Factorización de Cholesky

- Hay muchas aplicaciones en que las matrices del sistema de ecuaciones son reales, simétricas y positiva definidas. Por ejemplo en problemas de mecánica de sólidos, en problemas de térmodinámica, o en problemas estructurales.
- En estos casos la descomposición LU puede adquirir una forma particular: la descomposición de Cholesky.
- Su justificación esta dada por el siguiente teorema:

  Teorema: Si $\mathbf{A}$ es matriz real, simétrica y definida positiva, entonces tiene una factorización *única* $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$, donde $\mathbf{C}$ es matriz triangular inferior con diagonal positiva.

Factorización de Cholesky

Demostración

Como $\mathbf{A}$ es simétrica (o sea $\mathbf{A} = \mathbf{A^T}$):

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \mathbf{A^T} = \mathbf{U^T L^T}$$

$$\mathbf{L^{-1}LU} = \mathbf{L^{-1}U^T L^T}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L^{-1}U^T L^T}$$

$$\mathbf{U{L^T}^{-1}} = \mathbf{L^{-1}U^T L^T {L^T}^{-1}}$$

$$\mathbf{U{L^T}^{-1}} = \mathbf{L^{-1}U^T}$$

El miembro izquierdo es una matriz triangular superior y el derecho una triangular inferior. Esto es así dado que se puede demostrar que la inversa de una matriz triangular es también triangular, y si la matriz tiene 1 en su diagonal, también los tiene su inversa.

Factorización de Cholesky

Demostración

Además el producto de dos matrices triangulares superiores es también una matriz triangular superior.
Así, deben ser ambos miembros matrices diagonales.

$$\mathbf{U}\mathbf{L}^{\mathbf{T}^{-1}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^{\mathbf{T}} = \mathbf{D}$$

luego:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathbf{T}}$$

y entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathbf{T}}$$

Puede demostrarse que $\mathbf{M}$ es una matriz definida positiva y $\mathbf{N}$ no es singular, si y solo is $\mathbf{N}\mathbf{M}\mathbf{N}^{\mathbf{T}}$ es definida positiva.

Factorización de Cholesky

Demostración

Como $\mathbf{A}$ es definida positiva también lo es $\mathbf{D}$, y por ser ésta diagonal sus términos son positivos.
Haciendo:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$$

se puede escribir:

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}}$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$
Lo cual completa la demostración.

- La factorización de Cholesky es un caso particular de la factorización LU. En lugar de tener 1 en la diagonal, tiene $\sqrt{d_{ii}}$.

Factorización de Cholesky

Input: n, $\mathbf{A}$ (simétrica, definida positiva)
Output: $\mathbf{C}$ (sobreescrita en el triángulo inferior de $\mathbf{A}$)

$c_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$
for $i = 2, \ldots n$ do
    $c_{i1} \leftarrow a_{i1}/c_{11}$
end
for $i = 2, \ldots n-1$ do

$$c_{ii} \leftarrow \left(a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} c_{is}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

    for $j = i+1, i+2, \ldots n$ do

$$c_{ji} \leftarrow \left(a_{ji} - \sum_{s=1}^{i-1} c_{js} c_{is}\right) / c_{ii}$$

    end
end

$$c_{nn} \leftarrow \left(a_{nn} - \sum_{s=1}^{n-1} c_{ns}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$