Beweis: $|a_{11}^{(1)}| = |a_{11}| > \sum_{m=2}^{N} |a_{1m}| \geq 0$. Schreibe $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ b & B \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ 0 & C \end{pmatrix}$

Beh: C strikt diagonal dominant. $(\Rightarrow a_{22}^{(2)} = C_{11} \neq 0$ und damit durch Iteration das Lemma)

Beweis: Wir wissen: $A^{(2)} = [I - L_1 e_1^T] A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{a_{11}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a^T \\ b & B \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C = B - \frac{1}{a_{11}} b a^T$, $a_{nm}^{(2)} = a_{nm} - \frac{1}{a_{11}} a_{n1} a_{1m} \ \forall n,m \geq 2$

Sei $2 \leq n \leq N$: $\sum_{\substack{m=2 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm} - \frac{1}{a_{11}} a_{n1} a_{1m}| \leq \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}| + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq n}}^{N} \frac{|a_{n1}||a_{1m}|}{|a_{11}|} =$

$$= \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} |a_{nm}|\Big) - |a_{n1}| + \Big(\Big(\sum_{m=2}^{N} |a_{1m}|\Big) - |a_{1n}|\Big) \cdot \frac{|a_{n1}|}{|a_{11}|} <$$

$$< |a_{nn}| - |a_{n1}| + \frac{|a_{n1}|}{|a_{11}|}(|a_{11}| - |a_{1n}|) = |a_{nn}| - \frac{|a_{n1}||a_{1n}|}{|a_{11}|} \leq$$

$$\leq |a_{nn} - \frac{a_{n1} a_{1n}}{a_{11}}| = |a_{nn}^{(2)}| \Rightarrow C \text{ strikt diagonal dominant} \ \square$$

Pivotsuche

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, reg. aber Gaußalgorithmus funktioniert nicht.

Bsp: $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ EW: $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}) \Rightarrow \mathrm{cond}(A) \overset{\text{bzgl. } \|\cdot\|_2}{=} 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)$

$\varepsilon \neq 0$: LR-Zerl. $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}}_{=: L_\varepsilon} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}}_{=: R_\varepsilon}$ $\Rightarrow \mathrm{cond}(L_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + O(1) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$

$\mathrm{cond}(R_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + O(1) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$

(wobei $O(1)$ eine Größe beschreibt, welche beschränkt ist)

Bevor $A^{(n)}$ mit L_n multipliziert wird, wähle in der n-ten Spalte 29.10.18
von $A^{(n)}$ dasjenige Element aus, das relativ zur Betragssummennorm der jeweiligen Zeile das betragsgrößte ist, d.h. man wählt $p \geq n$ mit

$\frac{|a_{pn}^{(n)}|}{\sum_{m=n}^{N} |a_{pm}^{(n)}|} = \max_{n \leq q \leq N} \frac{|a_{qn}^{(n)}|}{\sum_{m=n}^{N} |a_{qm}^{(n)}|}$ und vertauschen die n-te und p-te Zeile.

Sei $P_n = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow n \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad \uparrow n \qquad \uparrow p \end{matrix} & \end{array}$ elementare Permutationsmatrix

Mult. einer Matrix A mit P_n von links entspricht einer Vertauschung der n-ten und p-ten Zeile von A, von rechts einer Vertauschung der n-ten und p-ten Spalte von A.

Es gilt: $P_n^2 = I$. Der n-te Schritt im Gauß-Alg. mit Spaltenpivotsuche ist daher: $A^{(n+1)} = L_n P_n A^{(n)}$, wobei L_n eine Eliminationsmatrix ist, die bzgl. der n-ten Spalte von $P_n A^{(n)}$ def. ist. Damit erhält man nach $N-1$ Schritten: $R := L_{N-1} P_{N-1} A^{(N-1)} = L_{N-1} P_{N-1} L_{N-2} P_{N-2} A^{(N-2)} = \ldots =$

$= L_{N-1} P_{N-1} L_{N-2} P_{N-2} \cdot \ldots \cdot L_1 P_1 A =$

$$= \underbrace{L_{N-1}}_{\tilde{L}_{N-1}} \underbrace{P_{N-1} L_{N-2} P_{N-1}}_{\tilde{L}_{N-2}} \underbrace{P_{N-1} P_{N-2} L_{N-3} P_{N-2} P_{N-1}}_{\tilde{L}_{N-3}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{P_{N-1} P_{N-2} \cdot \ldots \cdot P_3 P_2 L_1 P_2 P_3 \ldots P_{N-1}}_{\tilde{L}_1} \underbrace{P_{N-1} \cdot \ldots \cdot P_1}_{P} A$$

$\Rightarrow R = \tilde{L}_{N-1} \cdot \ldots \cdot \tilde{L}_1 PA \Rightarrow LR = PA$ mit $L = \tilde{L}_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \tilde{L}_{N-1}^{-1}$

Lemma: $\tilde{L}_n = P_{N-1} \cdot \ldots \cdot P_{n+1} L_n P_{n+1} \cdot \ldots \cdot P_{N-1}$ ist Eliminationsmatrix für $n \leq N-1$

Beweis: $L_n = I - l_n e_n^*$ mit $l_n = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ n+1}}{*}, \ldots, *)^T$

$$\Rightarrow \tilde{L}_n = I - \underbrace{P_{N-1} \cdot \ldots \cdot P_{n+1} l_n}_{=: \tilde{l}_n} \underbrace{e_n^* P_{n+1} \cdot \ldots \cdot P_{N-1}}_{= e_n^*}$$

Wegen $l_{n_m} = 0$ für $m \leq n$ folgt auch $\tilde{l}_{n_m} = 0$ für $m \leq n$. $\square$

Behauptung: Ist A regulär, so bricht der Alg. nicht ab, d.h. in jedem Schritt gibt es ein nicht verschwindendes Pivotelement.

Beweis (durch Widerspruch): Sei $1 \leq n \leq N$. Gäbe es im n-ten Schritt kein Pivotelement $\neq 0$, so wäre $a_{qn}^{(n)} = 0 \;\forall n \leq q \leq N$, d.h.

$$A^{(n)} = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} \; {*}^{(2)} & & * & \\ \quad a_{22} \ddots & & & \\ \hline & 0 & a_{n\,n+1}^{(n)} & \cdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \cdots & \end{array} \right) \Rightarrow \det(A^{(n)}) = a_{11} a_{22}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1\,n-1}^{(n-1)} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & a_{n\,n+1}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \end{pmatrix}}_{=0} = 0$$

$\lightning$

Andererseits: $\det(A^{(n)}) = \det(L_{N-1} P_{N-1} \cdot \ldots \cdot L_1 P_1 A) = \prod_{m=1}^{n-1} \underbrace{\det(L_m)}_{\neq 0} \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \underbrace{\det(P_m)}_{= \pm 1 \neq 0} \cdot \underbrace{\det(A)}_{\neq 0} \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ Pivotelement im n-ten Schritt, falls A regulär.

Lemma: Ist A strikt diagonal dominant, so wählt die Spaltenpivotsuche im n-ten Schritt $a_{nn}^{(n)}$ als Pivotelement aus.

Beweis: Es gilt: $\sum_{m=2}^{N} |a_{1m}| < |a_{11}| \Rightarrow \frac{|a_{11}|}{\sum_{m=1}^{N} |a_{1m}|} > \frac{|a_{11}|}{|a_{11}|+|a_{11}|} = \frac{1}{2}$

Für $2 \le n \le N$ ist $|a_{n1}| \le \sum_{\substack{m=1 \\ m\ne n}}^{N} |a_{nm}| < |a_{nn}|$

$$\Rightarrow \frac{|a_{n1}|}{\sum_{m=1}^{N} |a_{nm}|} \le \frac{|a_{n1}|}{|a_{n1}|+|a_{nn}|} < \frac{|a_{n1}|}{|a_{n1}|+|a_{n1}|} = \frac{1}{2}$$

Damit ist gezeigt, dass die Spaltenpivotsuche im 1. Schritt die 1. Zeile auswählt. Da wir bereits gezeigt haben, dass die untere $(N-1)\times(N-1)$-Block von $A^{(2)}$ wieder strikt diagonal-dominant ist, folgt im 2-ten Schritt der 2. Zeile von $A^{(2)}$ ausgewählt wird. Usw.

Bemerkung: Nachiteration: $A=LR$. "Löse" $Ax_1=b$

$r_1=Ax_1-b$ mit doppelter Genauigkeit berechnen, "löse" $Ay_1=r_1$

und setze $x_2=x_1-y_1 \rightsquigarrow r_2=Ax_2-b$ mit doppelter Genauigkeit

„löse" $Ay_2=r_2$ usw... wiederhole bis r_n klein genug.

Bsp.:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ \frac12 & \frac12 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -\frac13 & -5 \\ 2 & -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ Pivotsuche liefert $(1,1) \Rightarrow L_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac12 & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ -2 & & & 1 \end{pmatrix}$

$A^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac13 & -3 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ Pivotsuche liefert $(4,2) \Rightarrow P_2=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & 0 \end{pmatrix}$

$P_2A^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac13 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $L_2=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac18 & 1 & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A^{(3)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Pivotsuche liefert $(4,3) \Rightarrow$ $P_3=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow P_3A^{(3)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$L_3=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac12 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A^{(4)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: R$

$\tilde{L}_3 = L_3$. $\tilde{L}_2 = P_3 L_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & \frac{1}{3} & & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{L}_1 = P_3 P_2 L_1 P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -\frac{1}{2} & & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{L}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & -\frac{1}{3} & & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & & 1 & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L = \tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \tilde{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

1.3 Cholesky-Zerlegung

31.10.18

Erinnerung: Eine hermitesche Matrix heißt pos. definit, falls $x^* A x \;\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{K}^N$

Satz: Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ hermitesch und pos. def. Dann gibt es genau eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit pos. Diagonaleinträgen und $A = LL^*$

Beweis: (durch Induktion über N)

$N=1$: A ist eine positive Zahl und $L := \sqrt{A}$ leistet das Gewünschte

$N \geq 2$: Schreibe $A = \begin{pmatrix} B & b \\ b^* & \beta \end{pmatrix}$ mit $B \in \mathbb{K}^{N-1 \times N-1}$, $b \in \mathbb{K}^{N-1}$, $\beta \in \mathbb{K}$

wegen der pos. Definitheit von A ist B pos. definit und $\beta > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $B = MM^*$ mit einer unteren Dreiecksmatrix M mit pos. Diagonaleinträgen. Wir machen den Ansatz:

$L = \begin{pmatrix} M & 0 \\ m^* & \mu \end{pmatrix}$ mit $m \in \mathbb{K}^{N-1}$ und $\mu > 0$, so dass $A = LL^*$. Wegen

$L^* = \begin{pmatrix} M^* & m \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ muss gelten: $A = LL^* = \begin{pmatrix} MM^* & Mm \\ m^* M & m^* m + \mu^2 \end{pmatrix}$, das heißt

$Mm = b$, $m^* m + \mu^2 = \beta$. Weil M als Dreiecksmatrix mit pos. Diagonaleinträgen regulär ist, $\exists!$ Lösung m von $Mm = b$, nämlich $m = M^{-1} b$. Wir zeigen $m^* m < \beta$. Dann gibt es ein eind. $\mu > 0$ mit $m^* m + \mu^2 = \beta$ und wir erhalten eine Matrix L wie gewünscht. Außerdem ist dann L eindeutig.