Bsp. vom letzten Mal: $A \rightsquigarrow \lambda_4 \approx 30.29,\ \lambda_1 \approx 0.01$

$\Rightarrow \operatorname{cond}(A) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \approx 2984$

22.10.18

Satz: Mit $\|\cdot\|$ werde sowohl die V-Norm als auch die ind. M-Norm bezeichnet. Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ regulär und seien $b, x, \Delta b, \Delta x \in \mathbb{K}^N$ mit $Ax = b$ und $(Ax + A\Delta x) = b + \Delta b$. Dann gilt:

$\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$ und $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \operatorname{cond}(A)\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

Beweis: $A\Delta x = \Delta b$, $\Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$

Außerdem ist $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\| \Rightarrow \|x\|^{-1} \le \|A\|\,\|b\|^{-1}$

Zusammen multipliziert folgt die Beh. □

Störungsresultate für Matrizen

Lemma: Sei $\|\cdot\|$ eine ind. M-Norm. Sei $B \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit $\|B\| < 1$. Dann ist $I + B$ regulär mit $\|(I+B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|B\|}$ mit I Einheitsm. in $\mathbb{K}^{N\times N}$

Beweis: Für $x \in \mathbb{K}^N$ ist $\|(I+B)x\| \ge \|x\| - \|Bx\| \ge (1 - \|B\|)\,\|x\|$

$\Rightarrow I + B$ ist regulär. Setzt man $x = (I+B)^{-1}y$ erhält man:

$\|y\| \ge (1 - \|B\|)\,\|(I+B)^{-1}y\|$, d.h. $\|(I+B)^{-1}y\| \le \frac{1}{1-\|B\|}\,\|y\|$ □

Korollar: Sei $\|\cdot\|$ ind. M-Norm, $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ reg., $\Delta A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit $\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, so ist $A + \Delta A$ reg. mit $\|(A+\Delta A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|\Delta A\|\,\|A^{-1}\|}\,\|A^{-1}\|$ und

$\|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\| \le 2\,\|A^{-1}\|^2\,\|\Delta A\|$ für $\|\Delta A\| \le \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1}$

Beweis: Wir schreiben $A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$. Wegen $\|A^{-1}\Delta A\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1$ und des Lemmas ist $I + A^{-1}\Delta A$ und damit auch $A + \Delta A$ regulär mit

$(A+\Delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} \Rightarrow \|(A+\Delta A)^{-1}\| \le \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\|\,\|A^{-1}\| \le$

$\le \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}\,\|A^{-1}\| \le (1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|)^{-1}\,\|A^{-1}\|$

Es gilt: $(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1} = -(A+\Delta A)^{-1}(\Delta A)A^{-1}$

$\Rightarrow \|(A+\Delta A)^{-1} - A^{-1}\| \le \|(A+\Delta A)^{-1}\|\,\|\Delta A\|\,\|A^{-1}\| \le (1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|)^{-1}\,\|A^{-1}\|^2\,\|\Delta A\| \le$

$\le 2\,\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|$

für $\|\Delta A\| \le \frac{1}{2}(\|A^{-1}\|)^{-1}$

Satz: Mit $\|\cdot\|$ werde V-Norm als auch die davon ind. M-Norm bezeichnet. Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ regulär, $\Delta A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit $\|\Delta A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ und seien $b, x, \Delta x, \Delta b \in \mathbb{K}^N$ mit $Ax = b$ und $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$

Dann gilt $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \operatorname{cond}(A) \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$

Beweis: $(A+\Delta A)(\Delta x) = \Delta b - \Delta A x \Rightarrow \Delta x = (A+\Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta A x)$

$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \left(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\|x\|\right) \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\left(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\|x\|\right)$

Wie im vorausgehenden Satz ist $\frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|b\|}$.

Zusammen folgt die Beh. $\square$

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißt strikt diagonal-dominant, falls:

$$|a_{nn}| > \sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N} |a_{nm}| \quad \forall n \in \{1,\dots,N\}$$

Lemma: Ist $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ strikt diagonal dominant, so ist A reg. und

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{1\leq n\leq N}\left(|a_{nn}| - \sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}|a_{nm}|\right)^{-1}$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{K}^N$ und wähle n s.d. $|x_n| = \|x\|_\infty$

$$|(Ax)_n| = \left|a_{nn}x_n + \sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N} a_{nm}x_m\right| \geq |a_{nn}||x_n| - \sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}|a_{nm}||x_m| \geq$$

$$\geq \left(|a_{nn}| - \sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}|a_{nm}|\right)\|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_n| \geq \left(|a_{nn}| - \sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}|a_{nm}|\right)\|x\|_\infty \geq \overbrace{\min_{1\leq n'\leq N}\left(|a_{n'n'}| - \sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}|a_{n'm}|\right)}^{=:\,c\,>\,0,\ \text{wg. strikt diag-dom.}}\|x\|_\infty$$

$\Rightarrow A$ regulär und (mit $x = A^{-1}y$) $\|y\|_\infty = c\|A^{-1}y\|_\infty \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ $\square$

1.2. LR-Zerlegung

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 & & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =1 \\ x_1 & +8x_2 & & =1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 & & +x_3 & =1 \\ & 2x_2 & & =-1 \\ & 8x_2 & -x_3 & =0 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 & & +x_3 & =1 \\ & 2x_2 & & =-1 \\ & & -x_3 & =4 \end{matrix}$

Betrachte das Gleichungssystem:
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = b_N \end{matrix}$$

Annahme $a_{11} \neq 0$. Für $n = 2, \dots, N$ multipliziere die erste Zeile mit $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ und subtrahiere das von der n-ten Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2N}^{(2)}x_N = b_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_{N2}^{(2)}x_2 + a_{N3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{NN}^{(2)}x_N = b_N^{(2)} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Matrixschreibweise: $A^{(2)}x = b^{(2)}$, aber wie entsteht $A^{(2)}$ aus $A^{(1)} := A$?

Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^N$, sei $n \in \{1, \dots, N\}$ mit $y_n \neq 0$. Setze $l_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{n+1}/y_n \\ \vdots \\ y_N/y_n \end{pmatrix} \leftarrow n+1$ Zeile

Betrachte $L_n := I - l_n e_n^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -y_{n+1}/y_n & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -y_N/y_n & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow n+1$ Zeile

$\uparrow$ n-te Spalte

L_n wird Frobeniusmatrix / Eliminationsmatrix genannt.

$L_n y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$