Cálculo Numérico 2025
Trabajo Práctico 4

Solución de ecuaciones no lineales

Ejercicio 1. (Aula)

(a) Realice cuatro iteraciones con el método de la bisección para obtener una aproximación a una de las raíces de la ecuación $f(x) = 3(x+1)(x-0.5)(x-1)$ en el intervalo $[-2, 1.5]$. ¿A cuál de las raíces converge el método? Luego estime una cota para la precisión del resultado obtenido.

(b) Implemente una función de Octave `function [x,h] = biseccion(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero x de la ecuación no lineal homogénea $f(x) = 0$ y la convergencia `h` usando el método de la bisección, para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax` y los extremos del intervalo inicial de búsqueda `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`.

(c) Obtenga una cota para el número de iteraciones que se requieren para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^{-3} a la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que se encuentra en el intervalo [1,4]. Obtenga una aproximación de la raíz con esta exactitud mediante el método de la bisección.

(d) Escribir una función `x=rcubica(a)` para calcular la raíz cúbica de a con un error relativo menor a 10^{-12} usando bisección. En la misma debe hacer una llamada a la función implementada en (b).

Ejercicio 2. (Aula)

(a) Implemente una función de Octave `function [x,h] = puntofijo(g,x0,kmax,tol)` que devuelva la solución de la ecuación $g(x) = x$ y la convergencia `h`, resolviendo el problema de punto fijo asociado,

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad k \geq 0$$

hasta que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < tol$, para una tolerancia `tol` dada, un número máximo de iteraciones `kmax`, y una abscisa inicial `x0`.

(b) La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz única en $[1, 2]$. Dadas las siguientes funciones g_1 y g_2, proporcione los resultados del método de iteración de punto fijo programado en el item (a) para ambas funciones, considerando $p_0 = 1.5$, $tol = 1e-3$ y como criterio de convergencia $|p_n - p_{n-1}| < tol$. Analice los resultados según el teorema correspondiente.

$$(i)\ \ x = g_1(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}, \qquad (ii)\ \ x = g_2(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$$

(c) Indique si las cotas de error dadas por el Corolario 2.4 del libro de Burden son válidas para las funciones g_1 y g_2 propuestas en el item (b). Si lo fueran, aplíquelas para verificar los resultados obtenidos numéricamente.

Ejercicio 3. Consideremos la ecuación

$$x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0.$$

(a) Verificar que $\alpha \in [1, \frac{3}{2}]$ es solución de esa ecuación si y solo si $\alpha = g_i(\alpha)$ para cada una de las funciones $g_i(x)$ siguientes. Es decir, $\alpha \in [1, \frac{3}{2}]$ es solución de esa ecuación si y solo si α es un punto fijo de g_i.

$$g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4} \qquad g_2(x) = \left(\frac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$$

$$g_3(x) = \left(\frac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2} \qquad g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$$

(b) Verificar en Octave con cuáles de ellas el método de punto fijo converge o no comenzando de $p_0 = 1$. Además, determine con cuál de ellas se obtiene una convergencia más rápida a la solución.

(c) *Opcional:* mirando el gráfico de $|g_i'(x)|$ en el intervalo $[1, \frac{3}{2}]$, corrobore si lo observado experimentalmente coincide con lo esperado desde el punto de vista teórico.

Ejercicio 4. (Aula)

(a) Implemente una función de Octave `function [x,h] = newton(f,df,x0,kmax,tol)` que devuelva un cero x de $f(x) = 0$ y la convergencia `h` usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y una abscisa inicial `x0`. Nota: `df` es una función correspondiente a la derivada de `f`.

(b) Implemente una función en Octave `function [x,h] = secante(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero de $f(x) = 0$ y la convergencia `h` usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y dos abscisas iniciales `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`.

(c) Calcular todas las raíces positivas de función $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(1 + x^2) - 1$ que son menores que 5, con 10 dígitos correctos. Para ello utilice los métodos de bisección, Newton y secante. ¿Cuántas iteraciones fueron necesarias en cada caso? ¿Qué método le parece más conveniente y por qué? Piense en algunas ventajas y desventajas de los mismos.

Ejercicio 5. (Aula) Use el método de Newton para aproximar, con una exactitud de 10^{-4}, el valor de x que en la gráfica de $y = x^2$ produce el punto más cercano a $(1, 0)$. *Ayuda:* Reduzca al mínimo $[d(x)]^2$ donde d es la función distancia de la gráfica al punto.

Ejercicio 6. La ecuación de estado de un gas (la cual relaciona la presión p, el volumen V y la temperatura T) está dada por

$$[p + a(N/V)^2](V - Nb) = kNT$$

donde a y b son dos coeficientes que dependen del gas en particular que hayamos considerado, N es el número de moléculas que se encuentran en el volumen V y k es la constante de Boltzmann.

Asumiendo que el gas es dióxido de carbono (CO_2), los coeficientes a y b toman los siguiente valores: $a = 0.401\,\text{Pa}\cdot\text{m}^6$ y $b = 42.7e-6\,\text{m}^3$. Encuentre el volumen que ocupan 1000 moléculas de dicho gas a una temperatura $T = 300\,\text{K}$ y presión $p = 3.5e+7\,\text{Pa}$ mediante el método de bisección y el método de Newton, con una tolerancia de $1e-12$ (la constante de Boltzmann vale $k = 1.3806503e-23\,\text{J/K}$).

Ejercicio 7. (Aula) Se sabe que la función $f(x) = x(\ln(x + 3) - 17) - 1$ tiene un único cero en $(0, \infty)$. Diseñar un algoritmo de búsqueda, que comience en $[0, 1]$ y vaya duplicando el extremo derecho, hasta encontrar un intervalo donde seguramente esté el cero. A partir de ese intervalo, aplicar bisección para aproximar el cero con un **error absoluto** menor a $1e2$. A partir de ese valor, realizar la búsqueda con el método de Newton, para hallar el cero con un **error relativo** menor a $1e-12$. Analice los resultados obtenidos.

Ejercicio 8. (Aula) La energía térmica total de un dispositivo está dada por la expresión $E(t) = ((t+\frac{1}{3})^3 + \frac{1}{3})e^{-t}$, para cada instante de tiempo t.

(a) Determinar los instantes de tiempo en los que la energía del dispositivo es igual a 1.5, con 5 dígitos de precisión.

(b) Determinar la máxima energía del sistema y en qué tiempo ocurre, utilizando la misma precisión que en item anterior.

(c) Determinar el instante de tiempo en donde se da la máxima tasa de crecimiento instantánea de la energía respetando la precisión anterior.

Justificar cuál método eligió para resolver cada inciso, destacando las ventajas del mismo.

Ejercicios sugeridos: **S.2.1**:1-14,17,18; **S.2.2**:1-15,19,20,23; **S.2.3**: 1-10,12-16,19-24,27,30; **S.2.4**:1-6,8,9.