Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación

Álgebra Lineal Computacional

Segundo Parcial – 1 de diciembre de 2022

Ejercicio 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) (1,5 pts.) Probar que el método de Gauss-Seidel converge para todo vector inicial $\iff$ el método de Jacobi converge para todo vector inicial.
Fijado un valor de α para el cual ambos convergen ¿cuál método eligiría y por qué?

(b) (1 pt.) Sea $\alpha = 1$. Calcular la solución exacta de $Ax = b$ y probar que si $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$ el método de Jacobi converge en a lo sumo 1 paso para cualquier $t \in \mathbb{R}$ ¿Contradice este resultado al ítem anterior?

Ejercicio 2. Se quiere resolver el sistema $Ax = b$ para la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$ y cierto $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Se propone el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} x_{n+1} = - \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} x_n + b$$

.

(a) (0,5 pts.) Probar que si la iteración converge a un x^* entonces x^* es solución de $Ax = b$.

(b) (1 pt.) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que el método converge para cualquier vector inicial.

(c) (1 pt.) ¿Qué condición impondrían sobre k para garantizar que exista una norma $||.||$ tal que el error e_n verifique $||e_n|| \leq (\frac{1}{4})^n ||e_0||$?

Ejercicio 3. Hallar una matriz A del tamaño adecuado que verifique simultáneamente:

$\underset{||x||_2=1}{max}\{||Ax||_2\} = 2$, $\underset{||x||_2=1}{min}\{||Ax||_2\} = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector de A^tA y $A^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Se miden las concentraciones de cierto agente químico (en mg/m^3) y se obtiene la siguiente tabla :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	1	2	2

donde x se mide en horas. Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la tabla con una función tipo $f(x) = ax + b\cos(\pi x)$ y estimar la concentración a la hora y media de comenzadas las mediciones.