

CALCULO DE VIGAS

A. Vigas

A continuación se hace una breve explicación de los procedimientos usados para calcular las reacciones, los esfuerzos cortantes y momentos flectores, así como la obtención de los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores, los ángulos de giro y flecha en determinadas secciones y la ecuación de la elástica.

Cálculo de las reacciones

Son tres las ecuaciones de equilibrio de las que se dispone para calcular las reacciones en las ligaduras: sumatorio de fuerzas verticales y horizontales en una sección igual a cero, y la tercera que indica la condición de ser nulo el momento resultante de todas estas fuerzas respecto de cualquier punto (Ec. A.1).

$$\sum M_x = 0 \qquad \sum F_v = 0 \qquad \sum F_h = 0 \qquad (\text{Ec. A.1})$$

Obtención de los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores

Para dibujar los diagramas primero se han calculado los esfuerzos cortantes y momentos flectores por tramos. Estos tramos se han definido en función de la geometría y el tipo de carga aplicada en cada una de las estructuras.

El criterio de signos que se ha usado para dibujar los diagramas es el siguiente (Fig. A.1):

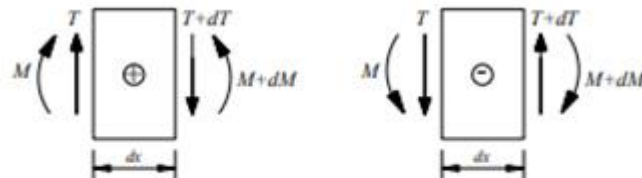


Fig. A.1 Criterio de signos de esfuerzo cortante y momento flector

CALCULO DE VIGAS

El esfuerzo cortante es positivo si la resultante de las fuerzas verticales situadas a la izquierda de la sección tiene dirección hacia arriba, en cambio será negativo si la resultante tiene dirección hacia abajo.

El momento flector es positivo cuando las fibras comprimidas están situadas por encima de la fibra neutra, el momento es negativo cuando las fibras comprimidas están por debajo.

Obtención de los ángulos de giro y las flechas

Para obtener los ángulos de giro y los desplazamientos de forma genérica (en cualquier tramo de la estructura) es necesario calcular la ecuación diferencial de la elástica. En cambio, si lo que interesa es calcular únicamente estos valores en ciertas secciones de la estructura es suficiente con aplicar los teoremas de Mohr. A continuación se indica el procedimiento a seguir para obtener la ecuación de la elástica y seguidamente se explican los teoremas de Mohr.

Obtención de la ecuación de la elástica

A partir de la relación existente entre el momento flector y la curvatura (Ec. 4.2) de la directriz deformada se obtiene la expresión exacta de la curvatura. Debido a que los corrimientos son pequeños se puede despreciar el infinitésimo de orden superior de esta expresión (Ec. A.2), y obtener de esta manera la ecuación diferencial de la elástica.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (\text{Ec. A.2})$$

CALCULO DE VIGAS

Integrando dos veces (Ec. A.3 y Ec. A.4) la ecuación diferencial de la elástica (Ec. A.2), se obtiene la ecuación de corrimiento transversal (Ec. A.4).

Primera integral $\frac{dw}{dx} = \int \frac{M}{EI} dx + C_1$ (Ec. A.3)

Segunda integral $w(x) = \int \left(\int \frac{M}{EI} dx + C_1 \right) + C_2$ (Ec. A.4)

Al hacer la doble integración, aparecen dos constantes C_1 y C_2 , el valor de las cuales se obtiene a partir de las condiciones de contorno de la estructura. Una de las condiciones que se ha de cumplir siempre, es que el corrimiento vertical en los enlaces siempre es nulo.

La segunda condición de contorno depende de la aplicación de las cargas sobre la estructura, por tanto para cada caso es distinto. Si por las características de la estructura es conocida la sección de la viga donde la flecha es máxima, la derivada del corrimiento transversal (Ec. A.3) es nula en esta sección.

CALCULO DE VIGAS

Teoremas de Mohr

Con la aplicación de los Teoremas de Mohr se calculan los valores exactos de giros y flechas en secciones concretas. Debido a la geometría de las estructuras estudiadas se ha considerado importante calcular los giros en los enlaces articulados y extremos libres (caso del voladizo), aunque en función de la carga aplicada también se han aplicado estos teoremas en distintas secciones de las vigas.

1er Teorema de Mohr

El primer teorema de Mohr relaciona los giros entre dos secciones A y B (Ec. A.5).

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (\text{Ec. A.5})$$

2º Teorema de Mohr

El segundo teorema de Mohr (Ec. A.6) permite obtener el valor de la flecha en una sección determinada de la viga.

$$\Delta = \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx \quad (\text{Ec. A.6})$$

CALCULO DE VIGAS

E. Análisis de vigas biempotradas

Las vigas empotradas son vigas hiperestáticas, de 4 incógnitas, dos en cada empotramiento. Por tanto es un sistema hiperestático de segundo grado, son cuatro incógnitas y dos ecuaciones de equilibrio.

Por tratarse de estructuras hiperestáticas, además de utilizar las ecuaciones de equilibrio, se han de considerar las ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones. Los métodos para calcular las vigas empotradas también son los mismos que en las vigas articuladas y empotradas. El formulario se ha realizado aplicando el método basado en los teoremas de Mohr, y el método de superposición.

En el caso de vigas empotradas se han elegido como incógnitas superfluas M_A y M_B , y se ha aplicado el método de superposición como muestra la siguiente figura (Fig. E.1).

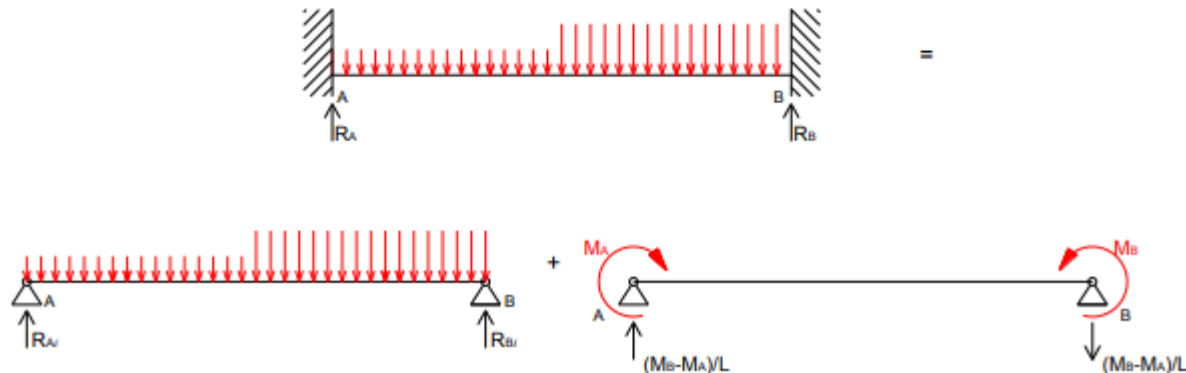


Fig. E.1 Superposición de viga biempotrada

CALCULO DE VIGAS

Por tratarse de empotramientos perfectos el ángulo de giro y de desplazamiento en los extremos es nulo.

El área del diagrama de momentos flectores isostáticos es igual en valor absoluto al de momentos hiperestáticos. Por tanto el ángulo de giro en la sección A es el mismo, en módulo, para la viga isostática que para la hiperestática, lo mismo ocurre en la sección B (Ec. E.1). A partir de estas igualdades se obtienen los valores de los momentos en el empotramiento, M_A y M_B . En la práctica, a la hora de realizar los cálculos para preparar el prontuario se ha usado esta condición de ángulos de giro.

$$\theta_A = \theta_{Ai} - \frac{L}{6EI}(2M_A + M_B) \qquad \theta_B = \theta_{Bi} + \frac{L}{6EI}(M_A + 2M_B) \qquad (\text{Ec. E.1})$$

Obtenido el valor de M_A y M_B por superposición se obtienen las reacciones en A y en B (Ec. E.2 y Ec. E.3), la ley de momentos flectores y de esfuerzos cortantes (Ec. E.4 y Ec. E.5), y la ecuación de la elástica y de su derivada (Ec. E.6 y Ec. E.7).

$$R_A = R_{Ai} + \frac{M_B - M_A}{L} \qquad (\text{Ec. E.2})$$

$$R_B = R_{Bi} - \frac{M_B - M_A}{L} \qquad (\text{Ec. E.3})$$

$$M = M_i + M_A + \frac{M_B - M_A}{L}x \qquad (\text{Ec. E.4})$$

$$T = T_i + \frac{M_B - M_A}{L} \qquad (\text{Ec. E.5})$$

$$w = w_i + \frac{Lx}{6EI} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left[2M_A + M_B + (M_B - M_A) \left(\frac{x}{L} \right) \right] \qquad (\text{Ec. E.6})$$

$$w' = w'_i + \frac{L}{6EI} \left[2M_A + M_B + 3(M_A - M_B) \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 6M_A \frac{x}{L} \right] \qquad (\text{Ec. E.7})$$

CALCULO DE VIGAS

E.4 Viga biempotrada con carga repartida

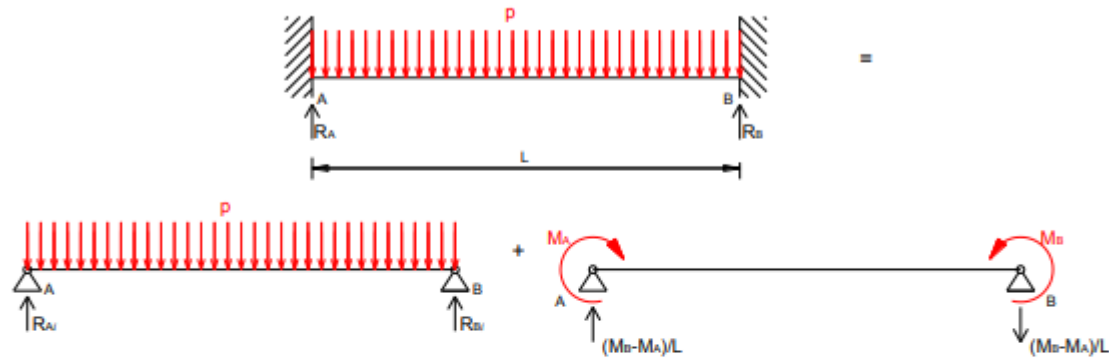


Fig. E.5 Superposición de viga biempotrada con una carga repartida

Se aplica la condición de igualdad de ángulos en los dos extremos (Ec. E.48 y Ec. E.49), obteniendo dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\frac{pL^3}{24EI} + \frac{L(2M_A + M_B)}{6EI} = 0 \rightarrow pL^2 + 4(2M_A + M_B) = 0 \quad (\text{Ec. E.48})$$

$$-\frac{pL^3}{24EI} - \frac{L(M_A + 2M_B)}{6EI} = 0 \rightarrow -pL^2 - 4(M_A + 2M_B) = 0 \quad (\text{Ec. E.49})$$

CALCULO DE VIGAS

Solucionando el sistema de ecuaciones (se resta el doble de la primera ecuación de la segunda) se obtienen los valores del momento en A (Ec. E.50) y en B (Ec. E.51).

$$pL^2 = 2pL^2 + 12M_B \rightarrow M_B = -\frac{pL^2}{12} \quad (\text{Ec. E.50})$$

$$-pL^2 - 4\left(2M_A - \frac{pL^2}{12}\right) = 0 \rightarrow M_A = -\frac{pL^2}{12} \quad (\text{Ec. E.51})$$

Reacciones

Una vez obtenido el valor de M_A y M_B , y a partir de las Ec. E.2 y Ec. E.3 se obtienen los valores de las reacciones (Ec. E.52 y Ec. E.53).

$$R_A = \frac{pL}{2} + \left(-\frac{pL^2}{12} - \left(-\frac{pL^2}{12}\right)\right) \frac{1}{L} \rightarrow R_A = \frac{pL}{2} \quad (\text{Ec. E.52})$$

$$R_B = \frac{pL}{2} - \left(-\frac{pL^2}{12} - \left(-\frac{pL^2}{12}\right)\right) \frac{1}{L} \rightarrow R_B = \frac{pL}{2} \quad (\text{Ec. E.53})$$

Diagramas de esfuerzos cortantes y momento flector

También se obtienen la ley de momentos flectores (Ec. E.54) y de esfuerzos cortantes para el tramo AB (Ec. E.55).

$$M_{AB} = \frac{px(L-x)}{2} - \frac{pL^2}{12} \left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{pL^2}{12} \frac{x}{L} \rightarrow M_{AB} = -\frac{p}{12} (L^2 - 6Lx + 6x^2) \quad (\text{Ec. E.54})$$

$$T_{AB} = p\left(\frac{L}{2} - x\right) + \left(-\frac{pL^2}{12} - \left(-\frac{pL^2}{12}\right)\right) \frac{1}{L} \rightarrow T_{AB} = \frac{p}{2} (L - 2x) \quad (\text{Ec. E.55})$$

CALCULO DE VIGAS

DEC



DEF



Ecuación de la elástica

Se obtiene la ecuación de la elástica, Ec. E.56.

$$w_{AB}(x) = \frac{px}{24EI} (x^3 - 2Lx^2 + L^3) + \frac{Lx}{6EI} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left(-2 \frac{pL^2}{12} - \frac{pL^2}{12} + \left(-\frac{pL^2}{12} - \left(-\frac{pL^2}{12} \right) \frac{x}{L} \right) \right) \rightarrow$$

$$w_{AB}(x) = \frac{pL^3 x}{24EI} \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 \quad (\text{Ec. E.56})$$

Flecha

El valor de flecha máxima se da en la sección central, $L/2$. Se utiliza la ecuación de la elástica y se evalúa en la distancia $L/2$, Ec. E.57.

$$\Delta_{m\acute{a}x} = w_{AC}(x = L/2) = \frac{px}{24EI} \left(\frac{L}{2} \right)^3 \left(1 - \frac{1}{L} \frac{L}{2} \right)^2 \rightarrow \Delta_{m\acute{a}x} = \frac{pL^4}{384EI} \quad (\text{Ec. E.57})$$