

**Titre :** LP4 : Symétries**Présentée par :** Martin Caelen**Rapport écrit par :** Charlie Kersuzan**Correcteur :** Alexis Bres**Date :** 14/04/2021

<b>Bibliographie</b>		
<b>Titre</b>	<b>Auteurs</b>	<b>Éditeur</b>

## Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

Niveau choisi pour la leçon : Licence

Pré-requis : électrostatique, mécanique lagrangienne, relativité restreinte, théorie de la bifurcation

## Introduction

La symétrie est un outil très puissant en physique qui s'est imposé dans les théories physiques. La force des symétries est reconnue depuis longtemps. Dès l'antiquité, des philosophes comme Platon ont été inspirés par les symétries. Les symétries d'un système physique ont des conséquences sur ses propriétés. Dans cette leçon on va voir ce qu'on peut dire d'un système physique en se basant sur l'analyse de ses symétries.

## I- Principe de symétrie

### A) Qu'est-ce qu'on entend par symétrie ?

**Symétrie planaire** : dessin de deux triangles symétriques par rapport à un plan.  
Exemple des objets chiraux : ne se superposent pas à leur image dans un miroir.

#### Symétries continues :

- invariance par translation dans l'espace (expérience de la balle de ping pong qui rebondit de manière identique à trois endroits de l'espace).
- invariance dans le temps (même expérience identique à trois moments dans le temps).
- invariance par rotation : expérience de l'ELASTICA qui est identique lorsqu'on le tourne autour de son axe.

### B) Principe de Curie (1859-1906)

Les effets d'un phénomène physique possèdent au moins les symétries de leurs causes.

**Exemple de l'électrostatique**

- cause : distribution de charge
- effet : champ électrique

DESSIN : distribution de charge sphérique de densité rho.

Symétries de la distribution de charge :

- indépendant du temps (distribution statique de charge) : E indépendant du temps.
- invariant par rotation autour du centre de la distribution de charge :  $\vec{E}(r, \Theta, \Phi) = \vec{E}(r)$
- Analyse des symétries discrètes :  $\vec{E} = E\vec{e}_r$

Application du théorème de Gauss. On voit la puissance du principe de Curie.

Retour sur les molécules chirales : si on veut produire des molécules sans obtenir de mélange racémique, il faut briser la symétrie. C'est important en chimie : exemple du thalidomide dont les propriétés sont extrêmement différentes selon l'énanthiomère (tératogène ou médicament (j'ai oublié lequel)).

**C) Brisure de symétrie**

Exemple de l'expérience ELASTICA. On fait varier la force appliquée en faisant varier la masse au sommet de la tige de métal. Au-delà d'une masse critique, il apparaît une **instabilité de flambage : bifurcation de fourche**. Schéma de la bifurcation de fourche (déflexion en fonction de la masse appliquée) et expérience en direct.

On brise la symétrie, le système choisit une position d'équilibre de préférence qui va contre la symétrie du système. Correction au principe de Curie : **Il faut prendre en compte la symétrie de l'ensemble des effets possibles.**

Ici on peut avoir deux positions d'équilibres possibles et l'ensemble des solutions reste symétrique. Attention, en réalité le système n'est pas parfait, avec l'usure, cette symétrie se brise et une des deux positions devient privilégiée et le dessin de la bifurcation de fourche est modifié, le système partant naturellement dans une direction, et il faut forcer le système pour pouvoir passer de l'autre côté.

On a regardé les effets dynamiques et cinématiques en fonction des symétries, on peut aller plus loin en montrant la conservation de certaines quantités en fonction des symétries.

**II- Symétries et lois de conservations****A) Conservation de l'impulsion**

On ne considère ici que des forces conservatives en se limitant à 1D. La force dérive alors d'un potentiel :  $F = -\frac{dV(x)}{dx}$ . On considère une particule de masse m dans un référentiel galiléen et on applique le PFD.

**Hypothèse : système invariant par translation dans l'espace.**

Toutes les dérivées par rapport à x sont nulles donc  $F = -\frac{dV(x)}{dx} = 0$  donc **la quantité de mouvement est conservée.**

C'est une propriété fondamentale des symétries continues, qu'on va étudier par le théorème de Noether (Emmy Noether, 1883-1935).

**B) Théorème de Noether**

Ici formalisme Lagrangien :  $L(x, \dot{x}, t)$ .

**Hypothèse :** Système invariant par variation continue d'une grandeur s :  $\frac{dL}{ds} = 0$ .

**Démo de Noether (voir cours pour détails)** : En écrivant la dérivée totale, le théorème d'Euler-Lagrange et l'inversion des dérivées temporelles et spatiales, on obtient :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) = 0$ . En considérant le cas d'une masse ponctuelle et d'une invariance par translation dans l'espace, on retrouve la conservation de la quantité de mouvement.

### C) Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie découle de l'invariance par translation dans le temps. Dans le théorème de Noether, remplacer  $s$  par  $t$ . En introduisant le hamiltonien, on retrouve l'invariance du hamiltonien qui se réécrit comme la conservation de l'énergie mécanique.

On peut de même montrer qu'une invariance par rotation est associée à la conservation du moment cinétique. PAS FAIT ICI.

## III- Autres invariances

- invariance par choix du système de coordonnées : les lois physiques doivent être vraies pour tout système de coordonnées, il faut donc les écrire de manière à ce qu'elles restent vraies par changement de référentiel.

En mécanique le PFD s'écrit de manière vectorielle, de même pour les lois de Maxwell.

- relativité restreinte : quadri-vecteurs
- invariance du choix des unités : il en découle le théorème pi et l'analyse dimensionnelle.
- invariance par rapport à la taille du système, par dilatation du système : grandeurs intensives/extensives.

On se sert de ces symétries pour contraindre les modèles physiques.

## Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manquent, l'enseignant pourra compléter le document)

Q1 : Quels pré requis nécessaires ?

R1 : mécanique lagrangienne et électrostatique, pas vraiment besoin de relat vu qu'on survole très rapidement les quadri-vecteurs, et on n'a pas vraiment besoin de connaître la théorie sur les bifurcations de fourche.

Q2 : Quelle différence entre symétrie et invariance ?

R2 : Invariance=conséquence d'une symétrie. Mais difficile de vraiment les distinguer.

Q3 : Les symétries discrètes sont utiles en chimie, pourquoi ?

R3 : Énantiomérie et chiralité, théorie des orbitales moléculaires : les symétries discrètes ont un rôle important dans la formation de complexes.

Q4 : Et en matière de physique du solide ?

R4 : Cristallographie, lien entre les propriétés de symétrie discrètes et l'interaction avec le champ électromagnétique. Les cristaux ont des propriétés de symétrie discrètes.

Q5 : Invariance par translation du temps , et aussi ?

R5 : Et aussi par renversement du temps

Q6 : Dans quel domaine ?

R6 : Un peu partout, physique quantique (et surtout thermo !!!)

Q7 : Elastica : invariance par rotation ou symétrie

R7 : Elastica invariant par rotation mais pas de symétrie continue du système par rotation.

Q8 : Symétrie d'une molécule, est-ce la seule chose qui est importante ?

R8 : Dépend de ce sur quoi le mécanisme va jouer.

Q9 : Pourquoi parler de brisure de symétrie ?

R9 : Pour montrer aux élèves que ça existe. C'est ce qu'il se passe autour d'instabilités. On peut parler du lien entre transition de phase et brisure de symétrie (passage ferro-para des matériaux ferromagnétiques).

Q10 : Quel lien avec l'entropie ?

R10 : Brisure de symétrie -> Augmentation de l'entropie

Q11 : Diagramme de bifurcation imparfaite, ça sort d'où ?

R11 : Expérimentalement

Q12 : Qui dit instabilité dit croissance exponentielle, mais dans la vraie vie c'est fini, lien avec l'équation d'évolution de l'amplitude ?

R12 : Je vois pas.

Q13 : Impulsion et quantité de mouvement c'est la même chose ?

R13 : Ça dépend si on parle de l'impulsion généralisée alors non.

Q14 : Qu'apprend-t-on avec la démonstration de la quantité de mouvement ?

R14 : Rien, mais c'est pour introduire le raisonnement.

Q15 : x c'est forcément une longueur ? et s c'est quoi ?

R15 : x c'est pas forcément une longueur, et s, c'est un paramètre pour lequel le système est invariant, nom oublié.

Q16 : L'hamiltonien c'est l'énergie du système ?

R16 : Ici oui, mais pas toujours, si les grandeurs sont pas celles attendues

Q17 : Contexte historique de l'invariance par changement de coordonnées

R17 : Insatisfaction de la théorie de l'électromagnétique qui n'est pas invariante de Galilée, alors qu'elle est invariante de Lorentz. Einstein a donc réécrit les équations de manière à satisfaire la transfo de Lorentz.

Q18 : Quel est l'invariant pour le groupe de Lorentz ?

R18 : L'intervalle d'espace-temps

Q19 : Théorème Pi ?

R19 : Si il existe une relation entre variables dimensionnées, je peux la réécrire entre variables adimensionnées

Q20 : Invariance de jauge ?

R20 : Potentiel électrique et potentiel vecteur, choix qui n'est pas unique.

Q21 : Théorème de Noether -> Conséquence de l'invariance de jauge ?

R21 : Conservation de la charge !

## Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

Beaucoup de questions techniques ...

Commentaires : C'est haut niveau, un choix, bon panel de physique, différents aspects de la symétrie visitée. Bien.

Mais fini trop en catalogue (III), Choix à faire pour ne pas y passer trois jours.

Au sujet des prérequis : ce ne sont pas des domaines de la physique en entier -> Théorème de Gauss, transformation de Lorentz, **être plus descriptif**.

Plus d'exemples visuels (transition de phase), plus à ancrer dans le concret.

Calcul du champ électrique : mieux vaut insister sur la prise en compte des symétries que sur le calcul du champ proprement dit (pour la boule chargée). Au lieu d'appliquer les résultats admis en prépa on peut profiter de cette leçon pour les démontrer proprement.

BUP n°689 : sur le principe de Curie.

Partie réservée au correcteur

**Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :**

Leçon à haut niveau avec un plan ambitieux.

Ne pas sacrifier la physique à la technicité : utiliser Internet pour illustrer au maximum ce qui peut l'être (transitions de phase, bifurcations, ...)

Ne pas verser dans le cataloguage : on peut penser à beaucoup de choses, il faut faire des choix et s'y tenir.

Être formel au moins au début pour donner quelques définitions.

Si on parle de calculs de champs E ou B, focaliser l'attention sur le traitement des symétries (quitte à être insistant) plutôt que sur l'application de Gauss ou Ampère.

**Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :**

Il est nécessaire de différencier sommairement (ou non, mais le dire) symétries et invariances.

Le principe de Curie est incontournable, le théorème PI l'est presque autant.

Ensuite, on peut parler d'applications à divers domaines :

- réduction composantes/variables pour les champs E/B en statique
- simplification du problème de Kepler en éliminant les ddl par symétrie
- brisures de symétrie : transitions de phase et paramètre d'ordre. On a l'embarras du choix : transition ferro/para dans les milieux magnétiques, nématische/smectique pour les cristaux liquides, changements d'état du corps pur, inflation de l'Univers primordial, ...
- invariances en relativité pour les transformations d'espace-temps (symétries du groupe de Poincaré)
- symétries en mécanique analytique, lien avec le théorème de Noether : coordonnées cycliques, conservation des impulsions généralisée, etc
- invariance  $t \rightarrow -t$ , réversibilité en thermodynamique, diffusion, physique statistique, ...
- principe de Curie en cristallo : liens entre symétrie de la figure de diffraction et le groupe de symétrie du cristal.

On peut parler un peu de chimie, notamment sur les aspects de chiralité ou de lien symétrie des OM/symétrie des molécules, mais on est en LP, donc ça doit rester léger.

**Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :**

Expériences de bifurcation (Elastica, pendule conique), transitions de phase (notamment opalescence critique).

**Bibliographie conseillée :**

La symétrie en mathématiques, physique et en chimie, Jean Sivardièvre