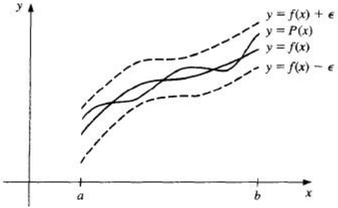
Teorema de aproximación de Weierstrass

- Sea $f(x)$ definida y continua en $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$ en $[a, b]$ tal que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \qquad \forall x \in [a, b]$$

- Esto significa que siempre podemos encontrar un polinomio tal que su error al representar una función, sea tan pequeño como se desee.



Construcción de polinomios interpoladores

- Hay un teorema, sobre el que volveremos enseguida, que dice que dados x_k $(k = 0, 1, \ldots n)$ un conjunto de $n + 1$ números reales distintos, y $n + 1$ números asociados a los anteriores y_k $(k = 0, 1, \ldots n)$,*existe* un *único* polinomio de grado $\leq n$ tal que

$$P_n(x_k) \;=\; y_k \qquad k = 0, 1, \ldots n$$

- Ese teorema asegura existencia y unicidad de un polinomio que pase por $n + 1$ puntos.
- El polinomio puede escribirse de distintas formas. Si se escribe en la forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

se ve que hay $n + 1$ coeficientes incógnitas: $a_i \quad i = 0, \ldots n$

- Si se evalúa el polinomio en los $n+1$ puntos puede escribirse

$$P_n(x_k) \;=\; y_k \quad \text{para } k = 0, \ldots n$$

  que es un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas de donde pueden calcularse los a_i.
- Esta forma de construir $P_n(x)$ no es práctica, ya que involucra resolver un sistema de $n+1$ ecuaciones con una matriz llena. (Aunque, si los $n+1$ puntos son distintos, el sistema tiene solución)
- Este procedimiento, se inscribe dentro de otro más amplio denominado de *Coeficientes indeterminados*, en los que el polinomio se escribe:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, \phi_k(x)$$

  donde $\phi_k(x)$ son polinomios de grado $\leq n$ y los c_k se obtiene del sistema de ecuaciones que resulta de hacer $P_n(x_k) \;=\; y_k$ para todo k.

Interpolación por polinomios de Lagrange

- Una forma muy usada de construir polinomios interpolantes es utilizando los *polinomios de Lagrange*
- En este caso el polinomio se escribe:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\ \phi_k(x)$$

  donde los $\phi_k(x)$ son polinomios de grado n.
- Los coeficientes en este caso son los $y_k = f(x_k)$, datos del problema, y la construcción de los polinomios $\phi_k(x)$ es muy sencilla.
- Se introducirá con un ejemplo.

- Ejemplo:
  Sea hallar un polinomio que pase por dos puntos: (x_0, y_0) y (x_1, y_1).
  Puede escribirse:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

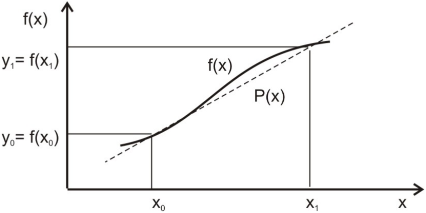
$$P(x) = L_0(x)\; y_0 + L_1(x)\; y_1$$

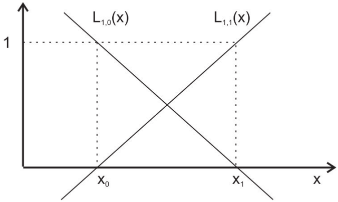
  donde se ha definido

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

  Se puede observar que $L_0(x_0) = 1$ y $L_0(x_1) = 0$ y que $L_1(x_0) = 0$ y $L_1(x_1) = 1$

- Ejemplo:





- Esto puede generalizarse, y para un polinomio que pase por $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots x_n$

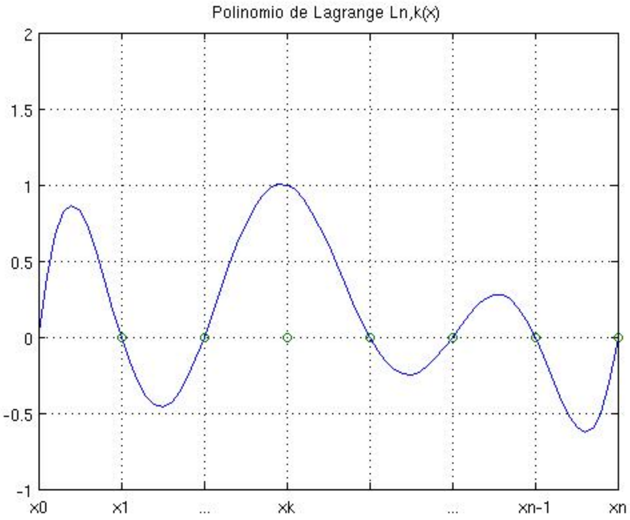
$$P_n(x) = L_{n,0}(x)\ y_0 + L_{n,1}(x)\ y_1 + \ldots + L_{n,n}(x)\ y_n$$

  donde se construirán los $L_{n,k}(x)$ de modo que $L_{n,k}(x_k) = 1$ y $L_{n,k}(x_j) = 0$ para $k \neq j$
- Puede observarse que esto se verifica si:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

- Es un polinomio de grado n. Se denomina *polinomio de Lagrange*
- Puede escribirse:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0;\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$


Polinomio de Lagrange Ln,k(x)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
x0
x1
...
xk
...
xn-1
xn

- Teorema:
  Si $x_0, x_1, \ldots x_n$ son números distintos, y si $f(x)$ está dada por sus valores $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n)$, entonces existe un único polinomio de grado n, tal que

$$f(x_k) = P(x_k) \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots n$$

  Ese polinomio está dado por

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_{n,k}(x)$$

  donde

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0;\\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

- Ejemplo:
  Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Supóngase que se conoce la función en 3 puntos

x	y
$x_0 = 2$	$y_0 = 0.5$
$x_1 = 2.5$	$y_1 = 0.4$
$x_2 = 4$	$y_2 = 0.25$

Se construye un polinomio de grado 2 (que pasa por tres puntos)

$$P_2(x) = L_{2,0}(x)\ y_0 + L_{2,1}(x)\ y_1 + L_{2,2}(x)\ y_2$$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-2.5)(2-4)} = x^2 - 6.5x + 10$$

- Ejemplo (continuación):
  Análogamente

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2.5 - 2)(2.5 - 4)} = \frac{1}{3}(-4x^2+24x-32)$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{(4 - 2)(4 - 2.5)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4.5x + 5)$$

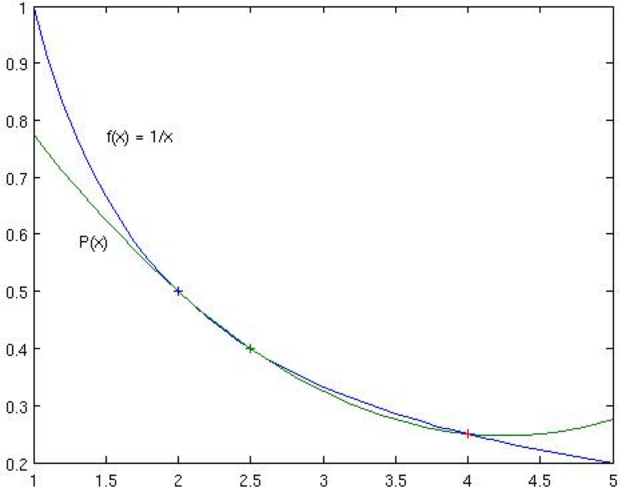
  Y el polinomio:

$$P_2(x) = 0.05x^2 - 0.425x + 1.15$$

  Por ejemplo, para $x = 3$:

$$f(3) = \frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

$$P_2(3) = 0.325$$


f(x) = 1/x
P(x)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

- Teorema:
  Si $x_0, x_1, \ldots x_n$ son números distintos en $[a, b]$, y si $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$ entonces, para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x) \in [a, b]$ tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  donde $P(x)$ es el polinomio interpolante definido por el teorema anterior.
- Así, el error en la aproximación es

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  (Como referencia; el polinomio de Taylor tiene un error dado por $\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$)

Interpolación por diferencias divididas

- Un polinomio

$$P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots b_1 x + b_0$$

se puede representar también como:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$\dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

- Puede verse que esta es la forma *anidada* de escribir el polinomio:

$$P_n(x) = a_0 + (x - x_0)\left[a_1 + (x - x_1)\left[a_2 + a_3(x - x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\dots + a_n(x - x_{n-1})\right]\dots\right]$$

- Los coeficientes a_i se pueden obtener a partir de los valores de la función conocidos en los $n+1$ puntos: $f(x_i) \quad i = 0, 1, \ldots n$
- Puede verse que evaluando el polinomio en x_0, todos los términos se anulan excepto el primero. Al evaluarlo en x_1 se anulan todos excepto los dos primeros, y así el sistema de ecuaciones tiene una matriz triangular.
- Particularizando para $x = x_0$:

$$P_n(x_0) = f(x_0) = a_0$$

- Particularizando para $x = x_1$:

$$P_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

de donde

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Notación:

- *Diferencia dividida cero* de una función con respecto a x_i:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- *Primera diferencia dividida* de una función con respecto a x_i y x_{i+1}:

$$\boxed{f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}}$$

- *Segundas diferencias divididas* de una función con respecto a x_i, x_{i+1} y x_{i+2}:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

- $\ldots$
- *k-esima diferencias divididas* de una función con respecto a $x_i, x_{i+1} \ldots x_{i+k}$:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2} \ldots x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1} \ldots x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

- Con esta notación, los coeficientes a_i del polinomio:

$$a_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

- Puede verse que, análogamente:

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

- Y el coeficiente k:

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots x_k]$$

- El polinomio se escribe:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$

$$\ldots + f[x_0, x_1 \ldots x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Esta es la *fórmula en diferencias divididas de Newton*

Ejemplo:Escribir un polinomio que represente a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en los puntos: $(2, 2.5, 4)$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2	0.5		
		-0.2	
2.5	0.4		0.05
		-0.1	
4	0.25		

$$P(x) = 0.5 - 0.2(x-2) + 0.05(x-2)(x-2.5) = 1.15 - 0.425x + 0.05x^2$$

Algoritmo para interpolación por diferencias divididas

Para obtener la fórmula en diferencias divididas interpolantes de New-

Entrada: $x_0, x_1 \dots x_n$ *y los valores* $f(x_0), f(x_1) \dots f(x_n)$*, estos últimos en al primer columna de la matriz* $\mathbf{Q}$*.* *Salida: Las diferencias divididas f[. . .] , en la diagonal de* $\mathbf{Q}$

Paso 1) Para $i = 1, 2, \dots n$ *hacer {*

Para $j = 2, \dots i$ *hacer{*

$Q_{i,j} \leftarrow \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$

}

}

Paso 2) Salida: $(Q_{0,0}, Q_{1,1}, Q_{2,2}, \dots Q_{n,n})$

de modo que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} Q_{i,i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

ton: