MT10/P13 - TP Groupes d'ordre 4

Table des matières

1 Test d'une loi

1.1 Codage d'une loi sur un ensemble

Bien que `Sage` reconnaisse le type "ensemble", il sera préférable de coder les ensembles par des listes, afin de repérer sans ambiguïté ses éléments. Par exemple, l'ensemble à 4 éléments

$$E = \{a; b; c; d\}$$

sera représenté par

```
E=[a, b , c, d]
```

de sorte que les éléments de E soient numérotés : $E[0] = a$, ..., $E[3] = d$.

Une loi $*$ sur E,

$$\begin{array}{rcl} * : E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

peut donc se coder par un tableau d'entiers $t[i, j] \in [\![0, 3]\!]$ tel que

$$(\forall i, j \in [\![0, 3]\!]) \qquad E[t[i, j]] = E[i] * E[j]$$

Question 1: Former (à la main) les tableaux correspondants aux lois des groupes $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, 0)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$.

Question 2: `Sage` permet de coder des groupes cycliques comme sous-groupes de groupes de permutation. Par exemple :

```
Z4=CyclicPermutationGroup(4)
```

Taper ensuite `Z4.` TAB pour obtenir la liste des méthodes associées au groupe `Z4` que vous venez d'instancier. En déduire une autre manière de former les tables de loi (qui s'appellent aussi tables de Cayley).

1.2 Elément neutre

S'il existe, l'élément neutre est $E[\alpha]$ où $\alpha \in [\![0,3]\!]$ vérifie

$$(\forall i \in [\![0,3]\!]) \qquad t[i,\alpha] = i \quad \text{et} \quad t[\alpha,i] = i$$

Question 3: Ecrire une procédure `Sage` qui teste si une loi donnée par un tableau t admet un élément neutre, et qui, s'il existe, le renvoie. Tester sur les tables de la question 1.1, et sur une autre table choisie au hasard.

1.3 Elément symétrique

L'élément $E[i]$ admet $E[j]$ comme symétrique si

$$t[i,j] = \alpha \quad \text{et} \quad t[j,i] = \alpha$$

Question 4: Ecrire une procédure `Sage` qui, pour chaque élément, recherche son élément symétrique, et qui, s'il existe, le renvoie. Tester sur les tables de la question 1.1, et former la table des symétriques.

1.4 Associativité

La loi codée par le tableau t est associative si

$$(\forall i,j,k \in [\![0,3]\!]) \qquad t[t[i,j],k] = t[i,t[j,k]]$$

Question 5: Ecrire une procédure `Sage` qui teste si une loi donnée par un tableau t est associative. Tester sur les tables de la question 1.1.

Question 6: Décrire le fonctionnement de `TestSuite` : à l'aide de `??`, dire comment `Sage` réalise les tests précédents.

2 Test d'un morphisme

Considérons deux groupes finis $(G,*,e)$ et $(G',*',e')$ d'ordre n et n' respectivement. Leurs éléments sont codés respectivement par les listes (notées encore) G et G' et leurs lois sont respectivement codées par les tableaux t et t'. Une application

$$\begin{array}{rcl} f : G & \longrightarrow & G' \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

se codera par une liste (notée encore) f de n entiers appartenant à $[\![0,n'-1]\!]$ de sorte que :

$$(\forall k \in [\![0,n-1]\!]) \qquad G'[f[k]] = f(G[k])$$

L'application f est un morphisme (de groupes) si

$$(\forall x,y \in G) \qquad f(x*y) = f(x)*' f(y),$$

qu'on codera par

$$(\forall i,j \in [\![0,n-1]\!]) \qquad f[t[i,j]] = t'[f[i],f[j]].$$

Question 7:

1. Ecrire une procédure `Sage` qui teste si une application donnée entre deux groupes est un morphisme.
2. Utiliser cette procédure pour construire tous les automorphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, 0)$, puis de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$.
(On rappelle qu'un automorphisme de G est une bijection de G dans lui-même qui est aussi un morphisme.)
3. Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, 0)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$ ne sont pas isomorphes.

3 Où l'on identifie tous les groupes d'ordre 4

Soit un ensemble à 4 éléments : $E = \{a_0; a_1; a_2; a_3\}$. On veut en faire un groupe $(E, *, e)$.

Question 8: Dire pourquoi la table de $*$ doit être un carré latin, *i.e.* chaque élément apparaît une fois et une seule dans chaque ligne et chaque colonne.

Si on choisit $e = a_0$, et en imposant le fait que la table d'un groupe doit être un carré latin, on obtient ces 4 tables :

(I)

$x \backslash x'$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_1	a_0
a_3	a_3	a_2	a_0	a_1

(II)

$x \backslash x'$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

(III)

$x \backslash x'$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3	a_0
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_0	a_1	a_2

(IV)

$x \backslash x'$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_3	a_0	a_2
a_2	a_2	a_0	a_3	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

Question 9:

1. Dire si ces 4 tables sont bien des tables de groupe et si ce sont les seules.
2. Parmi ces tables, déterminer celles qui sont isomorphes à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, 0)$, puis celles isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, 0)$.

4 Utiliser les fonctionnalités de `Sage`

`Sage` permet de construire les groupes d'ordre petit, par exemple les deux groupes d'ordre 4 par `CyclicPermutationGroup(4)` et `KleinFourGroup(4)`.

Question 10: En utilisant ces fonctionnalités, reprendre le plus possible des questions précédentes et explorer les groupes d'ordre 5 et 6.