Metody Numeryczne
Aproksymacja profilu wysokościowego

Mateusz Blach 193174

1. Wstęp

Projekt polega na aproksymacji interpolacyjnej wybranych profili wysokościowych za pomocą dwóch metod - metody wykorzystującej wielomian interpolacyjny Lagrange'a oraz metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia.

2. Interpolacja

Celem interpolacji jest znalezienie funkcji *F(x)* która przechodzi przez z góry zadane punkty (węzły)

$$(x_0, y_0)$$

$$(x_1, y_1)$$

$$\ldots$$

$$(x_n, y_n)$$

oraz jak najlepiej określa wartości funkcji pomiędzy węzłami.

2.1 Interpolacja Lagrange'a

W tej metodzie wykorzystujemy tzw. **bazę Lagrange'a**, która określona jest wzorem

$$\phi_i(x) = \Pi_{j=0,\, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

dla i = 1,2,...,n + 1.

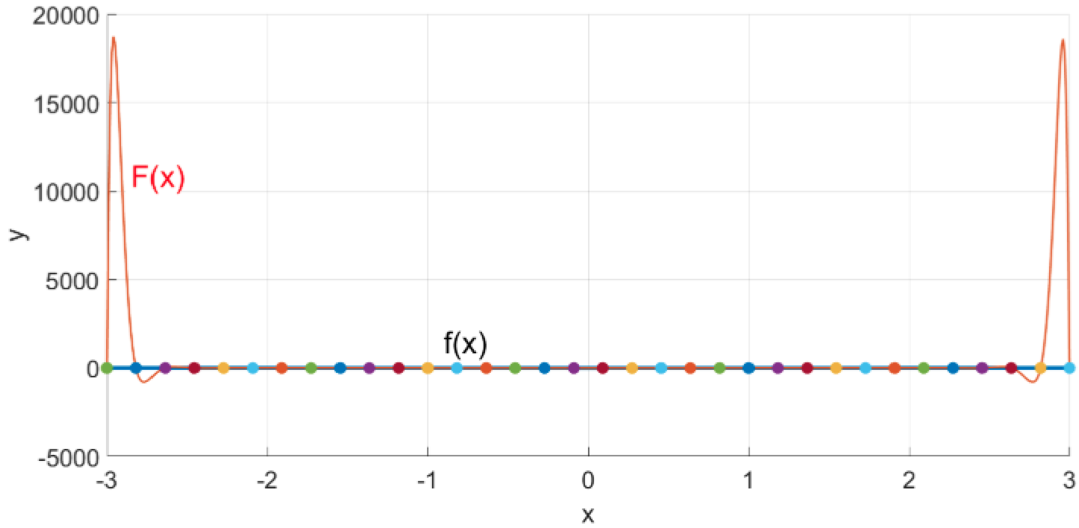
Wówczas nasza funkcja interpolująca F(x) przyjmuje postać

$$F(x) = \Sigma_{i=0}^{n} y_i \phi_i(x)$$

która jest identyczna, jak w przypadku użycia metody Vandermonde, jednak nie ma potrzeby konstrukcji i rozwiązywania układu równań liniowych, dzięki czemu metoda jest **stabilna** i łatwa w implementacji.

2.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

W interpolacji Lagrange'a przy wysokim stopniu wielomianu występuje tzw. efekt **Rungego.**



Zamiast interpolacji globalnej stosujemy interpolację lokalną, która szacuje osobą funkcję między wszystkimi parami węzłów. Nasza funkcja *F(x)* ma postać

$$F(x) = S_i(x); x \in [x_i, x_{i+1}]$$

czyli jest szeregiem wielomianów trzeciego stopnia. Zatem dla *n* przedziałów mamy *3n* niewiadomych, a aby otrzymać układ oznaczony potrzebujemy takiej samej liczby równań. Przyjmujemy założenia

$$S_i(x_i) = y_i$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$S'_{j-1}(x_i) = S'_j(x_i); x = 1..n-1$$

$$S''_{j-1}(x_i) = S''_j(x_i); x = 1..n-1$$

$$S''_0(x_0) = 0$$

$$S''_{n-1}(x_n) = 0$$

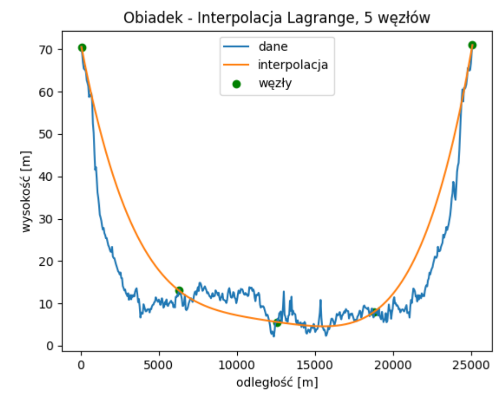
Znalezienie wielomianów *S* sprowadza się do rozwiązania powyższego układu równań.

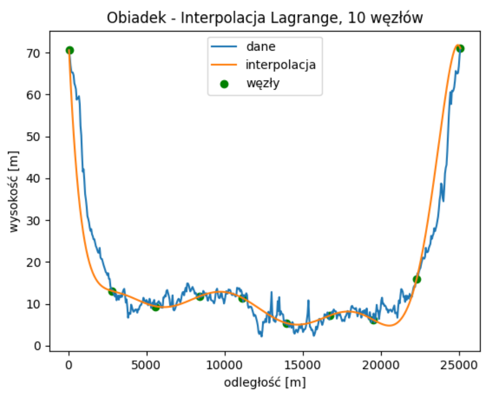
3. Wybrane profile wysokościowe

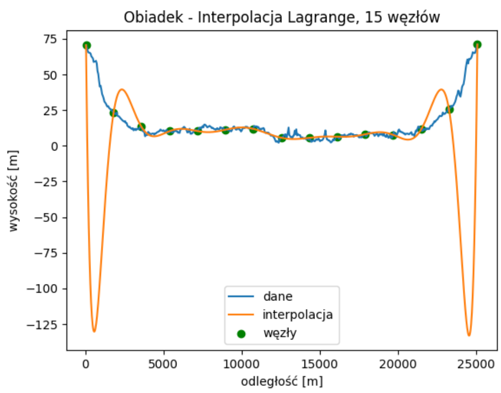
W celu weryfikacji obu metod korzystamy z rzeczywistych profili wysokościowych:

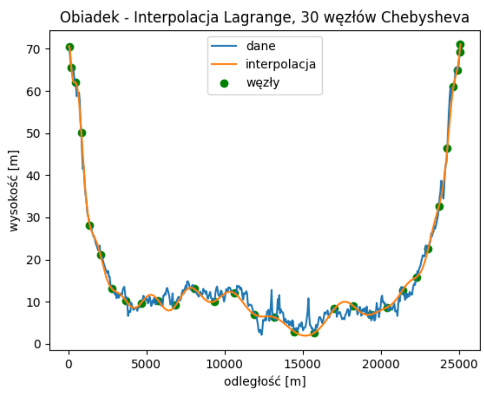
- Obiadek - głównie płaska trasa z niewielkimi i nagłymi wzniesieniami
- Mount Everest - jedno ogromne wzniesienie, stromy zjazd
- Spacerniak Gdańsk - na początku stromy zjazd, potem kilka niewielkich wzniesień

3.1 Obiadek

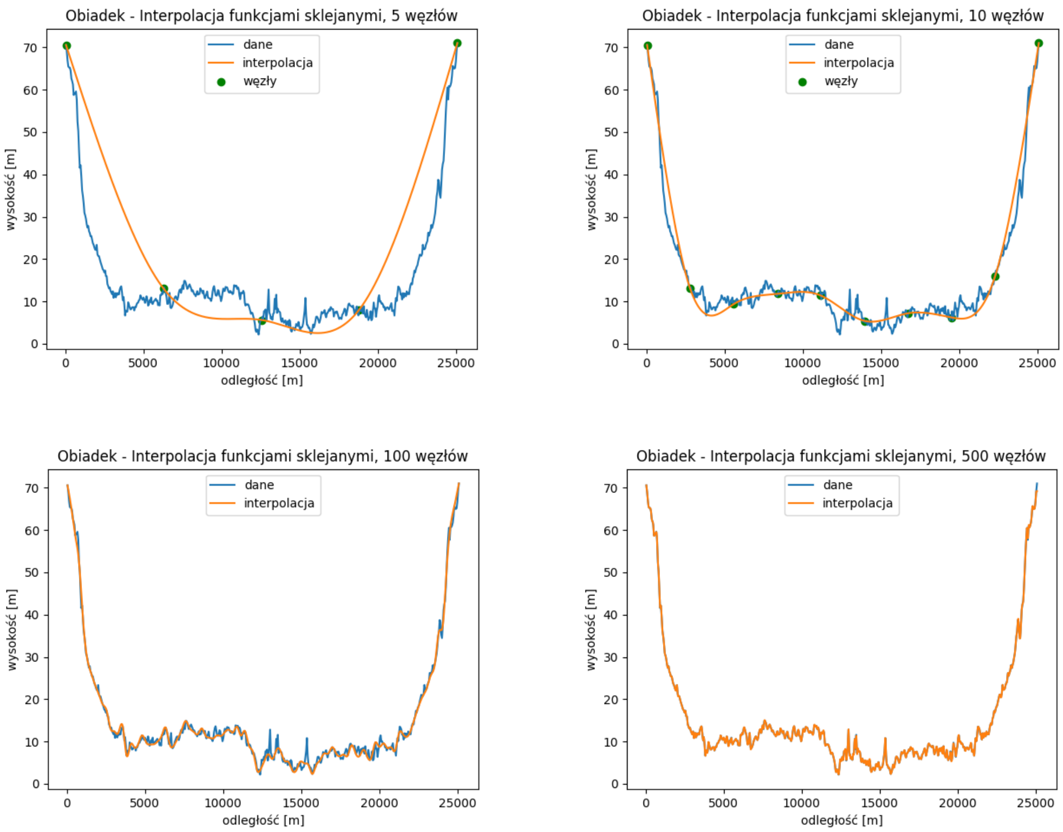






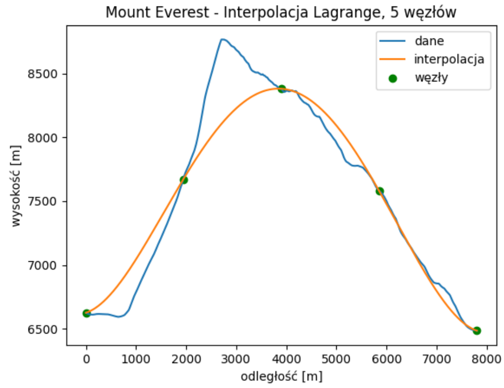


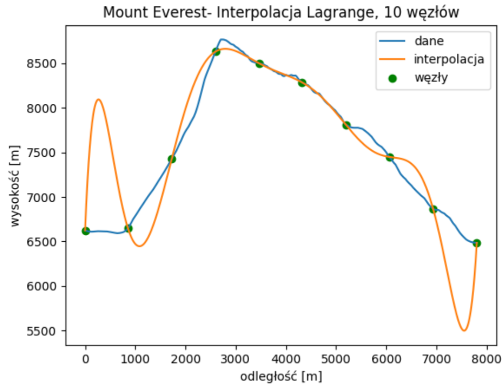
Na powyższych wykresach widzimy, że zwiększanie ilości węzłów rozłożonych równomiernie, wpływa pozytywnie na jakość interpolacji metodą Lagrange'a. Jednak trasa charakteryzuje się dużymi wahaniami nachylenia, które ciężko aproksymować nawet przy 15 węzłach. Z kolei przy takiej liczbie węzłów efekt Rungego jest tak duży, że ciężko dopatrzeć się dopasowania na wykresie, ponieważ skala efektu jest dwukrotnie większa niż różnica pomiędzy najniższym, a najwyższym punktem. Być może jest on spotęgowany faktem, iż na krańcach, trasa jest bardzo stroma. Na ostatnim wykresie zastosowaliśmy węzły Chebysheva, które dzięki zwiększonemu rozmieszczeniu na krańcach przedziału, efektywnie zneutralizowały efekt Rungego.

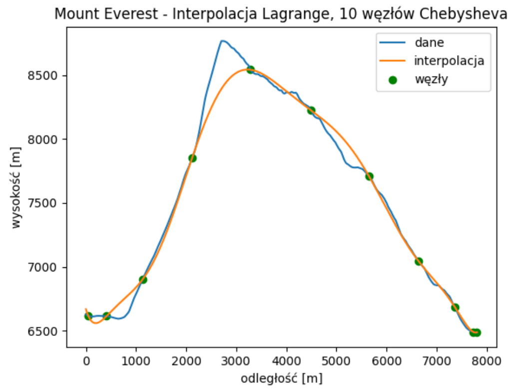


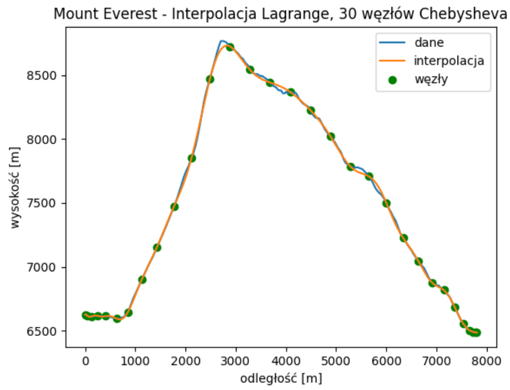
Tym razem zastosowaliśmy metodę interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia. Na wykresach widzimy, że wraz z większą ilością równomiernie rozmieszczonych węzłów, rośnie pokrycie funkcji interpolującej, z rzeczywistą trasą. Ogromne zróżnicowanie naszej trasy świetnie obrazuje trzeci wykres. Wydawałoby się, że 100 węzłów to wystarczająca liczba, aby otrzymać idealne dopasowanie. Jednak przy takiej ilości nadal widoczne są duże i nagłe skoki w wysokości, które nasza funkcja pomija. Pełne pokrycie otrzymujemy dopiero przy zatrważającej liczbie 500 węzłów, która jest bliska ilości danych wejściowych. W metodzie interplacji funkcjami sklejanymi efekt Rungego nie występuje, ponieważ funkcje tworzymy lokalnie dla każdej pary węzłów, a nie globalnie tak jak w przypadku interpolacji Lagrange'a.

3.2 Mount Everest

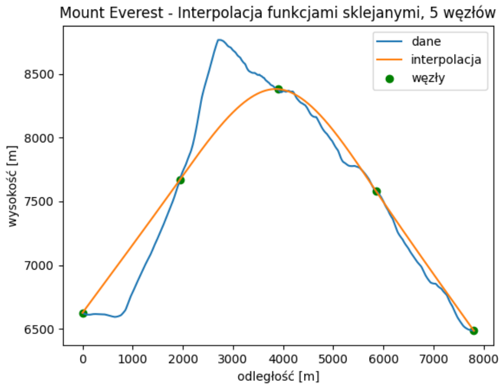


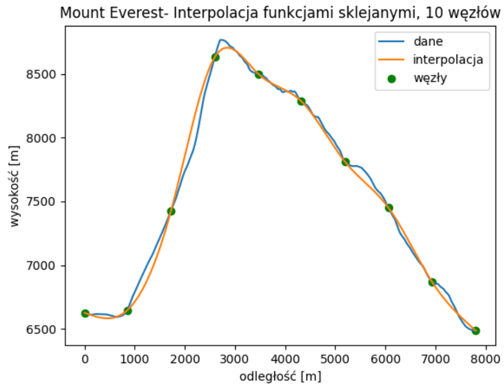


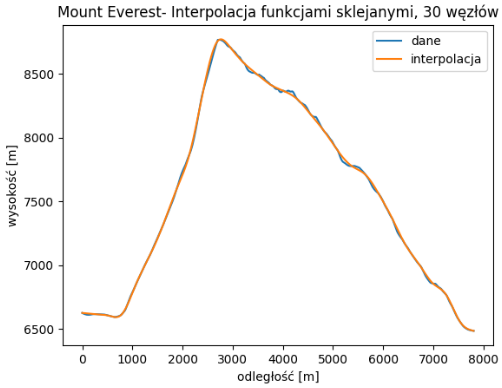


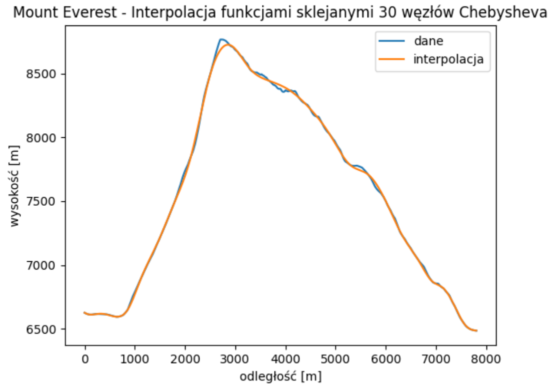


Mount Everest w przeciwieństwie do pierwszej trasy, ma dość gładką trasę. Nie oznacza to, że nie jest stroma, czy wysoka, gdyż jest to najwyższa góra na świecie. Jednak nie posiada nagłych zmian, dzięki czemu interpolacja Lagrange'a rzędu 10 węzłów wygląda przyzwoicie. Nie licząc efektu Rungego na krańcach przedziału oczywiście. Tak jak w przypadku pierwszej trasy, stosujemy interpolację na węzłach Chebysheva. Dla 10 węzłów zauważamy, że co prawda na krańcach interpolacja znacznie polepsza się, to zastosowanie węzłów Chebysheva powoduje, iż funkcja interpolująca nie trafia w charakterystyczny punkt, jakim jest wierzchołek szczytu oraz punkt zmiany nachylenia trasy. Dzięki gładkości trasy interpolacja, przy 30 węzłach rozłożonych nierównomiernie, daje nam zadowalającą funkcję.



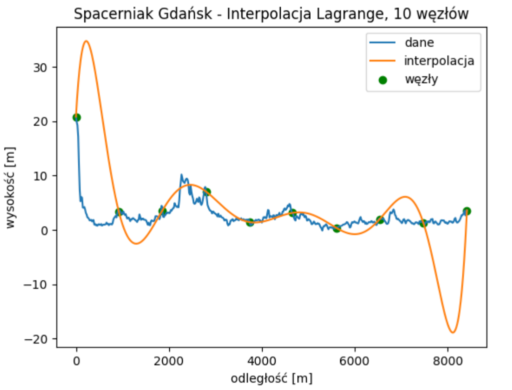


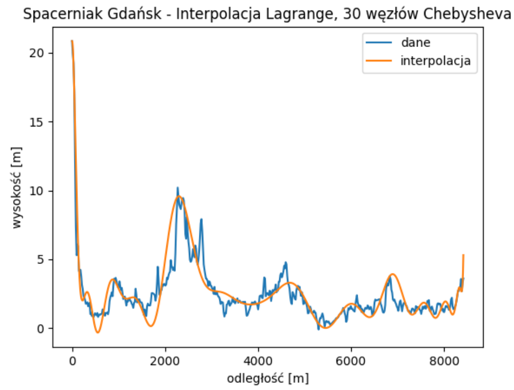


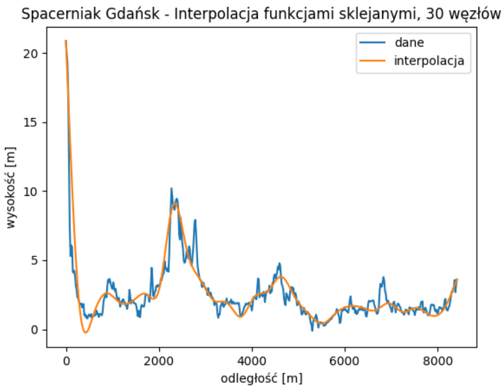


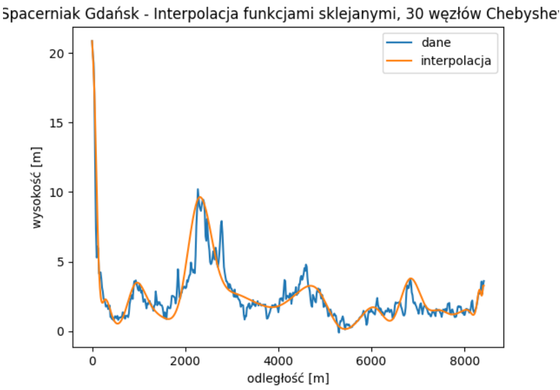
Przy interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia zauważamy, że dla coraz większej liczby węzłów, funkcja interpolująca coraz bardziej pokrywa się z badaną trasą. Dla 30 węzłów jest w stanie wykryć wierzchołek, czy też punkt zmiany nachylenia trasy. W przypadku zastosowania takiej samej liczby węzłów, ale nierównomiernie rozłożonych, to funkcja interpolująca w momencie zmiany nachylenia trasy jest nieco przesunięta.

3.3 Spacerniak Gdańsk









Trzecia trasa posłuży nam w celu zbadania wpływu rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki. Dla intepolacji Lagrange'a w przypadku węzłów rozmieszczonych równomiernie musiałem ograniczyć się do 10, ponieważ przy 30 efekt Rungego jest zbyt duży, a z wykresu nie możemy wyczytać zbyt wiele. W przypadku trasy bardzo zróżnicowanej, metoda interpolacji funkcjami sklejanymi nie radzi sobie dobrze z nagłymi skokami. W przypadku zastosowania węzłów Chebysheva, zauważamy dość spore podobieństwo dla interpolacji Lagrange'a oraz interpolacji funkcjami sklejanymi, jednak ta druga lepiej radzi sobie z nagłymi spadkami wysokości.

4. Podsumowanie

Zarówno interpolacja Lagrange'a, jak i interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, mogą znaleźć zastosowanie w aproksymacji profilu wysokościowego. Interpolacja funkcjami sklejanymi jest bardziej uniwersalna, ponieważ stosując równomiernie rozłożone węzły, nie grozi nam efekt Rungego. Tego samego nie można powiedzieć o interpolacji Lagrange'a w której, dla dość niewielkiej ilości węzłów równomiernie rozłożonych, występuje efekt Rungego. Jednak problem ten można dość łatwo rozwiązać stosując proste do obliczenia, węzły Chebysheva. Warto wspomnieć, iż metoda Lagrange'a jest o wiele prostsza w implementacji, jednak gorzej radzi sobie z gwałtownymi zmianami, które metoda funkcjami sklejanymi odwzorowuje nieco lepiej.