12.11.18

Anwendung auf Lin. Gleichungssysteme $(Ax=b)$

$A=M-N$ mit M (einfach) invertierbar $\rightarrow Mx=Nx+b \Leftrightarrow x=M^{-1}(Nx+b) \Leftrightarrow$

$x=\underbrace{Tx+c}_{\Phi(x)}$ mit $T=M^{-1}N,\ c=M^{-1}b$

Lemma: Ist $\|\cdot\|$ eine ind. M-Norm und $\|T\|<1$ so konvergiert die Fixpunkt-iteration $x^{(n)}=\Phi(x^{(n-1)}),\ n\geq 1$, für jedes $x^{(0)}\in\mathbb{K}^N$ gegen ein $\hat{x}$ mit $A\hat{x}=b$.

Bew.: $M=\mathbb{K}^N$ vollständiger metrischer Raum bzgl. der von der Norm $\|\cdot\|$ induzierten Metrik. $d(\Phi(x),\Phi(y))=\|\Phi(x)-\Phi(y)\|=\|T(x-y)\|\leq\underbrace{\|T\|}_{=:q<1}\|x-y\|$

Somit folgt die Beh. aus dem Banachschen Fixpunktsatz. $\square$

Bemerkung: Ist A invertierbar und $r_\sigma(T)=\max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ EW von } T\}\geq 1$, dann konvergiert die Iteration nicht für alle $x^{(0)}$. Umgekehrt kann man zeigen, dass für $r_\sigma(T)<1$ die Iteration konvergiert.

$A=D-L-R$

D: diagonal
L: linke untere Δ Matrix mit Diagonale $=0$
R: rechte obere Δ-Matrix mit Diagonale $=0$

Gesamtschrittverfahren: (Jacobi-Verfahren)

$M=D,\ N=L+R$

Annahme: $a_{nn}\neq 0\ \forall n\ (\Rightarrow D$ invertierbar$)$

$x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)})$ heißt $x_n^{(k+1)}=\frac{1}{a_{nn}}\left(b_n-\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}a_{nm}x_m^{(k)}\right),\ n=1,\dots,N$

Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel-Verfahren)

$M=D-L,\ N=R$

Annahme: $a_{nn}\neq 0\ \forall n\ (\Rightarrow D-L$ invertierbar$)$

$x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)})$ heißt $x_n^{(k+1)}=\frac{1}{a_{nn}}\left(b_n-\sum_{m=1}^{n-1}a_{nm}x_m^{(k+1)}-\sum_{m=n+1}^{N}a_{nm}x_m^{(k)}\right),\ n=1,\dots,N$

Hier werden die neuen Einträge des Vektors direkt mitgenutzt
$\Rightarrow$ Unterschied zum Gesamtschrittverfahren.

Lemma: Ist A strikt diagonal dominant, so konvergieren Gesamt- und Einzelschritt-verfahren für jeden Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{K}^N$.

Beweis: Wg. diag. Dom. ist $|a_{nn}| \neq 0$ $\forall n$. Somit ist das Verf. wohl. def..

Wir wollen das vorhergehende Lemma mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ anwenden.

Gesamtschritt: $\|T\|_\infty = \|D^{-1}(L+R)\|_\infty = \max_n \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N |a_{nm}| \right) \frac{1}{a_{nn}} \overset{\text{diag. dom.}}{=:} q < 1$

Einzelschritt: Zeige wieder, dass $\|T\|_\infty = \|(D-L)^{-1} R\|_\infty \leq q$.

Sei $x \in \mathbb{K}^N$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$ und zeige $y := Tx$ hat $\|y\|_\infty \leq q$

$y_n = -\frac{1}{a_{nn}} \left(\sum_{m=1}^{n-1} a_{nm} y_m + \sum_{m=n+1}^N a_{nm} x_m \right)$. Insbesondere für $n=1$:

$y_1 = -\frac{1}{a_{11}} \sum_{m=2}^N a_{1m} x_m \Rightarrow |y_1| \leq \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{m=2}^N |a_{nm}| \underbrace{|x_m|}_{\leq 1} \leq q$

Für $n \geq 2$: $|y_n| = \frac{1}{|a_{nn}|} \left(\sum_{m=1}^{n-1} |a_{nm}| \underbrace{|y_m|}_{\substack{\leq q < 1 \\ \text{I.V.}}} + \sum_{m=n+1}^N |a_{nm}| \underbrace{|x_m|}_{\leq 1} \right) \leq q$

16 Verfahren der konjugierten Gradienten (CG-Verfahren)

Wieder iteratives Verf. zur Lsg. von $Ax=b$ dieses Mal für A hermitesch und pos. def..

Sei $\Phi(x) = x^* A x - 2\operatorname{Re}(x^* b)$. Dann ist $A\hat{x} = b$ genau dann, wenn $\hat{x}$ ein Minimierer von Φ ist. Das folgt aus:

$\Phi(x) - \Phi(\hat{x}) = x^* A x - 2\operatorname{Re}(x^* b) - \hat{x}^* A \hat{x} + 2\operatorname{Re}(\hat{x}^* b) =$

$= (x-\hat{x})^* A (x-\hat{x}) - 2\hat{x}^* \underbrace{A\hat{x}}_{=b} + 2\operatorname{Re}(x^* \underbrace{A\hat{x}}_{=b}) - 2\operatorname{Re}(x^* b) + 2\operatorname{Re}(\hat{x}^* b) =$ $(\hat{x}^* A \hat{x} > 0$ also $\in \mathbb{R})$

$= (x-\hat{x})^* A (x-\hat{x}) \geq 0$ und $= 0$ falls $x = \hat{x}$ (A pos. def.)

Im 0-ten Schritt wird ein Startvektor $x^{(0)}$ gewählt und $d^{(0)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ gesetzt. Für $d^{(0)} = 0$, so ist $Ax^{(0)} = b$ und das Verfahren ist beendet.

Im k-ten Schritt ($k \geq 1$): sind die Iterierte $x^{(k-1)}$ und die Suchrichtung $d^{(k-1)} \neq 0$ gegeben. Ansatz für die neue Iterierte $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_{k-1} d^{(k-1)}$ mit $\alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$ so gewählt, dass $\alpha \mapsto \Phi(x^{(k-1)} + \alpha d^{(k-1)})$ bei $\alpha = \alpha_{k-1}$ minimal wird. $\Phi(x^{(k-1)} + \alpha d^{(k-1)}) = \Phi(x^{(k-1)}) + |\alpha|^2 d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} + 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} A x^{(k-1)}) - 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} b) =$

$= \Phi(x^{(k-1)}) + |\alpha|^2 d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} - 2\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} r^{(k-1)})$ mit $r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)}$.

Wähle die Phase von α so, dass $\mathrm{Re}(\bar{\alpha} d^{(k-1)*} r^{(k-1)}) = |\alpha| |d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|$

Für $d^{(k-1)*} r^{(k-1)} = 0$ gilt das immer, sonst wähle $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{d^{(k-1)*} r^{(k-1)}}{|d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|}$

Der Betrag von α wird bestimmt durch Min. von

$|\alpha|^2 d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} - 2|\alpha| |d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|$, d.h. $2|\alpha| d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} - 2|d^{(k-1)*} r^{(k-1)}| = 0$

$\Rightarrow \alpha = \frac{|d^{(k-1)*} r^{(k-1)}|}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}} \Rightarrow \alpha_{k-1} = \alpha = |\alpha| \frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{d^{(k-1)*} r^{(k-1)}}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}}$

Auch falls $d^{(k-1)*} r^{(k-1)} = 0$, da Nenner immer > 0, da $d^{(k-1)} \neq 0$ und A pos. def. Das neue Residuum ist dann $r^{(k)} = b - Ax^{(k)} =$

$= b - Ax^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A d^{(k-1)} = r^{(k-1)} - \alpha_{k-1} A d^{(k-1)}$.

Beachte, dass $r^{(k)*} d^{(k-1)} = r^{(k-1)*} d^{(k-1)} - \overline{\alpha_{k-1}} d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} = 0$ (*)

und $d^{(k)} = r^{(k)} + \beta_{k-1} d^{(k-1)}$ mit $\beta_{k-1} = -\frac{d^{(k-1)*} A r^{(k)}}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}}$

$\Rightarrow d^{(k)*} A d^{(k-1)} = r^{(k)*} A d^{(k-1)} + \overline{\beta_{k-1}} d^{(k-1)*} A d^{(k-1)} = 0$ (**)

Lemma: Falls $d^{(k)} = 0$, so ist $Ax^{(k)} = b$ (und wir sind fertig) 14.11.18

Beweis: $d^{(k)} = 0 \Rightarrow r^{(k)} = -\beta_{k-1} d^{(k-1)} \Rightarrow \|r^{(k)}\|^2 = r^{(k)*} r^{(k)} = -\beta_{k-1} r^{(k)*} d^{(k-1)} \overset{(*)}{=} 0$

Anm.: D.h. der Algorithmus ist wohl. def. und endet genau dann, wenn eine Lösung gefunden wurde.

Lemma: Für $0 \leq j < k$ gilt: a) $r^{(k)*} d^{(j)} = 0$, b) $r^{(k)*} r^{(j)} = 0$,

c) $d^{(k)*} A d^{(j)} = 0$