

Solución numérica de problemas de valor inicial

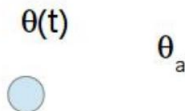
En ecuaciones diferenciales ordinarias

- 1 Problemas de valor inicial
- 2 Existencia y unicidad de la solución
- 3 Métodos de un paso
- 4 Métodos de Runge-Kutta
- 5 Métodos Multipaso
- 6 Estabilidad y convergencia
- 7 Sistemas de EDO

Problemas de valor inicial

Ejemplo

- Considérese el siguiente problema. Un cuerpo se encuentra a una temperatura θ y está rodeado de un medio ambiente con una temperatura θ_a (supóngase menor que la del cuerpo). El calor pasará del cuerpo al medio y aquel se enfriará, por cuanto su temperatura será función del tiempo ($\theta(t)$).



Ejemplo

- La velocidad con que se pierde la temperatura es proporcional a la diferencia entre $\theta(t)$ y θ_a :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_a) \quad (1)$$

Esta es la *Ley de Enfriamiento de Newton*, que gobierna este problema, y $k > 0$ de modo que si la temperatura del cuerpo es mayor que la del medio, $\frac{d\theta(t)}{dt} < 0$.

- Si se desea conocer la temperatura en un instante t hay que integrar la ecuación (1). La integración introduce una constante (desconocida). La solución de la ec. (1) no es única: existen ∞ soluciones que difieren en una constante.

- Para que la solución sea única hay que proporcionar una condición (ecuación). Esta puede ser una *condición inicial*: $\theta(0) = \bar{\theta}_0$ (temperatura inicial conocida).
- El problema queda:

$$\begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_a) & \text{ecuacion de campo} \\ \theta(0) = \bar{\theta}_0 & \text{condicion inicial} \end{cases} \quad (2)$$

- El problema (2) se llama *problema de valor inicial* y tiene solución única.
- La cantidad de condiciones iniciales tiene que ser igual al orden de derivación en la ecuación.

- La solución analítica de (2) es:

$$\theta(t) = \theta_a + (\bar{\theta}_0 - \theta_a) e^{-k t}$$

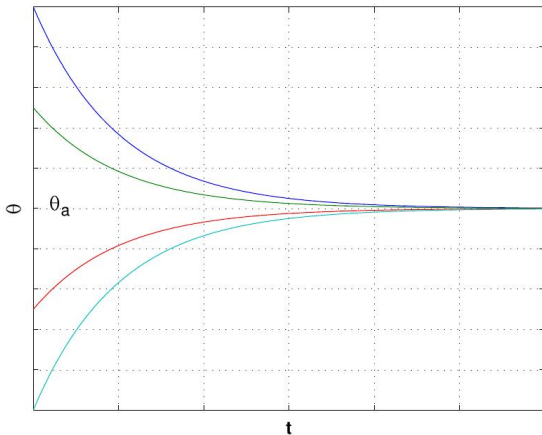


Figura 1. Solución $\theta(t)$ para distintos casos en que $\bar{\theta}_0 > \theta_a$ y $\bar{\theta}_0 < \theta_a$

Problemas de Valor Inicial (PVI)

- Un PVI se tiene a partir de una ecuación diferencial. En los primeros que veremos, serán PVI **de primer orden**:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

válida en el intervalo $a < x < b$

- Esa ecuación tiene ∞ soluciones $y(x)$. Para precisar una es necesario dar una condición:

$$y(a) = \bar{y}_0$$

que se denomina *condición inicial*.

- El problema de valor inicial (PVI) se escribe:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases} \quad (3)$$

- Es decir, el problema es:
hallar la función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ en el intervalo (a, b) y que además satisface la condición inicial $y(a) = \bar{y}_0$.
- La función $f(x, y)$ representa, como lo indica la ecuación, la derivada de y . Y esta derivada, en el caso más general depende de x y de y .
- En el ejemplo de enfriamiento $y' (\theta')$ no depende explícitamente de $x (t)$, y es función lineal de y .

- Un PVI para ecuaciones de distintos órdenes de derivación puede escribirse:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(a) = \bar{y}_0 \\ y'(a) = \bar{y}'_0 \\ y''(a) = \bar{y}''_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(a) = \bar{y}_0^{n-1} \end{cases}$$

- Si se puede integrar analíticamente la ecuación diferencial, las constantes de integración se calculan a partir de las condiciones iniciales.
- Si no es posible integrarla analíticamente, hay que recurrir a métodos numéricos.

Existencia y unicidad de la solución

Existencia y unicidad de la solución

- Antes de emprender la solución (analítica o numérica) del PVI hay que ver si el problema *tiene* solución.
- Más precisamente hay que responder a las siguientes preguntas:
 - El PVI ¿tiene solución?
 - Si la tiene, ¿es única?
 - Esa solución, ¿es sensible a pequeñas variaciones en los datos?
- Se introducen ahora algunas definiciones y se verán algunos teoremas que permiten responder a esas preguntas.

Definición:

Se dice que una función $f(x, y)$ satisface la *condición de Lipschitz* para la variable y en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

si los puntos (x, y_1) y (x, y_2) están en D .

La constante L se llama *constante de Lipschitz*

Definición:

Se dice que conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es *convexo*, si dados dos puntos (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) \in D$, el punto $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ también $\in D$, donde $0 \leq \lambda \leq 1$.

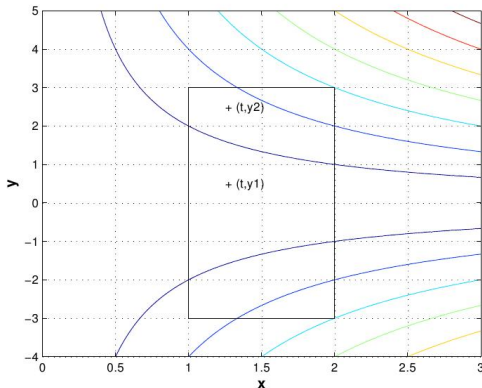
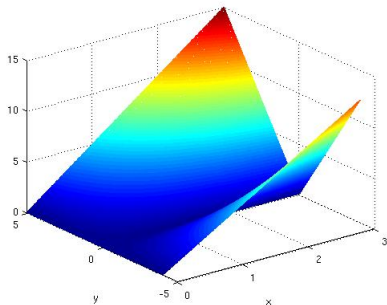
Un rectángulo es convexo. Generalmente trabajaremos en conjuntos $x_1 \leq x \leq x_2$, $-\infty < y < \infty$ que también lo son.

Ejemplo:

Sea $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, -3 < y < 3\}$ y sea $f(x, y) = x|y|$, entonces para cada (x, y_1) y (x, y_2) están en D :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x|y_1| - x|y_2|| = |x| \, ||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|$$

Luego f verifica una C.L. para y en D , y la cte de Lipschitz es 2.



Teorema 1:

Sea $f(x, y)$ definida en $D \subset \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L$$

para todo $(x, y) \in D$, entonces f satisface una condición de Lipschitz para la variable y con una constante de Lipschitz L .

Las condiciones de este teorema son *suficientes* para que se satisfaga una condición de Lipschitz, pero no *necesarias*.

Teorema 2:

Sea

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty\}$$

y sea $f(x, y)$ *continua* en D .Si f satisface una condición de Lipschitz en D para la variable y , entonces el PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

tiene una solución única $y(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Definición:

Se dice que el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

es un *problema bien planteado* si:

- ① Existe una solución *única* $y(x)$ para ese problema.
- ② Existen ctes $\epsilon > 0$ y $k > 0$ tales que *existe* una solución *única* $z(x)$ al problema:

$$\begin{cases} z' = f(x, z) + \delta(x) & a \leq x \leq b \\ z(a) = \bar{y}_0 + \epsilon_0 \end{cases}$$

donde $|z(x) - y(x)| < k\epsilon \quad \forall a \leq x \leq b$,
siempre que $|\epsilon_0| < \epsilon$ y $\delta(x) < \epsilon$.

Teorema 3:

Sea

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty\}$$

el PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

está bien planteado si f es continua y satisface una condición de Lipschitz para la variable y en el conjunto D .

Ejemplo:

Sea $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$ y sea el PVI:

$$\begin{cases} y' = 1 + x - y & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (a)$$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$, $|\frac{\partial f}{\partial y}| = 1$, \therefore por el Teorema 1 satisface una C.L para y en D con cte $L = 1$.
- Como f es continua, por Teorema 2 el PVI tiene solución única, y por Teorema 3 está bien planteado.
- El problema perturbado:

$$\begin{cases} z' = 1 + x - y + \delta & 0 \leq x \leq 1 \\ z(a) = 1 + \epsilon_0 \end{cases} \quad (b)$$

con $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ ctes.

La solución de (a) es: $y(x) = e^{-x} + x$

La solución de (b) es: $z(x) = (1 + \epsilon_0 - \delta)e^{-x} + x + \delta$

Si $|\delta| < \epsilon$ y $|\epsilon_0| < \epsilon$, entonces:

$$|y(x) - z(x)| = |(\delta - \epsilon_0)e^{-x} - \delta| = |\delta(e^{-x} - 1) - \epsilon_0 e^{-x}| \leq |\delta| |1 - e^{-x}| + |\epsilon_0| \leq 2\epsilon$$

Se verifica el Teorema 3.

Métodos de un paso

Métodos de un paso

- Sea el PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

- Se obtendrán aproximaciones a y en determinados puntos o nodos en el intervalo $[a, b]$. Esos *puntos de red* o *nodos* están igualmente espaciados. Dividiendo (a, b) en n subintervalos, el tamaño del paso es $h = \frac{b-a}{n}$ y la abcisa del nodo i es $x_i = x_0 + i h$.
- Se ha de designar y_i a la solución numérica (o aproximación) en el punto x_i en tanto que $y(x_i)$ es el valor exacto de la función.

Métodos de un paso

- Los metodos de un paso permiten evaluar la solución numérica y_{i+1} , en la abcisa x_{i+1} , con formulas del tipo:

$$y_{i+1} = y_i + h \Phi$$

donde Φ es una aproximacion a $\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$ que, en general puede ser función de $x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}$ y h .

- Si $\Phi(x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}, h)$ el método se dice *implícito*.
- Si Φ no depende de y_{i+1} el método se dice *explícito*.

- El método de un paso más sencillo es el Método de Euler.
- A partir de x_i aplicando Series de Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1} - x_i) y'(x_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 y''(\xi_i)$$

siendo $x_i < \xi_i < x_{i+1}$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_i)$$

- Despreciando el término en h^2 :

$$y(x_{i+1}) \simeq y(x_i) + h y'(x_i)$$

- Como y satisface la ec. diferencial, $y' = f(x, y)$.

$$y(x_{i+1}) \simeq y(x_i) + h f(x_i, y(x_i))$$

- Esto da lugar al Método de Euler para integrar EDO. Llamando y_i a la solución numérica obtenida para aproximar a $y(x_i)$, el algoritmo del método de Euler:

$$\left| \begin{array}{l} y_0 = y(a) = \bar{y}_0 \\ y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \end{array} \right. \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Algoritmo del Método de Euler

Para aproximar

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

con $n + 1$ puntos en $[a, b]$.

Entrada: f, a, b, n, \bar{y}_0

Salida: $x_i, y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

① $h = \frac{b-a}{n}$

$$x_0 = a$$

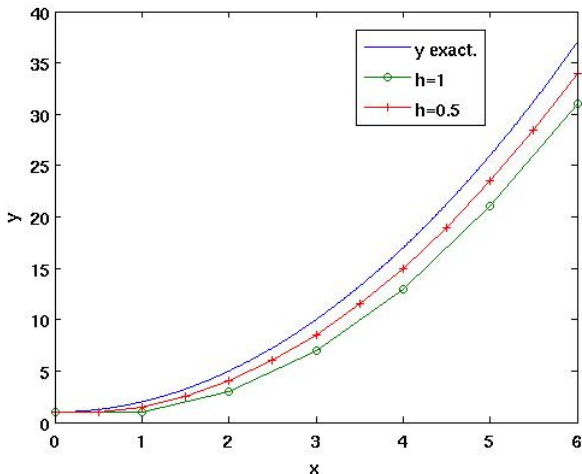
$$y_0 = \bar{y}_0$$

② Para $i = 1, 2, \dots, n$ hacer

$$\begin{cases} y_i = y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ x_i = x_0 + i h \end{cases}$$

③ Salida: $(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

- En la figura se muestra la solución de $y' = 2x$ en el intervalo $(0, 6)$, con $\bar{y}_0 = 1$. La solución numérica se va alejando de la solución exacta. Se muestran allí resultados con $h = 1$ y con $h = 0.5$.



Errores en los métodos para PVI

- Los errores que aparecen al integrar PVI se pueden clasificar en
 - 1) errores de truncamiento local (ETL):
Aparecen en cada paso al truncar la serie de Taylor.
 - 2) errores de redondeo local (ERL):
Debido a la aritmética finita
 - 3) errores de truncamiento global (ETG):
Acumulación de ETL.
 - 4) errores de redondeo global (ERG):
Acumulación de ERL.
Aumenta al achicarse h .
 - 5) error total:
Suma de ETG y ERG.

Errores en los métodos para PVI

- El error de truncamiento local es el que se da en cada paso de integración.

$$\tau_i h = (y(x_{i+1}) - y(x_i)) - h \Phi(x_i, y(x_i), h)$$

Si el método es de orden n el ETL es orden h^{n+1} Este error disminuye al disminuir h .

(A veces se define como error de truncamiento local a τ_i , esto es al error al aproximar la secante por la derivada.)

Errores en los métodos para PVI

- El error de truncamiento global proviene de la acumulación de errores de truncamiento local. Puede escribirse:

$$e_i = y_i - y(x_i)$$

Es de orden $O(h^n)$. (n veces $O(h^{n+1}) = \frac{b-a}{h}$ veces $O(h^{n+1})$).

- Para el método de Euler, hay un teorema que asegura que el error de truncamiento global esta acotado por

$$|y_i - y(x_i)| \leq \frac{hM}{2L} [e^{L(x_i-a)} - 1]$$

para cualquier i , donde L es la constante de Lipschitz (f verifica la condicion de Lipschitz) y M acota la derivada segunda

$$|y''(x)| \leq M \quad \forall x \in (a, b)$$

Errores en los métodos para PVI

- Para el Método de Euler, el menor error total (ETG+ERG) se da para un paso:

$$h = \sqrt{\frac{2\delta}{M}}$$

donde δ es la cota del error de redondeo ($|\delta_i| < \delta$), y M es la cota de la derivada $y''(\xi_i)$ ($|y''(\xi_i)| < M$).

Métodos explícitos y métodos implícitos

- La fórmula del método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

permite calcular la solución en x_{i+1} usando valores disponibles evaluados en x_i .

Este método se denomina también Método de Euler *progresivo* o *hacia adelante* (*forward Euler*). Y es un ejemplo de método *explícito*.

- También podría plantearse una fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

en este caso la solución en x_{i+1} depende de y_{i+1} por lo que no puede calcularse explícitamente.

Este método es *implícito* y, en rigor, es una ecuación no lineal por lo que su resolución es más cara.

Este método se denomina también Método de Euler *regresivo* o *hacia atrás* (*backward Euler*)

Métodos explícitos y métodos implícitos

- Un método más preciso que el de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} h (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

- Este método se denomina Método de Crank-Nicholson, ó también Método del Trapecio.
- Usa una pendiente promedio entre la pendiente de los puntos inicial y final del paso.
- Es un método implícito.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta

- El desarrollo en serie de Taylor, a partir del punto x_i :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots$$

- De la ecuación diferencial (usando la notación: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, etc.):

$$y' = f$$

$$y'' = \frac{d}{dx}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{d}{dx}y'' = f_{xx} + f_{xy}y' + (f_{yx}f + f_y f_x) + (f_{yy}f + f_y f_y)y' \\ &= f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_y f_x + f_{yy}f^2 + f_y^2 f \end{aligned}$$

etc.

- Reteniendo hasta el término en h^2 en la serie de Taylor: :

$$y(x+h) = y + hf + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_y) + O(h^3) \quad (1)$$

donde se ha usado la notación:

$$y = y(x)$$

$$f = f(x, y(x))$$

etc.

Polinomios de Taylor en 2 variables

$$f(x, y)$$

$$f(x + a, y + b) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x, y) + E_n(x, y)$$

donde

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(x, y) = f(x, y)$$

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(x, y) = a \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$\left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + 2 a b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$$

y el error de truncamiento:

$$E_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left(a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x + \theta a, y + \theta b)$$

con $0 < \theta < 1$

- La fórmula (1):

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2} h f + \frac{1}{2} h [f + h f_x + h f f_y] + O(h^3) \quad (2)$$

- De la fórmula de Taylor para 2 variables, con $n = 1$:

$$f(x+h, y+hf) = f + h f_x + h f f_y + O(h^2) \quad (3)$$

- La fórmula (2) puede escribirse:

$$y(x+h) = y + \frac{1}{2} h f + \frac{1}{2} h f(x+h, y+hf) + O(h^3) \quad (4)$$

- De la última fórmula puede escribirse:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (F_1 + F_2)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_{i+1}, y_i + F_1)$$

- Esta fórmula se conoce como *Fórmula de Runge-Kutta de 2º orden*.

- Las Fórmulas de Runge-Kutta de 2^o orden se pueden escribir:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + w_1 h f + w_2 h f(x + \alpha h, y + \beta h f) + O(h^3)$$

Los parámetros w_1, w_2, α y β dan lugar a diferentes fórmulas.

- Teniendo en cuenta (3) se puede escribir:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + w_1 h f + w_2 h [f + \alpha h f_x + \beta h f f_y] + O(h^3)$$

- Comparando con (1) se ve que deben ser:

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$w_2 \beta = \frac{1}{2}$$

Métodos de Runge-Kutta de 2^o orden

Método de Heun

Se da con:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \beta = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (F_1 + F_2)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + h, y_i + F_1)$$

Método de Euler modificado

Se da con:

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 1$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + F_2$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

Se conoce también como Método del Punto Medio

Otro método de segundo orden

Se da con:

$$w_1 = \frac{1}{4}$$

$$w_2 = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \beta = \frac{2}{3}$$

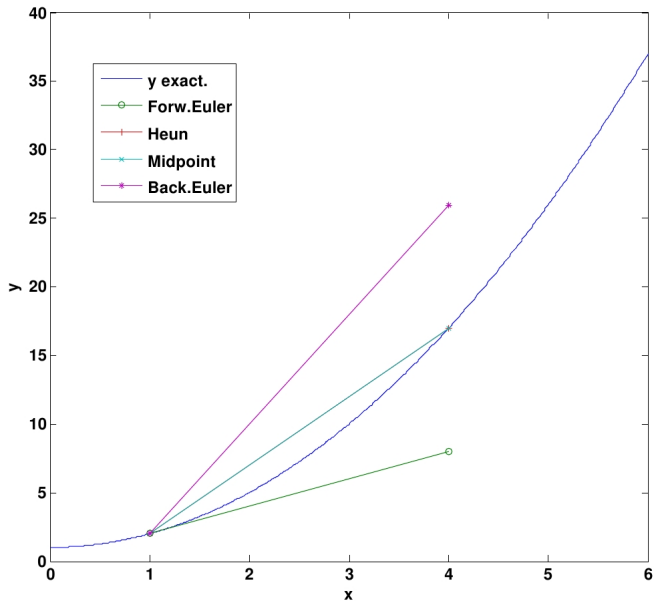
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4} (F_1 + 3 F_2)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}F_1)$$

Métodos de Runge-Kutta de 2^o orden



- El Método de Heun se puede escribir en dos pasos:
 - 1) $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$
 - 2) $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]$
- El primer paso puede verse como una *predicción* del valor de y en x_{i+1} . Una predicción *explícita* ya que se calcula a partir del conocimiento de los valores en x_i .
- El segundo paso puede verse como una *corrección* del valor anterior, con una fórmula *implícita*.
- Esto da lugar a los métodos llamados *predictor-corrector* que se analizarán más adelante.

Métodos de Runge-Kutta de 4^o orden

- Un método muy usado es el Runge-Kutta de 4^o orden:

Método de Runge-Kutta de 4^o orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_2)$$

$$F_4 = h f(x_i + h, y_i + F_3)$$

- Es de 4^o orden pues contempla los términos hasta h^4 . El error es de orden h^5 .
- Hay muchas fórmulas de Runge-Kutta de 4^o orden.

Métodos de Runge-Kutta de 4^o orden

Algoritmo del Método de Runge-Kutta de 4^o orden

Entrada: a, b, n, \bar{y}_0

Salida: $y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

1) $h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, y_0 = \bar{y}_0$

2) Para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_2)$$

$$F_4 = h f(x_i + h, y_i + F_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

3) Salida

Métodos de Runge-Kutta

Método de Runge-Kutta de 3^o orden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(F_1 + 4 F_2 + F_3)$$

donde

$$F_1 = h f(x_i, y_i)$$

$$F_2 = h f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}F_1)$$

$$F_3 = h f(x_i + h, y_i + 2 F_2 - F_1)$$

Errores en los Métodos de Runge-Kutta

- Un método RK de orden m es equivalente a tomar polinomios de Taylor hasta términos de orden m , y el error de truncamiento es $O(h^{m+1})$.
- La solución exacta $y(x_{i+1})$ sería:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} + C h^{m+1}$$

donde y_{i+1} es la aproximación y el último término el error de truncamiento.

- Si se calcula $y_{i+1}^{(1)}$ con un paso h ; y $y_{i+1}^{(2)}$ con 2 pasos $h/2$,:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(1)} + C h^{m+1}$$

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(2)} + 2 C \left(\frac{h}{2}\right)^{m+1}$$

restando:

$$y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)} = C \left(h^{m+1} - \frac{h^{m+1}}{2^m} \right) = C h^{m+1} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right)$$

Errores en los Métodos de Runge-Kutta

- De la última expresión:

$$C h^{m+1} \simeq \frac{y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)}}{(1 - 2^{-m})} \simeq y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)}$$

- Para los métodos de RK:

RK de orden	Error de truncamiento local	Evaluaciones de función
2	$O(h^3)$	2
3	$O(h^4)$	3
4	$O(h^5)$	4
5	$O(h^6)$	6
6	$O(h^7)$	7

- Se prefieren los métodos de RK de orden ≤ 4

Ejemplo

Sea el problema:

$$y' = y - x^2 + 1 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$y(0) = 0.5$$

resuelto por el Método de Euler con $h = 0.025$; Heun con $h = 0.05$; y RK 4º orden con $h = 0.1$. En todos los casos se realizaron 20 evaluaciones de funciones.

t_i	Exact	Euler $h = 0.025$	Modified Euler $h = 0.05$	Runge-Kutta Order Four $h = 0.1$
0.0	0.5000000	0.5000000	0.5000000	0.5000000
0.1	0.6574145	0.6554982	0.6573085	0.6574144
0.2	0.8292986	0.8253385	0.8290778	0.8292983
0.3	1.0150706	1.0089334	1.0147254	1.0150701
0.4	1.2140877	1.2056345	1.2136079	1.2140869
0.5	1.4256394	1.4147264	1.4250141	1.4256384

Métodos Multipaso

- Hasta ahora hemos visto métodos de integración donde para calcular y_{i+1} se usan los valores calculados en x_i . No los anteriores.

Por ejemplo la fórmula de Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

- Como el error se va acumulando, los últimos tienen errores mayores.
- Se pueden usar los puntos anterioremente calculado \rightarrow *fórmulas multipaso*:

$$y_{i+1} = \phi(y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots)$$

- El problema

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

Si integramos y' :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = y_{i+1} - y_i$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$$

- Podemos usar fórmulas de interpolación para aproximar $f(x, y)$ e integrar numéricamente.
- Si usamos polinomios, obtenemos fórmulas de paso múltiple.

- La forma general de un método multipaso de m pasos es:

$$y_{i+1} = a_{m-1} y_i + a_{m-2} y_{i-1} + a_{m-3} y_{i-2} + \dots + a_0 y_{i+1-m} + h [b_m f(x_{i+1}, y_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, y_i) + b_{m-2} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \dots + b_0 f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})]$$

para $i = m - 1, m, \dots, n - 1$

- Los a_0, \dots, a_{m-1} y b_0, \dots, b_m son constantes.
- Los y_i , (para $i = 0, 1, \dots, m - 1$) son conocidos. *Valores iniciales*
- Si $b_m = 0 \rightarrow$ método *explícito* o *abierto*
- Si $b_m \neq 0 \rightarrow$ método *implícito* o *cerrado*
- Se precisan m condiciones iniciales. Se usa un método de un paso (Runge-Kutta, Euler, etc.) para obtener los primeros m valores de y_i . Luego se arranca con el método multipaso.

Ejemplo

- Ejemplo de construcción de una fórmula multipaso mediante el método de los *Coeficientes Indeterminados*.
- Sea la fórmula de 5 pasos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \simeq h [A f_i + B f_{i-1} + C f_{i-2} + D f_{i-3} + E f_{i-4}] \quad (1)$$

- El procedimiento es el siguiente: por 5 puntos puede hacerse pasar un polinomio de 4^o grado. Se representará $f(x, y)$ como combinación de polinomios de 4^o grado y se integrará entre x_i y x_{i+1} para obtener el término de la izquierda.
- Por comodidad se tomará $t_i = 0$, con lo que $t_{i+1} = 1$, $t_{i-1} = -1$, $t_{i-2} = -2$, $t_{i-3} = -3$, y $t_{i-4} = -4$.

- En vez de tomar polinimios cualesquiera, a los efectos de facilitar las operaciones se tomarán:

$$\begin{aligned}
 p_0(x) &= 1 \\
 p_1(x) &= t \\
 p_2(x) &= t(t+1) \\
 p_3(x) &= t(t+1)(t+2) \\
 p_4(x) &= t(t+1)(t+2)(t+3)
 \end{aligned}$$

y con ello

$$f(x, y) = c_0 p_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4 \quad (2)$$

- Realizando la integral, tenemos el lado izquierdo de (1):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = c_0 1 + c_1 \frac{1}{2} + c_2 \frac{5}{6} + c_3 \frac{9}{4} + c_4 \frac{251}{30}$$

- Para evaluar el lado derecho de (1) usamos la función (2) para obtener f_i, f_{i-1} , etc.

$$f_i = f(0) = c_0$$

$$f_{i-1} = f(-1) = c_0 - c_1$$

$$f_{i-2} = f(-2) = c_0 - 2c_1 + 2c_2$$

$$f_{i-3} = f(-3) = c_0 - 3c_1 + 6c_2 - 6c_3$$

$$f_{i-4} = f(-4) = c_0 - 4c_1 + 12c_2 - 24c_3 + 24c_4$$

multiplicando la primera expresión por A , la segunda por B , etc. (y siendo $h = 1$) se puede evaluar el lado derecho de (1).

- Igualando los factores de los coeficientes c_0, c_1 , etc. de ambos miembros de (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A + B + C + D + E &= 1 \\
 -B - 2C - 3D - 4E &= 1/2 \\
 2C + 6D + 12E &= 5/6 \\
 -6D - 24E &= 9/4 \\
 24E &= 251/30
 \end{aligned} \tag{3}$$

- La resolución del sistema (3) proporciona los coeficientes:

$$A = \frac{1901}{720}; B = -\frac{2774}{720}; C = \frac{2616}{720}; D = -\frac{1274}{720}; E = \frac{251}{720}$$

y la fórmula multipaso es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}[1901 f_i - 2774 f_{i-1} + 2616 f_{i-2} - 1274 f_{i-3} + 251 f_{i-4}]$$

esta fórmula es conocida como Fórmula de Adams-Bashfort de 5 pasos.

Fórmulas de Adams-Bashfort

- Las fórmulas de Adams-Bashfort son explícitas ($b_m = 0$) y tienen $a_{m-1} = 1$ y el resto de los $a_j = 0$:

$$y_{i+1} = y_i + h [b_{m-1} f(x_i, y_i) + b_{m-2} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \dots + b_0 f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})]$$

- A-B de 2 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}]$$

- A-B de 3 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]$$

- A-B de 4 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

- A-B de 5 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} [1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4}]$$

Fórmulas de Adams-Moulton

- Las fórmulas de Adams-Moulton son implícitas ($b_m \neq 0$) y tienen $a_{m-1} = 1$ y el resto de los $a_j = 0$:

$$y_{i+1} = y_i + h [b_m f(x_{i+1}, y_{i+1}) + b_{m-1} f(x_i, y_i) + \dots + b_0 f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})]$$

- A-M de 2 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [5f_{i+1} + 8f_i - 1f_{i-1}]$$

- A-M de 3 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}]$$

- A-M de 4 pasos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} [251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}]$$

- Orden de un método multipaso:
Es la cantidad de términos de la serie de Taylor que contiene la aproximación.
- El error de un método de orden m es $O(h^{m+1})$.
- Los métodos de Adams-Bashfort de m pasos, requieren m evaluaciones de funciones, y su error $O(h^{m+1})$. Luego son de orden m
- Los métodos de Adams-Moulton de m pasos, requieren $m + 1$ evaluaciones de funciones, y su error $O(h^{m+2})$. Luego son de orden $m + 1$
- Un método Adams-Bashfort de m pasos es comparable a un Adams-Moulton de $(m - 1)$ pasos.
- Es preferible un método de Adams-Moulton, ya que es más estable.

Métodos Predictor-Corrector

- Los métodos implícitos no siempre se pueden resolver fácilmente. La variable incógnita no está explicitada. Habría que resolverlo iterativamente (es una ecuación No Lineal).
- Un método práctico para utilizar las fórmulas implícitas es el denominado *Predictor-Corrector*.
- El mismo opera en dos pasos:
 - 1) Una *Predicción* del valor \tilde{y}_{i+1} mediante fórmulas explícitas;
 - 2) Una *Corrección* del valor y_{i+1} mediante una fórmula implícita, donde se usa el valor predicho \tilde{y}_{i+1} , del lado derecho del signo $=$.
- Una forma de Métodos Predictor-Corrector sería usar una fórmula de Adams-Bashfort (explícita) para predecir \tilde{y}_{i+1} ; y luego una fórmula de Adams-Moulton (implícita) para corrección.
- En general se usan fórmulas A-B y A-M del mismo orden.
- Además para calcular las condiciones iniciales necesarias (los m primeros valores de y_i), se usa un método de un paso (por ejemplo Runge-Kutta), del mismo orden que las fórmulas multipaso.

Estabilidad y convergencia

Convergencia

- Nos interesa analizar si los métodos utilizados son *convergentes*.
- Se dice que un método numérico que proporciona la solución y_i es *convergente*, si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_i = y(x_i)$$

donde h es el tamaño del paso; e $y(x_i)$ es la solución exacta. Y esto se da para todos los nodos x_i de la red usada.

- ¿Cómo puede verse si un método es convergente? (ya que la solución exacta no es conocida)

Consistencia

- Se dice que un método numérico es *consistente*, si la ecuación discretizada (o numerica), cuando $h \rightarrow 0$ coincide con la ecuación diferencial.
- Esto es equivalente a decir que el error de truncamiento local τ_i tiende a cero cuando $h \rightarrow 0$.

- Por ejemplo, al resolver la ecuación

$$y' = f(x, y)$$

con el metodo de Euler, la ecuación discreta queda

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

y vemos que cuando $h \rightarrow 0$ la estimación numérica en diferencias coincide con la derivada.

- Lo mismo se podría observar a partir de la serie de Taylor, donde el error al aproximar la derivada es:

$$\tau_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) = \frac{1}{2}hy''(\xi)$$

que tiende a cero cuando lo hace el tamaño de paso h .

- Para analizar la consistencia de los métodos multipaso se escribirá su fórmula general:

$$a_m y_i + a_{m-1} y_{i-1} + \dots a_0 y_{i-m} = h [b_m f_i + b_{m-1} f_{i-1} + \dots b_0 f_{i-m}]$$

- En las fórmulas que vimos, $a_m = 1$, $a_{m-1} = -1$, y los a_j restantes nulos.
- Además, si $b_m = 0 \rightarrow$ explícito; si $b_m = 1 \rightarrow$ implícito.
- Hay dos polinomios asociados a los coeficientes a_j y b_j :

$$\begin{cases} p(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0 \\ q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0 \end{cases}$$

- Se puede demostrar que un método multipaso es *consistente*, si:

$$\begin{cases} p(1) = 0 \\ p'(1) = q(1) \end{cases}$$

- La consistencia es posible de verificar en un método numérico. Sin embargo la consistencia no siempre implica que el método sea convergente. Es preciso analizar la *estabilidad* del método.

Considérese, por ejemplo, el método multipaso

$$y_{i+1} = 2y_{i-1} - y_i + h\left(\frac{5}{2}f_{i-1} + \frac{1}{2}f_{i-2}\right)$$

que, puede verificarse, es consistente.

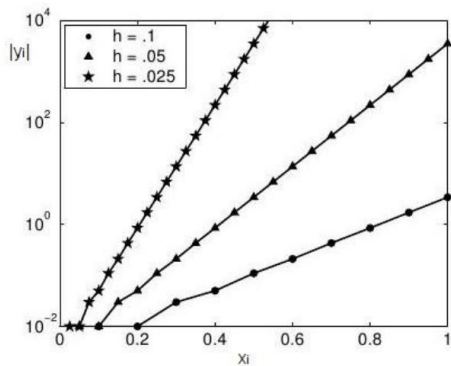
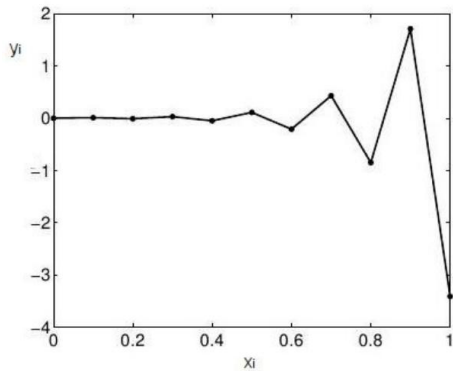
Si se resuelve con esa fórmula el problema $y' = 0$ con la condición inicial $y(0) = 0$, al ser $f = 0$ la fórmula queda

$$y_{i+1} = 2y_{i-1} - y_i$$

y para las condiciones $y_0 = 0$ y $y_1 = 0$ produce la solución exacta.

Sin embargo si las condiciones son $y_0 = 0$ y $y_1 = \epsilon$ la solución numérica “explota” luego de algunos pasos como se ve en la figura de la izquierda, donde se grafica y en función de x para $h = 0,1$ y $\epsilon = 0.01$. Esto no se resuelve achicando el tamaño del paso. por el contrario, en la figura de la derecha se grafica $|y_i|$ en función de x_i para diferentes tamaños de paso h .

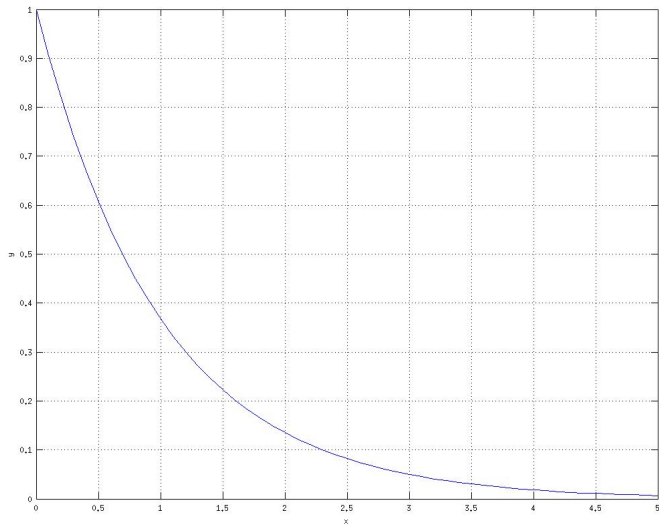
Consistencia



- La *estabilidad* hace referencia a que los errores a cada paso no se acumulen de manera que la solución crezca indefinidamente.
- Considérese el siguiente problema.
- Por ejemplo, el PVI

$$\begin{cases} y' = \lambda y & 0 \leq x \leq \infty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

donde $\lambda < 0$, tiene solución exacta: $y = e^{\lambda x}$ (graficada en la figura siguiente).



- Aplicando el método de Euler Progresivo:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i = y_i + \lambda h y_i = y_i(1 + \lambda h)$$

y dado que $y_0 = 1$

$$y_{i+1} = (1 + \lambda h)^{i+1}$$

- La solución exacta tiende a cero para $i \rightarrow \infty$, para que la solución numérica también lo haga es preciso que

$$|1 + \lambda h| < 1 \quad \text{o bien} \quad h < \frac{2}{|\lambda|}$$

- Para pasos $h > \frac{2}{|\lambda|}$, en este caso, el método de Euler Progresivo es inestable.

- Si se usa el método de Euler Regresivo:

$$y_{i+1} = y_i + h y'_{i+1} = y_i + \lambda h y_{i+1}$$

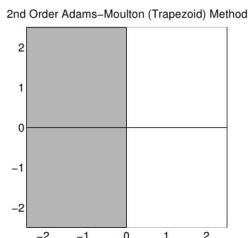
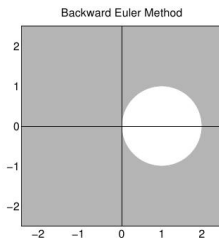
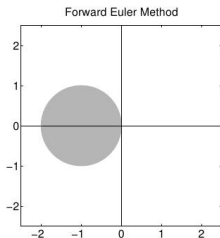
de donde

$$y_{i+1} = \left(\frac{1}{1 - \lambda h} \right)^{i+1}$$

que tiende a cero para $i \rightarrow \infty$ independientemente del valor de h .

- En forma similar puede mostrarse que también el método de Crank-Nicholson es estable independientemente del valor de h .
- El método de Euler Progresivo se dice *condicionalmente estable*, pues su estabilidad depende del tamaño del paso h .
- Los Métodos de Euler Regresivo y de Crank-Nicholson son *incondicionalmente estables*.

- Si λ puede ser complejo y se denomina $z = \lambda h$, las regiones de estabilidad para los métodos: de Euler progresivo, de Euler regresivo, y Crank-Nicholson se muestran en estas figuras en zonas grisadas



- Hay varias definiciones de estabilidad:
 - Un método se dice **absolutamente estable** cuando genera una solución del problema $y' = \lambda y$ con $y(0) = 1$, que tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$
 - Un método se dice **A-estable** cuando es absolutamente estable para cualquier tamaño de paso (o sea que es incondicionalmente estable). Esto requiere que la región de estabilidad sea todo el semiplano complejo de z con parte real negativa.
 - Un método se dice **cero-estable** cuando la solución se mantiene acotada para pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales

- Para un *método multipaso* es sencillo analizar la condición de cero-estabilidad.
- Si todas las raíces del polinomio característico $p(z)$ se encuentran en la región $|z| \leq 1$, y si cada raíz con $|z| = 1$ es simple, se dice que el método multipaso cumple la *condición de raíz*.
- Y todo método que cumple la condición de raíz, es cero-estable.

- Se ha indicado que la consistencia por si sola no garantiza la convergencia de un método multipaso.
- Se debe verificar su estabilidad frente a perturbaciones de los datos iniciales, es decir que sea cero-estable.
- Con esto, la convergencia de un método multipaso está garantizada por el siguiente teorema.
- Teorema:
Para que un método multipaso sea *convergente*, es necesario y suficiente que sea *cero-estable* y *consistente*.

- Ejemplo:

Para el método de Adams-Moulton de 2 pasos:

$$a_2 = 1; \quad a_1 = -1, \quad a_0 = 0; \quad b_2 = \frac{5}{12}; \quad b_1 = \frac{8}{12}, \quad b_0 = -\frac{1}{12}$$

$$p(z) = z^2 - z$$

$$q(z) = \frac{5}{12}z^2 + \frac{8}{12}z - \frac{1}{12}$$

- Las raíces de p : $z_1 = 1$; $z_2 = 0$

luego es cero-estable.

- $p(1) = 0$

$$p'(1) = 1$$

$$q(1) = 1$$

luego es consistente.

- Por ello es convergente

Resumiendo:

- Un método **de un paso**, si es consistente, es convergente.
- Si el método es **incondicionalmente estable**, el tamaño del paso h estará determinado por requisitos de precisión. El error de truncamiento global depende de h y disminuye con él.
- Si el método tiene **estabilidad condicional**, entonces el tamaño del paso h **debe** estar por debajo del tamaño crítico, para que haya estabilidad. A partir de allí, se puede disminuir por requisitos de precisión.
- Un método **multipaso**, debe ser consistente y cero-estable, para que sea convergente.
- A partir de allí, vale lo indicado para los métodos de un paso si la estabilidad fuese condicional.

Sistemas de EDO

- La solución de un sistema de EDO:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \\ \dots \\ y_k' = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_k) \end{cases} \implies \mathbf{Y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{Y})$$

si se organizan las funciones incógnitas en un vector:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

puede plantearse con las fórmulas vistas.

- Así la solución en el paso $i + 1$ será:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \phi(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{i-1}, \dots)$$

donde ϕ es la función del método multipaso (o de un paso) utilizado.

EDO de orden superior

- Por ejemplo, si se tiene una EDO de segundo orden:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = \bar{y}_0 \\ y'(0) = \bar{y}'_0 \end{cases}$$

puede reducirse a un sistema de EDO de primer orden mediante definición de nuevas variables. Si llamamos $z_1 = y$ y $z_2 = y'$:

- Así el problema anterior es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = f(x, z_1, z_2) \end{cases}$$

acompañado de las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} z_1(0) = \bar{y}_0 \\ z_2(0) = \bar{y}'_0 \end{cases}$$

- Así pueden usarse los métodos vistos para ec. de primer orden, en la resolución de ecuaciones de orden superior.

En este capítulo hemos visto:

- Qué son los PVI
- Cómo garantizar que un PVI esté bien planteado.
- Métodos numéricos para resolver PVI
 - Métodos de un paso
 - Método de Euler
 - Metodos de Taylor
 - Metodos de Runge Kuta
 - Métodos multipaso
 - Método de Adams-Bashfort
 - Metodo de Adams-Multon
 - Metodo Predictor-Corrector
- Estabilidad y convergencia
- Sistemas de EDO