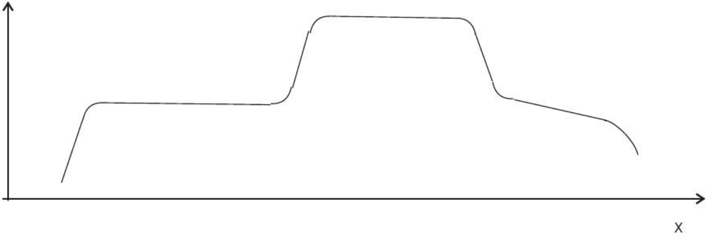
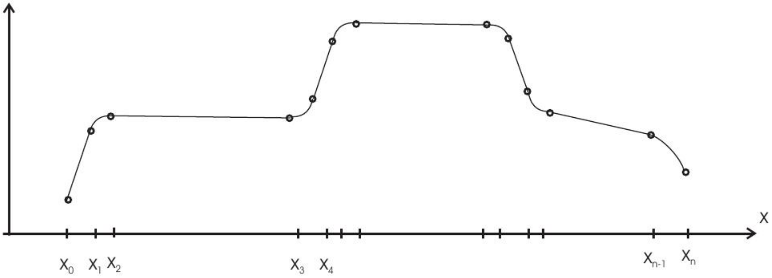
Funciones *splines* (o trazadores)

- Ya se ha visto cómo construir polinomios que aproximen una función en un intervalo $[x_0, x_n]$
- Si hay grandes cambios de curvatura en partes de la función puede ser que los polinomios globales se desvíen mucho de la curva a representar.

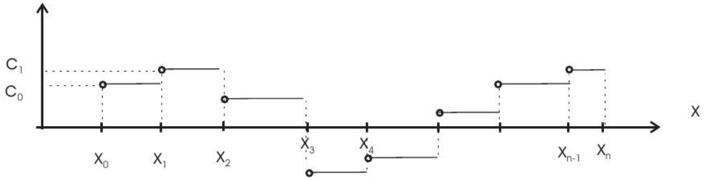


- Una posibilidad es descomponer la curva en subintervalos y usar polinomios diferentes para cada subintervalo $\rightarrow$ *aproximación segmentaria*

- Se define una serie de *segmentos* separados por *nudos*: $x_0, x_1, \ldots x_n$
- Una *función spline de grado* k, $S(x)$, con nudos en $x_0, x_1, \ldots x_n$, es una que satisface:
  - En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i)$, $S(x)$ es un polinomio de grado $\leq k$
  - $S(x)$ tiene derivadas de orden $k-1$ continuas en $[x_0, x_n]$.

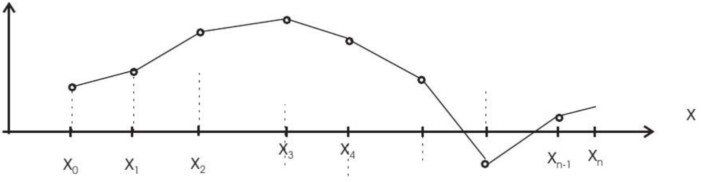


Funciones *splines* de grado 0



$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = C_0 & x \in [x_0, x_1) \\ s_1(x) = C_1 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) = C_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Funciones *splines* de grado 1



$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0 x + b_0 & x \in [x_0, x_1) \\ s_1(x) = a_1 x + b_1 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Funciones *splines* cúbicas

- Una función muy usada son las splines cúbicas

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) & x \in [x_0, x_1) \\ s_1(x) & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

  donde $S_i(x)$ es polinómio cúbico
- Estas funciones poseen continuidad hasta la derivada segunda

- Condiciones:

	i)	$S_i(x_i) = f(x_i)$	$(i = 0, 1, \ldots n-1)$	n ecuac.
cont de f	ii)	$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$	$(i = 1, 2, \ldots n-1)$	$n-1$ ecuac.
cont de f'	iii)	$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$	$(i = 1, 2, \ldots n-1)$	$n-1$ ecuac.
cont de f''	iv)	$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$	$(i = 1, 2, \ldots n-1)$	$n-1$ ecuac.
	v)	$S_{n-1}(x_n) = f(x_n)$		1 ecuac.

I y V nos dan igualdad en los extremos y tienen que ver con la naturaleza de los datos

Total: $4n-2$ ecuac.

- Cada función $S_i(x)$ posee 4 coeficientes.
- Luego hay $4n-2$ ecuaciones con $4n$ incógnitas. Faltan 2 ecuaciones.

Para cada Si(x) = di x^3 + cix^2 + . . . + ai, donde los coeficicoentes son las incognitas
Como cada polin tiene 4 coef entonces, debo encontrar 4*n coef.

Las ecuaciones a agregar pueden ser:

- Condiciones de frontera libre
  - $S''(x_0) = 0$ significa que en los extremos no hay curvatura
  - $S''(x_n) = 0$

  Dan lugar a las llamadas *spline cúbica natural*
  Geométricamente: la curvatura es nula en los extremos
- Condiciones de frontera sujeta
  - $S'(x_0) = f'(x_0)$
  - $S'(x_n) = f'(x_n)$

  En los extremos la aproximacion tiene la misma pendiente que la f
  como inconveniente se necesita conocer la derivada en los extremos
  en caso contrario usar spline cubico natural

  Dan lugar a las llamadas *spline cúbica sujeta*
  Puede aproximar mejor a la función, pero precisa conocer las derivadas primeras en los extremos.

Construcción de *splines* cúbicas

- Polinomio cúbico:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \qquad i = 0, 1, 2 \ldots n - 1$$

- Las condición (i):

$$S_i(x_i) = a_i = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2 \ldots n - 1$$

De aquí se obtiene los valores de n coeficientes a_i.

- Se define:

$$a_n = f(x_n)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

hi es el intervalo

- Las condición (ii):

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) \qquad i = 1, 2 \ldots n-1$$

$$a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + d_{i-1}h_{i-1}^3 = a_i \qquad i = 1, 2 \ldots n-1 \quad (1)$$

- Se define:

$$b_n = S'(x_n)$$

- La derivada.

aca ya conocemos los b

$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$$

- Las condición (iii):

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \qquad i = 1, 2 \ldots n-1$$

$$b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2 = b_i \qquad i = 1, 2 \ldots n-1 \tag{2}$$

- Se define:

$$c_n = S''(x_n)/2$$

por conveniencia

- La derivada segunda.

aca ya conocemos los ci y di

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

- Las condición (iv):

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \qquad i = 1, 2 \ldots n-1$$

$$c_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1} = c_i \qquad i = 1, 2 \ldots n-1 \tag{3}$$

- Despejando d_{i-1} de las ec. (3):

$$d_{i-1} = (c_i - c_{i-1})/3h_{i-1} \tag{a}$$

y reemplazando en (1) y (2):

$$a_i = a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + (2c_{i-1} + c_i)h_i^2/3 \tag{4}$$

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i) \tag{5}$$

Despejando b_{i-1} de las ec. (4):

$$b_{i-1} = (a_i - a_{i-1})/h_{i-1} - (2c_{i-1} - ci)h_{i-1}/3 \tag{b}$$

y reemplazando en (5):

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) \quad (6)$$

para $i = 1, 2 \ldots n-1$ **valida solo para esos i, pq fue contruida para los nodos internos**

Que es un sistema de $n-1$ ecuaciones, en c_i.

Agregando las dos ecuaciones adicionales, por ejemplo las condiciones de frontera libre:

$$c_0 = 0$$

esto para los c que no podemos obtener para los nodos internos

$$c_n = 0$$

- El sistema queda

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

La matriz: matriz de n+1 ecuaciones

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene forma tridiagonal.

Es estrictamente diagonal dominante, tambien en simetrica si descartamos el primer y ultimo renglon quedandonos con n-1 ecuaciones

para resolver el sistema obtengo los c y luego reemplazo por eso en la ecuacion a para obtener los b, luego en la ecuacion b para obtener los a

- El vector de términos independientes:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Se puede demostrar que el sistema de ecuaciones tiene solución y que ésta es única.
- Calculados los c_i, con las ecuaciones (a) y (b) se calculan d_i y b_i.

Ejemplo:

Las figuras muestran distintos interpolantes para 6 puntos:
a) interpolación lineal; b) polinomio interpolador de 5^o grado; c) polinomios de Hermitte, d) splines cúbicas.