Anwendung auf Gleichungssystem $Ax=b$

· Berechne $Q^* b$

· Löse $Rx = Q^* b$

$\Rightarrow Ax = QRx = QQ^* b = b$

Vorteil der QR-Zerl. gegenüber LR- und Cholesky-Zerl.

Bei LR und Cholesky müssen zwei Gleichungssysteme gelöst werden. $Ax=b$, $Lz=b$, $Rx=z$. Es gilt: $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \leq$

$\leq \|L\| \, \|R\| \, \|L^{-1}\| \, \|R^{-1}\| = \mathrm{cond}(L) \cdot \mathrm{cond}(R)$

für Cholesky ersetze R mit L^*

Vergleiche dazu QR-Zerl. (mit $M=N$)

$\mathrm{cond}(A) = \|QR\| \, \|R^{-1} Q^{-1}\| = \|R\| \, \|R^{-1}\| = \mathrm{cond}(R)$

bzgl. euklidischer Norm Q unitär

Außerdem ändert sich in der Fehlerabschätzung $\|Q^* b\|_2 = \|b\|_2$ nicht.

Definition: Die Householder-Transformation bzgl. eines Vektors $v \in \mathbb{K}^n$ ist die Matrix $P = I - \frac{2}{v^* v} v v^* \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Lemma: Die Householder-Trafo. bzgl. eines Vektors v ist hermitesch, unitär und erfüllt $Pv = -v$ und $Pw = w$ $\forall w \perp v$

Beweis: Offensichtlich ist P hermitesch. Außerdem ist $P^* P = P^2 =$

$= I - \frac{4}{v^* v} v v^* + \frac{4}{(v^* v)^2} v \underbrace{v^* v}_{\in \mathbb{K}} v^* = I$

$Pv = v - \frac{2}{v^* v} v \underbrace{v^* v}_{\in \mathbb{K}} = -v$. für $w \perp v$: $Pw = w - \frac{2}{v^* v} v \underbrace{v^* w}_{=0} = w$ □

Idee im Beweis der QR-Zerlegung: 05.11.18

zu geg. Vektor $x \in \mathbb{K}^N \setminus \{0\}$ bestimme eine Householder-Trafo, die x auf ein Vielfaches von e_1 abbildet, d.h. bestimme $v \in \mathbb{K}^n$, ein ξ mit: $(I - \frac{2}{v^* v} v v^*) x = \xi e_1$. Weil Householder-Trafo unitär ist, ist notwendigerweise: $\|x\|_2 = |\xi|$. Das gilt mit:

$$v = \begin{cases} \frac{1}{|x_1| \, \|x\|_2} (|x_1| x \pm x_1 \|x\|_2 e_1) & \text{für } x_1 \neq 0 \\ \frac{x}{\|x\|_2} \pm e_1 & \text{für } x_1 = 0 \end{cases}$$

denn es ist $v^*v = \|x\|_2 \pm |x_1|$ und $v^*v = \frac{2}{\|x\|_2}(\|x\|_2 \pm |x_1|)$

$$\Rightarrow Px = x - \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2 \pm |x_1|}(\|x\|_2 \pm |x_1|)\left(\frac{1}{|x_1|\,\|x\|_2}\left(|x_1|x \pm x_1\|x\|_2\, e_1\right)\right)$$
$$= \mp \frac{x_1}{|x_1|}\|x\|_2\, e_1 \quad \text{für} \quad x_1 \neq 0$$

Das gilt falls $|x_1| < \|x\|_2$ $(\Rightarrow \|x\|_2 - |x_1| \neq 0)$

In der Praxis wähle das „obere Vorzeichen (+)" um den Nenner so groß wie möglich zu machen

Beweis: Im ersten Schritt setzen wir $A_1 = A$ und $x = a_1$, die erste Spalte von A_1. Wegen $\operatorname{rang}(A) = N$ ist $a_1 \neq 0$. Mit P_1 wie oben ist dann: $P_1 a_1 = r_{11} e_1$ mit $|r_{11}| = \|a_1\|_1 \neq 0$.

Damit ist
$$P_1 A_1 = \left(\begin{array}{c|c} r_{11} & * \\ 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad A_2 \in \mathbb{K}^{(M-1)\times(N-1)}$$

Im n-ten Schritt haben wir Householder-Trafos $P_1,\dots,P_{n-1}$ konstruiert, so dass
$$P_{n-1}\cdot\ldots\cdot P_1 A_1 = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{n-1\,n-1} \end{matrix} & R_n \\ \hline 0 & A_n \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad r_{11},\dots,r_{n-1\,n-1} \neq 0$$

Aus $\operatorname{rang}(A) = N$ folgt einfach, dass $\operatorname{rang}(A_n) = N - n + 1$ und daher ist $x = a_n$ = erste Spalte von $A_n \neq 0$. Daher gibt es Householder-Trafo $P_n' \in \mathbb{K}^{(N-n+1)\times(N-n+1)}$ mit $P_n' a_n = r_{nn} e_1$ mit $|r_{nn}| = \|a_n\|_1 \neq 0$, d.h.

$$P_n' A_n = \left(\begin{array}{c|c} r_{nn} & * \\ \hline 0 & A_{n+1} \end{array}\right). \quad \text{Mit} \quad P_n = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & P_n' \end{array}\right) \in \mathbb{K}^{M\times M} \text{ ist}$$

$$P_n\ldots P_1 A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{n-1\,n-1} \end{matrix} & R_n \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} r_{nn} & * \\ \hline 0 & A_{n+1} \end{array} \end{array}\right)$$

Beachte, dass hier die ersten $n-1$ Zeilen von $P_{n-1},\dots,P_1 A$ nicht geändert werden. Beachte außerdem, dass P_n eine Householder-Trafo bzgl. des Vektors $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v' \end{pmatrix}$. Nach N Schritten ist man also bei einer oberen Dreiecksmatrix $R = P_N\ldots P_1 A$ angelangt und $Q^* = P_N \ldots P_1$ ist ein Produkt von unitären Matrizen und daher auch unitär

Aufwand: Beachte, dass $P_n' A_n$ nicht als Matrix-Matrix-Mult. berechnet wird, sondern via $P_n' A_n = A_n - \frac{2}{v^* v} v w^*$ mit $w = A_n^* v$. Dafür werden ungefähr $2(N-n)(M-n)$ Mult./Div. benötigt.

$\rightsquigarrow$ Gesamtaufwand: $2\sum_{n=1}^{N}(N-n)(M-n) = MN^2 - \frac{1}{3}N^3 + O(MN)$

Ins.bes. für $M=N$: $\frac{2}{3}N^3 + O(N^2)$ (doppelt so teuer wie LR-Zerlegung)

Lineare Ausgleichsrechnung

Betrachte $Ax = b$, $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$ mit $M \geq N$, $x \in \mathbb{K}^N$, $b \in \mathbb{K}^M$

$\rightsquigarrow$ Minimiere: $\|b - Ax\|_2$ über $x \in \mathbb{K}^N$ „Kleinste Quadrate-Lsg von $Ax = b$"

Lemma: Die Minimierer von $\|b - Ax\|_2$ sind gerade die Lsgen von $A^*Ax = A^*b$ (Gaußsche Normalengleichung) ($A^*A \in \mathbb{K}^{N \times N}$)

Beweis: $\|b - Ax\|_2^2 - \|b - Ax_0\|_2^2 = (b-Ax)^*(b-Ax) - (b-Ax_0)^*(b-Ax_0) =$

$= -2\mathrm{Re}(x^*A^*b) + x^*A^*Ax + 2\mathrm{Re}(x_0^*A^*b) - x_0^*A^*Ax_0 =$

$= (x-x_0)^*A^*A(x-x_0) - 2\mathrm{Re}((x-x_0^*)A^*b) \underbrace{- 2x_0^*A^*Ax_0 + 2\mathrm{Re}(x^*A^*Ax_0)}_{= 2\mathrm{Re}((x-x_0)^*A^*Ax_0)} =$

$= (x-x_0)^*A^*A(x-x_0) + 2\mathrm{Re}(x-x_0)^*(A^*Ax_0 - A^*b)$

Ist $A^*Ax_0 = A^*b$, so ist $\|b-Ax\|_2^2 - \|b - Ax_0\|_2^2 = \|A(x-x_0)\|_2^2 \geq 0 \ \forall x$ und damit ist x_0 ein Minimierer von $\|b - Ax\|_2$

Sei umgekehrt x_0 ein Minimierer, dann gilt nach obiger Rechnung mit $x = x_0 + td$, $t \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{K}^N$: $0 \leq t^2 d^*A^*Ad + 2t\,\mathrm{Re}(d^*(A^*Ax_0 - A^*b))$ durch $t \neq 0$ teilen und $t \to 0$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(d^*(A^*Ax_0 - A^*b)) = 0$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ impliziert das $d^*(A^*Ax_0 - A^*b) = 0$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wende das gleiche Argument mit „$i d$" statt „d" an, dann folgt $\mathrm{Im}(d^*(A^*Ax_0 - A^*b)) = 0$ und damit wieder $d^*(A^*Ax_0 - A^*b) = 0$

Wählt man $d = A^*Ax_0 - A^*b$ so folgt $A^*Ax_0 - A^*b = 0$. $\square$

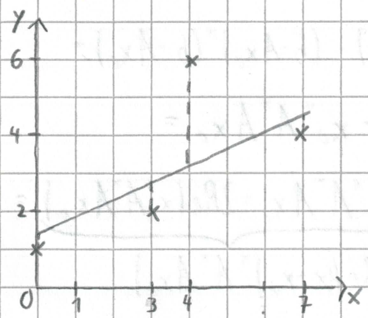
Lsg. des lin. Ausgleichproblems durch QR-Zerl.

Sei $\operatorname{rang}(A)=N$ und schreibe $A=QR$ mit Q unitär und R reg. obere Dreiecksmatrix. Zerlege $R=\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $R_1 \in \mathbb{K}^{N\times N}$ und definiere $c = Q^* b = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $c_1 \in \mathbb{K}^N$, $c_2 \in \mathbb{K}^{M-N}$

$$\|b-Ax\|_2^2 = \|Q(Q^*b - Rx)\|_2^2 = \|Q^*b-Rx\|_2^2 = \|c_1 - R_1 x\|_2^2 + \|c_2\|_2^2 \geq \|c_2\|_2^2$$

mit Gleichheit gdw. $x = R_1^{-1} c_1 \rightsquigarrow x = R^{-1} c_1$ ist die Lsg. des lin. Ausgleichsproblems

Bsp: Gesucht ist die Gerade $y = \alpha + \beta x$ deren y-Werte den kleinsten Quadratsummenabstand von den geg. Daten $\tilde{y} = 1,2,6,4$ an den entsprechenden Stellen $\tilde{x} = 0,3,4,7$ haben.



$$A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = b,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix},\quad \|a_1\|_2 = 2,\quad v = \frac{1}{|a_{11}|\,\|a_1\|_2}\left(|a_{11}|\, a_1 + a_{11}\|a_1\|_2\, e_1\right) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$ 07.11.18

$$\beta = \frac{2}{v^* v} = \frac{2}{3},\quad w = A^* v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},\quad P_1 A = A - \beta v w^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}(3,\ 7) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 \\ 0 & 14/3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} = a_2,\quad \|a_2\|_2 = 5,\quad v = \begin{pmatrix} 17/15 \\ 1/3 \\ 14/15 \end{pmatrix},\quad \beta = \frac{15}{17},$$

$$w = \frac{17}{3},\quad P_2' A_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R,\quad R_1 = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Beachte Variablen werden mehrfach belegt (z.B v, b) Achte auf dem Schritt in dem du dich befindest!!

Einschub: $\|b - Ax\|_2^2 = \|c - Rx\|_2^2 = \|c_1 - R_1 x\|_2^2 + \|c_2\|_2^2 \Rightarrow c_1 = R_1 x$

$b = Q\underbrace{Q^* b}_{=:c}$ $\quad A = QR \quad$ und $c = Q^* b = P_2 P_1 b$ da $\underbrace{P_2 P_1}_{=Q^*} A = R$

$$\Rightarrow P_1 b = b - \beta(v^* b)v = \begin{pmatrix} -13/2 \\ -1/2 \\ 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix},\quad b_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$ „unterer Teil von $P_1 b$"