

Traspuesta y traza

Definición:

1) Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, la matriz traspuesta $A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es aquella que tiene por columnas las filas de A .

Formalmente, si $A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$

$$\Rightarrow A^T = (a_{ji})_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, m}}$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Propiedades:

- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T A^T$

Ejercicio: Hacer dem. de cada prop.

Para la propiedad del producto usar la definición del producto de matrices y la se trasponga. (Ej 11 P1)

2) La traza de una matriz A cuadrada ($\text{tr}(A)$) se define como la suma de los elementos de la diagonal.

$$A = (a_{ij})_{i,j=1 \dots n}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr}(A) = 1+5+9 = 15.$

Propiedades: $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

(matrices cuadradas de misma dimensión)

$$\cdot \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$

Ejercicios: hacer una demostración de cada propiedad (Ej. 11 P1).

Para los del producto usar definición del producto.

- 3) Una matriz A cuadrada se dice simétrica si es igual a su traspuesta. $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$ es simétrica si $A = A^t$.

Propiedades: $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricos

Ejercicio: hacer una dem. de eso (ej

Matriz identidad e inversa

$$\text{Id}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{2 \times 2}$$

$$\text{Id}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{n \times n}$$

Inversa: Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz cuadrada, A se dice invertible si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$A \cdot B = \text{Id}_{n \times n} = B \cdot A.$$

En este caso la matriz B es única, se la llama inversa de A y se lo nota por A^{-1} .

¿ Cómo se busca la inversa de una matriz?

Buscamos B : $A \cdot B = \text{Id}_{n \times n}$

Si miramos esta igualdad por columna, buscamos B :

$C_1(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $A \cdot C_1(B) = e_1^T$
buscamos vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

es decir, $C_1(B)$ es una solución de

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_1^T$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(A \mid \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Para la segunda columna

$$C_2(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ es decir } A \cdot \underbrace{C_2(B)}_{\text{buscamos vector}} = e_2^T$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

es decir, $C_2(B)$ es una solución de

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = e_2^T$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(A \mid \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right)$$

y así ... para la columna n :

$$C_n(A \cdot B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ es decir } A \cdot \underbrace{C_n(B)}_{\text{buscamos vector}} = e_n^T$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

es decir $C_n(B)$ es una solución de

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = e_n^T$$

Resolvemos la matriz ampliada

$$\left(A \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right).$$

Es decir, tenemos que resolver
m-sistemas lineales $A \cdot x = e_i$ con
 $i=1 \dots n$. Escribimos todo junto

$$\left(A \mid \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right),$$
 de esta manera

cuando terminemos de triangular,
si llegamos a:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \mid \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{matrix} \right)$$



acá tenemos
la columna 1
de B que buscá-
bamos.

Acá tenemos
la columna n
de B que buscá-
bamos.

de B que buscábamos

→ esa $B = (b_{ij})_{i,j=1 \dots n}$ es la matriz que hace que $A \cdot B = \text{Id}$.

Si en cambio al hacer eliminación Gaussiana llegamos a una fila de ceros del lado izquierdo, tenemos que no existe la B buscada y por lo tanto la matriz A no es invertible.

Inversa a derecha y rango

Hasta aquí mostramos que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$ si existe solución de $Ax=b$ para cualquier $b \in \mathbb{k}^n$, entonces podemos construir $B \in \mathbb{k}^{n \times n}$: $A \cdot B = \text{Id}_{n \times n}$.

Pero sabemos que existe solución única de $Ax=b$ para cualquier b es si y solo si al hacer operaciones permitidas de filas

llegamos a $(\tilde{A}|\tilde{b})$ es compatible que no tiene ninguna fila de ceros. O sea

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

con $\tilde{a}_{ii} \neq 0$
 $\forall i=1, \dots, n$

Esto nos dice que

$$\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \dim \langle f_1(\tilde{A}), \dots, f_m(\tilde{A}) \rangle = m \text{ y}$$

$$\text{como } \langle f_1(A), \dots, f_m(A) \rangle = \langle f_1(\tilde{A}), \dots, f_m(\tilde{A}) \rangle$$

estos subespacios deben tener misma dim
con lo cual

$$\operatorname{rg}(A) = \dim \langle f_1(A), \dots, f_m(A) \rangle = m$$

luego, vemos que: Dado $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$

Existe $B \in \mathbb{k}^{n \times n}$: $A \cdot B = \operatorname{Id}_{n \times n}$ si

y solo si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Veamos ahora que si existe B : $AB = \operatorname{Id}_{n \times n}$
entonces existe C : $C \cdot A = \operatorname{Id}_{n \times n}$ y

además $B = C = A^{-1}$.

Supongamos que pudimos encontrar B:

$AB = \text{Id}_{n \times n}$ (con la técnica que planteamos arriba) $\Rightarrow \text{rg}(A) = n$

Veamos que existe C: $C \cdot A = \text{Id}_{n \times n}$.

Buscamos C: $C \cdot A = \text{Id}_{n \times n} \Rightarrow$ usando ahora operaciones de fila, debe ser

$$F_i(CA) = F_i(\underbrace{C}_A \cdot A) = e_i$$

\Rightarrow resolvemos los sistemas lineales:

$$\tilde{x} \cdot A = e_i$$

$\tilde{x} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ será la fila i de C

que trasponiendo: $A^T \tilde{x}^T = e_i^T$

y como $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = n$ vemos que debe tener única solución para cada i y entonces podemos construir C: $C \cdot A = \text{Id}_{n \times n}$

Tenemos entonces $A \cdot B = \text{Id}$ y $C \cdot A = \text{Id}$

\Rightarrow multiplicando la 1^{er} ec. por C

a la izquierda nos queda

$$C(AB) = C \cdot \text{Id} \Rightarrow \underbrace{(C \cdot A)}_{\substack{\text{``} \\ \text{Id}}} \cdot B = C$$

$$\Rightarrow B = C.$$

ahora mostramos lo que queríamos.

Además, podemos concluir que

$$A \text{ invertible} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n.$$

Relación entre sistemas lineales e inversa:

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$
son equivalentes:

- 1) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para un b particular
- 2) El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todos b .
- 3) A es invertible.

Dem:

1) \Rightarrow 2) Sea b fijo, al hacer eliminación de Gauss a la matriz ampliada $(A|b)$ llegamos a $(\tilde{A}|\tilde{b})$ donde \tilde{A} no tiene ninguna fila de ceros. De hecho al ser A cuadrada, llegamos a una matriz triangular inferior (con ceros debajo de la diagonal) y elementos de la diagonal no nulos.

Pero esto es independiente de quién sea el b que tome,

hecho para cualquier b tendremos lo mismo.

2) \Rightarrow 3).

Como hicimos antes, si tomamos $Ax = e_i$ y resolvemos, cada solución única de este sistema es

la columna i de la matriz inversa.

3) \Rightarrow i) Si A es invertible $\Rightarrow \exists A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \text{Id}_{n \times n}$$

luego $x = A^{-1} b$ es una solución

de $Ax = b$ ya que $A \cdot (A^{-1} b)$

$$= (AA^{-1}) \cdot b = \text{Id}_{n \times n} \cdot b = b.$$

Además es única ya que si x es solución de manera que $Ax = b$

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}(Ax)}_{=} = A^{-1} \cdot b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1} b, \text{ es decir}$$

x debe ser $A^{-1} \cdot b$.

Determinante:

Queremos definir una función

$$G: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$$

que me diga si una matriz es invertible o no. Por ej. serviría algo así:

$$G(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ no invertible}.$$

Como ya sabemos la función

$$\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$$

es lo que nos sirve ya que

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ es invertible}$$

Recordemos:

$$1. \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$2. \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \text{por fila } \nearrow$$

$$a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Eh general se define recursivamente

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j))$$

para cualquier $i=1\dots n$, donde

$A(i|j)$ = submatriz de A resultante de quitar fila i y columna j .

Este es el desarrollo por la fila i .
 Se puede hacer también por columna.

Propiedades del determinante:

$$1) \det(\text{Id}_{n \times n}) = 1$$

$$2) \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \overline{F_i + F_i} \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

$$3) \det \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \alpha f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$4) \det \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = 0.$$

A las propiedades 2) 3) y 4) se las llama multilinear alternada por filas.

Se puede definir lo mismo por columnas.

Se puede probar que \det es la única aplicación $G: \mathbb{k}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{k}$ que satisface 1), 2), 3), 4).

Con esas propiedades alcanza para detectar si una matriz en $\mathbb{K}^{n \times n}$ es invertible o no ya que:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ no invertible



$$rg(A) < n$$



alguna fila de A se escribe como comb. lineal de las otras



usando propiedades

$$\det(A) = 0.$$

Idea de esto último: Si $A = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ y por ejemplo $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} d_i f_i$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} f_1 \\ f_{n-1} \\ f_m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} f_1 \\ f_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} d_i f_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \det \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_{n-1} \\ f_i \end{pmatrix}}_{=0}$$

porque en $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_{n-1} \\ f_i \end{pmatrix} \rightarrow$ acá está f_i con $i = 1 \dots n-1$ se repite una fila

entonces

$$\det(A) = 0.$$

Otras propiedades del det:

- Si A es triangular superior, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

(basta elegir por columna 1 en cada paso).

- Lo mismo si A es triangular inferior,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{2n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

- $\det(A) = \det(A^t)$.
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ si A es inversible.

Proposición: A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Dem:

$\Rightarrow)$ Si A es inversible \Rightarrow existe

$$A^{-1}: A \cdot A^{-1} = \text{Id}$$

$$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0$$

$\Leftarrow)$ $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inversible
es equivalente a probar que

A no invertible $\Rightarrow \det A = 0$

Si A no es invertible $\Rightarrow \text{rg}(A) < n$

\Rightarrow existe una fila que es combinación lineal de las otras,

suponemos sin pérdida de generali-

dad que $f_n = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}$

$$\Rightarrow \det(A) = \det \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por propiedades

↑ 2) y 3)

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \det \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_i \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{Ac 1 está}}$ f_i

por propiedades 4) $\xleftarrow{=} 0$ para todos i ,
ya que para cada i entre
 1 y $n-1$, esa fila
ya está repetida encima.