Aufgabe 1)

i) $\sigma(A) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)\ \sigma\text{-Alg} \\ A \subseteq \mathcal{C}}} \mathcal{C} \subseteq \bigcap_{\substack{\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(X)\ \sigma\text{-Alg} \\ B \subset \mathcal{C}'}} \mathcal{C}' = \sigma(B)$

Da $A \subset B$ folgt: alle $\mathcal{C}'$ σ-Alg. enthalten A, aber nicht alle $\mathcal{C}$ enthalten B $\Rightarrow$ Schnitt „links" über mehr σ-Alg.

Nach selbem Schema: $\text{dyn}(A) \subseteq \text{dyn}(B)$ $\square$

ii) „$\subseteq$" i)

„$\supseteq$" Beh.: $\sigma(\sigma(A)) = \sigma(A)$

„$\supseteq$" $A \subseteq \sigma(A) \overset{i)}{\Rightarrow} \sigma(A) \subseteq \sigma(\sigma(A))$

„$\subseteq$" $\sigma(\sigma(A)) = \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)\ \sigma\text{-Alg} \\ \sigma(A) \subseteq \mathcal{C}}} \mathcal{C} \subseteq \sigma(A)$

$\sigma(B) \overset{i)}{\subseteq} \sigma(\sigma(A)) = \sigma(A)$ $\square$

Aufgabe 2)

i) Sei $F \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists (M_j) \in \mathcal{I}$ mit $j = 1, \ldots, n$ und $F = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} M_j = \dot{\bigcup}_{j=1}^{2n} M_j$ mit $M_j = \emptyset$ für $j \in \{n+1, \ldots, 2n\}$ und $E = \emptyset$.

Betrachte M_x mit $x \in \{1, \ldots, n\}$

Fall 1: $M_x \cap M_i = \emptyset$ $\forall i \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus \{x\} \Rightarrow$ Setze $M_x = I_x$

Fall 2: $\exists i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{x\}$ sodass $M_x \cap M_i \neq \emptyset \Rightarrow$ Setze $M_x^{(2)} = M_x \cup M_i$,

füge i zu E hinzu und tausche M_i mit $M_{i+n} = \emptyset$ ($\Rightarrow I_i = \emptyset$)

Wiederhole nun dies* für $M_x^{(2)}$ bis $M_x^{(y)} \cap M_j = \emptyset$ $\forall j \in \{1, \ldots, 2n\} \setminus E$, $y \in \{2, \ldots, n-1\}$. Setze dann $M_x^{(y)} = I_x$.

* (Betrachtung) der beiden Fällen.

Führt man nun diesen Alg. für $x = 1, \ldots, n$ aus, erhält man $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}$ mit $I_i \cap I_j = \emptyset$ $\forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $F = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} I_i$.

ii) $\emptyset$, $\cup$-stabil klar. Es bleibt z.z.: $\mathcal{F}$ ist $\setminus$-stabil

Seien $F, G \in \mathcal{F}$ mit $F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_m \in \mathcal{I}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, s.d. $F = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} F_i$, $G = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} G_j$

$\Rightarrow F \setminus G = \left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} F_i\right) \setminus \left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{m} G_j\right) = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \underbrace{\left(F_i \setminus \left(\dot{\bigcup}_{j=1}^{m} G_j\right)\right)}_{\in \mathcal{I}}$

Wenn wir zeigen können, dass $\forall I, I' \in \mathcal{I}: I \setminus I' \in \mathcal{I}$, sind wir fertig.

Somit seien $I, I' \in \mathcal{I}$, $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $a' \leq b'$ s.d.

$I = [a,b[$, $I' = [a',b'[$. Definiere nun $e = \max\{a, a'\}$, $f = \min\{b, b'\}$

$$\Rightarrow I \cap I' = \begin{cases} [e,f[, & \text{falls } e \leq f \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun nutzen wir $I \cap I' \neq \emptyset$ andern falls sind wir wegen

$I \setminus I' = I \setminus (I \cap I') = I \in \mathcal{I}$ fertig. Somit können wir $I' \subseteq I$ annehmen.

$\Rightarrow a \leq a'$ und $b' \leq b \Rightarrow [a,b[\setminus [a',b'[= [a,a'[\cup [b',b[\in \mathcal{I}$

$\Rightarrow I \setminus I' \in \mathcal{I}$

$\Rightarrow F \setminus G \in \mathcal{F}$ $\square$

Aufgabe 3)

i) $\mathcal{P}(X)$ σ-Algebra ✓

$\mu(\emptyset) = \#\{x \in X \mid x \in \emptyset\} = 0$ ✓

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $A_j \cap A_k = \emptyset$ $\forall j \neq k$.

$\mu(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \#\{x \in X \mid x \in \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n\} = \#\{x \in X \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots\} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \#\{x \in X \mid x \in A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ ✓ $\square$

ii) $\mathcal{A}$ σ-Algebra ✓

$\delta_x(\emptyset) = 0$ ✓

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Sei nun $x \in A_m$ für $m \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow x \in \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \delta_x(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n) = 1$, da

$\delta_x(A_m) = 1$ und $\delta_x(A_n) = 0$ $\forall n \neq m$

Sei nun $x \notin A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \delta_x(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n) = 0$

Insgesamt folgt: $\delta_x(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n)$ $\forall x \in X$ ✓

iii) $\mathcal{F}$ Ring ✓

Mit Aufgabe 2a): $\forall F \in \mathcal{F}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_n < b_n$ mit $F = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} [a_j, b_j[$

Definiere $\mu_G(F) := \sum_{j=1}^{n} (G(b_j) - G(a_j)) \geq 0$ (wg. Isotonie), falls $F \neq \emptyset$

$\mu_G(F) := 0$, falls $F = \emptyset$ ✓

Sei $(A^{(i)})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ mit $A^{(n)} \cap A^{(m)} = \emptyset \; \forall n \neq m$ und $A_b^{(i)} \in \mathcal{I}$ mit $A^{(i)} = \dot{\bigcup}_{b=1}^{n} A_b^{(i)}$

$\mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(G(b_i^{(j)}) - G(a_i^{(j)})\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A^{(j)})$ ✓

$\mu(\emptyset) = 0$ ✓

$\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \in \mathcal{F}$ ✓