Aufgabe 1)

Sei $f \in C^{p+1}[a,b], p \geq 2$ und $\hat{x} \in]a,b[$ s.d. $f(\hat{x}) = f'(\hat{x}) = \dots = f^{(p-1)}(\hat{x}) = 0$, aber $f^{(p)}(\hat{x}) \neq 0$.
Zeige, dass dann das Newton-Verfahren lokal linear (Konvergenzordnung 1) gegen $\hat{x}$ konvergiert. (Tipp: Taylor-Entwicklung)

zum Newton-Verfahren:

Nullstellenproblem $\rightsquigarrow$ Fixpunktproblem

$\Rightarrow \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ bzw. Fixpunktiteration $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

- Grundsätzlich nur lokale Konvergenz, globale Konvergenz z.B. für strikt monoton wachsende konvexe Funktionen.

zur Konvergenzordnung:

Konv.ord = größtes $p \geq 1$ s.d. $\exists$ Umgebung $U \subseteq D(\Phi)$ von $\hat{x}$ s.d. $\exists$ Konstante $C > 0$ s.d. $\forall x^{(0)} \in U$ und $\forall k \in \mathbb{N}$: $\|x^{(k+1)} - \hat{x}\| \leq C \cdot \|x^{(k)} - \hat{x}\|^p$ (bzw. s.d. $\Phi(U) \subseteq U$ und $\forall x \in U: \|\Phi(x) - \hat{x}\| \leq C \cdot \|x - \hat{x}\|^p$). Für genaue Konvergenzordnung p ($\rightsquigarrow$ ÜB 7 A1) zusätzlich: $\exists c > 0$ s.d. $\forall x \in U$: $c\|x - \hat{x}\|^p \leq \|\Phi(x) - \hat{x}\|$

„Faustregel" (Achtung, kein mathematischer Satz):

Bei Iterationsverfahren der Konvergenzordnung p erwartet man, dass sich die Anzahl der richtigen Dezimalstellen bei jeder Iteration „ver-p-facht".

Aufgabe 2)

Das Sekantenverfahren ist eine Variation des Newton-Verfahrens, bei der die Ableitung durch den Differenzenquotienten approximiert wird. Die Iterationsvorschrift lautet $x_{k+1} = x_k - \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^{-1} \cdot f(x_k)$.
Reflektiere die geometrische Interpretation des Verfahrens und mache dir klar, wie man zu der Iterationsformel kommt.

zum Sekantenverfahren:

man kann zeigen: (müsst ihr jetzt nicht!):

Sei $f \in C^2[a,b]$ mit Nullstelle $\hat{x}$ in $]a,b[$ und $f'(\hat{x}) \neq 0$ sowie $f''(\hat{x}) \neq 0$.
Dann konvergiert das Sekantenverfahren lokal geg. $\hat{x}$ mit Konvergenz-

ordnung $p = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ (goldener Schnitt).

Aufgabe 3)

Sei $f(t) = \frac{a}{1-ce^{-dt}}$ und $f(\hat{t}) - 9 = 0$. f modelliert die Entwicklung der Weltbevölkerung in Mrd., abhängig von t (in Jahren). Die Nst. $\hat{t}$ von $f(t)-9$ gibt den Zeitpunkt an, ab dem die Weltbevölkerung die 9 Mrd.-Grenze überschreitet.

Parameter: $a = 9.8606$, $c = -1.1085 \cdot 10^{25}$, $d = 0.029$.

Vgl. anhand dieses Problems das Newton- und das Sekantenverfahren (Berechne einige Iterationen für den Startwert $t_0 = 1961$ (Newton) bzw. $t_0 = 1961$, $t_1 = 2200$ (Sekantenverfahren) zu 1) $f(\hat{x})=f'(\hat{x})=\dots=f^{(p-1)}(\hat{x})=0,\ f^{(p)}(\hat{x})\neq 0$ bedeutet, dass f eine p-fache Nst. in $\hat{x}$ hat. Wir entwickeln $f(x)$ um $\hat{x}$: $\underbrace{f(x)=\sum_{n=0}^{p}\frac{f^{(n)}(\hat{x})}{n!}(x-\hat{x})^n}_{\text{Taylor}}+O(|x-\hat{x}|^{p+1})=$

$$=\frac{f^{(p)}(\hat{x})}{p!}(x-\hat{x})^p+O(|x-\hat{x}|^{p+1})$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f^{(p)}(\hat{x})}{p!}p\cdot(x-\hat{x})^{p-1}+O(|x-\hat{x}|^{p})=\frac{f^{(p)}(\hat{x})}{(p-1)!}(x-\hat{x})^{p-1}+O(|x-\hat{x}|^{p})$$

In einer Umgebung von $\hat{x}$ konvergiert die Fixpunktit. $\Phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\Rightarrow \Phi(x)=x-\frac{\frac{f^{(p)}}{p!}(x-\hat{x})^p+O(|x-\hat{x}|^{p+1})}{\frac{f^{(p)}}{(p-1)!}(x-\hat{x})^{p-1}+\underbrace{O(|x-\hat{x}|^{p})}_{\to 0}}=x-\frac{\frac{f^{(p)}}{p!}(x-\hat{x})^p}{\frac{f^{(p)}}{(p-1)!}(x-\hat{x})^{p-1}}-\frac{O(|x-\hat{x}|^{p+1})}{\frac{f^{(p)}(\hat{x})}{(p-1)!}(x-\hat{x})^{p-1}}=$$

$$=x-\frac{1}{p}(x-\hat{x})+O(|x-\hat{x}|^2)$$

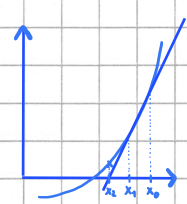
$$\Rightarrow |\Phi(x_k)-\hat{x}|=|x_k-\hat{x}|-\frac{1}{p}(x_n-\hat{x})+O(|x-\hat{x}|^2)=\underbrace{\left(1-\frac{1}{p}\right)}_{=:C}(x_k-\hat{x})^1+O(|x-\hat{x}|^2)$$

$\Rightarrow$ lin. Konvergenz

zu 2) Gleichung der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1|f(x_1))$: $s(x)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}x+t$

$$f(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\cdot x_0+t \Rightarrow t=f(x_0)-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\cdot x_0 \xrightarrow{\text{in } s(x)} s(x)=(x-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+f(x_0)$$

$$s(x_2)=0 \Leftrightarrow x_2=-f(x_0)\cdot\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}+x_0$$



zu 3) Newton: $t_k-\frac{f(t_k)}{f'(t_k)}$

$$\Rightarrow f'(t)=f(t)\cdot d\cdot(a-f(t))\cdot a^{-1}$$

$$\Rightarrow t_{k+1}=t_k+\frac{d}{a}\frac{f(t_k)-g}{f(t_k)\cdot(f(t_k)-a)} \quad \text{Newton}$$

$$\Rightarrow t_{k+1}=t_k-\frac{t_k-t_{k-1}}{\left(\frac{a}{1-ce^{-dt_k}}-g\right)-\left(\frac{a}{1-ce^{-dt_{k-1}}}-g\right)}\left(\frac{a}{1-ce^{-dt_k}}-g\right) \quad \text{Sekanten}$$

k	Newton	Sekanten
0	1961	1961
1	2058.0590	2200

2	2068,1147	2170,4132
3	2069,4592	1340,0921
4	2069,4811	2101,8273
5	⋮	2061,3666
6		2072,9977
7		2069,8129

↑

konvergiert langsamer dennoch Vorteil
bei Implementierung (man benötigt Ableitung nicht)