Titre : On1 : Dispersion et Absorption

Présentée par : Charlie Kersuzan **Rapport écrit par** : Martin Caelen

Correcteur : Fabrice Debbasch **Date** : 11/09/2020

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Propagation des ondes, 2015	**E. Thibierge**	**Cours en ligne**
Physique tout-en-un, PC, PC*, 4e edition	M-N. Sanz	Dunod
Physique tout-en-un, PSI, PSI*, 2e edition	M-N. Sanz	Dunod

Plan détaillé

(indiquer parties, sous-parties, 1 ou 2 phrases d'explications par sous-partie, et références)

<u>*Niveau choisi pour la leçon*</u> : CPGE

<u>*Pré-requis*</u> : - ondes mécaniques
- ondes électromagnétiques dans le vide
- plasma

Total : 37'00"

Introduction (4'20")

- Exemples de systèmes dispersifs, montrés sur une diapositive : observation expérimentale de l'élargissement de signaux propagés par des fibres optiques ou des câbles coaxiaux.
- Définitions : milieu dispersif = vitesse de propagation de l'onde dépend de sa fréquence. Milieu absorbant = onde transfère de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.
- Rappels sur les ondes électromagnétiques dans le vide. OPPH : $\vec{\boldsymbol{E}} = E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{\boldsymbol{e}}_x$. Propagation selon z. Équation de d'Alembert : $\Delta\vec{\boldsymbol{E}} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2}$, $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$, où μ_0 est la perméabilité du vide, et ϵ_0 la permittivité du vide.
- En utilisant la notation complexe : $\underline{\vec{\boldsymbol{E}}} = \underline{E_0} e^{i(kz-\omega t)}\vec{\boldsymbol{e}}_x$. on obtient la relation de dispersion : $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$.

I- Propagation dans un milieu dispersif (25'40")

1) OPPH dans un milieu dispersif (13'20")

- milieu dispersif qu'on va étudier : plasma peu dense, une ionosphère : autant d'électrons négatifs que d'ions positifs : les charges se compensent, densité de charge nulle. Par contre, ions beaucoup plus lourds que les électrons, qui sont donc libres : apparition d'un courant, qu'on peut écrire : $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$, où la conductivité complexe est : $\underline{\gamma} = i\epsilon_0 \frac{{\omega_p}^2}{\omega}$, avec $\omega_p = \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}$.
- on regarde comment ça change l'équation d'onde. On écrit Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\vec{j}} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

où l'on définit $\epsilon = \epsilon_0 \left[1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2} \right]$ la permittivité du milieu.
- En prenant le rotationnel de Maxwell-Faraday ($\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$) et en utilisant "rot rot = grad div - la" et remarquant que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 = 0$ dans le plasma, on obtient l'équation de d'Alembert dans le milieu : $\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.
- On en retire la relation de dispersion : $k^2 = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}}$. La relation entre k et ω n'est plus linéaire : deux ondes avec des fréquences différentes vont se propager à des vitesses différentes : c'est la dispersion.
- On a utilisé des OPPH. Mais ce n'est pas très physique : OPPH = extension dans tout l'espace, énergie transportée infinie. Bonne description : le paquet d'onde.

2) Cas réaliste: le paquet d'onde (12'20")

- un paquet d'onde est une somme continue d'OPPH. On l'écrit donc (sans s'intéresser à son aspect vectoriel) :

$$\underline{S}(z,t) = \int_{\omega_0 - \delta\omega/2}^{\omega_0 + \delta\omega/2} \underline{A}(\omega) e^{i(k(\omega)z - \omega t)} \, \mathrm{d}\omega$$

quand il est centré en ω_0, avec une extension $\delta\omega$. On suppose : $\delta\omega \ll \omega_0$.
- On peut réaliser un DL de $k(\omega)$: $k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}$. On peut alors écrire :

$$\underline{S}(z,t) = e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{\omega_0 - \delta\omega/2}^{\omega_0 + \delta\omega/2} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)\left(\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} z - t\right)} \, \mathrm{d}\omega$$

$e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$ est donc l'onde moyenne du paquet d'onde, une OPPH. L'intégrale est l'enveloppe de cette onde.
- On peut alors définir deux vitesses. La vitesse de phase $v_\phi(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k_0}$ et la vitesse de groupe $v_g(\omega_0) = 1/\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}$. Ces notions sont illustrées par la simulation qui leur est consacrée, fournie par le centre de Montrouge.
- Avec une diapo, on revient sur le cas de l'ionosphère, dont, on le rappelle, la relation de dispersion est : $k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}}$. On distingue deux cas. Si $\omega < \omega_p$, alors h est imaginaire pur, l'onde est stationnaire, ne se propage plus selon z, et décroît exponentiellement : c'est une onde évanescente. Si $\omega > \omega_p$, alors on trouve :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}}}, \quad v_g = c\sqrt{1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}} < c$$

Ce n'est grave si la vitesse de phase peut dépasser la vitesse de la lumière, car l'information / l'onde ne se déplace pas à la vitesse de phase, mais celle du paquet d'onde : la vitesse de groupe.

II- Propagation en milieu absorbant (7'50")

1) Corde avec frottement (4'40")

- On va considérer des cordes en vibration (*e.g.* une corde de guitare), en frottement visqueux avec l'air. En TD, on montrera que la relation de dispersion correspondante est *(NdR : cette relation est en fait fausse)* :

$$k = \pm\left(\frac{\omega}{c} - i\frac{h}{2\mu_l c}\right)$$

où h est un terme lié au frottement, μ_l la masse linéique de la corde, et c la célérité de l'onde considérée.

- On peut écrire la hauteur de la corde en x et t comme : $y(z,t) = A_0 e^{i(kz*\omega t)}$, soit, en prenant en compte la relation de dispersion : $y(z,t) = A_0 e^{-\frac{h}{2\mu_l c}z}\cos\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right)$.

- C'est une onde sans dispersion : la vitesse de l'onde est toujours c, quelque soit ω. Mais on observe une atténuation (décroissance exponentielle) lors de la propagation selon z : c'est l'absorption. Physiquement, l'énergie est dissipée par les frottements.

2) Cas du conducteur (2'30")

- un conducteur combine à la fois dispersion et absorption. On l'étudie en considérant que les électrons qu'il conduit subissent un frottement visqueux lors de leur écoulement. Selon se retrouve dans la conductivité complexe telle que : $\vec{\boldsymbol{j}} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega_0\tau}\vec{\boldsymbol{E}}, \quad \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$.

- Dans un diapo, on montre ce que ça donne à basse fréquence ($\omega \ll 1/\tau = 1\times10^{14}\,\mathrm{rad/s}$). On obtient la relation de dispersion : $\underline{k} = \pm(1-i)\sqrt{\mu_0\gamma_0\omega/2}$.

- On peut l'écrire $\underline{k}(\omega) = k_1(\omega) - ik_2(\omega)$. Quand $k_2 \neq 0$ (comme c'est le cas pour le conducteur), on a absorption.

Conclusion (50")

- Les notions essentielles qu'on a abordé sont les milieux absorbants (on a bien fait la distinction entre absorption et une onde évanescente), et les milieux dispersifs (où la vitesse de l'onde dépend de sa fréquence). On a aussi fait la différence entre les vitesses de phase et de groupe, la dernière transportant l'information de l'onde, toujours à une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière.

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manquent, l'enseignant pourra compléter le document)

On pourra également se référer à certaines des questions et réponses données dans le leçon 13 : Ondes progressives, ondes stationnaires.

- Pourquoi n'avez-vous pas fait de manip ? **Ne pas faire de manip est acceptable, mais il faut être capable de le justifier au jury. Mais dans cette leçon, une expérience de dispersion par un prisme aurait pu être appréciable.**
- Vous avez parlé de réflexion totale dans le cas des ondes évanescentes dans le plasma, pouvez-vous expliquer ? **L'expliquer à l'aide des conditions limites sur les champs électriques aux interfaces de milieux de deux indices différents.**

- D'où vient votre expression de la conductivité du plasma ? **C'est le modèle de Drude, mais attention, il est souvent mal justifié, avec une approche particulaire, alors qu'il faut adopter un point de vue mésoscopique, avec des équations sur des fluides.**
- Comment montre-t-on que "rot rot = grad div – la" ? **Tout écrire peut suffire.**
- Qu'est-ce que c'est que le laplacien vectoriel ? **En cartésien, c'est un vecteur, dont la composante selon x est le laplacien de la composante selon x du vecteur dont on prend le laplacien vectoriel, et etc.. pour les autres composantes. En cylindriques ou sphériques, on peut les calculs à partir de la définition en cartésien, ou simplement les définir avec l'équation "rot rot = grad div – la".**
- Comment montre-t-on la relation de dispersion pour la corde en frottement ? **Cette question met en évidence que l'équation donnée dans la leçon était fausse.**

Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

- Dans la leçon, les deux effets (dispersion et absorption) sont reliés à de l'irréversibilité. Dans le cas de la dispersion, on l'a obtenue à l'aide de la conductivité j=gammaE, ce qui donne l'effet Joule.
- On aurait pu davantage comparer dispersion et absorption.
- La leçon dans l'ensemble était bien, avec une bonne adéquation au niveau annoncé (CPGE) : il y avait pas mal de recul par-rapport aux notions abordées. Pour une leçon parfaite, un tout petit peu plus de recul aurait été encore mieux, en particulier, il faut être capable de justifier ce qu'on a fait en leçon pendant les questions. Il faut donc bien avoir une définition précise de chacun des termes employés pendant la leçon.
- Pour traiter la dispersion sans avoir à gérer la question des ondes évanescentes, on aurait pu éventuellement parler de la dispersion qui apparaît en mécanique quantique. La question est de savoir si ce sujet pourrait avoir sa place dans le cœur de la leçon, en plus de la discussion. La réponse n'est pas évidente, car certains jury un peu vieux jeu y sont réticents.
- En tout cas, on veut bien entendre parler de plasma, et du modèle de l'électron élastiquement lié. Par contre, il faut bien blinder la démonstration du modèle de Drude, en adoptant la bonne manière de le faire (description fluide). C'est sûrement bien fait dans le Jackson, le Dunod ou un Landau.
- On aurait vraiment bien aimé voir un prisme dans la leçon. Peut-être aussi une corde de Melde, même si c'est une expérience délicate à relier aux équations, à cause des conditions aux limites.
- La leçon donnait l'impression d'avoir un tout petit peu trop de calculs, mais en même temps il est difficile de trouver un calcul à ne pas faire. Donc dans les faits c'est difficile de faire mieux là dessus.
- On aurait aimé voir l'étalement du paquet d'onde (DL à l'ordre supérieur de la phase de chaque onde du paquet), puisque celui-ci était mentionné au début de la leçon.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :

Bibliographie conseillée :