Aufgabe 1)

Prüfen Sie die Normeigenschaften der folgenden Vektornormen nach:

a) $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |x_n|$

b) $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad x \in \mathbb{K}^N$

c) $\|x\|_\infty = \max_{1 \le n \le N} |x_n|$

Aufgabe 2)

Prüfen Sie die Normeigenschaften der folgenden Matrixnormen nach:

a) $\|A\|_1 = \max_{1 \le m \le N} \sum_{n=1}^{N} |a_{nm}|$

b) $\|A\|_\infty = \max_{1 \le n \le N} \sum_{m=1}^{N} |a_{nm}|$

c) $\|A\|_F = \left(\sum_{n,m=1}^{N} |a_{nm}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 3)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Berechne $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$ und $\|A\|_F$.

$\|A\|_1 = 14$

$\|A\|_\infty = 10$

$\|A\|_F = 11$

$\|A\|_2 \approx 10{,}46$ (Eigenwerte A^*A: $\lambda_1 \approx 0{,}06$, $\lambda_2 \approx 11{,}5$, $\lambda_3 \approx 109{,}44$)

Aufgabe 4)

Sei $\varepsilon > 0$. $\mathbb{K}^{N \times N} \ni A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 3\varepsilon & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Für welche ε ist A_ε invertierbar?

Vergleiche das exakte Resultat mit dem Störungsresultat.

(d.h. wann wäre A_ε laut Störungstheorie regulär, setze dazu $\Delta A = A_\varepsilon - A_0$)

$\det(A_\varepsilon) = 18 - 27\varepsilon^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \varepsilon_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, aber $\varepsilon > 0 \Rightarrow A_\varepsilon$ regulär für $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$. Störungstheorie: $\|\Delta A\| \le \|A_0^{-1}\|^{-1}$ (mit $\|\cdot\|$ ind. M-Norm)

Sei z.B. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty \Rightarrow \|A_0^{-1}\|_\infty = 1$, $\|A_\varepsilon\|_\infty = 3\varepsilon$

$\Rightarrow A_\varepsilon = A_0 + \Delta A$ regulär $\|\Delta A\| < \|A_0^{-1}\|^{-1} \Rightarrow 3\varepsilon < 1 \Rightarrow \varepsilon < \frac{1}{3}$