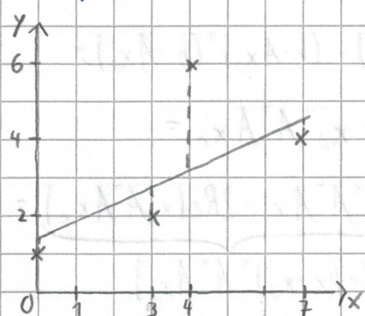
Lsg. des lin. Ausgleichproblems durch QR-Zerl.

Sei $\operatorname{rang}(A) = N$ und schreibe $A = QR$ mit Q unitär und R reg. obere Dreiecksmatrix. Zerlege $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $R_1 \in \mathbb{K}^{N \times N}$ und definiere $c = Q^* b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $c_1 \in \mathbb{K}^N$, $c_2 \in \mathbb{K}^{M-N}$

$$\|b - Ax\|_2^2 = \|Q(Q^* b - Rx)\|_2^2 = \|Q^* b - Rx\|_2^2 = \|c_1 - R_1 x\|_2^2 + \|c_2\|_2^2 \geq \|c_2\|_2^2$$

mit Gleichheit gdw. $x = R_1^{-1} c_1 \rightsquigarrow x = R^{-1} c_1$ ist die Lsg. des lin. Ausgleichs-problems

Bsp.: Gesucht ist die Gerade $y = \alpha + \beta x$ deren y-Werte den kleinsten Quadratsummenabstand von den geg. Daten $\tilde{y} = 1, 2, 6, 4$ an den entsprechenden Stellen $\tilde{x} = 0, 3, 4, 7$ haben.



$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = b, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|a_1\|_2 = 2, \quad v = \frac{1}{|a_{11}| \|a_1\|_2} (|a_{11}| a_1 + a_{11} \|a_1\|_2 e_1) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

07.11.18

$$\beta = \frac{2}{v^* v} = \frac{2}{3}, \quad w = A^* v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad P_1 A = A - \beta v w^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} (3, 7) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 \\ 0 & 14/3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} = a_2, \quad \|a_2\|_2 = 5, \quad v = \begin{pmatrix} 17/15 \\ 1/3 \\ 14/15 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{15}{17},$$

$$w = \frac{17}{3}, \quad P_2' A_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R, \quad R_1 = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Beachte Variablen werden mehrfach belegt (z.B v, b) Achte auf dem Schritt in dem du dich befindest!!

Einschub: $\|b - Ax\|_2^2 = \|c - Rx\|_2^2 = \|c_1 - R_1 x\|_2^2 + \|c_2\|_2^2 \Rightarrow c_1 = R_1 x$

$b = Q \underbrace{Q^* b}_{=: c}$ $\quad A = QR$ $\qquad$ und $c = Q^* b = P_2 P_1 b$, da $\underbrace{P_2 P_1}_{= Q^*} A = R$

$$\Rightarrow P_1 b = b - \beta (v^* b) v = \begin{pmatrix} -13/2 \\ -1/2 \\ 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \text{ „unterer Teil von } P_1 b\text{"}$$

$$P_2' b_2 = b_2 - \beta (v^* b_2) v = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 99/34 \\ -5/34 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2 P_1 b = \begin{pmatrix} -13/2 \\ -5/2 \\ 99/34 \\ -5/34 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \begin{pmatrix} -13/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

Löse $R_1 x = c_1 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Gerade $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} x$

1.5 Iterationsverfahren

Der Banachsche Fixpunktsatz

Wiederholung: • Ist M eine Menge so heißt eine Abb. $d: M \times M \to [0, \infty[$ eine Metrik auf M, falls $\forall x, y, z \in M$ gilt:

a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x,y) = d(y,x)$

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

• Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ heißt Cauchy (bzgl. d), falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N$: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ und konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N$: $d(x_n, x) \leq \varepsilon$.

gegen $x \in M$

• Falls jede Cauchy-Folge in M konvergiert, so heißt M vollständig (bzgl. d).

Bsp.: Ist V ein $\mathbb{K}$-VR mit einer Norm $\|\cdot\|$, so wird durch $d(x,y) := \|x - y\|$ eine Metrik definiert. Ist V bzgl. dieser Metrik vollständig und ist $K \subseteq V$ abgeschlossen (bzgl. d), so ist K bzgl. der auf K eingeschränkten Metrik vollständig.

Satz: Sei M vollständig bzgl. einer Metrik d und sei $\Phi: M \to M$ eine Abb., so dass es ein $q < 1$ gibt mit $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q\, d(x,y) \; \forall x, y \in M$ Kontraktion

Dann gibt es genau ein $\hat{x} \in M$ mit $\Phi(\hat{x}) = \hat{x}$. Außerdem konvergiert $\forall x^{(0)} \in M$ die Folge $x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}_0$, gegen $\hat{x}$ und es gelten $\forall n \geq 1$:

a) $d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq q\, d(x^{(n-1)}, \hat{x})$

b) $d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x^{(1)}, x^{(0)})$

c) $d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq \frac{q}{1-q} d(x^{(n)}, x^{(n-1)})$

Beweis: Sei $x^{(0)} \in M$ bel. und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Satz, wg. der Kontraktionseigenschaft ist $d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) = d(\Phi(x^{(n)}), \Phi(x^{(n-1)})) \leq q\, d(x^{(n)}, x^{(n-1)})$

$\Rightarrow d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) \leq q\, d(x^{(n)}, x^{(n-1)}) \leq q^2 d(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}) \leq \dots \leq q^n d(x^{(1)}, x^{(0)})$

$\Rightarrow \forall m > n: d(x^{(m)}, x^{(n)}) \leq \underbrace{d(x^{(m)}, x^{(m-1)})}_{\leq q^{m-1} d(x^{(1)}, x^{(0)})} + \dots + \underbrace{d(x^{(n+1)}, x^{(n)})}_{\leq q^n d(x^{(1)}, x^{(0)})} \leq$

$\leq \sum_{i=n}^{m-1} q^i d(x^{(1)}, x^{(0)}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} q^i d(x^{(1)}, x^{(0)}) = d(x^{(1)}, x^{(0)}) \cdot \frac{q^n}{1-q}$

$\Rightarrow (x^{(n)})$ Cauchy nach Vor. $\exists \hat{x} \in M: x^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \hat{x}$.

$|d(x^{(m)}, x^{(n)}) - d(\hat{x}, x^{(n)})| \leq d(x^{(m)}, \hat{x}) \to 0$ für $m \to \infty$ und $n \in \mathbb{N}$ fest.

Daher impliziert ⊛ die Ungl. b) im Satz.

Zeige $\hat{x}$ Fixpunkt: $d(\Phi(x^{(n)}), \Phi(\hat{x})) \leq q\, d(x^{(n)}, \hat{x}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \Phi(x^{(n)}) \to \Phi(\hat{x})$

$\underbrace{x^{(n+1)}}_{\to \hat{x}} = \Phi(x^{(n)}) \to \Phi(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x} = \Phi(\hat{x})$

Zeige $\hat{x}$ ist der einzige Fixpunkt: Sei $\hat{\hat{x}} \in M$ mit $\Phi(\hat{\hat{x}}) = \hat{\hat{x}}$

$d(\hat{\hat{x}}, \hat{x}) = d(\Phi(\hat{\hat{x}}), \Phi(\hat{x})) \leq q\, d(\hat{\hat{x}}, \hat{x}) \Rightarrow d(\hat{\hat{x}}, \hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{\hat{x}} = \hat{x}$

Außerdem ist $\forall n \geq 1$: $d(x^{(n)}, \hat{x}) = d(\Phi(x^{(n-1)}), \Phi(\hat{x})) \leq q\, d(x^{(n-1)}, \hat{x})$ das ist a)

und $d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) \geq d(x^{(n)}, \hat{x}) - \underbrace{d(x^{(n+1)}, \hat{x})}_{\leq q\, d(x^{(n)}, \hat{x})} \geq (1-q)\, d(x^{(n)}, \hat{x})$

$\Rightarrow d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq \frac{1}{1-q} d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) \leq \frac{q}{1-q} d(x^{(n)}, x^{(n-1)})$ das ist c) □