3. QR-Verfahren

Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ reg. Setze $A_0 = A$. Ist $k \geq 0$ und A_k geg. und reg., so haben wir eine QR-Zerl. $A_k = Q_k R_k$ mit Q_k unitär und R_k obere Dreiecksmatrix. $A_{k+1} = R_k Q_k$. Wg. $A_{k+1} = Q_k^* Q_k A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k$ ist A_{k+1} wieder reg. und das Verf. kann fortgesetzt werden.

Idee des Verfahrens: Unter geeigneter Vor. konvergiert A_k gegen eine obere Dreiecksmatrix. Die EW davon sind einfach die Diagonaleinträge. Wg. $A_k = Q_{k-1}^* A_{k-1} Q_{k-1} = \dots = \underbrace{Q_0^* \cdot \ldots \cdot Q_{k-1}^*}_{\text{unitär}} A \underbrace{Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_{k-1}}_{\text{unitär}}$

ist A_k ähnlich zu A und besitzt damit die selben EWe.

Satz: Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ reg. und diagonalisierbar mit betragsverschiedenen EWen. Sei $X \in \mathbb{K}^{N \times N}$ reg. mit $\Lambda = X^{-1} A X$ diagonal und für X^{-1} existiere eine LR-Zerl. ohne Pivotsuche. Dann gibt es obere Dreiecksmatrix $\hat{R}_k \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit $\|A_k - \hat{R}_k\| \leq C_A \left(\max_{|\lambda_n| < |\lambda_m|} \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_m|} \right)^k$ und $\hat{R}_k = \Lambda + \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Motivation für das Verf.:

$A^{k+1} = (Q_0 \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_k)(R_k \cdot \ldots \cdot R_1 \cdot R_0)$

Bew. durch Ind.: $k = 0$ ✓

$k \geq 1$: $Q_k R_k = A_k = Q_{k-1}^* \cdot \ldots \cdot Q_0^* A Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_{k-1}$

$\Rightarrow Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_k R_k = A Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_{k-1}$

$\Rightarrow Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_k R_k \cdot \ldots \cdot R_0 = A Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_{k-1} R_{k-1} \cdot \ldots \cdot R_0 \overset{\text{I.V.}}{=} A \cdot A^k = A^{k+1}$ ✓

$A^{k+1} e_1 = (Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_k) \underbrace{(R_k \cdot \ldots \cdot R_0 e_1)}_{= r_{11}^{(k)} e_1} = r_{11}^{(k)} q_1^{(k)}$

wobei r_{11} der (1,1)-Eintrag von $R_k \cdot \ldots \cdot R_0$ ist

$q_1^{(k)} = Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_k e_1$ erste Spalte von $Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_k$

„$\Rightarrow$" $q_1^{(k)}$ ist fast ein EV von A zum betragsgrößten EW

$A q_1^{(k)} \approx \lambda q_1^{(k)}$

$$A_{k+1} e_1 = Q_k^* \cdots Q_0^* A \underbrace{Q_0 \cdots Q_k e_1}_{q_1^{(k)}} \approx \lambda_1 Q_k^* \cdots Q_0^* q_1^{(k)} = \lambda_1 e_1$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \approx \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array} \right)$$

Außerdem: $q_N^{(k)} = Q_0 \cdots Q_k e_N$ letzte Spalte von $Q_0 \cdots Q_k$,

$r_{NN}^{(k)}$ - (N,N)-Eintrag von $R_k, \dots, R_0$

$$\Rightarrow q_N^{(k)*} = e_N^* Q_k^* \cdots Q_0^* = \underbrace{e_N^* R_k \cdots R_0}_{r_{NN}^{(k)} e_N^*} A^{-(k+1)} = r_{NN}^{(k)} \underbrace{e_N^* A^{-(k+1)}}_{((A^*)^{-(k+1)} e_N)^*}$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-(k+1)} e_N = \frac{1}{r_{NN}^{(k)}} q_N^{(k)}$$

„$\Rightarrow$" $q_N^{(k)}$ ist "fast" ein EV zum betragsgrößten EW von A^{-*}, was $\frac{1}{\overline{\lambda_N}}$ ist. $A^{-*} q_N^{(k)} \approx \frac{1}{\overline{\lambda_N}} q_N^{(k)}$

$$A_{k+1}^* e_N = Q_k^* \cdots Q_0^* A^* \underbrace{Q_0 \cdots Q_k e_N}_{= q_N^{(k)}} \approx Q_k^* \cdots Q_0^* q_N^{(k)} \overline{\lambda_N} =$$

$$= \overline{\lambda_N} e_N$$

$$\Rightarrow A_{k+1}^* = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ * & \vdots \\ & 0 \\ & \overline{\lambda_N} \end{array} \right) \Rightarrow A_{k+1} \approx \left(\begin{array}{ccc} & * & \\ \hline 0 \cdots 0 & & \lambda_N \end{array} \right)$$

III Nichtlineare Gleichungungen

1. Konvergenzbegriffe

Motivation: Heron-Verfahren

Geg.: $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. gesucht: $x \in \mathbb{C}$ $x^\nu = a$

Beachte Lsg. nicht eindeutig, es gibt genau ν Lsgn.

Verfahren: Startnäherung $x_0 \in \mathbb{C}$ für $k \geq 0$ setze: $x_{k+1} = \frac{1}{\nu}\left((\nu-1)x_k + \frac{a}{x_k^{\nu-1}}\right)$

Klar: Falls $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, so gilt:

$$x = \frac{1}{\nu}\left((\nu-1)x + \frac{a}{x^{\nu-1}}\right) \Rightarrow x^\nu = a$$

Unklar: konvergiert $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$? und wo gegen?

Fall $\nu = 2$: Fixiere b mit $b^2 = a$ und setze $z_k = \frac{x_k - b}{x_k + b}$

$$\Rightarrow z_{k+1} = \frac{\frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) - b}{\frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) + b} = \frac{x_k^2 + a - 2bx_k}{x_k^2 + a + 2bx_k} = \frac{(x_k - b)^2}{(x_k + b)^2} = z_k^2$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |z_k| = \begin{cases} 0 & \text{für } |z_0| < 1 \\ 1 & \text{für } |z_0| = 1 \\ \infty & \text{für } |z_0| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \begin{cases} b & \text{für } |z_0| < 1 \\ -b & \text{für } |z_0| > 1 \end{cases}$$

Außerdem: für $|z_0| = 1$ konv. x_k nicht.

Schreibe $|z_0| \lesseqgtr 1$ um in Bed in x_0: $\left|\frac{x_0 - b}{x_0 + b}\right| \lesseqgtr 1 \Leftrightarrow |x_0 - b|^2 \lesseqgtr |x_0 + b|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, \bar{x}_0 b \gtreqless 0 \quad \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \begin{cases} b & \text{für } \mathrm{Re}\, \bar{x}_0 b > 0 \\ -b & \text{für } \mathrm{Re}\, \bar{x}_0 b < 0 \end{cases}$

Im Folgenden: Fixpunktprobleme der Gestalt $\Phi(x) = x$ mit einer Fkt. $\Phi: \mathcal{D}(\Phi) \subset \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$. Iterationsverfahren: $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$. (Das setzt voraus, dass $x^{(k)} \in \mathcal{D}(\Phi)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$)

Bsp: Heron-Verf. $\Phi(x) = \frac{1}{\nu}((\nu-1)x + \frac{a}{x^{\nu-1}})$, $\mathcal{D}(\Phi) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Def.: Das Iterationsverf. heißt lokal konvergent gegen $\hat{x} \in \mathbb{K}^N$, wenn es eine offene Menge $U \subset \mathcal{D}(\Phi)$ mit $\hat{x} \in U$ gibt, so dass $\forall x^{(0)} \in U$ das obige Verfahren def. ist und gegen $\hat{x}$ konv.

Wir haben gesehen, dass für $\nu = 2$ das Heron-Verfahren lokal konv. ist

Prop.: Sei $\Phi: \mathcal{D}(\Phi) \subset \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ stetig diff.bar mit einem Fixpunkt $\hat{x}$ im Inneren von $\mathcal{D}(\Phi)$. Gibt es eine ind. M-Norm in $\mathbb{K}^{N\times N}$ mit $\|\Phi'(\hat{x})\| < 1$, so ist die Iteration lokal konv. gegen $\hat{x}$.

Beweis: Wg. Stetigkeit von Φ' gibt es ein $r > 0$ mit $U = \{x \in \mathbb{K}^N : \|x - \hat{x}\| \le r\} \subset \mathcal{D}(\Phi)$ und $\|\Phi'(x)\| \le q < 1$ $\forall x \in U$. Nach dem HDI ist $\|\Phi(y) - \Phi(x)\| = \int_0^1 \Phi'(x + t(y-x))(y-x)\,dt$

$$\Rightarrow \|\Phi(y) - \Phi(x)\| \le \int_0^1 \underbrace{\|\Phi'(x+t(y-x))(y-x)\|}_{\le \|\Phi'(x+t(y-x))\|\|y-x\| \le q\|y-x\|} dt \le q\|y-x\| \quad \forall x,y \in U$$

Weil U eine abg. Teilmenge vom vollständigen $\mathbb{K}^N$ ist, ist U vollst.

Also folgt die Beh. aus dem Banachschen Fixpunktsatz $\square$