Álgebra Lineal Computacional

Segundo Parcial – 16 de Marzo de 2023

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4. ***Realice todos los ejercicios en hojas separadas.***

Ejercicio 1. Considerar las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

y, en cada caso, el Método de la Potencia dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|} \\[2ex] r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Bv^{(k-1)}}{\|Bv^{(k-1)}\|} \\[2ex] r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t B v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases},$$

para $k \geq 1$.

a) (1.5 pts.) Verificar que la matriz A satisface las hipótesis del Método de la Potencia. Hallar un vector $v^{(0)}$ que no sea autovector de A tal que r_k converja al autovalor de módulo máximo. Hallar un vector $v^{(0)}$ que no sea autovector de A tal que r_k converja a un autovalor distinto del anterior.

b) (1 pt.) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que, al aplicar el Método de la Potencia a B con $v^{(0)} = (\alpha^2 - 1, -5, -8)$, r_k converja al segundo autovalor de módulo máximo.

Ejercicio 2. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c & 1/2 \\ c & 1 & c/2 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Se quiere resolver el sistema $Ax = b$, con $b \in \mathbb{R}^3$, utilizando el método de Gauss-Seidel. Decidir para qué valores de c el método resulta convergente para todo vector inicial $x^{(0)}$.

b) (1 pt.) Para $c = 1/3$, verificar que el método de Jacobi también resulta convergente. ¿Cuál de los dos métodos converge más rápido?

Ejercicio 3. Para $a \neq 0$ se define

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Hallar la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$ de A.

b) (1 pt.) Hallar la matriz de rango 1 más cercana a A.

Ejercicio 4. En un bosque se ha identificado una especie de planta exótica que probablemente haya sido introducida ilegalmente. A lo largo de los últimos años se ha registrado cómo progresó el número de individuos de dicha especie. En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos, donde x es el año desde el comienzo del estudio e y la cantidad de individuos:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	216	219	287	303	439	556	681

a) (1 pt.) Hallar el polinomio $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

b) (1 pt.) Ajustar una función de la forma $g(x) = d_0 e^{d_1 x}$ aplicando cuadrados mínimos sobre la función transformada convenientemente. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

c) (0.5 pts.) La especie será considerada una plaga cuando supere los 1000 individuos. Para cada modelo de los ítems anteriores, ¿luego de cuántos año será declarada una plaga?

1.2

Busco Avals y Avecs de A:

$-1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $4 \begin{pmatrix} 0,3574 \\ 0,5144 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $1 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $-2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

A es diagonalizable, Avals $\{-1, 4, 1, -2\}$ y sus correspondientes autovectores $\{(0,1,0,0), (0,3574, 0,5144, 0,0), (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 0), (0,0,\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$.

$\Rightarrow$ Por teorema $\exists v^{(0)} / v^{(0)} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$, $r(k) = r(v^{(k)}) = r(A^k v^{(0)}) \to \lambda_1$

Busco un vector $v^{(0)}$ tal que $\alpha_1 \neq 0$ y r_k converja al Aval de modulo maximo. esto ocurre por teorema.

Sea $v^{(0)} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Busco sus coorde en A / $v_1 \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,3574 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1 & 0,5144 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = (-0,6,\ 1,16618033,\ 0,0) \Rightarrow v = (1,0,0,0)$

Por teorema

$$r(k) = r(v_k) = r(A^k v_0) = \frac{-0,6\,(4)^k (0,357, 0,5144, 0,0) + 1,166\,(-2)^k (0,0,\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) + 0 \dots + 0 \dots}{\|-0,6 (4)^k (0,357, \dots) + 1,166 (-2)^k (0,0 \dots)\|}$$

tomando lim

$$\frac{4^k}{|4|^k} \frac{(-0,6\,(0,357, 0.5144, 0,0) + 1,166\,(\frac{-2}{4})^k (\dots))}{(-0,6\,(0,357, 0.5144, 0,0) + 1,166\,(\frac{-2}{14})^k}$$

$(\frac{-2}{4})^k \to 0$, $(\frac{-2}{14})^k \to 0$

$$= 1^k \left(-0,6\,(0,357, 0.514, 0,0)\right)$$

$r(k) \to 4^k$, ya que $\alpha_1 \neq 0$.

Por Lema, si v es Avec de Aval $\lambda \Rightarrow r(v) = \frac{v^T A v}{v^T A} \to \lambda$.

Para hallar $v^{(0)}$ que no sea Avec de A y que $r(k)$ converja, lo que hago es buscar $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ / $A\alpha = v^{(0)}$ y $v^{(0)} = v_1, v_2, v_3, v_4$, con $\alpha = 0,1,0,0$

haciendolo en python: $v^{(0)} = (-3, -3, 1, 0)$.

Esto lo hago asi; $v^{(k)} = A^k (v^{(0)}) \to 1.1^k (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 0)$.

A su vez, como $v^{(k)} \to (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 0)$

$\Rightarrow$ Por Lema $r(k) = \frac{(v^k)^T A v^{(k)}}{(v^k)^T v^{(k)}} \to 1$

Para que $v^{(k)} \to (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2, 0)$ se tiene que anular las coordenadas de los autovectores de 4, -2 y -1. En ese caso, $v^{(0)}$ sería autovector de 1

1 b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo Avals y Avecs en Python

$$\lambda = 3 \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} ; \lambda = -2 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} ; \lambda = 0 \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cambio de base

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & a^2 - 1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -5 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & a^2-1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -5 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -9 - a^2 + 1 = -7 - a^2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & a^2-1 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -5 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -2 - a^2 \end{array}\right) \qquad x_3 \sqrt{2} = -2 - a^2$$

$$x_3 = \frac{-2 - a^2}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{-2 - a^2}{\sqrt{2}}\right) = -5$$

$$x_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 + a^2}{2} = -5$$

$$x_2 = \left(-5 - 1 - \frac{a^2}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = (-12 - a^2)/\sqrt{2}$$

$$-x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2 - a^2}{\sqrt{2}}\right) = a^2 - 1$$

$$-x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{a^2}{2} = a^2 - 1$$

$$-x_1 = \left(\frac{a^2}{2} - 2\right) \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$x_1 = \frac{-a^2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}$ y quiero que se anule, así $r(k) = r(v^{k}) \xrightarrow{k \to \infty} \lambda_2$

$\Rightarrow 0 = x_1 \Leftrightarrow 0 = -a^2 + 4 \Leftrightarrow \boxed{4 = a^2}$

Si esto ocurre, entonces $x_1 = 0$ y $A^k v^{(0)} = 0(3)^k \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \alpha_2 (-2)^k \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \ldots$

$\alpha_2 \neq 0$

$\alpha_2 = (-12 - 4)/\sqrt{2} \neq 0$ ✓.

$a \in \{-2; 2\}$ cumplen lo pedido.

LARREA
ej 2
4/23/22

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -c & 1/2 \\ c & 1 & c/2 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}$

metodo de GAUSS-Seidel

$B(G\text{-}S) = -(D+L)^{-1}U$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 4c & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$B(G\text{-}S) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4c & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1 \cdot 4c]{F_2 - cF_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4c & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-(D+L)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 4c & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B(G\text{-}S) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 4c & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & 1/2 \\ 0 & 0 & c/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -1/2 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & -4c^2 & 2c \end{pmatrix}$$

$$B(G\text{-}S) = \begin{pmatrix} 0 & c & -1/2 \\ 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & -4c^2 & 2c \end{pmatrix}$$

Busco $\rho(B_{G\text{-}S})$ para ver cuando converge. Para eso busco sus avals

$\det(B(G\text{-}S) - \lambda I) =$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & c & -1/2 \\ 0 & -c^2-\lambda & 0 \\ 0 & -4c^2 & 2c-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left((-c^2-\lambda)(2c-\lambda)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} -\lambda = 0 \\ -c^2-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -c^2 \\ 2c-\lambda = 0 \Leftrightarrow 2c = \lambda \end{array}$$

Avals de $B(G\text{-}S) = \quad 0;\ -c^2;\ 2c$

Si $c > 2 \Rightarrow \rho(B_{G\text{-}S}) = |-c^2|$

Converge para todo vector inicial si: $\rho(B_{G\text{-}S}) = |-c^2| < 1$, pero $c > 2 \Rightarrow |-c^2| > 2 > 1$. Absurdo, $|-c^2| \not< 1$. $c \leq 2$.

Si $c = 2$; $|-2^2| = 2.2 = 4$

$\rho(B_{G\text{-}S}) = 4 < 1$ $\emptyset$. si $c=2$ no converge.

Si $c < 2 \Rightarrow \rho(B_{G\text{-}S}) = 2c$. Converge si: $\rho(B_{G\text{-}S}) = |2c| < 1 \Leftrightarrow |c| < \frac{1}{2}$.

RTA: converge para todo $x^{(0)}$ inicial si $|c| < \frac{1}{2}$.

b

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 1/6\\ 4/3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B_J = -(D)^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1/3&1/2\\1/3&0&1/6\\4/3&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1/3&-1/2\\-1/3&0&-1/6\\-4/3&0&0\end{pmatrix}$$

Busco AVals de B_J:

$$\det(B_J-\lambda I) = \begin{pmatrix}-\lambda&1/3&-1/2\\-1/3&-\lambda&-1/6\\-4/3&0&-\lambda\end{pmatrix} = -\lambda\left[\lambda^2+\frac{1}{9}\right]-\frac{4}{3}\left[-\frac{1}{18}-\frac{1}{2}\lambda\right]=0$$

$$= -\lambda^3-\frac{\lambda}{9}+\frac{2}{27}+\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}\lambda = 0 = -\lambda^3+\frac{2}{27}+\frac{6\lambda-\lambda}{9} = -\lambda^3+\frac{5}{9}\lambda+\frac{2}{27}=0$$

$$\lambda\left(-\lambda^2+\frac{5}{9}\right)+\frac{2}{27}=0$$

busco Autovalores en python:

$\lambda_1 = 0,804$; $\lambda_2 = -0,666$; $\lambda_3 = -0,138$

$\rho(B_J) = \max\{|\lambda_i|, 1\leq i\leq 3\} = 0,804 < 1 \Rightarrow$ Converge Jacobi!

$\rho(B_J) = 0,804$ y $\rho(B_{G-S}) = \frac{2}{3} = 0,666$

elegiría el metodo de Gauss-Seidel, ya que al ser más pequeño converge más rapido.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

DVS de A:

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e & 0 \\ e & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Busco Avals de A^TA, ya que los valores singulares de A son la raíz cuadrada de los avals de A^TA. $\sqrt{\lambda_i} = \theta_i$

$\det(A^TA - \lambda I) =$

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & e & 0 \\ e & e^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(e^2-\lambda) - e^2\right] = 0$

$(1-\lambda)\left[\cancel{e^2} - \lambda - \lambda e^2 + \lambda^2 - \cancel{e^2}\right] = 0$

$\underbrace{(1-\lambda)}_{=0}(\underbrace{\lambda}_{=0}\underbrace{(-1-e^2+\lambda)}_{=0}) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ +1+e^2 = \lambda \end{cases}$

Avals de $A^TA = \{0, 1, 1+e^2\}$

$\theta_1 = \sqrt{1+e^2}$; $\theta_2 = 1$;

busco Autovectores de A^TA, para formar V:

$1+e^2 = \lambda$:

$\begin{pmatrix} 1-1-e^2 & e & 0 \\ e & e^2-1-e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1-e^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -e^2 & e & 0 & 0 \\ e & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^2 & 0 \end{array}\right)$ $x_3 = 0$

$e x_1 = x_2$

$-e^2 x_1 + e x_2 = 0$

$-e^2 x_1 + e^2 x_1 = 0 \quad \forall x_1$

$E_{1+e^2} = \langle x_1, e x_1, 0 \rangle = (1, e, 0)$

$\lambda = 1$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & e & 0 & 0 \\ e & e^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $x_2 = 0$

$x_1 e + 0(e^2-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

$E_1 = \langle 0, 0, x_3 \rangle = (0, 0, 1)$

$\lambda = 0$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & e & 0 & 0 \\ e & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $x_3 = 0$

$x_1 + x_2 e = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 e$

$x_1 e + x_2 e^2 = 0 \Leftrightarrow -x_2 e^2 + x_2 e^2 = 0, \forall x_2$

$E_0 = \langle -x_2 e, x_2, 0 \rangle = (-e, 1, 0)$

Avecs = $v_1 = (1, e, 0)$; $v_2 = (0, 0, 1)$; $v_3 = (-e, 1, 0)$

normalizo: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}}(1, e, 0)$ $v_3 = (-e, 1, 0)\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{1+e^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Complete con 0)

3×3

Disculpen desprolijidad, sigo

ej 4

①

x	0	1	2	3	4	5	6
X	216	219	297	303	439	556	681

$F(x) = C_0 1 + C_1 x + C_2 x^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216 \\ 219 \\ 297 \\ 303 \\ 439 \\ 556 \\ 681 \end{pmatrix}$$

realizo en python la cuenta, utilizando el metodo QR para hallar C_0, C_1, C_2

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 213{,}107 \\ 1{,}107 \\ 13{,}035 \end{pmatrix}$$

$F(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 = 213{,}07 + 1{,}107 . x + 13{,}035 . x^2$

$F(7) = 859{,}534$

$F(8) = 1056{,}166$.

Segun este modelo, luego de 8 años la especie será plaga.

② $g(x) = d_0 e^{d_1 x}$

Ajusto $g(x) \rightarrow$ Aplico log de ambos lados:

$\log g(x) = \log(d_0 e^{d_1 x})$

$\log g(x) = \log(d_0) + \log(e^{d_1 x})$

$\log(g(x)) = \log(d_0) + d_1 x$

sea $Y = \log(g(x))$, $\bar{A} = (\log(d_0)$, $T = d_1$

$Y = \bar{A}1 + Tx$, lineal!

planteo y veo en sentido de cuadrados minimos:

$$\begin{array}{c} A \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \log(d_0) \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} \log(216) \\ \log(219) \\ \vdots \\ \log(681) \end{pmatrix} \end{array}$$

realizo en python la cuenta, utilizando QR.

$$\begin{pmatrix} \log(d_0) \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}2523 \\ 0{,}2047 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} d_0 = e^{5{,}2523} \\ d_1 = 0{,}2047 \end{array}}$$

$g(7) = e^{5{,}2523} . e^{0{,}2047 . 7} = 800{,}84$

$g(8) = e^{5{,}2523} . e^{0{,}2047 . 8} = 982{,}8187$

$g(9) = e^{5{,}2523} . e^{0{,}2047 . 9} = 1206{,}144$

Según este modelo, luego de 9 años la especie será plaga.

Tengo $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+a^2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ NO $\begin{pmatrix} -a \\ \cancel{1} \\ 0 \end{pmatrix}$

$V^T = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+a^2} \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ los que puse no son perpendiculares.

Busco U, ahora que tengo Σ y V.

$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}{\sqrt{1+a^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

u_3 no puedo usar esta formula ya que no tengo σ_3 ($\lambda_3 = 0$ de $A^T A$, no es valor singular.

Hago una base ortonormal que forma R^3. $u_3 = p(1p)$ cumple.

$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+a^2} \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ NO

(chequeé en Python con $a=1$ y funcionó)

La matriz de rango 1 más cercana es la matriz con 1 valor singular en la DVS de A, por teorema visto en clase.

$\Rightarrow$ matriz de rango 1 más cercana.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+a^2} \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por ej, en Python si $a=1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.