Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación
2,5	2,5	2,5	2,5	10

Álgebra Lineal Computacional

Segundo Parcial – 16 de Marzo de 2023

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4. ***Realice todos los ejercicios en hojas separadas.***

Ejercicio 1. Considerar las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

y, en cada caso, el Método de la Potencia dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|} \\[2ex] r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t Av^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Bv^{(k-1)}}{\|Bv^{(k-1)}\|} \\[2ex] r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t Bv^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases},$$

para $k \geq 1$.

a) (1.5 pts.) Verificar que la matriz A satisface las hipótesis del Método de la Potencia. Hallar un vector $v^{(0)}$ que no sea autovector de A tal que r_k converja al autovalor de módulo máximo. Hallar un vector $v^{(0)}$ que no sea autovector de A tal que r_k converja a un autovalor distinto del anterior.

b) (1 pt.) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que, al aplicar el Método de la Potencia a B con $v^{(0)} = (\alpha^2 - 1, -5, -8)$, r_k converja al segundo autovalor de módulo máximo.

Ejercicio 2. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c & 1/2 \\ c & 1 & c/2 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b \in \mathbb{R}^3$, utilizando el método de Gauss-Seidel. Decidir para qué valores de c el método resulta convergente para todo vector inicial $x^{(0)}$.

b) (1 pt.) Para $c = 1/3$, verificar que el método de Jacobi también resulta convergente. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápido?

Ejercicio 3. Para $a \neq 0$ se define

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Hallar la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$ de A.

b) (1 pt.) Hallar la matriz de rango 1 más cercana a A.

rcicio 4. En un bosque se ha identificado una especie de planta exótica que probable
a sido introducida ilegalmente. A lo largo de los últimos años se ha registrado cómo prog
úmero de individuos de dicha especie. En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos
le x es el año desde el comienzo del estudio e y la cantidad de individuos:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	216	219	287	303	439	556	681

a) (1 pt.) Hallar el polinomio $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

b) (1 pt.) Ajustar una función de la forma $g(x) = d_0 e^{d_1 x}$ aplicando cuadrados mínimos sobre la función transformada convenientemente. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

c) (0.5 pts.) La especie será considerada una plaga cuando supere los 1000 individuos. Para cada modelo de los ítems anteriores, ¿luego de cuántos años será declarada una plaga?

HOJA N° 1

FECHA 16/3/2023

Álgebra lineal computacional. 2do Parcial

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{A v^{(k-1)}}{\|A v^{(k-1)}\|} \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{B v^{(k-1)}}{\|B v^{(k-1)}\|} \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t B v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases}$$

a) Para que A satisfaga las hipótesis del método de la potencia, es decir, que para algún $v^{(0)}$ dado, r_k converge al autovalor de módulo máximo, debe cumplir:

- A diagonalizable
- A tiene único autovalor de módulo máximo

Busco los autovalores de A y sus respectivos autovectores, para ver si lo satisface

$Av=\lambda v \Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0$

$$\chi_A=\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -3 & 3 \\ 3 & -1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}=(-2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -3 \\ 3 & -1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}=(-2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda)$$

$\lambda_1=4$ ✓

$\lambda_2=-2$

$\lambda_3=1$

$\lambda_4=-1$

Como se ve, A tiene único autovalor de módulo máximo, por lo que falta ver que A sea diagonizable. Esto pasa sí y sólo si puedo hallar una base de autovectores de A

$$E_4=Nu\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)\underset{\substack{L_3/-3 \\ L_4/-6 \\ L_2/3}}{\overset{L_1/-3}{\Rightarrow}}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5/3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\underset{L_3-L_1\to L_3}{\overset{L_2+L_1\to L_2}{\Rightarrow}}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\overset{L_3-2L_4\to L_3}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ALC, 2do Parcial

$\cancel{x_1 - 5/3 x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5/3 x_2}$

$L_1 + L_4 \to L_1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - 5/3 x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 5/3 x_2 \end{cases}$$

✓

$E_4 = \langle (5/3, 1, 0, 0) \rangle$

$$E_{-2}: \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 + L_3 \to L_1}{\overset{L_2 + L_3 \to L_2}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underset{L_3/3}{\overset{L_1/6}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 - 3L_1 \to L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \end{cases}$$

$E_{-2} = \langle (0, 0, 1, 1) \rangle$

$$E_1: \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 + L_3 \to L_2 \\ L_1 + L_3 \to L_1}}{\overset{L_4 - L_3 \to L_4}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underset{L_3/-3}{\overset{L_2 - L_1 \to L_2}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2/-2}{\overset{L_1/3}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$E_{-1} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 - 3L_4 \to L_3}}{\overset{\substack{L_1 + 3L_4 \to L_1 \\ L_2 + 3L_4 \to L_2}}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1/5 \\ L_2/3 \\ L_3/2}}{\overset{L_4 \cdot -1}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3/5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2 + L_3 \to L_2 \\ L_1 + 3/5 L_3 \to L_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

✓

$$\overset{L_2 - L_1 \to L_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 \text{ libre} \end{cases} \Rightarrow E_{-1} = \langle (0,1,0,0) \rangle$$

Encontré una base de autovectores de $\mathbb{R}^4$ (lo cual ~~a~~ era claro que existía, ya que A tenía 4 autovalores distintos y cada uno tiene ~~...~~ al menos un autovector), por lo que A es diagonalizable, y cumple las hipótesis del método de la Potencia. ✓

Para hallar un vector $v^{(0)}$ que ~~...~~ haga que r_k converja al autovalor de módulo máximo uso que, por propiedades de autovectores ✓

$$v^{(k)} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k w_1 + \alpha_2 \lambda_2^k w_2 + \alpha_3 \lambda_3^k w_3 + \alpha_4 \lambda_4^k w_4}{\| \alpha_1 \lambda_1^k w_1 + \alpha_2 \lambda_2^k w_2 + \alpha_3 \lambda_3^k w_3 + \alpha_4 \lambda_4^k w_4 \|_2}$$

NOTA

Donde (w_1, w_2, w_3, w_4) son los autovectores asociados a los autovalores λ_1 a λ_4 respectivamente, y $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ las coordenadas de $v^{(0)}$ en la base de autovectores. Como el λ_1 de módulo máximo es único, ~~y el autovector asociado a λ_1, ... el cociente de Rayleigh~~ r_k va a converger a λ_1. Basta encontrar un $v^{(0)}$ tal que $\alpha_1 \neq 0$. Como me piden que $v^{(0)}$ no sea autovector de A, pido que algún otro α_i sea distinto a 0. Si elijo $v^{(0)} = (1,1,1,1)_B$, esto cumple.

$$v^{(0)} = 1 . (5/3, 1, 0, 0) + 1 . (0, 0, 1, 1) + 1 . (1, 0, 1, 0) + 1 . (0, 1, 0, 0)$$

$$\boxed{v^{(0)} = (8/3, 2, 2, 1)}$$ ✓

Para que algún otro $v^{(0)}$ converja a un autovalor distinto tengo que pedir que $\alpha_1 = 0$. Ahora, dado $\alpha_1 = 0$, esto no me asegura que r_k converja a un autovalor, pero sé que el cociente de Rayleigh converge a un autovalor de A si $v^{(k)}$ converge a un autovector de A. Si elijo las coordenadas $(0,1,1,1)$, me aseguro que $v^{(0)}$ no es autovector de A, y logra que r_k no converja al autovalor de máximo. Falta ver que $v^{(k)}$ converja a un ~~autovalor~~ autovector de A.

$$v^{(k)} = \frac{0.(4)^k.(\cancel{5/3},1,0,0) + 1.(-2)^k.(0,0,1,1) + 1.1^k.(1,0,1,0) + 1.(-1)^k.(0,1,0,0)}{\| 1.(-2)^k.(0,0,1,1) + 1^k.(1,0,1,0) + (-1)^k.(0,1,0,0)\|_2}$$

$$v^{(k)} = \frac{(-2)^k.[(0,0,1,1) + \frac{1}{(-2)^k}.(1,0,1,0) + \left(\frac{-1}{-2}\right)^k.(0,1,0,0)]}{|(-2)^k|.\|(0,0,1,1) + \frac{1}{(-2)^k}.(1,0,1,0) + \left(\frac{-1}{-2}\right)^k.(0,1,0,0)\|_2}$$

$$\lim_{k\to\infty} v^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{-2}{|-2|}\right)^k.\frac{[(0,0,1,1) + \overbrace{\left(\frac{1}{(-2)^k}\right)}^{0}(1,0,1,0) + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}^{0}.(0,1,0,0)]}{\|(0,0,1,1) + \underbrace{\left(\frac{1}{(-2)^k}\right)}_{0}(1,0,1,0) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{0}.(0,1,0,0)\|_2}$$

$$\lim_{k\to\infty} v^{(k)} = (-1)^k.\frac{(0,0,1,1)}{\|(0,0,1,1)\|_2} = (-1)^k.(0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \checkmark$$

Como se puede ver, esto no converge a un autovector de A, sino que alterna entre dos ~~autovalores~~ autovectores pertenecientes al mismo autovalor. Si inserto este autovector en el cociente de Rayleigh: ✓

$$\lim_{k\to\infty} r_k(v^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}{(v^{(k)})^t . \cancel{A} . v^{(k)}} = \cancel{\lim_{k\to\infty} (-1)^k (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}).A}$$

ALC: 2do Parcial

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{(-1)^k \cdot (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \cdot A \cdot (-1)^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{(-1)^k \cdot (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \cdot \cancel{A} \cdot (-1)^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} =$$

$$\frac{\cancel{(-1)}^{2k} \cdot (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \cdot -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{\cancel{(-1)}^{2k} \cdot (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} = -2 \cdot \frac{\overbrace{\cancel{(0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}}^{\text{escalar}}}{\underbrace{\cancel{(0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}}_{\text{escalar}}}$$

$= -2.$

r_k converge igual al autovalor de A. Esto pasa porque, a pesar de que ~~...~~ $v^{(k)}$ no converge a un autovector, si todavía hay un autovalor ~~de~~ de modulo máximo unico, r_k convergerá a este.

$v^{(0)}$ es, entonces

$$v^{(0)} = 1 \cdot (0,0,1,1) + 1 \cdot (1,0,\cancel{1},0) + 1 \cdot (0,1,0,0) = (1,1,2,1)$$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Hallar los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que, con el método de la Potencia, $v^{(0)} = (\alpha^2 - 1, -5, -8)$ converja al 2do autovalor de módulo máximo

Usando el mismo procedimiento que en A, busco autovalores y autovectores de B. Esta vez, usando Python, veo que los autovalores son

$\lambda_1 = 8$
$\lambda_2 = -2$
$\lambda_3 = 0$

y sus autovectores respectivos son:

$w_1 = (-1, 0, -1)$
$w_2 = (0, 1, 1)$
$w_3 = (-1, -1, 0)$

Al ver que tengo que hacer que r_k <u>no</u> converja al autovalor de módulo máximo, usando que, por propiedades de autovectores

$v^{(k)} = \beta_1 \lambda_1^k \cdot w_1 + \beta_2 \lambda_2^k w_2 + \beta_3 \lambda_3^k \cdot w_3$. $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ coord de v^0 en base de autovectores

Como esta matriz cumple con las hipótesis del método de la Potencia, r_k convergerá a λ_1 si $\beta_1 \neq 0$, pido que $\beta_1 = 0$ así no converge a λ_1. Como los autovalores restantes son -2 y 0, todavía tenemos un único autovalor

NOTA

máximo, pero, como este autovalor es negativo, sucederá lo mismo que en a): $v^{(k)}$ no converge a w_2, sino que alterna entre 2 autovectores múltiplos de este, pero r_k seguirá convergiendo a λ_2. Usando todo esto, se que ✓

$$v^{(0)} = 0\cdot(1,0,1) + \beta_2 \cdot (0,1,1) + \beta_3 \cdot (-1,-1,0)$$

$$(\alpha^2 - 1, -5, -8) = (-\beta_3, \beta_2 - \beta_3, \beta_2) \quad ✓$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - 1 = -\beta_3 \\ -5 = \beta_2 - \beta_3 \\ -8 = \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = -\beta_3 + 1 \\ -5 = -8 - \beta_3 \\ -8 = \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = -\beta_3 + 1 \\ \beta_3 = -3 \\ -8 = \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 3 + 1 \\ \beta_3 = -3 \\ \beta_2 = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ \beta_3 = -3 \\ \beta_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ o } \alpha = -2 \quad ✓$$

Por lo tanto, $\alpha \in \{-2, 2\}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -c & 1/2 \\ c & 1 & c/2 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que la fórmula del método Gauss-Seidel es

$$x_{n+1} = -(D+L)^{-1} \cdot U \cdot x_n + (D+L)^{-1} \cdot b$$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 4c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ c & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x_{n+1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot b$$

Sabiendo que B_{GS}, la matriz del método, es

$$B_{GS} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ -4c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - 4cL_1]{L_2 - cL_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4c & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 4c^2 & -2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -1/2 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & -4c^2 & 2c \end{pmatrix}$$

Se que x_n converge para todo vector inicial $v^{(0)}$ si y solo si

$e_n \xrightarrow{n \to 0} 0 \Leftrightarrow \|e_n\| = \|B_{GS}^n e_0\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ Para cualquier norma.

Como $\|(B_{GS})^n e_0\| \leq \|B_{GS}^n\| \|e_0\| \leq \|B_{GS}\|^n \|e_0\|$, alcanza pedir que, para toda norma, $\|B_{GS}\|^n \to 0 \Leftrightarrow \|B_{GS}\| < 1$.

Como $\rho(B_{GS}) = |\lambda_{max}| = \inf \|B_{GS}\|$ para toda norma, se que si ~~alguna norma cumple~~ $\rho(B_{GS}) < 1$, existe una norma que cumple $\|B_{GS}\| < 1$, y, ~~como en una sol~~ por la igualdad de normas, se que basta que una norma tienda a 0 para que el resto también tienda a 0, por lo que B_{GS} converge si y solo si $\rho(B_{GS}) < 1$. Para eso, busco autovalores de B_{GS}.

$$\chi_{B_{GS}} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & c & -1/2 \\ 0 & -c^2-\lambda & 0 \\ 0 & -4c^2 & 2c-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (-c^2 - \lambda) \cdot (2c - \lambda) =$$

$$\lambda \cdot (c^2 + \lambda) \cdot (2c - \lambda)$$

Por lo tanto

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -c^2 \\ \lambda_3 = 2c \end{cases}$, Para que $\rho(B_{GS}) = |\lambda_{max}| < 1$, debo pedir

$\rho(B_{GS}) = \max\{|0|, |-c^2|, |2c|\} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 1 \checkmark \\ |-1||c^2| < 1 \\ |2||c| < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 < 1 \\ 2|c| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < c < 1 \\ -\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{|c| < \frac{1}{2}}$

Gauss-Seidel converge para todo $V^{(0)} \Leftrightarrow |c| < \frac{1}{2}$.

b) $c = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El método de Jacobi se define por

$x_{n+1} = -(D)^{-1} \cdot (L+U) x_n + (D)^{-1} b$

La matriz del método es

$B_J = -(D)^{-1} (L+U) = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Id}{}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $\quad Id^{-1} = Id$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Usando el mismo argumento del ejercicio anterior, el método de Jacobi converge si y sólo si $\rho(B_J) < 1$. Usando Python,

los autovectores de B_J son

$\lambda_1 = 0{,}80473785$

$\lambda_2 = -2/3$

$\lambda_3 = -0{,}13807119$

por lo que $\rho(B_J) = |\lambda_{max}| = 0{,}80473785 < 1$

Por lo tanto, el método de Jacobi converge para $c = 1/3$ para todo $v^{(0)}$

Sabiendo que, para el método de Gauss-Seidel, los autovalores de B_{GS} son

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -c^2 = -\left(1/3\right)^2 = -1/9 \Rightarrow \rho(B_{GS}) = 2/3 = 0{,}\overline{6}$

$\lambda_3 = 2c = 2/3$

Como el radio espectral de la matriz del método indica la velocidad de convergencia del método en promedio, siendo más rápido conforme ~~éste~~ se acerca a 0, me conviene tomar el método cuyo radio espectral es menor, ya que convergerá, en promedio, más rápido.

Como $\rho(B_{GS}) = 0{,}\overline{6} < 0{,}80473785 = \rho(B_J)$. Conviene usar el método de Gauss-Seidel, ya que este es más rápido

Muy bien justificado

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \neq 0$

$$\underset{(3\times3)}{A} = \underset{(3\times3)}{U}\ \underset{(3\times3)}{\Sigma_1}\ \underset{(3\times3)}{(V^t)}$$

a) $A = U \Sigma_1 V^t$

Como $A^t A = V . \Sigma_1^t . \overbrace{U^t . U}^{Id} . \Sigma . V^t = V \Sigma^t \Sigma V^t$

$(\equiv)(|||)$

filas ortonorm columnas ortonorm

y $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \Sigma^t \Rightarrow \Sigma_1^t \Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$

entonces $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ donde λ_i es autovalor de $A^t A$ (tomando la raíz positiva), Por otro lado, como

$A^t A = V D V^t$ es la diagonalización de $A^t A$, entonces

$V = C_{BE}$ es la base de autovectores de $A^t A$, donde los autovectores son columnas de V.

Busco $A^t A$ y sus autovalores y autovectores asociados

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores: $\chi_{A^tA} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ a & a^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(a^2-\lambda) - a^2]$

$= (1-\lambda).(\lambda^2 - a^2\lambda - \lambda + \cancel{a^2} - \cancel{a^2}) = (1-\lambda).(\lambda^2 - \lambda.(a^2+1)) =$

$(1-\lambda).\lambda.(\lambda - (a^2+1))$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = (a^2+1)$ $\Rightarrow$

Como $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \Rightarrow a^2+1 > 1$
$\Downarrow$
el valor singular máximo es siempre $\sqrt{a^2+1}$ y no hay valores singulares repetidos

$\sigma_1 = \sqrt{a^2+1}$
$\sigma_2 = 1$ $\Rightarrow$ $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\sigma_3 = 0$

Base autovectores de A^tA, sabiendo que V_i la columna i de V es el autovector de A^tA asociado a $(\sigma_i)^2$ y normalizado

E_{a^2+1}: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a^2-1 & a & 0 & 0 \\ a & a^2-a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -a^2 & a & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \end{array}\right)$

$L_1 + aL_2$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} aX_1 - X_2 = 0 \\ a^2X_3 = 0 \end{array} \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{l} X_1 = \frac{X_2}{a} \\ X_3 = 0 \end{array} \Rightarrow E_{a^2+1} = \langle (\frac{1}{a}, 1, 0) \rangle$

ALC: 2do parcial

HOJA N° 9

FECHA

$$v_1 = \frac{\left(\frac{1}{a},1,0\right)}{\left\|\left(\frac{1}{a},1,0\right)\right\|_2} = \frac{\left(\frac{1}{a},1,0\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}} = \frac{\left(\frac{1}{a},1,0\right)}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = \frac{a\cdot\left(\frac{1}{a},1,0\right)}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, 0\right)$$

$$E_1: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 0 & 0 \\ a & a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[a\neq 0]{L_2-\left(\frac{a^2-1}{a}\right)L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[a\neq 0]{L_2/a,\ L_1/a} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases} \Rightarrow E_1 = \langle(0,0,1)\rangle \text{ (Ya normalizado)}$$

$$v_2 = (0,0,1)$$

$$E_0: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ a & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{L_2-aL_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + a x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$E_0 = \langle(-a,1,0)\rangle \Rightarrow v_3 = \frac{(-a,1,0)}{\|(-a,1,0)\|_2} = \frac{(-a,1,0)}{\sqrt{a^2+1}} = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, 0\right)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+a^2} & 0 & -a/\sqrt{1+a^2} \\ a/\sqrt{1+a^2} & 0 & 1/\sqrt{a^2+1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-a}{\sqrt{1+a^2}} & \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Como A^tA es simétrica definida positiva, cumple que sus autovectores son ortogonales entre sí, por lo que V es ortonormal

V ortonormal

Me falta hallar U.

Como $A = U.\Sigma.V^t \Rightarrow AV = U\Sigma \underbrace{V^t V}_{Id} = U\Sigma$

entonces $\underset{(v_1\, v_2\, v_3)}{AV} = U.\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(Av_1 \middle| Av_2 \middle| Av_3\right) = \left(u_1\sigma_1 \middle| u_2\sigma_2 \middle| u_3\sigma_3\right)$

entonces se cumple que, si $\sigma_i \neq 0$, u_i columna de U es dada por

$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A.v_i$ (v_i columna i de V)

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \begin{pmatrix} \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $\sigma_3 = 0$, uso Gram-Schmidt para hallar U_3, partiendo de la base $\{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$

$$U_3 = (0,1,0) - \cancel{\frac{\overbrace{\langle (1,0,0),(0,1,0)\rangle}^{0}}{\underbrace{\langle (1,0,0),(1,0,0)\rangle}_{1}}} (1,0,0) - \cancel{\frac{\overbrace{\langle (0,0,1),(0,1,0)\rangle}^{0}}{\underbrace{\langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle}_{1}}(0,0,1)}$$

$$U_3 = (0,1,0) \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hoja 10

$$U \qquad \Sigma \qquad V^t$$

Entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+a^2} & a/\sqrt{1+a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a/\sqrt{1+a^2} & 1/\sqrt{1+a^2} & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Verificación

7) Para hallar la matriz de rango 1 más cercana a A, uso la descomposición en valores singulares. Como U y ~~[illegible]~~ V^t son ortonormales, estas no afectan el rango de la matriz, por lo que este está dado por Σ. Para que A sea de rango 1, debo hacer que Σ sea de rango 1, pero esto lo logro solamente llevando uno de sus valores singulares no nulos a 0, al ser Σ diagonal. Para buscar la que se encuentra a menor distancia de A, debo anular el valor singular mínimo, que, dadas las condiciones del ejercicio, siempre es 1.

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = U \tilde{\Sigma} V^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+a^2} & a/\sqrt{1+a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a/\sqrt{1+a^2} & 1/\sqrt{1+a^2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+a^2} & a/\sqrt{a^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a/\sqrt{1+a^2} & 1/\sqrt{1+a^2} & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$A =$