Titre : Bilans macroscopiques en mécanique des fluides

Présentée par : Marion Spir-Jacob **Rapport écrit par** : Ludivine Emeric

Correcteur : Marc Rabaud **Date** : 20/05/2021

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Tout-en-un PC 2016 (4e édition)	**MN Sanz**	**Dunod**

Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Prérequis : théorème de Green-Ostrogradski, mécanique des fluides (descriptions eulériennes et lagrangiennes, relation de Bernoulli, flux, débit, vecteur densité de courant), mécanique du point (théorème de l'énergie cinétique, lois de Newton), loi de conservation de la masse

Introduction

Définition d'un bilan : comptabilité des échanges qu'un système fait avec l'extérieur.
On va regarder l'évolution d'une quantité sans regarder les causes microscopiques.
Le bilan macroscopique est un outil incontournable au programme de CPGE.

I- Exemple introductif : le bilan de masse

1) Approche en système ouvert

On considère un volume V fixe, délimité par une surface S. Il peut en entrer/sortir un courant volumique $\vec{j} = \rho\vec{v}$ avec $\rho(t)$.

masse : $m(t) = \iiint_V \rho(M,t)\, dV$

Variation de la masse dans V entre t et $t+dt$: $m(t+dt) - m(t) = \frac{dm}{dt}dt = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dt\, dV$

Elle vaut ce qui est entré moins ce qui est sorti : $\frac{dm}{dt}dt = -\oiint_S \rho\vec{v}\,\overrightarrow{dS}$

soit encore $\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dt\, dV = -\iiint_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})\, dV$

On retrouve la loi de conservation locale : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$, c'est-à-dire la variation temporelle plus la variation spatiale est nulle, rien n'a été créé ni détruit.

On va traiter une approche en système fermé.
Ici c'était une approche eulérienne. On va passer à une approche lagrangienne.

2) Choix d'un système fermé

Évolution d'une portion de fluide entre x et $x + dx$ en écoulement à la vitesse v.

Conservation de la masse : $\int_A^C \rho(u,t)Sdu = \int_B^D \rho(u,t+dt)Sdu$

soit $\int_A^B \rho(u,t)Sdu + \int_B^C \rho(u,t)Sdu = \int_B^C \rho(u,t+dt)Sdu + \int_C^D \rho(u,t+dt)Sdu$

$$\int_A^B \rho(u,t)Sdu - \int_C^D \rho(u,t+dt)Sdu = \int_B^C \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, Sdu$$

or $\rho(t)Sdx\, v(x)dt - \rho(t+dt)Sdx\, v(x+dx)dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, S\, dx - S\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial x} dxdt$

donc au 1er ordre en $dtdx$ on retrouve $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial x} = 0$

Ce calcul est moins trivial que pour un système ouvert, mais cette méthode va être pratique pour la suite.

3) Conservation du débit

Pour un écoulement incompressible, div $\vec{v} = 0$.

En deux points, le produit surface vitesse est conservé : $S_0 v_0 = S_1 v_1$

Expérience : tuyau du robinet : quand on applique une pression, la section diminue, la vitesse augmente

II-Applications

1) Force exercée par un fluide sur un tuyau

Tuyau coudé avec une section constante et écoulement incompressible, donc la norme de la vitesse est constante.

On se place en régime stationnaire.

Σ^* : volume commun

Bilan de quantité de mouvement :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{\Sigma^*(t)} + \rho S v dt\, \overrightarrow{v_1}$$
$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}_{\Sigma^*(t+dt)} + \rho S v dt\, \overrightarrow{v_2}$$

$\vec{p}_{\Sigma^*(t)} = \vec{p}_{\Sigma^*(t+dt)}$ donc on a $\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho S v^2 (\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1})$: force exercée par le tuyau sur le fluide

Principe des actions réciproques :

$$\vec{F}_{fluide \to tuyau} = \rho S v^2 (\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})$$

coudée du tuyau dans un sens, force de rappel, oscillations

Les pompiers sont confrontés à ces problèmes, ils ont recours à des entraînements pour savoir les gérer → vidéo

2) Étude d'une éolienne

v_0 : vitesse de l'écoulement en amont de l'éolienne

v_R : vitesse au niveau du rotor

v_1 : vitesse en aval de l'éolienne

Écoulement incompressible $S_0 v_0 = S_R v_R = S_1 v_1$

Stationnaire, parfait sauf au voisinage du rotor (R)

Relation de Bernoulli : avant R : $\frac{1}{2}\rho v_0^2 + P_0 = \frac{1}{2}\rho v_R^2 + P_{R^-}$

après R : $\frac{1}{2}\rho v_R^2 + P_{R^+} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_0$

On a : $P_{R^+} - P_{R^-} = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_0^2)$

Σ^* : volume commun

Bilan de quantité de mouvement : $\vec{p}(t+dt) = \vec{p}_{\Sigma^*(t+dt)} + \rho S_1 v_1 dt\, \overrightarrow{v_1}$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{\Sigma^*(t)} + \rho S_0 v_0 dt\, \overrightarrow{v_0}$$

$$\vec{p}_{\Sigma^*(t+dt)} = \vec{p}_{\Sigma^*(t)}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho S_0 v_0 (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_0}) = \vec{F}_{hélice\to fluide}$$

Près de R : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \vec{F}_{hélice\to fluide} + \vec{F}_{pression} = S_R(P_{R^-} - P_{R^+})$

$$S_R\left(\frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v_1^2)\right) = \rho S_0 v_0 (v_0 - v_1)$$

$S_0 v_0 = S_R v_R$ et $(v_0^2 - v_1^2) = (v_0 - v_1)(v_0 + v_1)$

$$v_R = \frac{v_0 + v_1}{2}$$

Bilan d'énergie :

$$E_c(t) = E_{c,\Sigma^*(t)} + \frac{1}{2}\rho S_0 v_0 dt\, v_0^2$$

$$E_c(t+dt) = E_{c,\Sigma^*(t+dt)} + \frac{1}{2}\rho S_1 v_1 dt\, v_1^2$$

On obtient la puissance :

$-\frac{dE_c}{dt} = P = \frac{1}{2}\rho S_0 v_0 (v_0^2 - v_1^2) = \frac{1}{4}\rho S_R v_0^3 (1+\alpha)(1-\alpha^2)$ où $\alpha = \frac{v_1}{v_0}$

Optimisation d'une éolienne : $P = P_{nom}$ pour $\alpha = \frac{1}{3}$

Ordres de grandeur :

petite éolienne (ex : bateau) $D \sim 1m$, $v \sim 40\text{km/h}$ → $P \sim 500W$

grande éolienne $D \sim 50m$, $v \sim 15\text{km/h}$ → $P \sim 2MW$

Questions posées par l’enseignant (avec réponses)

(l’étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l’enseignant. Si certaines réponses manquent, l’enseignant pourra compléter le document)

Vous avez traité la conservation de la masse, du débit, de la quantité de mouvement, du bilan d’énergie. Y en a-t-il d’autres ?
Oui, par exemple le moment cinétique, bilans d’enthalpie, flux de chaleur…

La masse est-elle toujours conservée ?
Oui sauf au cours d’une réaction nucléaire : énergie de liaison va changer.
Si l’on considère de grands volumes, on va pouvoir ouvrir un robinet par exemple, il faudrait faire l’hypothèse qu’il n’y a pas de fuite et que le robinet est fermé pour avoir un système fermé.

Vous avez fait l’hypothèse d’un écoulement parfait pour avoir $Sv = cte$. Peut-on faire un bilan sur un écoulement visqueux ?
En traitant bien le terme de viscosité, on peut effectivement faire un bilan. Ici on a supposé un écoulement parfait, c’est par soucis de simplicité.

L’épaisseur dx de la portion de fluide doit-elle être infinitésimale ?
Oui car ici, c’est un calcul local. A ce moment-là, ce n’était pas un bilan macroscopique. Il aurait été possible de faire un calcul similaire avec des intégrales sur une portion macroscopique.

Dans l’expérience que vous avez montrée : qu’est-ce qui prouve que le débit était conservé ?
En fait, ça ne prouve pas que le débit est conservé, ça montre seulement que la vitesse augmente.

Vous avez fait le cas d’un ρ homogène et constant dans le temps dans la conservation du débit. Or on peut avoir un écoulement incompressible, mais avec ρ qui dépend du temps et de l’espace. Pouvez-vous retrouver $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$ avec la conservation de la masse dans le cas-là ?
En partant de l’équation de conservation locale, on trouve l’expression : $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$, or $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ donc $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$

Si on rajoute de la diffusion : au bord du système on a des particules qui se mélangent avec l’extérieur, comment pourrait-on le traiter ?
Sur un court intervalle de temps ça marche toujours.

Vérifier l’hypothèse de l’air incompressible est raisonnable dans l’étude de l’éolienne. Pouvez-vous trouver un ordre de grandeur de ΔP ?
On trouve quelques Pascal, ce qui est négligeable.

Quand est-ce que les effets incompressibles deviennent importants ?
Lorsqu’on s’approche de la vitesse du son.

La force dans l’éolienne est selon l’écoulement, or on voit que cette force ne travaille pas. Qu’en est-il en réalité ?

En réalité les pales sont inclinées. Le travail de la force de rotation est un couple.
Il y a une hélicité dans l'écoulement en aval de l'éolienne. Le sillage va loin, si bien que le rendement d'un champ d'éolienne n'est pas le nombre d'éoliennes fois le rendement de la première éolienne.

Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

La conclusion sur l'éolienne aurait pu être placée au début de la partie pour justifier le calcul. Les deux limites : on coupe le vent alors rendement nul, inversement on laisse tout passé, on a également un rendement nul.
Le rendement maximum de l'éolienne est appelé limite de Betz.

Très bonne leçon, très tonique, la manipulation était très bien.
Préciser que la vitesse est constante dans le tuyau pour simplifier les calculs mais ce n'est pas obligatoire.
La vidéo était très bien.
Le bilan d'énergie n'était pas assez détaillé.
Plan ambitieux et bien conduit. Il y a du recul sur le sujet.
Les calculs étaient nécessaires et très pédagogiques.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :

Excellente leçon sur un titre assez scolaire. Très bien présenté et avec du recul pour expliquer le but des calculs et de la méthode.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :

- Attention à la compressibilité qui n'est pas une limitation car elle est bien souvent négligeable.
- Incompressibilité : div(v)=0 on peut être plus général que \rho = cste.

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :

Impact d'un jet d'air sur une plaque plane, versus une plaque courbe.

Bibliographie conseillée :