Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 6: Interpolación y cuadrados mínimos.

Ejercicio 1. Método de Horner Dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar el poliomio en un cierto x_0? Horner propone como alternativa escribir a p como $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + x a_n) \dots))$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar p bajo esta forma?

Este método justifica que `Numpy` (y otros lenguajes) utilicen una notación especial para evaluar polinomios, en lugar de usar la notación usual de funciones (`f= lambda x:` ..., en el caso de Python).

Se realizan n productos y n sumas (n+1 sumandos).
Pero cada x^i son i productos extras, entonces

(1+n) + n + n-1 + n-2 + ... + 2 + 1 = (n+2)(n+1)/2

Con el Método de Horner:
??

Ejercicio 2. Sea una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{V}}^t$ y la pseudo-inversa de $\boldsymbol{A}$ es $\boldsymbol{A}^\dagger = \hat{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{U}}^t$. Suponiendo que $\boldsymbol{A}$ tiene rango n, probar $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$ es la única solución del problema de cuadrados mínimos, o sea, mostrar que:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \min\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2\}.$$

$$\min_x \|Ax - b\|_2 \overset{\text{equiv}}{\equiv} A^t A \cdot x = A^t b$$

$$A^t A \cdot x = A^t b$$

Como $\operatorname{rg} A = n$ y $n \leq m$

$$\Rightarrow \underbrace{(A^t A)^{+}}_{\substack{n\times m \times m\times n \\ n\times n}} \cdot \underbrace{A^t A}_{\substack{n\times m \times m\times n \\ n\times n}} = I_n$$

$$\Rightarrow (A^t A)^{+} A^T A \cdot x = (A^t A)^{+} A^t b$$

$$\Rightarrow \underset{n\times n}{I_n} \underset{n\times 1}{x} = (A^t A)^{+} A^t b$$

$$\underset{n\times 1}{x} = (A^t A)^{+} A^t b$$

Solución al problema de minimización.

Obs: si A es inversible $\Rightarrow + = -1$

Uso que

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{\hat{U}}\ \underset{n\times n}{\hat{\Sigma}}\ \underset{n\times n}{\hat{V}^t} \Rightarrow \underset{n\times m}{A^+} = \underset{n\times n}{\hat{V}}\ \underset{n\times n}{\hat{\Sigma}^{-1}}\ \underset{n\times m}{\hat{U}^t}$$

reducida

$$\underset{n\times m}{A^t} = \underset{n\times n}{\hat{V}}\ \underset{n\times n}{\hat{\Sigma}^t}\ \underset{n\times m}{\hat{U}^t}$$

Reemplazo en

$$x = (A^t A)^+ A^T b$$

$$= A^+ . \underbrace{\underset{m\times n}{(A^t)^+} . \underset{n\times m}{A^t}}_{\text{no es la identidad}} . b$$

no es la identidad ! A no es cuadrada y $m \geq n$

$$(A^t)^+ . A^t = (\hat{V}\ \underset{n\times n}{\hat{\Sigma}^t}\ \hat{U}^t)^+ . \underset{n\times n}{\hat{V}}\ \underset{n\times n}{\hat{\Sigma}^t}\ \underset{n\times m}{\hat{U}^t}$$

$$= \hat{U}^{t^+} . \Sigma^{-t} . \hat{V}^+ . \underset{n\times n}{\hat{V}}\ \underset{n\times n}{\hat{\Sigma}^t}\ \underset{n\times m}{\hat{U}^t}$$

No es por acá !!

Obs:

$$A^+ = (A^t A)^{-1} . A^t$$

$$\Rightarrow (U^t)^+ = (U^{t^t} . U^t)^{-1} . U^{t^t}$$

$$= (\underset{\neq I}{U \cdot U^t})^{-1} \cdot U$$

$$\Rightarrow (U^t)^{+} \neq U \quad !$$

Finally, it turns out that the minimum norm least squares solution x^+ can be found in terms of the pseudo-inverse A^+ of A, which is itself obtained from the SVD of A.

If $A = VDU^\top$, with

$$D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0),$$

where D is an $m \times n$ matrix and $\lambda_i > 0$, letting

$$D^+ = diag(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_r, 0, \ldots, 0),$$

an $n \times m$ matrix, the *pseudo-inverse* of A is defined as

$$A^+ = UD^+V^\top.$$

Actually, it seems that A^+ depends on the specific choice of U and V in an SVD (U, D, V) for A, but the next lemma shows that this is not so.

Theorem 11.1.2 *The least-squares solution of smallest norm of the linear system $Ax = b$, where A is an $m \times n$-matrix, is given by*

$$x^+ = A^+b = UD^+V^\top b.$$

Proof. First, assume that A is a (rectangular) diagonal matrix D, as above. Then, since x minimizes $\|Dx - b\|^2$ iff Dx is the projection of b onto the image subspace F of D, it is fairly obvious that $x^+ = D^+b$.

Otherwise, we can write

$$A = VDU^\top,$$

where U and V are orthogonal. However, since V is an isometry,

$$\|Ax - b\| = \left\|VDU^\top x - b\right\| = \left\|DU^\top x - V^\top b\right\|.$$

Letting $y = U^\top x$, we have $\|x\| = \|y\|$ since U is an isometry, and since U is surjective, $\|Ax - b\|$ is minimized iff $\left\|Dy - V^\top b\right\|$ is minimized, and we showed that the least solution is

$$y^+ = D^+V^\top b.$$

Since $y = U^\top x$, with $\|x\| = \|y\|$, we get

$$x^+ = UD^+V^\top b = A^+b.$$

Thus, the pseudo-inverse provides the optimal solution to the least-squares problem. $\square$

Ejercicio 3. Para cada uno de los conjuntos de datos, plantear las ecuaciones normales y calcular los polinomios de grado $1, 2$ y 3 que mejor aproximan la tabla en el sentido de cuadrados mínimos. Graficar los datos junto con los tres polinomios. ¿Qué se observa? ¿Qué se puede decir del polinomio de grado 3?

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

$$a \cdot x + b = y$$

$$\begin{cases} a \cdot -1 + b = -1 \\ a \cdot 0 + b = 3 \\ a \cdot 2 + b = 11 \\ a \cdot 3 + b = 27 \end{cases} \Rightarrow \text{Quería:}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

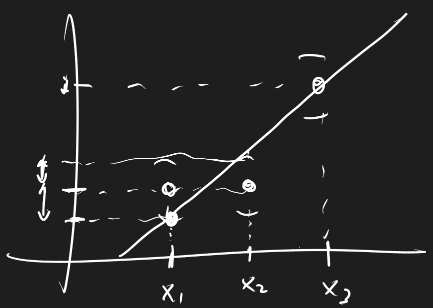
$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$$

No tiene sol!

$$ax^2 + bx + c = y$$

$$a \cdot 1 + b \cdot -1 + c = -1$$
$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 3$$
$$a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 11$$
$$a \cdot 9 + b \cdot 3 + c = 27$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$



$\Rightarrow$ Busco minimizar:

$$\| A\vec{x} - \vec{y} \|_2 \quad \text{eligiendo el mejor} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Coeficientes

Ecuaciones Normales

$$\underbrace{A^t A}_{\text{Calculo}} x = \underbrace{A^t y}_{\text{Calculo}}$$

$$x = (A^t A)^{-1} A^t y$$

Input

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 11 \\ 27 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resuelvo

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 8 . \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 4 & 8.13 \\ 4 & 4 & 8.5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 4 & 8.13 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

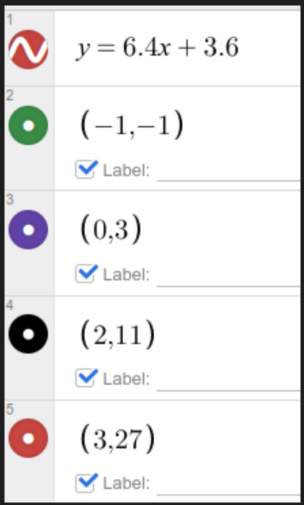
$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 4 & 8.13 \\ 14 & 14 & 140 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 4 & 8.13 \\ 0 & 10 & 36 \end{array}\right)$$

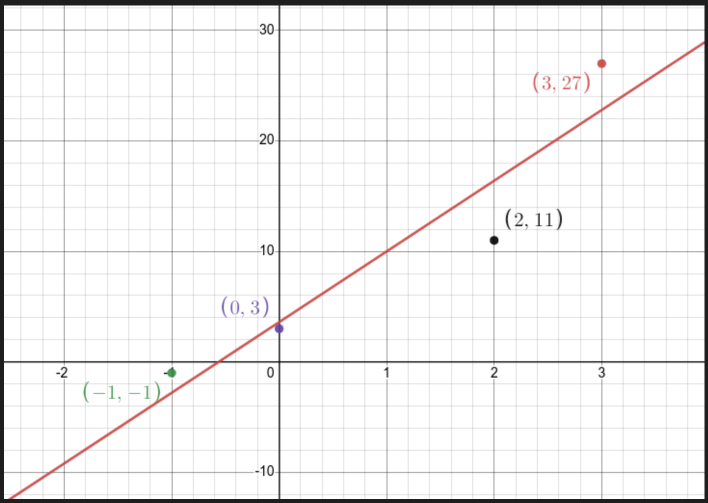
$$10b = 36 \Rightarrow b = 3{,}6$$

$$14a + 4 . 3{,}6 = 104$$

$$14a = 89{,}6$$

$$a = 6{,}4$$

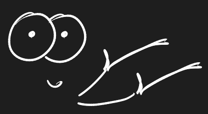




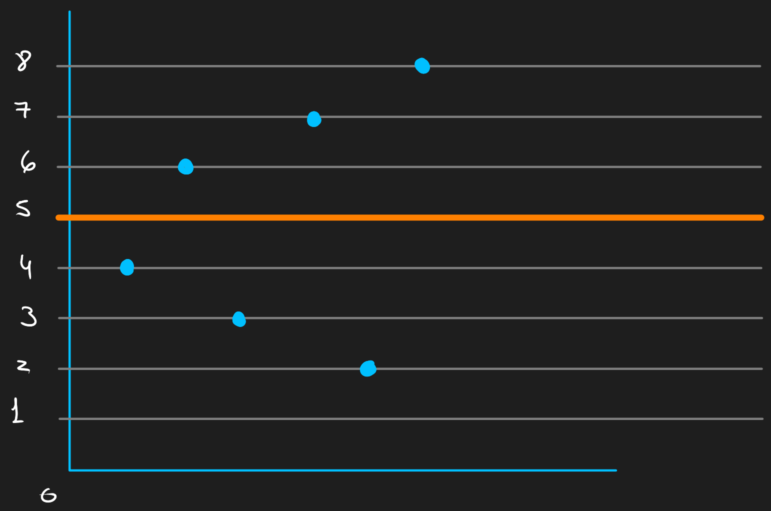
Con grado 2 y 3 es lo mismo pero se agregan más coeficientes a x

Ejercicio 4. Hallar la constante (polinomio de grado 0) que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \ldots, x_n$ en $[a, b]$.

La Media.



Pues es la constante que mejor ajusta el error cuadrático medio entre ella y los puntos



gr 1: $ax + b = y$

gr 0: $b = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = y_1 \\ b = y_2 \\ b = y_3 \end{cases}$$

$$\underset{n\times 1}{\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}} \overset{x}{\begin{bmatrix} b \end{bmatrix}} = \overset{y}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}$$

$$A^t A x = A^t y$$

$$A^t A = [n] \qquad A^t y = [y_1 + y_2 + y_3]$$

$$n \cdot b = y_1 + y_2 + y_3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$b = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{n}$$

el promedio !! ⌣

Ejercicio 5. Los siguientes datos corresponden a la población argentina (expresada en millones de habitantes):

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Hab. (millones)	17	20.5	23.9	27.9	32.6	36.9

(a) Utilizando `np.polyfit`, hallar una función f de la forma $f(x) = ax + b$ que mejor ajuste los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Graficar en una misma figura los datos y la función f.

(b) Utilizando la función del ítem anterior, ¿qué población se puede inferir que había en Argentina en los años 1955, 1965, 1975, 1985 y 1995?

(c) La población *real* de la Argentina en los años del ítem anterior era de 18.8, 22.2, 25.9, 30.2 y 34.8 millones de habitantes respectivamente. Calcular el error que se cometió al inferir la población de estos años a partir del ajuste del ítem (a). Volver a graficar la función f del ítem (a), incorporando (en otro color) los nuevos datos.

(d) ¿Considera que la inferencia del ítem (b) es razonablemente buena?

Ejercicio 6. Supongamos que se tienen puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos, y se quiere hallar el polinomio p de grado a lo sumo n de modo que $p(x_i) = y_i$ (p *interpola* los puntos (x_i, y_i)). Plantear la matriz del problema (matriz de Vandermonde) ¿Qué tamaño tiene? Observar que p se puede ver como un caso particular de aproximación en el sentido de cuadrados mínimos.

Polin. de grado n : $n+1$ componentes

Matriz de Vandermonde

In linear algebra, a **Vandermonde matrix**, named after Alexandre-Théophile Vandermonde, is a matrix with the terms of a geometric progression in each row: an $(m+1) \times (n+1)$ matrix

$$V = V(x_0, x_1, \cdots, x_m) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \ldots & x_m^n \end{bmatrix}$$

with entries $V_{i,j} = x_i^j$, the j^{th} power of the number x_i, for all zero-based indices i and j.[1] Most authors define the Vandermonde matrix as the transpose of the above matrix.[2][3]

The determinant of a square Vandermonde matrix (when $n = m$) is called a **Vandermonde determinant** or Vandermonde polynomial. Its value is:

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

This is non-zero if and only if all x_i are distinct (no two are equal), making the Vandermonde matrix invertible.

Ejercicio 7. Interpolar la siguiente función en $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$.

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores p_n para $n = 5, 10, 15$. Para valores altos de n ¿mejora o empeora la aproximación? Calcular la norma infinito de $(f - p_n)$.

Calculo f en 6, 11, 16 valores equiespaciados xi entre -1 y 1

Entonces tengo xi y f(xi) para cada xi

Calculo el polinomio interpolador para ese conjunto de pares de puntos

Ejercicio 8. Considerar los datos del ejercicio 5.

Se quiere aproximar los datos con una función g de la forma $g(x) = e^{p(x)}$ con p un polinomio. Linealizar el problema y calcular el polinomio de grado 5 que interpola los datos.

Imprimir la expresión del polinomio en pantalla. ¿Observa algo llamativo? ¿Qué grado diría que tiene el polinomio?

Repetir el ajuste usando p de grado 1. Graficar.

Ejercicio 5. Los siguientes datos corresponden a la población argentina (expresada en millones de habitantes):

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Hab. (millones)	17	20.5	23.9	27.9	32.6	36.9

(a) Utilizando `np.polyfit`, hallar una función f de la forma $f(x) = ax + b$ que mejor ajuste los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Graficar en una misma figura los datos y la función f.

(b) Utilizando la función del ítem anterior, ¿qué población se puede inferir que había en Argentina en los años 1955, 1965, 1975, 1985 y 1995?

$$g(x) = y$$

$$e^{p(x)} = y$$

$$\ln g(x) = \underbrace{p(x)}_{} = \ln y$$

Uso cuadrados mínimos

$$A^t A \underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^6} = A \underbrace{b}_{}$$

aplico ln a los y del ej 5.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1950 & 1950^2 & 1950^3 & 1950^4 & 1950^5 \\ 1 & 1960 & 1960^2 & 1960^3 & 1960^4 & 1960^5 \\ 1 & 1970 & 1970^2 & 1970^3 & 1970^4 & 1970^5 \\ 1 & 1980 & 1980^2 & 1980^3 & 1980^4 & 1980^5 \\ 1 & 1990 & 1990^2 & 1990^3 & 1990^4 & 1990^5 \\ 1 & 2000 & 2000^2 & 2000^3 & 2000^4 & 2000^5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} \log 17 \\ \log 20{,}5 \\ \log 23{,}9 \\ \log 27{,}9 \\ \log 32{,}6 \\ \log 36{,}9 \end{bmatrix}$$

$$A^t A\, x = A^t b \qquad x \in \mathbb{R}^6$$

Resuelvo y obtengo x, obteniendo $p(x)$

$$\Rightarrow g(x) = e^{p(x)}$$

Otro caso:

$$g(x) = a \cdot e^{p(x)} = y \qquad \text{con } p \text{ de grado } 2$$

$$\Rightarrow \log g(x) = \log\left(a \cdot e^{p(x)}\right) = \log y$$

$$= \log a + \log e^{p(x)}$$

$$= \log a + p(x) = \log y$$

$$= \tilde{a} + p(x) = \log y$$

param extra

$$= \tilde{a} + b \cdot x^2 + c x + d = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ 1 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ 1 & x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log y_1 \\ \log y_2 \\ \log y_3 \\ \log y_4 \\ \log y_5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a} + b x_1^2 + c x_1 + d = \log y_1$$
$$\tilde{a} + b x_2^2 + c x_2 + d = \log y_1$$
$$\tilde{a} + b x_3^2 + c x_3 + d = \log y_1$$
$$\tilde{a} + b x_4^2 + c x_4 + d = \log y_1$$

y como $\tilde{a} = d \Rightarrow \tilde{a} + d = 2d = 2\tilde{a}$

$$= b \cdot x^2 + c\,x + 2d = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 2 \\ x_2^2 & x_2 & 2 \\ x_3^2 & x_3 & 2 \\ x_4^2 & x_4 & 2 \\ x_5^2 & x_5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log y_1 \\ \log y_2 \\ \log y_3 \\ \log y_4 \\ \log y_5 \end{bmatrix}$$

$$ax + b = ax + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^t A\,x = A^t y$$

Ejercicio 9. Supongamos que se deja caer un objeto desde una altura de 200 m. Mientras cae, se toman las siguientes mediciones:

tiempo	0	1	2	4	6
altura	200	195	180	120	25

Se quiere aproximar los datos en el sentido de cuadrados mínimos con una función de la forma $f(t) = at^2 + b$.

(a) Escribir la matriz del problema. ¿Se puede usar el comando `np.polyfit` con grado 2 para realizar el ajuste? ¿Qué se podría hacer para usar `np.polyfit`?

(b) Sabiendo que la altura de dicho objeto después de haber transcurrido un tiempo t viene dada por $f(t) = 200 - \frac{1}{2}gt^2$, determinar el valor aproximado de g.

Es de grado 2 pero el coef. de t es cero

$$\Rightarrow \text{ajusto} \quad x = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$A^t A \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 195 \\ 180 \\ 120 \\ 25 \end{bmatrix}$$

b) $a \cdot t^2 = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$

$a = -\frac{1}{2} g$

$g = -2a$

Ejercicio 10. En cierta especie animal se estudia la relación entre el peso X (en kg) y el volumen pulmonar Y (en litros), obteniéndose los datos:

peso (kg)	60	85	100	150	250
vol. pulmonar (l)	2.3	4	5	9	19.5

(a) Ajustar los datos a una función $Y = aX^b$ en el sentido de cuadrados mínimos.

(b) Graficar.

(c) Predecir el volumen pulmonar de un individuo cuyo peso es de 93kg.

Se aplica log a ambos lados y linealiza la función.

$$\log y = \log(aX^b)$$

$$\hat{y} = \log a + b . \log X$$

$$\hat{y} = \hat{a} + b . \hat{X}$$

Con C.Min. calculo

$$A^t A \begin{bmatrix} \hat{a} \\ b \end{bmatrix} = A^t . \hat{y}$$

para luego hacer

$$\hat{a} = \log a$$

$$\Rightarrow a = e^{\hat{a}}$$

y b queda igual.

Ejercicio 11. Implementar un programa que reciba como input una lista de funciones $\{f_1, \ldots, f_m\}$ y dos vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, y calcule la función $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$ que mejor aproxime los datos en el sentido de cuadrados mínimos.

De ahora en adelante (en realidad desde varios ejercicios anteriores)

la materia se combierte en Laboratorio de Datos.

Si ya la cursaste, se pueden ignorar los siguientes ejercicios.

Sino, y te sobra el tiempo, podés hacerlos (aunque no aportan mucho a aprobar la materia)

Ejercicio 12. El archivo `humedad.csv` contiene los datos (simulados) de porcentaje de humedad diaria de Buenos Aires en 2020. Como los datos de humedad muestran periodicidad anual, se propone un modelo

$$f(t) = c_1 + c_2 \sin\left(t\frac{2\pi}{366}\right) + c_3 \sin\left(t\frac{4\pi}{366}\right).$$

Utilizando el programa del ejercicio 11, hallar los coeficientes c_1, c_2, c_3 que mejor ajustan los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Graficar la función obtenida junto con los datos.

Ejercicio 13. En el archivo `infantesConBajoPesoAlNacer.txt` se encuentran los datos correspondientes a mediciones de 100 niños nacidos con bajo peso en Boston (Labor and deliver characteristics and the risk of germinal matrix hemorrhage in low birth weight infants. Journal of child neurology, 6(1) , 35-40, (1991))

Llamamos

$$\begin{aligned} Y &= \text{perímetro cefálico del bebé al nacer, en centímetros (columna headcirc).} \\ X_1 &= \text{edad gestacional del bebé al nacer, en semanas (columna gestage).} \\ X_2 &= \text{peso al nacer del bebé, en gramos (columna birthwt).} \end{aligned}$$

Se quiere predecir el perímetro cefálico de un niño al nacer.

(a) Graficar X_1 vs Y y X_2 vs Y. ¿Qué tipo de relación observa en cada caso?

(b) Plantear un modelo de regresión lineal para predecir el perímetro cefálico del bebé en función de su edad gestacional.

(c) Plantear un modelo de regresión lineal múltiple para predecir el perímetro cefálico del bebé en función de su edad gestacional y de su peso al nacer.

(d) Si en el modelo obtenido en el ítem anterior mantenemos constante la edad gestacional, cuántos centímetros de aumento en su perímetro cefálico, en promedio, se corresponde a cada incremento del peso en 10 gramos?

Ejercicio 14. El ejercicio 7 muestra que la interpolación con polinomios de grado alto puede ser mala idea. Una alternativa puede ser la de interpolar a trozos por polinomios de bajo grado (por ejemplo, lineales). Esta idea tiene múltiples aplicaciones de las que aquí veremos un ejemplo:
Considerar una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición uniforme del intervalo: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, con $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$.

(a) Escribir en términos de x_i, x_{i+1} y f la fórmula de una lineal que interpole a f en x_i y x_{i+1} (llamémosla p_i).

(b) Calcular de manera exacta la integral:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x)dx.$$

(c) Mostrar que $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ puede aproximarse por la fórmula:

$$I \sim \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

Esta aproximación se conoce como *regla de trapecios compuesta.*

(d) Implementar una función que reciba una función f, un intervalo $[a, b]$ y un valor (opcional) n y aproxime la integral a través de la fórmula de trapecios compuesta con $n+1$ nodos. [Para pensar: ¿se puede vectorizar esta operación de modo de no aplicar explícitamente un `for`?]

(e) Calcular las siguientes integrales (usando distintos valores de n) y comparar el resultado obtenido con el valor exacto:

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)dx.$

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx.$

(iv) $\displaystyle\int_0^{1} e^x dx.$