Solución de Ecuaciones No Lineales de una variable

Introduccion

Ejemplos de ecuaciones no lineales

a) Crecimiento de poblaciones

- Designaremos con $N(t)$ número de individuos de una poblacion (sean animales, plantas, bacterias, hombres, etc.). Ese número $N(t)$ es función del tiempo t. La cantidad de individuos que nacen por unidad de tiempo (en un año, en una hora, etc.) es proporcional a N:

  $$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t)$$

  donde λ se conoce como tasa de natalidad.
- Si se tiene en cuenta, además el aporte por migraciones μ, por unid. de tiempo, la ecuación queda:

  $$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) + \mu \qquad (1)$$

  que es la ecuación que gobierna el crecimiento poblacional.

Ejemplos de ecuaciones no lineales

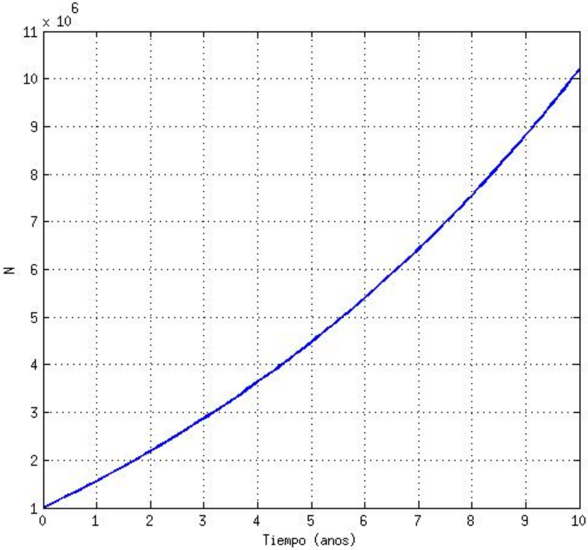
- La solución exacta de esa ecuación diferencial es:

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

  donde N_0 es la población inicial (en $t = 0$)

- La curva de crecimiento de población para una tasa de crecimiento $\lambda = 0.1$, con una población inicial de un millón y un aporte migratorio de 435000 individuos por año se muestra en la figura siguiente.

Ejemplos de ecuaciones no lineales

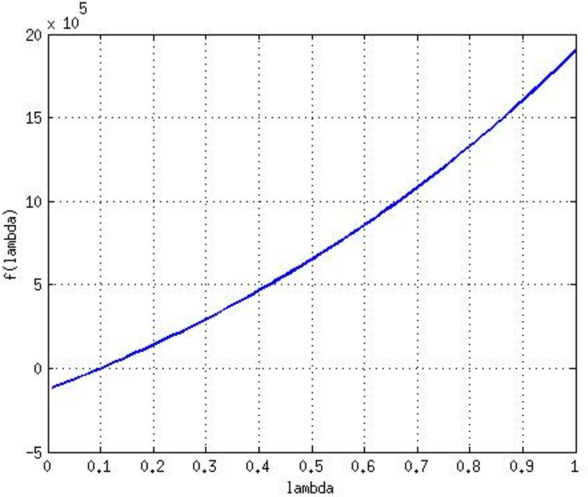


Ejemplos de ecuaciones no lineales

- Si no se conoce la solucion exacta, puede hallarse una *solución numérica*, a partir de la ecuación diferencial (1) y una condición inicial N_0, resoviendo un *Problema de Valor Inicial* (Tema 7 de la materia).
- Plantearemos aquí otro problema: Conocida la cantidad de individuos N_0 y $N(t_1)$, en tiempos t_0 y t_1, y la tasa de migraciones μ, se desea conocer la tasa de natalidad λ.
  Para ello de la ec. de arriba,
  $$N(t_1) = N_0\, e^{\lambda t_1} + \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_1} - 1)$$
  hay calcular el λ que produce la igualdad. El resto de las variables son conocidas.
- Esto equivale a resolver la ecuación no lineal
  $$f(\lambda) = 0$$
  con
  $$f(\lambda) = N(t_1) - N_0\, e^{\lambda t_1} - \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_1} - 1)$$

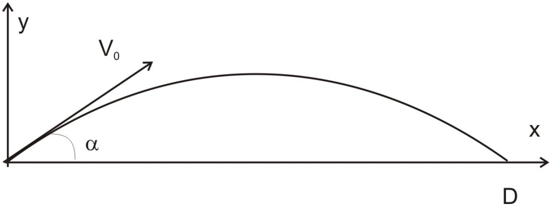
Ejemplos de ecuaciones no lineales

Función $f(\lambda)$ en función de λ



Ejemplos de ecuaciones no lineales

b) Tiro oblicuo



- Se desea conocer el ángulo α para que un disparo que sale con velocidad V_0 alcance un objetivo a una distancia D.
- Las ecuaciones:

	s/x	s/y
aceler.	$a_x = 0$	$a_y = -g$
veloc.	$v_x = V_0\ cos\alpha$	$v_y = -g\ t + V_0\ sin\alpha$
despl.	$d_x = V_0\ cos\alpha\ t$	$d_y = h = V_0\ sin\alpha\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$

- El tiempo de impacto se obtiene de la ecuación para el desplazamiento vertical, cuando $h = 0$:

$$t_1 = \frac{2\ V_0\ sin\alpha}{g}$$

- La distancia horizontal recorrida en t_1:

$$d = \frac{2\ V_0^2\ sin\alpha\ cos\alpha}{g}$$

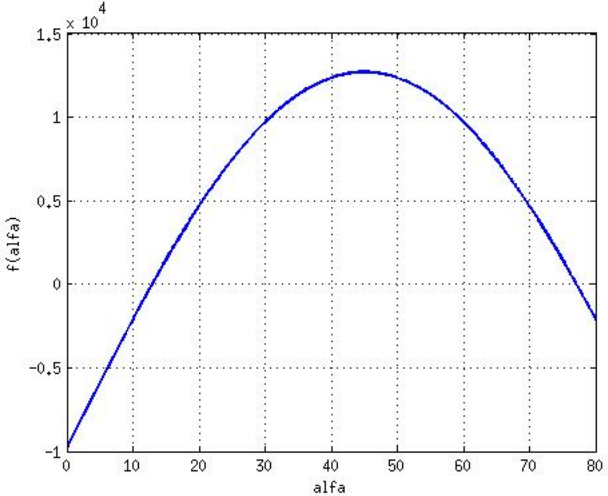
e igualando a la distancia objetivo D se obtiene la ecuación:

$$f(\alpha) = 2\ V_0^2\ sin\alpha\ cos\alpha - D\ g = 0$$

de la cual queremos calcular α.

Ejemplos de ecuaciones no lineales

La función $f(\alpha)$ en función de α, para una velocidad inicial $V_0 = 150m/s$ y una distancia del objetivo $D = 1000m$ esta graficada a continuación.



Ecuaciones no lineales

- Los ejemplos presentados son algunos de los innumerables problemas que se nos plantean donde queremos despejar, de una ecuación, una variable que no podemos escribir en forma explícita.
- Estos problemas pueden ser planteados como:

> Encontrar x
> tal que $f(x) = 0$

  El valor de x que satisface esa ecuación se llama *raiz* de la ecuación, o también *cero* de la función f.
- Hay muchos métodos numéricos para hallar raices de ecuaciones. Veremos aquí:
  - Método de la bisección
  - Iteración de punto fijo
  - Método de Newton-Raphson
  - Método de la secante
  - Método Regula Falsi