Ajuste de curvas por mínimos cuadrados

- ¿ Cómo hallar los a_k?

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

el error

$$E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - P_n(x_i))^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} y_i P_n(x_i) + \sum_{i=1}^{m} (P_n(x_i))^2$$

$$E = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} y_i (\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j) + \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k x_i^{j+k})$$

- El error

$$E = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k (\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k})$$

- Para minimizarlo:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad j = 0, 1, \ldots n$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k (\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}) = 0 \quad j = 0, 1, \ldots n$$

- Queda un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas (a_k)

- Desarrollando el sistema:

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1$$

$$\ldots$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + \ldots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n$$

- Estas se denominan *Ecuaciones Normales* y se pueden escribir:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Resolviendo este sistema lineal obtengo los coeficientes del pol

- En las ecuaciones normales:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

  y los elementos de la matriz $\mathbf{K}$ son:

$$k_{j,k} = \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

- Resolviendo el sistema se obtienen los a_k
- Si los x_i son distintos, el sistema de ecuaciones normales tiene solución única.

Ejemplo

Encontrar una recta que ajuste los siguientes puntos:

x	0	1	2	2.5	3
y	2.9	3.7	4.1	4.4	5

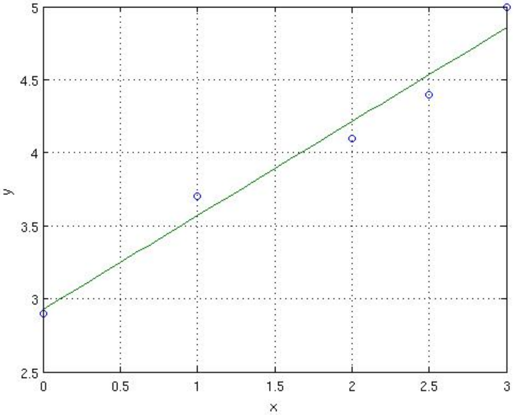
- $m = 5$, $n = 1$ y el sistema:

$$a_0\, m + a_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum y_i x_i$$

- $\sum x_i = 8.5$, $\sum y_i = 20.10$, $\sum x_i^2 = 20.25$, $\sum y_i x_i = 37.9$
- de donde

$$y = a_0 + a_1\, x = 2.9267 + 0.6431\, x$$



Es la recta que pasa mas cerca de los datos en direccion vertical

```
xx = linspace (0,10,200); --> yy = polyval(p,xx); --> plot( x,y,' * ',xx,yy )

Si no quiero definir un vector defino F= @(x) polyval(P,x); %para luego hacer
                                         plot(x,y,' * ', xx,F(xx))
```

Ajuste por funciones no polinómicas

- Se puede proponer funciones no polinómicas para ajustar los datos. Por ejemplo, una función exponencial, o una potencial:

Se puede calcular utilizando polyfit?
x = n+1
y = n+1
p = polyfit(x,y,1) devuelve un vector de 1 componente
que corresponden a los coeficientes de x cuadrado
p(2) -> coef x
p(3) -> term indp

$$\hat{y}(x) = c\, e^{ax}$$

$$\hat{y}(x) = c\, x^{a}$$

- Procediendo igual que antes se llega ahora a un sistema no lineal.
- Para linealizar el problema se suele trabajar con logaritmos:

$$\ln \hat{y}(x) = \ln c + a\, x$$

$$\ln \hat{y}(x) = \ln c + a\, \ln x$$

(Pero en este caso no se ajusta por minimos cuadrados la función sino su logaritmo. Puede ser muy diferente)

Ejemplo

Encontrar una curva $ae^{(bx)}$ que ajuste los siguientes puntos:

x	1.2	2.8	4.3	5.4	6.8	7.9
y	7.5	16.1	38.9	67.0	146.6	366.2

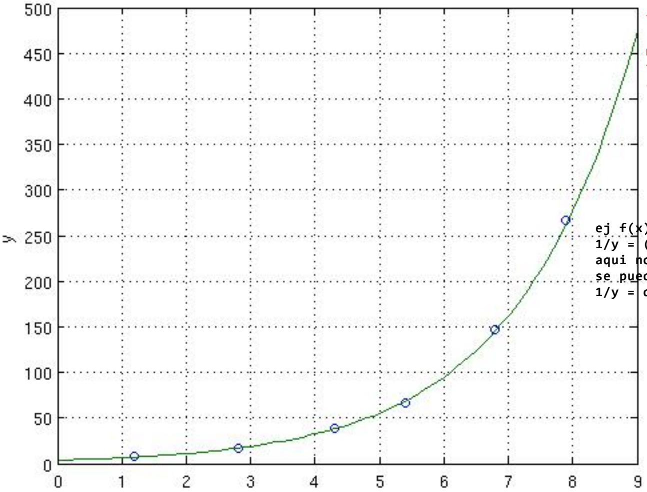
- el problema es : $\log y = \log a + bx = c + bx$

$$c\ m + b \sum x_i = \sum \log y_i$$

$$c \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum \log y_i x_i$$

- de donde

$$y \;=\; a\ e^{bx} \;=\; 3.7889\ e^{0.5366x}$$




```
Tenemos algo exp
si queremos aproxi
mar entonces necesi-
tamos transformarlo
a algo polynomico
```

```
ej f(x) = a/(b*x+c)
1/y = (b*x+c)/a
aqui no se puede transformar
se puede tomar
1/y = dx + e
    d = b/a , e = c/a
```

para aproximar una funcion que no es un pol y = c*e¨(a*x)

ln y = ln(c) + a*x

Y=log(y)

P(2) = log(c)

exp(P(2)) = c

P(2) = polyfit(log(x),log(y),1)