Vetores - Parte 1

Vetores são a fundação de toda a algebra linear

Criando e Visualizando Vetores em Numpy

Na algebra linear, um vetor é uma lista ordenada de numeros. (Na algebra linear abstrata, eles tambem podem conter outros objetos matematicos como funções)

Vetores tem caracteristicas muito importantes. Duas delas são:

- Dimensionalidade:

  A quantidade de numeros (ou objetos) no vetor.

- Orientação:

  Se o vetor está orientado em coluna (em pé) ou em linhas (plano e largo)

Dimensionalidade é frequentemente indicado por um $\mathbb{R}^N$, onde $\mathbb{R}$ indica os números reais e N a dimensionalidade.

Por exemplo, um vetor com dois elementos é indicado por $\mathbb{R}^2$.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Vetor coluna 4D $x \in \mathbb{R}^4$

Coluna 2D $y \in \mathbb{R}^2$

Linha 4D $z \in \mathbb{R}^4$

* x e z são tecnicamente diferentes, mesmo contendo os mesmos elementos.

Em python todos esses vetores são considerados "arrays de duas dimensões", independentemente do numero de elementos contidos no vetor. Uma lista de numeros sem orientação particular em python e considerada uma 1D array, independentemente do numero de elementos. A dimensionalidade matematica — o numero de elementos — é chamado de lenght ou shape do vetor em python

É comum indicar-mos os vetores por letras em negrito, minusculas e Romanas como **v** para "vetor v". Alguns textos usam italico ou uma seta acima da letra ($\vec{v}$).

Por convenção, na algebra linear, assumimos que os vetores estão em orientação de coluna, a menos que eles sejam especificados. Vetores em linha são escritos como w^T. O ^{T} indica uma operação de transposição, que será abordada no futuro.

Vetores - Parte 1

Vetores em python podem ser represen-
tados de muitas formas

```
asList= [1, 2, 3]
asArray = np.array([1, 2, 3]) #1D array
rowVec =np.array([[1,2,3]]) #row
colVec =np.array([[1],[2],[3]]) #column
```

Muitas operações da algebra linear não funcionam em listas Python.
A variavel asArray é uma array sem orientação, não é coluna nem linha, apenas uma lista de numeros 1D em python.
A orientação em python é dada pelos colchetes, os mais externos agrupam todos os numeros como objetos. Então, cada conjunto de colchetes original indica uma linha: um vetor em linha tem todos os números em uma linha, enquanto um vetor em coluna tem multiplas linhas com apenas um número.

Podemos explorarar as orientações utilizando o método ou função shape do NumPy.

Geometria de Vetores

A representacão geometrica de um vetor é uma linha reta com um tamanho especifico (chamado magnitude) e direção (tambem chamada de ângulo; seu calculo é relativo ao eixo x. Os dois pontos de um vetor é chamado de origem (tail, onde começa) e final (head, onde termina); seu final frequentemente é representado por uma seta.

O vetor é concordante com uma coordenada geometrica quando ele parte da origem, isso é chamado de posição padrão

A intuição geometrica de um vetor é na fisica e engenharia (por exemplo, pra representar forças fisicas), e a interpretação algebrica é útil para a ciência de dados (armazenar os dados de vendas pelo tempo). Normalmente, os conceitos de algebra linear são ensinados geometricamente em gráficos 2D e então expandidos para mais dimensões usando a algebra.

Vetores - Parte 1

Operações em vetores

Adição de 2 vetores

Para somar dois vetores basta somar cada elemento correspondente.

$$\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\20\\30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\25\\36\end{bmatrix}$$

A adição de vetores só pode ser realizada po vetores com a mesma dimensionalidade.

A subtração de vetores funciona da mesma forma:

$$\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10\\20\\30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-15\\-24\end{bmatrix}$$

No python:

```
v = np.array([4,5,6])
w = np.array([10,20,30])
u = np.array([0,3,6,9])
vPlusW = v+w
uPlusW = u+w # erro!
```

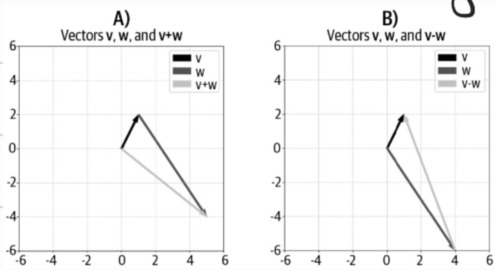
E possivel fazer a adição de vetores com orientações diferentes em python, porem o resultado é uma matriz:

$$\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 20 & 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 15 & 16\\24 & 25 & 26\\34 & 35 & 36\end{bmatrix}$$

O python implementa uma operação chama da broadcasting.

Geometria da adição e subtração de vetores

Para adicionar dois vetores geometricamente, coloque os dois vetores de forma que a origem de um vetor se conecte com o final de outro. Os dois vetores somados percorrem da origem do primeiro vetor até o final do segundo.



A subtração é um pouco diferente mas igualmente direta: alinhe os dois vetores que possuem sua origem na mesma coordenada; a diferença do vetor é a linha que vai do final do vetor negativo ao final do vetor positivo (graf. B)

A geometria da subtração de vetores é muito importante pois é a base da decomposição de vetores ortogonais que por sua vez é a base dos mínimos quadrados lineares.

Vetores - Parte 1

Multiplicação vetor-escalar

Um escalar na algebra linear é apenas um número, sem uma matriz ou vetor. Indicamos o escalar como letras Gregas minúsculas como α ou λ. Portanto, a multiplicação vetor-escala é indicado como, por exemplo, βu.

A multiplicação é muito simples:

$$\lambda = 4, \quad w = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda w = \begin{bmatrix} 36 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Um vetor que contém apenas zerós é indicado pelo zero em negrito, **0**, e é um vetor especia na algebra linear. Usar um vetor de zeros para resolver um problema é frequentemente chamado de solução trivial e é descartada. A algebra linear é cheia de "ache um vetor de não-zeros que possa resolver..." ou "ache uma solução não-trivial que...".

A multiplicação em vetor escalar é um exemplo onde o tipo de dado importa:

```
s=2
a=[3,4,5] # lista
b=np.array(a) # np array
print (a*s)
print (b*s)
```

```
>> [3,4,5,3,4,5]
>> [6, 8, 10]
```

O asterisco é sobrecarregado em python, ou seja, seu comportamento depende do tipo de variável

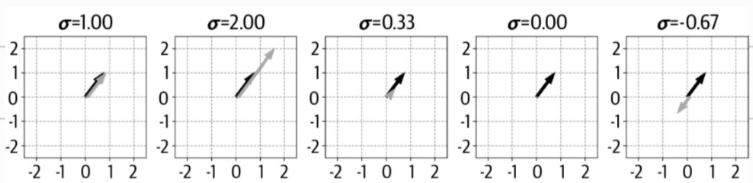
Adição escalar-vetor

Adicionar uma escalar a vetores não é formalmente definido em algebra linear: eles são dois tipos distintos de objetos matematicos e não podem ser combinados. Porem em programas de processamento numérico como python podemos adicionar escalores a vetores como se fosse uma multiplicação:

```
s= 2
v= np.array([3,6])
s+v
>> [5 8]
```

A geometria da multiplicação de vetores escalares

O motivo dos "escalores" se chamarem assim é por que eles escalam os vetores sem mudar sua direção



Vetores - Parte 3

A adição vetorial em combinação com a multiplicação vetor-escalar leva diretamente ao calculo da média vetorial. A média vetorial é a mesma coisa que a média numerica: soma e divida pela quantidade de números.

Por exemplo, para tirar a média de dois vetores: some e multiplique eles por 0,5.

Transposta

Converta a coluna de vetores em uma linha de vetores e vice-versa.

Uma matriz tem linhas e colunas, portanto, cada elemento da matriz tem um indice (linha, coluna). A transposta apenas troca esses indices.

$$m^T_{i,j} = m_{j,i}$$

Vetores tem apenas uma linha ou coluna, dependendo de sua orientação.

Broadcasting de vetores em Python

Broadcasting é uma operação que so existe na algebra linear moderna baseada em computadores.

Broadcasting significa repetir uma operação multiplas vezes entre um vetor e cada elemento de outro vetor.

$$[1 \quad 1] + [10 \quad 20]$$
$$[2 \quad 2] + [10 \quad 20]$$
$$[3 \quad 3] + [10 \quad 20]$$

Perceba o padrão nos vetores. Conseguimos implementar esse conjunto de equações compactamente condensando esses padrões em vetores $[1 \; 2 \; 3]$ e $[10 \quad 20]$, e então transmitir a adição:

```
v= np.array([[1,2,3]]).T # vetor coluna
w= np.array([[10,20]]) # vetor linha
v+ w
>> array([[11, 21],
          [12, 22],
          [13, 23]])
```

Magnitude do vetor e vetores unitários

A magnitude de um vetor - também chamado de comprimentro geometrico ou a norma — é a distância da origem ao fim do vetor, e é calculado usando a formula padrão da distância Euclidiana: a raiz quadrada da soma dos elementos dos vetores ao quadrado. A magnitude do vetor é indicada usando duas barras verticais entre o vetor: $\|v\|$

Vetores - Parte 1

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Algumas aplicacões usam a magnitude ao quadrado ($\|v\|^2$).

```
v = np.array([[1,2,3,7,8,9]])
v_dim = len(v)  # dimensionalidade
v_mag = np.linalg.norm(v)  # magnitude, dist. ou norma
```

Há algumas aplicações onde nós queremos um vetor que tenha um distancia geométrica de um, que é chamado de vetor unitário.

Um vetor unitario é definido como $\|v\| = 1$

Qualquer vetor não-unitario tem um vetor unitario associado. Isso significa que podemos criar um vetor unitario na mesma direção de um não unitário. Para isso, você simplesmente multiplica o escalar pelo vetor da norma reciproco.

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

$\hat{v}$ ↓ Vector unitário

O produto escalar vetorial

O produto escalar (tambem chamado de produto interno) é uma das operações mais importantes em toda a algebra linear.

Há muitas formas de indicar o produto escalar, a mais comum é a^Tb mas em outros contextos podemos ver $a.b$ ou $\langle a,b \rangle$

O produto escalar é um número unico que fornece informação sobre o relacionamento entre dois vetores.

Para calcular o produto escalar, você multiplica os elementos correspondentes de dois vetores e então soma todos os produtos individuais.

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$[1\ 2\ 3\ 4] . [5\ 6\ 7\ 8] = 1.5 + 2.6 + 3.7 + 4.8$$
$$= 5 + 12 + 21 + 32$$
$$= 70$$

*Só é valido para vetores com a mesma dimensionalidade.

No python:

```
v = np.array([[1,2,3,4]])
w = np.array([[5,6,7,8]])
np.dot(v,w)
```

Há uma propriedade interessante no produto escalar: a multiplicação escalar de um vetor dimensiona o produto escalar pela mesma quantidade.

```
s = 10
np.dot(s*v, w)
```

O produto escalar pode ser interpretado como uma medida de similaridade ou mapeamento entre dois vetores.

Vetores - Parte 1

O produto escalar é distributivo

Isso significa que:

$$a^T(b+c) = a^Tb + a^Tc$$

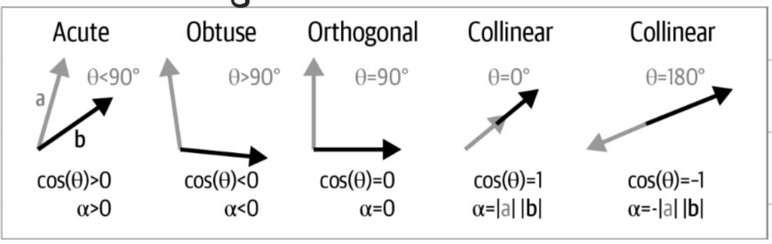
```
np.dot(a, b+c)
```

Geometria do Produto escalar

Há tambem uma definição geometrica para o produto escalar, que é o produto da magnitude dos dois vetores, escalonado pelo cosseno do angulo entre eles.

$$\alpha = \cos(\theta_{v,w}) \, \|v\| \, \|w\|$$

Perceba que a magnitude dos vetores são quantidades estritamente positivas, enquanto o cosseno de um angulo pode assumir distâncias de -1 a +1. Isso significa que o sinal do produto escalar é determinado pelo relacionamento geometrico entre os dois vetores



Vetores ortogonais tem um produto escalar de 0

Outras Multiplições de vetores

Multiplicação de Hadamard

Cada elemento correspondente nos dois vetores são multiplicados

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

No python podemos usar o asterisco (*). É uma maneira conveniente de organizar varias multiplicações escalares.

Produto Externo

O produto externo é uma forma de criar uma matriz a partir de um vetor de coluna e um de linha.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & ae \\ bd & be \\ cd & ce \end{bmatrix}$$

O produto externo, diferente do produto escalar, aceita vetores de dimensionalidade diferente. Ele é indicado por vw^T

No python:

```
np.outer( ) # ou
np.dot( ) # se os vetores forem uma coluna e linha, respectivamente.
```

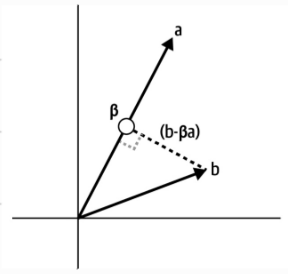
Decomposição de vetor ortogonal

Decompor um vetor ou matriz significa dividir essa matriz em várias partes mais simples. Decomposições são usadas para revelar informações escondidas na matriz,

Vetores - Parte 3

fazendo os mais faceis de trabalhar, ou para a compressão de dados.

A decomposição de vetor ortogonal nos leva ao procedimento de Gram-Schmidt e a decomposição QR



O produto escalar entre a e (b-βa) é 0 pois eles são perpendiculares:

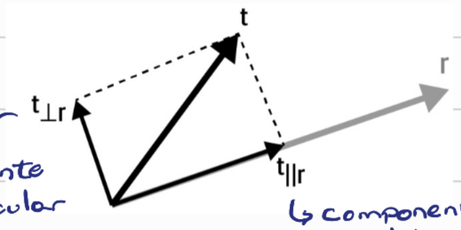
$$a^T(b-\beta a)=0$$

Daqui podemos aplicar a algebra para resolver β:

$$a^Tb-\beta a^Ta=0$$

$$\beta a^Ta=a^Tb$$

$$\beta=\frac{a^Tb}{a^Ta}$$



componente Perpendicular

componente paralela

$$t_{\| r}=r\cdot\frac{t^Tr}{r^Tr}$$

$$t=t_{\perp r}+t_{\| r}$$

$$t_{\perp r}=t-t_{\| r}$$

Resumo

- Um vetor é uma lista ordenada de numeros que é colocado em uma coluna ou linha. A quantidade de elementos em um vetor é chamado de dimensionalidade, e um vetor pode ser representado por uma linha em um espaço geometrico com o numero de eixos igual a dimensionalidade.
- Muitas operações aritmeticas em vetores (adição, subtração e multiplicação Hadamard) funcionam em todos os elementos
- O produto escalar é um unico numero que codifica o relacionamento entre dois vetores com a mesma dimensionalidade, e é calculado como a multiplicação e soma de elementos.
- O produto escalar e zero para vetores que são ortogonais, o que geometricamente significa que os vetores se encontram em um ângulo reto.
- A decomposição ortogonal de um vetor envolve a divisão de um vetor no somatorio de dois outros vetores que são ortogonais e paralelos ao vetor referência. A formula para essa decomposição pode ser derivada da geometria, mas você deve se lembrar da frase "mapeamento sobre a magnitude" como o conceito que essa formula expressa.

Vetores - Parte 1