Consistencia

- El problema aproximado (2) se dice **consistente** si

$$F^{(k)}(x^*, d) \rightarrow F(x^*, d)$$

para $k \rightarrow \infty$

Estabilidad

- Un método numérico se dice que es **estable**, si para cada iteración k existe una solución unica $x^{(k)}$ para los datos $d^{(k)}$; y si esa solución depende continuamente de los datos.
- Es decir que para pequeños cambios $\delta d^{(k)}$ en los datos se producen pequeños cambios en los resultados $\delta x^{(k)}$
- Este es un concepto análogo al de problema *bien planteado*
- Puede evaluarse un *número de condición* para el método numérico
- Los conceptos de *bien planteado*, *bien condicionado*, y *estable*, se usan como sinónimos.

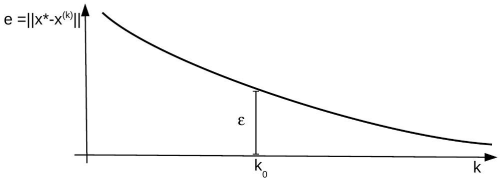
Convergencia

- El metodo numérico (2) se dice **convergente** si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; k_0(\epsilon), \; \exists \; \delta(k_0, \epsilon) \text{ tal que}$$

$$\forall k > k_0(\epsilon), \; \forall \|\delta d^{(k)}\| < \delta(k_0, \epsilon) \quad \Rightarrow \|x(d) - x^{(k)}(d + \delta d^{(k)})\| \leq \epsilon$$

- Si un método numérico es *consistente* y *estable*, entonces es *convergente*



Orden de convergencia

- En procedimientos iterativos se construye una sucesión $[x^{(k)}]$ que se espera tienda a la solución x^*.
- Para referirse a la rapidez con que $[x^{(k)}]$ tiende a x^*. se habla de *tasa*, o *razón*, o *velocidad* de convergencia.
- Se dice que la convergencia es **lineal** si:

$$\exists\ c < 1 \text{ y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ c\ |x^{(k)} - x^*| \qquad \text{para} \ \ k \geq K$$

- Se dice que la convergencia es **superlineal** si:

$$\exists\ [\epsilon_k] \to 0 \text{ y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ \epsilon^{(k)}\ |x^{(k)} - x^*| \qquad \text{para} \ \ k \geq K$$

Orden de convergencia

- Se dice que la convergencia es **cuadrática** si:

$$\exists\ C(\text{no necesariamente} < 1) \text{ y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ C\,|x^{(k)} - x^*|^2 \qquad \text{para } \ k \geq K$$

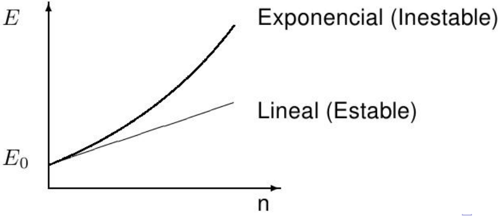
- Se dice que la convergencia es de **orden** α si:

$$\exists\ C \text{ y } \alpha \text{ constantes y } K \in \mathbb{Z} \ \text{ tal que}$$

$$|x^{(k+1)} - x^*| \ \leq \ C\,|x^{(k)} - x^*|^\alpha \qquad \text{para } \ k \geq K$$

Estabilidad

- Un método numérico se dice estable si pequeños cambios en los datos de entrada producen pequeños cambios en los resultados.
- En algoritmos donde se evalúa una solución en varios instantes en el tiempo (historia), hay una acumulación de errores de cada paso. Si se introduce un error o perturbación E_0 en alguna etapa del cálculo, y se designa con E_n el error luego de n pasos (iteraciones), se dice que:
  - El error crece *linealmente* si $E_n = n\, C\, E_0$
  - El error crece *exponencialmente* si $E_n = C^n\, E_0 \quad , \quad C > 1$



Algoritmos

- Los métodos numéricos se describen a través de *algoritmos*
- Un algoritmo es un procedimiento que describe una serie finita de pasos, en un orden determinado, que hay que realizar para resolver un problema dado.
- El algoritmo se puede describir con un seudocódigo. Este especifica la forma de entrada de datos; de salida de resultados; y los pasos a realizar.