Def.: Ein lokal (gegen $\hat{x}$) konv. Iterationsverf. heißt konv. von der Ordnung $p \geq 1$, falls es ein $\delta > 0$ und ein $C < \infty$ (mit $C < 1$ für $p = 1$) gibt mit $\|x^{(k+1)} - \hat{x}\| \leq C \|x^{(k)} - \hat{x}\|^p \quad \forall k \geq 0$ und es $\|x^{(0)} - \hat{x}\| < \delta$ $\quad$ $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$

Bsp.: Die Gesamtschritt-, Einzelschritt- und CG-Verf. sind konv. von Ordnung 1.

Prop.: Die Funktion $\Phi: \mathfrak{D}(\Phi) \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ sei p-mal stetig diff.bar mit $p \geq 2$ und habe einen Fixpunkt $\hat{x}$ im Inneren von $\mathfrak{D}(\Phi)$. Ist $\Phi'(\hat{x}) = \ldots = \Phi^{(p-1)}(\hat{x}) = 0$, so ist die Fixpunktiteration lokal konvergent gegen $\hat{x}$ mit Ordnung p. Ist $\Phi^{(p)}(\hat{x}) \neq 0$, so ist die Ordnung genau p.

Beweis: Die lokal Konvergenz folgt aus der vorherigen Prop.

Konv. ordnung: $\Phi(x) = \Phi(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\Phi^{(j)}(\hat{x})}{j!}(x - \hat{x})^j + o(|x - \hat{x}|^p) = \hat{x} + \Phi^{(p)}(\hat{x})(x - \hat{x})^p \frac{1}{p!} + o(|x - \hat{x}|^p)$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall |x - \hat{x}| \leq \delta : \left| \frac{\Phi(x) - \hat{x}}{(x - \hat{x})^p} \right| \leq \frac{|\Phi^{(p)}(\hat{x})|}{p!} + \varepsilon$$

Nach der vorherigen Prop. bildet die Iteration $\{x \mid |x - \hat{x}| \leq \delta\}$ in sich selbst ab (nach evtl. Verkleinerung von δ). Also gilt: für $|x_0 - \hat{x}| \leq \delta$, dass $\forall k$:

$$\frac{|x^{(k+1)} - \hat{x}|}{|x^{(k)} - \hat{x}|^p} = \frac{|\Phi(x^{(k)}) - \hat{x}|}{|x^{(k)} - \hat{x}|^p} \leq \frac{|\Phi^{(p)}(\hat{x})|}{p!} + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Verf. konv. von Ordnung p.

Ist zusätzlich $\Phi^{(p)}(\hat{x}) \neq 0$, so gilt für ein geeignetes $\delta > 0$:

$$\left| \Phi(x) - \hat{x} - \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\hat{x})(x - \hat{x})^p \right| \leq \frac{1}{2} |\Phi^{(p)}(\hat{x})| |x - \hat{x}|^p$$

$$\Rightarrow |\Phi(x) - \hat{x}| \geq \left| \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\hat{x})(x - \hat{x})^p \right| - \left| \Phi(x) - \hat{x} - \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\hat{x})(x - \hat{x})^p \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p!} |\Phi^{(p)}(\hat{x})| |x - \hat{x}|^p.$$ Insbes., $|x^{(k+1)} - \hat{x}| \geq \left(\frac{1}{2} \frac{1}{p!} |\Phi^{(p)}(\hat{x})|\right) |x^{(k)} - \hat{x}|^p$

D.h. die Ordnung ist genau p.

Bsp. Heron-Verf.: $\Phi(x) = \frac{1}{\gamma}\left((\gamma - 1)x + \frac{a}{x^{\gamma-1}}\right)$, $\Phi'(x) = \frac{1}{\gamma}\left((\gamma - 1) - (\gamma - 1)\frac{a}{x^{\gamma}}\right)$, $\Phi'(\hat{x}) = 0$

$\Phi''(x) = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}(-\gamma)\frac{a}{x^{\gamma+1}}$, $\Phi''(\hat{x}) \neq 0 \Rightarrow$ Ordg. ist genau 2

3.2. Newton-Verfahren

Zunächst eindimensionaler Fall:

Geg.: Fkt $f: \mathfrak{D}(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ges.: $\hat{x} \in \mathfrak{D}(f)$ mit $f(\hat{x}) = 0$

Idee: Fixpunktproblem $x = \Phi(x)$ mit $\Phi(x) = x + g(x)f(x)$ mit noch zu bestimmenden g. optimalerweise: g ohne Nullst.

Ziel: Wähle g s.d. $\Phi'(\hat{x}) = 0$. (Dann Konv. ord. 2 nach vorherigen Prop.)

$\Phi'(x) = 1 + g'(x)f(x) + g(x)f'(x) \rightsquigarrow \Phi'(\hat{x}) = 1 + g(\hat{x})f'(\hat{x}) \overset{!}{=} 0$. Das ist nur mögl. falls $f'(\hat{x}) \neq 0$, was wir im Folgenden voraussetzen. Dann wollen wir $g(\hat{x}) = -\frac{1}{f'(\hat{x})}$. Das motiviert die Wahl: $g = -\frac{1}{f'}$, d.h. $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Das dazugehörige Iterationsverf. $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ heißt Newton-Verf.

Bsp. $f(x) = x^\gamma - a$, $f'(x) = \gamma x^{\gamma-1}$, $x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{1}{\gamma}\left(x - \frac{a}{x^{\gamma-1}}\right) = \frac{1}{\gamma}\left((\gamma - \overset{1}{a})x + \frac{a}{x^{\gamma-1}}\right)$, d.h. Heron-Verf. ist Spezialfall von Newton-Verf.

Prop.: Sei $f \in C^2[a,b]$ und $\hat{x} \in]a,b[$ mit $f(\hat{x}) = 0$, $f'(\hat{x}) \neq 0$. Dann konv. das Newton-Verf. lokal mit Ordnung 2 gegen $\hat{x}$.

Bem.: Variation: Sekantenverf. $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$

Vorteil: Muss nicht f' auswerten (falls f' kompliziert)

Nachteil: Konv.ord. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1{,}618\ldots$ für $f'(\hat{x}) \neq 0$, $f''(\hat{x}) \neq 0$.

Prop.: Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = 0$ und in $]a,b[$ stetig diff.bar mit $f'(x) > 0 \; \forall x \in]a,b[$. Außerdem gelte: $f(x) \leq f'(x)(x-a) \; \forall x \in [a,b]$. Dann konv. das Newton-Verf. $\forall x_0 \in]a,b[$ und die Iterierten sind strikt monoton fallend (solange $\neq a$).

Beachte: Ist f konvex in $]a,b[$, so gilt: $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \; \forall x,y \in [a,b[$

$\Rightarrow y = a: \; 0 \geq f(x) + f'(x)(a-x) \; \forall x \in [a,b[$, wie im Satz gefordert.

Bew.: Sei $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ $\forall x \in (a,b)$ (wohldef., da $f'>0$). Wg $f'>0$ und $f(a)=0$ ist $f>0$ und damit $\Phi(x) < x$ $\forall x \in (a,b)$. ⊛ Andererseits: ist wg. der vorausgesetzten Ungl. $\Phi(x) \geq a$ $\forall x \in (a,b)$. Damit kann die Fkt. Φ stetig durch $\Phi(a) = a$ fortgesetzt werden und die Iteration ist wohldef. $\forall x_0 \in (a,b)$. Solange $x_k \neq a$ folgt, dass $x_{k+1} = \Phi(x_k) < x_k$, d.h. die Iteration ist streng monoton fallend. Wg. $x_{k+1} = \Phi(x_k) \geq a$, ist die Folge (x_k) konvergent. Wg. Φ stetig erfüllt der Grenzwert $\hat{x} = \Phi(\hat{x})$ und wg. ⊛ muss dann $\hat{x} = a$ sein. □

Kor.: Sei P ein reeles, nicht-konst. Polynom und sei $\lambda_1 = \max\{\xi : \xi + i\lambda \in \mathbb{C}, p(\xi + i\lambda) = 0\}$ eine Nst. von P. Dann konv. das Newton-Verf. für alle $x_0 > \lambda_1$ und die Iterierten sind str. mon. fallend. (solange sie $\neq \lambda_1$ sind)

Bew.: Schreibe $P(x) = a \prod_{n=1}^{N} (x - \xi_n) \Rightarrow P'(x) = a \sum_{n=1}^{N} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} (x - \xi_m) = P(x) \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x - \xi_n}$

Da P reell ist, können wir die Nst. anordnen, so dass $\xi_l = \lambda_l$ für $l = 1, \dots, L$, $\xi_{L+m} = \xi_m$, $\xi_{L+M+m} = \overline{\xi}_m$ für $m = 1, \dots, M$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x - \xi_n} = \sum_{l=1}^{L} \frac{1}{x - \lambda_l} + \sum_{m=1}^{M} \underbrace{\left(\frac{1}{x - \xi_m} + \frac{1}{x - \overline{\xi}_m} \right)}_{= \frac{2(x - \mathrm{Re}\, \xi_m)}{(x - \xi_m)(x - \overline{\xi}_m)} = \frac{(2(x - \mathrm{Re}\, \xi_m))}{|x - \xi_m|^2}} \geq \frac{1}{x - \lambda_1} \quad \forall x \geq \lambda_1$$

o.B.d.A. sei $a > 0$ (das kürzt sich im Verfahren)

Dann ist $P(x) > 0$ $\forall x > \lambda_1$ und damit $P'(x) = \underbrace{P(x)}_{>0} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x - \xi_n} \right)}_{\geq 1/x - \lambda_1} \geq \frac{1}{x - \lambda_1} P(x)$ $\forall x > \lambda_1$

Die Beh. folgt jetzt aus der letzten Prop. □

Newton-Verf. im $\mathbb{R}^n$

Geg. $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $F'(x) = \left(\frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m} \right)_{n,m=1}^{N}$ Jacobi-Matrix

$\Phi(x) = x - (F'(x))^{-1} F(x)$, d.h. $x_{k+1} = x_k + (F'(x_k))^{-1} F(x_k)$

Beachte zur Berechnung von x_{k+1} müssen wir das Gl. system $F'(x_k)\, h = F(x_k)$ lösen. Dann $x_{k+1} = x_k - h$

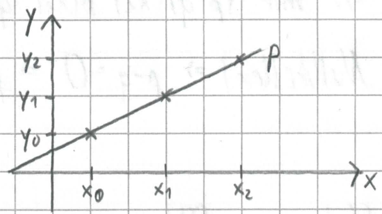
Satz: Es sei $\|\cdot\|$ eine V-Norm bzw. die davon ind. M-Norm. Sei $F: \mathcal{D}(F) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.bar mit einer Nullstelle im Inneren von $\mathcal{D}(F)$. Es gebe eine Konstante $L < \infty$ und eine offene Menge $U \subset \mathcal{D}(F)$ mit $\hat{x} \in U$, so dass $F'(x)$ $\forall x \in U$ reg. ist und $\|F'(x)^{-1}(F'(y) - F'(x))\| \leq L\|x-y\|$ $\forall x, y \in U$.
Dann konv. das Newton-Verf. lokal mit Ord. 2 gegen $\hat{x}$.

4 Interpolation

03.12.18

Geg.: $N+1$ paarweise versch. Knoten $x_0 < x_1 < \ldots < x_N \in \mathbb{R}$
$N+1$ Werte $y_0, y_1, \ldots, y_N$

Ges.: Funktion p so dass $p(x_n) = y_n$ $\forall n = 0, 1, \ldots, N$



Typischerweise wird p aus einer vorgegebenen Familie gewählt.

Ziel: Wenn $y_n = f(x_n)$ für eine hinreichend glatte Funktion f, dann möchte man p so wählen, dass p und f "wenig voneinander abweichen"

Anwendung:
- Interpolation von Messwerten
- Graphische Darstellung von Fkt.
- Numerische Integration

4.1 Polynominterpolation

Idee: Die Funktion p wird als Polynom vom Grad $\leq N$ gewählt.

Warnung: In der Praxis wird üblicherweise nur mit kleinem N (z.B. $N \leq 7$, oft nur $N \leq 3$) gearbeitet. Die folgenden Resultate sind von theoretischer Bedeutung und bilden die Grundlage für andere praxisübliche Methoden (z.B. Spline Methode ($\to$ 4.2)