Problema mal planteado

Ejemplo:

- El problema de hallar la raiz de

$$p(x) \;=\; x^4 - x^2(2a-1) + a(a-1)$$

  es mal planteado.
- En efecto:
  - Si $a \geq 1$ tiene 4 raices reales
  - Si $a \in [0,1)$ tiene 2 raices reales
  - Si $a < 0$ no tiene raices reales
- La solución varía en forma discontinua con el dato a.

Condicionamiento

- Si con δd se indica una variación en los datos de entrada, y con δx la variación acorde de la solución, se puede definir un *numero de condición*:

$$\kappa \;=\; \sup_{\delta d} \frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta d\|/\|d\|}$$

  donde $\|.\|$ es una *norma* (medida escalar).
- Si $\kappa >> 1$ el problema está *mal condicionado*.
- Si $\kappa \sim 1$ el problema está *bien condicionado*.
- Ejemplo:

  Para el problema de resolver un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *se puede definir un número de condición para la matriz:* $\kappa = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$

Condicionamiento

Ejemplo:

- Se desea hallar un polinomio cúbico

$$y = c_1\, x^3 + c_2\, x^2 + c_3\, x + c_4$$

  que pase por los 4 puntos: (2,8), (3,27), (4,64). (5,125). (evidentemente este polinomio es $y = x^3$).

- La técnica para hallarlo se vera más adelante, pero conduce a resolver el SEAL (Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales):

$$\begin{bmatrix} 20514 & 4424 & 978 & 224 \\ 4424 & 978 & 224 & 54 \\ 978 & 224 & 54 & 14 \\ 224 & 54 & 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20514 \\ 4424 \\ 978 \\ 224 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento

Ejemplo: (cont.)

- La solución exacta del sistema de ecuaciones es: $[1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$.
- Una computadora con 9 cifras da:
  $[1.000004 \quad -0.000038 \ \ 0.000126 \quad -0.000131]$
  que es cercano a la solución.
- Pero si el numero a_{11} de la matriz, en lugar de ser 20514 fuese 20515, la misma computadora da:
  $[0.642857 \ \ 3.75000 \quad -12.3928 \ \ 12.7500]$
- El resultado es muy sensible a los datos, y no es confiable. Esto se dió porque el número de condición es muy alto.
- El número de condición de la matriz en este caso es $\kappa = 3.1875e+07$

Solución numérica

- Sea el problema (1) bien planteado

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{hallar } x \text{ tal que} \\ F(x,d) \;=\; 0\end{array}} \qquad (1)$$

- Hay métodos numéricos que se basan en construir una secuencia de problemas aproximados:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{hallar } x^{(k)} \text{ tal que} \\ F^{(k)}(x^{(k)},d^{(k)}) \;=\; 0 \qquad k \geq 1\end{array}} \qquad (2)$$

  con la expectativa que $x^{(k)} \to x^*$ para $k \to \infty$, donde x^* es la solución exacta de (1).

- Para que se dé esto debe ser $d^{(k)} \to d$ y $F^{(k)} \to F$ cuando $k \to \infty$.

Ejemplo:

:

El metodo de Newton-Raphson para hallar cero de una función, resuelve una sucesión de problemas aproximados del tipo:

$$f^{(k)}(x^{(k)}) \;=\; x^{(k)} - x^{(k-1)} + \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} \;=\; 0$$