

Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	Calificación

## Álgebra Lineal Computacional

### Primer Parcial – 27 de Mayo de 2022

*Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4 y al menos un ejercicio debe estar completamente correcto.*

**Ejercicio 1.** Sea  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la proyección ortogonal sobre  $S = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0) \rangle$  y sean  $T = \{x \in \mathbb{R}^4: x_1 - x_2 + x_3 = 0, -x_2 + x_4 = 0\}$  y  $W = \langle (2, 0, -2, 0), (-2, 1, 0, 1), (2, 1, -4, 1) \rangle$ .

a) (2 pts.) Decidir si existe alguna transformación lineal  $g$  que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle (2, 0, 1, 1), (0, -1, 2, 2) \rangle \quad g(v) = f(v) \quad \forall v \in T$$

En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

b) (1 pt.) Sea  $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

hallar una base de  $\text{Im}(h \circ f)$  y decidir si  $h \circ f$  es epimorfismo. ¿Puede ser monomorfismo?

**Ejercicio 2.** Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{n}{3} \end{pmatrix},$$

con  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) (1.5 pts.) Probar que existe una constante  $c > 0$  tal que  $\text{cond}_\infty(A) \geq cn$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y deducir que  $\text{cond}_\infty(A) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- b) (1 pt.) Para  $n = 10^4$ , hallar la descomposición  $LU$  de  $A$ .
- c) (1 pt.) Para  $n = 10^4$ , utilizar la descomposición  $LU$  hallada para resolver el sistema  $Ax = b$  utilizando aritmética de 4 dígitos (en base 10).
- d) (0.5 pt.) Verificar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la solución exacta del sistema es  $x = (0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$  y calcular, para  $n = 10^4$ , el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

donde  $\tilde{x}$  es la solución aproximada hallada en el ítem anterior.

**Ejercicio 3.** Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

y, en cada caso, el Método de la Potencia dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} v^{(k)} = \frac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|} \\ r_k = \frac{(v^{(k)})^t Av^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases} \quad \begin{cases} v^{(k)} = \frac{Bv^{(k-1)}}{\|Bv^{(k-1)}\|} \\ r_k = \frac{(v^{(k)})^t Bv^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases},$$

para  $k \geq 1$ .

- a) (1 pt.) Calcular los autovalores y los autovectores de  $A$  y de  $B$ . Corroborar que para la matriz  $A$  se cumplen las hipótesis del Método de la Potencia. Determinar si para la matriz  $B$  existe algún  $v^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  tal que la sucesión  $r_k$  sea convergente.
- b) (1 pt.) Para la matriz  $B$  y el vector inicial  $v^{(0)} = (-2, 0, 2)$ , calcular  $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}$  y deducir  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k$ .
- c) (1 pt.) Para la matriz  $A$  y el vector inicial  $v^{(0)} = (-2, 3, -5)$ , calcular  $\lim_{k \rightarrow \infty} v^{(2k+1)}$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_{(2k+1)}$ . En este caso, ¿el método logró obtener otro autovalor de la matriz? ¿por qué?