

**Proposition 2.14** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  konvex. Dann gibt es Hyperebene die  $M, \{0\}$  trennt.

**Beweis:** Sei  $\bar{M}$  der Abschluss von  $M$  in  $\mathbb{R}^n$ .  $\bar{M}$  ist konvex. Fall 1:  $0 \notin \bar{M}$ , dann

folgt die Beh. mit Prop. 2.11 (in diesem Fall ist die Trennung sogar strikt)

Sonst:  $0$  ist auf dem Rand von  $\bar{M}$ . Sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bar{M}$  die gegen  $0$  konv.

Mit Satz 2.13:  $\forall i \in \mathbb{N} \exists H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y_i^T x = \alpha_i\}$  Hyperebene die  $\bar{M}$  und

$\{x_i\}$  trennt. O.B.d.A.:  $\|y_i\|_2 = 1$   $\forall i \in \mathbb{N}$ . Aus Definition:  $\forall x \in \bar{M}: y_i^T x > \alpha_i > y_i^T x_i$

(strikte Trennung). Da  $0 \in \bar{M}$  und  $\|y_i^T x_i\|_2 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$  folgt:  $0 = y_i^T 0 > \alpha_i > y_i^T x_i \geq 0$

$\Rightarrow \alpha_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ . Die  $y_i$ 's sind alle in der kompakten Menge:  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$  mit

Bolzano-Weierstraß gilt:  $\exists$  Teilfolge  $(y_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  der  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  und  $y$  mit  $\|y\|_2 = 1$

so dass  $y_{i_k} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$ . Damit für  $x \in \bar{M}: y^T x = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{i_k}^T x \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{i_k} = 0$

Damit trennt die Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = 0\}$   $M$  und  $\{0\}$ .  $\square$

**Satz 2.15** Seien  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  disjunkt, nicht leer, konvex. Dann existiert

Hyperebene, die  $M_1, M_2$  trennt.

**Beweis:** Übung.

## 2.3 Stützeigenschaften

8.11.18

Idee: Beschreibe konv. Mengen von „außen“

**Def. 2.16** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht leer, konvex, abgeschlossen. Eine Hyperebene

$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \alpha\}$  mit  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  heißt Stützhyperebene für  $M$ .

falls mit  $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \geq \alpha\}$ ,  $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq \alpha\}$  gilt:

i)  $M \cap H \neq \emptyset$

ii) Entweder  $M \subseteq H^+$  oder  $M \subseteq H^-$  (exklusives oder)

$H^+$  bzw.  $H^-$  heißt Stützhalbraum für  $M$ . (dort wo  $M$  enthalten ist)

Für  $M \subseteq H^+$  heißt  $-y$  bzw. für  $M \subseteq H^-$  heißt  $y$  die äußere

Normale für  $H$ .

**Lemma 2.17:** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  nicht-leer, konvex, kompakt, sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Dann existiert eine Stützebene für  $M$  mit äußerer Normale  $y$ .

**Beweis:**  $x \mapsto y^T x$  ist stetig. Da  $M$  kompakt ist, wird das Maximum über  $M$  angenommen.  $\alpha = \max \{y^T x \mid x \in M\}$ . Insbesondere:  $y^T x \leq \alpha \forall x \in M$  und  $\exists x^* \in M$  mit  $y^T x^* = \alpha$ . Sei  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \alpha\}$ . Dann  $M \cap H \neq \emptyset$ , da  $x^* \in M \cap H$  und  $M \subseteq H^\perp$ .

**Bem.:** Kompaktheit ist essentiell!

**Satz 2.18:** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , nicht-leer, konvex, abgeschlossen. Sei  $S$  die Menge der Stützhalbräume von  $M$ . Dann  $M = \bigcap_{s \in S} s$

**Beweis:** " $\subseteq$ "  $\forall s \in S: M \subseteq s \Rightarrow M \subseteq \bigcap_{s \in S} s$

" $\supseteq$ " Durch Widerspruch: Sei  $z \in \bigcap_{s \in S} s \setminus M$  (Annahme)

Mit Satz 2.13:  $\exists H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \alpha\}$ , welche  $M$  und  $\{z\}$  strikt trennt. Wir nehmen o.B.d.A.:  $M \subseteq H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \geq \alpha\}$  und damit  $z \notin H^\perp$ , also auch  $y^T z < \alpha$ . Sei  $\bar{\alpha} = \min \{y^T x \mid x \in M\}$  ( $\min$  wird angenommen Prop. 2.11). Dann  $\bar{\alpha} \geq \alpha$ . Sei  $\bar{H} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = \bar{\alpha}\}$

Daraus folgt: 1)  $M \subseteq \bar{H}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \geq \bar{\alpha}\}$ , 2)  $M \cap \bar{H} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{H} \in S$

$$\exists y^T z < \alpha \Rightarrow y^T z < \bar{\alpha} \Rightarrow z \notin \bar{H}^\perp$$

$\Rightarrow z \notin \bigcap_{s \in S} s$   $\Leftrightarrow$  zur Annahme.

Insgesamt:  $M$  konvex, abgeschlossen  $\Leftrightarrow M$  Durchschnitt von Halträumen

## 2.4 Konvexe Funktionen

**Def. 2.19** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex.  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, falls  $\forall x_1, x_2 \in M$

$$\lambda \in [0, 1]: f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

$f$  heißt strikt konvex, falls  $\forall x_1, x_2 \in M$  mit  $x_1 \neq x_2$ ,  $\lambda \in ]0, 1[$  die Ungleichung strikt ist.

$f$  heißt (strikt) konkav, wenn  $-f$  (strikt) konvex ist.

Def. 2.20  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $E(f) = \{(x, \alpha) \in M \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$

der Epigraph von  $f$ . Für  $b \in \mathbb{R}$  sei  $N_f(b) = \{x \in M \mid f(x) \leq b\}$  die Niveaumenge zum Niveau  $b$ .

Satz 2.21 Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann:

i)  $f$  konvex  $\Leftrightarrow E(f)$  konvex

ii)  $f$  konvex  $\Rightarrow N_f(b)$  konvex  $\forall b \in \mathbb{R}$

Beweis: i)  $\Rightarrow$  " Seien  $z_1 = (x_1, \alpha_1), z_2 = (x_2, \alpha_2) \in E(f)$ . Aus Def.:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \alpha_1, f(x_2) = \alpha_2. \text{ Für } \lambda \in [0,1] \text{ sei } z^{(\lambda)} = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = \\ &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2). \text{ Da } f \text{ konvex:} \end{aligned}$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$$

$$\Rightarrow (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2) = z^{(\lambda)} \in E(f)$$

$\Leftarrow$  " Für  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ , dann gilt  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in E(f)$ . Da

$E(f)$  konvex:  $\forall \lambda \in [0,1] : (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)) \in E(f)$

$$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \Rightarrow f \text{ konvex. } \square$$

ii) analog zu i)  $\Rightarrow$  "

Bem.: Die Umkehrung in ii) gilt nicht. Betrachte  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$

Somit ist  $f$  nicht konvex. Für  $b \in \mathbb{R}$  ist  $N_f(b) = ]-\infty, \lfloor b \rfloor + 1]$

konvex.

Aquivalent zu Def. 2.19:  $f$  konvex  $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_m \in M, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$

über  $M$ ,

$M$  konvex mit  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

Beweis: Übung.

Satz 2.22 Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  konvex,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Dann:  $\alpha \cdot f$ ,  $f+g$ ,  $\max\{f, g\}$  ebenfalls konvex. Im allgemeinen sind  $f \cdot g$ ,  $\min\{f, g\}$ ,  $f-g$  nicht konvex.

Beweis: Übung

Satz 2.23 Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann ist  $f$  stetig im Inneren von  $M$ .

Beweis: Übung

Bem.: Die Konklusion ist bestmöglich, z.B.  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \{1,0\} \\ 0, & x \in ]0,1[ \end{cases}$$