Repaso

Prod matricial para vectores verticales

En $\mathbb{R}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t \cdot y$

$\mathbb{C}^n$ $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i = \overline{x}^t \cdot y$

$= x^* \cdot y$

Def:

1) Dado V un $\mathbb{K}$-ev, un p.i es una función $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ que verifica:

i) $\phi(x + x', y) = \phi(x, y) + \phi(x', y)$ $\quad \forall x, x', y \in V$

ii) $\phi(x, \alpha y) = \alpha\, \phi(x, y)$ $\quad \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$

iii) $\phi(x, y) = \overline{\phi(x, y)}$

iv) $\phi(x, x) > 0$ si $x \neq 0$

2) Una norma en V es una función $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in V$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Proposición: Dado V un $\mathbb{K}$-ev con p.i, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ es una norma.

Además vale la desigualdad de Cauchy Schwarz:

$$|\langle x, x\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Def: Dado V un $\mathbb{K}$-ev con p.i.

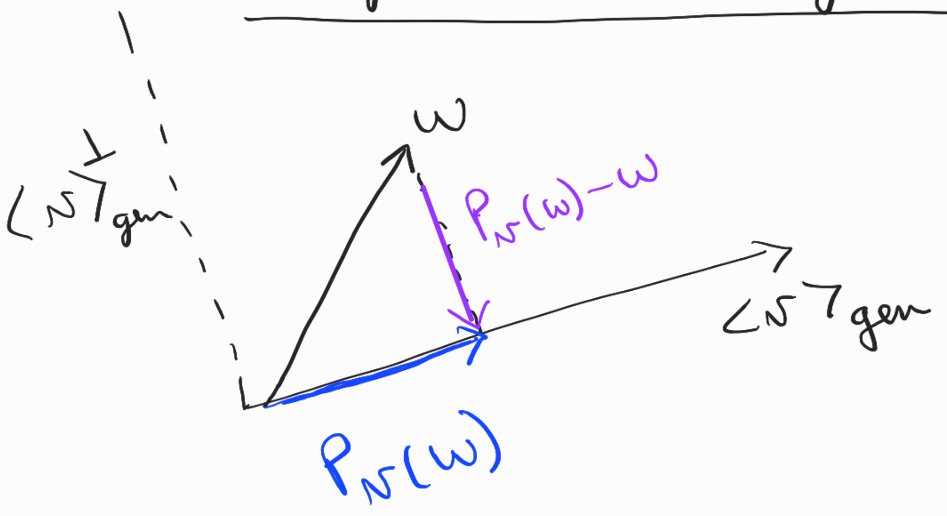
Un conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ se dice ortogonal si $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$.

Se dice normal si $\|v_i\| = 1 \ \forall i$

y se dice ortonormal si es ortogonal y normal.

Si trabajamos con $\langle \, , \, \rangle$ habitual en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C} \Rightarrow$ la norma inducida por ese p.i es $\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Proyección ortogonal:



$\langle v\rangle_{gen}^{\perp}$ subespacio ortogonal a $\langle v\rangle_{gen}$ es decir $\langle v\rangle_{gen}^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^2 : \langle u, v\rangle = 0\}$

Buscamos $P_v(w) = \beta \cdot v$:

$P_v(w) - w \in \langle v\rangle_{gen}^{\perp}$, es decir

$$\langle P_v(w) - w, v\rangle = 0$$

$$\iff \langle \beta v - w, v\rangle = 0$$

$$\iff \bar{\beta}\langle v, v\rangle - \langle w, v\rangle = 0$$

$$\iff \bar{\beta} = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \Rightarrow \beta = \frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

Se define $P_v(w) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v$

En $\mathbb{R}^n$ $\quad P_v(w) = \dfrac{v^t \cdot w}{\|v\|_2^2} \cdot v$

Acá pensamos a los vectores verticales

$\Rightarrow v^t \cdot w = (v_1 \dots v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}^n$ $\quad P_v(w) = \dfrac{v^* \cdot w}{\|v\|_2^2} \cdot v$

Acá de nuevo los vectores son verticales

$\Rightarrow \underset{\text{en } \mathbb{C}}{\langle v, w \rangle =} (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

Sea $B = \{v_1 \dots v_n\}$ una BON $\Rightarrow$

Si $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, ¿quiénes son los α_i?

Vemos que $\langle v_j, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_j, v_i \rangle = \alpha_j$

$\Rightarrow$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, w \rangle \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (v_i^* \cdot w) \cdot v_i$$

$$\Rightarrow P_{v_i}(w) = \frac{\langle v_i, w \rangle}{\underbrace{\|v_i\|_2^2}_{=1}} \cdot v_i = (v_i^* \cdot w) \cdot v_i$$

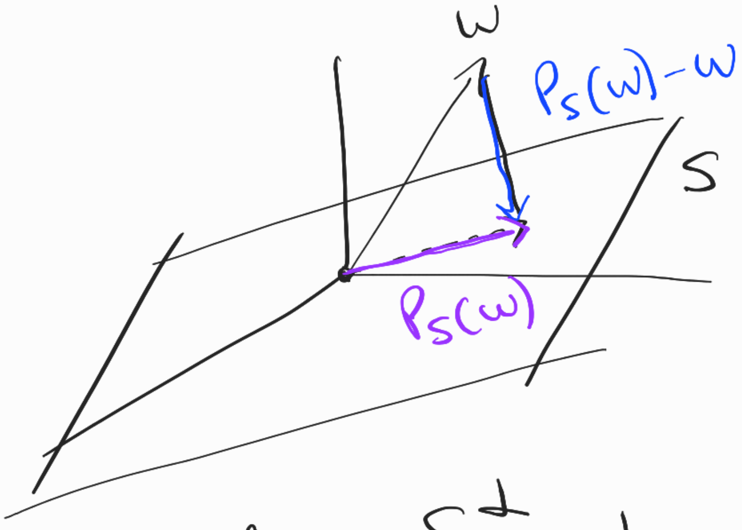
$$\Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n} P_{v_i}(w).$$

Proyección a un subespacio:

Sea $S \subseteq V$ un subespacio de V.

$S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{gen}$ con $\{v_1, \ldots, v_k\}$ base ortogonal

Queremos definir $P_S(w)$: proyección ortogonal de w en S. $P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$



de manera que

$$P_S(w) \in S$$

$$\text{y} \quad P_S(w) - w \in S^{\perp}$$

donde $S^{\perp} = \{u \in V : \langle u, s \rangle = 0 \ \forall s \in S\}$

$= \{u \in V : \langle u, v_j \rangle = 0 \ \forall j = 1, \ldots, k\}$

¿Quiénes serán los α_i's? Queremos

$$\langle w - P_S(w), v_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1 \dots k$$

$$\underbrace{\langle w, v_j \rangle}_{w^* v_j} = \langle \underbrace{P_S(w)}_{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i}, v_j \rangle = \alpha_j \cdot \|v_j\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = v_j^* \cdot w \;/\; \|v_j\|^2 = \frac{v_j^* \cdot w}{\|v_j\|^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_i^* w}{\|v_i\|^2} \right) \cdot v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(w).$$

<u>Ojo</u>: si $\{v_1, \dots, v_k\}$ no fuera ortogonal no se escribe así $P_S(w)$

Proyectores: $\{v_1, \dots, v_k\}$ ortogonales

Sea $S \leq V$ subespacio, $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$P_S : V \longrightarrow S$ es una t.l. (ejercicio)

$$P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(w)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_i, w \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

¿Qué pasa si hacemos

$P_S^2 = P_S \circ P_S$? Sea $w \in V$

Para $S = \langle v \rangle$

$$P_v(P_v(w)) = P_v\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v\right)$$

$$= \left\langle v, \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \right\rangle \cdot \frac{v}{\|v\|^2}$$

$$= \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot \cancel{\langle v, v \rangle} \cdot \frac{v}{\cancel{\|v\|^2}}$$

$$= \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

$$\Rightarrow \quad P_v\left(P_v(w)\right) = P_v(w)$$

Si $\langle v_1, v_2\rangle = 0 \quad (v_1 \perp v_2)$

$$P_{v_2}\left(P_{v_1}(w)\right) = P_{v_2}\left(\frac{\langle v_1, w\rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1\right)$$

$$= \left\langle v_2, \frac{\langle v_1, w\rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 \right\rangle \cdot \frac{v_2}{\|v_2\|^2}$$

$$= \frac{\langle v_1, w\rangle}{\|v_1\|^2} \cdot \underbrace{\langle v_2, v_1\rangle}_{=0} \cdot \frac{v_2}{\|v_2\|^2} = 0$$

En general, si $S = \langle v_1, \dots v_k\rangle$

$\{v_1, \dots, v_k\}$ ortonormales

$$P_S\left(P_S(w)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}\left(\sum_{j=1}^{k} P_{v_j}(w)\right)$$

$$= \sum_{i,j}^{k} \underbrace{P_{v_i}(P_{v_j}(w))}_{=0 \text{ si } i\neq j} = \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(P_{v_i}(w))$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P_{v_i}(w) = P_S(w).$$

¿Cómo es la matriz de esta tl en una base ortogonal de S?

Si $S = \langle v \rangle$

$$P_v(w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} \cdot v = \overset{1\times n}{\frac{v^*}{\|v\|}} \cdot \overset{n\times 1}{w} \cdot \overset{n\times 1}{\frac{v}{\|v\|}}$$

$$= \frac{v}{\|v\|} \cdot \left(\frac{v^*}{\|v\|} \cdot w \right)$$

$$= \left(\frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v^*}{\|v\|} \right) \cdot w$$

$$\Rightarrow P_v(e_i) = \left(\frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v^*}{\|v\|} \right) \cdot e_i$$

Recordar que los vectores son verticales!

$$\Rightarrow [P_v]_{EE} = \underbrace{\frac{v}{\|v\|}}_{\in \mathbb{K}^{n\times 1}} \cdot \underbrace{\frac{v^*}{\|v\|}}_{\in \mathbb{K}^{1\times n}} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

<u>OBS:</u> $rg([P_v]_{EE}) = 1$.

<u>Ejemplo:</u> Calcular $P_{(1,1,1)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$P_{(1,1,1)}(x_1 x_2 x_3) = \frac{<(1,1,1)(x_1 x_2 x_3)>}{\|(1,1,1)\|^2} \cdot (1,1,1)$$

$$= \frac{x_1+x_2+x_3}{3}(1,1,1)$$

$$[\underbrace{P_{(1,1,1)}}_{v}]_{EE} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\Downarrow$

$\|v\| = \sqrt{3}$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Si ahora $S = \langle v_1 \cdots v_k \rangle$ base ortogonal

$$P_S(w) = \sum_{j=1}^{k} P_{v_j}(w)$$

$$P_S(e_i) = \sum_{j=1}^{k} P_{v_j}(e_i) = \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j}{\|v_j\|^2} \cdot \frac{v_j^*}{\|v_j\|^2} \cdot e_i$$

hecho para 1 solo vector

$$= \left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \;\middle|\; \frac{v_2}{\|v_2\|} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \frac{v_k}{\|v_k\|} \right) \cdot \begin{pmatrix} \overline{v_1}/\|v_1\| \\ \vdots \\ \overline{v_k}/\|v_k\| \end{pmatrix} \cdot e_i$$

$$\Rightarrow [P_S]_{EE} = \underbrace{\left(\frac{v_1}{\|v_1\|} \;\middle|\; \frac{v_2}{\|v_2\|} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \frac{v_k}{\|v_k\|} \right)}_{C \in \mathbb{C}^{n \times k}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{v_1}/\|v_1\| \\ \vdots \\ \overline{v_k}/\|v_k\| \end{pmatrix}}_{C^* \in \mathbb{C}^{k \times n}}$$

<u>OBS:</u> $[P_S]_{EE}$ es hermitiana.

<u>Ejemplo:</u> $S = \langle \underbrace{(1,0,1,0), (0,1,0,1)}_{\text{base ortogonal de } S} \rangle$

$\Rightarrow P_S : \mathbb{R}^4 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^4$ viene dada por

$$P_S(w) = P_{(1,0,1,0)}(w) + P_{(0,1,0,1)}(w)$$

$$[P_S]_{EE} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Nota $\quad rg([P_S]_{EE}) = 2$

que sabemos así debe ser ya que

$$rg\, [P_S]_{EE} = \dim(\operatorname{Im} P_S) = \dim S = 2.$$

<u>Proyectores</u>: Dado V un $\mathbb{K}$-ev.

<u>Definición</u>: Una t.l. $P : V \to V$ se dice proyector si $P^2 = P$. $(P^2 = P \circ P)$

Proposición: Si $V = \mathbb{k}^n$, $P: \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$ es proyector si y solo si $\forall B$ base de $\mathbb{k}^n$, $[P]^2_{BB} = [P]_{BB}$.

Dem:

$\Rightarrow$) P es proyector $\Rightarrow P^2 = P$

$\Rightarrow \forall B$ base $[P^2]_{BB} = [P]_{BB}$

Veamos que $[P^2]_{BB} = [P]^2_{BB}$

Por definición de matriz en una base:

$$[P^2]_{BB} (w)_B = (P^2(w))_B$$

$$[P]^2_{BB} (w)_B = [P]_{BB} [P]_{BB} (w)_B$$

$$= [P]_{BB} (P(w))_B$$

$$= (P(P(w)))_B = (P^2(w))_B$$

$$\Rightarrow [P^2]_{BB} = [P]^2_{BB}.$$

$\Leftarrow$) Si $[P]^2_{BB} = [P]_{BB}$ $\forall B$ base

$$\Rightarrow [P^2]_{BB} = [P]_{BB}$$

$$\Rightarrow P^2 = P.$$

<u>Algunas propiedades:</u> $P: V \to V$ una t.l., V un k-ev.

1) Si P es proyector $\Rightarrow P(v) = v$ $\forall v \in \operatorname{Im} P$.

<u>Dem:</u> Sea $v \in \operatorname{Im} P \Rightarrow \exists\, w \in V$:

$$\underbrace{P(w) = v}_{} \Rightarrow \underbrace{P(P(w))}_{\substack{\| \\ P(w) \\ \| \\ v}} = P(v)$$

por ser $P^2 = P$

$$\Rightarrow P(v) = v.$$

2) Si $P(v) = v$ $\forall v \in \operatorname{Im} P \Rightarrow P$ es proyector

Sea $w \in V \Rightarrow v = P(w) \in \operatorname{Im} P$

$$\overset{\text{por hip}}{\Rightarrow} P(P(w)) = P(w)$$

$\Rightarrow \quad P^2 = P$ (w era cualquiera)

Probamos entonces:

<u>Proposición</u>: $P: V \to V$ una t.l es un proyector si y solo si $P(v)=v \ \forall v \in \operatorname{Im} P$.

3) Si P es proyector $\Rightarrow \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Nu} P = \{0\}$

<u>Dem</u>:

Sea $v \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Nu} P \Rightarrow v = P(w)$ con $w \in V$

y $P(v) = 0$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{P(v)} = \underset{\substack{\| \\ P(w)=v}}{P^2(w)} \quad \Rightarrow v = 0.$$

4) P proyector $\Rightarrow v - P(v) \in \operatorname{Nu} P \ \forall v \in V$

<u>Dem</u>:

$$P(v - P(v)) = P(v) - \underbrace{P^2(v)}_{\substack{\| \\ P(v)}} = 0.$$

5) P proyector $\Rightarrow$ $\mathrm{Nu}\,P \oplus \mathrm{Im}\,P = V$

Dem: Ya vimos que $\mathrm{Nu}\,P \cap \mathrm{Im}\,P = \{0\}$

Veamos que si $v \in V \Rightarrow \exists\, v_1 \in \mathrm{Nu}\,P$

$v_2 \in \mathrm{Im}\,P$:

$v = v_1 + v_2$.

$$v = \underbrace{v - P(v)}_{\text{por 4) está en } \mathrm{Nu}\,P} + \underbrace{P(v)}_{\in \mathrm{Im}\,P} \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = v - P(v) \\ v_2 = P(v) \end{array} \text{ sirve.}$$

Proposición: Dados S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{K}^n$ tales que $\mathbb{K}^n = S_1 \oplus S_2$.
Entonces se puede construir $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ proyector tal que $\mathrm{Nu}\,P = S_1$, $\mathrm{Im}\,P = S_2$.

Dem: S_1 y S_2 están en suma directa

$\Rightarrow$ Si $\{v_1 \dots v_k\}$ es una base de S_1

y $\{v_{k+1} \dots v_n\}$ " de S_2

tenemos que $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

es una base de $S+T = \mathbb{K}^n$.

Definimos $P(v_i) = 0 \quad \forall i = 1 \dots k$

$P(v_i) = v_i \quad \forall i = k+1, \dots n.$

$\operatorname{Im} P = \langle P(v_1), \dots, P(v_n) \rangle_{gen} = \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle_{gen}$
$= S_2$

$\operatorname{Nu} P = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{gen} = S_1$

Además $P(v) = v \ \forall \ v \in \operatorname{Im} P$

$\Rightarrow$ P es proyector.

<u>Definición</u>: Un proyector P se dice ortogonal si $\operatorname{Nu} P \perp \operatorname{Im} P$.

Es decir si $\operatorname{Nu} P$ es ortogonal a $\operatorname{Im} P$.

Esto quiere decir que $\forall v \in \operatorname{Nu} P$ y $w \in \operatorname{Im} P$ v y w son ortogonales $(\langle v, w \rangle = 0)$.

Ejemplos

1) Dada $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$, definir P proyector:

$$\operatorname{Im} P = \langle (1,1,0)\ (0,1,1) \rangle_{gen}$$

$$\operatorname{Nu} P = \langle (1,1,1) \rangle_{gen}$$

$\operatorname{Nu} P$ sería S_1 y $\operatorname{Im} P$ sería S_2 de la proposición.

Definimos

$$P(1,1,0) = (1,1,0)$$

$$P(0,1,1) = (0,1,1)$$

$$P(1,1,1) = (0,0,0).$$

Notar que P <u>no</u> es ortogonal ya que

$$\langle (1,1,0), (1,1,1) \rangle = 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow (1,1,0) \not\perp (1,1,1).$$

2) a) Construir P proyector tal que

$$\operatorname{Im} P = \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

Definimos $P(1,2,3) = (1,2,3)$

$P(0,1,0) = (0,1,0)$

y completo a una base de $\mathbb{R}^3$ con

$(0,0,1)$

$B = \{ (1,2,3), (0,1,0) (0,0,1) \}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Como no queremos agregar cosas en $\operatorname{Im} P$, definimos

$$P(0,0,1) = (0,0,0)$$

ó más generalmente podemos definir

$$P(0,0,1) \in \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

De esta manera tendremos que

Si $w \in \operatorname{Im} P = \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$

$$w = \alpha (1,2,3) + \beta (0,1,0)$$

$$\rightarrow P(w) = \alpha \, P(1,2,3) + \beta \, P(0,1,0)$$
$$= \alpha \cdot (1,2,3) + \beta (0,1,0) = w$$

y por lo tanto P será proyector

b) Si ahora quiero definir un P proyector ortogonal:

$$\operatorname{Im} P = \langle (1,2,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

Primero ortogonalizo esta base de Im P: (no es necesario en realidad)

$$\operatorname{Im} P = \langle (1,0,3), (0,1,0) \rangle_{gen}$$

La extiendo a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{ \overbrace{(1,0,3), (0,1,0)}^{\text{base de Im } P}, (-3,0,1) \}$$

es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Definimos P:

$$P(1,0,3) = (1,0,3)$$

$$P(0,1,0) = (0,1,0)$$

$$P(-3,0,1) = (0,0,0)$$ (o más general en $\langle (1,0,3),(0,1,0) \rangle_{gen}$

Verificar que P es proyector y que

$$\operatorname{Nu} P \perp \operatorname{Im} P.$$

(alcanza con ver que

$$\langle (-3,0,1),(1,0,3) \rangle = 0$$

y $\langle (-3,0,1),(0,1,0) \rangle = 0$).