Matrizes - 1

Uma matriz é um vetor levado ao proximo nivel. Matrizes são objetos matematicos altamente versateis. Eles podem guardar conjuntos de equações, transformações geometricas, as posições de particulas sobre o tempo, registros financeiros e inumeras outras coisas. Em ciência de dados, algumas vezes as matrizes são chamadas de tabelas de dados, caso as linhas representam observações e as colunas as variaveis.

Criando e Visualizando Matrizes no Numpy

Dependendo do contexto, matrizes podem ser explicadas como um conjunto de vetores em colunas empilhadas uma ao lado da outra, ou em linhas em camadas sobrepostas umas as outras, ou uma coleção ordenada de elementos individuais da matriz.

Visualizando, Indexando e Cortando Matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \pi & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 1/3 \\ e^{4.3} & -1,4 \\ 6/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes pequenas podem ser visualizadas inteiras. Porém, na prática, muitas vezes elas serão muito maiores. Portanto elas podem ser visualizadas como imagens. Os valores numéricos da matriz são substituidos por cores na imagem

três matrizes visualizadas como imagem

Matrizes são representadas por letras maiusculas em negrito, com **A** e **M**. O tamanho da matriz é indicado usando a convenção de (linhas, colunas)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

A matriz **M** é uma matriz 3×4 porque possui 3 linhas e 4 colunas

Você pode se referir a certo elemento da matriz pela posição do seu índice, por exemplo, o elemento da 2ª linha e 3ª coluna da matriz M e indicado por $m_{2,3}$ (no exemplo, $m_{2,3} = 4$).

* No python a indexação começa pelo 0. Portanto o elemento $m_{2,3}$ é indexado em Python como M[1, 2].

Matrizes - 1

Extrair um subconjunto de linhas ou colunas de uma matriz é feito pelo fatiamento.

$sub = A[\underbrace{1:4}_{\text{da linha 1 até a linha 4}}, \underbrace{0:5}_{\text{da coluna 0 ate a coluna 5}}]$

Matrizes Especiais

As matrizes podem ser descritas usando uma quantidade relativamente pequena de caracteristicas, que criam familias ou categorias de matrizes. Essas categorias são importantes de conhecer porque elas aparecem em certas operações ou possuem certas propriedades específicas.

Matriz de numeros aleatorios

Essa é uma matriz que contem numeros aleatorios de alguma distribuição, normalmente a Gaussiana (ou normal). Elas são uteis para explorar a algebra linear.

```
Mrows = 4
Ncols = 6
A = np.random.randn(Mrows, Ncols)
```

Quadrada X Não-Quadrada

Uma matriz quadrada tem o mesmo numero de linhas e colunas ($\mathbb{R}^{N \times N}$).

Enquanto uma matriz não-quadrada, também chamada de retangular, tem quantidades diferentes de linhas e colunas. Você pode criar matrizes quadras ou não quadradas ajustando o Mrows ou Ncols do codigo anterior.

Matrizes retangulares são chamadas de altas (tall) se tiverem mais linhas que colunas, ou largas (wide) se for ao contrario.

Diagonal

A diagonal de uma matriz são os elementos que comecam da parte esquerda superior e descem ate a direita inferior. Uma matriz diagonal tem zeros em todos os elementos fora da sua diagonal. Os elementos diagonais podem conter zeros, mas são os unicos elementos que podem conter valores diferentes de zero.

A função NumPy np.diag() tem dois comportamentos que dependem da entrada. Se a entrada for uma matriz ela ira retornar um vetor com os elementos diagonais. Se a entrada for um vetor ela retorna uma matriz com os elementos do vetor na diagonal.

Matrizes - 1

Triângular

Uma matriz triangular possui apenas zeros acima ou abaixo da diagonal principal. A matriz é chamada de triangular superior se os elementos diferentes de zero estão acima da diagonal ou inferior se estiverem abaixo.

O NumPy tem funções dedicadas para extrair o triângulo superior (np.triu( )) ou inferior (np.tril()) da matriz.

Identidade

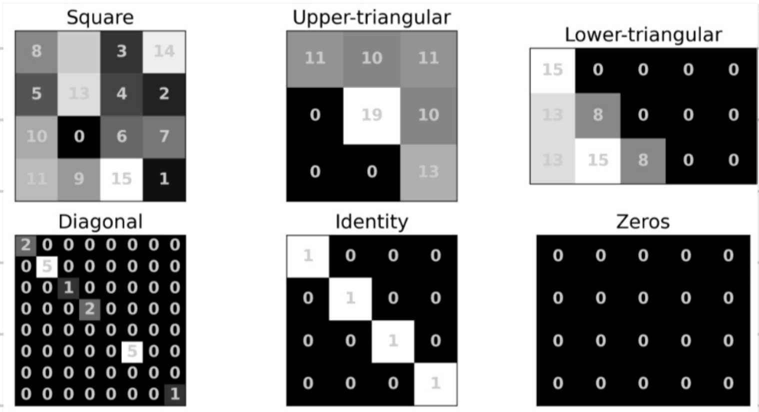
É equivalente ao numero 1, no sentido de que qualquer matriz ou vetor multiplicado pela matriz identidade resultar na mesma matriz ou vetor. A matriz identidade é uma matriz diagonal quadrada com todos os elementos diagonais tendo o valor de 1. Ela é indicada pela letra I e pode ter um numero subscrito informando seu tamanho (I_5 é uma matriz identidade 5×5.

Você pode criar uma matriz identidade no Python usando np.eye( ).

Zeros

A matriz zero e comparavel ao vetor zero: uma matriz com apenas zeros. Ela é indicada pelo zero em negrito: $\mathbf{0}$.

Pode ser criada pela função np.zeros( )



Adição, Multiplicação Escalar e Multiplicação Hadamard.

Adição e Subtração

Você pode somar duas matrizes somando seus elementos correspondentes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

A soma só pode ser realizada com matrizes do mesmo tamanho.

"Deslocando" uma Matriz

Assim como vetores, não é formalmente possivel somar um escalar a uma matriz, como $\lambda + A$.

Mas há uma forma de somar um escalar a uma matriz quadrada, e isso é chamado de "deslocar" ("shifting")

Matrizes - 1

uma matriz. Basta adicionar um valor constante a uma diagonal, que é implementada somando uma escalar multiplicada pela matriz identidade:

$$A + \lambda I$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ 4 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

Em Python:

```
A = np.array([[4,5,1] [0,1,11] [4,9,7]])
s = 6
A + s * np.eye(len(A))
```

Na pratica, desloca-se uma quantidade relativamente pequena para preservar o maximo de informação em uma matriz, enquanto se beneficia dos efeitos do deslocamento, como o aumento da estabilidade numérica da matriz.

Deslocar uma matriz tem duas aplicações primarias: é o mecanismo para encontrar os autovalores de uma matriz, e o mecanismo regularizador de matrizes quando se ajusta os modelos aos dados.

Multiplicações Escalares e Hadamard

Uma multiplicação de matriz-escalar multiplica cada elemento na matriz pelo mesmo escalar.

$$\gamma \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma a & \gamma b \\ \gamma c & \gamma d \end{bmatrix}$$

A multiplicação de Hadamard trabalha multiplicando duas matrizes de forma elementar.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 4c & 5d \end{bmatrix}$$

Em NumPy, a multiplicação Hadamard pode ser realizada usando a função np.multiply(), mas normalmente se utiliza o asterisco entre duas matrizes: A*B.

A multiplicação Hadamard tem algumas aplicações na algebra linear, por exemplo, calcular a matriz inversa. Entretanto, é mais usada em aplicações como uma forma conveniente de armazenar muitas aplicações individuais.

Matrizes - 1

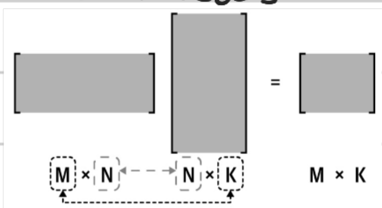
Multiplicação de Matriz Padrão

Em vez de trabalha por elementos, essa multiplicação padrão de matrizes opera por linhas/colunas. Essa multiplicação se reduz a uma coleção sistemática de produtos escalares entre linhas de uma matriz e colunas de outra matriz. (Essa forma de multiplicação é chamada de multiplicação de matrizes)

Regras para Validação de uma Multiplicação de Matrizes

Você ja sabe que o tamanho das matrizes e escrito por $M \times N$. Duas matrizes que se multiplicam podem ter tamanhos diferentes, então vamos se referir ao tamanho de segunda matriz como $N \times K$.

Uma multiplicação de matrizes so e valida quando as dimensões "interiores" (N) são as mesmas, e o tamanho da matriz produto é definido pelas dimensões "exteriores"



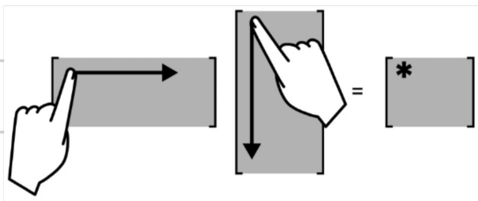
A multiplicação de matrizes não obedecem a lei de comutação: AB pode ser válida enquanto BA é invalida. Mesmo se as duas multiplicacões forem validas (se ambas as matrizes forem quadradas), elas podem produzir diferentes resultados:

$C = AB$ e $D = BA$, então em geral $C \neq D$.

Multiplicação de Matriz

O motivo pelo qual a multiplicação de matrizes é valida somente se o número de colunas na esquerda corresponder ao número de linhas a direita é que o (i,j)-ésimo elemento na matriz produto é o produto escalar entre a i-ésima linha da matriz a esquerda e a j-esima coluna da matriz a direita.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2a + 3c) & (2b + 3d) \\ (4a + 5c) & (4b + 5d) \end{bmatrix}$$



Lembre-se que o produto escalar codifica a relacão entre dois vetores, logo, o resultado da multiplicação

Matrizes - 1

é uma matriz que guarda todos as relações lineares em pares entre as linhas da matriz da esquerda com as linhas da matriz a direita.
Essa é a base para o calculo das matrizes de covariância e correlação, o modelo linear geral (usado em analises estatisticas incluindo ANOVAs e regressões), decomposição de valores singulares e muitas outras aplicações.

Multiplicação Matriz-Vetor

A multiplicaçao matriz-vetor tem muitas aplicações em ciência de dados, machine learning e computação gráfica.
O básico:

- Uma matriz pode ser multiplicada à direita por um vetor coluna mas não por um vetor linha, e pode ser multiplicada a esquerda por um vetor linha mas não por um vetor linha. Ou seja, Av e v^TA são validos, mas Av^T e vA são inválidos.
- O resultado de uma multiplicação matriz-vetor é sempre um vetor e sua orientação é a mesma do vetor que multiplica.

Uma multiplicação matriz-vetor tem muitas aplicações. Na estatistica, os dados preditos pelos modelos são resultados da multiplicação de uma matriz pelos coeficietes de regressão, que é escrito como $X\beta$. No PCA, um vetor de pesos de "feature-importance" é identificado maximizando a variancia no conjunto de dados Y e é escrito como $(Y^TY)v$. No processamento de sinais multivariados, um componente de dimensão reduzida é obtido aplicando-se um filtro espacial ao multicanal de dados de série temporal S, e é escrito como w^TS. Na geometria e computação grafica um conjunto de coordenadas de imagem pode ser transformado usando uma matriz de transformação matematica, escrita por Tp.

Operações de Matriz: Transposta

O principio continua o mesmo: trocar as linhas pelas colunas e vice-versa.

$$a^T_{i,j} = a_{j,i}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes - 1

Operações de Matriz: LIVE EVIL (ordem da operação)

LIVE EVIL é um palindromo (uma palavra ou frase que é soletrada da mesma maneira de tras para frente) e uma forma de lembrar como a transposição afeta a ordem de multiplicar as matrizes.

Basicamente, a transposta das matrizes multiplicadas é a mesma que as matrizes individuais transpostas e multiplicadas, mas na ordem inversa. Veja:

$$(LIVE)^T = E^T V^T I^T L^T$$

Matrizes Simétricas

Matrizes simetricas tem muitas propriedades especiais que os tornam otimos para trabalhar. Eles tendem a ser numericamente estaveis e portanto se tornam convenientes para calcular algoritmos.

Uma matriz simetrica significa que as linhas e as colunas correspondentes são iguais, ou seja, você pode troca-las que nada acontece a matriz, ou seja, $A^T = A$

$$\begin{bmatrix} a & e & f & g \\ e & b & h & i \\ f & h & c & j \\ g & i & j & d \end{bmatrix}$$

*Uma matriz retangular não pode ser simétrica

Criando Matrizes simétricas de Matrizes assimétricas

Multiplicar qualquer matriz - mesmo uma não-quadrada e assimétrica - por sua transposta irá produzir uma matriz quadrada assimétrica. Em outras palavras, A^TA é quadrada simetrica, assim como AA^T

Resumo

- Matrizes são planilhas de números. Um conjunto de vetores colunas, de vetores linhas ou um arranjo de valores individuais.
- Existem varias categorias de matrizes especiais. Familiarizar-se com suas propriedades ajudará a você a entender as equações matriciais e aplicações avançadas
- Algumas operações aritmeticas funcionam de elemento a elemento

como adições, multiplicações escalares e multiplicação Hadamard.

- "Deslocar" uma matriz significa adicionar uma constante aos elementos diagonais (Sem mudar os elementos fora de sua diagonal). O deslocamento tem muitas aplicações em machine learning, primeiramente para achar autovalores e a regularização de modelos estatisticos.
- A multiplicação de matriz envolve os os produtos escalares entre as linhas da matriz a esquerda e as colunas da matriz a direita. A matriz resultante é uma coleção organizada de mapeamentos entre pares linhas-colunas $(M \times N)(N \times K) = (M \times K)$.
- A transposta das matrizes multiplicadas e igual as matrizes individuais transposta e multiplicada com sua ordem invertida.
- Matrizes simetricas são espelhadas pela diagonal, o que significa que cada linha é igual a sua coluna correspondente, ou seja $A = A^T$
- Você pode criar matrizes simetricas de qualquer matriz multiplicando essa matriz pela sua transposta. A matriz resultante A^TA é o centro dos modelos estatisticos e decomposição de valores singulares.