste.

1) ist äquivalent zu $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \leq 1$

2) die Anzahl der Kisten: $\lceil V / x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \rceil$, also sind die Transportkosten $60 \cdot \lceil V/(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \rceil$.

3) die Kosten für die Herstellung: $2 \cdot \underbrace{(x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3)}_{\hat{=}\text{ Boden/Seiten}} + \underbrace{x_1x_2}_{\hat{=}\text{ Deckel}}$

Wir erhalten $\min \lceil V/(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \rceil \cdot (60 + 2(x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3) + x_1x_2)$ — $f(x)$

s.t. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \leq 1$

$x_1, x_2, x_3 > 0$ — $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 \leq 1;\ x_1, x_2, x_3 > 0\}$

Bemerkung: Wir wählen die Variablennamen passend zum Problem.

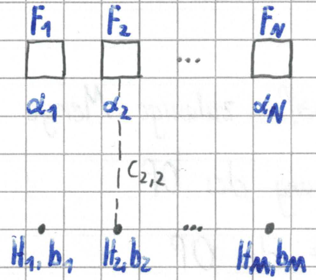
z.B. L statt x_1, T statt x_2, H statt x_3. Das OP in Bsp 1.1 ist dann:

$\min \lceil V/(L \cdot T \cdot H) \rceil \cdot (60 + 2(LT + 2TH + 2LH) + LT)$

s.t. $LTH \leq 1$

$L, T, H > 0$

Bsp. 1.2



N Fabriken $F_1, \ldots, F_N$ mit Produktion von α_i Tonnen

M Händler, Bedarf von H_j ist b_j Tonnen

Die Kosten für den Transport von $F_i \to H_j$ seien $c_{i,j}$ pro Tonne, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$

Problem: Wieviel Tonnen sollen von $F_i \to H_j$ $\forall 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$ transportiert werden, so dass:

1) Gesamtproduktion von F_i ist $\leq \alpha_i$

2) Bedarf von H_j ist gedeckt

3) Gesamtkosten minimal

Formulierung als OP:

Sei $x_{i,j} \geq 0$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$ die (unbekannte) Anzahl von Tonnen von $F_i \to H_j$. Dann:

1) $\sum_{j=1}^{M} x_{i,j} \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq N$

2) $\sum_{i=1}^{N} x_{i,j} \geq b_j$, $1 \leq j \leq M$

3) Gesamtkosten sind: $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_{i,j} \cdot c_{i,j}$

Wir erhalten:
$$\min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_{i,j} \cdot c_{i,j}$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{M} x_{i,j} \leq \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq N$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,j} \geq b_j, \quad 1 \leq j \leq M$$
$$x_{i,j} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq M$$

Bemerkung: Dies ist ein OP im $\mathbb{R}^{N \cdot M}$, wir haben $N \cdot M$ Variablen $x_{i,j}$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$. Die Indizierung mit 2 Indizes ist natürlicher, als $x_1, \ldots, x_{N \cdot M}$ zu benutzen.

Definition: Sei $\min\{f(x) \mid x \in X\}$ OP gegeben. Ein $x \in X$ heißt

1) Lokales Minimum, falls $\exists \varepsilon > 0: f(x) \leq f(x') \ \forall x' \in B_\varepsilon(x) \cap X$

   wobei $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$ und $\|z\| = \sqrt{z^T z} = \left(\sum_{n=1}^{N} |z_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

2) striktes (oder isoliertes) Minimum, falls $\exists \varepsilon > 0$ mit $f(x) < f(x')$

   $\forall x' \in (B_\varepsilon(x) \cap X) \setminus \{x\}$

3) globales Minimum, falls $f(x) \leq f(x') \quad \forall x' \in X$

4) striktes globales Minimum, falls $f(x) < f(x') \ \forall x' \in X \setminus \{x\}$

Satz 1.4 Sei OP gegeben, wobei f stetig ist. Ferner sei $x_0 \in X$ mit

$N_f(x_0) = \{x \in X : f(x) \leq f(x_0)\}$ „Niveaumenge zum Niveau x_0"

kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Dann hat das OP eine Lösung.

Beweis: Aus Analysis, mit Satz von Weierstrass: g stetig, Y kompakt

$\Rightarrow \exists y \in Y$ mit $g(y) \leq g(y') \ \forall y' \in Y$. Nun Satz für f und $N_f(x_0)$

verwenden. □

Frage: Wie findet man / charakterisiert man solche Minima?

$\rightsquigarrow$ Darum geht es in dieser Vorlesung!

Arten von OP

Unengeschränktes OP: $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$

Eingeschränktes OP: Üblicherweise wird die zulässige Menge über Nebenbedingungen (Gleichungen und Ungleichungen) definiert.

Sei $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dann $X = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, \ g(x) \leq 0\}$

(Un-)Gleichungen sind komponentenweise zu verstehen.

Für das OP schreiben wir dann
$$\begin{aligned} \min \ & f(x) \\ \text{s.t. } & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$
„Nicht-lineares OP"

18.10.18

Lineares OP: f, h, g linear.
$$\begin{aligned} \min \ & c^T x, && c \in \mathbb{R}^n \\ \text{s.t. } & Bx - d = 0, && B \in \mathbb{R}^{p \times n}, \ d \in \mathbb{R}^p \\ & Ax - b \leq 0, && A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ b \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$