Numerik Tutorium 3 - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1)

Berechne die Eigenwerte der 2×2-Matrix A mit reelen Einträgen a_{ij}

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Zeige das gilt: $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = det(A)$,

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A sind. Zeige weiter: Falls

A symmetrisch, dann $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und A pos. def. $\Leftrightarrow tr(A) > 0 \wedge det(A) > 0$

$det(A - \lambda I_2) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21} a_{12} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} =$

$= \lambda^2 - \lambda\, tr(A) + det(A) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4 det(A)}\right)$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{4}\left[tr(A)^2 - (tr(A)^2 - 4det(A))\right] = det(A)$

Sei nun A symmetrisch $\Rightarrow a_{12} = a_{21}$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2} tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{tr(A)^2 - 4det(A)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tr(A)^2 - 4det(A) \geq 0$, dies gilt da: $tr(A)^2 - 4det(A) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$

Noch z.z.: A pos. def. $\Leftrightarrow tr(A) > 0 \wedge det(A) > 0$

Es gilt A hermitesch und pos. def. $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$ (EW von A)

„$\Rightarrow$" klar

„$\Leftarrow$" Entweder $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, da aber $tr(A) > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$

Aufgabe 2)

Seien $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}^{N \times N}$ unitär und $R_1, R_2 \in \mathbb{K}^{N \times N}$ reguläre, obere Δ-Matrix

mit $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$. z.z.: $\exists s_1, \dots, s_N \in \mathbb{K}$ mit $|s_n| = 1$ $\forall 1 \leq n \leq N$ so dass $Q_2 = Q_1 S^*$

und $R_2 = S R_1$ mit $S = diag(s_1, \dots, s_n)$.

Hinweis: ① $R_2 R_1^{-1*} = R_2^{-1*} R_1^*$, ② die oberen/unteren Δ-Matrizen bilden

eine Gruppe.

$Q_1 R_1 = Q_2 R_1 \Leftrightarrow R_2 = Q_2^{-1} Q_1 R_1 = Q_2^* Q_1 R_1$

$R_2^{-1} = (Q_2^* Q_1 R_1)^{-1} = R_1^{-1} Q_1^* Q_2 \Rightarrow R_2^{-1*} = Q_2^* Q_1 R_1^{-1*}$

$\Rightarrow R_2 R_1^{-1} = Q_2^* Q_1$ und $R_2^{-1*} R_1^* = Q_2^* Q_1 \Rightarrow R_2 R_1^{-1} = R_2^{-1*} R_1^* = (R_1 R_2^{-1})^*$

$S := Q_2^* Q_1 \Rightarrow S$ ist als Produkt zweier unitärer Matrizen unitär.

Darüber ist S eine reg. Diagonalmatrix, da $S = \underbrace{R_2 R_1^{-1}}_{\text{reg. ob. } \Delta} = \underbrace{(R_1 R_2^{-1})^*}_{\text{reg. unt. } \Delta}$

Nun gilt: $Q_2 = \overbrace{Q_1 Q_1^*}^{= I_N} Q_2 = Q_1 (Q_2^* Q_1)^* = Q_1 S^*$

$\Rightarrow R_2 = Q_2^* Q_1 R_1 = S R_1$

S ist unitäre (reg.) Diagonalmatrix:

$S^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_N}\right) = \text{diag}(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_N) = S^* \Rightarrow \frac{1}{s_n} = |s_n| \Rightarrow 1 = \bar{s}_n s_n = |s_n|^2$

$\Rightarrow |s_n| = 1$

Diese Aufgabe zeigt, dass die QR-Zerlegung eindeutig ist, bis auf eine Matrix $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ mit $|s_n| = 1$ und $R_2 = S R_1$, $Q_2 = Q_1 S^*$

Aufgabe 3)

Beweise die Hadamard-Ungleichung: $|\det(X)| \leq \prod_{n=1}^{N} \|x_n\|_2$, wobei $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ und $x_n \in \mathbb{K}^N \; \forall 1 \leq n \leq N$ und X reg.

X reg. $\Rightarrow \exists$ QR-Zerl. mit $Q \in \mathbb{K}^{N \times N}$ unitär und $R \in \mathbb{K}^{N \times N}$ obere Δ-Matrix s.d. $X = QR \Rightarrow |\det(X)| = |\det(Q \cdot R)| = |\det(Q) \cdot \det(R)| = |\det(R)| = \left|\prod_{i=1}^{N} r_{ii}\right| =$

$= \prod_{i=1}^{N} \underbrace{|r_{nn}|}_{\leq \|r_n\|_\infty} \leq \prod_{i=1}^{N} \|r_i\|_2 = \prod_{i=1}^{N} \|Q r_i\|_2 = \prod_{i=1}^{N} \|x_i\|_2$