Proposition 2.14 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ konvex. Dann gibt es Hyperebene die M, $\{0\}$ trennt.

Beweis: Sei $\overline{M}$ der Abschluss von M in $\mathbb{R}^n$. $\overline{M}$ ist konvex. Falls $0 \notin \overline{M}$, dann folgt die Beh. mit Prop. 2.11 (in diesem Fall ist die Trennung sogar strikt)

Sonst: 0 ist auf dem Rand von $\overline{M}$. Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ die gegen 0 konv.

Mit Satz 2.13 $\forall l \in \mathbb{N}\ \exists H_l = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y_l^T x = \alpha_l\}$ Hyperebene die $\overline{M}$ und $\{x_l\}$ trennt. O.B.d.A.: $\|y_l\|_2 = 1\ \forall l \in \mathbb{N}$. Aus Definition: $\forall x \in \overline{M}: y_l^T x > \alpha_l > y_l^T x_l$ (strikte Trennung). Da $0 \in \overline{M}$ und $\|y_l^T x_l\|_2 \xrightarrow{l\to\infty} 0$ folgt: $0 = y_l^T 0 > \alpha_l > y_l^T x_l \to 0$

$\Rightarrow \alpha_l \xrightarrow{l\to\infty} 0$. Die y_l's sind alle in der kompakten Menge: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ mit Bolzano-Weierstraß gilt $\exists$ Teilfolge $(y_{l_i})_{i\in\mathbb{N}}$ der $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und y mit $\|y\|_2 = 1$ so dass $y_{l_i} \xrightarrow{i\to\infty} y$. Damit für $x \in \overline{M}$: $y^T x = \lim_{i\to\infty} y_{l_i}^T x \geq \lim_{i\to\infty} \alpha_{l_i} = 0$

Damit trennt die Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = 0\}$ M und $\{0\}$. $\square$

Satz 2.15 Seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ disjunkt, nicht leer, konvex. Dann existiert Hyperebene, die M_1, M_2 trennt.

Beweis: Übung.

2.3 Stützeigenschaften

8.11.18

Idee: Beschreibe konv. Mengen von „außen"

Def. 2.16 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer, konvex, abgeschlossen. Eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \alpha\}$ mit $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Stützhyperebene für M, falls mit $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x \geq \alpha\}$, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq \alpha\}$ gilt:

i) $M \cap H \neq \emptyset$

ii) Entweder $M \subseteq H^+$ oder $M \subseteq H^-$ (exklusives oder)

H^+ bzw H^- heißt Stützhalbraum für M. (dort wo M enthalten ist)

Für $M \subseteq H^+$ heißt $-y$ bzw für $M \subseteq H^-$ heißt y die äußere Normale für H.

Lemma 2.17: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht-leer, konvex, kompakt, sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Dann existiert eine Stützebene für M mit äußerer Normale y.

Beweis: $x \mapsto y^T x$ ist stetig. Da M kompakt ist, wird das Maximum über M angenommen. $\alpha := \max\{y^T x \mid x \in M\}$. Insbesondere: $y^T x \leq \alpha \ \forall x \in M$ und $\exists x^* \in M$ mit $y^T x^* = \alpha$. Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \alpha\}$. Dann $M \cap H \neq \emptyset$, da $x^* \in M \cap H$ und $M \subseteq H^-$. $\square$

Bem.: Kompaktheit ist essentiell!

Satz 2.18: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, nicht-leer, konvex, abgeschlossen. Sei S die Menge der Stützhalbräume von M. Dann $M = \bigcap_{s \in S} s$

Beweis: "$\subseteq$" $\forall s \in S$: $M \subseteq s \Rightarrow M \subseteq \bigcap_{s \in S} s$

"$\supseteq$" Durch Widerspruch: Sei $z \in \bigcap_{s \in S} s \setminus M$ (Annahme)
Mit Satz 2.13: $\exists H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \alpha\}$, welche M und $\{z\}$ strikt trennt. Wir nehmen o.B.d.A.: $M \subseteq H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \geq \alpha\}$ und damit $z \in H^-$, also auch $y^T z < \alpha$. Sei $\bar{\alpha} = \min\{y^T x \mid x \in M\}$ (min wird angenommen Prop. 2.11). Dann $\bar{\alpha} \geq \alpha$. Sei $\bar{H} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \bar{\alpha}\}$
Daraus folgt: 1) $M \subseteq \bar{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : y^T x \geq \bar{\alpha}\}$, 2) $M \cap \bar{H} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{H}^+ \in S$
3) $y^T z < \alpha \Rightarrow y^T z < \bar{\alpha} \Rightarrow z \notin \bar{H}^+$
$\Rightarrow z \notin \bigcap_{s \in S} s$ ↯ zur Annahme $\square$

Insgesamt: M konvex, abgeschlossen $\Leftrightarrow$ M Durchschnitt von Halbräumen

2.4 Konvexe Funktionen

Def. 2.19 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. $f: M \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls $\forall x_1, x_2 \in M$ $\lambda \in [0,1]$: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.
f heißt strikt konvex, falls $\forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in]0,1[$ die Ungleichung strikt ist.
f heißt (strikt) konkav, wenn $-f$ (strikt) konvex ist.

Def. 2.20: $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: M \to \mathbb{R}$. Dann heißt $\mathcal{E}(f) = \{(x,\alpha) \in M \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$ der Epigraph von f. Für $b \in \mathbb{R}$ sei $N_f(b) = \{x \in M \mid f(x) \leq b\}$ die Niveaumenge zum Niveau b.

Satz 2.21 Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann:

i) f konvex $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}(f)$ konvex

ii) f konvex $\Rightarrow$ $N_f(b)$ konvex $\forall b \in \mathbb{R}$

Beweis: i) „$\Rightarrow$" Seien $z_1 = (x_1, \alpha_1), z_2 = (x_2, \alpha_2) \in \mathcal{E}(f)$. Aus Def. $f(x_1) \leq \alpha_1$, $f(x_2) \leq \alpha_2$. Für $\lambda \in [0,1]$ sei $z^{(\lambda)} := \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 =$
$= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2)$. Da f konvex:

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$

$\Rightarrow (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2) = z^{(\lambda)} \in \mathcal{E}(f)$

„$\Leftarrow$" Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \mathcal{E}(f)$. Da $\mathcal{E}(f)$ konvex: $\forall \lambda \in [0,1]$: $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \in \mathcal{E}(f)$

$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \Rightarrow f$ konvex $\square$

ii) analog zu i) „$\Rightarrow$" $\square$

Bem.: Die Umkehrung in ii) gilt nicht. Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Somit ist f nicht konvex. Für $b \in \mathbb{R}$ ist $N_f(b) =]-\infty, \lfloor b \rfloor + 1[$ konvex.

Äquivalent zu Def. 2.19: f konvex über M, M konvex $\Leftrightarrow$ $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_m \in M, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$$

Beweis: Übung $\square$

Satz 2.22 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f, g: M \to \mathbb{R}$ konvex, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Dann: $\alpha \cdot f$, $f+g$, $\max\{f, g\}$ ebenfalls konvex. Im allgemeinen sind $f \cdot g$, $\min\{f, g\}$, $f - g$ nicht konvex.

Beweis: Übung □

Satz 2.23 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, $f: M \to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig im Inneren von M.

Beweis: Übung □

Bem.: Die Konklusion ist bestmöglich, z.B. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \{1, 0\} \\ 0, & x \in]0,1[\end{cases}$$