

Aufgabe 1)

$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ -messbar $\Leftrightarrow f^{-1}(\Sigma) \subseteq \mathcal{A}$ mit Σ Erzeuger von \mathcal{A}' (Satz 12.3 a))

- i) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \in \mathcal{A} \Rightarrow f$ m.b.
- ii) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \notin \mathcal{A} \Rightarrow f$ nicht m.b.
- iii) $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset \in \mathcal{A}$
- iv) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \notin \mathcal{A}$
- v) $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\} \in \mathcal{A}$

Bem.: Nach Beispiel 11.10 ist $\mathcal{G}(A) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ mit $A \subseteq X$

Aufgabe 2)

- i) Wähle $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x > 0 \\ 1 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f| = 1$ ist m.b., da konstant.

Aber $f^{-1}(\{-1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \notin \mathcal{A} \Rightarrow f$ nicht m.b.

$$\text{ii).} \Rightarrow "f \text{ m.b.} \Rightarrow \{f \geq a\} \in \mathcal{A} \text{ Vac } \bar{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \underbrace{\{f \geq a\}}_{\in \mathcal{A}} \wedge \underbrace{\{f \geq a\}}_{\in \mathcal{A}} = \{f = a\} \in \mathcal{A} \text{ Vac } \bar{\mathbb{R}}$$

Alternativ: $\forall c \in \bar{\mathbb{R}}: \{c\} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$, da $\{c\}$ abg.

$\Rightarrow \{f = c\} = \{x \in X : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{A}$, da f m.b.

\Leftarrow Sei $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Betrachte $\{a \leq f < b\}$. Da f nur abzählbar

$$\text{viele Werte annimmt} \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bar{\mathbb{R}} \text{ mit } \{a \leq f < b\} = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) = x_n\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$$= \{f = x_n\} \in \mathcal{A}$$

$\Rightarrow f$ m.b. mit Lemma 12.6

$$\text{Alt.: Sei } A \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}). \quad f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cap f(X)) = \bigcup_{c \in f(X)} f^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{A}$$

$$= \{f = c\} \in \mathcal{A}$$

iii) Wähle $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \text{ oder } A^c \text{ abzählbar}\}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$

Dann gilt: $f^{-1}(\{-\infty\}) = \emptyset \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(\{c\}) = \{c\} \in \mathcal{A} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Aber: $f^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}) = [0,1] \notin \mathcal{A}$, da weder $[0,1]$ noch $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ abzählbar ist.

$\Rightarrow f$ nicht m.b.

Aufgabe 3)

1. Teil: C abgeschlossen

Es gilt $C_n \in \mathcal{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow C_n$ abgeschlossen $\forall n \in \mathbb{N}$ nach Def. von C_n und \mathcal{Z} .

$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ abg. $\Rightarrow C$ abg.

2. Teil: $\lambda(C) = 0$

(d.h. ohne Lücke, bzw. hier: $J=1$)

Sei A abg., zusammenhängendes Intervall mit $A = [a_j, b_j] \subseteq [0, 1]$

mit $a_j, b_j \in [0, 1]$ mit $b_j \geq a_j$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda(\Psi(A)) &\cdot \left(\frac{2a_j - b_j}{3} - a_j \right) + \left(b_j - \frac{a_j + 2b_j}{3} \right) = \frac{-a_j + b_j}{3} + \frac{b_j - a_j}{3} = \frac{2}{3}(b_j - a_j) = \\ &= \frac{2}{3}(\lambda(A)) \end{aligned}$$

Mit Induktion folgt: $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \lambda(C_0)$ mit $C_0 = [0, 1]$

$\Rightarrow \lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda(C_n)) = 0$ (Stetigkeit von oben)

3. Teil: $C + \emptyset$

Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}: \{0, 1\} \subseteq C_n \Rightarrow \{0, 1\} \subseteq C \Rightarrow C + \emptyset$