1er Recuperatorio

1) a) $\varepsilon = 0{,}001$. $fl(1+\varepsilon) = fl(0{,}\overline{1001} \times 10) = 0{,}1 \times 10 = 1$

$fl(1-\varepsilon) = fl(0{,}\overline{999}) = 1$

$fl(\varepsilon - 1) = fl(-0{,}\overline{999}) = -1$

$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ Resuelvo el sist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-\varepsilon F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & fl(2-\varepsilon)^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$* fl(2-\varepsilon) = fl(1{,}999) = fl(0{,}\overline{1999} \times 10) = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 2 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 0 \\ -10^{-3} z = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x + 0 - 2000 = 1 \Rightarrow x = fl(2001) = fl(0{,}\overline{2001} \times 10)$ $\boxed{x = 2000}$

$\boxed{y = 0}$

$\Rightarrow \boxed{z = -2 \times 10^3 = -2000}$

La sol q muestra la máquina es $\boxed{x = \begin{pmatrix} 2000 \\ 0 \\ -2000 \end{pmatrix}}$

b) Considero $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (B es no inversible porque tiene una fila de ceros)

$A_\varepsilon - B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\|A_\varepsilon - B\|_\infty = \text{máx}\{|\varepsilon| + |-\varepsilon|, |\varepsilon| + |\varepsilon|, |\varepsilon|\} = 2\varepsilon}$

$0 < \varepsilon < 1$.

$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon - 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\|A_\varepsilon\|_\infty = \text{máx}\{|1+\varepsilon| + 1 + |1-\varepsilon|, |\varepsilon| + |\varepsilon|, |\varepsilon - 1| + |-1|\}$

$= \text{máx}\{1+\varepsilon+1+1-\varepsilon, 2\varepsilon, 1-\varepsilon+1\} =$

$0 < \varepsilon < 1$

$= \text{máx}\{3, 2\varepsilon, 2-\varepsilon\} = \boxed{3.}$

Sabemos q $\text{Cond}_\infty(A_\varepsilon) \geq \dfrac{\|A_\varepsilon\|}{\|A_\varepsilon - B\|}$ $\forall B$ singular

$\rightarrow \text{Cond}_\infty(A_\varepsilon) \geq \dfrac{3}{2\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty \rightarrow \boxed{\text{Cond}_\infty(A_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty}$

2) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica $\Rightarrow$ es diagonalizable ortogonalmente.

- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ es avec de $A+2I$ de aval -1 $\Rightarrow (A+2I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ es avec de A de aval -3.

- $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ es avec de A^{-1} de aval 2 $\Rightarrow A^{-1}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ es avec de A de aval $\frac{1}{2}$.

- A es diagonalizable, si d_1, d_2, d_3 son los avals de A, sabemos que $\det(A) = -6$. Como $d_1 = -3$, $d_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow -6 = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot d_3$

$\Rightarrow 4 = d_3$.

$\boxed{\text{Avals de } A = \{-3, \tfrac{1}{2}, 4\}}$

Como A es simétrica hay BON de $\mathbb{R}^3$ formada con avecs de A.

$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ y completo a BON con v_3, por ej $v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Así, $\boxed{A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{pmatrix}}$

La inversa de una matriz ortog es su transpuesta

2) a) Sabemos q. A no admite LU si tiene algún pivote nulo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2+2F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} F_3+\tfrac{3}{2}F_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha+\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$1 \neq 0$, $-2 \neq 0$

A tiene algún pivote nulo $\Leftrightarrow \alpha + \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{7}{2}}$

b) Si $\alpha = -\frac{7}{2}$ intercambio $F_3 \leftrightarrow F_4$ multiplicando por la matriz de permut. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow PA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2+2F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -\frac{9}{2} & -1 \end{pmatrix} F_4+\tfrac{3}{2}F_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{U}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_2 . M_1 . P . A = U \Rightarrow PA = M_1^{-1} M_2^{-1} U$

$$PA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{U}$$

4) a) P de Markov $\Leftrightarrow$ sus columnas suman 1 y todos los coefs posit. o cero

$$\begin{cases} a+a+b=1 \\ b+b+2a=1 \\ 0+1+0=1 \checkmark \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=0,\ a=1/2} \quad (\text{verifica} \checkmark)$$

$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Busco estados de equilibrio v / $Pv=v$ y $\sum_{i=1}^{3} v_i = 1$.

$Pv=v$ ($\Leftrightarrow$ v avec de aval 1)

$v \in Nu(P-I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_1} \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x=0. \\ -y+z=0 \Rightarrow z=y \\ 0=0 \end{cases} \qquad (x,y,z)=(0,y,y) = y(0,1,1).$$

$E_1 = \langle (0,1,1) \rangle$

$\Rightarrow v = \alpha(0,1,1) = (0,\alpha,\alpha)$, busco α / $0+\alpha+\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha = 1/2$

$\Rightarrow \boxed{v=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ es el único estado de equilibrio.

b) Busco los otros avals y avec de P.

$$\chi_P(\alpha) = \begin{vmatrix} 1/2-\alpha & 0 & 0 \\ 1/2 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)(\alpha^2-1)$$

Avals $= \{\frac{1}{2}, 1, -1\}$ ($P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y tiene 3 avals $\neq$ $\Rightarrow$ es diagonalizable en $\mathbb{R}$!)

Ya sabemos $E_1 = \langle (0,1,1) \rangle$.

$\alpha = \frac{1}{2}$: $Pv = \frac{1}{2}v \Leftrightarrow v \in Nu(P-\frac{1}{2}I)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y - z = -\frac{3}{4}z \Rightarrow x = -\frac{3}{2}z \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}z \end{array}$$

$\bar{X}=\left(-\frac{3}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right)=z\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)$

- $E_{1/2}=\langle(-3,1,2)\rangle$

$\underline{\lambda=-1}$ $\quad Pv=-v \Leftrightarrow v\in Nu(P+I)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) F_2-3F_3 \sim$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x = 0 \to x=0 \\ y+z=0 \Rightarrow y=-z \end{cases} \qquad \bar{X}=(0,-z,z)=z(0,-1,1)$$

- $E_{-1}=\langle(0,-1,1)\rangle$.

Como -1 es aval $\nexists P^{\infty}$ Dependiendo del estado inicial, puede converger o no a un estado límite:

$B=\{(0,1,1)(-3,1,2)(0,-1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ formada por avecs de P
$\quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$

i) $V_0=\left(\frac{3}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right)$, busco coords en base B:

$V_0=av_1+bv_2+cv_3$. $\qquad$ para el ítem (ii)

$$\left(\frac{3}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right)=\frac{3}{6}(0,1,1)+\left(-\frac{1}{6}\right)(-3,1,2)+\frac{1}{6}(0,-1,1) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c:c} 0 & -3 & 0 & 3/6 & 3/8 \\ 1 & 1 & -1 & 1/6 & 3/8 \\ 1 & 2 & 1 & 2/6 & 2/8 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_3$$

$\Downarrow$ $\qquad 1 \qquad 0 \qquad$ diverge (oscila)

$$P^k V_0=\frac{3}{6}\cdot 1^k\cdot v_1-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k v_2+\frac{1}{6}(-1)^k v_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 2 & 1 & 2/6 & 2/8 \\ 1 & 1 & -1 & 1/6 & 3/8 \\ 0 & -3 & 0 & 3/6 & 3/8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 2 & 1 & 2/6 & 2/8 \\ 0 & -1 & -2 & -1/6 & 1/8 \\ 0 & -3 & 0 & 3/6 & 3/8 \end{array}\right) F_3-3F_2$$

Si tomamos $\lim_{k\to+\infty} P^k v_0$ $\boxed{\text{no}}$ hay estado límite, diverge

$$\left(\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 2 & 1 & 2/6 & 2/8 \\ 0 & -1 & -2 & -1/6 & 1/8 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} a+2b+c=2/6 \to a=3/6 \\ -b-2c=-1/6 \to b=-1/6 \\ 6c=1 \to c=1/6 \end{cases}$$

ii) $V_0 = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}\right)$

$$\begin{cases} a + 2b + c = 2/8 \Rightarrow a = \frac{1}{2}. \\ -b - 2c = 1/8 \Rightarrow b = -\frac{1}{8} \\ 6c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$(V_0)_B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, 0\right)$

$\Rightarrow P^k V_0 = \frac{1}{2} \cdot \overset{\to 1}{1^k} v_1 - \frac{1}{8} \overset{\to 0}{\left(\frac{1}{2}\right)^k} v_2 + \overset{\shortparallel}{0 v_3}$ Tomo límite a ambos lados,

$k \to +\infty$

$\boxed{V^{(\infty)}} = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2}(0,1,1) = \boxed{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ (Converge al único estado límite).