Aufgabe 1.

Zeige: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht strikt diagonaldom. aber trotzdem konvergiert das Jacobi Verfahren (Gesamtschrittverfahren)

Bew. A ist nicht strikt-diag., weil $a_{21} = 2 > 1 = a_{11}$

Die Fixpunktit. konv. $\Longleftrightarrow$ A regulär $\wedge$ $r_\sigma(T) < 1$

$$T = M^{-1}N = D^{-1}(L+R)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma(T) = \{0\} \Rightarrow r_\sigma(T) < 1$$

Spektrum

Ferner $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar.

$\Rightarrow$ Jacobi konvergiert ∎

Alternativ: direktes Nachrechnen

wegen $D = M = \mathbb{1} \Rightarrow a_{nn} \neq 0 \ \forall n$

Mit der Formel gilt: $x_n^{(k+1)} = {}^1/_{a_{nn}} + \left(b_n - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N} a_{nm} x_m^{(k)}\right)$

Setze $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$ als bel. Startvektor, LGS $Ax = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

- $x_1^{(1)} = {}^1/_{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2^{(0)}) = b_1 - 2x_2^{(0)}$

  $x_1^{(2)} = {}^1/_{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_1^{(0)}) = b_2$

- $x_1^{(2)} = {}^1/_{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2^{(1)}) = b_1 - 2b_2$

  $x_2^{(2)} = {}^1/_{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_1^{(1)}) = b_2$

- $x_1^{(3)} = {}^1/_{a_{11}} (b_1 - 2x_2^{(2)}) = b_1 - 2b_2$

  $x_2^{(3)} = b_2$

$$Ax = b \iff x = \begin{pmatrix} b_1 - 2b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Probe $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 - 2b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \cancel{2b_2} + \cancel{2b_2} \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $x = \begin{pmatrix} b_1 - 2b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ist exakte Lösung. $\blacksquare$

Aufgabe 2.

- Löse das Lsg. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit dem Einzelschrittverfahren / Gauß-Seidel auf eine Genauigkeit von 1%. (d.h. bis $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq 1\%$, ohne x exakt zu berechnen)

- Wie viele Iterationsschritte wären nötig, um eine Genauigkeit von 10^{-8} zu erreichen? (↳ a-priori-Schranke)

Bew. Die allgemeine Formel wird durch einsetzen zu: Startwert $x^{(0)} = (0,0)$
(Wahl mögl. wegen strikt diag. dom. d.h. Iteration konv. ∀ Startwerte)

$$x_1^{(k+1)} = 1/4 \, (6 - x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = 1/3 \, (8 - 2 x_1^{(k+1)})$$

→ Iteration:

$$x_1^{(1)} = 1/4 \, (6-0) = 3/2$$

$$x_2^{(1)} = 1/3 \, (8 - 2 \cdot 3/2) = 5/3$$

$$x_1^{(2)} = 13/12 \qquad x_1^{(4)} = 433/432$$

$$x_2^{(2)} = 35/18 \qquad x_2^{(4)} = 1295/648$$

$$x_1^{(3)} = 73/72$$

$$x_2^{(3)} = 215/108$$

Betrachte $\| x^{(4)} - x^{(3)} \|_\infty = \max \{ | -5/432 |, 5/648 \} = 5/432 \lessapprox 0{,}01$

Damit ist eine Genauigkeit von 1% erreicht ⟹ Abbruch der Iteration

▶ A-priori-Schranke

$$d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} (x^{(1)}, x^{(0)}) \leq 10^{-8} \iff 10^{-8} \geq \frac{q^n}{1-q} \cdot \underbrace{d(x^{(1)}, x^{(0)})}_{O(1)}$$

$$\iff 10^{-8} \geq \frac{q^n}{1-q} \iff 10^{-8}(1-q) \geq q^n \mid \ln$$

$$\iff \ln(10^{-8} \cdot (1-q)) \geq \ln q^n = n \cdot \ln q \mid : \ln(q)$$

$$\boxed{n \geq \frac{\ln(10^{-8} (1-q))}{\ln q}}$$

Berechnung von q:

Beweis $\overset{VL}{\rightsquigarrow}$ $q = \|T\|_\infty$

$$T = M^{-1}N = (D-L)^{-1} R$$

$$\Longrightarrow D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow T = \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \|T\|_\infty = 1/4 = q$$

$$\Longrightarrow \frac{\ln(10^{-8}(1-1/4))}{\ln(1/4)} \Longrightarrow n \geq 13{,}49$$

$\Longrightarrow$ Man braucht 14 Iterationen (wahrscheinlich mehr wegen Konstante $O(1)$). $\blacksquare$

Aufgabe 3.

Betrachte das LGS mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 700 \\ 357 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit gestörter Matrix & rechter Seite in der ∞ - Norm.

$\Delta b \in \mathbb{R}^3$ Störung von b, $\Delta A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ Störung von A, $x + \Delta x$ Lsg. des gest. Systems : $Ax = b$, $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$.

a) Angenommen $\|\Delta b\|_\infty < 10^{-3}$

Finde α so, dass $\|\Delta A\|_\infty < \alpha$ garantiert, dass $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} < 10^{-3}$

b) Angenommen $\|\Delta A\|_\infty < 10^{-3}$

Finde $\beta > 0$ so, dass $\|\Delta b\|_\infty < \beta$ garantiert, dass $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} < 10^{-1}$

Bew.

a) VL. : $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$

$\|\cdot\|$ sei hier $\|\cdot\|_\infty$ (ind. M-Norm)

$\|A\|_\infty = 10$

$\|b\|_\infty = 700$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|A^{-1}\|_\infty = 65 \Longrightarrow \text{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

$= 10 \cdot 65 = 650$

Wir wollen $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} < 10^{-3}$ d.h. $650 \cdot \frac{1}{1 - 65 \underbrace{\alpha}_{= \|\Delta A\|}} \left(\frac{\alpha}{10} + \frac{10^{-3}}{700} \right) < 10^{-3}$

$\Longrightarrow \alpha < \frac{1}{910910} \approx 1{,}097 \cdot 10^{-6}$

b) Setze $\|\Delta b\|_\infty = \beta$

auflösen $\rightsquigarrow$ nach β: $\beta < \frac{399}{13\,000} \approx 3{,}07 \cdot 10^{-2}$