15.10.18

# Numerik

## I. Lineare Gleichungssysteme

Bsp. $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b' \quad \text{mit } b' = \begin{pmatrix} 32{,}1 \\ 22{,}9 \\ 33{,}1 \\ 30{,}9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ -12{,}6 \\ 4{,}5 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ relative Änderung in $b$: $\sim \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{23} \approx \frac{1}{100}$

$\rightsquigarrow$ relative Änderung in $x$: $\frac{13{,}6}{1} \approx 10$

$\rightsquigarrow$ relative Verstärkung von $\sim 1000$

$$A'x = b \quad \text{mit } A' = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8{,}1 & 7{,}2 \\ 7{,}08 & 5{,}04 & 6 & 5 \\ 8 & 5{,}98 & 9{,}89 & 9{,}0 \\ 6{,}99 & 4{,}99 & 9 & 9{,}98 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $A$: $\lambda_1 \approx 0{,}01$, $\lambda_2 \approx 0{,}83$, $\lambda_3 \approx 3{,}86$, $\lambda_4 \approx 30{,}29$

$$\boxed{\frac{\lambda_4}{\lambda_1} \approx 2984}$$

### Vektor- und Matrixnormen

Wir schreiben $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition: Sei $X$ $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X \to [0, \infty[$ heißt Norm, falls $\forall x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung ($\Delta$-#)

Bsp. Sei $x \in X = \mathbb{K}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$

1) Betragssummennorm: $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |x_n|$

2) euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3) Maximumsnorm: $\|x\|_\infty = \max_{n=1,\dots,N}(|x_n|)$

Verifikation der $\Delta$-≠ für $\|\cdot\|_2$:

Cauchy-Schwarz-Ungl.: $x, y \in \mathbb{K}^N$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \overline{x_n}\, y_n\right| = |x^* y| \leq \sqrt{x^* x}\sqrt{y^* y} = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Hiermit folgt:

$$\|x+y\|_2^2 = (x+y)^*(x+y) = x^*x + 2\overbrace{\operatorname{Re}(x^*y)}^{\leq |x^*y|} + y^*y \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} x^*x + 2\|x\|_2\|y\|_2 + y^*y =$$
$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

Lemma: $\forall x, y \in X$ mit $X$ $\mathbb{K}^N$-VR gilt: $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$

Beweis: $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

vertausche nun $x$ und $y$: $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$

insgesamt folgt: $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$ □

Proposition: Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen in $\mathbb{K}^N$. Dann $\exists\, 0 < c \leq C < \infty$, so dass: $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ $\forall x \in \mathbb{K}^N$ (man sagt dann: $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalente Normen)

Insbesondere hängt der Konvergenzbegriff in $\mathbb{K}^N$ nicht von der Wahl der Norm ab und ist immer äquivalent zur komponentenweisen Konv.

Beweis (der Prop.): Es genügt $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$ zu betrachten (betrachte dann den Satz zweimal). Die Menge $\{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach Heine-Borel kompakt. (bzgl. der eukl. Norm)

Außerdem ist für $x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$ ($e_n$ Basisvektoren für $\mathbb{K}^N$)

$$\|x\|' \leq \sum_{n=1}^{N} \|x_n e_n\|' = \sum_{n=1}^{N} |x_n|\,\|e_n\|' \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \|e_n\|'^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=: C} = C\|x\|_2$$

Nach dem Lemma gilt: $|\,\|x\|' - \|y\|'\,| \leq \|x-y\|' \leq C\cdot\|x-y\|_2$

D.h. $x \mapsto \|x\|'$ ist stetig bzgl. der eukl. Norm.

Daher nimmt die Funktion auf der kompakten Menge

$\{x\in\mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\}$ ihr Minimum an. Sei $c := \min\limits_{\|x\|_2=1} \|x\|'$, dann ist $c>0$.

Für jedes $x\in\mathbb{K}^N$ ist: $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_2 = 1 \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|' \geq c \Rightarrow c\|x\|_2 \leq \|x\|'$

Insgesamt: $c\|x\|_2 \leq \|x\|' \leq C\|x\|_2$ □

$A = (a_{nm})_{n,m=1}^N \in \mathbb{K}^{N\times N}$

Bsp.: 1) Spaltensummennorm: $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq m\leq N} \sum\limits_{n=1}^N |a_{nm}|$

2) Zeilensummennorm: $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq n\leq N} \sum\limits_{m=1}^N |a_{nm}|$

3) Frobenius-Norm: $\|A\|_F = \left(\sum\limits_{n,m=1}^N |a_{nm}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (auch Hilbert-Schmidt-Norm)

Proposition: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^N$. Dann definiert

$\|A\| := \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$ eine Norm, die sog. induzierte Matrixnorm

und für diese Norm gilt die Submultiplikativität: $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

Bemerkung: $\|A\|_1$ ist die von $\|x\|_1$ induzierte Matrixnorm und 17.10.18

$\|A\|_\infty$ ist die von $\|x\|_\infty$ induzierte Matrixnorm, d.h.

$\|A\|_1 = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$, entspr. für $\|A\|_\infty$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{n=1}^N |(Ax)_n| = \sum_{n=1}^N \left|\sum_{m=1}^N a_{nm}x_m\right| \leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |a_{nm}|\,|x_m| = \sum_{m=1}^N \underbrace{\left(\sum_{n=1}^N |a_{nm}|\right)}_{\leq \|A\|_1} |x_m| \leq$$

$$\leq \|A\|_1 \|x\|_1 \Rightarrow \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1$$

Umgekehrt, wähle $m$ s.d. $\sum\limits_{n=1}^N |a_{nm}| = \|A\|_1$ und $x = e_m \Rightarrow (Ax)_n = a_{nm}$

$\Rightarrow \|Ax\|_1 = \sum\limits_{n=1}^N |a_{nm}| = \|A\|_1$, $\|x\|_1 = 1$ □

Warnung: $\|A\|_F$ ist nicht die von $\|x\|_2$ induzierte Matrixnorm.

(denn $\|\mathbb{1}\|_F = \sqrt{N}$, aber für jede ind. Matrixnorm ist $\|\mathbb{1}\| = 1$)