PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

METODO DE JACOBI

Partimos que tenemos un sistema lineal que resolver $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Si resolvemos la i-ésima ecuación tendremos:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (1)$$

separando la componente x_i:

$$x_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (2)$$

$$x_i = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j\right) / a_{ii} \qquad (3)$$

$\forall i = 1, 2, \ldots n.$

siempre que $a_{ii} \neq 0$.

para cada iteración $k \geq 1$ se generan las componentes $x_i^{(k)}$ del vector $\bar{x}^k$ a partir de las componentes conocidas $\bar{x}^{k-1}$ (de la iteración anterior)

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)}\right) + b_i \right]$$

Es decir con Jacobi, lo que ~~se~~ realiza es descomponer la matriz A en una suma de matrices, y hay dos alternativas:

1) $A = D + L + U$.

D: Matriz diagonal.
L: " triang. inferior
U " triang. superior.

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

$A = L + D + U. \Rightarrow$ del sistema $Ax = b$.

$$(L+D+U)x = b. \Rightarrow$$

$$Dx + (L+U)x = b.$$

$$Dx = b - (L+U)x \quad \text{si } \exists\, D^{-1} \Rightarrow$$

$$x = D^{-1} b - D^{-1}(L+U)x$$

$$x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{T_J} x + \underbrace{D^{-1} b}_{C_J}.$$

$$\boxed{x^{(k+1)} = T_J x^{(k)} + C_J}$$

2] $A = D - L - U \Rightarrow$ para $Ax = b$.

$$[D - (L+U)]x = b.$$

$$Dx - (L+U)x = b. \Rightarrow Dx = b + (L+U)x.$$

si $\exists\, D^{-1}$.

$$x = D^{-1} b + D^{-1}(L+U)x$$

$$x = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{T_J} x + \underbrace{D^{-1} b}_{C_J}.$$

— o —

En forma matricial será:

$$x^{(k)} = T_J x^{(k-1)} + C_J.$$

$\forall k = 1, 2, \ldots$ (iteraciones).

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

$$T_J = D^{-1}(L+U).$$

$$T_J = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & -a_{23}/a_{11} & \cdots & -a_{2n}/a_{11} \\ \vdots & & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Residuo} = \| A x^k - b \|.$$

$$\text{Residuo} < tol.$$

Otro posible criterio $\dfrac{\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|}{\| x^{(k)} \|} < tol.$

podemos emplear cualquier norma de los vistos en la teoría. (ej. N_∞).

De acuerdo a lo visto se requiere que $a_{ii} \neq 0$ $\forall i = 1, 2, \dots n$. Si uno de ellos o más es nulo y si el sistema es <u>no</u> <u>singular</u> se puede reordenar las ecuaciones para que ningún $a_{ii} = 0$

La convergencia se acelera de modo que a_{ii} sea lo mas grande posible.-

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

METODO GAUSS-SEIDEL.

Partimos de un sistema lineal $Ax=b$.
con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{n}$.

Descomponemos la matriz A como:

1) $A = L + D + U \Rightarrow (L+D+U)x = b$.

$$(L+D)x + Ux = b.$$

$$(L+D)x = b - Ux. \qquad \text{si } (L+D)^{-1} \text{ Existe} \Rightarrow.$$

$$x = (L+D)^{-1} b - (L+D)^{-1} U \cdot x.$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{-(L+D)^{-1} U}_{T_{GS}} x + \underbrace{(L+D)^{-1} b}_{C_{GS}}.$$

$$x = T_{GS} x + C_{GS}.$$

2] $A = D - L - U \Rightarrow (D-L-U)x = b$.

$$(D-L)x - Ux = b \quad \Rightarrow.$$

$$(D-L)x = b + Ux \qquad \text{si } (D-L)^{-1} \exists. \Rightarrow.$$

$$x = \underbrace{(D-L)^{-1} U}_{T_{GS}} x + \underbrace{(D-L)^{-1} b}_{C_{GS}}.$$

$$x^{(k)} = T_{GS} x^{(k-1)} + C_{GS}.$$

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right]}$$

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

COSTO COMPUTACIONAL

Es dificil estimar el costo computacional de un método iterativo, pues no conocemos la cantidad de iteraciones. -

Generalmente se procede a calcular el costo computacional por iteración

Método Jacobi la relación de recurrencia será:

$$X^{(n+1)} = T_J X^{(n)} + C_J$$

Si T_J es de $n \times n$ por el vector $X^{(n)}$ tendrá que utilizar $\boxed{n \times (2n-1)}$ FLOP's

La suma de dos vectores en $\mathbb{R}^n$ necesita $\underline{n}$ FLOP's

lo que nos da un total de $\boxed{2n^2}$ FLOP's en cada iteración

Si iteramos una cantidad "m" $\Rightarrow$

$$\text{Costo Jacobi} = 2mn^2 \text{ FLOP's}$$

Gauss - Seidel. $\quad X^{(k)} = T_{GS} X^{(k-1)} + C_{GS}$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right]$$

multiplicaciones y divisiones

$$n \cdot 1 + n(n-1) = (n^2 - n + n) = n^2$$

$$n(n-1) \text{ sumas/restas} \rightarrow n(n-1)$$

$$\text{Total} = n^2 + n^2 - n = 2n^2 - n = n(2n-1)$$

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

Ejercicio N°3d.

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/6 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$A = D - L - U.$

$Ax = b \Rightarrow (D-L-U)x = b.$

Gauss-Seidel.

$(D-L)x = Ux + b.$

$x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b.$

$T_{GS} = (D-L)^{-1}U \qquad c_{GS} = (D-L)^{-1}b$

$$D = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1/6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$D - L = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Calculamos $(D-L)^{-1}$ $\quad (D-L)^{-1}(D-L) = I.$

Cuya forma será

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \boxed{E_2 - \tfrac{1}{3}E_1 \to E_2} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/3 & 1 \end{array}\right]$$

$\boxed{\tfrac{4}{3}E_1 \ ; \ 4E_2.}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 4 \end{array}\right] = \left[\, I \mid (D-L)^{-1} \right] \Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ -4/3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$T_{GS} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ -4/3 & 4 \end{bmatrix}}_{(D-L)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1/6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} 0 & -2/9 \\ 0 & 2/9 \end{bmatrix}$$

PDF-XChange Editor Click to BUY NOW! www.pdf-xchange.com

$$= (T_{GS} - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & -2/9 \\ 0 & \frac{2}{9} - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$ calculamos su determinante =

$$\det(T_{GS} - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda$$

hacemos $\det(T_{GS} - \lambda I) = 0$ para obtener el $p(\lambda)$ característico

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda - \frac{2}{9}\right) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{2}{9} = 0.22 < 1 \end{cases}$$

$\rho(T_{GS}) = \frac{2}{9} < 1 \Rightarrow$ CONVERGE a la solución del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$

——— x ———

PDF-XChange Editor
Click to BUY NOW!
www.pdf-xchange.com

COSTO COMPUTACIONAL

Es difícil estimar el costo computacional de un método iterativo, pues no conocemos la cantidad de iteraciones.-

Generalmente se procede a calcular el costo computacional por iteración

Método de Jacobi la relación de recurrencia será:

$$x^{(n+1)} = T_J x^{(n)} + C_J$$

Si T_J es de $n \times n$ por el vector $x^{(n)}$ tendrá que utilizar $\boxed{n \times (2n-1)}$ FLOP's

La suma de dos vectores en $\mathbb{R}^n$ necesita $\boxed{\text{"}n\text{"}}$ FLOP's

lo que nos da un total de $\boxed{2n^2}$ FLOP's en cada iteración

Si iteramos una cantidad "m" $\Rightarrow$

Costo Jacobi $= 2mn^2$ FLOP's

Gauss - Seidel $\quad x^{(k)} = T_{GS}x^{(k-1)} + C_{GS}$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right]$$

$n - i - 1 + 1$ mult

$i - 1 - 1 + 1$ mult

multiplicaciones y divisiones

$$n \cdot 1 + n(n-1) = (n^2 - n + n) = n^2$$

$n(n-1)$ sumas/restas $\rightarrow$ $n(n-1)$

Total $= n^2 + n^2 - n = 2n^2 - n = n(2n-1)$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4$$

3 sumas $(4-1)$

4 multipl. $n=4$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right].$$

I II

$\times$ %

1 división	Adiciones
$i-1$ multip.	$i-1-1$
$(n-i)$ "	$n-i-1$
	3

$$\frac{1+i-1+n-i}{(n)} \qquad \frac{i-1-1+n-i-1+2}{(n-1)}$$

$n(n) = n^2$

$n(n-1) = n^2 - n$

$n^2 + n^2 - n = 2n^2 - n = n(2n-1).$

— x —