Aufgabe 1)

a) Bestimme die LR-Zerlegung von $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\1&8&0\end{pmatrix}$ (ohne Pivotsuche)

b) Sei $b=(1,1,1)^T$, löse $Ax=b$

a) $A^{(1)}=A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\\1&8&0\end{pmatrix} \Rightarrow L_1=\begin{pmatrix}1&&\\-2&1&\\-1&&1\end{pmatrix} \Rightarrow L_1A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&8&-1\end{pmatrix}=A^{(2)}$

$\Rightarrow L_2=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&-4&1\end{pmatrix} \Rightarrow L_2A^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=R$

$L_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&4&1\end{pmatrix},\ L_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\1&&1\end{pmatrix} \Rightarrow L=\begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\1&4&1\end{pmatrix} \Rightarrow A=LR$

b) $Lz=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&&\\2&1&\\1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow z_1=1,\ z_2=-1,\ z_3=4$

$Rx=z \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&&1\\&2&0\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow x_3=-4,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_1=5$

$\Rightarrow x=\begin{pmatrix}5\\-\frac{1}{2}\\-4\end{pmatrix}$

Aufgabe 2) Sei $\varepsilon>0$ und $A=\begin{pmatrix}\varepsilon&-1\\1&2\end{pmatrix}$ (ε „klein")

a) Berechne $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und $\mathrm{cond}_\infty(R)$ wobei $A=LR$ die LR-Zerlegung von A ist.

b) Löse $Ax=b$ mit $b=(-4,6)^T$ für $\varepsilon=10^{-3}$ mittels LR-Zerlegung. Wie groß ist der rel. Fehler, wenn die Rechnung auf einem Rechner mit 3-stelliger Dezimaldarstellung durchgeführt wird?

a) $A^{-1}=\frac{1}{2\varepsilon+1}\begin{pmatrix}2&1\\-1&\varepsilon\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\cdot\|A^{-1}\|=3\cdot\frac{3}{2\varepsilon+1}=\frac{9}{2\varepsilon+1}$

$A^{(1)}=A=\begin{pmatrix}\varepsilon&-1\\1&2\end{pmatrix} \Rightarrow L_1=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{\varepsilon}&1\end{pmatrix} \Rightarrow L_1A=\begin{pmatrix}\varepsilon&-1\\0&\frac{1}{\varepsilon}+2\end{pmatrix}=A^{(2)}=R$

$\Rightarrow L=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{\varepsilon}&1\end{pmatrix},\ L^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{\varepsilon}&1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{cond}_\infty(L)=\|L\|_\infty\cdot\|L^{-1}\|_\infty=(1+\frac{1}{\varepsilon})^2\approx\frac{1}{\varepsilon^2}$

$\mathrm{cond}_\infty(R)=\|R\|_\infty\cdot\|R^{-1}\|_\infty=\frac{3}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon^2}\approx\frac{1}{\varepsilon^2}$

b) exakte Lösung: $A^{-1}b = x$ (mit $\varepsilon = 10^{-3}$)

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1,996 & 0,998 \\ -0,998 & 0,001 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (-1,996\ ,\ 3,998)^T$

Rechner-Lösung: (alle folgenden Rechnungen sind auf 3 Stellen genau)

$R = \begin{pmatrix} 0,001 & -1 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}$, $y = L^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4010 \end{pmatrix}$

$Rx = y \Rightarrow x = (10,\ 4,01)$ ← extrem schlecht (Vorzeichen in x_1 stimmt nichtmal) Grund: Pivotelement sehr klein $a_{11} = 10^{-3} \Rightarrow l_{12} = \frac{1}{\varepsilon} = 10^3$

rel. Fehler: $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty = 11,996 / 3,998 \approx 3 = 300\%$

Aufgabe 3)

Verifiziere, dass der Rechenaufwand bei der LR-Methode zur Lösung von $Ax = b$ $O(n^3)$ ist.

im n-ten Schritt braucht man zur Berechnung von $A_{n+1} = L_n A^{(n)}$ $(N-n)^2$ Multiplikationen und dazu kommen $(N-n)$ Divisionen zur Berechnung von L_n bzw. l_n. Insgesamt $N-1$ Schritte für $N \times N$ Matrix. $\Rightarrow$ Aufwand $\hat{=} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n)^2 + (N-n) = \sum_{n=1}^{N-1} (N-n+1)(N-n) = \sum_{k=1}^{N-1} (k+1)(k) =$

$= \sum_{k=1}^{N-1} k^2 + k = \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{3}N = O(N^3)$

Aufwand für $Ly = b$: $O(N^2)$ Mult.

Aufwand für $Rx = y$: $O(N^2)$ Mult + $O(N)$ Div.

$\Rightarrow$ Insgesamt für Lösung der Δ-Systeme $O(N^2)$ Operationen und ist somit geg. über $O(N^3)$.