Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 2: Aritmética de punto flotante. Número de condición.

Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a)) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}x_3\ ,\ x_1 - \frac{1}{2}x_2)$

(b)) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\ ,\ |x_1|)$

(c)) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}\ ,\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

(d)) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

a) $\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} =$ ✓ es lineal

b) $|x_1|$ no es lineal : $T(u+v) = T(u) + T(v)$ no se cumple con $u = (2,0)$ y $v = (-2,0)$

c) Pruebo

1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

2) $T(\alpha . v) = \alpha . T(v)$

1) $f(A+B) = f\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}\right)$

$= (a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22}) - (a_{12}+b_{12})(a_{21}+b_{21})$

$= a_{11}.a_{22} + a_{11}.b_{22} + b_{11}.a_{22} + b_{11}.b_{22} -$

$(a_{12}.a_{21} + a_{12}.b_{21} + b_{12}.a_{21} + b_{12}.b_{21})$

$f(A) + f(B) = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21} + b_{11} . b_{22} - b_{12} . b_{21}$

Como $f(A+B) \neq f(A) + f(B) \Rightarrow f$ no es TL.

Con α:

2) $f(\alpha . A) = f\left(\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}\right)$

$= \alpha^2 \underbrace{(a_{11} a_{22} - a_{12} . a_{21})}_{f(A)} \neq \alpha . f(A)$

Tampoco vale.

d) (d)) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

"Agrega una columna que es combinación lineal de otras posiciones"

1) Suma? vale

2) Prod escalar? vale

$\therefore f$ es TL

Ejercicio 2. Escribir la matriz de las siguientes transformaciones lineales en base canónica. Interpretar geométricamente cada transformación.

(a) $f(x,y) = (x,0)$

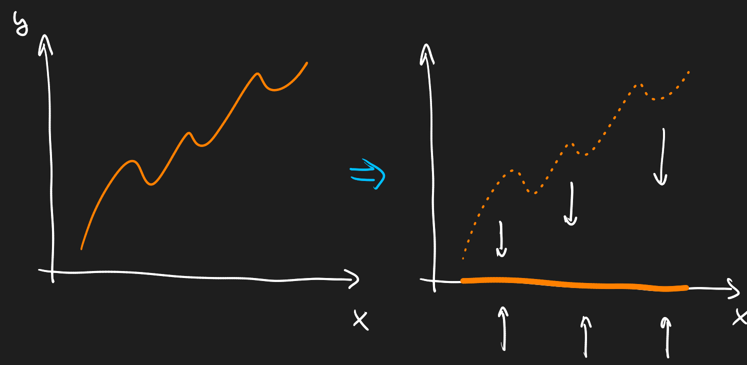
(b) $f(x,y) = (x,-y)$

(c) $f(x,y) = (\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y))$

(d) $f(x,y) = (x.\cos t - y.\operatorname{sen} t\,,\, x.\operatorname{sen} t + y.\cos t)$

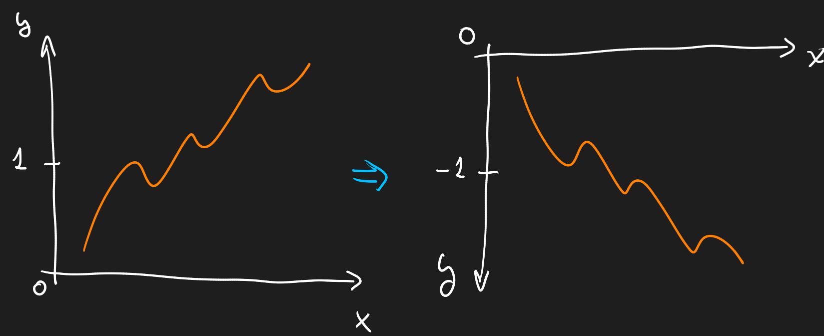
a)
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$



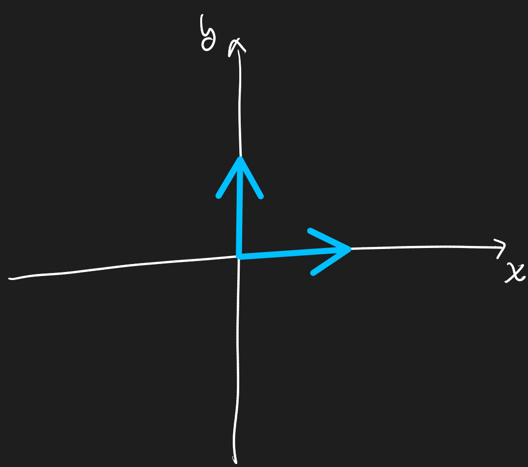
b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



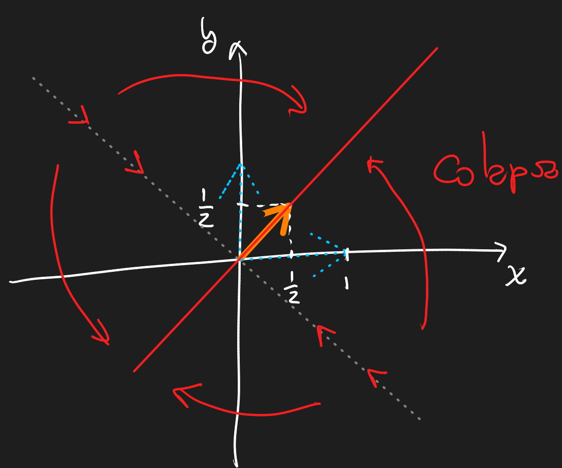
c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x+y) \end{bmatrix}$$



Mando el $(1,0)$ al :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



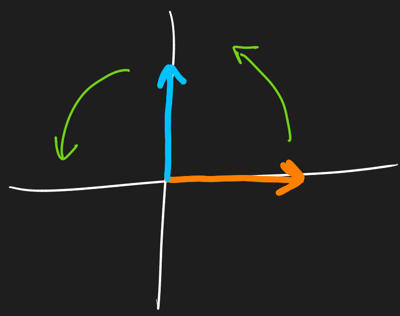
Mando el $(0,1)$ al :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d) $\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow$ Rota los ejes un angulo t sin deformar

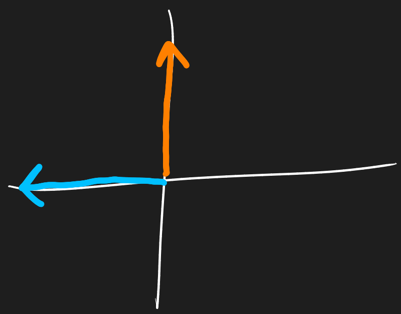
$t = 0 \Rightarrow A = I$

$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$



Ejercicio 3. (a) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

(b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$, $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

(c) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1,0,1) = (1,2,1), \quad f(2,1,0) = (2,1,0), \quad f(-1,0,0) = (1,2,1),$$
$$g(1,1,1) = (1,1,0), \quad g(3,2,1) = (0,0,1), \quad g(2,2,-1) = (3,-1,2).$$

Determinar si $f = g$.

a) Como

$$\begin{aligned} & f(1,1) = (-5,3) \\ + \; & f(-1,1) = (5,2) \\ \hline & f(0,2) = (0,5) \Rightarrow f(0,1) = \left(0, \tfrac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(1,1) - f(0,1) = (-5,3) - \left(0, \tfrac{5}{2}\right)$$

$$f(1,0) = \left(-5, \tfrac{1}{2}\right)$$

Obtuve $f(0,1)$ y $f(1,0)$

$$\Rightarrow f(5,3) = 5(f(1,0)) + 3(f(0,1))$$

$$= 5\left(-5, \tfrac{1}{2}\right) + 3\left(0, \tfrac{5}{2}\right)$$

$$= \left(-25, \tfrac{5}{2} + \tfrac{15}{2}\right)$$

$$f(5,3) = (-25, 10)$$

$$f(-1,2) = -1 \cdot f(1,0) + 2 \cdot f(0,1)$$

= Resuelvo y listo

b) (b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$, $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

$$f(1,1) = (2,6) \rightarrow \begin{bmatrix} & f & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$f(-1,1) = (2,1) \qquad \begin{bmatrix} & f & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(2,7) = (5,3)$$

$$f(1,1) + f(-1,1) = f(0,1) = (2,6) + (2,1) = (4,7)$$

$$f(1,1) - f(-1,1) = f(2,0) = (2,6) - (2,1) = (0,5)$$

$$f(1,0) = (0, \tfrac{5}{2})$$

$\therefore$ Como $f(0,1) = (4,7)$

$$f(1,0) = (0, \tfrac{5}{2})$$

$$\Rightarrow f(2,7) = 2f(1,0) + 7f(0,1) = 2(0, \tfrac{5}{2}) + 7(4,7)$$

$$= (28, 54) \neq (5,3)$$

$\therefore \exists f$ TL

(c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1,0,1) = (1,2,1), \quad f(2,1,0) = (2,1,0), \quad f(-1,0,0) = (1,2,1),$$
$$g(1,1,1) = (1,1,0), \quad g(3,2,1) = (0,0,1), \quad g(2,2,-1) = (3,-1,2).$$

Determinar si $f = g$.

Despejo canónicos

$$f(1,0,0) = (-1,-2,-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 1+2 \\ 2.1+3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \to f(1,0,0) = (-1,-2,-1) \\ \to f(0,1,0) = (4,5,2) \\ \to f(0,0,1) = (2,4,2) \end{array}$$

$$g(1,1,1) \overset{?}{=} f(1,1,1)$$

$$f(1,1,1) = (-1,-2,-1) + (4,5,2) + (2,4,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1,1) = (5,7,3) \\ g(1,1,1) \overset{\text{dato}}{=} (1,1,0) \end{array}\right\} \neq \text{ \underline{no} son iguales}$$

Ejercicio 4. Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal de los ejercicios 2 y 3. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

2)
(a) $f(x,y) = (x,0)$

(b) $f(x,y) = (x,-y)$

(c) $f(x,y) = (\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y))$

(d) $f(x,y) = (x.\cos t - y.\operatorname{sen} t \,,\, x.\operatorname{sen} t + y.\cos t)$

Mono : inyectiva

Epi : sobreyectiva

Iso : biyectiva.

a) $Nu(f) = \{ \bar{X} \in \mathbb{R}^2 : f(\vec{X}) = \vec{0} \}$

$= \{ (0,y) \ \forall y \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (0,1) \rangle$

$Im(f) = \langle (1,0) \rangle$

Mono? $f(1,1) = f(1,2)$ X

Epi?

$\nexists (x,y) / f(x,y) = (1,1)$

$\therefore$ No

Iso: No es Mono ni epi

$\therefore$ No.

b) $Nu\, f = \langle (0,0) \rangle$

$Im\, f = \{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$

$= \langle (1,0), (0,-1) \rangle$

$= \langle (1,0), (0,1) \rangle$

Mono : Sí

Epi : Sí

Iso : Sí :

$f^{-1}(x,y) = (x,-y)$

c) $Nu\, f = \{ (x,y) : x = -y \}$

$= \langle (1,-1) \rangle$

Mono: No $f(1,2) = f(2,1)$

Epi: No

$\nexists (x,y) / f(x,y) = (1,0)$

Iso: No

$Im\, f = \{ (\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y)) \}$

$= \{ x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \}$

$= \langle (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle = \langle (1,1) \rangle$

d) (d) $f(x,y) = (x.\cos t - y.\operatorname{sen} t\,,\; x.\operatorname{sen} t + y.\cos t)$

$$\begin{cases} x.\cos t = y.\sin t \\ x.\sin t = -y.\cos t \end{cases} \Rightarrow x = \sin t \wedge y = \cos t$$

$\hookrightarrow \sin^2 t = -\cos^2 t$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 0$ $\underline{\text{Abs}}$!

$\therefore$ solo vale cuando $x = y = 0$.

$\mathrm{Nu}\, f = \langle (0,0) \rangle$

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ x \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \langle (\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t) \rangle$$

Mono? Sí

Epi? Sí

Iso? Sí: Roto al otro lado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}}_{\text{Invierto}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$$

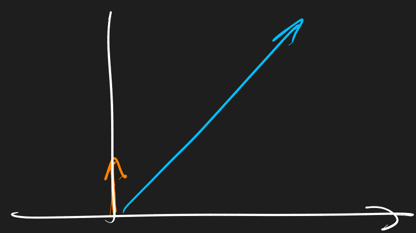
$$\underbrace{\frac{1}{\det A}}_{=1} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x,y) = (x.\cos t + y.\sin t\,,\, -x.\sin t + y.\cos t)$$

del 3)

$f(0,1) = (4,7)$

$f(1,0) = (0, \frac{5}{2})$



$$\begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & ? & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{} & 4 \\ & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \boxed{} \\ \frac{5}{2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Nu}\ f = \langle (0,0) \rangle$

$\mathrm{Im}\ f = \langle (0, \frac{5}{2}), (4,7) \rangle$

Mono? : Si

Epi : Si

Iso : Si, pues $\exists A^{-1}$

Ejercicio 5. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2,\, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

$$\text{Nu } f : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = -x_2 \\ x_1 + x_3 = 0 & \Rightarrow x_1 = -x_3 \end{cases}$$

$$\text{Nu } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\} = \langle (1, -1, -1) \rangle$$

$$\text{Im } f = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$$

Base :

$$\text{Im } f = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$$

Lo mismo con g.

$$g \circ f = g(x_1 + x_2,\, x_1 + x_3,\, 0,\, 0)$$

$$= (x_2 - x_3,\, x_1 + 2x_2 - x_3)$$

Resuelvo igual que con f.