Conteo de operaciones solución con descomposición LU

La factorización

- Para la primera fila pivotal se requiere una división, $(n-1)$ multiplicaciones y $(n-1)$ sumas, para una fila. Tradicionalmente se computan como flops. (flop = FLoating point OPerations) la multiplicación o división, ya que tardan más que la suma o resta. Así en esa primera fila se tienen n flops y eso se repite para $(n-1)$ filas o sea: $n(n-1)$. Es decir que en la primera fase de descomposición se realizan del orden de n^2 flops.
- A medida que avanza el proceso (la fila pivotal) se hacen las mismas cuentas con matrices cada vez menores. En total:

$$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+2^2 \;=\; \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \;\simeq\; \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2 \text{ flops.}$$

(Aquí se usó el hecho de que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ *)*

- Si n es grande, n^3 es dominante, y entonces la factorización LU requiere $\sim \frac{1}{3}n^3$ flops.

Conteo de operaciones solución con descomposición LU

La actualización del vector **b**

- Son $(n-1)$. En el primero hay $(n-1)$ flops; en el segundo $(n-2)$; en el tercero $(n-3)$; y así.
  Luego
  $$(n-1)+(n-2)+\ldots+1 \;=\; \frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

(Aquí se usó el hecho de que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ *)*

La retrosustitución

- Hay 1 flop para calcular la incógnita x_n; 2 flops para calcular x_{n-1}; etc. Luego son:
  $$1+2+3+\ldots+n \;=\; \frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

Conteo de operaciones solución con descomposición LU

<u>En resumen:</u>

- para factorizar: $\frac{1}{3}n^3$
- para las 2 sustituciones: n^2

Por eso, si hay varios vectores **b**, conviene hacer la factorización de la matriz, una sola vez ($\frac{1}{3}n^3$ flops) y luego hacer varias veces las sustituciones (n^2 flops).