

Normas vectoriales.

Repasemos el concepto de norma sobre vectores de n coordenadas. Ya conocen la norma euclídea como medida de distancia entre vectores en el espacio euclídeo. En el laboratorio vimos que no es conveniente comparar valores (de vectores) por igualdad ("=") debido a los errores de representación y operación. Las normas también nos servirán cuando analicemos convergencia en secuencias de vectores.

La norma euclídea conocida nos dice que la distancia al origen de un vector $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ puede calcularse como

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Podemos extender esta medida a n coordenadas: $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

OBS: en \mathbb{C} consideramos los módulos de las coordenadas

$$x \in \mathbb{C} : \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

Esta norma euclídea es en caso particular una función sobre un \mathbb{K} -e.v. V que asigna a cada $x \in V$ un real no negativo. Definimos qué propiedades debe cumplir esta función.

Def. Una norma de un \mathbb{K} -e.v. V es una función $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades:

$$\textcircled{1} \quad \|x\| \geq 0 \quad (\text{y } \|x\|=0 \iff x=0), \quad x \in V$$

$$\textcircled{2} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \in \mathbb{K}, x \in V$$

$$\textcircled{3} \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{para cualquier } x, y \in V$$

Se necesita probar que la norma euclídea ($\|\cdot\|_2$) cumple las propiedades ① y ②. Para demostrar la ③ veamos primero una desigualdad que nos será útil.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz : $|\bar{x}^t y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

$$\text{con } x, y \in \mathbb{K}^n$$

Dem: Veamos primero en \mathbb{R} . Si $x=0 \circ y=0$ se cumple claramente.

Supongamos $x \neq 0 \circ y \neq 0$ y consideremos la función $\phi(\lambda) \in \mathbb{R}$.

$\phi(\lambda) = \|x - \lambda y\|_2^2$. Se observa que $\phi(\lambda) \geq 0$ por propiedad de la norma.

$$\begin{aligned} & \underbrace{u^t u = \sum_i u_i^2 = \|u\|_2^2}_{\text{para } u = x - \lambda y} \\ \Rightarrow 0 \leq \|x - \lambda y\|_2^2 &= (x - \lambda y)^t (x - \lambda y) = x^t x - 2\lambda x^t y + \lambda^2 y^t y = \\ &= \|x\|_2^2 - 2x^t y \lambda + \lambda^2 \|y\|_2^2 \end{aligned}$$

Vemos que $\phi(\lambda)$ es una cuadrática $y \geq 0$, por lo tanto tiene una o ninguna raíz en \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \|y\|_2^2 \lambda^2 - 2x^t y \lambda + \|x\|_2^2 = a\lambda^2 + b\lambda + c \\ \rightarrow \text{las raíces serán} \quad &\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Para que $\phi(\lambda)$ tenga una o ninguna raíz en \mathbb{R} debe cumplirse que el discriminante sea $\leq 0 \Rightarrow \underline{b^2 - 4ac \leq 0}$

$$\Rightarrow 4(x^t y)^2 - 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 4(x^t y)^2 \leq 4\|x\|_2^2 \|y\|_2^2$$

$$\Rightarrow |\bar{x}^t y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \checkmark$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, observemos que

$$|\bar{x}^t y| = \left| \sum_{i=1}^m \bar{x}_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^m |\bar{x}_i| |y_i| = \sum_{i=1}^m \underbrace{|x_i|}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{|y_i|}_{\in \mathbb{R}} =$$

$$\begin{aligned} & \leq \left\| \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{pmatrix} |y_1| \\ |y_2| \\ \vdots \\ |y_n| \end{pmatrix} \right\|_2 = \\ & = \|x\|_2 \|y\|_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ahora demostremos la prop. ③ sobre la norma-2 para comprobar que

Es una norma: $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

Como la norma es positiva probemos $\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m (x_i + y_i)^2 \stackrel{(2)^2 = \bar{z}_i^2}{=} \sum_{i=1}^m \overline{(x_i + y_i)} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i x_i + \sum_{i=1}^m \bar{x}_i y_i + \sum_{i=1}^m \bar{y}_i x_i + \sum_{i=1}^m \bar{y}_i y_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m |x_i|^2}_{\|x\|_2^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^m |y_i|^2}_{\|y\|_2^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i y_i + \sum_{i=1}^m \bar{y}_i x_i}_{\textcircled{*}} \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \end{aligned}$$

$\textcircled{*} = \sum \bar{x}_i y_i + \sum \bar{y}_i x_i \leq \left| \sum \bar{x}_i y_i + \sum \bar{y}_i x_i \right| \stackrel{|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|}{\leq} \left| \sum \bar{x}_i y_i \right| + \left| \sum \bar{y}_i x_i \right| \leq \underset{\substack{\leq \|x\|_2\|y\|_2 \\ \text{des. c.s.}}}{\sum} + \underset{\substack{\leq \|y\|_2\|x\|_2 \\ \text{des. c.s.}}}{\sum}$

La norma-2 es un caso particular de la norma-p:

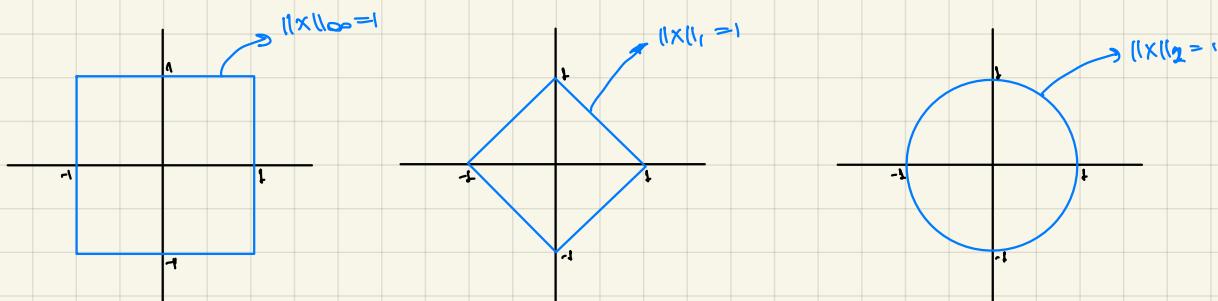
$$\text{Norma-1} : \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|$$

$$\text{Norma-2} : \|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_m|^2}$$

$$\text{Norma-p} : \|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_m|^p}$$

$$\text{Norma-}\infty : \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$$

Ejemplo en \mathbb{R}^2 de puntos con norma=1 para diferentes normas-p vectoriales.



$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max \{ |x|, |y| \} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 = |x| + |y| = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

Equivalecia entre normas.

Decimos que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_*$ son equivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tal que $\forall x \in V : c_1 \|x\|_* \leq \|x\| \leq c_2 \|x\|_*$

Es más, en un \mathbb{K} -e.v. se puede probar que todas las normas son equivalentes.

Ejemplo de equivalencias (probarlo!):

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

A partir de estas equivalencias podemos usar alguna norma de conveniencia para calcular distancia entre vectores x e y : $d(x, y) = \|x - y\|$

Def:

Una sucesión de vectores $\{x^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a x bajo una norma $\|\cdot\|$ si $\|x^{(m)} - x\| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$

Normas matriciales.

Al igual que con vectores podemos definir normas sobre matrices.

Una función $\|\cdot\|: \mathbb{K}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es norma si cumple para cualquier $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$:

- ① $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- ② $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$
- ③ $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ para cualesquier $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$

Además diremos que la norma es sub-multiplicativa si cumple, cuando $m=n$, la propiedad $\|(AB)\| \leq \|A\| \|B\|$. De este forma tenemos definida una distancia entre las matrices A y B como $\|A-B\|$.

Ejemplos para $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$:

• Norma de Frobenius $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$

Esta norma cumple la prop. submultiplicativa (probando desig. c.s.)

• Norma del máximo $\|A\|_M = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} |a_{ij}|$

Cumple las propiedades de norma pero no es submultiplicativa

Controejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\|AB\|_M = 2 \quad \text{X} \quad \|A\|_M \|B\|_M = 1$$

Otra posibilidad es definir normas matriciales a partir de normas vectoriales. Llamaremos a estos normas "subordinadas" o "inducidas" por una norma vectorial.

Def: Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ y dos normas vectoriales $\|\cdot\|_m$ en \mathbb{K}^m y $\|\cdot\|_m$ en \mathbb{K}^m respectivamente. Se define $\|\cdot\|: \mathbb{K}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_m} = \max_{\|x\|_m=1} \|Ax\|_m$$

De esta forma tenemos automáticamente definida la norma- p matricial inducida por la norma- p vectorial:

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

Obs: notar que si $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ no es cuadrada entonces

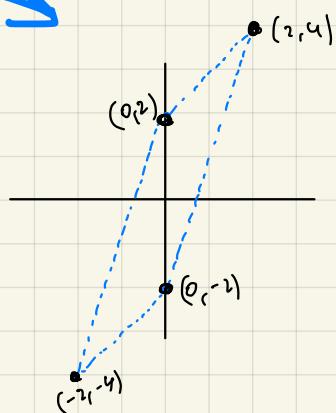
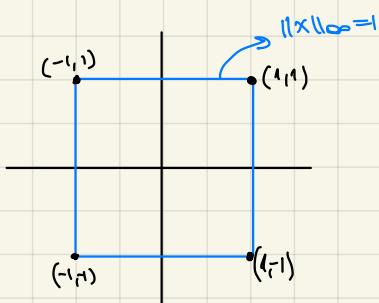
$Ax \in \mathbb{K}^m \rightarrow \|\cdot\|_p$ calculado sobre Ax es una norma- p sobre \mathbb{K}^m

$x \in \mathbb{K}^m \rightarrow \|\cdot\|_p$ calculada sobre x es una norma- p sobre \mathbb{K}^m

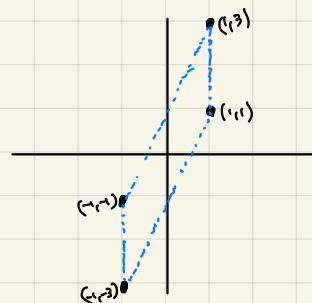
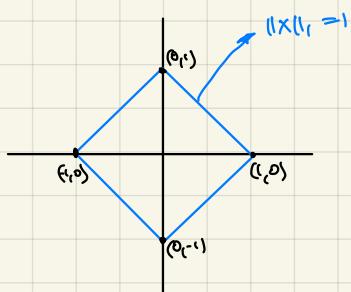
Veamos ejemplos con $m=n=2$ en $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

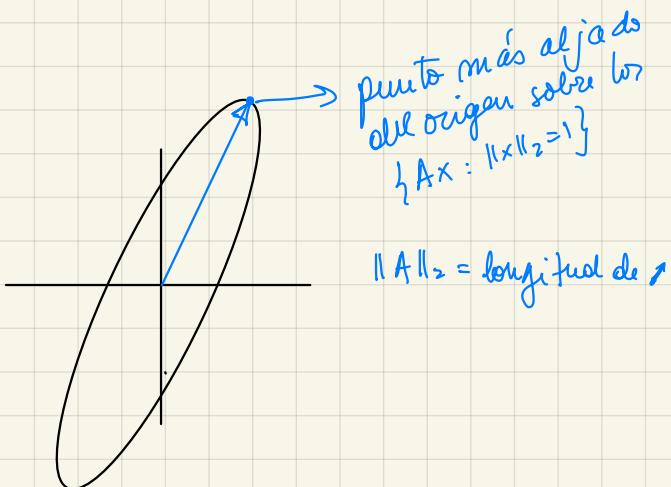
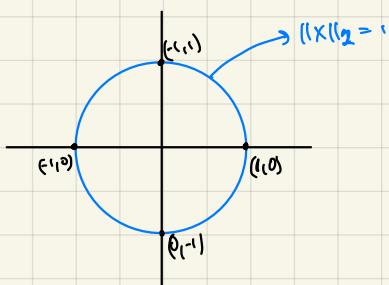
Ax



$$\|Ax\|_{\infty} = 4$$



$$\|Ax\|_1 = 4$$



$$\|Ax\|_2 = \text{longitud de la recta}$$

Algunas propiedades de las normas matriciales inducidas

- $\|I\| = 1$

$$\|I\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1 \quad \checkmark$$

- $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ para cualquier $x \neq 0$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

OBS: notar que $\|A\|$ es una norma matricial pero los otros normas son vectoriales.

A esta propiedad se la suele llamar "consistencia" (es decir, las normas matriciales y vectoriales son consistentes entre sí)

- Submultiplicatividad: sea A, B matrices cuadradas

$$\Rightarrow \|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|ABx\| \leq \underbrace{\max_{\|x\|=1} \|Ax\| \|Bx\|}_{\|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \text{ por consistencia}} = \|A\| \max_{\|x\|=1} \|Bx\| \rightarrow \|A\| \|B\|$$

$$\therefore \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

- Para algunas normas inducidas tenemos formula, $A \in K^{n \times m}$:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{1j}|, \sum_{i=1}^m |a_{2j}|, \dots, \sum_{i=1}^m |a_{mj}| \right\} \rightarrow \text{la máxima de los sumos por columna}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max \left\{ \sum_{j=1}^m |a_{1j}|, \sum_{j=1}^m |a_{2j}|, \dots, \sum_{j=1}^m |a_{nj}| \right\} \rightarrow \text{la máxima de los sumos por fila}$$

Proseguimos la fórmula para la norma-1 matricial. Podemos hacerlo a través de la doble desigualdad. ($A \in \mathbb{K}^{m \times m}$)

$$\Leftarrow \text{q.v.p. } \|A\|_1 \leq \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

podemos acotar $\|Ax\|_1$ para un x genérico de norma-1 igual a 1 (si lo acotamos para cualquier x , en particular el máximo de $\|Ax\|_1$ también lo estará)

Sea $x \in \mathbb{K}^m$ tal que $\|x\|_1 = 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|Ax\|_1 &= \left\| \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} x_j \\ \sum_j a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj} x_j \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| \\ &= \sum_{j=1}^m |x_j| \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^m x_j \max_k \sum_{i=1}^m |a_{ik}| = \left(\max_k \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \right) \underbrace{\sum_{j=1}^m |x_j|}_{\|x\|_1=1} \\ &= \max_k \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \end{aligned}$$

Sigue, como $\|Ax\|_1 \leq \max_k \sum_{i=1}^m |a_{ik}|$ para cualesquier x : $\|x\|_1 = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1}_{\|A\|_1} \leq \max_k \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{q.v.p. } \|A\|_1 \geq \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Dado que $\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \Rightarrow \|A\|_1 \geq \|Ax\|_1$ para todo x : $\|x\|_1 = 1$

Elijamos entonces algún x^* de norma 1 tal que $\|Ax^*\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$

Sea j^* la columna que más suma su módulo, es decir, $j^* = \max\{j : \sum_i |a_{ij}|\}$

$$\begin{aligned} \text{Sigue, tomando } x^* = e_{j^*} \Rightarrow \|Ax^*\|_1 &= \|Ae_{j^*}\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} a_{1j^*} \\ a_{2j^*} \\ \vdots \\ a_{mj^*} \end{pmatrix} \right\|_1 = \sum_{i=1}^m |a_{ij^*}| = \\ &= \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \end{aligned}$$

Número de condición

Sea $A \in \mathbb{K}^{M \times M}$ una matriz invertible y $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{M \times M} \rightarrow \mathbb{R}$ una norma matricial. Definimos el número de condición $\kappa(A)$ como:

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Veamos con un ejemplo por qué importa este número al resolver un sistema.

Consideremos

$$\begin{pmatrix} 0,8566 & 0,6183 \\ 0,8415 & 0,6074 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4749 \\ 1,4489 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene a $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ como solución exacta.

Consideremos ahora un sistema perturbado $Ax = \tilde{b}$

- $\tilde{b} = b + \delta b$ con $\delta b = \begin{pmatrix} 0,0001 \\ -0,0001 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1,4749 \\ 1,4489 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0001 \\ -0,0001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4750 \\ 1,4488 \end{pmatrix}$$

Error absoluto: $\|b - \tilde{b}\|$

Error relativo: $\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

En nuestro caso la perturbación es pequeña

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \approx 0,000678 \approx 7 \cdot 10^{-4}$$

Tenemos 2 sistemas:

Sistema Original $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 0,8566 & 0,6183 \\ 0,8915 & 0,6074 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4749 \\ 1,4489 \end{pmatrix}$$

→ solución exacta $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sistema perturbado $A\tilde{x} = \tilde{b}$

$$\begin{pmatrix} 0,8566 & 0,6183 \\ 0,8915 & 0,6074 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4750 \\ 1,4488 \end{pmatrix}$$

→ ¿cómo esperamos que sea la solución \tilde{x} del sistema perturbado?

$$A\tilde{x} = \tilde{b} \quad \text{con} \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} -199,934 \\ 279,377 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200,93 \\ 278,37 \end{pmatrix} = x + \delta x$$

$$\text{Error relativo: } \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 278,37$$

En este sistema, trabajando con máxima precisión, no podemos asegurar que una pequeña perturbación en b repercuta en una pequeña perturbación en la solución del sistema modificado.

Propiedad:

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

(278,37)

(7.10⁻⁴)

- En nuestro ejemplo, la matriz está "mal condicionada" (número de condición grande)

$$k(A) \approx 4105783$$

→ Una 'pequeña' perturbación al sistema no otorga una solución cercana a la del sistema original.

Demostrar la propiedad anterior

$Ax = b \rightarrow x$ sol. del sistema original

Suponiendo A inversible $\Rightarrow x = A^{-1}b$

Por otro lado tenemos el sistema perturbado

y su solución: $A(x + \delta x) = b + \delta b$

$$\Rightarrow A\delta x = \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\|$$

$$\Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\| \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Por otro lado } \|Ax\| = \|b\| \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad \textcircled{2}$$

Miendos \textcircled{1} y \textcircled{2}:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\| \|A^{-1}\|}_{K(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Siendo $\|\delta x\| = \|x - \tilde{x}\|$ y $\|\delta b\| = \|b - \tilde{b}\|$ llegamos a la desigualdad buscada

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

Obs: El mismo desarrollo puede realizarse para el sistema $A^{-1}b = x$ y obtener la cota

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq K(A) \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$$

Algunas propiedades de $k(A)$

- El número de condición siempre se define respecto a una norma y a menos que se especifique lo contrario, usaremos normas inducidas
- $\forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{K} : k(\alpha A) = \|\alpha A\| \|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha| \frac{\|A\|}{\|A^{-1}\|} = |\alpha| k(A)$
- $k(I) = 1$ para toda norma inducida.
- $k(A) = k(A^{-1})$

Número de condición y singularidad

El número de condición nos permite medir la distancia relativa a matrices singulares

Teorema Para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular, se cumple:

$$\frac{1}{k(A)} = \inf_{B \text{ singular}} \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$$

Da así igualdad $\frac{1}{k(A)} \leq \frac{\|A-B\|}{\|A\|}$ es un ejercicio

de lo práctico.

Sugerencia para probarlo: Probar que si B no es inversible entonces $\exists x \neq 0$ tal que $(A-B)x = Ax$

Esta desigualdad nos da una cota inferior para $k(A)$ sin tener que calcular la inversa de A :

$$k(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A - B\|}$$

probando con diferentes matrices singulares B .

Otra cota inferior posible:

Supongamos que hemos resuelto el sistema $Ax = b$ por eliminación gaussiana y queremos estimar $k(A)$.

Si elegimos $\|\cdot\|_1$, podemos calcular fácilmente $\|A\|_1$. ¿Cómo estimamos $\|A^{-1}\|_1$? Veamos que:

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|_1}{\|x\|_1} \geq \frac{\|A^{-1}y\|_1}{\|y\|_1} \text{ para cualquier } y \neq 0$$

Podemos tomar en particular $y = b$, ya que $A^{-1}b = \hat{x}$, con \hat{x} la solución hallada del sistema. $\Rightarrow \|A^{-1}\|_1 \geq \frac{\|\hat{x}\|_1}{\|b\|_1}$

y obtenemos la cota inferior $k(A) \geq \frac{\|A\|_1 \|\hat{x}\|_1}{\|b\|_1}$

Observemos también que $k(A)$ no guarda relación con el determinante considerando la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\|A\| = \alpha$ y $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$ para cualquier norma inducida.

$\Rightarrow k(A) = 1$ (esta bien condicionada)

Pero $\det(A) = \alpha^2$ y para valores muy pequeños es "casi" singular.