norma 2: $\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

A semejante a B $\Leftrightarrow$ $A = CBC^{-1}$ $\Rightarrow$ A (N) va a ser diagonalizable si A semejante a una matriz diagonal.

Si $A \sim B \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ | si $A \sim B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$ | si $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B)$.

A y B unitariamente semejantes $\Leftrightarrow A = VBV^*$.

matriz singular ↳ det = 0 NO INVERSIBLE

DESCOMPOSICIÓN DE SCHUR: $A = UTU^{-1} \rightarrow T = U^{-1}AU$. 1er paso: Busco avals de A (recordemos que si A es diagonalizable voy a tener $\#E_\lambda = \dim(A)$. Si no lo es no hay problema para Schur) uno vez obtenidos los avecs (a partir de los avals), los normalizo y los voy metiendo en U. Si me faltan completo con una base y normalizo. Así voy a tener $T = U^{-1}AU$. y listo.

U unitaria $\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$ ($U^* = \bar{U}^t$).

↳ las cols son BON, las filas son BON, $UU^* = U^*U = Id$, $\|Ux\| = \|x\|$ isometría

$\|U\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|_2}{\|x\|_2} = 1$, cond$(U) = 1$, $\det(U) = \det(U^*)$, $|\det(U)| = 1$,

U unitaria $\Rightarrow$ inversible, U, V unitarias $\Rightarrow UV$ unitaria. $(\det(M) = \det(M^t))$

($T = T^*$ si $A = A^*$; $A = UDU^*$, $A = A^*$, $A = UDU^* \Leftrightarrow AU = UD$.)

Triangular Superior

A hermitiana $\Leftrightarrow A = A^*$ (en $\mathbb{R}^n \rightarrow A = A^t$)

↳ $\Rightarrow$ unitariamente semejante a una matriz diagonal.

si A [redacted] hermitiana $\Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

radio espectral $\rho(M)$: ~~[illegible]~~ si A hermitiana $\Rightarrow A = UDU^*$

$\Rightarrow \|Ax\|_2 = \|UDU^*x\|_2 = \|DU^*x\|_2 = \|Dy\|_2 = \sqrt{(\lambda_1 y_1)^2 + \dots + (\lambda_n y_n)^2} \leq \sqrt{\max \lambda_i^2 (y_1^2 + \dots + y_n^2)} = \max|\lambda_i| \|y\|_2$

cond$(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ si A tiene SVD

Dado $A \in k^{n\times n}$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ avals. Se define radio espectral de A: $\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| = \lambda_{max}$.

A ortog $\Leftrightarrow A^tA = Id$

OBS: para A cualquiera podemos plantear lo siguiente: A^*A es hermit. $\Rightarrow \|A^*A\| = \rho(A^*A)$

$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle \leq \|x\| \|A^*Ax\|_2 \leq \|x\|_2^2 \|A^*A\|_2 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho(A^*A)}$. ($\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)} = \sigma_1$) $\|A^{-1}\|_2 = 1/\sigma_n$

$Av = \lambda v \Rightarrow A^2v = \lambda^2 v$ ‖ $\rho(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}$ ‖ Σ reescalo los v_i, u_i en el proceso.

↳ con A hermitiana $A^*A = A^2$ y queda $\rho(A^*A) = \rho(A)$

$\det(\lambda M + N)$ ó $\det(M_{J/G\text{-}S} - \lambda I)$ ↓ $-(L+D)^{-1}N|(G\text{-}S)$ $-D^{-1}(L+U)|(J)$

SVD: $A = U\Sigma V^*$ ($m\times n$, $m\times m$, $m\times n$, $n\times n$), Σ tiene $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$.

1ero hacemos A^tA para calcular los $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. les tomamos raíz y obtenemos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

2do calculamos los autovectores con los λ como sabemos y los normalizamos para completar la V que luego traspondremos.

3ro $U = (u_1 | u_2 | \dots | u_n) \rightarrow A \cdot v_1 = \sigma_1 u_1 \dots A \cdot v_n = \sigma_n u_n$. | $A^*u_i = v_i\sigma_i$

$A^t \binom{2}{?} = \binom{0}{0}$ ↓ va a ser la última col de U.

SVD reducido $\rightarrow$ elimino filas y columnas que están multiplicados por algún cero de la matriz Σ. No cambia el resultado de la A.

pseudoinversa: $A^+ = V\Sigma^+U^t$. Vaa valer $AA^+A = A$ y $A^+AA^+ = A$. Si A inversible $\Rightarrow A^+ = A^{-1}$

MATRIZ MÁS CERCANA A A: sea A inversible y $A = U\Sigma V^*$, definimos $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{n-1} \end{pmatrix}$ con σ_i el i-ésimo lugar de A. $\Rightarrow \tilde{A} = U\tilde{\Sigma}V^*$ es la matriz más cercana de las singulares a A en norma 2 $\rightarrow \|A - \tilde{A}\| = \min_{B \text{ singular}} \|A - B\|_2$ y $\|A - \tilde{A}\|_2 = \sigma_n$. Sea A de rango $r > 0$ con $A = U\Sigma V^*$ su SVD. La matriz A_k de rango $k < r$ más cercana a A en $\|\ \|_2$ es:

$\|A\|_2 = \sigma_{max}$

$A_k = U\Sigma_k V^*$ ↳ $\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_k \ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \underbrace{\|A - A_k\|_2}_{\sigma_{k+1}} = \min\{\|A - B\|_2 / rg(B) \leq k\}$.

$Im(A)^\perp = Nu(A^*)$.

con QR: $Ra = Q^tb$

con pseudoinv: $AA^+b = b$ cuando A no es inversible.

CUADRADOS MÍNIMOS: buscamos que $\left\| \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \binom{a}{b} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_2$ sea mínimo. Lo hacemos con las ecuaciones normales $\rightarrow A^tA\binom{a}{b} = A^ty$. Si las columnas de A son l.i. $\Leftrightarrow A^tA$ inversible $\Rightarrow$ la solución es única.

Linealizar una función $\rightarrow d_0 e^{d_1 x_i} - y_i \rightarrow \ln(d_0 e^{d_1 x_i}) - \ln(y_i)$

$\ln(d_0) + d_1 x_i - \ln(y_i)$; $a_0 = \ln(d_0)$, $a_1 = d_1$; $e^{a_0} = d_0$

$A^tA\binom{a_0}{a_1} = A^t \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}$

MÉTODOS ITERATIVOS:

↳ convergen si $\rho(M) < 1$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} M^k = 0$

$A = L + D + U$

$M_J = -D^{-1}(L+U)$

$M_{GS} = -(L+D)^{-1}U$

↳ JACOBI $\rightarrow B = D$ para Jacobi | GS $\rightarrow B = L + D$

si A es EDD $\Rightarrow$ Jacobi y G-S convergen

si $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ $\forall i$

A sdp $\Rightarrow$ G-S converge

A tridiagonal $\Rightarrow \rho(M_{GS}) = \rho(M_J)^2$

$|a_{11}| > 0$, $|\ \ |_n > 0$ y además es simétrica.

$x = A^+b + (Id - A^+A)y$

cte que mejor aproxima a una f en $[a, b]$

↳ $c = 1/n \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

polinomios interpoladores de Lagrange

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$

↳ los polinomios de Lagrange

$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^ty\rangle$

valores singulares de $A^t = \bar{A} = A^* = A$