Bem: zu A2): EW einer Matrix hängen stetig von den Einträgen ab

zu A1): z.z.: $\exists n \in \{1,\dots,N\}: |\lambda - a_{nn}| \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}|$ (Wähle n, s.d. $|x_n|$ maximal)

Aufgabe 1)

Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$

z.z.: $\exists n: |\lambda - a_{nn}| \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}|$

$$\lambda x_n = \sum_{m=1}^{N} a_{nm} x_m = a_{nn} x_n + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} a_{nm} + x_m$$

$$\Rightarrow \lambda - a_{nn} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} a_{nm} \frac{x_m}{x_n} \quad (n \text{ so gewählt, dass } |x_n| \text{ maximal})$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{nn}| = \left|\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} a_{nm} \frac{x_m}{x_n}\right| \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}| \underbrace{\frac{|x_m|}{|x_n|}}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}|$$

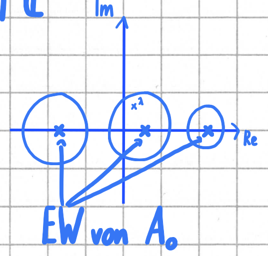
Aufgabe 2)

a) $A = D + N$, $A_\tau := D + \tau N$, $\tau \in [0,1] \Rightarrow A_1 = A$, $A_0 = D$

$\Rightarrow a_{ii}^{(0)} = \lambda_i^{(0)}$ sind EW von A_0. $\forall i \in \{1,\dots,N\}: \lambda_i^{(0)} \in K_i^{(0)}$ mit $K_i^{(0)} = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - a_{nn}^{(0)}| \leq \overbrace{\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}^{(0)}|}^{=0}\}$

$\Rightarrow K_i^{(0)} = \{\lambda_i^{(0)}\}$. Es gilt $\lambda_i^{(\tau)} \in K_i^{(\tau)} \subseteq K_i^{(1)} = K_i$ $\forall i \in \{1,\dots,N\} \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,N\}$ $\exists! \lambda_i$ EW von A s.d. $\lambda_i \in K_i$ (für genauere Lösung s. unten)

b) $\mathbb{C}$



Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von $A \Rightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \underset{\chi_A \in \mathbb{R}[x]}{\Rightarrow} \chi_A(\bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}$ EW von $A \overset{a)}{\Rightarrow} \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3)

$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wobei $\forall n \in \{1, \dots, N\}: \lambda_n := \lambda_n(A) \neq 0$

a) Sei $\tilde{z}^{(0)} = (1, \dots, 1)^T \Rightarrow z^{(0)} = \frac{\tilde{z}^{(0)}}{\|\tilde{z}^{(0)}\|} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\tilde{z}^{(0)}\right)$

$\tilde{z}^{(1)} = A \cdot \tilde{z}^{(0)} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T \Rightarrow z^{(1)} = \frac{1}{\|\tilde{z}^{(1)}\|}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$

$\tilde{z}^{(2)} = A \tilde{z}^{(1)} = (\lambda_1^2, \dots, \lambda_N^2)^T \Rightarrow z^{(2)} = \frac{1}{\|\tilde{z}^{(2)}\|}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_N^2)^T$

$\Rightarrow \tilde{z}^{(k)} = A \tilde{z}^{(k-1)} = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_N^k)^T \Rightarrow z^{(k)} = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_N^k)^T \cdot \frac{1}{\|\tilde{z}^{(k)}\|}$

Anm.: Verfahren auf dem Blatt unterschiedlich zu dem Skript.

Fehler Aufgabenstellung: $\tilde{z}^{(0)} = (1, \dots, 1)^T$ nicht $z^{(0)}$

$\tilde{x}^{(k)} = A x^{(k-1)}, \; x^{(k)} = \frac{\tilde{x}^{(k)}}{\|\tilde{x}^{(k)}\|}$ (aus der Vl.) (aus der Aufgabenstellung)

$\tilde{y}^{(k)} = A y^{(k-1)}, \; y^{(k)} = \frac{\tilde{y}^{(k)}}{\|y^{(k)}\|}$

$\Rightarrow \tilde{y}^{(1)} = A y^{(0)} = A \tilde{x}^{(0)} = \tilde{x}^{(1)} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} = \frac{A y^{(0)}}{\|A \tilde{x}^{(0)}\|}$

$\tilde{x}^{(2)} = A \tilde{x}^{(1)} = A^2 \tilde{x}^{(0)}$

$\tilde{y}^{(2)} = A y^{(1)} = \frac{1}{\|A \tilde{x}^{(0)}\|} A^2 y^{(0)} = A \frac{A y^{(0)}}{\|A \tilde{x}^{(0)}\|} = A^2 \tilde{x}^{(0)}$

$\Rightarrow$ spielt keinen Unterschied bei jedem zu normieren oder einmal beim „Ende"

b) $\langle A z^{(k)}, z^{(k)} \rangle = \frac{\langle A \tilde{z}^{(k)}, \tilde{z}^{(k)} \rangle}{\|\tilde{z}^{(k)}\|_2^2} = \frac{\langle \tilde{z}^{(k+1)}, \tilde{z}^{(k)} \rangle}{\|\tilde{z}^{(k)}\|_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{2k+1}}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{2k}} = \circledast$

Sei λ_{max} betragsmäßig größter EW. Dann $I_0 := \{j \mid \lambda_j = \lambda_{max}\}$, $I_1 = \{j \mid \lambda_j = -\lambda_{max}\}$, $I_2 = \{j \mid \lambda_j < |\lambda_{max}|\}$

$$\circledast = \frac{\sum_{i\in I_0} \lambda_{max}^{2k+1} + \sum_{i \in I_1} (-\lambda_{max})^{2k+1} + \sum_{i \in I_2} \lambda_i^{2k+1}}{\sum_{i\in I_0} \lambda_{max}^{2k} + \sum_{i \in I_1} (-\lambda_{max})^{2k} + \sum_{i \in I} \lambda_i^{2k}} = \frac{\lambda_{max}^{2k+1}\left(|I_0| - |I_1| + \overbrace{\sum_{i\in I_2} \frac{\lambda_i^{2k+1}}{\lambda_{max}^{2k+1}}}^{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\right)}{\lambda_{max}^{2k}\left(|I_0| + |I_1| + \underbrace{\sum_{i\in I_2} \frac{\lambda_i^{2k}}{\lambda_{max}^{2k}}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\right)} \xrightarrow{k\to\infty} \lambda_{max} \frac{|I_0| - |I_1|}{|I_0| + |I_1|}$$

$$\|A z^{(k)}\|_2 = \frac{\|A \tilde{z}^{(k)}\|_2}{\|\tilde{z}^{(k)}\|_2} = \frac{\|\tilde{z}^{(k+1)}\|_2}{\|\tilde{z}^{(k)}\|_2} = \left(\frac{\sum_{i\in I_0} \lambda_{max}^{2k+2} + \sum_{i \in I_1} (-\lambda_{max})^{2k+2} + \sum_{i \in I_2} \lambda_i^{2k+2}}{\sum_{i\in I_0} \lambda_{max}^{2k} + \sum_{i \in I_1} (-\lambda_{max})^{2k} + \sum_{i \in I} \lambda_i^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\lambda_{max}^{2k+2}\left(|I_0| + |I_1| + \overbrace{\sum_{i\in I_2} \frac{\lambda_i^{2k+2}}{\lambda_{max}^{2k+2}}}^{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\right)}{\lambda_{max}^{2k}\left(|I_0| + |I_1| + \underbrace{\sum_{i\in I_2} \frac{\lambda_i^{2k}}{\lambda_{max}^{2k}}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{k\to\infty} |\lambda_{max}|$$

Aufgabe 2a)

Im folgenden wird eine stärkere Aussage mit der man die Beh. folgern kann.

Satz: Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ und $K_n := \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - a_{nn}| \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}|\}$ der Gerschgorin-Kreis (zeilenweise). Es sei $\{1, ..., N\} = \mathcal{N}_1 \dot\cup \mathcal{N}_2$ mit $(\bigcup_{n \in \mathcal{N}_1} K_n) \cap (\bigcup_{n \in \mathcal{N}_2} K_n) = \emptyset$.

Dann enthält $\bigcup_{n \in \mathcal{N}_i} K_n$ genau $|\mathcal{N}_i|$ Eigenwerte von A für $i = 1, 2$.

Beweis: Für besseren Überblick seien $V_1 := \bigcup_{n \in \mathcal{N}_1} K_n$ und $V_2 := \bigcup_{n \in \mathcal{N}_2} K_n$.

Desweiteren seien $D, R \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit $D = \operatorname{diag}(a_{11}, ..., a_{NN})$ und $R = A - D$

Definiere nun: $M: [0,1] \to \mathbb{K}^{N \times N}$, $t \mapsto M(t) := D + tR$ $\Rightarrow M(0) = D, M(1) = A, M$ stetig

Es gilt: Eigenwerte von $M(t)$ hängen stetig von t ab!

Die EW von $M(0)$ sind $a_{11}, ..., a_{NN}$, welche $\forall t \in [0,1]$ die Mittelpunkte der Gerschgorin-Kreise $K_n(t)$ darstellen.

Es gilt: Radius der Gerschgorin-Kreise wird linear größer in t.

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathcal{N}_i} K_n(t) \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{N}_i} K_n$ für $i = 1, 2$ $\Rightarrow \underbrace{(\bigcup_{n \in \mathcal{N}_1} K_n(t))}_{=: V_1(t)} \cap \underbrace{(\bigcup_{n \in \mathcal{N}_2} K_n(t))}_{=: V_2(t)} \subseteq V_1 \cap V_2 = \emptyset \; \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Anzahl der Eigenwerte in $V_i(t)$, $i = 1, 2$ konstant in t.

Es gilt: Anzahl der EW in $V_i(0)$ ist $|\mathcal{N}_i|$ für $i = 1, 2$

$\Rightarrow$ Anzahl der EW von $V_i(1) = V_i$ ist $|\mathcal{N}_i|$ für $i = 1, 2$ $\square$

Korollar: Falls nun zusätzlich gilt: $K_n \cap K_m = \emptyset \; \forall n, m \in \{1, ..., N\}$ mit $n \neq m$ folgt:

Jeder Gerschgorin-Kreis enthält genau einen EW von A.

Beweis: Sei $n \in \{1, ..., N\}$ bel. aber fest. Sei dann $\mathcal{N}_1 = \{n\}$ und $\mathcal{N}_2 = \{\{1, ..., N\} \setminus \{n\}\}$

Da $V_1 \cap V_2 = \emptyset \Rightarrow V_1 = K_n$ enthält genau einen EW von A ($|\mathcal{N}_1| = 1$)

Da n bel. war, wiederhole dies $\forall n \in \{1, ..., N\}$

$\Rightarrow K_n$ enthält genau einen EW von A $\forall n \in \{1, ..., N\}$ $\square$