SOR	1.6386
Gradiente Conjugado	0.4109
Gauss (directo)	0.8751

- Para N=500

Método	Tiempo en segundos
Jacobi	8.5760
Gauss-Seidel	2.2264
SOR	2.8318
Gradiente Conjugado	1.1716
Gauss (directo)	3.4530

- Para N=1000

Método	Tiempo en segundos
Jacobi	17.132
Gauss-Seidel	4.3646
SOR	5.3770
Gradiente Conjugado	4.3180
Gauss (directo)	26.385

A partir de todos los datos encontrados se determinaron las siguientes conclusiones. Los métodos directos son más eficientes y exactos para matrices de pocos elementos, pero a medida que la matriz aumenta la eficiencia se va perdiendo, y pasan a ser una mejor alternativa los métodos iterativos, aunque si bien no otorgan una solución exacta, logran una aproximación muy cercana a la real.

El método del gradiente conjugado tiene una mayor cantidad de iteraciones, pero realiza las operaciones en una velocidad mucho menor que el resto de los algoritmos.

Para este trabajo se puede ver que los métodos que obtuvieron un mejor rendimiento en general fueron el SOR y el de Gauss-Seidel, esto se debe a que el radio espectral de sus respectivas matrices era menor que el de Jacobi. El método del gradiente conjugado perdió exactitud por el mal condicionamiento que posee la matriz, como se había supuesto en un principio, si se quisiera emplear este método de manera más exacta y eficiente se debería de recurrir a una estrategia de acondicionamiento de la matriz.

Ejercicio 2: Resuelva los siguientes sistemas lineales con el método de Gauss-Seidel y analice que sucede en cada caso. ¿Es necesario utilizar alguna estrategia de pivoteo? Si lo fuera justifique por qué.

$$\begin{cases} 3x + y + z &= 5 \\ x + 3y - z &= 3 \\ 3x + y - 5z &= -1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} 3x + y + z &= 5 \\ 3x + y - 5z &= -1 \\ x + 3y - z &= 3 \end{cases} \qquad (2)$$

Como un primer paso se procedió a expresar los sistemas lineales como sistemas de matrices de la forma $Ax = b$.

Se obtuvieron las siguientes expresiones:

- Para el sistema 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \; x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Para el sistema 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \; x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Una vez que se obtuvieron los sistemas de matrices se correspondientes a los sistemas lineales planteados, se realizó un estudio de las propiedades de la matrices para poder elaborar algunas teorías sobre la convergencia de los métodos.

Para el primer sistema se pudo observar que se trata de una matriz estrictamente diagonal dominante ya que para cada fila ***i*** cumple con

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{ii}|$$

Gracias a esta propiedad se pudo garantizar que el método de Gauss-Seidel convergerá y que no será necesaria ninguna estrategia de pivoteo para el método directo de Gauss.

Mientras que para el segundo sistema se observó que no era diagonal dominante porque ya para el caso de la segunda fila, ya no se cumple con la condición planteada anteriormente, dado que el elemento de la diagonal principal correspondiente a dicha fila es 1 mientras que la suma, en valor absoluto, del resto de los elementos de la misma fila es 8. Por esto no se pudo garantizar la convergencia de Gauss-Seidel ni el no requerir de una estrategia de pivoteo

Primero se resolvió mediante el método iterativo de Gauss-Seidel, *Ver Algoritmo IV pag.7,* y se obtuvieron los siguientes resultados:

Para el cálculo del radio espectral se utilizó el *Algoritmo II Pag.5*.

- <u>Primer Sistema:</u>

$$\rho(T_{gs}) = 0.2582$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \|Ax - b\|_{inf} = 2.2826e - 06\ x$$

$$Iteraciones\ 11, Tiempo\ en\ segundos\ 0.033$$

- <u>Segundo Sistema:</u> No converge para este sistema, dado que el aumentar el número de iteraciones, la solución de cada iteración se aleja del valor real

Esto ocurre debido a que el radio espectral de la matriz de Gauss-Seidel correspondiente a este sistema es mucho mayor a 1

$$\rho(T_{gs}) = 18.577$$

Luego se procedió a resolver los dos sistemas utilizando el método directo de Gauss

- <u>Primer Sistema:</u> Al ser estrictamente diagonal dominante no fue necesario una estrategia de pivoteo para este sistema, se utilizó el *Algoritmo X pag.13.*

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \|Ax - b\|_{inf} = 8.8818e - 16\ x$$

$$Tiempo\ en\ segundos\ 0.004$$

- <u>Segundo Sistema:</u> Para la resolución de este sistema fue necesario aplicar una estrategia de pivoteo, por lo cual se obtuvo una matriz de pivoteo P, para esto se utilizó el siguiente algoritmo:

```
function [U L x time]=GaussPivParExt(A,b);
tic();
n=length(A);
L=eye(n);
P=eye(n);
r(1:n)=1:n;
for k=1:n-1
```

```
  [val fila]=max(abs(A(r(k:n),k)));
  if(val==0)
    disp("Error")
  else
    fila=fila+(k-1);
    if(r(fila)~=r(k))
      z=r(fila);
      r(fila)=r(k);
      r(k)=z;
    endif
  endif
  s=A(r(k+1:n),k)/A(r(k),k);
  L(k+1:n,k)=s;
  A(r(k+1:n),k)=0;
  A(r(k+1:n),k+1:n)=A(r(k+1:n),k+1:n)-s*A(r(k),k+1:n);
  b(r(k+1:n,1))=b((k+1:n))-s*b(r(k),1);
endfor
P(1:n,1:n)=P(r(1:n),1:n);
U(1:n,1:n)=A(r(1:n),1:n);
x=Rest_atras(U,b);
time=toc();
endfunction
```

XII Algoritmo Gauss Pivoteo Parcial

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \|Ax - b\|_{inf} = 8.8818e - 16\ x$$

$$Tiempo\ en\ segundos\ 0.008$$