Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

- Sea $f(x) \in C^2[a,b]$ (continuamente diferenciable 2 veces), y se desea hallar p tal que $f(p) = 0$.
- Sea $\bar{x}$ una aproximación a p ($|\bar{x} - p|$ pequeño), y $f'(\bar{x}) \neq 0$
- El desarrollo en serie de Taylor alrededor de $\bar{x}$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\bar{x}) + \dots$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x))$$

  donde $\xi(x)$ está entre x y $\bar{x}$.
- Particularizando en $x = p$:

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(p))$$

Método de Newton-Raphson

- Al ser $(p - \bar{x})$ pequeño podemos despreciar el término cuadrático frente al lineal:

$$0 \simeq f(\bar{x}) + (p - \bar{x}) f'(\bar{x})$$

- De alli:

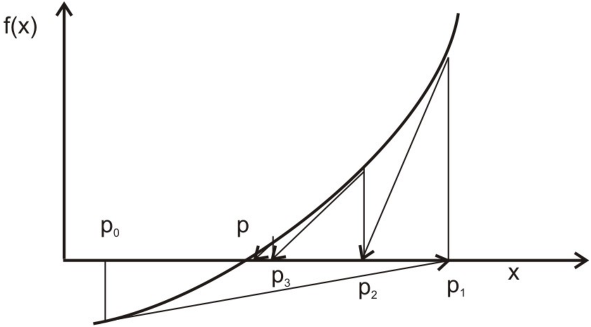
$$p \simeq \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

- El Método de Newton-Raphson construye una sucesión $\{p_n\}$ con la fórmula de recurrencia:

$$p_n \simeq p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \qquad n \geq 1$$

- <u>Observación:</u> El Método de Newton-Raphson puede ser mirado como un caso de iteración funcional, con $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Interpretación gráfica Método de Newton-Raphson



Algoritmo del Método de Newton-Raphson

Dados: $f(x)$, $f'(x)$, p_0, Tol, K_{max}
Salida: p
1) $i \leftarrow 1$
2) mientras $i < K_{max}$
    3) $p \leftarrow p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$
    4) si $|p - p_0| < Tol \rightarrow$ Salida: p y Parar.
    5) $i \leftarrow i + 1$
    6) $p_0 \leftarrow p$
    7) va a 3.
8) Salida: '*No converge en K_{max} iteraciones*'
Parar.

Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:
  1) $|p_n - p_{n-1}| \leq Tol_1$
  2) $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} \leq Tol_2$
  3) $|f(p_n)| \leq Tol_3$
- La tolerancia Tol_1 es en valor absoluto, mientras que latolerancia Tol_2 es independiente de las unidades y significado físico de las variables.
- Según la función puede ser que algún criterio sea mejor que los otros.

Convergencia

- El error en la iteración n:

$$e_n = p_n - p$$

- En p, $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$
- Se puede escribir:

$$e_{n+1} = p_{n+1} - p = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - p = e_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} = \frac{e_n f'(p_n) - f(p_n)}{f'(p_n)}$$

- Por el Teorema de taylor:

$$f(p) = 0 = f(p_n - e_n) = f(p_n) - e_n f'(p_n) + \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

con ξ_n entre p_n y p. De allí:

$$e_n f'(p_n) - f(p_n) = \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

Convergencia

- Sustituyendo en la expresión de e_{n+1}:

$$e_{n+1} = e_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(p_n)}$$

- Si p_n es cercano a p se puede escribir:

$$e_{n+1} \simeq e_n^2 \, \frac{f''(p)}{2f'(p)} = C \, e_n^2$$

- El Método NR posee convergencia *cuadrática*.
- Al obtener la fórmula del error, hemos supuesto que $f'(p) \neq 0$, y buscamos que $f(p) = 0$. Pero puede haber problemas si simultánemente con $f(p)$ también $f'(p)$ tiende a cero.

Convergencia

- Definición: Una solución p de $f(x) =$ es un *cero de multiplicidad m* de la funcion f si para $x \neq p$ se puede escribir $f(x) = (x-p)^m\, q(x)$ siendo $q(p) \neq 0$.
- Las raices de ecuaciones pueden ser *simples* o *múltiples*. Las raices simples son las que tienen multiplicidad $m = 1$.
- Teorema: $f \in C^1[a, b]$ tiene un cero simple p en (a, b) si y solo si $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$.
- Teorema: Si el método de Newton-Raphson genera una sucesión $\{p_n\}$ que converge a un cero p de $f(x)$, entonces:
  - Si p es raíz simple, la convergencia es **cuadratica**:

$$e_{n+1} \simeq \frac{f''(p)}{2f'(p)}\, e_n^2$$

  - Si p es raíz múltiple, la convergencia es **lineal**

$$e_{n+1} \simeq \frac{m-1}{m}\, e_n$$

Convergencia

- Teorema: Sea $f \in C^2[a,b]$. Si $p \in [a,b]$ es un cero de f y $f'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ el metodo de Newton-Raphson genera una sucesión $\{p_n\}$que converge a p.
- Este teorema, asegura que el M. N-R converge para cualquier p_0 dentro de ese intervalo $[p-\delta, p+\delta]$.
- La convergencia se dice que es *local*, pues precisa que el punto inicial este suficientmente cerca del cero buscado.
- El método de la biseccion, en contraposición con éste, tiene convergencia *global* ya que para cualquier $p_0 \in [a,b]$ converge.

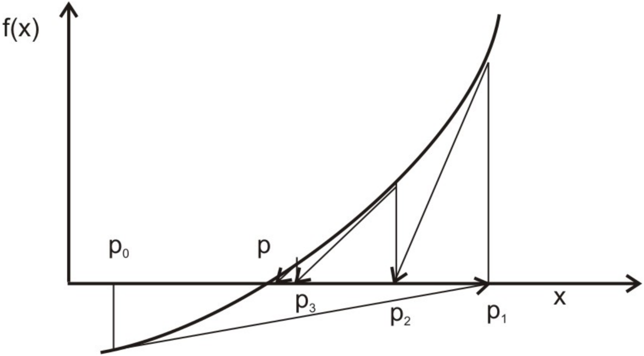
Convergencia

Resumiendo:

- El método de Newton-Raphson, para raices simples, tiene convergencia cuadrática. Esto es bueno.
- Para raices múltiples, la convergencia es lineal.
- Su convergencia es local. Hay casos en que este método no converge.
- Se precisa cierta regularidad en la derivada de la función, y comenzar con una estimación inicial cercana a p
- Otro inconveniente es que se precisa evaluar la derivada de la función.

Convergencia del M. Newton-Raphson

Caso en que el M. Newton-Raphson converge



Caso en que el M. Newton-Raphson no converge