Pivoteo

- La factorización descrita puede fallar si alguno de los pivotes (a_{kk}) es cero, o un número muy pequeño.
- Ejemplo:

  Sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{con } \epsilon << 1$$

  aplicando el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 0 & 1 - \epsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \epsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

Pivoteo

y de allí puede obtenerse

$$x_2 = \frac{2 - \epsilon^{-1}}{1 - \epsilon^{-1}} \simeq 1$$

$$x_1 = (1 - x_2)\ \epsilon^{-1} \simeq 0$$

La solución correcta debería ser

$$x_1 = \frac{1}{1 - \epsilon} \simeq 1$$

$$x_2 = \frac{1 - 2\epsilon}{1 - \epsilon} \simeq 1$$

La solución numérica es exacta para x_2, pero no para x_1.
El problema se da cuando a_{kk}, de la diagonal, es pequeño frente a los otros coeficientes de la columna.
Si se intercambian filas, no hay error numérico y los resultados son correctos.

Pivoteo

- Este problema puede remediarse intercambiando las filas de la matriz para evitar que ese término (nulo o muy pequeño) quede en la diagonal.
- Hay distintas maneras de realizar esos cambios en la matriz. Se puede hacer *pivoteo total* o *parcial*
- El más sencillo de hacer es el pivoteo parcial, que se describe a continuación.
- En cada etapa se busca en la columna, por debajo del pivot, el elemento de mayor valor absoluto. Esa fila se intercambia con la actual.
- En realidad las filas no se intercambian físicamente. Se mantiene un vector $\mathbf{r}$ que indica el orden en que se ha realizado la factorización.
- En el pivoteo total (que no sera descripto aquí) la busqueda se hace no sólo sobre las filas, sino también sobre las columnas de la submatriz debajo del pivote.

Factorización kij con pivoteo parcial

```
for i = 1,...n do
        r_i = i
end
for k = 1,...n − 1 do                                         fila pivotal
        buscar p ∈ {k, k + 1,...n}
                tal que |a_{r_p k}| = max_{k≤i≤n} |a_{r_i k}|
        if a_{r_p k} = 0  →  mensaje de error
        if r_p ≠ r_k
                        z ← r_p
                        r_p ← r_k
                        r_k ← z

        for i = k + 1,...n do
                s  ←  a_{r_i k}/a_{r_k k}
                a_{r_i k}  ←  s
                for j = k + 1,...n do
                        a_{r_i j}  ←  a_{r_i j} − s a_{r_k j}
                end
        end
end
```

Solución con pivoteo parcial

- El intercambio de filas equivale a afectar a la matriz con una matriz de permutación $\mathbf{P}$, que es el producto de las matrices de permutación de cada paso k.
- De modo que la factorización se ha hecho para

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$

- El sistema a resolver es

$$\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$$

- y puede escribirse:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

Pivoteo parcial escalado

- A veces el pivoteo parcial no alcanza. Si el término de la diagonal es pequeño frente a los de su fila, no debería ser pivote.
- En el pivoteo parcial escalado se elige el mayor valor absoluto de los a_{ij} en cada fila

$$s_i = \max_{j=1,n} |a_{ij}|$$

la fila pivotal se elige:

se busca $p \in \{k, k+1, \ldots n\}$ tal que $\dfrac{|a_{r_p k}|}{s_{r_p}} = \max_{k \leq i \leq n} \dfrac{|a_{r_i k}|}{s_{r_i}}$

Algoritmo fact. LU con pivoteo parcial escalado

Input: n, $\mathbf{A}$
Output: $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ (sobre $\mathbf{A}$)
for $i = 1, 2, \dots n$ do
    $s_i = \max_{i \le j \le n} |a_{ij}|$
    $r_i = i$
end
for $k = 1, 2, \dots n-1$ do   *fila pivotal*
    se busca $p \in \{k, k+1, \dots n\}$ tal que $\dfrac{|a_{r_p k}|}{s_{r_p}} = \max_{k \le i \le n} \dfrac{|a_{r_i k}|}{s_{r_i}}$
    si $a_{r_p k} = 0 \ \rightarrow$ mensaje de error y termina.
    si $r_p \neq r_k$
        $x \leftarrow r_p$
        $r_p \leftarrow r_k$
        $r_k \leftarrow x$
    for $i = k+1, k+2, \dots n$ do
        $m \ \leftarrow \ a_{r_i k}/a_{r_k k}$
        $a_{r_i k} \ \leftarrow \ m$
        for $j = k+1, k+2, \dots n$ do
            $a_{r_i j} \ \leftarrow \ a_{r_i j} - m \ a_{r_k j}$
        end
    end
end