Titre : Oscillateur harmonique, approximation et limitations

Présentée par : Basile POUJOL **Rapport écrit par** : Anna WILS

Correcteur : Julien FROUSTEY et Jules FILLETTE **Date** : 03/05/2021

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Comprendre la mécanique	J-P Romagnan	Collection enseignement supérieur
Mécanique fondamentale et application	Perez	Dunod
Mécanique	Landau	
Tout en un, physique, PCSI		Dunod
Electronique fondement et application	Perez	Dunod
Les oscillateurs en électronique	Couturier	Ellipses
Electronique des signaux analogiques	Auvray	

Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis :
- Principe fondamental de la dynamique
- Loi des mailles
- Equation différentielle
- Condensateur ($Q = Cu$)

Plan :

I- Etude d'un oscillateur mécanique
1) Observation
2) Mise en équation
3) Energétique

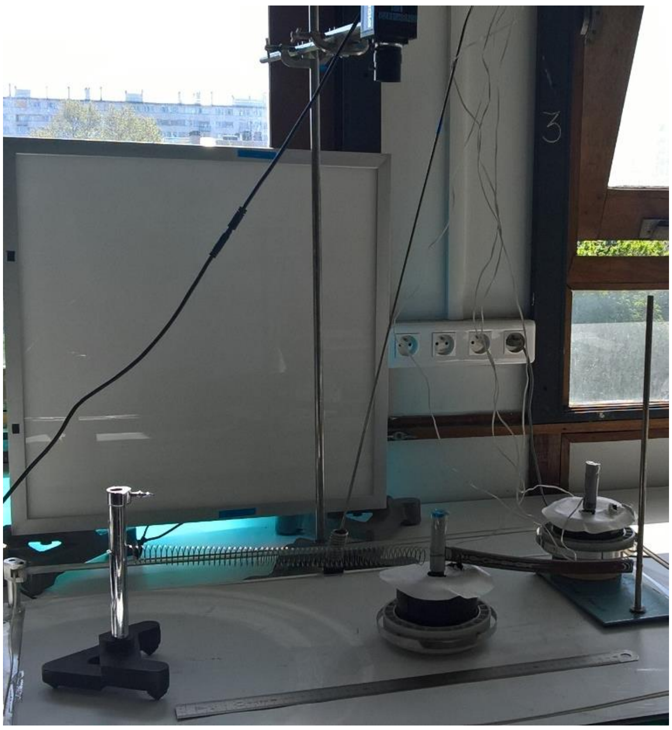
II- Approximation et limite
1) Oscillateur harmonique amorti
2) Amplitude des oscillations

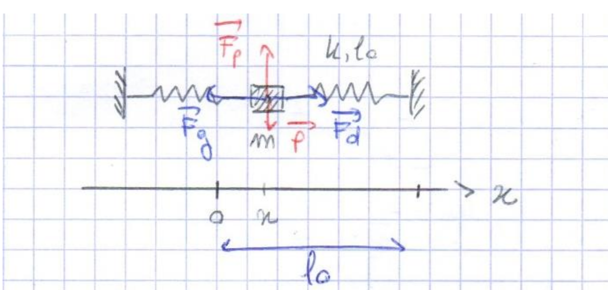
Intro : Comment mesure-t-on et définit-on le temps ? Nous nous basons sur des oscillateurs naturels, le fonctionnement même de la montre est basé sur un oscillateur. Dans cette leçon nous allons étudier le modèle de l'oscillateur harmonique, ainsi que ses avantages et ses limitations. L'équation de l'oscillateur harmonique décrit beaucoup de systèmes physiques.

I. Etude d'un oscillateur mécanique *[tps : 19min]*

1) Observation

Manip :





But : expliquer la naissance des oscillations

2) Mise en équation

Système : masse
Référentiel : Rt galiléen
Bilan des forces : poids (P), réaction normale (Fp), force du ressort droit (Fd), force du ressort gauche (Fg)
PFD (projeté sur axe x) :

$\vec{F_d} = +k(l - l_0)\,\vec{e_x} = -kx\,\vec{e_x}$

$\vec{F_g} = -k(l_g - l_0)\,\vec{e_x} = -kx\,\vec{e_x}$

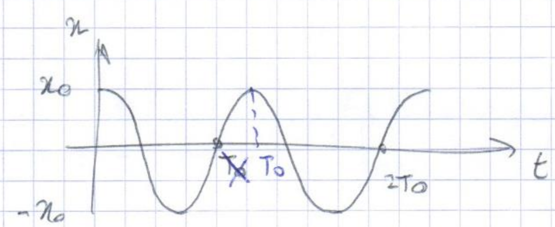
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2kx \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}}$

Solution de la forme :

Solution de la forme : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Avec C.I

$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ x(t=0) = x_0 \Rightarrow A = x_0. \end{array}\right\}\ x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$



$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

3) Energie

Rq : à l'état initial énergie cinétique nulle, et pourtant non nulle au cours du mouvement ? Vient d'une énergie potentielle, nous avons déjà vu l'énergie potentielle de pesanteur, ici autre forme d'énergie potentielle

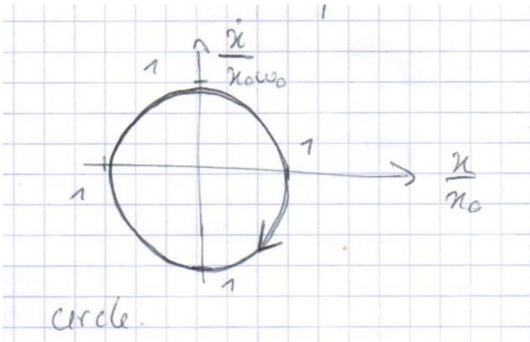
Def : énergie potentielle élastique : $\mathrm{Fel} = -\dfrac{\partial \mathrm{E_P}}{\partial \mathrm{x}}$

$\mathrm{E_p} = \frac{1}{2}\mathrm{kx^2} + \frac{1}{2}\mathrm{kx^2} = \frac{1}{2}\mathrm{kx^2}$

$\mathrm{E_c} = \dfrac{1}{2}\mathrm{m}\dot{\mathrm{x}}^2 = \mathrm{kx_0^2}\sin^2(\omega_0 \mathrm{t})$

$\langle E_c \rangle = \dfrac{1}{2}\mathrm{kx_0^2} = \langle E_p \rangle$

Portrait de phase (avec adimensionnement des quantités) :



Ainsi le rayon du cercle correspond à l'énergie mécanique du système -> cercle de rayon constant donc l'énergie mécanique se conserve

II. Approximation et limite *[tps : 20min]*

1) Oscillateur harmonique amorti

Rq : nous avons déterminé la forme analytique des solutions de l'oscillateur harmonique ainsi que son portrait de phase, vérifions que cela correspond à l'expérience

Manip : acquisition vidéo, trace x(t) (oscillations amorties), trace portrait de phase (pas la même allure, rayon diminue, perte d'énergie non prise en compte dans le modèle)

Il faut apporter des modifications au premier modèle pour prendre en compte les pertes = oscillateur harmonique amorti

$\vec{F}_{frott} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e_x}$

$m\ddot{x} = -2kx - \alpha\dot{x}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$; $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$

facteur de qualité

Rq précédemment cos et sin astuce ici chercher des solut° sous forme d'expo complexe.

On cherche des solut° : $\underline{\xi}(t) = \underline{\xi_0}\, e^{\underline{r}t}$

$\underline{r}^2 + \frac{\omega_0}{Q}\underline{r} + \omega_0^2 = 0.$

$\underline{r} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$ hyp : $Q > \frac{1}{2}$

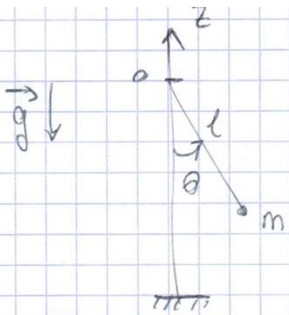
$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ valide car oscillat° faiblement amorti, k domine devant α (petite correct°)

$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\cos(\omega_r t + \varphi)$

Sur Qtiplot ajuster les données par cette fonction, fonctionne très bien -> modèle qui rend compte de la réalité physique

2) Amplitude des oscillations

Manip : pendule, mesure la période aux petits angles et aux grands angles, elles sont différentes (et ce n'est pas due aux incertitudes)
Dans le modèle la période dépend uniquement des caractéristiques du système et pas de l'amplitude il faut apporter une nouvelle explication



$E_p = -mgl\cos\theta$

approximation : $\theta \ll 1$

$E_p \simeq -mgl\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) \simeq E_p(0) + mgl\frac{\theta^2}{2}$

$E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$

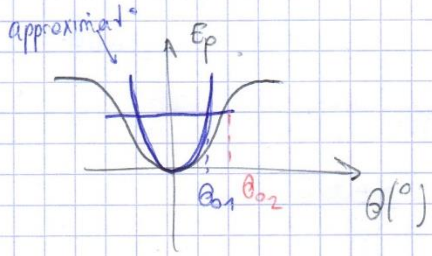
$= \frac{1}{2}ml^2\omega_0^2\left(\theta^2 + \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}\right)^2$

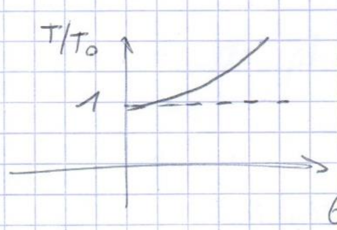
$\ddot{\theta} + \omega_0\theta = 0 \mapsto \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

modèle oscillateur harmonique ne rend pas compte des observat°

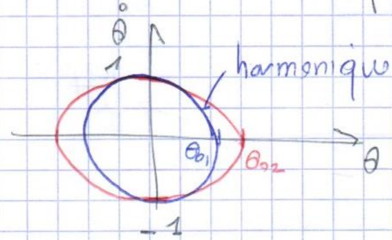
$\vec{F}_{rappel} \propto$ courbe blanche

surestime $\vec{F}_{rappel}$ dans le modèle.





s'observe à l'aide portrait de phase



perte d'isochronisme.

Conclusion : *[1min]*
Ouverture sur les oscillateurs à quartz

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manquent, l'enseignant pourra compléter le document)

Lorsqu'on mesure le temps avec des oscillateurs, quel est le système que l'on étudie ? Est-ce que c'est un oscillateur harmonique comme dans la leçon ? Est-ce que c'est la même physique ?
Transition entre 2 niveaux hyperfins de l'atome de Césium 137. Oscillateur harmonique quantique. Pas les mêmes outils, on utilise l'eq de Schrödinger mais on peut toujours définir une pulsation.

Est-ce la 1ère fois que vos élèves voient l'oscillateur harmonique ? Est-ce que c'est la forme la plus simple qui soit de l'oscillateur harmonique ?
Oui, c'est la 1ère fois ; normalement il n'y a qu'un seul ressort, mais expérimentalement le mouvement n'est pas sur un axe si on ne met qu'un seul ressort. La physique reste la même.
Cette question permettait juste de souligner que « par défaut », l'OH vu la première fois est avec un seul ressort, de sorte que l'énergie potentielle est au total ½ k x^2, la pulsation w0 = sqrt(k/m). Il faut bien en être conscient, ce n'est pas forcément un problème d'utiliser deux ressorts.

L'hypothèse que les 2 ressorts sont identiques alors que dans l'expérience ils ne le sont pas, est ce que ça change qlq chose ?
Pulsation devient sqrt((k1+k2)/2) et la position d'équilibre est différente
La position d'équilibre dépende que de l1 et l2 ?
Non, dépend aussi des raideurs
Comment trouver les raideurs expérimentalement ?
Suspendre une masse au ressort, suivant z, système à l'équilibre

Qu'est ce qu'un élève doit retenir de cette leçon ?
Oscillateur harmonique = oscillations sinusoïdales d'amplitude constante, conservation de l'énergie mécanique, équipartition de l'énergie, isochronisme des oscillations.

Définition de l'oscillateur harmonique ?
Système physique qui vérifie l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique
Comment s'appelle w0 ? *Pulsation propre*

Sur votre manip vous avez excité les ressorts suivant leurs axes, que se passe-t-il si vous excitez orthogonalement ?
On obtient aussi un oscillateur harmonique
C'est possible même s'il n'y a pas de ressort dans cette direction ?
Oui, pcq on peut projeter les composantes de l'élongation du ressort sur cet axe.
Absolument, et ça rejoint le message général de la leçon : au voisinage d'une position d'équilibre stable, oscillations harmoniques. Plus loin : anharmonicité, comme on peut le voir ici
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/anharmo2.html.

C'est tout le temps vrai ?
Au voisinage d'un équilibre stable oui, avec des petites oscillations on peut négliger les termes d'ordres supérieur

Il se passe quoi si on ajoute un terme en x^3 ? *Résolution par un développement perturbatif*
On s'attend à quoi ? *Perte d'isochronisme*
Se traduit comment fréquentiellement ? *Apparition de nouvelle harmonique*
Spectre de l'oscillateur harmonique ? *1 fréquence fondamentale*
Si on pousse le développement du potentiel :

- Jusqu'à un terme en x^3 (attention, ce terme ne sera non-nul que pour un potentiel asymétrique, par exemple pour un pendule pesant le prochain terme non-nul du développement est celui en x^4), on prend en compte la présence d'un côté plus « mou » et d'un côté plus « raide » autour de la position centrale. En effet, d'un côté le potentiel est inférieur au potentiel harmonique, et de l'autre côté il augmente plus vite. Lors de petites oscillations, la position moyenne sera décalée (du côté « mou ») mais la période ne sera pas modifiée au premier ordre, car le plus grand temps passé du côté « mou » compense le moindre temps passé du côté « raide ».
  Remarque : si l'énergie potentielle a un terme en αx^3, la période est modifiée à l'ordre α^2 (donc au deuxième ordre en la correction).
- Jusqu'à un terme en x^4, la période est modifiée (formule de Borda par exemple). Un terme en x^4 seul ne change pas la position moyenne (par symétrie).

Un coup vous avez écrit une solution cos+sin et après une solution cos(…+phi) change qlq chose ? *Non totalement équivalent*

Pour le pendule Ep = -mglcos(theta), énergie potentielle élastique ? *Non, pesanteur, on l'a juste mis sous la même forme que l'énergie élastique.* On peut toutefois dire, lorsqu'on fait un développement aux faibles angles, que le terme obtenu est analogue à un terme élastique.

On peut toujours avoir des oscillateurs harmoniques en 3D ? *Oui, on a vu sur la manip qu'on peut avoir des oscillations dans 2 directions on peut tout à fait en rajouter suivant un 3eme axe, les oscillations peuvent avoir des fréquences différentes*

$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle$ vrai tout le temps ? *Ep sous forme quadratique, tout le tps vrai pour l'oscillateur harmonique.*

Terme « équipartition » vous pouvez le relier à autre chose ? *système à l'eq thermique énergie KbT/2*

Différentes trajectoires dans le diagramme des phases, change quoi *? Dépend uniquement de l'énergie mécanique*

C'est quoi un portrait de phase ? *Représente la trajectoire de la dynamique dans l'espace des phases. Avec le formalisme lagrangien ou hamiltonien c'est la représentation des (qi, pi)*
Si on parle d'impulsion c'est Lagrangien ou Hamiltonien ? *Hamiltonien*

Manip amplitude diminue, vous avez modélisé par un frottement fluide pourquoi ? *avec un frottement solide on a pas ce comportement, et il y a un effet de viscosité de l'air au niveau du coussin d'air.*
Avec du frottement solide, la diminution de l'amplitude est *linéaire* et non pas exponentielle. Le portrait de phase n'est pas une spirale mais une succession de demi-cercles, et la position d'équilibre n'est plus le point x=0 mais la plage de x pour laquelle T < mu_s * N.
Vous voyez d'autres sources de dissipation ? *Dans les ressorts*
Modélisé par -alpha*v, vous pouvez en dire plus ? *On à un fluide visqueux il va y avoir un écoulement de couette plan entre le mobile (qui oscille) et la plaque (immobile)*

Linéarité vraie dans n'importe quel cas ? *Non faible nombre de Reynolds*

On a des résultats analytiques pour le pendule ? *Formule de Borda*
Change quoi ? *L'expression de la période dépend de l'amplitude, typiquement ici avec un terme en (theta0^2)/16*
Si on rejoutait encore un terme il aurait quelle tête ? *théta0^4, conserver la parité*
Vrai tout le temps ? *Non, dépend de la symétrie de Ep*
On s'attend uniquement au changement de période ? *Si le système est asymétrique la position moyenne peut changer .*

Dans votre formule vous avez ajusté par un exp(-w0t)cos(w0t+phi), même w0 dans exp et cos ?
Normalement cos(wr…), mais beaucoup de terme pour l'ajustement, de plus on voit qu'avec cette forme Q = 25, donc a posteriori le terme 1/4Q^2 de wr est bien négligeable
Si l'hypothèse Q>1/2 pas vérifié quel sont les autres régimes ? *apériodique et critique*

Que pouvez vous dire de l'oscillateur harmonique quantique ?
*Energie quantifiée : En = (n+1/2)*h_bar*w0, que des états discrets accessible*
Seulement ces états accessibles ? *L'état du système peut etre une CL de ces états, la mesure donnera un de ces états. Mais val moyenne de plusieurs mesure permet d'obtenir l'énergie du système*
Autre différence avec oscillateur harmonique classique ? *Existence d'une énergie minimale.*

Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

À 40 minutes il faut absolument avoir fini/s'arrêter, le jury n'hésitera pas à interrompre sèchement et ça peut jouer en votre défaveur.

Pour des élèves qui n'ont jamais vu l'oscillateur harmonique bcp de notion introduite : force du ressort, plan de phase, oscillation amorti… Situation inconfortable pcq il faut bien définir l'oscillateur harmonique, mais le niveau de la leçon croît rapidement et on traite l'oscillateur amorti trop rapidement.
Le message de cette leçon c'est l'approximation autour des points d'équilibre stables. Pour effectuer cette étude il est proposé de mettre l'oscillateur avec le système masse ressort en prérequis (faire un rapide rappel sur les points important en 3min en début de leçon), pour pouvoir ajouter un terme à l'énergie potentielle et obtenir la formule de Borda, et discuter la non linéarité.

Se préparer une slide sur les différents régimes libres de l'oscillateur amorti (apériodique, critique, pseudo-périodique) si on veut gagner du temps.

Temps perdu sur l'exploitation de la manip. En leçon ça ne pose pas de problème de montrer des points/courbes faites en préparation.

Une illustration expérimentale doit rester une illustration (ce n'est pas un montage, vos compétences expérimentales sont évaluées ailleurs !), donc il faut ne pas y perdre du temps. Néanmoins une expérience sera toujours valorisée, et met de la couleur dans une leçon.
Lorsqu'on prend conscience qu'on n'aura pas le temps de faire tout ce qui est prévu il faut réfléchir à ce qu'on peut sacrifier. Il vaut mieux sacrifier qlq chose que de tout faire trop vite et mal…

Il faut noter les messages importants au tableau, prendre des temps de pauses, casser le rythme, pour insister lourdement sur les propriétés importantes. Mettre de la couleur et encadrer les résultats, ça aide à structurer.
Certaines choses intéressantes ont été dites à l'oral mais pas écrites.

Le portrait de phase : Il y avait bcp d'informations, passer plus de temps pour bien expliquer le sens de parcours, l'interprétation, les différentes trajectoires pour le système.
Pas hyper convaincu par l'adimensionnement, cache un peu de la physique qui pourrait être discutée.
Plus précisément, le choix ici était de représenter$\left(\frac{x}{x_0}, \frac{\dot{x}}{x_0\omega_0}\right)$. Cela a le défaut de ne pas séparer des trajectoires correspondant à des conditions initiales différentes, alors que c'est là tout l'intérêt d'un portrait de phase ! Il vaut mieux représenter le plan $\left(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)$.
C'est bien de tracer un portrait de phase en entier à la main, pour voir comment le construire, pour les suivants (notamment les portraits de phase plus compliqués) on peut utiliser un programme python par exemple.

De manière générale, il faut être motivé par ce qu'on présente et donc présenter le plus possible des choses qui nous inspirent avec des choix justifiés et assumés, tout en restant <u>en maîtrise</u> de ce qu'on présente (ce qui était tout à fait le cas ici).

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :

Ce qui a été présenté était globalement bien présenté, mais on reste sur notre faim. Il y a un choix (difficile) à faire : on ne peut pas présenter en longs détails l'oscillateur harmonique à partir de zéro et discuter portrait de phase, oscillateur amorti, effet des non-linéarités…
Le problème ici est que l'effet des non-linéarités n'a pu être qu'esquissé, et des choses intéressantes ont dû être abandonnées faute de temps.

Une possibilité consisterait à mettre le système masse-ressort en prérequis, ainsi que les solutions d'équations différentielles.
On peut construire la leçon autour du pendule pesant, qui présente l'avantage de montrer tout-en-un :
- L'approximation harmonique pour les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$ (c'est le message de la leçon, qui doit arriver vite !)
- L'amortissement des oscillations, ce qui permet d'introduire l'oscillateur amorti (pour la résolution de tous les cas – apériodique, pseudo-périodique, critique - prévoir des slides ou dire que ce sera fait plus tard pour pouvoir se concentrer sur l'essentiel)
- L'effet des non-linéarités, on peut ainsi démontrer la formule de Borda.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :

- Approximation parabolique d'un potentiel autour d'une position d'équilibre stable [« raideur » effective $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x = 0)$]
- Discuter de l'importance et universalité du modèle de l'OH
- Caractéristiques d'un oscillateur harmonique : oscillations sinusoïdales, isochronisme des oscillations, énergie mécanique conservée.
- Écarts au modèle : non-linéarités (apparition de nouvelles fréquences, ce qui correspond à la partie d'isochronisme), amortissement

Notions secondaires :
- Utilisation du portrait de phase (mais outil très puissant, notamment pour le pendule)
- Calcul explicite de l'effet des non-linéarités (développement perturbatif)

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :

- Pendule simple ou pesant
- Système masse-ressort (avec mobiles autoporteurs par exemple)
- Oscillateurs électroniques (mais moins reliés aux « approximations » harmoniques)

<u>Bibliographie conseillée</u> :

Pour l'OH en général, ouvrages de sup + Mécanique type BFR, Pérez, *Toute la mécanique*…

Pour le portrait de phase :
http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID_fiche=3036

Pour l'effet des non-linéarités :
Mécanique, Landau
Très bon exercice détaillé dans https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5081-la-mecanique-classique-appliquee-a-la-physique-contemporaine-42-exercices-et-problemes-corriges-niveau-l-9782729839277.html

Bonne discussion de l'universalité de l'oscillateur harmonique dans Aslangul, *Mécanique quantique 1* (en préambule de la présentation de l'OH quantique, il discute l'OH classique).