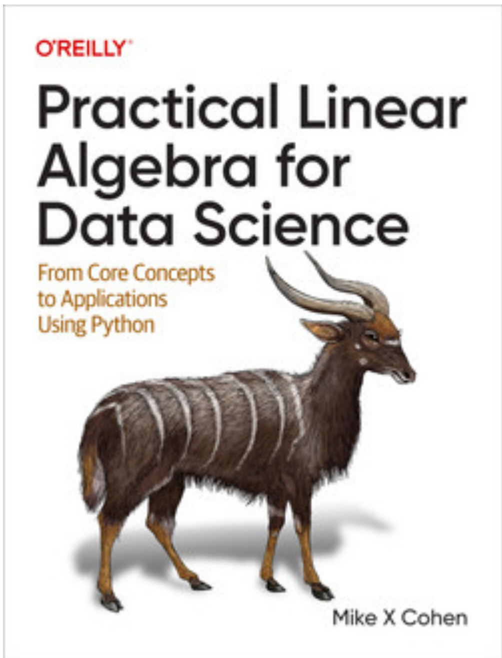
# Vetores - Parte 2




## Bibliotecas

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

## Conjunto de Vetores

Uma coleção de vetores é chamada de **conjunto** e é representado por letras maiusculas em itálico.

Exemplo:

$$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$$

Um conjunto de vetores pode conter uma quantidade **finita ou infinita** de vetores. Quando contém infinitos vetores, ele pode formar um **subespaço vetorial**, o que tem implicações importantes na modelagem estatística de dados.

Um conjunto de vetores também pode ser **vazio**, representado por $V = \{ \}$

## Combinação Linear Ponderada

Uma **combinação linear ponderada** é uma forma de integrar informações de múltiplas variáveis, onde algumas contribuem mais do que outras. Às vezes, o termo *coeficiente* é utilizado em vez de *peso*.

A combinação linear ponderada consiste em multiplicações escalar-vetor, seguidas por uma soma.

Presumimos que todos os vetores $v_i$ tem a mesma dimensionalidade e $\lambda_i$ podem ser qualquer número real.

Fórmula geral:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

**Aplicações:**

- Em modelos estatísticos, as previsões são obtidas por combinações lineares ponderadas dos regressores e seus coeficientes (calculados, por exemplo, pelo método dos mínimos quadrados).
- Em **PCA** (Análise de Componentes Principais), os componentes principais são combinações lineares dos dados, com pesos escolhidos para maximizar a variância.
- Em **redes neurais artificiais**, a primeira operação é uma combinação linear ponderada das entradas, seguida de uma função de ativação não linear. Os pesos são ajustados para minimizar uma função de custo (geralmente o erro entre a previsão e o valor real).

In [2]:
```
# escalares
l1 = 1
l2 = 2
l3 = -3

# vetores
v1 = np.array([4,5,1])
v2 = np.array([-4,0,-4])
v3 = np.array([1,3,2])

# combinação linear ponderada
l1*v1 + l2*v2 + l3*v3
```

Out[2]:
```
array([ -7,  -4, -13])
```

## Independência linear

Um conjunto de vetores é **linearmente dependente** se ao menos um vetor puder ser expresso como uma combinação linear dos outros.

É **linearmente independente** se **nenhum** vetor puder ser expresso dessa forma.

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

- O conjunto V é **linearmente independente**.
- O conjunto S é **linearmente dependente**.

Para verificar a independência linear, constrói-se uma matriz com os vetores e calcula-se seu posto (rank). Se o rank for igual ao número de vetores, eles são linearmente independentes.

## A matemática da independência linear

*Dependência Linear:*

$$\text{\bold}0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Essa equação diz que a dependência linear pode ser definida por uma combinação linear ponderada dos vetores no conjunto que resulta em um vetor de zeros.

Logo:

$$\lambda_1 v_1 = \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- *Todo conjunto de vetores é dependente ou independente, não um vetor individual*
- *Pelo menos um* $\lambda \neq 0$

## Subespaço e conjunto gerador

Um **subespaço vetorial** é formado por **todas** as combinações lineares possíveis dos vetores de um conjunto.

O processo de formar essas combinações é chamado de envoltória linear (ou espaço gerado). O conjunto original é o conjunto gerador.

A dimensão de um subespaço é o número mínimo de vetores linearmente independentes que o geram. Assim:

- Se os vetores forem linearmente independentes, a dimensão do subespaço é igual ao número de vetores.
- Se forem dependentes, a dimensão será menor que a quantidade de vetores.

**Definição formal:** Um subespaço vetorial é um subconjunto que é fechado sob adição e multiplicação escalar, e contém a origem do espaço (o vetor nulo).

## Base

Uma **base** é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram um subespaço.

Ela funciona como um **sistema de coordenadas**: qualquer vetor no subespaço pode ser descrito unicamente por uma combinação linear dos vetores da base.

O conjunto de base mais comum é o dos **eixos cartesianos**, como o plano XY.

Não existe uma base “melhor” universalmente — a escolha da base depende do problema, variáveis e contexto da análise.

In [ ]:
```
import plotly.graph_objects as go

xlim = [-4,4]

# Dois vetores em um espaço tridimensional
v1 = np.array([ 3,5,1 ])
v2 = np.array([ 0,2,2 ])


# Escalares aleátorios no intervalo do eixo X
scalars = np.random.uniform(low=xlim[0],high=xlim[1],size=(100,2))
```

```
# Cria pontos aleatórios
points = np.zeros((100,3))
for i in range(len(scalars)):

  # Definir esse ponto como uma combinação aleatória ponderada dos dois vetores
  points[i,:] = v1*scalars[i,0] + v2*scalars[i,1]


# Desenhar os pontos no plano
fig = go.Figure( data=[go.Scatter3d(x=points[:,0], y=points[:,1], z=points[:,2],
                                    mode='markers', marker=dict(size=6,color='black

fig.update_layout(margin=dict(l=0,r=0,b=0,t=0))
```

**Resumindo:**

Um conjunto de vetores forma uma base de um subespaço se:

- Ele abrange (gera) o subespaço.
- É linearmente independente.

Isso garante que qualquer vetor no subespaço pode ser descrito de forma única usando essa base.

# Referência

https://www.oreilly.com/library/view/practical-linear-algebra/9781098120603/