UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FÍSICAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Teoría de la Información

Trabajo Práctico 1

Docentes:
- Klenzi Raúl
- Ortega Manuel
- Amaya Fabrizio

Integrantes:

Bulián, Melani Yael
Registro: E010-94

Contreras, Matias Esequiel
Registro: E010-22

2025

PRÁCTICO N°1: CANTIDAD DE INFORMACIÓN - ENTROPÍA

1.

1.1. Supón una imagen de resolución 2560 x 1440 píxeles, codificada en 30 bits por píxel. Calcula la cantidad de información que proporciona un cuadro de imagen.

$$Variedad\ de\ pixel = 2^{30}\ valores\ posibles$$
$$I_{pixel} = \log_2(2^{30}) = 30\ bits$$

Cada pixel tiene la misma probabilidad de ocurrencia, por lo que como hay equiprobabilidad:

$$2560 \times 1440 = 3.686.400 \text{ pixeles}$$
$$I_{imagen} = N_{pixeles} \cdot I_{pixel} = 3.686.400 \cdot 30 = 110.592.000\ bits\ de\ información$$

Por lo tanto el cuadro de imagen tiene 110.592.000 bits de información, o 13.824.000 bytes

1.2. Luego, considera una imagen de 7680 x 4320 píxeles (resolución 8K) codificada en HDR con 12 bits por canal de color, ¿cuánta información se genera?

Como la imagen está codificada en HDR, es decir, hay 12 canales por color, por lo tanto, la variedad de cada pixel es:

$$12 \times 3 = 36$$
$$Variedad\ de\ pixel = 2^{36}\ valores\ posibles$$
$$I_{pixel} = \log_2(2^{36}) = 36\ bits$$

Cada pixel tiene la misma probabilidad de ocurrencia, por lo que como hay equiprobabilidad:

$$7680 \times 4320 = 33.117.600 \text{ pixeles}$$
$$I_{imagen} = N_{pixeles} \cdot I_{pixel} = 33.117.600 \times 36 = 1.194.393.600\ bits\ de\ información$$

Por lo tanto el cuadro de imagen tiene 1.194.393.600 bits de información, o 149.299.200 $bytes$

2. Un narrador utiliza 1000 palabras tomadas al azar de un vocabulario de 20.000 palabras. Calcula la información generada. Luego, compárala con la información contenida en una única imagen de resolución 640 × 480 píxeles codificada en 24 bits por píxel (color verdadero). Analiza cuál contiene más información y verifica si se cumple el dicho popular 'una imagen vale más que mil palabras' incluso con baja resolución.

$$I_{PALABRAS} = \log_2(20.000) = 14{,}288\ bits$$
$$I_{milPALABRAS} = 1000 \cdot \log_2(20.000) = 14.288\ bits$$
$$I_{pixel} = \log_2(2^{24}) = 24\ bits$$
$$N_{pixel} = 640 \cdot 480 = 307.200\ píxeles$$
$$I_{IMAGEN} = N_{pixeles} \cdot I_{pixel} = 307.200 \cdot 24 = 7.372.800\ bits$$

Mil palabras generan unos 14.288 $bits$, mientras que una imagen de 640 × 480 píxeles a 24 bits/píxel contiene más de 7 millones de bits. Por lo tanto, incluso con baja resolución, la imagen transporta mucha más información, confirmando el dicho popular de que "una imagen vale más que mil palabras".

3. Calcula la información generada por un mensaje de 200 caracteres tomados al azar de un alfabeto de 32 símbolos. ¿Y por un mensaje de 200 caracteres con un alfabeto de 64 símbolos? Ahora repite el cálculo para un mensaje de 400 caracteres con alfabetos de 32 y 64 símbolos. Analiza cómo cambia la cantidad de información y verifica si duplicar el tamaño del alfabeto duplica la información total.

$$I_{32simbolos} = \log_2(32) = 5\ bits$$
$$I_{64simbolos} = \log_2(32) = 6\ bits$$
$$I_{200caracteres_{32}} = 200 \cdot \log_2(32) = 1000\ bits$$
$$I_{200caracteres_{64}} = 200 \cdot \log_2(32) = 1000\ bits$$
$$I_{400caracteres_{32}} = 400 \cdot \log_2(32) = 2000\ bits$$
$$I_{400caracteres_{64}} = 400 \cdot \log_2(64) = 2400\ bits$$

La información crece proporcionalmente al número de caracteres, duplicándose si el mensaje se duplica. En cambio, al duplicar el tamaño del alfabeto la información solo aumenta en la proporción $6/5$, no se duplica.

4. Demostrar las siguientes igualdades:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$$

Debemos demostrar:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \log_a(b) \cdot \log_b(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Por propiedad de logaritmo:

$$y = \log_a(x) \leftrightarrow a^y = x$$

Sea $y = \log_a(x)$, entonces:

$$a^y = x$$

Aplicando $\log_b$ a ambos lados:

$$\log_b(a^y) = \log_b(x)$$

Luego:

$$y \cdot \log_b(a) = \log_b(x)$$

$$y = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Como $y = \log_a(x)$, entonces:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Quedando demostrada la ecuación **(1)**
De la expresión anterior:

$$\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \left(\frac{1}{\log_b(a)}\right) \cdot \log_b(x)$$

Pero:

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

Entonces:

$$\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$$

Quedando demostrada la ecuación **(2)**
Por lo tanto, hemos demostrado:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \log_a(b) \cdot \log_b(x)$$

5. Una fuente F tiene 6 símbolos con probabilidades: $p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}15;\ p_4 = 0{,}1;\ p_5 = 0{,}1;\ p_6 = 0{,}05$. Calcula la información individual y la entropía de la fuente.

$$I_1 = -\log_2(0{,}4) = 1{,}322\ bits$$

$$I_2 = -\log_2(0{,}2) = 2{,}322\ bits$$

$$I_3 = -\log_2(0{,}15) = 2{,}737\ bits$$

$$I_4 = -\log_2(0{,}1) = 3{,}322\ bits$$

$$I_5 = -\log_2(0{,}1) = 3{,}322\ bits$$

$$I_6 = -\log_2(0{,}05) = 4{,}322\ bits$$

$$H_F = \sum_{i=1}^{q} P_i \cdot I_i$$

$$H_F = 0{,}4 \cdot 1.322 + 0{,}2 \cdot 2.322 + 0{,}15 \cdot 2.737 + 0{,}1 \cdot 3.322 + 0{,}1 \cdot 0.322 + 0{,}05 \cdot 4.322$$

$$H_F = 0{,}5288 + 0{,}4644 + 0{,}4106 + 0{,}3322 + 0{,}3322 + 0{,}2161 = 2.2843\ bits$$

6. Justifica por qué una distribución uniforme maximiza la entropía. Compara un dado justo (6 caras, $p = 1/6$) con un dado sesgado: $p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}25;\ p_3 = 0{,}15;\ p_4 = 0{,}15;\ p_5 = 0{,}1;\ p_6 = 0{,}05$.

$$I_{JUSTO} = -\log_2\left(\frac{1}{6}\right) = 2{,}585\ bits$$

$$H_{JUSTO} = \sum_{i=1}^{q} P_i \cdot I_i = 6 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 2{,}585\right) = 2{,}585\ bits$$

$$I_{SESGADO_1} = -\log_2(0{,}3) = 1{,}737\ bits$$

$$I_{SESGADO_2} = -\log_2(0{,}25) = 2\ bits$$

$$I_{SESGADO_3} = -\log_2(0{,}15) = 2{,}737\ bits$$

$$I_{SESGADO_4} = -\log_2(0{,}15) = 2{,}737\ bits$$

$$I_{SESGADO_5} = -\log_2(0{,}1) = 3{,}322\ bits$$

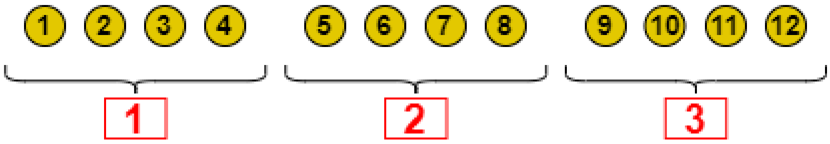
$$I_{SESGADO_6} = -\log_2(0{,}05) = 4{,}322\ bits$$

$$H_{SESGADO} = \sum_{i=1}^{q} P_i \cdot I_i = 0{,}3 \cdot 1{,}737 + 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2{,}737 + 0{,}15 \cdot 2{,}737 + 0{,}1 \cdot 0{,}322 + 0{,}05 \cdot 4{,}322$$

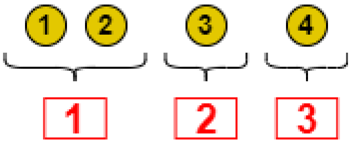
$$H_{SESGADO} = 0{,}5211 + 0{,}5 + 0{,}4106 + 0{,}4106 + 0{,}3322 + 0{,}2161 = 2{,}3906\ bits$$

La entropía es mayor en la distribución uniforme porque todos los sucesos son igualmente probables, maximizando la incertidumbre. En el dado justo se obtiene $H_{JUSTO} = 2{,}585\ bits$, mientras que en el dado sesgado la entropía baja a $H_{SESGADO} = 2{,}3906\ bits$. Esto confirma que cualquier desviación de la equiprobabilidad reduce la información promedio.

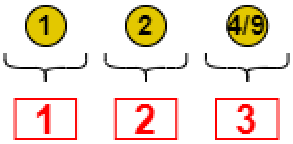
7. Sean 12 monedas, una de las cuales tiene peso diferente. Indicar cuántas monedas pesadas son necesarias para encontrarla, especifique la metodología de peso.
   Para poder encontrar la moneda con peso diferente, primero dividimos las monedas en tres grupos de 4 y pesamos 2 grupos, en este caso el grupo 1 y 2.
   Si los dos grupos pesan lo mismo, entonces la moneda con peso diferente se encuentra en el grupo 3, por lo tanto, destacamos que la moneda 4 del grupo 1 tiene un peso "normal".
   En caso contrario, tendremos que pesar los grupos 2 y 3. Si tienen el mismo peso, entonces la moneda con peso diferente se encuentra en el grupo 1, sino se encuentra en el grupo 2. Y destacamos que la moneda 9 del grupo 3 tiene un peso "normal".



   Las cuatro monedas restantes las dividimos en 3 grupos nuevamente, uno con 2 monedas y los otros con solo 1. Pesamos los grupos 2 y 3. Si son iguales, entonces la moneda que buscamos se encuentra en el grupo 1. Si son distintos, nos quedamos con los grupos 2 y 3.



   Finalmente, quedándonos dos monedas, considerando que la moneda de peso "normal" destacada en la primer o segunda pesada es el grupo 3. Pesamos el grupo 1 con el grupo 3, si pesan igual entonces la moneda con el peso diferentes es la del grupo 2, caso contrario, la moneda diferente es la del grupo 1.



   Para el camino más largo, se tuvieron que realizar 4 pesadas. Para el camino más corto, se realizaron 3 pesadas.
8. Calcula la información de una letra al azar de un alfabeto de 28 símbolos (incluyendo ñ). Luego, de pares y ternas de letras.

$$I_{letra} = \log_2(28) = 4{,}807 \text{ bits de información}$$
$$I_{par} = \log_2(28^2) = 9{,}615 \text{ bits de información}$$
$$I_{terna} = \log_2(28^3) = 14{,}422 \text{ bits de información}$$

9. ¿Cómo serán las cifras anteriores respecto de la forma castellana de escritura cotidiana? Si a su criterio existiera diferencia ¿a qué se debería?
   En la escritura castellana cotidiana estas cifras disminuyen porque las letras no son equiprobables y, además, existen restricciones ortográficas y gramaticales que introducen dependencia entre símbolos.

10. Explica las propiedades de la cantidad de información. Da un ejemplo para cada una de estas propiedades.

1. **La cantidad de información es siempre positiva (mayor o igual que cero).**

$$I = \log_2 \left(\frac{1}{P_i}\right) = -\log_2(P_i) \geq 0$$

Si tiro una moneda justa, la probabilidad de que salga "cara" es $p = 0{,}5$

$$I = -\log_2(0{,}5) = 1 \text{ bit}$$

2. **La cantidad de información de un evento, es inversamente proporcional a la probabilidad de ocurrencia del mismo.**

Es decir, mientras más raro el evento, más información da.

La probabilidad de utilizar la letra "e" en castellano es $p \approx 0{,}13$

$$I = -\log_2(0{,}13) = 2{,}94 \text{ bits}$$

La probabilidad de utilizar la letra "ñ" en castellano es $p \approx 0{,}001$

$$I = -\log_2(0{,}001) = 9{,}97 \text{ bits}$$

La "ñ" aporta más información porque es más rara.

3. **La cantidad de información aumenta con la cantidad de posibles eventos o mensajes.**

- Una moneda (2 resultados):

$$I = \log_2(2) = 1 \text{ bit}$$

- Un dado (6 resultados):

$$I = \log_2(6) = 2{,}58 \text{ bits}$$

- Una baraja de cartas inglesas (54 resultados):

$$I = \log_2(54) = 5{,}75 \text{ bits}$$

4. **La cantidad de información de eventos o mensajes independientes $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \dots, \boldsymbol{C}$ es aditiva:**

$$\boldsymbol{I(A, B, \dots, C) = I(A) + I(B) + \cdots + I(C)}$$

Lanzar 2 dados independientes:

- Cada dado: $I = \log_2(6) = 2{,}58$ bits
- Dos dados: $2{,}58 * 2 = 5{,}16$ bits
- Ambos dados: $I = \log_2(6\text{^}2) = \log_2(36) = 5{,}16$ bits

5. **La cantidad de información promedio, (que recibe el nombre de entropía $(\boldsymbol{H})$) se maximiza ante sucesos equiprobables.**

Supongamos un dado trucado que solo puede sacar 1, 2 o 3, todos con igual probabilidad:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$$

La entropía es:

$$H = \frac{1}{3} * \log_2(3) + \frac{1}{3} * \log_2(3) + \frac{1}{3} * \log_2(3) = 3 * \left(\frac{1}{3} * \log_2(3)\right) = 1{,}585 \text{ bits}$$

Ahora el mismo dado, pero con probabilidades desiguales:

$$p_1 = 0{,}5; \qquad p_2 = 0{,}25; \qquad p_3 = 0{,}25$$

La entropía es:

$$H = 0{,}5 * \log_2\left(\frac{1}{0{,}5}\right) + 0{,}25 * \log_2\left(\frac{1}{0{,}25}\right) + 0{,}25 * \log_2\left(\frac{1}{025}\right) = 1{,}5 \text{ bits}$$

11. Dada una variedad $V = 2000$ sucesos, encontrar la base b óptima de representación que hace mínima la siguiente relación número más corto, es decir que minimice I. b (cantidad de información por base).

$$I_b = \log_b(V)$$
$$L(b) = b \cdot I(b) = b \cdot \log_b(V)$$
$$L(b) = b \cdot \frac{\ln(V)}{\ln(b)}$$
$$\frac{d}{db}(b \cdot \frac{\ln(V)}{\ln(b)}) = \ln(V) \cdot \frac{\ln(b) - 1}{\ln(b)^2}$$
$$\ln(V) \cdot \frac{\ln(b) - 1}{\ln(b)^2} = 0$$
$$\frac{\ln(b) - 1}{\ln(b)^2} = 0$$
$$\ln(b) - 1 = 0$$
$$\ln(b) = 1$$
$$\mathrm{b} = e$$

Para minimizar la relación "número más corto"$L(b) = b \cdot I(b) = b \cdot \log_b(V)$, con $V = 2000$, la base óptima continua es:

$$b = e \approx 2{,}718$$
$$I = \log_e(2000) = 7{,}6 \text{ nats}$$

12. Para el texto contenido en el código QR de la parte superior de la página encuentre la entropía de orden cero o independiente tanto de lo relevado en el QR como en el texto correcto. ¿Qué conclusiones saca?

Texto mal escrito:

Sgeun un etsduio de una uivenrsdiad ignlsea, no ipmotra el odren en el que las ltears etsan ersciats, la uicna csoa ipormtnate es que la pmrirea y la utlima ltera esten ecsritas en la psiocion cocrrtea. El rsteo peuden estar ttaolmntee mal y aun pordas lerelo sin pobrleams. Etso es pquore no lemeos cada ltera por si msima preo la paalbra es un tdoo. Pesornamelnte me preace icrneilbe...

	Símbolos	**Ocurrencia**	**Probabilidad**
1	' ' (espacio)	67	0.1727
2	,	2	0.0052
3	.	6	0.0155
4	a	36	0.0928
5	b	3	0.0077
6	c	10	0.0258
7	d	9	0.0232
8	e	49	0.1263
9	g	2	0.0052
10	i	18	0.0464
11	l	23	0.0593
12	m	12	0.0309
13	n	23	0.0593
14	o	23	0.0593
15	p	13	0.0335
16	q	3	0.0077
17	r	25	0.0644
18	s	27	0.0696
19	t	21	0.0541
20	u	13	0.0335
21	v	1	0.0026
22	y	2	0.0052
Total		388	1

$$H_{incorrecto} = 3{,}90 \text{ bits}$$

Texto bien escrito:
Según un estudio de una universidad inglesa, no importa el orden en el que las letras estén escritas, la única cosa importante es que la primera y la última letra estén en la posición correcta. El resto pueden estar totalmente mal y aun podrás leerlo sin problemas. Esto es porque no leemos cada letra por sí misma, sino que la palabra es un todo. Personalmente me parece increíble…
Como ambos textos tienen la misma cantidad y variedad de símbolos, y estamos calculando una entropía independiente, entonces:

$$H_{correcto} = 3{,}90\ bits = H_{incorrecto}$$

PRÁCTICO N°2: CANAL DE INFORMACIÓN

1. Sea el siguiente canal:

	b_1	b_2	b_3
a_1	0,6	0,3	0,1
a_2	0,2	0,5	0,3
a_3	0,4	0,2	0,4

Calcular los valores de $p(a_i/b_j)$ y las probabilidades de salida para el caso particular de:

$$p(a_1) = 0{,}5 \quad ; \quad p(a_2) = 0{,}25 \quad ; \quad p(a_3) = 0{,}25$$

Probabilidades de salida $p(b_j)$:

- $p(b_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}45$
- $p(b_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}325$
- $p(b_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}225$

Comprobamos: $0{,}45 + 0{,}325 + 0{,}225 = 1$

Probabilidades condicionadas $p(a_i|b_j)$:

Usando el teorema de Bayes:

$$p(a_i|b_j) = \frac{p(a_i) \cdot p(b_j|a_i)}{p(b_j)}$$

Para b_1 $(p(b_1)) = 0{,}45$:

$$p(a_1|b_1) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{0{,}45} = \frac{2}{3}$$
$$p(a_2|b_1) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}2}{0{,}45} = \frac{1}{9}$$
$$p(a_3|b_1) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}45} = \frac{2}{9}$$

Para b_2 $(p(b_2)) = 0{,}325$:

$$p(a_1|b_2) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}325} = \frac{6}{13}$$
$$p(a_2|b_2) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}5}{0{,}325} = \frac{5}{13}$$
$$p(a_3|b_2) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}2}{0{,}325} = \frac{2}{13}$$

Para b_3 $(p(b_3)) = 0{,}225$:

$$p(a_1|b_3) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1}{0{,}225} = \frac{2}{9}$$
$$p(a_2|b_3) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}3}{0{,}225} = \frac{1}{3}$$
$$p(a_3|b_3) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}225} = \frac{4}{9}$$

2. Considera un Canal Binario Asimétrico con las siguientes probabilidades:
   - $p(a_1) = 0{,}4$
   - $p(b_1/a_1) = 4/5$
   - $p(b_1/a_2) = 1/4$

   a) Calcula las probabilidades condicionales hacia atrás y las probabilidades conjuntas.

   Probabilidades condicionales:

$$p(a_2) = 1 - p(a_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$
$$p(b_2|a_1) = 1 - p(b_1|a_1) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$
$$p(b_2|a_2) = 1 - p(b_1|a_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

   Probabilidades conjuntas:

$$p(a_i, b_j) = p(a_i) \cdot p(b_j|a_i)$$
$$p(a_1, b_1) = p(a_1) \cdot p(b_1|a_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{25} = 0{,}32$$
$$p(a_2, b_1) = p(a_2) \cdot p(b_1|a_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$
$$p(a_1, b_2) = p(a_1) \cdot p(b_2|a_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$
$$p(a_2, b_2) = p(a_2) \cdot p(b_2|a_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

   Probabilidades de salida:

$$p(b_j) = \sum_i p(a_i) \cdot p(a_i|b_j)$$
$$p(b_1) = \frac{8}{25} + \frac{3}{20} = 0{,}47$$
$$p(b_2) = \frac{2}{25} + \frac{9}{20} = 0{,}53$$

   Por último, calculamos las probabilidades condicionadas $p(a_i|b_j)$:

$$p(a_i|b_j) = \frac{p(a_i,\ b_j)}{p(b_j)}$$

   Para $p(b_1) = 0{,}47$:

$$p(a_1|b_1) = \frac{0{,}32}{0{,}47} = 0{,}681$$
$$p(a_2|b_1) = \frac{0{,}15}{0{,}47} = 0{,}319$$

   Para $p(b_1) = 0{,}53$:

$$p(a_1|b_2) = \frac{0{,}32}{0{,}53} = 0{,}151$$
$$p(a_2|b_2) = \frac{0{,}15}{0{,}53} = 0{,}849$$

   b) Obtén la entropía del emisor, y las entropías condicionales de la fuente para cualquier símbolo de salida.

   Entropía de entrada:

$$H(A) = \sum_i p(a_i) \cdot log_2 \frac{1}{p(a_i)} = \sum_i p(a_i) \cdot (-\,log_2\, p(a_i))$$
$$\mathrm{H(A)} = 0{,}4 \cdot (-\log_2 0{,}4) + 0{,}6 \cdot (-\log_2 0{,}6) = 0{,}971\ bits$$

   Entropías condicionales de la fuente para cualquier símbolo de salida:

$$H(A|B) = \sum_j p(b_j) \sum_i p(a_i|b_j) \cdot log_2 \frac{1}{p(a_i|b_j)} = \sum_j p(b_j) \sum_i p(a_i|b_j) \cdot (-\,log_2\, p(a_i|b_j))$$
$$H(A|b_j) = \sum_i p(a_i|b_j) \cdot (-\,log_2\, p(a_i|b_j))$$
$$H(A|b_1) = 0{,}681 \cdot (-\,log_2\, 0{,}681) + 0{,}319 \cdot (-\,log_2\, 0{,}319) = 0{,}903$$
$$H(A|b_2) = 0{,}151 \cdot (-\,log_2\, 0{,}151) + 0{,}849 \cdot (-\,log_2\, 0{,}849) = 0{,}612$$

Finalmente:

$$H(A|B) = 0{,}47 \cdot 0{,}903 + 0{,}53 \cdot 0{,}612 = 0{,}749 \; bits$$

c) Calcula la información mutua y la capacidad del canal.
Información Mutua:

$$I(A|B) = H(A) - H(A|B)$$

$$I(A|B) = 0{,}971 - 0{,}749 = 0{,}222 \; bits$$

Capacidad de canal:
Para calcular la capacidad del canal debemos maximizar $\mathrm{I(A|B)}$. Para ello, maximizamos sobre la distrubucion de entrada $\mathrm{p(a_1)}$ y $\mathrm{p(a_2)}$, donde numéricamente se obtiene:

$$\mathrm{p(a_1)} = 0{,}506 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{p(a_2)} = 0{,}494$$

Luego, la capacidad máxima obtenida utilizando las entradas optimas es:

$$C = I(A|B)_{max} = 0{,}232 \; bits$$

3. Considera un canal determinista con cuatro símbolos de entrada (a_1, a_2, a_3, a_4) y cuatro símbolos de salida (b_1, b_2, b_3, b_4), donde cada símbolo de entrada se corresponde exclusivamente con un símbolo de salida. Define las probabilidades para cada símbolo de entrada y calcula la información mutua.
Las probabilidades de entrada las vamos a definir como:

$$p(a_1) = p_1, p(a_2) = p_2, p(a_3) = p_3, p(a_4) = p_4$$

Donde:

$$p_i \geq 0 \; y \sum_{i}^{4} p_i = 1$$

Sabemos que:

$$I(A|B) = H(A) - H(A|B)$$

Donde $\mathrm{H}(\mathrm{A}|B) = 0$ ya que, al ser un canal determinista, tenemos:

$$p(a_i|b_j) = \{ \begin{matrix} 1 \; si \; i = j, \\ 0 \; si \; no. \end{matrix} \rightarrow H(A|B) = \sum_{i}^{4} p(b_i) \cdot H(A|b_i) = \sum_{i}^{4} p(b_i) \cdot 0 = 0$$

Luego, la información mutua es:

$$I(A|B) = H(A) = -\sum_{i}^{4} p_i \cdot log_2 \, p_i$$

4. Dada la siguiente matriz de canal, obtén las respectivas codificaciones de la fuente.

$$p(a) = \frac{1}{3} \qquad ; \qquad p(b) = \frac{1}{6} \qquad ; \qquad p(c) = \frac{1}{2}$$

	a	b	c
a	2/5	2/5	1/5
b	2/5	1/5	2/5
c	1/4	1/2	1/4

CODIFICACIONES DE LA FUENTE UTILIZANDO HUFFMAN

1. Código Huffman de la fuente (sin canal)
<u>Probabilidades ordenadas</u>:

$$p(c) = 0{,}5 \; ; \qquad p(a) = 0{,}333 \qquad ; \qquad p(b) = 0{,}167$$

<u>Códigos (óptimos, longitudes [1,2,2])</u>:

$$c \rightarrow 0$$
$$a \rightarrow 10$$
$$b \rightarrow 11$$

<u>Longitud Media</u>:

$$\bar{L} = 0{,}5 \cdot (1) + 0{,}333 \cdot (2) + 0{,}167 \cdot (2) = 1{,}5 \; bits$$

Entropía de la fuente:

$$H(A) = \sum_i \mathrm{p(a_i)} \cdot (-\log_2 \mathrm{p(a_i)})$$

$$H(A) = 0{,}5 \cdot (-\log_2 0{,}5) + 0{,}333 \cdot (-\log_2 0{,}333) + 0{,}167 \cdot (-\log_2 0{,}167) = 1{,}459\ bits$$

2. Probabilidades de salida del canal $p(B)$

$$p(b_j) = \sum_i p(a_i) \cdot p(a_i|b_j)$$

$$p(b_a) = 0{,}333 \cdot (\frac{2}{5}) + 0{,}1667 \cdot (\frac{2}{5}) + 0{,}5 \cdot (\frac{1}{4}) = 0{,}325$$

$$p(b_b) = 0{,}333 \cdot (\frac{2}{5}) + 0{,}1667 \cdot (\frac{1}{5}) + 0{,}5 \cdot (\frac{1}{2}) = 0{,}416$$

$$p(b_c) = 0{,}333 \cdot (\frac{1}{5}) + 0{,}1667 \cdot (\frac{2}{5}) + 0{,}5 \cdot (\frac{1}{4}) = 0{,}258$$

3. Probabilidades posteriores $p(a_i|b_j)$
   Usando el teorema de Bayes:

$$p(a_i|b_j) = \frac{p(a_i) \cdot p(a_i|b_j)}{p(b_j)}$$

3.1. Para $p(b_a) = 0{,}325$

$$p(a_a|b_a) = \frac{0{,}333 \cdot 0{,}4}{0{,}325} = 0{,}410$$

$$p(a_b|b_a) = \frac{0{,}167 \cdot 0{,}4}{0{,}325} = 0{,}206$$

$$p(a_c|b_a) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}25}{0{,}325} = 0{,}385$$

Probabilidades Ordenadas:

$$p(a) = 0{,}410 \quad ; \quad p(c) = 0{,}385 \quad ; \quad p(b) = 0{,}206$$

Huffman (longitudes [1,2,2]):

$$a \rightarrow 0$$
$$c \rightarrow 10$$
$$b \rightarrow 11$$

Longitud Media:

$$L_a = 0{,}410 \cdot (1) + 0{,}385 \cdot (2) + 0{,}206 \cdot (2) = 1{,}592\ bits$$

Entropía de la fuente:

$$H(A|b_a) = \sum_i \mathrm{p(a_i)} \cdot (-\log_2 \mathrm{p(a_i)})$$

$$H(A|b_a) = 0{,}410 \cdot (-\log_2 0{,}410) + 0{,}385 \cdot (-\log_2 0{,}385) + 0{,}206 \cdot (-\log_2 0{,}206) = 1{,}527\ bits$$

3.2. Para $p(b_b) = 0{,}416$:

$$p(a_a|b_b) = \frac{0{,}333 \cdot 0{,}4}{0{,}416} = 0{,}320$$

$$p(a_b|b_b) = \frac{0{,}167 \cdot 0{,}2}{0{,}416} = 0{,}080$$

$$p(a_c|b_b) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}416} = 0{,}600$$

Probabilidades Ordenadas:

$$p(c) = 0,6\ ; \qquad p(a) = 0,320 \qquad ; \qquad p(b) = 0,080$$

Huffman (longitudes [1,2,2]):

$$c \rightarrow 0$$
$$b \rightarrow 10$$
$$a \rightarrow 11$$

Longitud Media:

$$\bar{L}_b = 0,6 \cdot (1) + 0,32 \cdot (2) + 0,08 \cdot (2) = 1,4\ bits$$

Entropía de la fuente:

$$H(A|b_b) = \sum_i p(a_i) \cdot (-\,log_2\, p(a_i))$$

$$H(A|b_b) = 0,6 \cdot (-\,log_2\, 0,6) + 0,32 \cdot (-\,log_2\, 0,32) + 0,08 \cdot (-\,log_2\, 0,08) = 1,259\ bits$$

3.3. Para $p(b_c) = 0,258$:

$$p(a_a|b_c) = \frac{0,333 \cdot 0,2}{0,258} = 0,258$$

$$p(a_b|b_c) = \frac{0,167 \cdot 0,4}{0,258} = 0,259$$

$$p(a_c|b_c) = \frac{0,5 \cdot 0,25}{0,258} = 0,484$$

Probabilidades Ordenadas:

$$p(c) = 0,484 \quad ; \qquad p(b) = 0,259 \qquad ; \qquad p(a) = 0,258$$

Huffman (longitudes [1,2,2]):

c → 0

b → 10

a → 11

Longitud Media:

$$\bar{L}_c = 0,484 \cdot (1) + 0,259 \cdot (2) + 0,258 \cdot (2) = 1,518 \text{ bits}$$

Entropía de la fuente:

$$H(A|b_c) = \sum_i p(a_i) \cdot (-\,log_2\, p(a_i))$$

$$H(A|b_c) = 0,484 \cdot (-\,log_2\, 0,484) + 0,259 \cdot (-\,log_2\, 0,259) + 0,258 \cdot (-\,log_2\, 0,258) = 1,516\ bits$$

4. Longitud Media y Entropía condicional promedio

$$\bar{L}_{cond} = p(b_a) \cdot \bar{L}_a + p(b_b) \cdot \bar{L}_b + p(b_c) \cdot \bar{L}_c$$

$$\bar{L}_{cond} = 0,325 \cdot 1,592 + 0,416 \cdot 1,4 + 0,258 \cdot 1,518 = 1,4914\ bits$$

$$H(A|B) = p(b_a) \cdot H(A|b_a) + p(b_b) \cdot H(A|b_b) + p(b_c) \cdot H(A|b_c)$$

$$H(A|B) = 0,325 \cdot 1,527 + 0,416 \cdot 1,259 + 0,258 \cdot 1,516 = 1,4111\ bits$$

Información Mutua:

$$I(A;B) = H(A) - H(A|B) = 1,459 - 1,4111 = 0,0479\ bits$$

PRÁCTICO N°1 DE MÁQUINA

1. Genere un informe que marque las diferencias esenciales (tipo de documento, si es un formato comprimido o no, tamaños, calidades, etc.) entre los siguientes documentos de texto *.doc, *.docx, *.djvu, *.pdf, *.epub. Encuentre una aplicación que a un archivo de texto en cualquier formato pueda pasarlo a la mayoría de los restantes.

   1. **doc**
      - Tipo de documento: Formato propietario de Microsoft Word (anterior a 2007).
      - Compresión: No comprimido (almacena binario crudo).
      - Tamaño típico: Archivos grandes en comparación con los demás formatos.
      - Calidad: Buena fidelidad, pero dependiente de la versión de MS Word. Puede perder compatibilidad en software no-Microsoft.
      - Uso principal: Procesamiento y edición de textos en Microsoft Word.
   2. **docx**
      - Tipo de documento: Formato abierto basado en XML (Office Open XML).
      - Compresión: Sí, utiliza ZIP para reducir tamaño.
      - Tamaño típico: Medio a pequeño en comparación con .doc.
      - Calidad: Alta fidelidad, con soporte moderno (imágenes, tablas, macros limitadas). Más portable entre aplicaciones.
      - Uso principal: Procesamiento de texto estándar en versiones modernas de Word, con amplia compatibilidad.
   3. **djvu**
      - Tipo de documento: Formato especializado en imágenes escaneadas.
      - Compresión: Muy alta (mejor que PDF para imágenes de texto).
      - Tamaño típico: Muy pequeño, incluso con imágenes a color.
      - Calidad: Buena para digitalización de libros y documentos escaneados, pero no editable como texto.
      - Uso principal: Archivos de libros digitalizados, bibliotecas online y documentos escaneados.
   4. **pdf**
      - Tipo de documento: Formato portátil universal (Portable Document Format).
      - Compresión: Opcional (dependiendo del contenido, puede ser ligero o muy pesado).
      - Tamaño típico: Variable; documentos simples son pequeños, pero con imágenes pueden ser grandes.
      - Calidad: Muy alta para distribución y presentación, preserva el formato en cualquier dispositivo.
      - Uso principal: Publicación y distribución universal de documentos de texto, gráficos e imágenes.
   5. **epub**
      - Tipo de documento: Formato abierto para libros electrónicos.
      - Compresión: Sí (basado en ZIP + XHTML/CSS).
      - Tamaño típico: Pequeño a medio.
      - Calidad: Alta para lectura en eReaders, permite reflujo de texto, anotaciones y ajuste de tipografía.
      - Uso principal: Lectura en dispositivos electrónicos (Kindle, Kobo, apps móviles).