Ajuste de curvas por combinación lineal de funciones

Ajuste de curvas por combinación lineal de funciones

Así como hemos ajustado datos a través de una función particular (polinomios, exponenciales, etc.) también podemos ajustar mediante funciones definidas como combinación lineal de otras. Es decir, dados N puntos (x_i, y_i), ajustamos mediante:

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x)$$

Entonces, el funcional a minimizar será:

$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i)\right)^2$$

Sistema lineal a resolver

Derivando

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i)) f_1(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i)) f_2(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i)) f_3(x_i) = 0$$

Sistema lineal a resolver

Derivando

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i))f_1(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i))f_2(x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a_1 f_1(x_i) - a_2 f_2(x_i) - a_3 f_3(x_i))f_3(x_i) = 0$$

Finalmente el sistema queda:

$$\begin{array}{llll}
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_1^2(x_i) & +a_2 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_2(x_i) & +a_3 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_1(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_1(x_i) & +a_2 \sum_{i=1}^{N} f_2^2(x_i) & +a_3 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_2(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_1(x_i) & +a_2 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_2(x_i) & +a_3 \sum_{i=1}^{N} f_3^2(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_3(x_i)
\end{array}$$

Sistema lineal a resolver

$$
\begin{aligned}
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_1^2(x_i) \quad & + a_2 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_2(x_i) & + a_3 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_1(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_1(x_i) & + a_2 \sum_{i=1}^{N} f_2^2(x_i) & + a_3 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_2(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_1(x_i) & + a_2 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_2(x_i) & + a_3 \sum_{i=1}^{N} f_3^2(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_3(x_i)
\end{aligned}
$$

Si definimos

$$
M = \begin{bmatrix}
f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) \\
f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2) \\
\vdots & & \\
f_1(x_N) & f_2(x_N) & f_3(x_N)
\end{bmatrix}
$$

Sistema lineal a resolver

$$
\begin{aligned}
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_1^2(x_i) \quad &+ a_2 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_2(x_i) &+ a_3 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_3(x_i) &= \sum_{i=1}^{N} y_i f_1(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_1(x_i) &+ a_2 \sum_{i=1}^{N} f_2^2(x_i) &+ a_3 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_3(x_i) &= \sum_{i=1}^{N} y_i f_2(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_1(x_i) &+ a_2 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_2(x_i) &+ a_3 \sum_{i=1}^{N} f_3^2(x_i) &= \sum_{i=1}^{N} y_i f_3(x_i)
\end{aligned}
$$

Si definimos

$$
M = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2) \\ \vdots & & \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & f_3(x_N) \end{bmatrix}
$$

$$
M^T M = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} f_1^2(x_i) & \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_2(x_i) & \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_3(x_i) \\ \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_1(x_i) & \sum_{i=1}^{N} f_2^2(x_i) & \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_3(x_i) \\ \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_1(x_i) & \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_2(x_i) & \sum_{i=1}^{N} f_3^2(x_i) \end{bmatrix}
$$

Sistema lineal a resolver

$$
\begin{array}{llll}
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_1^2(x_i) & +a_2 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_2(x_i) & +a_3 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_1(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_1(x_i) & +a_2 \sum_{i=1}^{N} f_2^2(x_i) & +a_3 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_2(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_1(x_i) & +a_2 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_2(x_i) & +a_3 \sum_{i=1}^{N} f_3^2(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_3(x_i)
\end{array}
$$

Si definimos

$$
M = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2) \\ \vdots & & \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & f_3(x_N) \end{bmatrix}
$$

$$
M^T y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i f_1(x_i) \\ \sum_{i=1}^{N} y_i f_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{N} y_i f_3(x_i) \end{bmatrix}
$$

Sistema lineal a resolver

$$
\begin{aligned}
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_1^2(x_i) \quad & + a_2 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_2(x_i) & + a_3 \sum_{i=1}^{N} f_1(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_1(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_1(x_i) & + a_2 \sum_{i=1}^{N} f_2^2(x_i) & + a_3 \sum_{i=1}^{N} f_2(x_i) f_3(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_2(x_i) \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_1(x_i) & + a_2 \sum_{i=1}^{N} f_3(x_i) f_2(x_i) & + a_3 \sum_{i=1}^{N} f_3^2(x_i) & = \sum_{i=1}^{N} y_i f_3(x_i)
\end{aligned}
$$

Finalmente el sistema queda, matricialmente:

$$M^T M a = M^T y$$

Ejemplo en Octave

Se desea aproximar los datos $x = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$,
$y = [1{,}0 \quad 2{,}0 \quad 3{,}3 \quad 4{,}5 \quad 6{,}0 \quad 9{,}1 \quad 14{,}5]$
con una función de la forma $y = a_1 + a_2 x + a_3 e^x$.

Ejemplo en Octave

Se desea aproximar los datos $x = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$,
$y = [1{,}0 \quad 2{,}0 \quad 3{,}3 \quad 4{,}5 \quad 6{,}0 \quad 9{,}1 \quad 14{,}5]$
con una función de la forma $y = a_1 + a_2 x + a_3 e^x$.
El sistema resulta:

$$
\begin{array}{llll}
a_1 \sum_{i=1}^{N} 1^2 & +a_2 \sum_{i=1}^{N} 1 \cdot x_i & +a_3 \sum_{i=1}^{N} 1 \cdot e^{x_i} & = \sum_{i=1^N} y_i \cdot 1 \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot 1 & +a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & +a_3 \sum_{i=1}^{N} x_i e^{x_i} & = \sum_{i=1^N} y_i \cdot x_i \\
a_1 \sum_{i=1}^{N} e^{x_i} \cdot 1 & +a_2 \sum_{i=1}^{N} e^{x_i} \cdot x_i & +a_3 \sum_{i=1}^{N} (e^{x_i})^2 & = \sum_{i=1^N} y_i \cdot e^{x_i}
\end{array}
$$

Ejemplo en Octave

Se desea aproximar los datos $x = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$,
$y = [1{,}0 \quad 2{,}0 \quad 3{,}3 \quad 4{,}5 \quad 6{,}0 \quad 9{,}1 \quad 14{,}5]$
con una función de la forma $y = a_1 + a_2 x + a_3 e^x$.
Definimos datos (vectores verticales) y las funciones:

```
x=[0:6]';
y=[1.0 2.0 3.3 4.5 6.0 9.1 14.5]';
f1=@(x) ones(size(x));
f2=@(x) x;
f3=@(x) exp(x);
```

Ejemplo en Octave

Se desea aproximar los datos $x = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$,
$y = [1{,}0 \quad 2{,}0 \quad 3{,}3 \quad 4{,}5 \quad 6{,}0 \quad 9{,}1 \quad 14{,}5]$
con una función de la forma $y = a_1 + a_2x + a_3e^x$.
Definimos datos (vectores verticales) y las funciones:

```
x=[0:6]';
y=[1.0 2.0 3.3 4.5 6.0 9.1 14.5]';
f1=@(x) ones(size(x));
f2=@(x) x;
f3=@(x) exp(x);
```

definimos la matriz y el sistema a resolver:

```
M=[f1(x) f2(x) f3(x)];
A=M'*M;
b=M'*y;
a=gauss(A,b)
```

Ejemplo en Octave

Se desea aproximar los datos $x = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$,
$y = [1{,}0 \quad 2{,}0 \quad 3{,}3 \quad 4{,}5 \quad 6{,}0 \quad 9{,}1 \quad 14{,}5]$
con una función de la forma $y = a_1 + a_2 x + a_3 e^x$.
Definimos datos (vectores verticales) y las funciones:

```
x=[0:6]';
y=[1.0 2.0 3.3 4.5 6.0 9.1 14.5]';
f1=@(x) ones(size(x));
f2=@(x) x;
f3=@(x) exp(x);
```

definimos la matriz y el sistema a resolver:

```
M=[f1(x) f2(x) f3(x)];
A=M'*M;
b=M'*y;
a=gauss(A,b)
```

y construimos la función de ajuste

```
f=@(x) a(1)*f1(x)+a(2)*f2(x)+a(3)*f3(x);
```

Ejemplo en Octave