Iteración de Punto Fijo

Punto Fijo

- Se ha definido *cero* de $f(x)$ al valor de x tal que

$$f(x) = 0$$

- En forma similar se define *punto fijo* de $g(x)$ al x tal que

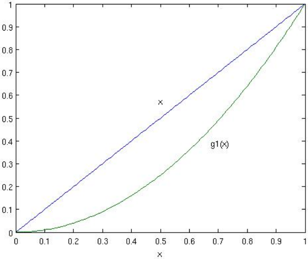
$$g(x) = x$$

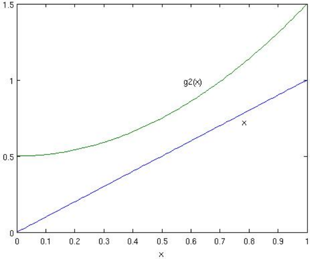
- Un problema de hallar un cero de $f(x)$ se puede transformar en uno de hallar el punto fijo de $g(x)$. Por ejemplo: a partir de la ecuación $f(x) = 0$ se puede escribir $g(x) = x$ definiendo $g(x) = x + f(x)$. Así el valor de x que verifica la primera ecuación, también verifica la segunda: el cero de $f(x)$ es el punto fijo de $g(x)$.

Punto Fijo

Ejemplos:

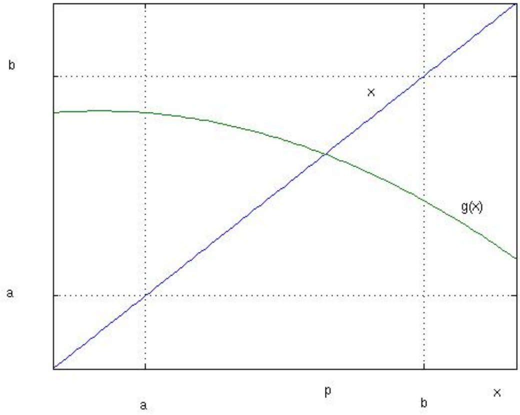
- La función $g_1(x) = x^2$, en el intervalo $[0, 1]$ tiene dos puntos fijos: $X = 0$ y $x = 1$
- La misma función en el intervalo $[2, 3]$ no tiene puntos fijos.
- La función $g_2(x) = \frac{1}{2} + x^2$, en el intervalo $[0, 1]$ no tiene puntos fijos. No los tiene en todo el eje real.
- La función identidad $g(x) = x$ en $[0, 1]$ tiene ∞ puntos fijos.



,


Punto Fijo

<u>Teorema 1:</u> Si $g \in C[a,b]$ y $g(x) \in [a,b]\ \forall\ x \in [a,b]$ entonces g *tiene* un punto fijo en $[a,b]$.
Si además, $g'(x)$ existe en (a,b) y $|g'(x)| \leq k < 1\ \forall\ x \in [a,b]$ entonces g tiene un punto fijo *único* (p) en $[a,b]$.



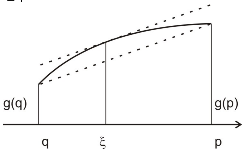
Punto Fijo

Demostración:
Primera parte:

- *Si* $g(a) = a$ *o* $g(b) = b$*, entonces* $\exists p$
- *Si no; debe ser* $g(a) > a$ *y* $g(b) < b$*,*
- *Sea* $h(x) = g(x) - x$*.*
- $h(x)$ *es continua en* $[a,b]$ *y* $h(a) = g(a) - a > 0$ *,* $h(b) = g(b) - b < 0$*.*
- *Por teorema del valor medio,* $\exists p \mid h(p) = 0$ *y por tanto* $g(p) = p$*.*
  O sea: existe un Punto Fijo en $[a,b]$

Segunda parte:

- *Supóngase que* $|g'(a)| \leq k < 1$ *y que* p *y* q *sean Puntos Fijos de* g. *(*$p \neq q$*)*
- *Por Teorema del Valor Medio,* $\exists\ \xi$ *entre* q *y* p *tal que* $|g(p) - g(q)| = |g'(\xi)|\ |p - q|$



- *Por ser* p *y* q *puntos fijos, y por ser* $|g'(\xi)| < 1$*:*

$$|p - q| < |p - q|$$

- *A esta contradicción se ha llegado al suponer que* $p \neq q$*. Luego el punto fijo es* único*.*

Iteración funcional

- Para encontrar el punto fijo de una función se usa una *técnica iterativa de punto fijo* o *iteración funcional*.
- Se propone un valor de partida p_0.
- Se construye una sucesión $\{p_n\}$ con la fórmula:

$$p_n = g(p_{n-1})$$

  para $n = 1, 2, \ldots$
- Si $\{p_n\} \to p$ y g es continua, entonces:

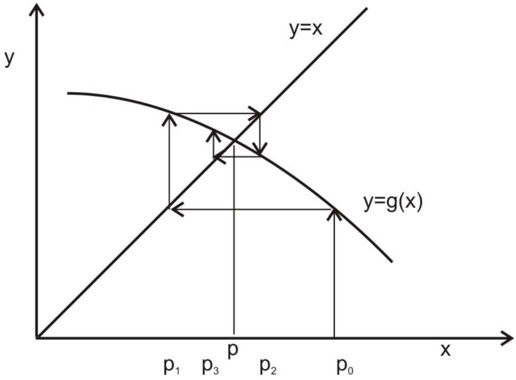
$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}) = g(p)$$

  Es decir que p es el punto fijo de g.

Algoritmo de Punto Fijo

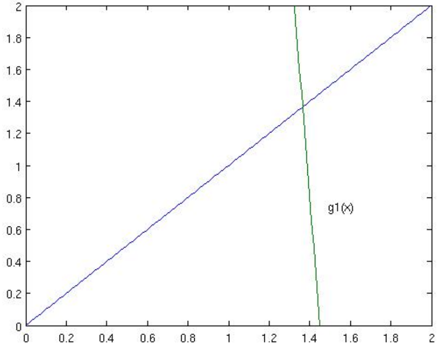
Dados: $g(x)$, p_0, Tol, $Kmax$
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \ \leftarrow \ g(p_0)$
    4) si $|p - p_0| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) $p_0 \leftarrow p$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en K_{max} iteraciones*'
Parar.

Interpretación gráfica de la Iteración Funcional



Ejemplo

- Sea obtener la raiz de
$$f(x) = x^3 + 4\,x^2 - 10$$
Esta función tiene una sola raiz en $[1,2]$: $p = 1.365230013$
- Hay muchas maneras de obtener la función $g(x)$ para un problema de punto fijo $g(x) = x$:
  1) De la ecuacion original: $f(x) = 0$
  $$x - f(x) = x$$
  con $g_1(x) = x - x^3 - 4\,x^2 + 10$

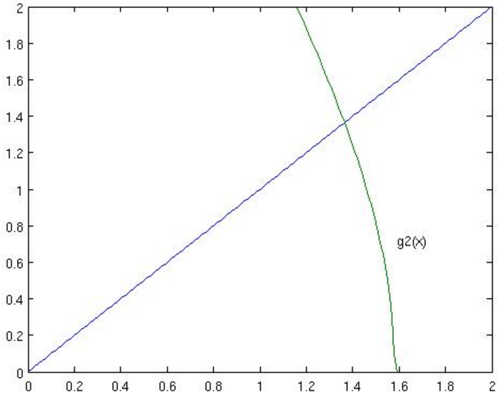


Ejemplo

2) De la ecuacion original: $x^3 = 10 - 4x^2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

de donde: $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$

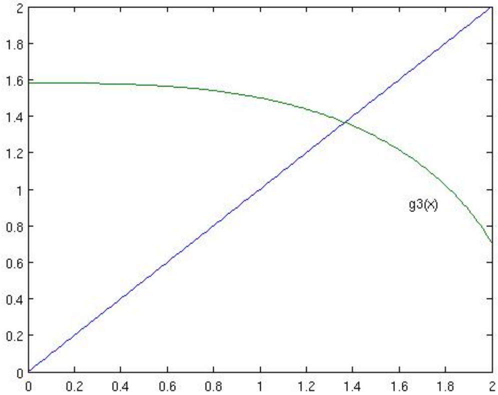


Ejemplo

3) De la ecuacion original: $4x^2 = 10 - x^3$

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

de donde: $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

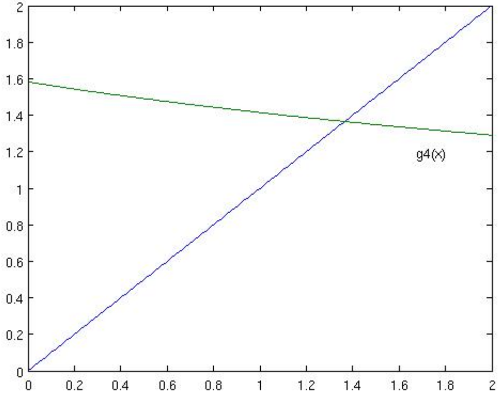


Ejemplo

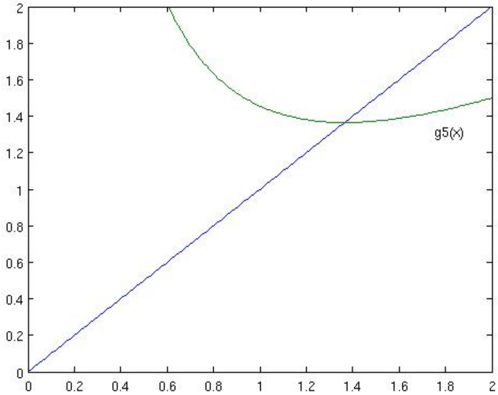
4) De la ecuacion original: $x^2(x+4) = 10$

$$x = \pm\sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

de donde: $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$



5) Dividiendo la ecuacion original por $3x^2 + 8x$ y operando:
$g_5(x) = x - \frac{x^3+4\,x^2-10}{3x^2+8x}$



Ejemplo

Resolviendo el problema por Iteración Funcional, partiendo del valor inicial $p_0 = 1.5$, y obteniendo los resultados con 9 dígitos despues de la coma, se llegó a:

- Con $g1(x)$ no se obtuvo convergencia.
- Con $g2(x)$ no se obtuvo convergencia.
- Con $g3(x)$ se requirieron 30 iteraciones.
- Con $g4(x)$ se requirieron 15 iteraciones.
- Con $g5(x)$ se requirieron 4 iteraciones.
- Con el método de la Bisección se requirieron 27 iteraciones.

Teorema 2:
Sea $g \in C[a,b]$ y que $g(x) \in [a,b]\ \forall\ x \in [a,b]$. Además supóngase que $\exists\ g'(x)$ en (a,b) con

$$|g'(x)| \leq k < 1\ \forall\ x \in [a,b] \qquad (*)$$

.
Si p_0 es cualquier número en $[a,b]$, entonces la sucesión $\{p_n\}$ definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad n \geq 1 \qquad (**)$$

converge al único Punto Fijo en $[a,b]$.

Demostración:

- Por Terorema 1, existe un P.F. $p \in [a, b]$.
- Como $g(x) \in [a, b]$ entonces $p_n \in [a, b] \ \ \forall n$.

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi)||p_{n-1} - p| \leq k\,|p_{n-1} - p|$$

- la primera igualdad es por ser P.F y por (**); la segunda por el T. del Valor Medio (con $\xi \in [a, b]$); y la desigualdad es por (*).

$$|p_n - p| \leq k\,|p_{n-1} - p| \leq k^2\,|p_{n-2} - p| \ldots \leq k^n\,|p_0 - p|$$

- Como $k < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

Es decir $\{p_n\}$ converge a p.

Punto Fijo

Corolario 1:
Si g satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \quad \forall n \geq 1$$

Corolario 2:
Si g satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_0 - p_1| \quad \forall n \geq 1$$

- La velocidad de convergencia depende de $\frac{k^n}{1-k}$
- Cuanto menor sea k, más rápido converge.
- Si $k \sim 1$ la convergencia es lenta.
- Si $|g'(p)| \neq 0$ la convergencia es lineal.
- Si $|g'(p)| = 0$ puede tener convergencia cuadrática.

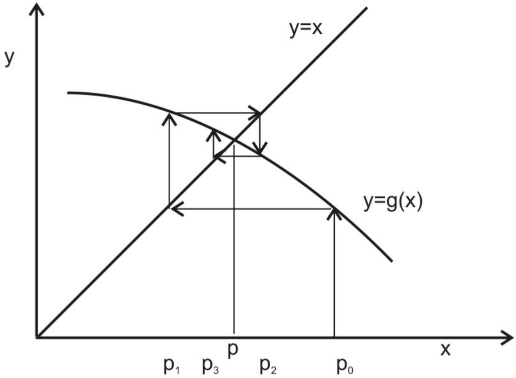
Ejemplo

Del ejemplo anterior se ve que:

- No hay ningún intervalo conteniendo a $p = 1.365230013$ tal que $|g_1'(x)| \; < 1$. Por eso diverge.
- La función $g_2(x)$ no manda $[1,2]$ a $[1,2]$. Y no hay ningún intervalo conteniendo a p tal que $|g_1'(x)| \; < 1$. Por eso diverge.
- La derivada $g_3'(2) \simeq 2.12$. No satisface que sea menor que 1. Pero en el intervalo $[1,1.5]$ $g_3'(x) \leq g_3'(1.5) \simeq 0.66$. Por eso ha convergido.
- La derivada $g_4'(x) \leq 0.15 \quad \forall x \in [1,2]$. Converge más rápido que g_3
- Cosa similar sucede con g_5 para la cual k es menor aún.

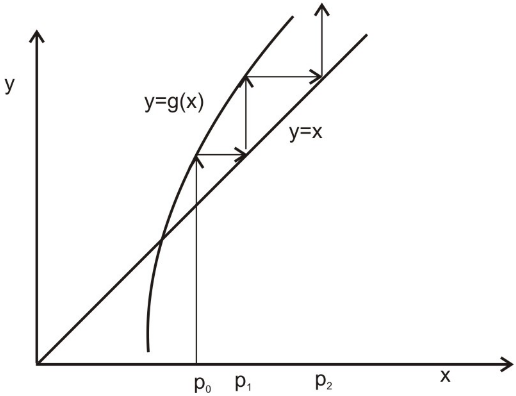
Iteración Funcional

Caso en que $|g'(x)| < 1$



Iteración Funcional

Caso en que $|g'(x)| > 1$



Iteración Funcional

Caso en que $g'(x) < -1$