Descomposición de Schur

Vimos en clases anteriores que una matriz $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$ se dice diagonalizable si existe una matriz C inversible y D diagonal:

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1},$$

y esto era equivalente a que exista B una base de autovectores de A de manera que si T_A es la tl definida por $T_A(x) = A \cdot x$, se tiene

$$[T_A]_{EE} = C(B,E) \cdot [T_A]_{BB}\, C(E,B).$$

En este caso, si existe C inversible:

$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ se dice que las matrices A y D son semejantes.

Si bien no toda matriz es semejante

a una matriz diagonal que tiene en su diagonal los autovalores (es decir no toda matriz es diagonalizable)

vamos a probar que TODA matriz A es semejante a una matriz T triangular superior que tiene en su diagonal a los autovalores de A.

<u>Teorema</u> (de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) existen matrices U (unitaria) y T triangular superior:

$$A = U \cdot T \cdot \underbrace{U^*}_{= U^{-1}} \qquad \text{con } \underbrace{t_{ii} = \lambda_i}_{\text{en la diagonal de } T \text{ están los autovalores de } A}.$$

<u>Def</u>: Si $A = U \cdot B\, U^*$ con U unitaria se dice que A es unitariamente semejante a B.

Entonces el teo de Schur dice que toda matriz A es unitariamente semejante a una matriz T triangular superior que tiene los autovalores de A en su diagonal.

<u>Matrices semejantes</u>:

<u>Def</u>: Dadas $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice A y B son semejantes si existe C inversible tal que $A = C B C^{-1}$.

Notar que esto equivale a $B = C^{-1} A C$

<u>Ejercicio</u>: Si notamos $A \sim B$ si A y B son semejantes, probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Luego, A se dice diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal.

Propiedades:

1) Si $A \sim B \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ y por lo tantos los autovalores de A y B son los mismos.

Dem: Si $A \sim B \Rightarrow \exists$ C inv: $A = CBC^{-1}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - CBC^{-1})$$

$$= \det(\underbrace{C\lambda C^{-1}}_{\lambda I} - CBC^{-1})$$

$$= \det(C(\lambda I - B)C^{-1})$$

$$= \det C \cdot \det(\lambda I - B) \underbrace{\det(C^{-1})}_{1/\det C}$$

$$= \det(\lambda I - B) = \chi_B(\lambda).$$

luego los autovalores, que son los ceros del polinomio característico, son los mismos.

2) Si $A \sim B \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

Dem: Usamos que $tr(M \cdot N) = tr(N \cdot M)$

$$tr(A) = tr(C \cdot B\, C^{-1}) = tr(B\, C^{-1} C) = tr(B)$$

Matrices unitariamente semejantes

Def: Dados $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que son unitariamente semejantes si existe $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria: $A = U B U^*$

donde $U^* = \overline{U}^t$ (traspuesta y conjugada)

Recordar que U es unitaria si vale alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1) Las filas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
2) Las columnas de U son una BON de $\mathbb{K}^n$
3) $U \cdot U^* = U^* \cdot U = I$ (es decir $U^* = U^{-1}$)
4) $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$

Propiedades de matrices unitarias:

Sea $U \in \mathbb{K}^{n\times n}$ unitaria, entonces:

i) $\|U\|_2 = 1$

<u>Dem:</u> $\|U\|_2 = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ux\|_2}{\|x\|_2} \overset{4)}{=} \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|x\|_2}{\|x\|_2} = 1$

ii) Si U es ortogonal $\Rightarrow$ $U^{-1} = U^*$ es ortogonal

<u>Dem:</u> U ortogonal $\Rightarrow$ $U^{-1} = U^*$

$U^* \cdot \underbrace{(U^*)^*}_{U} = U^* \cdot U = I \Rightarrow U^*$ es ortogonal.

iii) $\mathrm{Cond}_2(U) = 1$

<u>Dem:</u> $\|U\|_2 = 1$. Además U^{-1} es ortogonal

$\Rightarrow \|U^{-1}\|_2 = 1 \Rightarrow \mathrm{Cond}_2(U) = \|U\|_2 \|U^{-1}\|_2 = 1$

iv) $\det(U^*) = \overline{\det(U)}$

$\det(M) = \det(M^t)$ $\forall M$ matriz

$\det(U^*) = \det(\bar{U}^t) = \det(\bar{U}) = \overline{\det(U)}$

iv) $|\det U| = 1$.

Dem: $U \cdot U^* = I$

$\Rightarrow \det(U \cdot U^*) = 1$

$\Rightarrow \det U \cdot \det U^* = 1$

$\Rightarrow \det U \cdot \overline{\det(U)} = |\det U| = 1$

Si U es unitaria $U = U^*$

$\Rightarrow \det U \in \mathbb{R}$?

OBS: Si U es ortogonal (unitaria y real) $\Rightarrow \det U = \pm 1$.

v) Si λ es autovalor de $U \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Dem:

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $U \Rightarrow$

existe $v \neq 0$: $Uv = \lambda v$.

$$\underbrace{\|\lambda v\|_2}_{|\lambda|\,\|v\|_2} = \underbrace{\|Uv\|_2}_{\|v\|_2} \qquad \overset{v\neq 0}{\Rightarrow} \ |\lambda| = 1.$$

vi) Si U y $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son unitarias $\Rightarrow$ $U \cdot V$ es unitaria.

Dem:

$$UV(UV)^* = U\underbrace{VV^*}_{Id}U^* = UU^* = Id.$$

vii) Si notamos $A \sim_U B$ si A y B son unitariamente semejantes, probar que $\sim_U$ es una relación de equivalencia.

Descomposición de Schur

Empecemos con un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-2)\lambda+1\right] = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-1)^2 = (\lambda-1)^3.$$

1 es el único autovalor de A.

Si A fuera diagonalizable, existiría

C inversible (donde las columnas de C serían los autovectores):

$$A = C \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Id} \cdot C^{-1} = Id.$$

abs!

$\Rightarrow$ A no es diagonalizable (ni en $\mathbb{R}$, ni en $\mathbb{C}$).

Calculamos autovectores

$$I - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x = y$, $z = 0$ $\Rightarrow$ $E_1 = \langle (1,1,0) \rangle$

$v = (1,1,0)$ autovector asociado al autovalor 1. Llamamos

$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ autovector normalizado

Queremos U ortogonal:

$A \cdot U = U \cdot T$ con T triangular

sup y los autovalores
en diag.

$$A\cdot(u_1|u_2|u_3) = (u_1|u_2|u_3)\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Au_1 = u_1 \to u_1$ debe ser $v_1/\|v_1\|$

Si completamos a una BON, tendremos u_2 y u_3. Queremos $Au_2 = *u_1 + u_2$.

y $Au_3 = *u_1 + *u_2 + u_3$.

Extendemos a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$u_2 = (0,0,1)$

$u_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ sirven ?

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to U_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

y
$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_1} + 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_3}$$

Hasta aquí:

$$A \cdot (u_1 | u_2 | u_3) = (u_1 | u_2 | u_3)\begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{2} & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$$

Última columna:

$$A \underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_3} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} = -2 \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_1} + 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}}_{u_3}$$

$$A \cdot (u_1 | u_2 | u_3) = (u_1 | u_2 | u_3)\begin{pmatrix}1 & 1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1\end{pmatrix} = A_1$$

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$$ tiene mismos autovalores de A!

¿Será casualidad?

Tenemos $A \cdot U_1 = U_1 \cdot A_1$

$$\Rightarrow \quad U_1^* A U_1 = A_1$$

es decir A y A_1 son unitariamente semejantes, luego tienen mismos autovalores.

Miramos ahora la submatriz A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Buscamos $U_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ unitaria:

$$A_1 U_2 = U_2 \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot I_{2\times 2} - A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es autovector.

Completo con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Definimos

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\boxed{U_2}$}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$U_1^* A U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U_2^* A_1 U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_2^* (U_1^* A U_1) V_2$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & U_2^* \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1/\sqrt{2} \quad -2 \\ \hline 0 & \\ & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & U_2 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1/\sqrt{2} \quad -2 \\ \hline 0 & \\ & U_2^* A_1 U_2 \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1/\sqrt{2} & -2 \\ \hline 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

chequeamos con $U = U_1 V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$U^* \cdot A \cdot U$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T \text{ buscada.}}$$

que es triangular superior.

<u>Teorema</u> (de Schur): Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) existen matrices U (unitaria) y T triangular superior:

$$A = U \cdot T \cdot \underbrace{U^*}_{= U^{-1}} \quad \text{con } t_{ii} = d_i .$$

<u>Dem</u>: Tomamos d_1 autovalor de A

$\Rightarrow \exists$ w_1 autovector asociado, con lo cual

$w_1 \neq 0$ y podemos tomarlo $\|w_1\| = 1$ con

$$A w_1 = d_1 w_1$$

Si completamos a una BON de $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{B} = \{ w_1, z_2, \dots, z_n \}$ una BON

y llamamos $U_1 = \left(w_1 \mid z_2 \mid \cdots \mid z_n \right)$

$$A U_1 = \left(A w_1 \mid A z_2 \mid \cdots \mid A z_n \right)$$

$$= \left(d_1 w_1 \mid A z_2 \mid \cdots \mid A z_n \right)$$

$$= \left(w_1 \mid z_2 \mid \cdots \mid z_n \right) \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow U_1^* A U_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Como A y $\left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ son

semejantes (son unitariamente semejantes)

$\Rightarrow$ A y A_1 tienen los mismos autovalores

y d_1 es autovalor de A_1 $\Rightarrow$

$d_2 \dots d_n$ son autovalores de A_1

Tomamos $A_1 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ y d_2

autovalor $\Rightarrow \exists\, w_2 \neq 0$, $w_2 \in \mathbb{K}^{n-1}$

autovector.

Completamos a una BON de $\mathbb{K}^{n-1}$

$$\{ w_2, z_3^{(2)}, \dots, z_n^{(2)} \}$$

y construimos

$$U_2 = \left(w_2 \,\middle|\, z_3^{(2)} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, z_n^{(2)} \right)$$ de

manera que

$$U_2^* A_1 U_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} d_2 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_3 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$ y así ......

Si ahora $V_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$

$$\Rightarrow V_2^* U_1^* A U_1^* V_2 =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2^* \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U_2 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} d_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2^* A_1 U_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} d_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & U_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

donde U_3 tiene $d_3, \ldots, d_n$ como autovalores .....

Así seguimos inductivamente hasta encontrar $U_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}$:

$$\overbrace{V_{n-1}^* V_n^* \cdots V_2^* \cdot U_1^*}^{U^*} A \overbrace{U_1 V_2 \cdots V_n}^{U} = T$$

con $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ triangular inferior

Si llamamos $U = U_1 V_2 \cdots V_n$ es producto de matrices unitarias y por lo tanto es unitaria, tenemos

$$U^* \cdot A \cdot U = T \quad \text{como queríamos}$$

Notar que cada V_j la construimos poniendo un bloque identidad y otro con U_j:

$$V_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad V_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{U_3} & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) \cdots V_j = \left(\begin{array}{c|c} Id_{j-1} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{U_j} \end{array}\right)$$

¿Qué pasa si la matriz A es hermitiana?

<u>Def</u>: Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice hermitiana si $A = A^*$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esto es $A = \bar{A}^t$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esto es $A = A^t$ (simétrica).

<u>Ej</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

luego A es hermitiana.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitiana

Por teo Schur $\exists$ U unitaria y T triangular superior:

$$U^* A U = T \Leftrightarrow A = U T U^*$$
$$\Rightarrow A^* = U T^* U$$

Como $A = A^*$

$$UTU^* = UT^*U^* \Rightarrow T = T^*$$

U y U^* son inversible

T es triang sup $\Rightarrow T^*$ es triang inf

$\Rightarrow T$ es diagonal, además $t_{ii} = \overline{t_{ii}}$

luego $t_{ii} \in \mathbb{R}$.

Es decir, T es diagonal real y tiene los autovalores en la diagonal.

<u>Corolario</u>: Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es hermitiana entonces A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real.

Es decir, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus autovalores son reales y se puede elegir una base de autovectores que sea una BON.