Método de la potencia

Ejercicio 17. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que admite una base de autovectores $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ (que supondremos normalizados) y, además, tiene un único autovalor de máximo módulo (digamos: λ_1). Es decir, sus autovalores satisfacen:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Dado $\boldsymbol{v}^{(0)}$ un vector cualquiera tal que sus coordenadas en base $\mathcal{B}$ son $(a_1, \dots, a_n)$, con $a_1 \neq 0$. Definimos $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)} = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{v}^{(0)}$.

(a) Probar que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)} = a_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\lambda_n^k\boldsymbol{v}_n$.

(b) Deducir que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)} = \lambda_1^k(a_1\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_k)$, donde $\boldsymbol{\varepsilon}_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

(c) Sea $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una funcional lineal tal que $\varphi(\boldsymbol{v}_1) \neq 0$. Probar que:

$$\frac{\varphi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)})}{\varphi(\boldsymbol{v}^{(k)})} \to \lambda_1.$$

(d) Para evitar que $\|\boldsymbol{v}^{(k)}\|$ tienda a 0 o a ∞ es usual normalizar $\boldsymbol{v}^{(k)}$ al cabo de cada iteración. Probar que en tal caso, si λ_1 es real positivo, se tiene que $\boldsymbol{v}^{(k)} \to \boldsymbol{v}_1$.

a) $A v^{(k)} = A^k . v$

autovalor, autovector

$$A . v = \lambda . v$$

$$A . A . v = A . \lambda . v$$

$$A^2 . v = \lambda . A v$$

$$A^2 . v = \lambda . \lambda . v$$

$$A^2 . v = \lambda^2 . v$$

$$\vdots$$

$$A^k . v = \lambda^k . v$$

Si v es un vector cl de autovectores:

$$A v = A . (\alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 + \dots + \alpha_n . v_n)$$

$$= \alpha_1 . \underbrace{A . v_1}_{\lambda_1 . v_1} + \alpha_2 . A . v_2 + \dots + \alpha_n . A . v_n$$

$$= \alpha_1 . \lambda_1 . v_1 + \alpha_2 . \lambda_2 . v_2 + \dots + \alpha_n . \lambda_n . v_n$$

Con A^k para igual

$$A^k v = A^k . (\alpha_1 . v_1 + \alpha_2 . v_2 + \dots + \alpha_n . v_n)$$

$$A v^{(k)} = \alpha_1 . \lambda_1^k . v_1 + \alpha_2 . \lambda_2^k . v_2 + \dots + \alpha_n . \lambda_n^k . v_n$$

b) Como $\lambda_1 > \lambda_i \quad \forall i > 1$

$$A^k . v = \alpha_1 . \lambda_1^k . v_1 + \alpha_2 . \lambda_2^k . v_2 + \dots + \alpha_n . \lambda_n^k . v_n =$$

$$= \lambda_1^k . \left(\alpha_1 . v_1 + \alpha_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k v_2 + \dots + \alpha_n \underbrace{\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)}_{<1}^k . v_n\right)$$

Cuando $k \to \infty$

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow A v^{(k)} = \lambda_1^k . (\alpha_1 . v_1 + \varepsilon_k)$$

c) φ es func lineal : $\varphi(v) = B . v$

$B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\frac{B . A v^{(k)}}{B \underbrace{v^{(k)}}_{A . v^{(k-1)}}} = \frac{B . \lambda_1^k . (\alpha_1 . v_1 + \varepsilon_k)}{B \, \lambda_1^{k-1} . (\alpha_1 . v_1 + \varepsilon_k)}$$

$$= \frac{B \cdot \lambda_1}{B}$$

$$= \lambda_1$$

d) Si $k \to \infty$

$$\tilde{v}^{(k)} = \frac{A^k \cdot v^{(0)}}{\| A^k \cdot v^{(0)} \|_2}$$

$$\lim_{k\to\infty} v^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{\lambda_1^k}{|\lambda_1|^k}}_{\to 1 \ (\text{si } \lambda_1 > 0)} \cdot \frac{\alpha_1 \cdot v_1}{\| \alpha_1 v_1 \|_2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{\alpha_1} \cdot v_1}{\cancel{\alpha_1} \cdot \underbrace{\| v_1 \|_2}_{=1 \text{ por enunciado}}} = v_1$$

Ejercicio 18. Implementar el método de la potencia tal como está descripto en el ejercicio anterior, para calcular el autovalor de máximo módulo, con $\boldsymbol{v}^{(0)}$ aleatorio y φ una funcional lineal cualquiera. Aplicarlo para calcular el autovalor de máximo módulo de

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comparar con el resultado arrojado por `np.linalg.eig`.

Ejercicio 19. Mostrar que si en el Ejercicio 17 se toma una funcional lineal φ_k distinta en cada paso, el método converge igualmente a λ_1. Concluir que los cocientes de Raleigh:

$$r_k = \frac{\boldsymbol{v}^{(k)t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}}{\boldsymbol{v}^{(k)t}\boldsymbol{v}^{(k)}},$$

convergen a λ_1. Observar que si $\boldsymbol{v}^{(0)}$ es tal que $a_1 \neq 0$, las aplicaciones φ_k correspondientes a los cocientes de Raleigh nunca se anulan en $\boldsymbol{v}_1$. Modificar el programa del ejercicio anterior de modo de utilizar el cociente de Raleigh como aproximación de λ_1.

Ejercicio 20. Considerar las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, en cada caso, el Método de la Potencia dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}^{(k)} = \dfrac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k-1)}\|} \\[2ex] r_k = \dfrac{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}}{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{v}^{(k)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{v}^{(k)} = \dfrac{\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{(k-1)}}{\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{(k-1)}\|} \\[2ex] r_k = \dfrac{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{(k)}}{(\boldsymbol{v}^{(k)})^t \boldsymbol{v}^{(k)}} \end{cases},$$

para $k \geq 1$.

(a) Calcular los autovalores y los autovectores de $\boldsymbol{A}$ y de $\boldsymbol{B}$. Determinar si las matrices cumplen las hipótesis del Método de la Potencia.

(b) Para la matriz $\boldsymbol{A}$, definir un subespacio S tal que r_k converja al autovalor de módulo máximo para cualquier $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathbb{R}^3 - S$.

(c) Para la matriz $\boldsymbol{B}$, hallar un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el Método de la Potencia con $\boldsymbol{v}^{(0)} = (-1, \alpha, -2)$ encuentre el segundo autovalor de mayor módulo.

Ejercicio 21. Método de la potencia inversa. Mostrar que si λ es autovalor de $\boldsymbol{A}$, y $\boldsymbol{A}$ es inversible, entonces λ^{-1} es autovalor de $\boldsymbol{A}^{-1}$. En el *método de la potencia inversa* se define $\boldsymbol{v}^{(k+1)}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k+1)} = \boldsymbol{v}^{(k)}$. Mostrar que esta modificación del método de la potencia permite calcular el autovalor de menor módulo de $\boldsymbol{A}$. Implementar el método de la potencia inversa.

Ejercicio 22. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supongamos que $\boldsymbol{A}$ tiene todos autovalores de distinto módulo.

(a) Probar que aplicar el método de la potencia a $\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I}$ da como resultado el autovalor de $\boldsymbol{A}$ más lejano a μ.

(b) Probar que aplicar el método de la potencia inversa a $\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I}$ da como resultado el autovalor de $\boldsymbol{A}$ más cercano a μ

Ejercicio 23. Asumiendo que $\boldsymbol{A}$ admite un único autovalor de módulo máximo:

(a) Usando que, $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A})}$ para una $\boldsymbol{A}$ cualquiera y $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A})$ si $\boldsymbol{A}$ es simétrica adaptar el método de la potencia para calcular la norma 2 de $\boldsymbol{A}$.

(b) Escribir un programa que, utilizando el ítem anterior y el método de la potencia inversa, calcule $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

(c) Calcular $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})$ de las matrices del Hilbert para $n = 10, 100, 500, 1000$. La matriz de Hilbert de tamaño n puede calcularse como

```
import scipy as sp
# definir n
H = sp.linalg.hilbert(n)
```

Ejercicio 24. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que $\boldsymbol{A}$ sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de $\boldsymbol{A}$.

(b) Para el valor de α hallado en (a), dar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $\boldsymbol{A}$.

a) $\alpha + 2 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$

$\alpha \in \{-1, 2\}$ para que $A = A^t$

Veo $\alpha = -1$

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\overset{\alpha=-1}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}} - \lambda I \right)$$

Si $\lambda = 0$

$$\chi_A(0) = \det\left(\overset{\alpha=-1}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}} \right) \overset{\text{Calc.}}{=} -9 \neq 0$$

$\therefore \lambda = 0$ no es autovalor.

Veo $\alpha = 2$

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\overset{\alpha=2}{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}} - \lambda I \right)$$

Si $\lambda = 0$

Calculadora.

$$\chi_A(0) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \checkmark$$

$\lambda = 0$ es Autovalor

$\therefore$

el único α que vale es $\alpha = 2$

Busco autovec

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$$

$$v_3 = -2v_1 - 2v_2$$

$$(v_1, v_2, -2v_1 - 2v_2) =$$

$$= v_1(1, 0, -2) + v_2(0, 1, -2)$$

$$E_0 = \langle (1, 0, -2), (0, 1, -2) \rangle$$

Input

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = 9$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0$

Corresponding eigenvectors

$v_1 = (2, 2, 1)$

$v_2 = (-1, 0, 2)$

$v_3 = (-1, 1, 0)$

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \frac{4}{5}F_1 + F_2 \\ \frac{2}{5}F_1 + F_3 \end{array} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & \frac{16}{5} - 5 & \frac{8}{5} + 2 \\ 0 & \frac{8}{5} + 2 & \frac{4}{5} - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -\frac{9}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \times 5 \\ \times 5 \end{array} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \quad 2F_2 + F_3 \quad \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-9v_2 + 18v_3 = 0$$

$$v_2 = 2v_3$$

$$-5v_1 + 4v_2 + 2v_3 = 0$$

$$-5v_1 + 5v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = 2v_3$$

$$\left(v_1, v_1, \tfrac{1}{2}v_1\right) = v_1\left(1, 1, \tfrac{1}{2}\right)$$

$E_9 = \langle (2, 2, 1) \rangle$

$\mathcal{B} = \{ (1, 0, -2), (0, 1, -2), (2, 2, 1) \}$

Quiero ortogonalizar esta base

$(1, 1, -4)$

Ejercicio 25. Hallar una matriz **simétrica** $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $(1,0,0)$ sea autovector de $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ de autovalor -1, $(0,2,-1)$ sea autovector de $\boldsymbol{A}^{-1}$ de autovalor 2 y tal que $\det(\boldsymbol{A}) = -6$.