Titre : Régimes d'écoulement en mécanique des fluides

Présentée par : Basile POUJOL **Rapport écrit par** : Anna WILS

Correcteur : Julien FROUSTEY et Jules FILLETTE **Date** : 17/05/2021

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Hydrodynamique physique	**E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit**	**CNRS éditions**
Instabilités hydrodynamiques	F. Charru	CNRS éditions
Ce que disent les fluides	E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit	Belin
Mécanique des fluides	Landau et Lifchitz	

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : L3
Pré-requis :
- Equation d'Euler – Fluides parfaits
- Equation de Navier-Stokes – écoulement de Poiseuille
- Diffusion

Plan :

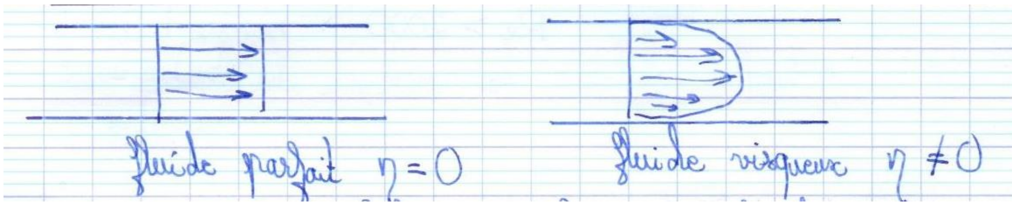
I. Expérience de Reynolds
   1) Observations
   2) Nombre de Reynolds

II. Des écoulements rampants à la turbulence
   1) Ecoulements rampants
   2) Instabilité des écoulements parallèles à haut Reynolds
   3) Développement de la turbulence

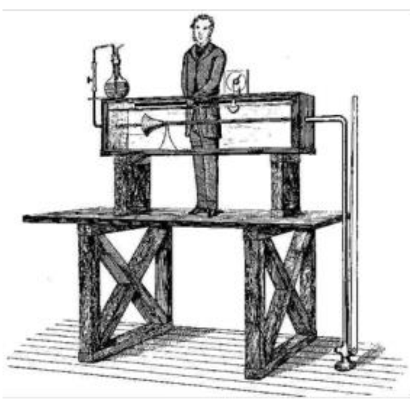
III. Couche limite
   1) Etude du problème
   2) Application

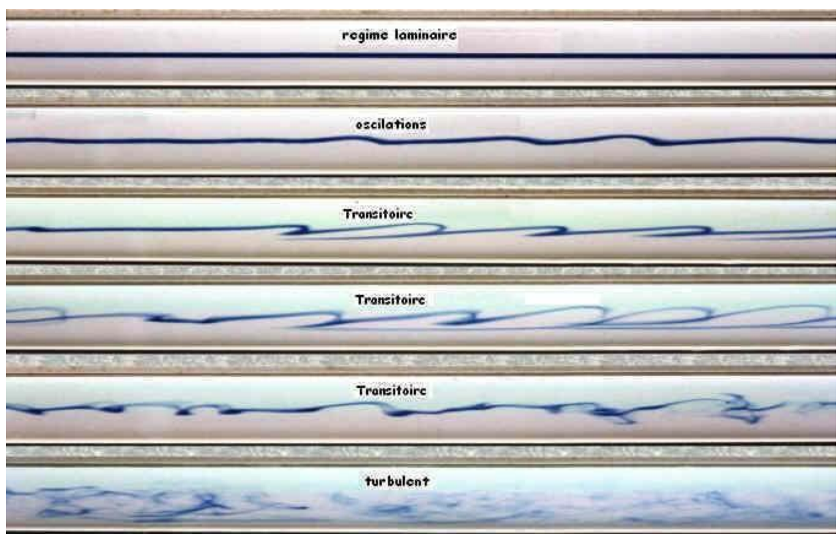
Intro :
Nous avons vu deux modèles celui du fluide parfait et celui du fluide visqueux.
Comment faire le lien entre les deux modèles ? Quelles sont leurs limites respectives ?

I. Expérience de Reynolds
   1) Observations



Deux solutions à l'écoulement dans un tuyau : si le fluide est parfait ou s'il est visqueux
Def : écoulement parallèle : $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{u} = 0$
Ici : $\vec{u} = u(y)\overrightarrow{e_x}$ – Pour se raccrocher au niveau de l'agreg on aurait pu expliciter un peu le $\vec{u}.\vec{\nabla}$ dans ce cas pour montrer qu'effectivement il s'annule, mais il l'a bien dit à l'oral.
On souhaite vérifier que cela décrit ce que l'on observe : on injecte du colorant suivant ey, on a bien une ligne. Cependant lorsque l'on change la vitesse du fluide l'écoulement devient instationnaire. – Pour se raccrocher au niveau de l'agreg ça aurait pu être le moment de redéfinir les lignes de courant, d'émission, etc.


O. Reynolds (1883)



Slide : allée de Benard Von Karman / image d'écoulement turbulent derrière un cylindre / image des nuages dans le sillage d'une montagne
1880 : Reynolds teste différents tuyaux, différents fluides, et regarde à quelle vitesse apparaît la turbulence, il trouve alors un nombre adimensionné qui prend toujours la même valeur à la transition.

2) Nombre de Reynolds

N.S : – Pour se raccrocher au niveau de l'agreg on aurait pu redonner les hypothèses nécessaires à l'application de cette loi. On pouvait aussi refaire rapidement l'interprétation physique de chaque terme.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{1}{\rho}\vec{f} + \nu\,\vec{\Delta}\vec{v}$$

Def :

$$Re = \frac{U \cdot L}{\nu} \sim \frac{\|(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\|}{\nu\|\vec{\Delta}\vec{u}\|} \sim \frac{\text{inertiel}}{\text{visqueux}}$$

Avec L : taille caractéristique du système
Ce nombre compare la force des différents termes

Derrière un cylindre (vidéo à l'appui) :
Re << 1 : régime rampant
Re < 47 : régime laminaire
47 < Re < 2 000 : régime inertiel – apparition d'instabilités
Re > 2 000 : régime turbulent – persistance des structures et fluctuations incohérentes

Nous allons étudier les caractéristiques de l'écoulement à ces différentes valeurs de Re et voir pourquoi de tel phénomènes apparaissent

II. Des écoulements rampants à la turbulence

1) Ecoulements rampants

Re << 1 – effet inertiels négligeables – Exemples :
Mouvement d'une bactérie :
L = 3µm, U=10µm.s-1 donc Re = 10^(-5)
Mouvement du manteau :
L=10^6m, U=1cm.an-1=10^(-9)m.s-1, η=10^(-21) donc Re=10^(-20)

Hypothèse faible instationnarité :

Hyp : $\left\|\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right\| \ll \left\|\eta \vec{\Delta} \vec{u}\right\|$

Mène à une équation de contrainte : l'équation de Stokes

$$\vec{0} = \overrightarrow{\text{grad}}\, p + \vec{f} - \eta \vec{\Delta} \vec{u}$$

$$\eta \vec{\Delta} \vec{v} = \vec{f} + \overrightarrow{\text{grad}}\, p \quad \text{équation de Stokes}$$

- Linéaire
- Réversible (csq : les bactéries ne peuvent pas se déplacer en poussant l'eau d'avant en arrière comme nous le ferions -> se déforment élastiquement : vidéo https://www.youtube.com/watch?v=QkpZpL0YZU0)
- Symétrie de l'écoulement
- Invariance des lignes de courants

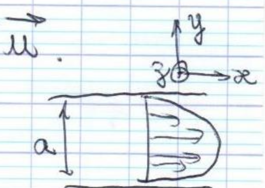
Quand on augmente le nombre de Reynolds ces propriétés de symétrie disparaissent et on finit par voir des instationnarités, pourquoi ?

2) Instabilité des écoulements parallèles à haut Reynolds

Ce genre de calcul, à l'agreg, doit être mené en écrivant chaque terme pour supprimer calmement tous ceux qui peuvent se simplifier et en argumentant rigoureusement. Notamment bien marquer la différence entre le terme 0 qui part parce que U et P sont eux-mêmes solutions de l'équation, et les termes d'ordre 2 qui sont négligés.

Retour à l'écoulement de Poiseuille.

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p + \nu \vec{\Delta} \vec{u}. \end{cases}$$



Hyp : $\vec{u} = \dfrac{\Delta p}{2\eta L}\, y(a-y)\,\vec{e}_x$

$\vec{U}_{tot} = \vec{u} + \vec{v}$ $\quad \|\vec{v}\| \ll \|\vec{u}\|$

$P_{tot} = p + p'$ $\quad p' \ll p$

On linéarise :

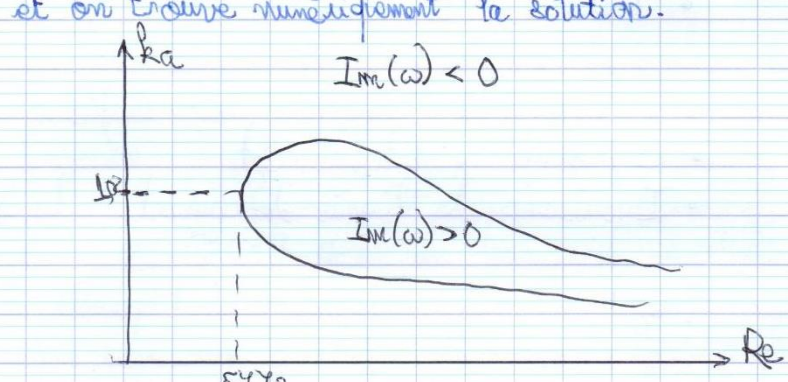
$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \\ (\partial_t + u\partial_x)\vec{v} + v_y \partial_y u = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p' + \nu \vec{\Delta}\vec{v} \end{cases}$$

On veut savoir si la perturbation s'amplifie ou pas :

$\vec{v} = (\hat{v}_x \vec{e}_x + \hat{v}_y \vec{e}_y)\, e^{i(kx-\omega t)}$ $\qquad p' = \hat{p}\, e^{i(kx-\omega t)}$

$$\begin{cases} i k_x \hat{v}_x + \partial_y \hat{v}_y = 0 \\ i(k_x u - \omega)\hat{v}_x + \partial_y u\, \hat{v}_y = -i k_x \hat{p} + \nu(\partial_{yy} - k^2)\hat{v}_x \\ i(k u - \omega)\hat{v}_y = -\partial_y \hat{p} + \nu(\partial_{yy} - k^2)\hat{v}_y. \\ \hat{v}_x(y=0,a) = \hat{v}_y(y=0,a) = 0. \end{cases}$$

On dit que le déterminant doit être nul (3 éq, 3 inconnues) et on trouve numériquement la solution.



L'écoulement devient instable aux grands Re à cause du terme ~~instationnaire~~ convectif. Pourquoi on observe ensuite autant de détails ?

3) Développement de la turbulence

On prend le rotationnel de Navier Stokes.

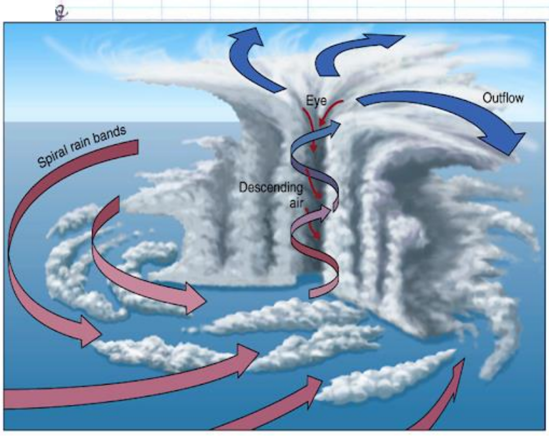
$$(\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{\omega} + \vec{\mathrm{grad}}\,\frac{\vec{v}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\mathrm{rot}}(\vec{v}\wedge\vec{\omega}) = \nu\vec{\Delta}\vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\vec{\omega} = \underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}}_{\text{terme non linéaire.}} + \nu\vec{\Delta}\vec{\omega}.$$

effet étirement des tubes de vorticité.

Ex : cyclone tropical. Tornade.



Équilibre étirement - diffusion : $\omega\frac{U}{L} \sim \frac{\nu\omega}{a^2}$

distance de variat° de l'écoulement moyen.

rayon du vortex

$$\Rightarrow a^2 \sim \frac{L\nu}{U} \sim L^2\cdot\frac{\nu}{UL}$$

$$a \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

les tourbillons sont d'autant plus petits que Re est grand

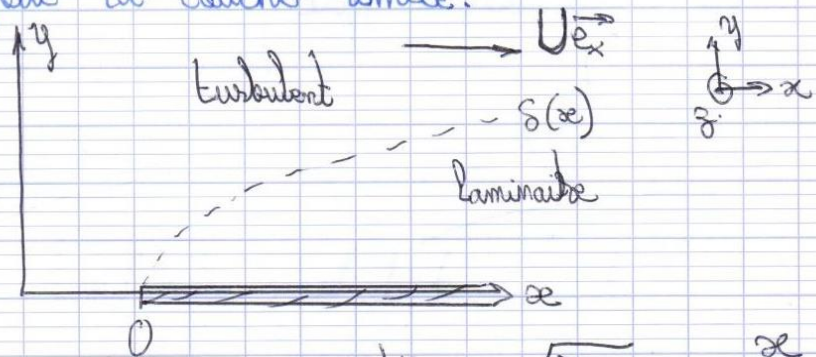
Mais c'est donc différent de la limite $\eta \to 0$, on
III constate que cette limite est singulière.

Le modèle du fluide parfait décrit seulement l'écoulement moyen. Quelle est sa validité ?

III. Couche limite

1) Etude du problème

Au voisinage d'un obstacle l'écoulement est forcément laminaire puisque $v \to 0$ dans ce qu'on appelle la couche limite.



$$\delta(x) \sim \sqrt{\nu t} \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$ on retrouve une loi similaire

$$Re_y \sim \frac{U\delta(x)}{\nu} \sim \frac{Ux}{\nu\sqrt{Re_x}} \sim \sqrt{Re_x} \ll Re_x.$$

Hyp : régime permanent : $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\vec{\nabla}\vec{v}$

Hyp : $v_y \ll v_x$ car $\frac{v_y}{\delta} \sim \frac{v_x}{x}$ incompressibilité

À l'ordre 1 selon y et x : $\begin{cases} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ 0 + 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0}$$

La pression est conservée à travers la couche limite.

L'écoulement laminaire ne change pas la CL pour la pression.

C'est la justification du modèle du fluide parfait par un écoulement turbulent.

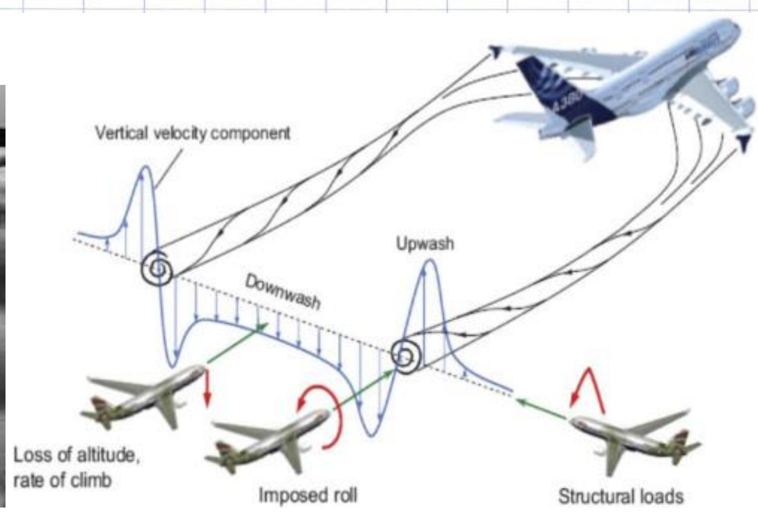
Slide : On peut résoudre et trouver l'équation de Blasius !

2) Application : portance de l'avion

C'est cette propriété qui permet à l'avion de voler : la vorticité créée dans la couche limite fait un vortex qui envoie l'air vers le bas, l'avion est porté vers le haut.

$\frac{\partial p}{\partial x} \leq 0.$

décollement de la couche limite.



<u>Conclusion :</u>
Nous avons étudié différents régimes d'écoulement, rampant : réversible, turbulent : irréversible. Le nombre de Reynolds, qui permet de caractériser ces écoulements, varie sur 30 ordres de grandeurs, ce qui est assez remarquable en physique.
Et nous avons que la vorticité peut se manifester à de petites échelles et qu'elle est difficile à modélisée

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

Quelle différence faites-vous entre fluide parfait et écoulement parfait ?
Seuls les états superfluides peuvent être considérés comme des fluides parfaits (pour lesquels la viscosité est rigoureusement nulle), on peut approximer que l'écoulement de certains fluides (par exemple l'eau) peut être décrit comme l'écoulement d'un fluide parfait lorsqu'on peut négliger les effets de viscosité. Généralement les effets visqueux dans les fluides peu visqueux sont limités au voisinage des obstacles puis sont rapidement amorti par turbulence de sorte que dans la majeure partie de la matière ils sont négligeables. C'est typiquement le cas de la vorticité qui se crée proche des bords et s'amortit rapidement.

Une remarque qu'a faite Basile dans sa leçon : avoir une viscosité très faible n'est pas du tout la même chose qu'avoir une viscosité tout à fait nulle ! Aussi petit soit-elle la viscosité aura un effet sur l'écoulement.

L'air a le comportement d'un fluide parfait ? *Oui, sauf au voisinage de l'aile. C'est exactement le principe de la couche laminaire : c'est grosso-modo la couche limite qui contient les effets de viscosité. En dehors de celle-ci l'écoulement est considéré parfait.*

Dans l'expérience de Reynolds quel nom pour décrire le comportement du colorant ?
Ligne d'émission : ensemble des trajectoires parties d'une position
Quelle différence avec la trajectoire d'une particule ?
Trajectoire caractérisée par une position et un temps initial
C'est la même chose qu'une ligne de courant ?
Trajectoire et ligne de courant correspondent uniquement en régime stationnaire

Comment Reynolds fait varier la vitesse de l'écoulement dans son expérience ?
Sur l'image, source de l'écoulement semble être un vase de Mariotte, en faisant varier la hauteur du tube il impose une différence de pression qui impose la vitesse du fluide.
Taille caractéristique du rayon du tube ? *5mm à 1cm*
Vitesses critiques atteintes ? *mm.s-1 (ν = 10^(-6) et Re = 50)*
L correspond à quelle dimension caractéristique ? *Distance typique transverse sur laquelle U varie, dans l'expérience de Reynolds ce serait le rayon du tube car U est fonction de y*
Lorsque vous présentez des expériences historiques importantes (l'expérience de Reynolds ici, mais ça pourrait être le cas dans beaucoup de leçons, jusqu'à la quantique ou la relativité) essayez d'avoir quelques idées sur le dispositif expérimental utilisé et quelques repères historiques. Si vous pouvez lire une fois une description exacte de l'expérience c'est idéal, si non essayez de déduire des ODG raisonnables.

Comment obtient le nombre de Reynolds ? *À partir de l'équation de NS, par rapport des termes.*
Mais le terme (u.grad)u = 0 pour les écoulements parallèles ? *En effet c'est problématique.*
Existe une autre formule ? *La définition du Reynolds en terme du rapport entre temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement et de son advection par l'écoulement est plus juste puisqu'elle est tout le temps applicable. La version à partir de NS est la plus pratique mais les deux, bien sûr, donnent le même Re !*

tps diffus° $\leftarrow \frac{L^2}{\nu}$
tps advec° $\leftarrow \frac{L}{U}$

Où est la quantité de mouvement dans le terme d'advection ? *C'est le deuxième v, celui qui est après le gradient (le premier correspond à la vitesse qui advecte la quantité de mouvement).*
Pourquoi le terme de diffusion est un coup en haut, un coup en bas ? *Un phénomène prédomine si son temps caractéristique est plus faible.*

Hypothèse de Navier Stokes ? *Fluide newtonien, incompressible. Là encore, à l'agreg on s'attend à ce que ce soit rappelé la première fois qu'on utilise l'équation.*
Newtonien, intervient où ? *Dans le Laplacien et le fait que la viscosité ne dépende pas de la vitesse.*
Phénoménologiquement ça vient d'où ? *fluide isotrope, viscosité indépendante de la contrainte*
Qu'est-ce qu'on observe sur les fluides non newtoniens ? *Le profil de vitesses n'est plus parabolique, la viscosité peut dépendre de la contrainte appliquée ou de la vitesse de déformation*

Autres exemples de fluide non newtonien ? *fluide à base de polymère [autres expl : ketchup, dentifrice, peinture, eau+maïzena]*

Vous pouvez réexpliquer le passage sur la réversibilité ?
Si on met une bille dans un fluide très visqueux se passe quoi ? *bille chute à vitesse constante* à partir d'un certain temps.
Quelles forces s'appliquent sur la bille ? *Poids, Archimède, Force de viscosité*
Quelle forme pour la force visqueuse ? *force de Stokes proportionnelle à v*
Quel terme va faire la différence ? *La viscosité η*
On peut faire quoi avec un tel dispositif ? *mesurer la viscosité du liquide (viscosimètre)*
Pour l'AN avec le manteau vous avez considéré la vitesse de quoi ? *Vitesse des roches dans la Terre, évalué avec le mouvement de convection (déterminé par des GPS à la surface de la Terre)*
Si on a une grande viscosité comment peut-on la mesurer ? *Relation entre contrainte et vitesse de déformation. On passe à une domaine d'expérience différent qui relève plus de la rhéologie : mesure de la relation entre contrainte et déformation.*

Pourquoi si Im(w)>0 on est content ? *Cela veut dire que les perturbations s'atténuent exponentiellement donc l'écoulement est stable.*
Possible fréquence imaginaire, ça veut dire quoi ? *Cela veut dire que l'amplitude de la perturbation peut augmenter ou diminuer exponentiellement (calcul au tableau). Là encore, avec d'ailleurs l'argument de linéarité pour décomposer en série de Fourier, c'est des choses qu'on s'attend à voir préciseées dans une leçon d'agreg.*

On a un Re critique énorme, tu peux discuter ? *limite à 47 pour un cylindre, doit considérer plus 2000, mais là on a 5 772 : il y a des hypothèses fortes dans le calcul. Au-delà de la géométrie qui est cruciale pour la valeur précise de Re_c, le calcul de stabilité était ici* ***linéaire****. Cela permet de déterminer si une perturbation infinitésimale va exploser ou s'atténuer exponentiellement. Cependant à des nombres de Reynolds plus faibles des* ***perturbations d'amplitude finie*** *vont être instables.*
Qu'est ce qui pourrait déstabiliser l'écoulement ? *Rugosité au niveau de la paroi*
Pour un écoulement parfait il se passe quoi au niveau de la vorticité ? *Si la vorticité est uniformément nulle au début, elle reste nulle quel que soit t*
Pourquoi non nulle pour l'aile d'avion ? *Approximation fluide parfait fausse au voisinage de l'aile, équation fausse sur la paroi, l'ajout de condition aux limites permet la vorticité. C'est un exemple typique de la différence entre fluide parfait (l'avion ne décolle pas) et écoulement parfait sauf dans la couche limite.*
Quelles sont les conditions aux limites ? $uy = ux = 0$
Sans viscosité qu'est-ce que ça changerait ? *Il n'y aurait pas de conditions sur ux, seule la composante normale doit s'annuler (pas de pénétration du fluide à travers la paroi).*
Réexpliquez la turbulence et la taille du vortex ? *a correspond au rayon du vortex mais L est la taille caractéristique de l'écoulement*

Ecoulement d'un fluide parfait observable expérimentalement ? *« Oui », c'est le cas lorsqu'on moyenne un écoulement turbulent au cours du temps*
Le vortex réduit en taille et s'allonge en longueur, c'est dû à l'incompressibilité du fluide. Il existe des résultats sur ça ? *Analyse dimensionnelle, spectre en puissance proportionnel à k^-5/3 (loi de Kolmogorov)*
Message à retenir sur la turbulence ? *L'énergie sert à former des vortex de rayon a, il y a un équilibre avec la viscosité*

Résultats autres pour l'écoulement parfait ? *Bernoulli*

Pourquoi physiquement la vitesse tangentielle est nulle au contact du solide ? *Interactions de VDW entre le solide et le fluide*
Donner un ODG de δ(x) ?
Rq on peut construire 2 nombres de Reynolds différent, le premier en considérant L= x : épaisseur de la couche limite, l'autre L distance caractéristique du système

Résumer le message global de la leçon ?
- *Il existe différents modèles associés à différentes situations*
- *L'écoulement turbulent est très différent de l'écoulement parfait cpdt on peut s'y ramener en moyennant les fluctuations dans le temps*
- *Les conditions aux limites ne sont pas évidentes*
- *Régime rampant = réversibilité de l'écoulement*

Commentaires lors de la correction de la leçon

Leçon de haut niveau, bon L3 à l'ENS, on touche la limite attendue au niveau de l'agreg.
Choix osé, attention lorsque l'on fait une leçon de haut niveau il faut pouvoir assurer derrière et être solide sur les concepts abordés (ce qui était le cas ici).
Soit le jury s'y connaît et il ne va pas hésiter à entrer dedans.
Soit le jury ne s'y connaît pas et il risque de ne pas rentrer dedans (et dans le pire des cas, de s'y perdre), il faut faire particulièrement attention à ne pas trébucher car cela risque d'embrouiller.

Dans ce genre de situation (très bonne maîtrise d'un sujet), on aurait aussi pu se placer au niveau PC, faire une leçon absolument impeccable avec des exemples originaux et des apports de connaissance bien placés, puis ensuite torcher les questions pour obtenir une excellente note. Garder en tête qu'à l'agreg il n'y a pas trop de prime à la prise de risque par contre il y en a une très très grosse à la rigueur !

Un compromis serait peut-être, dans ce cas très particulier, de faire des choses compliquées tout en les enrobant des « messages de l'agreg » (voir remarques distillées au cours du CR) : appuyer encore plus sur la couche limite, bien prendre le temps de discuter les conditions aux limites, les hypothèses pour utiliser N.S (parler de fluide incompressible, Newtonien …), mentionner Bernoulli et les fluides parfaits (permet d'opposer non dissipation et dissipation), recherche de modes, décomposition en série de Fourier… ce sont des notions qui parleront aux jurys et qu'ils seront heureux de retrouver et de voir correctement énoncées.

Dans un premier temps inquiet que la leçon tourne à une leçon de choses, ce qui n'a finalement pas été le cas. Il aurait été bien de faire le développement perturbatif plus clairement ; dans l'exercice de leçon c'est bien d'avoir au moins un calcul bien fait du début à la fin (même si ça prend du temps sur autre chose).

Tous les exemples étaient très bien, certains étaient incontournables (notamment l'expérience de Reynolds, le jury aurait été déçu de ne pas la voir) et d'autres plus originaux mais parfaitement pertinent.

Petite remarque : tu parles trop au tableau, essayer de plus regarder le jury. Et toujours dans l'exprit de ramener cette leçon complètement dans les clous de l'agreg : encadrer les résultats importants en couleur, écrire un peu plus de phrases complètes, et marquer des temps de pause pour insister sur les messages à retenir.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :
La partie précédente était très bien retranscrite il n'y pas grand-chose à ajouter. Le niveau de la leçon était élevé, mais probablement encore à peu près dans les clous. Si on décide de faire une leçon de ce niveau il faut le faire parfaitement, et en raccrochant régulièrement le discours à ce qu'on a plus l'habitude de voir à l'agreg.
Une autre stratégie si on est spécialiste du domaine sur lequel on tombe est de faire une leçon classique, illustrée avec des exemples originaux, parfaitement maîtrisée, et éblouir le jury pendant les questions. Dans l'objectif du concours c'est une bonne note quasi-assurée, et beaucoup moins de risques d'avoir une mauvaise surprise.
Quoi qu'il en soit, il faut être à l'aise sur ce qu'on présente.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :

On attend bien sûr la discussion des écoulements en fonctions du nombre de Reynolds. Soit de manière très dichotomique comme c'est fait en PC : bas nombre de reynolds = stokes etc. puis haut nombre de Reynolds = écoulement parfait avec couche limite, ouverture sur la turbulence, …

Tout ce qui vient entre ces deux extrêmes est délicat : stabilité des écoulement parallèles, forces sur un obstacle, comportements intermédiaires.

Une autre façon de discuter les différents régimes d'écoulement peut être l'axe « force de traînée » (penser au graphe donnant $C_x(Re)$, coefficient de traînée), mais il faut alors faire très attention à bien discuter cela du point de vue de l'écoulement et non simplement comme mouvement d'un corps dans un fluide.

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :

On peut sortir la manip de Poiseuille ou de Stokes mais aucune ne permet de mettre en évidence plusieurs régimes d'écoulements. Les écoulements à haut Re sont difficiles à mettre en évidence, qui plus est quantitativement, avec le matériel de l'agreg.

Bibliographie conseillée :
La biblio de Basile est très riche et pertinente.