

**Titre :** Phénomènes de diffusion

**Présentée par :** Julie SEGUIN

**Rapport écrit par :** Margot LEPAGNOL

**Correcteur :** Arnaud RAOUX

**Date :** 21/04/2021

### Bibliographie

Titre	Auteurs	Éditeur
Physique Tout-en-un PC/PC*		Dunod
Thermodynamique	Diu	

## Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis :

Premier principe de la thermodynamique

Bilans locaux (d'énergie, etc.)

Probabilité

### Introduction

Diffusion : Phénomènes microscopiques qui tendent à homogénéiser une grandeur physique.

Exemple :

- diffusion d'une goutte d'encre dans l'eau
- application de la diffusion thermique avec l'isolation des maisons
- diffusion des gouttelettes d'un parfum dans l'air

Il y a des similitudes dans tous les phénomènes de diffusion, on va chercher à les définir au cours de cette leçon.

### I. Diffusion de particules

#### 1. Courant de particules et équation de conservation

**Vidéo** : Une enceinte fermée comporte deux compartiments séparés par une paroi, l'un contient des particules bleues, l'autre des particules jaunes. Lorsqu'on retire la paroi, les particules jaunes et bleues se dispersent dans l'enceinte de façon à homogénéiser la composition du système.

**Définition** : Soit  $\Phi_s(t)$  le flux de particules à travers une surface  $S$  à l'instant  $t$ .

Le nombre  $dN$  de particules qui traversent  $S$  pendant un temps  $dt$  est :

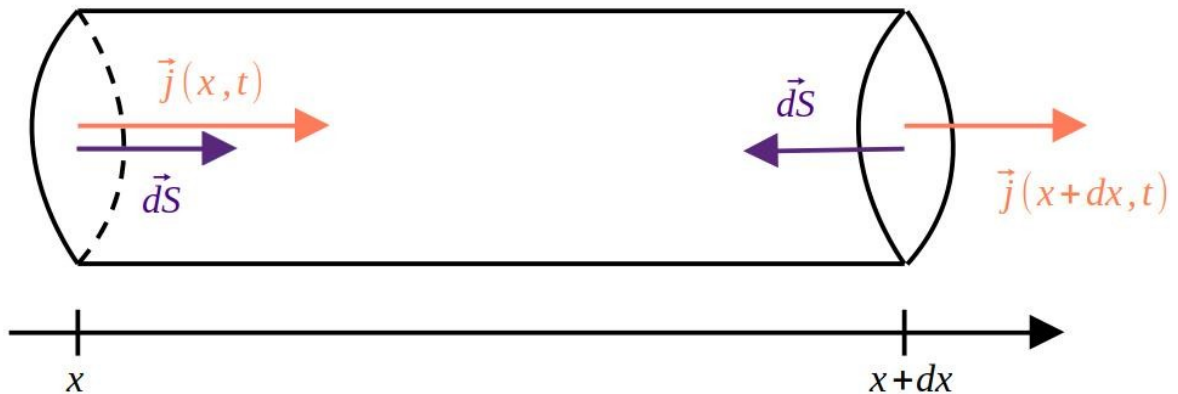
$$dN = \Phi_s(t) dt$$

On peut également écrire le flux de la façon suivante :

$$\Phi_s(t) = \iint_{M \in S} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S} \quad \text{où } \vec{j}(M, t) \text{ est la densité de courant de particule.}$$

$$\text{Donc : } dN = \iint_{M \in S} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S} dt$$

Bilan à une dimension :



À une dimension :  $\vec{j}(x,t) = j_x(x,t)\vec{u}_x$

Ce qui entre par S en x :  $dN_x = \vec{j}(x,t) \cdot S\vec{u}_x dt = j(x,t) S dt$

Ce qui sort par S en x+dx :  $dN_{x+dx} = \vec{j}(x+dx,t) \cdot (-S\vec{u}_x) dt = -j(x+dx,t) S dt$

Nombre total de particules :

$$dN = dN_{x+dx} + dN_x = [j(x,t) - j(x+dx,t)] S dt$$

**Hypothèse :** dx et dt sont petits devant la variation spatiale et temporelle de la densité particulaire  $n(x,t)$ .

On peut donc réaliser un développement limité au premier ordre :

$$dN = -\frac{\partial j}{\partial x}(x,t) S dt dx$$

De plus :

$$dN = [n(x,t+dt) - n(x,t)] S dx = \frac{\partial n}{\partial t}(x,t) S dx dt$$

En combinant les deux expressions de dN :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} \quad \text{et à 3D :} \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x,t)$$

**Équation de conservation de la quantité de matière.**

## 2. Loi de Fick

C'est une loi phénoménologique : elle ne se démontre pas, elle s'appuie sur des données expérimentales.

**Loi de Fick :**  $\vec{j}(M,t) = -D \text{grad}(n(M,t))$

**Remarques :**

- il y a une homogénéisation de la composition avec un déplacement des particules vers les zones pauvres en particules
- cette loi caractérise l'irréversibilité du phénomène

$D$  est le coefficient de diffusion en  $m^2.s^{-1}$   
On peut donc définir une longueur caractéristique de diffusion  $l$  et un temps caractéristique de diffusion  $\tau$  :  $D = \frac{l^2}{\tau}$ .

#### Ordres de grandeur :

- diffusion de particules dans un gaz :  $D \sim 10^{-6}$  à  $10^{-4} m^2.s^{-1}$ . Par exemple, sentir du parfum sur une distance de 10m :  $\tau \sim \frac{l^2}{D} = 10^7 s$ , c'est-à-dire 115 jours !
- diffusion de particules dans un liquide :  $D \sim 10^{-12} - 10^{-13}$ . Par exemple, dans le cas de la diffusion du sucre dans une tasse de café en supposant la grandeur caractéristique de diffusion de 3 cm, le temps de diffusion est de  $10^{11} s$ . Donc pour éviter que le café ne devienne froid, on mélange le café (phénomène de convection).

La diffusion est un phénomène lent !

### 3. Équation de diffusion

Avec la conservation de la quantité de matière et la loi de Fick, on obtient :

$$\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(M, t)}{\partial x^2} \quad \text{où } D \text{ est le coefficient de diffusion}$$

Dans le cas où il y a une source de particules :

$$\frac{\partial n(M, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(M, t)}{\partial x^2} + p(x, t) \quad \text{où } p(x, t) \text{ est le nombre de particules produites par unité de volume et de temps}$$

## II. Diffusion thermique

### 1. Densité de courant thermique et équation de conservation

**Définition :** Soit  $\Phi$  le flux thermique à travers une surface.

On a :  $\Phi = \iint_{M \in S} \vec{j}_Q(M, t) \cdot d\vec{S}$  où  $\vec{j}_Q(M, t)$  est la densité de courant thermique en  $W.m^{-2}$

On définit également le transfert thermique à travers la surface pendant la durée  $dt$  :

$$\delta Q = \Phi dt = \iint_{M \in S} \vec{j}_Q(M, t) \cdot d\vec{S} dt$$

On réalise un bilan de la même façon que pour la diffusion de particules.

Chaleur qui entre en  $x$  :

$$\delta Q_x = j_Q(x, t) S dt$$

Chaleur qui sort en  $x+dx$  :

$$\delta Q_{x+dx} = -j_Q(x+dx, t) S dt$$

$$\text{Donc finalement } \delta Q_{tot} = \frac{\partial j_Q(x, t)}{\partial x} S dx dt$$

La variation d'énergie interne entre  $t$  et  $t+dt$  est :

$$\delta U = U(t+dt) - U(t) = \rho S dx c (T(x, t+dt) - T(x, t)) \quad \text{où } T \text{ est la température et } c \text{ est la capacité thermique massique.}$$

Avec les mêmes hypothèses que la diffusion de particules, on a :

$$dU = c \rho S dx dt \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et d'après le premier principe de la thermodynamique,  $dU = \delta Q$  en l'absence de source de chaleur et de travail.

On obtient ainsi l'**équation de conservation** à une dimension :

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{j_Q(x, t)}{\partial x}$$

On retrouve une équation de la même forme que dans le cas de la diffusion de particules. Il existe également une variante à trois dimensions et avec une source de chaleur.

## 2. Loi de Fourier et équation de diffusion

**Loi de Fourier :**  $\vec{j}_Q(M, t) = -\lambda \vec{\text{grad}}(T(M, t))$  où  $\lambda$  est la conductivité thermique en  $W.m^{-1}.s^{-1}$

C'est également une loi phénoménologique, on peut faire les mêmes commentaires que la loi de Fick.

Avec l'équation de conservation, on obtient l'équation de diffusion ou **équation de la chaleur** :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{où} \quad D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c} \quad \text{est la diffusivité thermique en} \quad m^2.s^{-1}$$

De la même façon qu'avec la diffusion de particules, on peut définir un temps et une longueur caractéristique de diffusion.

**Ordres de grandeur :**

Matériaux non métalliques  $\lambda \sim 1 W.m^{-1}.s^{-1}$

Matériaux métalliques  $\lambda \sim 100 W.m^{-1}.s^{-1}$

## 3. Régime permanent : détermination de la conductivité thermique du cuivre

Lorsqu'on a une source de chaleur, l'équation de conservation devient :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q = P_V(M, t)$  avec  $P_V(M, t)$  la puissance volumique surfacique introduite dans le système.

La variation de température est donc :  $\Delta T(M, t) = -\frac{P_V(M, t)}{\lambda}$

**Expérience :** Mesure de la conductivité thermique d'un barreau de cuivre (*TP Thermométrie*). Elle a été lancée en début de leçon pour atteindre le régime permanent (évaluer le temps caractéristique).

$\lambda_{\text{exp}} = 460 W.m^{-1}.s^{-1}$  alors que la conductivité thermique du cuivre théorique est  $\lambda_{\text{cuivre}} = 404 W.m^{-1}.s^{-1}$ .

L'écart à la valeur théorique peut être dû au fait qu'on a supposé que toute l'énergie était dissipée par effet Joule dans le barreau. Il y a en réalité des pertes.

## Conclusion

Tableau récapitulatif et comparatif des formules pour les deux types de diffusion.

Ouverture : diffusion de la quantité de mouvement.

## Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

1. Dans la slide introductive, vous avez présenté trois images, pourriez-vous les expliquer ?

Image du centre : particules de couleur qui se mélangent, diffusion de particules

Image de droite : application de l'étude de la diffusion thermique avec l'isolation des maisons, on peut envisager traiter ce sujet en exercice.

2. Pouvez-vous définir la résistance thermique ? Quelle analogie peut-on utiliser pour la retrouver ?

On peut utiliser la loi d'Ohm.  $I$  est le flux d'électrons à travers le circuit.

$$U = \Delta V$$

$$\Delta T = R_{th} \Phi$$

3. Vous avez défini le flux comme étant l'intégrale d'un vecteur à travers une surface. Est-ce que ce flux dépend de la surface ou uniquement du contour de la surface ? Dans quel cas on a une dépendance avec le contour de la surface ?

Il dépend de la surface.

Si  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , donc d'après l'équation de conservation :

Il faut que la densité particulaire soit indépendante de  $t$  (régime stationnaire) et qu'il n'y ait pas de source.

4. Pouvez-vous redéfinir ce qu'est un problème unidimensionnel ? Cette hypothèse implique-t-elle que  $j_Q$  n'ait qu'une composante selon  $x$  ?

$j_Q$  ne dépend que de  $x$  et de  $t$ .

Non. Par exemple dans l'expérience du barreau de cuivre, le problème ne dépend que de  $x$ , mais  $j$  a à la fois une composante selon  $e_x$  (diffusion) et transverse (les pertes latérales).

5. **Retour sur l'expérience** : Pourriez-vous modéliser le dispositif et résoudre l'exercice ? Quelles sont les CL ?

Le profil de température est affine. (équation de diffusion en régime stationnaire)

CL : Un flux thermique est imposé par la résistance chauffante du système grâce à une dissipation par effet Joule. De l'autre côté, l'eau prélève de l'énergie. Elle joue plutôt le rôle d'un thermostat, mais pas évident.

De toute façon on se fiche des CL en régime stationnaire. On veut juste la pente de la droite.

6. Pourriez vous ré-établir l'équation de diffusion qui découle de la loi de Fick et de la loi de conservation ?

(Julie avait fait une erreur de signe pendant sa leçon, le but était ici qu'elle se corrige).

7. Vous avez dit que la loi de Fick est une loi phénoménologique. Est-ce qu'on peut tout de même la justifier d'un point de vue théorique ? Connaissez-vous d'autres exemples de loi phénoménologique ?

Il y a des conditions de validité : le gradient ne doit pas varier trop vite dans l'espace et dans le temps, il faut également considérer le milieu isotrope.

Il faut voir ces lois comme des développements limités. Donc des lois au premier ordre. Si on voulait aller plus loin, on pourrait regarder la dépendance en température de la conductivité thermique.

Autres exemples : La loi d'Ohm. La loi de Hooke

**8.** Vous avez dit que les lois de Fick et de Fourier traduisait une irréversibilité, pourriez-vous le justifier ?

L'irréversibilité se retrouve plutôt dans l'équation de diffusion à cause de la dérivée temporelle simple.

**9.** Connaissez-vous une équation aux dérivées partielles réversible en temps ?

L'équation de D'Alembert.

**10.** Avez-vous un exemple de diffusion de particules avec une source ? Qu'est ce qui pourrait créer des particules ?

Une réaction chimique. Des réactions nucléaires.

**11.** Vous avez dit que le café serait froid avant que le sucre ne se diffuse. Pourquoi ? Peut-on dire que la diffusion thermique est plus rapide que la diffusion de particules ?

Il y a une grande surface en contact avec l'air qui est plus froid.

**12.** Que faites-vous si vous voulez refroidir votre café ?

Je souffle dessus. C'est de la convection forcée !

**13.** Pourquoi avez-vous écrit  $\delta Q$  et pas  $Q$  ?

$\delta Q$  est la quantité d'énergie qui traverse une surface pendant  $dt$ . Il y a  $\delta$  car  $Q$  n'est pas une fonction d'état.

**14.** Quelle est la différence entre  $U$  et  $Q$  ?

$\Delta U = Q + W$  mais ici on suppose qu'il n'y a pas de travail.

**15.** Sur quel système avez-vous appliqué le premier principe de la thermodynamique ? Quelles sont les conditions pour l'appliquer ? Quelles sont les caractéristiques de votre système ?

Sur un volume microscopique dans le cylindre.

Volume et pression constante, pas de convection. Mais en fait le volume d'un sous-système peut varier... Mais du coup  $W$  est non-nul.

**16.**  $U$  ne dépend que de  $T$  ?

Si on ne suit que cette formule oui, mais en réalité non... Dépend de  $V$  et  $n$  aussi. On suppose  $n$  constant, reste donc  $T$  et  $V$  (sauf pour un gaz parfait ou une phase condensée)

**17.** Pouvez-vous justifier les probabilités dans les pré-requis ? Quel niveau attendez-vous ? Est-ce qu'il faut plus qu'un niveau lycée ?

Julie comptait traiter la marche aléatoire mais pas fait par manque de temps. Il ne faut pas un niveau au-delà du lycée.

**18.** Pourquoi y a-t-il une si grande différence entre la conductivité thermique des métaux et des non métaux ?

Les métaux sont également des bons conducteurs électriques.

**19.** Quel est le lien entre la conductivité thermique et la conductivité électrique ?

La loi de Wiedemann-Franz.

## Commentaires lors de la correction de la leçon

### Forme :

La leçon est bien menée, très ordonnée. Il y a une bonne utilisation des couleurs au tableau.

Les ordres de grandeurs ont bien été présentés et les images étaient bien choisies.

Par compte, tout a été dit sur le même ton. On ne distingue pas ce qui est important de ce qui ne l'est pas. Il faut prendre du recul, faire des pauses.

De plus, il manque des transitions et une conclusion du I. avant de passer au II..

Il faut plus regarder le public.

Il manque aussi plus de schémas.

### Fond :

Tout est dans le thème, les choix sont classiques mais peut-être trop classiques.

Le jury n'attend rien donc on n'est pas obligé de présenter tous les phénomènes de transport, on peut traiter quelque chose de plus orthogonal. Par exemple, ici on peut garder le I., puis présenter le tableau donné en conclusion pour définir par analogie rapide la diffusion thermique. Il reste ainsi du temps pour un II. sur un aspect microscopique avec la marche aléatoire par exemple.

Pour casser un peu ce formalisme, on peut également développer des applications comme traiter un exercice sur l'isolation d'une maison, introduire la résistance thermique.

Les exemples choisis sont biens mais très classiques. On peut plutôt illustrer avec des exemples de biophysique qu'on peut trouver dans les livres de PACES : diffusion d'un virus dans un gel, diffusion des nutriments dans les cellules...

On peut également traiter la relation d'Einstein (reliant  $D$  et la mobilité), les milieux poreux avec la loi de Darcy, parler du mouvement brownien et des expériences de Jean Perrin.

Concernant la diffusion thermique : si la température change, le volume aussi donc il va y avoir un travail des forces de pression. La démonstration utilisée ici (Dunod) est fausse ! Il faut plutôt utiliser la démonstration du Diu : on se place à pression constante pour utiliser l'enthalpie.



## Partie réservée au correcteur

### **Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :**

cf. ci-dessus. Plan raisonnable, mais qui fait trop ressortir le formalisme. Ça manque de physique.

Traiter un phénomène de diffusion de façon formelle est indispensable (flux, bilan, conservation, loi de Fick, eq. De la chaleur)

Penser à présenter le régime stationnaire.

Mais on peut aussi présenter le régime forcé (ondes de chaleur, effet cave).

Présenter plus d'exemples dans divers domaines. La biologie en regorge. Soit en utilisant la diffusion, soit en cherchant à tout prix à la contrer.

Le tableau comparatif est suffisant pour introduire un second phénomène de diffusion.

Attention à la dérivation de l'équation de la chaleur... utiliser  $H$  !

### **Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :**

Indispensables : flux, bilan, conservation, loi de Fick, eq. De la chaleur

Secondaires : résistance thermique, milieux poreux

### **Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :**

Diffusion de la chaleur dans une barre de cuivre (mais je déconseille, ce n'est pas très probant)

Diffusion du glycérol. C'est très joli.

### **Bibliographie conseillée :**

Le DGLR de Thermo. Très important pour la bonne dérivation de l'équation de la chaleur.

Pour pleins d'exemples en biologie de la diffusion :

<https://www.amazon.fr/Approche-Physique-Transport-Mati%C3%A8re-Biologiques/dp/2340013445>

Sinon des livres de BCPST pour des exemples. Et les milieux poreux (à leurs programmes)