Aufgabe 1)

Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \infty$. Sei nun $M \subseteq J$ abzählbar

$$\infty > \mu(B) \geq \mu\Big(\dot{\bigcup_{j \in J_n(B)}} (B \cap A_j)\Big) = \sum_{j \in J_n(B)} \mu(B \cap A_j) > \sum_{j \in J_n(B)} \frac{1}{n} = |J_n(B)| \cdot \frac{1}{n} \geq 0$$

$\Rightarrow J_n(B)$ endlich

$\Rightarrow J(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n(B)$ abzählbar

n.V. gilt, dass μ σ-endl. ist $\Rightarrow \exists (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = X$ und $\mu(B_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Betrachte, dann $(B_k')_{k \in \mathbb{N}}$ mit $B_k' = \bigcup_{j=1}^{k} B_k$. $\Rightarrow B_k' \nearrow X$

Wenn man nun zeigen könnte, dass $J = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J(B_k')$ wäre man fertig, da eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.

„$\supseteq$" nach Def. von $J(B)$

„$\subseteq$" Sei $j \in J$. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k' \cap A_j) \geq \mu(A_j) > 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(B_k' \cap A_j) > 0$

$\Rightarrow j \in J(B_k')$ nach Def. $\Rightarrow j \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J(B_k')$ $\square$

Bem: $\mu(A_j) = \mu(X \cap A_j) = \mu\big((\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k') \cap A_j\big) = \mu\big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (B_k' \cap A_j)\big) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k' \cap A_j)$

Aufgabe 3)

i) $\{x\}$ ist abgeschlossen nach Analysis 2 $\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{B}^d$

Annahme: $\lambda^d(\{x\}) =: \varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N\varepsilon > 1$.

Sei $A := \{(\frac{i}{N+1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d \mid i \in \{0, \dots, N\}\} \subset [0,1[^d$

$$\Rightarrow \lambda^d(A) = \lambda^d\Big(\dot{\bigcup_{i=0}^{N}} \{(\tfrac{i}{N+1}, 0, \dots, 0)\}\Big) = \sum_{i=0}^{N} \lambda^d(\{(\tfrac{i}{N+1}, 0, \dots, 0)\}) \overset{\text{translationsinvariant}}{=} \sum_{i=0}^{N} \lambda^d(\{x\}) = N \cdot \varepsilon > 1$$

Aber wegen $A \subset [0,1[^d$: $\lambda^d(A) \leq \lambda^d([0,1[^d) = 1$ ↯

$\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) = 0$

[Alternativ: $\{x\} \subseteq H$ mit H Hyperebene $\Rightarrow \lambda^d(\{x\}) \leq \lambda^d(H) = 0$ (Aufgabe 2)]

ii) M abzählbar $\Rightarrow M = \{x_1, x_2, \dots\}$ wobei $x_i \in \mathbb{R}^d$ mit $i \in \mathbb{N} \Rightarrow M = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} \{x_i\}$

Da $\{x_i\} \in \mathcal{B}^d$ $\forall i \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B}^d$ $\cup_\infty$-stabil ist $\Rightarrow M \in \mathcal{B}^d$

$$\lambda^d(M) = \lambda^d\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\lambda^d(\{x_n\})}_{=0 \text{ (mit i))}} = 0$$

iii) $M \in \mathcal{B}^1$, da $[0,1[, \{1\}, \mathbb{Q} \in \mathcal{B}^1$ und $\mathcal{B}^d$ ist $\cup, \setminus$-stabil.

$$\lambda_e([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = \lambda([0,1]) - \underbrace{\lambda(\mathbb{Q})}_{=0} = \lambda([0,1[) + \underbrace{\lambda(\{1\})}_{=0} = 1$$

iv) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ y \in [0,1]\} = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times [0,1] = \dot{\bigcup}_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{x\} \times [0,1] \in \mathcal{B}^2$

$\lambda^2(M) = \lambda^2\left(\dot{\bigcup}_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{x\} \times [0,1]\right) = \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \lambda^2(\{x\} \times [0,1]) = 0$, da

$\forall x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]: \{x\} \times [0,1] = [x,x] \times [0,1] \Rightarrow \lambda^2([x,x] \times [0,1]) \overset{\uparrow}{=} (x-x) \cdot (1-0) = 0$

einzelne Punkte machen keinen Unterschied

Aufgabe 2)

n.V. ist λ^d translationsinvariant $\Rightarrow \lambda^d(V+w) = \lambda^d(V)$ bzw. $\lambda^d(H+w) = \lambda^d(H)$

$\xrightarrow{\text{Bewegung}}$ o.B.d.A. sei H eine $n-1$ dim. Hyperebene, die orthogonal zu einer Koordinaten-Achse ist. Hier zu i-ten Achse mit $i \in \{1,\dots,d\}$.

$\Rightarrow H = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = \alpha\}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ bel. (Schnittpunkt mit der i-ten Achse)

Seien nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $x_{n_m} = \begin{cases} \alpha & \text{für } m=i \\ -n & \text{sonst} \end{cases}$, $y_{n_m} = \begin{cases} \alpha + 2^{-n}(2n)^{1-d}\varepsilon & \text{für } m=i \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

mit $\varepsilon > 0$. $Q_n := \bigtimes_{j=1}^{d} [x_{n_j}, y_{n_j}[$. $\lambda^d(Q_n) = \prod_{j=1}^{d} (y_{n_j} - x_{n_j}) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{d} (y_{n_j} - x_{n_j})\right) \cdot (y_{n_i} - x_{n_i}) =$

$= \left(\prod_{j=1}^{d-1} (n-(-n))\right) \cdot (\alpha + 2^{-n}(2n)^{1-d}\varepsilon - \alpha) = (2n)^{d-1} 2^{-n} (2n)^{1-d} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2^n}$

Nun gilt $H \subseteq Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lambda^d(H) \leq \lambda^d(Q) = \lambda^d\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^d(Q_n) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-n} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ $\square$

Für diese Schritte muss gelten: $H, Q, Q_n \in \mathcal{B}^d$

Q_n ist nach Def. ein Element in $\mathcal{B}^d$, Q nach Def. somit auch.

$H \in \mathcal{B}^d$, da $\mathbb{R}^d \setminus H$ zwei offene Halbräume gibt. Somit ist H abg.