15.10.18

Numerik

I. Lineare Gleichungssysteme

Bsp. $Ax=b$ mit

$$A=\begin{pmatrix}10&7&8&7\\7&5&6&5\\8&6&10&9\\7&5&9&10\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}32\\23\\33\\31\end{pmatrix}\quad\Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$Ax=b' \text{ mit } b'=\begin{pmatrix}32{,}1\\22{,}9\\33{,}1\\30{,}9\end{pmatrix}\quad\Rightarrow x=\begin{pmatrix}9{,}2\\-12{,}6\\4{,}5\\-1{,}1\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ relative Änderung in b: $\sim\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{23}\approx\frac{1}{100}$

$\rightsquigarrow$ relative Änderung in x: $\frac{13{,}6}{1}\approx 10$

$\rightsquigarrow$ relative Verstärkung von ~ 1000

$$A'x=b \text{ mit } A'=\begin{pmatrix}10&7&8{,}1&7{,}2\\7{,}08&5{,}04&6&5\\8&5{,}98&9{,}89&9{,}0\\6{,}99&4{,}99&9&9{,}98\end{pmatrix}\quad\Rightarrow x=\begin{pmatrix}-81\\137\\-34\\22\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=1,\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}25&-41&10&-6\\-41&68&-17&10\\10&-17&5&-3\\-6&10&-3&2\end{pmatrix}$$

Eigenwerte von A: $\lambda_1\approx 0{,}01$, $\lambda_2\approx 0{,}83$, $\lambda_3\approx 3{,}86$, $\lambda_4\approx 30{,}29$

$$\boxed{\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\approx 2984}$$

Vektor- und Matrixnormen

Wir schreiben $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition: Sei X $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: X\to[0,\infty[$ heißt Norm, falls $\forall x,y\in X$ und $\lambda\in\mathbb{K}$ gilt:

a) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

b) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$

c) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ Dreiecksungleichung (Δ-Ugl)

Bsp. Sei $x \in X = \mathbb{K}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$

1) Betragssummennorm: $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |x_n|$

2) euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

3) Maximumsnorm: $\|x\|_\infty = \max_{n=1,\dots,N} (|x_n|)$

Verifikation der Δ-≠ für $\|\cdot\|_2$:

Cauchy-Schwarz-Ungl.: $x, y \in \mathbb{K}^N$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \overline{x_n}\, y_n\right| = |x^* y| \leq \sqrt{x^* x}\,\sqrt{y^* y} = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Hiermit folgt:

$$\|x+y\|_2^2 = (x+y)^*(x+y) = x^*x + 2\,\overbrace{\mathrm{Re}(x^*y)}^{\leq |x^*y|} + y^*y \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} x^*x + 2\|x\|_2\|y\|_2 + y^*y =$$
$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

Lemma: $\forall x, y \in X$ mit X $\mathbb{K}^N$-VR gilt: $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$

Beweis: $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

vertausche nun x und y: $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$

insgesamt folgt: $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$ □

Proposition: Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen in $\mathbb{K}^N$. Dann $\exists\, 0 < c \leq C < \infty$, so dass: $c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$ $\forall x \in \mathbb{K}^N$ (man sagt dann: $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalente Normen)

Insbesondere hängt der Konvergenzbegriff in $\mathbb{K}^N$ nicht von der Wahl der Norm ab und ist immer äquivalent zur komponentenweisen Konv.

Beweis (der Prop.): Es genügt $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$ zu betrachten (betrachte dann den Satz zweimal). Die Menge $\{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also nach Heine-Borel kompakt. (bzgl. der eukl. Norm)

Außerdem ist für $x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$ (e_n Basisvektoren für $\mathbb{K}^N$)

$$\|x\|' \leq \sum_{n=1}^{N} \|x_n e_n\|' = \sum_{n=1}^{N} |x_n|\, \|e_n\|' \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \|e_n\|'^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:C} = C\|x\|_2$$

Nach dem Lemma gilt: $\big|\, \|x\|' - \|y\|' \,\big| \leq \|x-y\|' \leq C \cdot \|x-y\|_2$

D.h. $x \mapsto \|x\|'$ ist stetig bzgl. der eukl. Norm.

Daher nimmt die Funktion auf der kompakten Menge $\{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\}$ ihr Minimum an. Sei $c := \min\limits_{\|x\|_2 = 1} \|x\|'$, dann ist $c > 0$.

Für jedes $x \in \mathbb{K}^N$ ist: $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|' \geq c \Rightarrow c\|x\|_2 \leq \|x\|'$

Insgesamt: $c\|x\|_2 \leq \|x\|' \leq C\|x\|_2$ $\square$

$A = (a_{nm})_{n,m=1}^{N} \in \mathbb{K}^{N \times N}$

Bsp.: 1) Spaltensummennorm: $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq m \leq N} \sum\limits_{n=1}^{N} |a_{nm}|$

2) Zeilensummennorm: $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq n \leq N} \sum\limits_{m=1}^{N} |a_{nm}|$

3) Frobenius-Norm: $\|A\|_F = \left(\sum\limits_{n,m=1}^{N} |a_{nm}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (auch Hilbert-Schmidt-Norm)

Proposition: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^N$. Dann definiert

$\|A\| := \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ eine Norm, die sog. induzierte Matrixnorm

und für diese Norm gilt die Submultiplikativität: $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$