Titre : Equations d'onde

Présentée par : Margot Lepagnol

Rapport écrit par : Julie Seguin

Correcteur : Yehudi Simon

Date : 31/03/2021

Bibliographie		
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**
Poly Ondes ENS Lyon	Etienne Thibierge	
Ondes	Berkeley	
PC Tout en un		Dunod

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis : Electrocinétique (loi de Kirchoff)
Electromagnétisme (équations de Maxwell, force de lorentz)
Dérivée particulaire

Plan détaillé :

Introduction

Onde : propagation d'une perturbation dans un milieu
Vidéo pont de Tacoma
Equation d'onde : équation générale qui décrit la propagation de l'onde
La propagation dépend de la nature du milieu, on distingue deux cas : les milieux non dispersifs et les milieux dispersifs. Dans les derniers, la propagation peut s'accompagner potentiellement d'une atténuation ou d'une absorption de l'onde.

I. Milieu non dispersif

1. Câble coaxial

La propagation des ondes se retrouve dans différents domaines de la physique. On choisit ici de travailler dans le domaine de l'électrocinétique pour illustrer le cours et aboutir à l'équation d'onde.

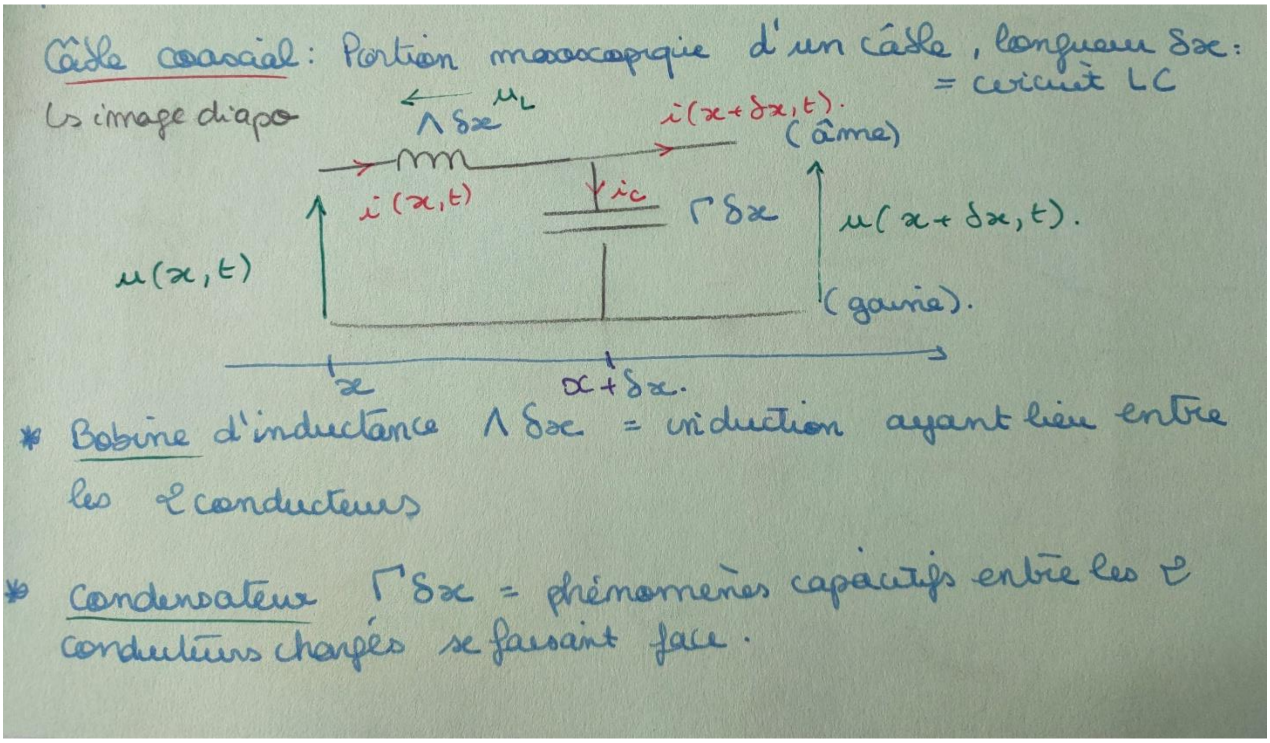

Photo câble coaxial sur diapo

On applique les lois de Kirchoff :

• Loi des mailles :

$$u(x+\delta x,t)-u(x,t)+u_L=0$$

On fait un dL à l'ordre 1 en δx

$$\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\Lambda\delta x\frac{\partial i}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\Lambda\frac{\partial i}{\partial t}\qquad(1)$$

• Loi des nœuds

$$i(x+\delta x,t)+i_C=i(x,t)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\delta x=\Gamma\delta x\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}=-\Gamma\frac{\partial u}{\partial t}\qquad(2)$$

$\frac{\partial}{\partial t}(1)$ donne $\frac{\partial u}{\partial t\partial x}=-\Lambda\frac{\partial i^2}{\partial t^2}$

$\frac{\partial}{\partial t}(2)$ donne $-\Gamma\frac{\partial u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial i^2}{\partial x^2}$

On obtient l'équation de d'Alembert:

$$\frac{\partial i^2}{\partial x^2}=\Gamma\Lambda\frac{\partial i^2}{\partial t^2}$$

Et même équation pour u

On note $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$

C'est le couplage de deux grandeurs liées à l'onde qui caractérise la propagation d'une onde.
Les grandeurs couplées vérifient la même équation.

Généralisation à 3D de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\xi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial t^2} = 0$$

Avec c la célérité de l'onde dans le milieu.
Equation de d'Alembert n'est pas la seule équation d'onde, elle est linéaire (on peut appliquer le principe de superposition). On la retrouve dans de nombreux domaines :

- Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide (slide + on verra en TD)
- Ondes sonores dans un fluide (slide)

Ordre de grandeur :
Dans le câble coaxial $c = 2 \times 10^8 m.s^{-1}$
Dans un solide comme le fer $c = 5 \times 10^3 m.s^{-1}$

Maintenant on cherche à trouver des solutions de cette équation d'onde

2. Solution de l'équation

Il existe différentes solutions que l'on caractérise par leur surface d'onde.
Surface d'onde : surface continue de l'espace dont tous les points sont dans le même état vibratoire.
Si cette surface est un plan > onde plane
Si cette surface est une sphère concentrique -> onde sphérique
Dans le cas d'une onde plane, l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial t^2} = 0$$

Si l'onde ne dépend que de la variable $\mathrm{x} - \mathrm{ct}$ ou $\mathrm{x} + \mathrm{ct}$ -> Onde progressive

Toute onde plane solution de d'Alembert 1D peut être mis sous la forme d'une superposition de 2 ondes progressives.

$$\xi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Dans le cas d'une onde sphérique, l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\xi)^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\xi^2}{\partial t^2} = 0$$

Par analogie avec l'onde plane, toute onde sphérique solution de d'Alembert peut être mise sous la forme :

$$\xi(r,t) = \frac{1}{r}(f(r - ct) + g(r + ct))$$

Une autre solution de cette équation est l'équation d'onde plane progressive harmonique (=dépendance sinusoïdale)

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Avec ξ_0 l'amplitude
k le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{n}$

3. Relation de dispersion

Pour une OPPH, on a une double périodicité :

- Spatiale : avec $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la longueur d'onde
- Temporelle : avec $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ la période

Relation de dispersion : relation entre période spatiale et période temporelle d'une OPPH.

La relation de dispersion pour d'Alembert s'obtient en injectant l'expression de la solution dans l'équation d'onde, on obtient :

$$\omega^2 = k^2c^2$$

A partir de l'équation de dispersion on peut définir la vitesse de phase v_φ :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

C'est la vitesse de propagation de la phase d'une onde plane progressive sinusoïdale.
Ici $v_\varphi = c$.
La vitesse de phase ne dépend pas de la fréquence, le milieu est non dispersif.

On peut également définir la vitesse de groupe pour un paquet d'onde comme la vitesse de l'enveloppe du paquet d'onde :

$$v_\varphi = \frac{d\omega}{dk}$$

II. Milieu dispersif

Dans un milieu dispersif, la propagation de l'onde peut s'accompagner d'une :

- Atténuation : l'amplitude de l'onde décroît au cours de la propagation dans le milieu.
- Absorption : l'onde cède de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.

1. Equation de Klein-Gordon

Un exemple de propagation en milieu dispersif est la propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma dilué comme un gaz ionisé de cations et d'électrons non relativistes.
On peut considérer par exemple l'ionosphère = couche la plus extérieure de l'atmosphère située à plus de 60km d'altitude.

On établit l'équation d'onde avec les équations de Maxwell :
$\overrightarrow{rot}(M.Faraday)$ et $div(\vec{E}) = 0$ ici pour des ondes transverses donne

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Avec l'équation constitutive du plasma :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_0 e^2}{m_e}\vec{E}$$

On obtient finalement

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{n_0 e^2}{m_e}\vec{E}$$

C'est l'équation de Klein-Gordon :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t^2} = \frac{\omega_p}{c^2}\vec{E}$$

Avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$ la pulsation plasma et $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

La forme générale de Klein-Gordon s'écrit :

$$\vec{\Delta}\vec{\xi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\xi}^2}{\partial t^2} = \frac{\omega_c}{c^2}\vec{\xi}$$

Avec ω_c la pulsation de coupure

On peut également obtenir cette équation comme dans la modélisation du câble coaxial avec pertes. On obtient l'équation des télégraphistes (cf TD) (slides).

Ces deux exemples illustrent l'ajout d'un terme linéaire à l'équation d'onde par rapport à d'Alembert. Ce n'est pour autant pas une généralité : ondes gravito-capillaires à la surface d'un fluide (slides).

2. Relation de dispersion de Klein-Gordon

De la même façon que dans la première partie, on injecte la solution sous la forme d'une OPPH dans l'équation d'onde. Prenons en notation complexe :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\exp\left(i(\omega t - kx)\right)$$

On obtient alors :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - {\omega_p}^2}{c^2}$$

Suivant si $\omega_p > 0$ ou $\omega_p < 0$, k est complexe.
On écrit de façon générale le vecteur d'onde $k = k' + ik''$
k' caractérise la propagation de l'onde : celui qui intervient dans la vitesse de phase et de groupe.
k'' caractérise l'atténuation de l'onde. On note la distance caractéristique d'atténuation de l'onde $\delta = \frac{1}{k''}$

Pour Klein-Gordon, deux cas particuliers

Si $\omega_p < \omega$, alors k est un réel positif : propagation seule / pas d'atténuation.
Si $\omega_p > \omega$, alors k est un imaginaire pur : pas de propagation / que de l'atténuation : onde évanescente que l'on retrouve par exemple lors de l'étude d'une marche de potentiel en mécanique quantique par exemple.
(D'où le nom pour ω_c de pulsation de coupure)

Forme des vitesses de phase et vitesse de groupe :

$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - {\omega_p}^2}}$ si $\omega_p < \omega$
Soit $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}}} > c$
Vitesse de phase supérieure à c mais pas grave car ce n'est que la porteuse (elle en représente pas la vitesse de propagation d'une grandeur matérielle) .

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{{\omega_p}^2}{\omega^2}} < c$$

Vitesse de groupe inférieure à c, c'est cohérent (cette vitesse qui traduit le transport de l'information).

Conclusion :

On a mis en valeur différentes équations d'onde en fonction de la nature du milieu en mécanique classique mais on peut aussi parler d'équation d'onde en mécanique quantique avec l'équation de Schrödinger (slide).

Questions posées par l'enseignant (avec réponses)

(l'étudiant liste les questions posées, ainsi que les réponses données par l'enseignant. Si certaines réponses manquent, l'enseignant pourra compléter le document)

• Pouvez-vous préciser un peu le niveau de la leçon ?
Deuxième année de CPGE

• Vous avez donné comme définition de l'équation d'onde : « équation générale qui caractérise la propagation », pouvez-vous détailler ?
Elle dépend du type d'onde, du milieu dans lequel elle se propage. Elle relie l'espace et le temps. C'est une **équation différentielle**.

• Une équation d'onde est toujours linéaire ?
Celles présentées ici le sont mais ce n'est pas général.

• Qu'est ce qui est général aux équation d'onde ?
Ce sont des **équations aux dérivées partielles** qui font intervenir la vitesse de propagation.

• Est-il équivalent de parler d'atténuation et de dispersion ?
Non, la dispersion est un phénomène plus général. Quand on a dispersion, on peut avoir atténuation ou non.

• Titre première partie : Milieu dispersif ?
Erreur au tableau et à l'oral : Milieu non dispersif.

• Quelles sont les conditions de validité des lois de Kirchoff ?
ARQS

• Pouvez-vous réécrire la loi des mailles ? De quelle variable dépendent ces fonctions ?
U dépend de l'espace et du temps. Equation prise en x.

• Vous dites qu'il y a couplage entre deux grandeurs et que c'est général pour la propagation. Explicitez. Cela s'applique aussi dans la deuxième partie ?
Ça ne s'applique pas toujours en milieu non dispersif.

• Dans le cadre non dispersif, ce sont toujours des grandeurs couplées ?
Oui (à vérifier).

• Maintenez-vous l'ordre de grandeur pour la vitesse de propagation dans le câble coaxial que vous avez donné ?
Oui. C'est plutôt $c = 2 \times 10^8 m.s^{-1}$ que $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$.

• Pourquoi introduire la notion de surface d'onde ? Quel est le lien entre surface d'onde et les solutions de l'équation d'onde ?
Cela permet de séparer différents types de solutions

• Vous avez défini pour une surface d'onde des « points dans le même état vibratoire ». Pouvez-vous préciser ?
Même phase, même fréquence, même amplitude.

• Précisions sur le modèle de plasma utilisé ?
Mélange de ions et électrons. Les ions sont lourds donc on suppose qu'ils sont immobiles par rapport aux électrons. Plasma globalement neutre. Electrons non relativistes et plasma dilué.

• La modification que vous avez apportée pour ω^2 et c^2 est à faire partout dans la leçon ?
Oui

• Pourriez-vous donner des éléments qui permettent de retrouver l'équation constitutive du plasma ?
PFD appliqué à un électron avec la force de Lorentz. On néglige le terme magnétique devant le terme électrique (odg). Cadre non relativiste à haute fréquence. Dérivée particulaire que l'on sépare en terme convectif et terme inertiel. Terme convectif négligeable dans la cadre non relativiste.

• Reprise des deux dernières lignes de calcul-> erreur de calcul corrigée.

• Si on considère le milieu du plasma comme un filtre, comment peut-on le caractériser ?
C'est un passe-haut.

• Pouvez-vous réexpliquer la partie sur les ondes évanescentes en quantique ? Onde évanescente qu'en quantique ?
Reformulation de ce qui a été dit en leçon. Non pas qu'en mécanique quantique.

• Une remarque sur le lien entre v_φ et v_g ?

$$v_\varphi v_g = c^2$$

• On a vu que l'équation de d'Alembert était un cas particulier de l'équation de Klein-Gordon. Est-ce que cette propriété s'applique aussi à d'Alembert ?
Oui

• Cette propriété est-elle caractéristique de l'équation de KG ou est-elle toujours vraie pour les équations d'onde ?
Non pas du tout, pas dans le cas dans les ondes de surface par exemple.

• Vous avez dit « c'est une équation linéaire donc on peut utiliser le principe de superposition ». Pouvez-vous en dire plus à ce sujet ?
Combinaison linéaire de solutions est aussi une solution.

• Linéaire implique le principe de superposition ou inverse ?
Linéaire implique le principe de superposition.

• Les ondes stationnaires se propagent elles ?
Somme d'une onde progressive qui se propage dans un sens et d'une qui se propage dans l'autre, ceci fait que la somme des deux ne se propage pas.

• Est-ce que l'équation d'onde suffit dans tous les cas à décrire la propagation des ondes ?

Je dirai que oui. Il faut ajouter les conditions aux limites pour tout décrire !

• Pouvez-vous redémontrer l'équation de propagation des ondes en présence de charges et de courant ?
Démo classique -> cf. vidéo.

• Quelques commentaires sur cette équation d'onde ?
Elle est une fois de plus linéaire, ajout d'un terme source à droite.

• Vous avez dit que l'équation de Schrödinger n'était pas symétrique par rapport au temps. Vous pouvez expliciter ?
Il y a une dérivée simple par rapport au temps.

Implication ? Irréversibilité ?
Oui. **En fait NON car on a un i complexe, elle n'est pas irréversible.**

Commentaires lors de la correction de la leçon

(l'étudiant note les commentaires relatifs au contenu de la leçon : niveau, sujets abordés, enchaînement, réponses aux questions, etc. L'enseignant relit, et rectifie si besoin)

Leçon très posée. On sentait que tu faisais des choses simples mais que tu maitrisais et c'est ce qu'on vous demande ! C'est une leçon qui se tient !
Les équations d'onde sont des équations différentielles qui couplent espace et temps, c'est bien de le dire.
Dispersif = vitesse de phase dépend d'oméga. Ce n'est absolument pas équivalent à l'atténuation (attention à la confusion courante).
Onde évanescente n'existe pas qu'en mécanique quantique et elles ne se propagent pas ! Tu l'as dit dans ta leçon mais tu as dit oui à la question piège…
Dèf onde bien car concise, mais il manque de fait des éléments, comme le fait qu'il n'y ait pas de propagation globale de matière et autres petites choses.
Coupage entre deux grandeurs qui s'échangent de l'énergie, ça arrive très souvent mais je ne suis pas sûre que ce soit général.
Attention à la différence entre Laplacien et Laplacien vectoriel, en prépa il faut faire attention aux notations et rot aussi est un vecteur !
Dans un câble coaxial pas la vitesse de la lumière, c'est 2/3 de la vitesse de la lumière.
Relation de dispersion complexe bof comme titre car quand tu mets au carré c'est pas une équation complexe. Juste équation de dispersion de Klein-Gordon c'est mieux.
Modèle du plasma condition plasma dilué !!! Sinon ça ne marche pas du tout. On peut grâce à cette approximation négliger les interactions entre particules de plasma. En fait, vous regardez une moyenne sur un ensemble macroscopique d'électrons et pas un seul électron. C'est important de l'avoir en tête lorsque l'on passe à l'oral dessus. Ne commence pas milieu dispersif par atténuation et absorption car c'est pas équivalent, ça porte à confusion.
Cette leçon est ultra recasable, il faut faire les parties pour les avoir sous la main pour les remettre dans d'autres leçons, elles sont ultra classiques.

Klein-Gordon au programme de prépa mais limite, télégraphistes HP, on peut le faire en TD mais pas en cours. On peut la montrer mais pas la démontrer.
Au niveau L3 on aurait pu parler d'autres choses, mais la leçon telle quelle était très bien. Juste pour avoir des idées, autre plan proposé niveau L3 :
Première partie : Onde longitudinale dans les plasmas
Equation d'onde avec les calculs.
Equation de dispersion et conséquences
Deuxième partie : équation d'onde de surface (le Guyon est votre ami !)
Calcul en entier mauvaise idée mais soit sur transparents soit on le saute car on a déjà fait un calcul.
TF pour équation de dispersion.
Cette deuxième partie est ultra riche en diversité des phénomènes décrits.
Si vous vous sentez ultras chauds : ondes solitaires non linéaires blablabla, au moins en conclu pour dire que les équations d'onde ne sont pas toutes linéaires.

En gros pour cette leçon, il faut faire 2 équations d'onde différentes dans au moins deux phénomènes de la physique différents.

Attention, ce n'est pas uniquement le milieu qui dicte l'équation d'onde, ça peut dépendre de l'onde et du régime étudié. Et ce qui dicte aussi ce sont les conditions aux limites.
On aurait pu aussi mettre d'Alembert en prérequis au sens où les élèves l'auraient déjà rencontré mais n'auraient pas réfléchi à la généralité de cette équation.
Attention à être homogène dans les notations (nabla/rot).
L'équation de Schrödinger n'est pas irréversible car c'est complexe !

Biblio : PC tout en un.
Stéphane Olivier pour tous les domaines mais ici *Physique des ondes* (pile niveau Agreg).
Guyon *Hydrodynamique physique.*

Autres parties possibles :
Ondes acoustiques
Corde avec rigidité
Mécanique Quantique
Equation de la chaleur

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.) :

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates :

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur) :

Bibliographie conseillée :