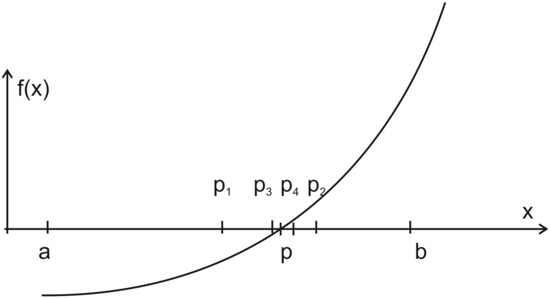
Método de la Bisección

ó Método de la Búsqueda Binaria

- Sea $f(x)$ contínua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos. Entonces, por el teorema del valor medio, existe $a < p < b$ tal que $f(p) = 0$.



- El Método de la Bisección procede buscando una raiz propuesta en la mitad del intervalo (a,b). Y repitiendo iterativamente este procedimiento.

Método de la Bisección

Dados: $f(x)$, a, b, Tol_1, (Tol_2), $Kmax$
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \;\leftarrow\; a + \frac{(b-a)}{2}$
    4) si $f(p) < Tol_1$, o bien $\frac{b-a}{2} < Tol_2 \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) si $f(a)f(p) > 0$ $a \leftarrow p$
        sino $b \leftarrow p$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No se halló la raiz en* K_{max} *iteraciones*'
Parar.

Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:
  1) $|p_n - p_{n-1}| \leq Tol_1$
  2) $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} \leq Tol_2$
  3) $|f(p_n)| \leq Tol_3$
- El primer criterio considera el valor absoluto de la diferencia entre dos iteraciones. Y el segundo su valor relatvo. En este último caso la tolerancia Tol_2 es independiente de las unidades y significado físico de las variables. En cualquiera de estos casos puede ser que la diferencia sea pequeña pero aún se esté lejos de la solución.
- El tercer criterio examina el error en $f(p)$. También, dependiendo de la función, puede ser que este error sea pequeño pero aún no se haya llegado a la solución buscada. (Por ejemplo si la derivada de f en cercanías de p es muy pequeña).

- Teorema:
  Sea $f \in C[a,b]$ y sea $f(a)f(b) < 0$. El algoritmo de Bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que aproxima a p tal que
  $$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$
  para $n \geq 1$.

  Demostración:
  Para $n \geq 1$,
  $$b_n - a_n = \frac{(b-a)}{2^{n-1}}$$
  La raiz exacta $p \in (a_n, b_n)$.
  Y $p_n = (a_n + b_n)/2$
  Luego
  $$|p_n - p| \leq \frac{(b_n - a_n)}{2} = \frac{(b-a)}{2^n}$$

Convergencia

- De alli se ve que posee convergencia lineal:

$$|p_{n+1} - p| \leq \frac{(b-a)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}|p_n - p|$$

- Si se desea p con una tolerancia ϵ, se precisan:

$$n = \log_2 \frac{|b-a|}{\epsilon}$$

- El Método de la Bisección es lento: tiene convergencia *lineal*.
- Pero *siempre* converge. Es robusto. Por eso se usa muchas veces para poner en marcha otros métodos.
- (*Observación*: en este capitulo se designara a las iteraciones con un subíndice a fin de simplificar la notación)