15.11.18

Transformationen von Polyedern

Sei $\min\{f(x) : x \in P(A,b)\}$ gegeben, äquivalent: $\min_{\text{s.t. } x \in P(A,b)} f(x)$ bzw $\min_{\text{s.t. } Ax \leq b} f(x)$

Kann man dieses OP so umformulieren werden, dass die zulässige Menge ein Polyeder $P^=(A',b')$ ist? $\rightsquigarrow$ Transformationen

Typ 1: Betrachte $y^T x \leq \beta$ in $Ax \leq b$. Ersetze sie durch $y^T x + z = \beta$ mit $z \geq 0$, d.h. wir führen eine neue Variable z ein („Schlupfvariable")

Typ 2: Für jede Variable x führe zwei neue Var. x^+, x^- ein, sodass $x = x^+ - x^-$ und füge Nebenbedingungen $x^+, x^- \geq 0$

Insgesamt: $P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

$$\Big\downarrow 1)$$

$$\{(x,z) \in \mathbb{R}^{n+m} : Ax + z = b,\ z \geq 0\}$$

$$\Big\downarrow 2)$$

$$\{(x^+, x^-, z) \in \mathbb{R}^{n+n+m} \mid A(x^+ - x^-) + z = b,\ x^+, x^-, z \geq 0\}$$

$$\| $$

$$P^=((A\ \ -A\ \ E_n), b)$$

Beobachtung: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann haben die OP

$\min_{\text{s.t. } Ax \leq b} f(x)$ und $\min f(x^+ - x^-)$ s.t. $(A)(x^+ - x^-) + z = b$, $x^+, x^-, z \geq 0$ den gleichen Wert.

Wir bezeichnen zwei Polyeder, die mit 1), 2) ineinander überführt werden können als equivalent.

Def. 3.2: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Kegel, falls $\forall x \in K$ und $\alpha \geq 0$ gilt dass $\alpha x \in K$. $\Rightarrow 0 \in K$

K heißt polyedrisch, falls K Polyeder.

Lemma 3.3: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$. Dann gilt: K polyedrischer Kegel $\Leftrightarrow K = P(A, 0)$ für ein $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Beweis: „⇐" Angenommen $K = P(A, 0)$. Dann $A \cdot x \leq 0 \ \forall x \in K$, also auch $\forall \alpha \geq 0 \quad \alpha(Ax) \leq 0 \Rightarrow A(\alpha x) \geq 0$. Damit $\alpha x \in K \Rightarrow K$ Kegel und nach Annahme schon Polyeder.

„⇒" Da K Polyeder, gibt es $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit $K = P(A, b)$. Wir zeigen $b = 0$. Da $0 \in K$ muss $b \geq 0$, da $A \cdot 0 \leq b$ sein muss. Wir zeigen $b = 0$ durch Widerspruch. Sei $y \in K$ und eine Zeile A_i von A mit $A_i y > 0$, $A_i y \leq b_i$, $b_i > 0$. Da K Kegel $\alpha y \in K \ \forall \alpha \geq 0$. Insbesondere $\alpha(A_i y) \leq b_i$. Andererseits, da $A_i y > 0$, kann $\alpha \geq 0$ so gewählt werden, dass $\alpha A_i y > b_i$ ↯ $\Rightarrow b = 0$ □

Def. 3.4: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$. Die Ungleichung: $y^T x \leq b$ ist gültig für M falls $M \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq b\}$

Def. 3.5: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. $\mathcal{F} \subseteq M$ heißt Seitenfläche von M, falls
1) $\exists$ gültige Ungleichung $y^T x \leq \beta$ und 2) $\mathcal{F} = M \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \beta\}$ gelten.
Wir sagen $\mathcal{F}$ wird induziert durch $y^T x \leq \beta$. $\mathcal{F}$ heißt echt, falls $\mathcal{F} \neq M$. $\mathcal{F}$ heißt trivial, falls $\mathcal{F} \in \{M, \emptyset\}$

Lemma 3.6 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nicht-leer. Dann
1) $\emptyset, M$ sind Seitenflächen von M
2) $\mathcal{F}$ nicht triviale Seitenfläche $\Rightarrow y \neq 0$

Beweis: $M = M \cap \{x \in \mathbb{R}^n : 0^T x = 0\}$ und $0^T x \leq 0 \ \forall x \in M$
$\emptyset = M \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0^T x = \beta\}$, $b > 0$ und $0^T x \leq \beta \ \forall x \in M$
Falls $y = 0$, dann $y^T x \leq \beta$ nur gültig $\beta \geq 0$. Fall $\beta = 0$, dann $\mathcal{F} = M$. Falls $\beta > 0$, dann $\mathcal{F} = \emptyset$. □ Kontraposition

Satz 3.7 Betrachte für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ das OP $\max\limits_{s.t.\ Ax \leq b} c^T x$ bzw. $\max\limits_{s.t.\ x \in P(A,b)} c^T x$. Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge. Falls $\mathcal{L} \neq \emptyset$, dann sei $z^* = \max\{c^T x \mid x \in P(A, b)\}$. Dann ist $\mathcal{L}$ eine Seitenfläche von $P(A, b)$ und $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, c^T x = z^*\}$

Beweis: Nach Definition von z^*: $c^T x \leq z^*$ $\forall x \in P(A,b)$. Ferner:

$\mathcal{L} = \{x \in P(A,b) : c^T x = z^*\}$ per Def.. Damit: $\mathcal{L} = P(A,b) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = z^*\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ Seitenfläche □

Frage: geg. $Ax \leq b$: wie findet man alle Seitenflächen, wie beschreibt man die Ausdehnung im Raum?

Def. 3.8: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Die affine Hülle ist $\operatorname{aff}(M) = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in M, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$ — $\operatorname{conv}(M) \subseteq \operatorname{aff}(M)$

Bsp.: $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$ ist $\operatorname{aff}(\{a,b\})$ die Verbindungsgerade.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ nicht kolinear ist $\operatorname{aff}(\{a,b,c\})$ die Ebene, die alle 3 Punkte enthällt.

Bem.: 1) $\operatorname{aff}(M) = \operatorname{aff}(\operatorname{aff}(M))$

2) $\operatorname{conv}(M) \subseteq \operatorname{aff}(M)$ (vllt. Übung)

3) $\operatorname{aff}(M)$ ist abgeschlossen

Bem.: Falls $\operatorname{aff}(M) \neq \emptyset$, dann gibt es ein $a \in \operatorname{aff}(M)$ eindeutigen Untervektorraum U des $\mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{aff}(M) = a + U$ (Bew. in Notizen auf der Webs.)

Def. 3.9 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Die Dimension von M: $\dim(M) = \dim(\operatorname{aff}(M)) = \dim(U)$

$\Rightarrow \dim(M) = \max\{d \mid \exists a, x_1, \dots, x_d \in M : (x_i - a)_{1 \leq i \leq d} \text{ sind lin. unabhängig}\}$

3.1 Seitenflächen

20.11.18

Wie sieht man $P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ die Seitenflächen an?

Notation: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Z = Zeilenindexvektor von $A = (z_1, z_2, \dots, z_m)$

S = Spaltenindexvektor von $A = (s_1, \dots, s_n)$

Wir schreiben $I \subseteq Z$ und meinen einen Teilvektor von Z.

Für $I \subseteq Z$, $J \subseteq S$ ist A_{IJ} die Matrix, die alle Zeilen mit Index in I und Spalten mit Index J enthält.

Für $I = Z$ schreiben wir $A_{\cdot J}$, für $S = J$ schreiben wir $A_{I \cdot}$; $A_{\cdot\cdot} = A$

Für Vektoren $b \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir einfach b_I statt $b_{I \cdot}$.