Factorización LU

Una forma de abordar la solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es *factorizar* la matriz. Es decir buscar

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

donde $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son matrices triangulares inferior y superior, respectivamente, tales que multiplicadas dan la matriz $\mathbf{A}$

Si se tiene esa factorización, el sistema se puede escribir:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

LLamando

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

El sistema queda

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

De esta última ecuación se obtiene el vector $\mathbf{y}$ y de la anterior, el vector $\mathbf{x}$

Factorización LU

La solución se hace entonces en tres etapas:

1. Factorización de la matriz
$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$
2. Solución del sistema
$$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$$
por sustitución hacia adelante
3. Solución del sistema
$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$
por sustitución hacia atrás

Factorización LU

- La factorización $\mathbf{LU}$ no es única
- Factorización de Doolittle: los términos de la diagonal de $\mathbf{L}$ son unitarios
- Factorización de Crout: los términos de la diagonal de $\mathbf{U}$ son unitarios

Factorización LU

- Si se observa el ejemplo de eliminación de Gauss, puede verse que en la primera etapa el sistema se construyó:

$$\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} E_1 \\ E_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} E_1 \\ E_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} E_1 \end{array}$$

- En la segunda:

$$\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} E_2 \\ E_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}} E_2 \end{array}$$

Factorización LU

- En la tercera etapa:

$$
\begin{array}{l}
E_1 \\
E_2 \\
E_3 \\
E_4 - \frac{a_{43}}{a_{33}} E_3
\end{array}
$$

- Los multiplicadores usados pueden colocarse para formar una matriz triangular inferior:

$$
\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}}{a_{22}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}}{a_{22}} & \frac{a_{43}}{a_{33}} & 1 \end{bmatrix}
$$

Factorización LU

- Si se define

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n-1)}$$

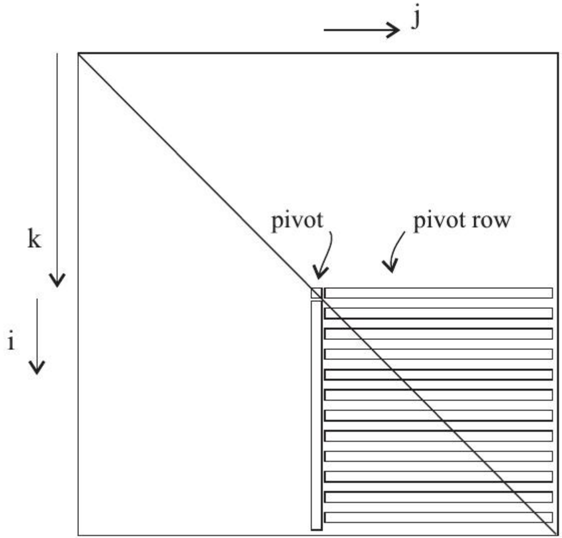
siendo esta la última matriz obtenida en el proceso de eliminación de Gauss. Ésta matriz, junto con la matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ de la transparencia anterior, son los factores de la matriz $\mathbf{A}$.

- Teorema: Si todos los elementos $a_{kk}^{(k)}$ de la descomposicion de Gauss son distintos de cero, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, donde $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$, son las matrices triangulares recién definidas.
- Siguiendo las operaciones como en el algoritmo de eliminación de Gauss, el algoritmo para descomposición $\mathbf{LU}$ se muestra a continuación.
- Las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ se almacenan sobre la matriz original $\mathbf{A}$. (La diagonal de $\mathbf{L}$ no precisa almacenarse pues son todos 1).

Factorización LU kij

```
for k = 1, 2, ... n − 1 do                                   fila pivotal
      for i = k + 1, ... n do
            s ← a_ik / a_kk
            a_ik ← s                                         l_ik
            for j = k + 1, ... n do
                  a_ij ← a_ij − s a_kj                       u_ij
            end
      end
end
```

Factorización LU kij



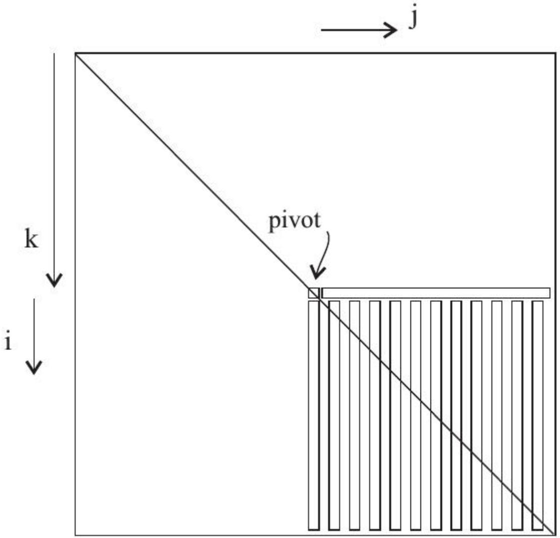
Factorización LU

- Para cada etapa, parándose en el pivote (índice k), se inicia un ciclo sobre las filas (índice i), y otro sobre las columnas (índice j).
- Por debajo del pivote (a_{kk}) queda formada una columna de la matriz $\mathbf{L}$.
- A la derecha de la diagonal va quedando formada la matriz $\mathbf{U}$.
- La parte más cara del procedimiento es la generación de la matriz $\mathbf{U}$, que se hace dentro de tres ciclos anidados.
- Esa operación puede hacerse de distintas formas, cambiando el orden en que se recorren esos tres ciclos. La indicada se denomina kij por el orden en que se realizaron las cuentas.
- A continuación se muestran las factorizaciones kji y jki

Factorización LU kji

for $k = 1, \ldots n-1$ do
    for $i = k+1, \ldots n$ do
        $s \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
        $a_{ik} \leftarrow s$ $\qquad l_{ik}$
    end
    for $j = k+1, \ldots n$ do
        for $i = k+1, \ldots n$ do
            $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik}\, a_{kj}$ $\qquad u_{ij}$
        end
    end
end

Factorización LU kji

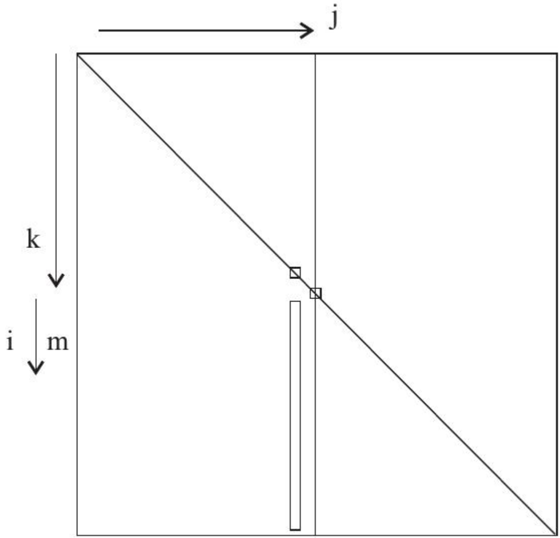


Factorización LU jki

```
for j = 2, ... n do
    for m = j, ... n do
        s ← a_{m,j-1}/a_{j-1,j-1}
        a_{m,j-1} ← s                          l_{mk}
    end

    for k = 1, ... j - 1 do
        for i = k + 1, ... n do
            a_{ij} ← a_{ij} - a_{ik} a_{kj}    u_{ij}
        end
    end
end
```

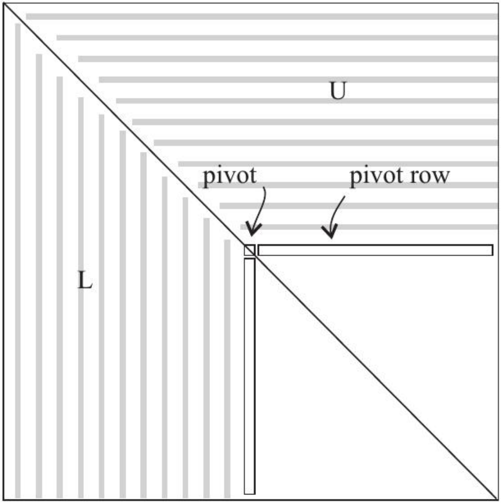
Factorización LU jki



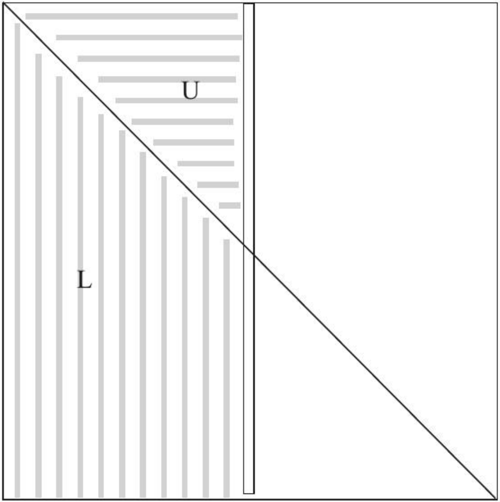
Factorización LU

- En realidad los tres ciclos anidados pueden recorrerse de 6, maneras diferentes:
  - kij
  - kji
  - ijk
  - ikj
  - jik
  - jki

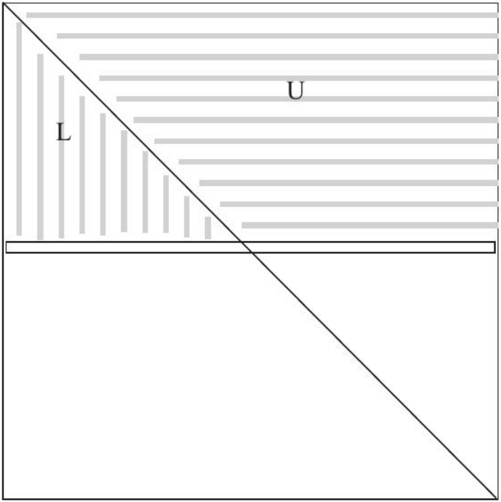
Factorización LU kij y kji



Factorización LU jik y jki

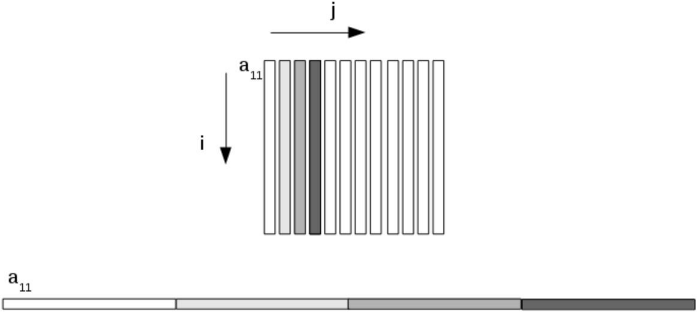


Factorización LU ikj y ijk



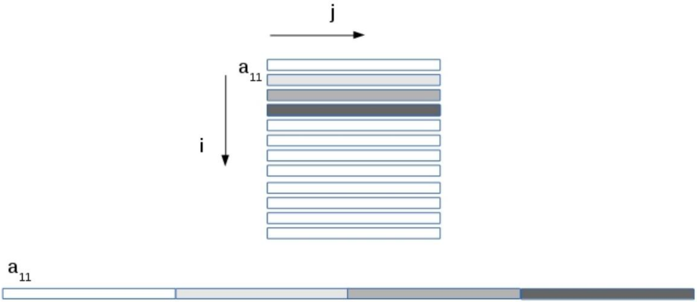
Factorización LU

- ¿Cuál es el interés de usar una u otra forma de recorrer los ciclos? Todo depende de la forma en que se almacenan los datos.
- En lenguaje FORTRAN las matrices están almacenadas por columnas. Esto significa que el arreglo que guarda la matriz contiene su primera columna, luego su segunda, y así sucesivamente.



Factorización LU

- En lenguaje C las matrices están almacenadas por filas. Esto significa que el arreglo que guarda la matriz contiene su primera fila, luego su segunda, y así sucesivamente.



- En Octave, están almacenadas por columnas.