Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\mathrm{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ $\quad x_3 = -x_1 - x_2$

ii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$

i) $\mathrm{Im}\, f = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$

Como $\dim(\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Nu}\, f) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

y $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Nu}\, f = 1$

elijo uno li a los de Im f

$\Rightarrow \mathrm{Nu}\, f = \langle (0,1,0) \rangle$

$\therefore$

fof = f para los elem. de Im f

$f(1,0,-1) = (1,0,-1)$
$f(0,1,-1) = (0,1,-1)$
$f(0,1,0) = (0,0,0)$

ii) $Nu\, f = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$

$\Rightarrow Im\, f = \langle (0,1,0) \rangle$

$\therefore$

$$f(1,0,-1) = (0,0,0)$$
$$f(0,1,-1) = (0,0,0)$$
$$f(0,1,0) = (0,1,0)$$

iii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$

$x_3 = 3x_1$

$\{(x_1, x_2, 3x_1)\}$

$Nu\, f = \langle (1,0,3), (0,1,0) \rangle$

$Im\, f = \langle (1,1,1) \rangle$

$$f(1,0,3) = (0,0,0)$$
$$f(0,1,0) = (0,0,0)$$

$$f(1,1,1) = (1,1,1)$$

Ejercicio 15.

(a) Sea $B = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0), \quad f(0,1,-1) = (0,1,-1) \quad \text{y} \quad f(0,0,1) = (0,0,0).$$

Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

Llamo $B = \{ \underbrace{(1,-1,0)}_{w_1}, \underbrace{(0,1,-1)}_{w_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{w_3} \}$

$$f(w_1) = w_1$$

$$f(w_2) = w_2$$

$$f(w_3) = (0,0,0)$$

$\therefore$

$$f((1,0,0)_B) = (1,0,0)_B$$

$$f((0,1,0)_B) = (0,1,0)_B$$

$$f((0,0,1)_B) = (0,0,0)_B$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f es Proyector si

- $[f]_B^2 = [f]_B$

$$[f]_B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [f]_B \checkmark$$

$\therefore$ f es Proyector

(b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

$$x_1 + x_2 = 3x_3$$

$$x_2 = 3x_3 - x_1$$

$$\mathrm{Im}\, f = \langle (1,-1,0), (0,3,1) \rangle$$

$$f(1,1,1) = (0,0,0)$$

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0)$$

$$f(0,3,1) = (0,3,1)$$

Para ver si es Proyección ortogonal veo si:

$$\mathrm{Nu}\, f = \mathrm{Im}\, f^{\perp} \quad (\text{complemento ortogonal})$$

$$S^{\perp} = \{ v \in V : v * s = 0 \quad \forall s \in S \}$$

$\Rightarrow$ Veo:

$$\underset{\in \operatorname{Im} f}{(1,-1,0)} \underset{\in \operatorname{Nu} f}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = 0 \quad \checkmark$$

$$\underset{\in \operatorname{Im} f}{(0,3,1)} \underset{\in \operatorname{Nu} f}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = 4 \neq 0$$ $\therefore$ <u>no</u> son ortogonales

$\therefore$ <u>no</u> es Proyección ortogonal.

Ejercicio 16. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \boldsymbol{v} \rangle$.

(b) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S, entonces: $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es como en el ítem anterior, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

(d) Eligiendo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $R = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$.

a) $$v v^* = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 . v_1 & v_1 . v_2 & \cdots & v_1 . v_n \\ v_2 . v_1 & v_2 . v_2 & \cdots & v_2 . v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n . v_1 & v_n . v_2 & \cdots & v_n . v_n \end{bmatrix}$$

Sea:

$$P_{\langle v \rangle}(\omega) = v^* \omega . v$$

Revisar y Seguir ¡!

$$= \underbrace{(v^* \omega)}_{\in \mathbb{R}} . v$$

$$= v (v^* \omega)$$

$$= (v v^*) \omega \quad \checkmark$$

b)

c) $$I - A = I - \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^*$$

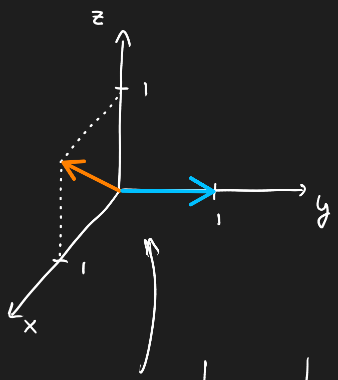
d) Ver notebook.

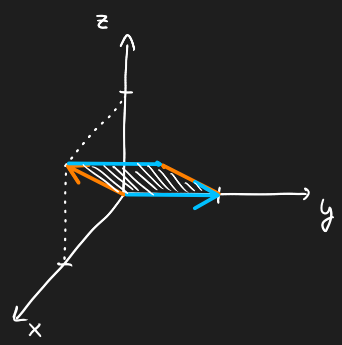
Ejercicio 17. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}(\boldsymbol{A})$.

$$\operatorname{Im} A = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$$

Pues

$$\operatorname{Im} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$





Son ortogonales

Pero v_1 tiene norma $\sqrt{2}$

$\mathcal{B}$ BON de $\operatorname{Im} A$:

$$\mathcal{B} = \langle \underbrace{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{q_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{q_2} \rangle$$

Calculo matrices

matriz de proy. ortogonal sobre Im A

$$[P_{\mathcal{B}}]_{EE} = q_1 q_1^* + q_2 q_2^*$$

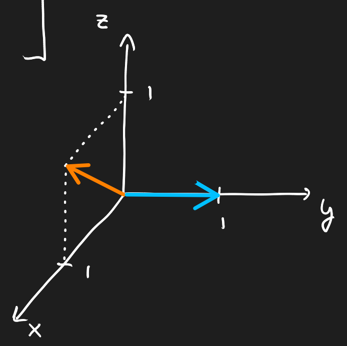
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

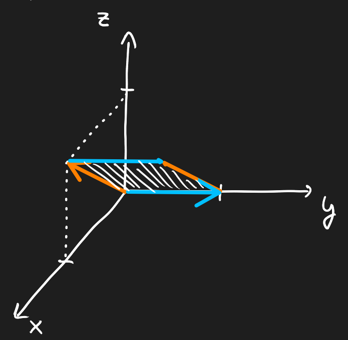
$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ejemplos

$$P_S(\omega) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} v = \omega \in \text{Plano generado por } B$$

Ejercicio 18. Sea $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes:

(a) $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^t$.

(b) Las columnas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(c) Las filas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(d) $\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geométricamente.
Sugerencia: para demostrar la implicación (d $\Rightarrow$ b) usar que $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2)$.

(e) Q: matriz ortogonal (columnas ortonormales)

a) $Q^{-1} = Q^t$

$$Q^{-1}Q = Q^tQ$$

$$I = \begin{bmatrix} - & q_1^t & - \\ & \vdots & \\ - & q_n^t & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^tq_1 & q_1^tq_2 & \cdots & q_1^tq_n \\ q_2^tq_1 & q_2^tq_2 & \cdots & q_2^tq_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^tq_1 & q_n^tq_2 & \cdots & q_n^tq_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad q_i^t q_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

$$\Rightarrow \quad \|q_i\| = 1 \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad ✓$$

b) Si (b) $\Rightarrow$ (a) y si (a) $\Rightarrow$ (b) ✓

c) Si (c) $\Rightarrow$ (b) y si (b) $\Rightarrow$ (c)

Pues

$$Q = \begin{bmatrix} — & q_1 & — \\ & & \\ — & q_n & — \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^t = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Q^t cumple (b) ✓

d) $$\|Qx\|_2^2 = (Qx)^t Qx$$

$$\overset{(a)}{=} x^t \underbrace{Q^t Q}_{=I} x$$

$$= x^t x$$

$$\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$ ✓

Ejercicio 19. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 20. Implementar dos programas que calculen la descomposición QR de una matriz:

1. Aplicando de manera directa el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
2. Utilizando transformaciones de Householder.

Generar algunas matrices aleatorias y comparar las descomposiciones arrojadas por estos programa con las dadas por el comando np.linalg.qr. ¿Qué se observa?

Ejercicio 21. Implementar un programa que resuelva un sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a partir de la descomposición QR de $\boldsymbol{A}$.