Nombre y apellido

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación
0	2	2,5	2,25	7 (*)

Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 23 de febrero de 2023

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4. ***Realice todos los ejercicios en hojas separadas.***

Ejercicio 1. Sean

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\},$$
$$T = \langle (0, -2, 1, 3), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle,$$

subespacios de $\mathbb{R}^4$ y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S + T$.

a) (1.5 pts.) Hallar $M_{\mathcal{E}}(f)$, la matriz de f en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$.

b) (1 pt.) Para $h \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_4),$$

decidir si $h \circ f$ es epimorfismo.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1.64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.64 & 0 & 9.07 \end{pmatrix}.$$

a) (1 pt.) Mostrar que A es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky utilizando aritmética de punto flotante de 2 dígitos y redondeo.

b) (1 pt.) Utilizar la descomposición obtenida en el ítem anterior para resolver el sistema $Ax = b$ con $b = (4, -1, 1.64)$ con aritmética de punto flotante de 2 dígitos y redondeo.

c) (0.5 pts.) Corroborar que la solución exacta es $x = (1, -1, 0)$ y calcular $\frac{\|x-\tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$, donde $\tilde{x}$ es la solución numérica hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Para $n \geq 3$, considerar:

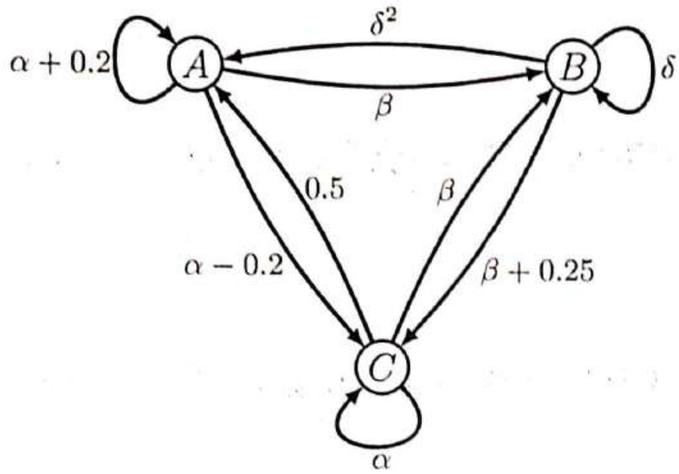
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Probar que $\operatorname{cond}_1(A_n) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$.

Sugerencia: recordar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) (1 pt.) Probar que $\operatorname{cond}_2(A_{20}) > 10$.

Ejercicio 4. Un mismo día se televisan tres finales: la de un torneo de fútbol (A), la de un torneo de básquet (B) y la de un torneo de tenis (C). Todas ellas ocurren durante el mismo horario y cada una es transmitida por un canal distinto. Por esta razón, los televidentes hacen mucho *zapping* entre los tres canales. El siguiente diagrama muestra el comportamiento de los televidentes cada minuto:



Por ejemplo, después de un minuto, el 50% de los que están viendo la final de tenis cambian al canal de la final de fútbol.

1 a) (1 pt.) Hallar la matriz de transición P y calcular sus autovalores.

0,5 b) (0.5 pts.) Inicialmente hay 300 espectadores mirando fútbol, 300 mirando básquet y 600 mirando tenis. Luego de 5 minutos, ¿aproximadamente cuántos televidentes tendrá la final de fútbol? ¿Cuántos tendrá la final de tenis luego de 8 minutos?

0,25 c) (1 pt.) Decidir si existe P^{∞}. En caso afirmativo, calcularla y hallar el estado límite del estado inicial correspondiente a la situación del ítem b).

Primer parcial ALC 23/02/23

2) a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1,64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,64 & 0 & 9,07 \end{pmatrix}$$

Calculamos autovalores de A $\quad \det(A-\lambda I)=0$

$$\left|\begin{pmatrix} (4-\lambda) & 0 & 1,64 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 1,64 & 0 & (9,07-\lambda) \end{pmatrix}\right| = (4-\lambda)(1-\lambda)(9,07-\lambda) + 1,64(-1,64(1-\lambda)) =$$

$$= (4 \underbrace{-4\lambda-\lambda}_{-5\lambda}+\lambda^2)(9,07-\lambda) - 2,6896 + 2,6896\lambda =$$

$$= 36,28 - 4\lambda - 45,35\lambda + 5\lambda^2 + 9,07\lambda^2 - \lambda^3 - 2,6896 + 2,6896\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 14,07\lambda^2 - 46,6604\lambda + 33,5904 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3,51575755 \\ \lambda_2 = 9,55424245 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Como A es simétrica y todos sus autovalores son positivos, A es simétrica definida positiva y va a existir su descomposición de Cholesky C/ $A = C.C^T$ donde C es matriz diagonal inferior

Calculo C con aritmética de punto flotante de 2 dígitos y redondeo

¿dónde lo calculás?

$C_{11} = fl(\sqrt{4}) = 2 \qquad C_{12} = fl(0)=0 \qquad C_{13} = fl(0)=0$

$C_{21} = fl(0)=0 \qquad C_{22} = fl(1) = 1 \qquad C_{23} = fl(0) = 0$

$C_{31} = fl\left(\dfrac{fl(0,164.10^1)}{2}\right) = fl\left(\dfrac{0,16.10^1}{2}\right) = fl(0,8.10^1) = 0,8$

$C_{32} = fl(0)=0 \qquad C_{33} = fl\left(\sqrt{fl(0,907.10^1) - fl\left(\dfrac{fl(0,164.10^1)}{2}\right)^2}\right) =$

Faltan las fórmulas

¿Cómo deducís estos números?

$= fl\left(\sqrt{0,91.10^1 - 0,8\ 10^0}\right) = fl\left(\sqrt{0,83.10^1}\right) =$ (0,8)^2

$= fl(0,2880972058.10^1) = 0,29.10^1 = 2,9$

Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,8 & 0 & 2,9 \end{pmatrix} \qquad A = C \cdot C^T$$

b) Para calcular la ~~solución~~ del sistema $Ax = b$ con C matriz de Cholesky calculo: $Cy = b$ y luego $C^T \cdot x = y$

Hallo y

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1,64 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0,8 & 0 & 2,9 & 1,64 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ fl(fl(0,8) - fl(0,8)) & 0 & 2,9 & fl(1,64 - 0,16 \cdot 10^1) \end{array}\right) =$$

$F_3 - 0,4F_1$

$$fl(0,16 \cdot 10^1 - 0,16 \cdot 10^1) = 0$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2,9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\frac{F_1}{2}$

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no tenés que escalonar, L es triangular inferior

Ahora calculo x

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0,8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2,9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2,9 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 2x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{matrix}$$

$F_1 - \frac{0,8}{2,9} F_3$

Solución

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

NOTA

c)
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1,64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,64 & 0 & 9,07 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1,64 \end{pmatrix}$$

En este caso x me dió la misma solución que $\bar{x}$,

por lo tanto el error relativo $\frac{\|x-\bar{x}\|_1}{\|x\|_1}$ es 0

3) a) $n \geq 3$

Probar que $Cond_1(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$

$$Cond_1(A_n) \geq \frac{\|A_n\|_1}{\|A_n - B_n\|_1} \quad \forall B_n \text{ singular}$$

Como $n \geq 3$ (siempre positiva), la norma 1 de A_n que era la suma de los valores absolutos ~~de~~ los elementos para cada columna, coincide con la suma de los elementos de cada columna. Como la primer columna es la que tiene mas elementos (llega hasta el elemento n y las otras columnas llegan a valores menores a n, $\|A_n\|_1 = \{1+2+3+\dots+n\} = \sum_{K=1}^{n}$

Como bien dice el enunciado, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Entonces $\|A_n\|_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

Tomo B_n singular (Su ultima columna es $0 \Rightarrow det(B_n)=0$) Y calculo $\|A_n - B_n\|_1$

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_n - B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\|A_n - B_n\| = 1$

$$Cond_1(A_n) \geq \frac{\|A_n\|_1}{\|A_n - B_n\|} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{1} \Rightarrow Cond_1(A_n) \geq \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$$

Luego $\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+n}{2} \underset{\text{L'HOPITAL}}{=} \lim_{n \to +\infty} n + \frac{1}{2} = +\infty$

$\therefore Cond_1(A_n) \longrightarrow +\infty$

b) Probar que $\text{Con}_2(A_{20}) > 10$

Del ejercicio 10 de la práctica 2 se que $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A_n\|_1 \leq \|A_n\|_2 \leq \sqrt{n}\|A_n\|_1$

$$\text{Cond}_2(A_n) \geq \frac{\|A_2\|}{\|A_n - B\|_2} \Rightarrow \text{Cond}_2(A_n) \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\|A_n\|_1}{\sqrt{n}\|A_n - B_n\|_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Cond}_2(A_n) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{\|A_n\|_1}{\|A_n - B_n\|_1}\right)$$

Del ejercicio anterior $\|A_n\|_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ $\Rightarrow$

$\|A_n - B_n\|_1 = 1$

$$\Rightarrow \text{Cond}_2(A_n) \geq \frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right) \Rightarrow \text{Cond}_2(A_n) \geq \frac{n+1}{2}$$

Si $n = 20$ (Quiero ver $\text{Cond}_2(A_{20})$)

$\text{Cond}_2(A_{20}) \geq \frac{20+1}{2}$, es decir que $\text{cond}_2(A_{20}) \geq 10{,}5 > 10$ como quería probar

4) a)

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha+0{,}2 & \delta^2 & 0{,}5 \\ \beta & \delta & \beta \\ \alpha-0{,}2 & \beta+0{,}25 & \alpha \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Para que P sea matriz de Markov, sus columnas deben sumar 1

$$\begin{cases} \alpha+0{,}2+\beta+\alpha-0{,}2=1 \\ \delta^2+\delta+\beta+0{,}25=1 \\ 0{,}5+\beta+\alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+1\beta = 1 \\ 0\alpha+\beta+(\delta^2+\delta) = 0{,}75 \\ 1\alpha+1\beta = 0{,}5 \end{cases}$$

Utilizando np.linalg.solve

$$\begin{cases} \alpha = 0{,}5 \\ \beta = 0 \\ \delta(\delta+1) = 0{,}75 \rightsquigarrow \delta^2+\delta-0{,}75=0 \end{cases}$$

$$\delta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1(-0{,}75)}}{2\cdot 1} \begin{cases} \delta_1 = \frac{1}{2} \\ \delta_2 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Para que P sea Matriz de Markov, cada elemento debe ser mayor o igual a 0 y menor o igual a 1, por lo tanto tomo $\delta = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Calculo autovalores de P $\quad \det(P-\lambda I)=0$

$$\begin{vmatrix} (0{,}7-\lambda) & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & (0{,}5-\lambda) & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}25 & (0{,}5-\lambda) \end{vmatrix} = (0{,}7-\lambda)(0{,}5-\lambda)^2 - 0{,}25(0) + 0{,}5(-(0{,}3)(0{,}5-\lambda)) =$$

$$= (0{,}7-\lambda)(0{,}25-1\lambda+\lambda^2) + 0{,}5(-0{,}15-0{,}3\lambda) = 0{,}175 - 0{,}7\lambda + 0{,}7\lambda^2 - 0{,}25\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - 0{,}075 + 0{,}15\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 1{,}7\lambda^2 - 0{,}8\lambda + 0{,}1 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0{,}2 \\ \lambda_3 = 0{,}5 \end{cases}$$

NOTA

Hallo espacio de autovectores para cada autovalor

$\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (0,7-1) & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & (0,5-1) & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & (0,5-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -0,3 & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$F_1 + F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & -0,5 & 0 \end{array}\right)$$

$F_2 + F_1$ $\qquad 0,5\,y = 0 \Rightarrow y = 0$

$F_3 - \frac{1}{2} F_1$ $\qquad 0,3x - 0,5z = 0$

$\frac{0,3x}{0,5} = z$

$$E_{\lambda=1} = (x; 0; 0,6x) = x\,(1; 0; 0,6) = \langle (1;0;0,6) \rangle$$

$0,6x = z$

$\lambda = 0,2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (0,7-0,2) & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & (0,5-0,2) & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & (0,5-0,2) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Utilizo row_echelon

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + \frac{1}{2}y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

$$E_{\lambda=0,2} = (x, 0, -x) = x\,(1, 0, -1) = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

$\lambda = 0,5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (0,7-0,5) & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & (0,5-0,5) & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & (0,5-0,5) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0,2 & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Utilizo row_echelon

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,25 & 2,5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 1,25y + 2,5z = 0 \\ y = -6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1.25(-6z) + 2,5z = 0 \\ y = -6z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 5z = 0 \\ y = -6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = -6z \end{cases} \quad E_{\lambda=0,5} = (5z, -6z, z) = z(5, -6, 1) = \langle (5, -6, 1) \rangle$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0{,}6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallo C^{-1} para diagonalizar P (Se que es diagonalizable porque P tiene 3 autovalores distintos, c/u con m.a $= 1$)

Planteo $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Para ahorrar tiempo, planteo $C \cdot C^{-1} = I$ y utilizo np.linalg.solve

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}625 & 0{,}625 \\ 0{,}375 & 0{,}2083 & -0{,}625 \\ 0 & -0{,}1667 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$$

6) $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}$. $\quad v^{(5)} = P^5 \cdot v^{(0)}$

Hallo P^5 $\qquad$ Utilizo np.linalg.matrix_power (D,5) para calcular D^5

$$P^5 = C \cdot D^5 \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0{,}6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (3{,}2 \cdot 10^{-4}) & 0 \\ 0 & 0 & (3{,}125 \cdot 10^{-2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}625 & 0{,}625 \\ 0{,}375 & 0{,}2083 & -0{,}625 \\ 0 & -0{,}1667 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}62512 & 0{,}589025 & 0{,}6248 \\ 0 & 0{,}03125 & 0 \\ 0{,}37488 & 0{,}369725 & 0{,}3752 \end{pmatrix}$$

$$v^{(5)} = P^5 \cdot v^{(0)} = P^5 \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742{,}1235 \\ 9{,}375 \\ 448{,}5015 \end{pmatrix}$$

<u>Respuesta</u>

Luego de 5 minutos, la final de futbol tendrá aproximadamente 742 televidentes

NOTA

$$v^{(8)} = P^8 \cdot v^{(0)} = P^8 \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix} :$$

$$P^8 = C \cdot D^8 \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 749{,}029 \\ 1{,}1718 \\ 449{,}8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Utilizo
np.linalg.matrix_power(D, 8)

Respuesta
Luego de 8 minutos, la final de tenis tendrá aproximadamente 450 televidentes ✓

c) Como $\lambda = 1$ es el único autovalor de módulo 1, existe P^∞

$$P^K = C \cdot D^K \cdot C^{-1}. \text{ Tomo } K \to \infty \qquad P^\infty = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C^{-1} :$$

✓

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0{,}6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}625 & 0{,}625 \\ 0{,}375 & 0{,}2083 & -0{,}625 \\ 0 & -0{,}1667 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}625 & 0{,}625 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}375 & 0{,}375 & 0{,}375 \end{pmatrix}$$

Hallo v^∞ para $v^{(0)}$

$$v^\infty = P^\infty \cdot v^{(0)} = \begin{pmatrix} 750 \\ 0 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Debería ser un estado $v^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 0 \\ 0{,}375 \end{pmatrix}$
(o sea, faltó transformarlo a estado)

NOTA