Satz 2.22 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f, g: M \to \mathbb{R}$ konvex, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Dann: $\alpha \cdot f$, $f+g$, $\max\{f, g\}$ ebenfalls konvex. Im allgemeinen sind $f \cdot g$, $\min\{f, g\}$, $f-g$ nicht konvex.

Beweis: Übung $\square$

Satz 2.23 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f: M \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig im Inneren von M.

Beweis: Übung $\square$

Bem.: Die Konklusion ist bestmöglich, z.B. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \{1, 0\} \\ 0, & x \in \,]0,1[\end{cases}$$

2.5 Differenzierbare konvexe Funktionen

13.11.18

Ziel: Abschätzungen unter stärkeren Voraussetzungen

Satz 2.24: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, diff.bar, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann:

1) f konvex über $M \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M: f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1)^T \nabla f(x_1)$

2) f strikt konvex über $M \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2: f(x_2) > f(x_1) + (x_2 - x_1)^T \nabla f(x_1)$

Aussage: Nur aus lokaler Information ($\nabla f(x_1)$) erhalten wir eine globale untere Schranke für f.

Beweis: 1) „$\Rightarrow$" Sei $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\lambda \mapsto (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) - f((1-\lambda) x_1 + (\lambda) x_2)$

Da f konvex: $h \geq 0$, und außerdem $h(0) = 0 = h(1)$. Insbesondere: $h'(0) \geq 0$. Ferner: $h'(\lambda) = -f(x_1) + f(x_2) - (x_2 - x_1)^T \nabla f((1-\lambda) x_1 + \lambda x_2)$

Damit: $0 \leq h'(0) = -f(x_1) + f(x_2) - (x_2 - x_1)^T \nabla f(x_1)$. Daraus folgt die Aussage.

1) „$\Leftarrow$": Seien $x, y \in M$, $\lambda \in [0,1]$. Da M konvex: $z := \lambda x + (1-\lambda) y \in M$. Aus Annahme: $f(x) \geq f(z) + (z-x)^T \nabla f(z)$, $f(y) \geq f(z) + (z-y)^T \nabla f(z)$. Daraus:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq \lambda (f(z) + (z-x)^T \nabla f(z)) + (1-\lambda)(f(z) + (z-y)^T \nabla f(z)) =$$

$$= f(z) + (\lambda (z-x)^T + (1-\lambda)(z-y)^T) \nabla f(z) = f(z) + (z - \lambda x - (1-\lambda) y)^T \nabla f(z) =$$

$$= f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

2) analog wie 1) ersetze „$\geq$" durch „$>$" $\square$

Satz 2.25: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2x stetig differenzierbar. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann:

f konvex über $M \Leftrightarrow \nabla^2 f$ positiv semidefinit über M°

Beweis: Für $x, y \in M$ mit Taylor: $f(y) = f(x) + (y-x)^T \nabla f(x) + \frac{1}{2}(y-x)^T \nabla^2 f(x + t(y-x)) \cdot (y-x)$ für $t \in [0,1]$

„$\Leftarrow$" Da $\nabla^2 f$ positiv semidef. und stetig über M: $(y-x)^T \nabla^2 f(\overbrace{x+t(y-x)}^{\in M})(y-x) \geq 0$

Daraus: $f(y) \geq f(x) + (y-x)^T \nabla f(x)$. Mit Satz 2.24 folgt f konvex.

„$\Rightarrow$" Durch Widerspruch: Sei $x_0 \in M^\circ$, $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z^T \nabla^2 f(x) z < 0$. Insbesondere gilt für $\alpha > 0$: $(\alpha z)^T \nabla^2 f(x_0)(\alpha z) < 0$. Somit kann $\|z\|$ beliebig klein aber > 0 gewählt werden. Sei y gegeben durch $z = y - x_0$:
z kann so gewählt werden, dass $y \in M^\circ$. Da f 2x stetig diff.bar, kann y so gewählt werden, dass $(y-x_0)^T \nabla^2 f(x_0 + t(y-x_0))(y-x_0) < 0$ $\forall t \in [0,1]$. Wir erhalten $f(y) < f(x) + (y-x)^T \nabla f(x)$ ↯ zu Satz 2.24, da f konvex. □

2.6 Konvexe Optimierungsprobleme

Satz 2.26: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f: M \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist jedes lokale Minimum von f über M bereits global minimal.

Beweis: Sei $y \in M$ lokal minimal für f. Annahme: $\exists z \in M$ mit $f(z) < f(y)$.
Da y lok. min. $\exists \bar{\lambda} > 0$ mit $f(y + \lambda(z-y)) \geq f(y)$ $\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}[$.
Andererseits, da f konvex: $f(y + \lambda(z-y)) = f(\lambda z + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(y) < f(y)$ $\forall \lambda \in [0,1]$. Die zwei Aussagen widersprechen sich ↯ □

Satz 2.27: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, diff.bar. Dann

x ist lok. Min $\Leftrightarrow$ x stationärer Punkt $(\nabla f(x) = 0)$

Mit Satz 2.26: $\Rightarrow x$ ist sogar global min. ($\mathbb{R}^d$ konvex)

Beweis: „$\Rightarrow$" Satz 1.6

„$\Leftarrow$" Aus $\nabla f(x) = 0$ folgt mit Satz 2.24 für $y \in \mathbb{R}^n$: $f(y) \geq f(x) + (y-x)^T \nabla f(x) = f(x)$. Daraus: x lokal minimal. □

Satz 2.28: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Dann:

$$\max\{f(x) : x \in M\} = \max\{f(x) : x \in conv(M)\}$$

Beweis: Sei $x \in conv(M) \setminus M$. Mit dem Satz von Caratheodory: $\exists x_1, \dots, x_{n+1} \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Da f konvex

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \max\{f(x_j) \mid 1 \leq j \leq N\} = \max\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n+1\}$$

Insb. $\exists \bar{x} \in M: f(x) \leq f(\bar{x})$ $\square$

3. Polyeder & Polytop (Theorie der lin. Ungleichungen)

Wir wissen: M konvex, abgeschlossen $\Leftrightarrow$ M ist $\cap$ (Schnitt) von Halbräumen

Def. 3.1 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

i) M heißt Polyeder, falls M der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen ist.

ii) M heißt Polytop, falls Polyeder und beschränkt.

Anm.: Ein Halbraum ist geg. durch $\{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq \beta\}$ für $y \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Also ist ein Polyeder definiert als $P = P(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, als Durchschnitt von m Halbräumen.

$Ax \leq b$ heißt definierendes System von P.

Spezieller Polyedertyp: $P^=(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, -Ax \leq -b, -x \leq 0\} = P\left(\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ist der Polyeder mit def. System: $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ E_n \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$.