Satz: (Courant-Fischer) Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ hermitesch mit EW $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_N$ mit Vielfachheit gezählt. Sei $1 \leq n \leq N$. Dann gilt für jeden Untervektorraum $\mathcal{L} \subset \mathbb{K}^N$ mit $\dim(\mathcal{L}) = n$, dass: $\min\limits_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_n$ und $\max\limits_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_{N-n+1}$

Gleichheit gilt für $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x_{N-n+1}, \ldots, x_N\}$, wobei $(x_n)_{n=1}^N$ ONB ist mit $Ax_n = \lambda_n x_n \ \forall n$

z.B. $\lambda_1 = \max\limits_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x}$, $\lambda_N = \min\limits_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x}$

Beweis: $n=1$: Wir müssen zeigen, dass $\frac{x^* A x}{x^* A x} \leq \lambda_1 \ \forall x \neq 0$. Schreibe $x = \sum\limits_{m=1}^N \xi_m x_m$

$$x^* x = \sum_{m=1}^N |\xi_m|^2, \quad x^* A x = \sum_{m,m'} \overline{\xi_m} \, \xi_{m'} \, x_m^* \underbrace{A x_{m'}}_{\lambda_{m'} x_{m'}} = \sum_m \lambda_m |\xi_m|^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^* A x}{x^* x} = \frac{\sum_m \lambda_m |\xi_m|^2}{\sum_m |\xi_m|^2} \underset{\lambda_m \leq \lambda_1 \ \forall m}{\leq} \lambda_1$$

Und Gleichheit gilt für x mit $\xi_m = 0 \ \forall m$ mit $\lambda_m < \lambda_1$

$n \geq 2$: Wg. $\dim \mathcal{L} = n$ und $\dim(\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}) = n-1$ gibt es ein $0 \neq x \in \mathcal{L}$ mit $x_m^* x = 0 \ \forall m = 1, \ldots, n-1$

Schreibe wieder $x = \sum\limits_{m=1}^{n-1} \xi_{m'} x_{m'}$, es ist $0 = x_m^* x = \sum\limits_{m'} \xi_{m'} x_m^* x_{m'} = \xi_m$ $\forall 1 \leq m \leq n-1 \Rightarrow x^* A x = \sum\limits_{m=n}^N \lambda_m |\xi_m|^2 \leq \lambda_n \sum\limits_{m=1}^N |\xi_m|^2 = \lambda_n x^* x$

und Gleichheit gilt für x mit $\xi_m = 0 \ \forall m \geq n$ mit $\lambda_m < \lambda_n$.

Insbes. gilt Gl. für $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$

(Bew. des zweiten Teils entweder analog oder durch Anwenden des 1. Teils auf $-A$) $\square$

Korollar Seien $A, \Delta A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ hermitesch. Dann gilt für $\lambda_1 \geq \ldots \lambda_N$ 21.11.18

$$\lambda_n(A) + \lambda_N(\Delta A) \leq \lambda_n(A + \Delta A) \leq \lambda_n(A) + \lambda_1(\Delta A)$$

Insbes. gilt: $|\lambda_n(A + \Delta A) - \lambda_n(A)| \leq \|\Delta A\|_2$

Beweis: Für jeden Unterraum $\mathcal{L}$ mit $\dim \mathcal{L} = n$ gilt:

$$\lambda_n(A+\Delta A) \geq \min_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^*(A+\Delta A)x}{x^* x} \geq \min_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} + \underbrace{\min_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* \Delta A x}{x^* x}}_{\geq \lambda_N(\Delta A)}$$

Wählt man für $\mathcal{L}$ den von EV'en zu den EWen $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ aufgespannten Untervektorraum, so ist $\min_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_n(A)$

Analog beweist man die rechte Ungl.

Die letzte Ungl. folgt aus den ersten beiden Ungl. wg.

$\|\Delta A\|_2 = \max_n |\lambda_n(\Delta A)|$ $\square$

2. Potenzmethode

Motivation: Ist $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ diagonalisierbar und $(v_n)_{n=1}^N$ eine Basis aus EV, so gilt für $x = \sum_{n=1}^N \xi_n v_n$, dass $A^k x = \sum_{n=1}^N \lambda_n^k \xi_n v_n$

Satz: Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit EWen, so dass $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|$ und sei $y \in \mathbb{C}^N$ mit $A^* y = \overline{\lambda_1} y$ und $\|y\| = 1$. Ist $z^{(0)} \in \mathbb{K}^N$ ein Startvektor mit $\|z^{(0)}\| = 1$ und $y^* z^{(0)} \neq 0$, so gilt für $\tilde{z}^{(k)} = A z^{(k-1)}$, $z^{(k)} = \frac{\tilde{z}^{(k)}}{\|\tilde{z}^{(k)}\|}$, $k \geq 1$, dass $\lim_{k \to \infty} \left| \|\tilde{z}^{(k)}\| - |\lambda_1| \right|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$ Approximation EW exponentielle Konvergenz

und ist $v \in \mathbb{C}^N$ der EV von A zum EW λ_1 mit $\|v\| = 1$ und $\operatorname{sgn} y^* v = \operatorname{sgn} y^* z^{(0)}$, so ist $\limsup_{k \to \infty} \| z^{(k)} - (\operatorname{sgn} \lambda_1^k) v \|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$ Approximation EV

Bem.: kleinster EW durch A^{-1} oder bel. EW mit $(A-\mu I)^{-1}$ ⇒ Betrachtung des EW, welcher am nähesten bei μ ist.

Bem.: Da λ_1 einfacher EW von A ist (d.h. alg. Vielfachheit $= 1$), gilt für jeden zugehörigen EV $\tilde{v}$, dass $y^* \tilde{v} \neq 0$ (Insbes. ist v im Satz wohldef.)

der Bem.

Beweis: (durch Widerspruch): Ang. $y^* \tilde{v} = 0$. Wg. $y \in \ker(A^* - \overline{\lambda}_1) = (\operatorname{ran}(A - \lambda_1))^\perp$ — $\ker \hat{=}$ Kern, $\operatorname{ran} \hat{=}$ Bild

$\Rightarrow \tilde{v} \in \operatorname{ran}(A - \lambda_1)$, d.h. $\tilde{v} = (A - \lambda_1)u$ für ein u. ⑤

$\Rightarrow (A - \lambda_1)^2 u = (A - \lambda_1)\tilde{v} = 0$. Wg. λ_1 einfach folgt schon

$(A - \lambda_1)u = 0 \overset{⑤}{\Rightarrow} \tilde{v} = 0$ ↯ zu $\tilde{v}$ ist EV $\square$

Beweis (des Satzes):

1. Schritt: Sei $E = A - \frac{\lambda_1}{y^* v} v y^*$

Beh.: $\max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ EW von } E\} \leq |\lambda_2|$ ⑥

Es ist $E^* y = \underbrace{A^* y}_{= \overline{\lambda}_1 y} - \frac{\overline{\lambda}_1}{v^* y} y v^* y = 0$

Ist $\mu \neq 0$ ein EW von E mit EV $z \neq 0$, so ist $y^* z = \frac{1}{\mu} y^* E z =$

$= \frac{1}{\mu}(E^* y) z = 0$

$\Rightarrow Az = Ez + \frac{\lambda_1}{y^* v} v \underbrace{y^* z}_{=0} = Ez = \mu z$

$\Rightarrow \sigma(E) \setminus \{0\} \subset \sigma(A)$

Beh.: $\mu \neq \lambda_1$. Denn sonst wäre z ein EV von A zum EW λ_1

und $y^* z = 0$ im Widerspruch zur obigen Bem.

$\Rightarrow \sigma(E) \setminus \{0\} \subset \sigma(A) \setminus \{\lambda_1\} \Rightarrow$ Beh ⑥

2. Schritt: Zeige: $A^k z^{(0)} = \lambda_1^k \xi v + E^k z^{(0)}$ mit $\xi = \frac{y^* z^{(0)}}{y^* z} > 0$ ⑦

Bew. durch Ind.: $k = 1$: Nach Def. von E ist: $E z^{(0)} = A z^{(0)} - \frac{\lambda_1}{y^* v} v y^* z =$

$= A z^{(0)} - \lambda_1 \xi v$ ✓

$k \geq 2$: $A^{k+1} z^{(0)} = A(A^k z^{(0)}) \overset{I.V.}{=} A(\lambda_1^k \xi v + E^k z^{(0)}) = \lambda_1^{k+1} \xi v + A E^k z^{(0)} =$

$= \lambda_1^{k+1} \xi v + E^{k+1} z^{(0)} + \underbrace{\lambda_1 \frac{y^* E^k z^{(0)}}{y^* v} v}_{=0}$, denn $y^* E^k z^{(0)} = (\overbrace{E^* y}^{=0})^* E^{k-1} z^{(0)} = 0$

$\Rightarrow$ Schritt 2 bew ⑦

3. Schritt: Wir schreiben (**) als $A^k z^{(0)} = \lambda_1^k \xi (v + w^{(k)})$ mit $w^{(k)} = \frac{E^k z^{(0)}}{\lambda_1^k \xi}$

Sei $\varepsilon > 0$. Man kann zeigen, dass es eine V-Norm gibt, so dass

für die entspr. M-Norm $\|\cdot\|_\varepsilon$ gilt $\|E\|_\varepsilon \leq \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ EW von } E\} + \varepsilon$

$\Rightarrow \|w^{(k)}\|_\varepsilon = \frac{\|E^k z^{(0)}\|_\varepsilon}{|\lambda_1|^k \xi} \leq \frac{\|E\|_\varepsilon^k \|z^{(0)}\|_\varepsilon}{|\lambda_1|^k \xi} \leq \left(\frac{|\lambda_2| + \varepsilon}{|\lambda_1|}\right)^k \frac{\|z^{(0)}\|_\varepsilon}{\xi}$

Da die V-Norm $\|\cdot\|_\varepsilon$ zur geg. Norm $\|\cdot\|$ äquivalent ist, d.h. $\exists\, 0 < c_\varepsilon \leq C_\varepsilon < \infty$

mit $\forall x: c_\varepsilon \|x\|_\varepsilon \leq \|x\| \leq C_\varepsilon \|x\|_\varepsilon$, folgt $\|w^{(k)}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{c_\varepsilon} \left(\frac{|\lambda_2| + \varepsilon}{|\lambda_1|}\right)^k \frac{1}{\xi}$

$\Rightarrow z^{(k)} = \frac{A^{(k)} z^{(0)}}{\|A^{(k)} z^{(0)}\|} = \frac{\lambda_1^k \xi}{|\lambda_1|^k \xi} \frac{v + w^{(k)}}{\|v + w^{(k)}\|} = (\operatorname{sgn} \lambda_1^k) \frac{v + w^{(k)}}{\|v + w^{(k)}\|} =$

$= \operatorname{sgn}(\lambda_1^k) v + e^{(k)}$ mit $e^{(k)} = \frac{\operatorname{sgn}(\lambda_1^k)}{\|v + w^{(k)}\|} (w^{(k)} + (1 - \|v + w^{(k)}\|) v)$

Wg. $\left| \|v + w^{(k)}\| - \underbrace{\|v\|}_{=1} \right| \leq \|w^{(k)}\|$ ist $\|e^{(k)}\| = \frac{1}{\|v + w^{(k)}\|} \|w^{(k)} + (1 - \|v + w^{(k)}\|) v\| \leq$

$\leq \frac{1}{\|v + w^{(k)}\|} (\|w^{(k)}\| + |1 - \|v + w^{(k)}\||) \leq \frac{1}{\|v + w^{(k)}\|} 2\|w^{(k)}\| \leq \frac{2\|w^{(k)}\|}{1 - \|w^{(k)}\|} \leq$

Schranke an $w^{(k)}$ $\leq \text{const}_\varepsilon \left(\frac{|\lambda_2| + \varepsilon}{|\lambda_1|}\right)^k$

$\Rightarrow \|z^{(k)} - \operatorname{sgn}(\lambda_1^k) v\|^{\frac{1}{k}} = \|e^{(k)}\|^{\frac{1}{k}} \leq (\text{const}_\varepsilon)^{\frac{1}{k}} \frac{|\lambda_2| + \varepsilon}{|\lambda_1|}$

$\Rightarrow \limsup_{k \to \infty} \|z^{(k)} - \operatorname{sgn}(\lambda_1^k) v\|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{|\lambda_2| + \varepsilon}{|\lambda_1|}$

Da $\varepsilon > 0$ bel. ist, ist das die 2. Beh. des Satzes.

Außerdem ist $\tilde{z}^{(k+1)} = A z^{(k)} = (\operatorname{sgn} \lambda_1^k) \lambda_1 v + A e^{(k)}$

$\Rightarrow \left| \|\tilde{z}^{(k+1)}\| - |\lambda_1| \right| = \left| \|\tilde{z}^{(k+1)}\| - \|\operatorname{sgn}(\lambda_1^k) \lambda_1 v\| \right| \leq$

$\leq \|A e^{(k)}\| \leq \|A\| \|e^{(k)}\| \leq \text{const}_\varepsilon \left(\frac{|\lambda_2| + \varepsilon}{|\lambda_1|}\right)^k \Rightarrow$ erste Beh.