Coordenadas y cambio de base

Dado un $\mathbb{K}$-ev, V de dimensión n, se llama **base canónica** al conjunto

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ con } e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde $e_i(j)$ es la j-ésima coordenada del vector e_i.

Ej: en $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y cualquier elemento $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ se escribe en la base canónica como:

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

En este caso, decimos que

$$(a,b,c)_{\mathcal{E}} = (a,b,c).$$

Por ej: $(2,-3,7)_{\mathcal{E}} = (2,-3,7)$
ya que se escribe como $2 \cdot e_1 + (-3) e_2 + 7 \cdot e_3$

Por otro lado, si tomamos la base de $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,1,0), (0,1,1), (-1,0,2)\}$$

y queremos descubrir cómo se escribe $(2,-3,7)$ como combinación lineal de los elementos de B, es decir, buscamos (α, β, γ):

$$(-2,3,7) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(-1,0,2)$$

es decir, buscamos (α, β, γ) solución de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$(2,-3,7) = 14 \cdot (1,1,0) + (-17)(0,1,1) + 12 \cdot (-1,0,2)$$

Esto nos dice que

Acá van las coordenadas usadas para escribir $(2,-3,7)$ usando la base B.

$$(2,-3,7)_B = (14, -17, 12)$$

y también nos dice que $(14,-17,12)$ es la única solución del sistema $*$

Con lo cual

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ nos "cambia"

las coordenadas de $v=(-2,3,7)$ en la base $\mathcal{B}$ a las coordenadas en la base $\mathcal{E}$. Por eso a esa matriz se la llama matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$.

y se nota

$$C(\mathcal{B},\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que es la matriz que tiene en sus columnas a la base $\mathcal{B}$.

Dado $v \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$C(\mathcal{B},\mathcal{E}) \cdot (v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{E}}$$

De esta misma relación, vemos que si me dan $(v)_{\mathcal{B}}$, puedo calcular $(v)_\mathcal{E}$ multiplicando como arriba por $C(B,\mathcal{E})$.

<u>Ej</u>: Dado $(v)_B = (1, 5, -2)$ calcular v.

Es decir, me piden $(v)_\mathcal{E}$.

Entonces hacemos

$$v = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}^{C(B,\mathcal{E})} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{por el} \\ \text{prod. matriz} \\ \text{x vector}}}{=} 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{col 1 de } C(B,\mathcal{E})} + 5 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{col 2 de } C(B,\mathcal{E})} + (-2) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{col 3 de } C(B,\mathcal{E})}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones lineales

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$,

vemos que dado

$$v \in \mathbb{K}^n \dashrightarrow \left[A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right]^t \in \mathbb{K}^m$$

con lo cual, podemos pensarlo como una aplicación:

$$T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

Además, vemos que

Acá uso la suma del $\mathbb{K}$ e.v. $\mathbb{K}^n$

Acá uso la suma del $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^m$

- $$T_A(v \underset{\mathbb{K}^n}{+} w) = \left[A \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}\right]^t = \left[A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right]^t + \left[A \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}\right]^t = T_A(v) \underset{\mathbb{K}^m}{+} T_A(w)$$

- $\underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n}{T_A(\alpha \cdot v)} = \left[A \cdot \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}\right]^t$

$= \alpha \cdot \left[A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right]^t = \underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^m}{\alpha \cdot T_A(v)}$

A có uso producto por un escalar de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n$

A có uso producto por un escalar de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^m$

A una función de un $\mathbb{K}$-ev en otro con estas propiedades de "respetar" la estructura de e.v. (manda $+_{\mathbb{K}^n}$ en $+_{\mathbb{K}^m}$ y $\underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n}{\cdot}$ en $\underset{\mathbb{K}\times\mathbb{K}^m}{\cdot}$) se la llama transformación lineal.

<u>Definición</u>: Dados V y W dos $\mathbb{K}$-ev. Una función $f: V \to W$ se la llama transformación lineal si;

1) $f(v +_V w) = f(v) +_W f(w)$

$$\forall\, v, w \in V$$

y

2) $f(\underset{\mathbb{K}\times V}{\alpha \cdot v}) = \underset{\mathbb{K}\times W}{\alpha \cdot f(v)}$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ v \in V.$$

<u>OBS</u>: $f(0_V) = f(\underset{\mathbb{K}\times V}{0 \cdot v}) = \underset{\mathbb{K}\times W}{0 \cdot f(v)} = 0_W$

<u>Ejemplos</u>:

1) Probar que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por: $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2,\ 2x_2)$

es un t.l. ¿Cuál es la matriz de esta t.l.?

Les dejo como ej.

Veamos cómo construir la matriz:

- Una forma de verlo es "a ojo" usando producto matricial:

$$f(x_1, x_2) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]^t$$

- Otra opción es usar de nuevo que multiplicar matriz por vector es hacer una comb. lineal de las columnas de la matriz y entonces:

1ro: Sacamos las variables como escalares:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, 2x_2)$$

$$= x_1(1, 1, 0) + x_2(2, 1, 2)$$

2do: Trasponemos y usamos producto de matriz por vector $\Rightarrow$

$$f(x_1,x_2) = \left[x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^t$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]^t .$$

Vimos antes que dada $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ podemos definir

$$T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$$
$$x \rightsquigarrow (Ax^t)^t$$

y es una t.l.

Vale la recíproca como hicimos en Ej 1. Veremos que dada una $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, existe una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$: $f(x) = (Ax^t)^t$.

<u>Observación</u>: Dado $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

una tl.

$$\Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$$

$$= \left[x_1 [f(e_1)]^t + \cdots + x_n [f(e_n)]^t \right]^t$$

$$= \left[\left([f(e_1)]^t \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [f(e_n)]^t \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t$$

$$= \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t$$

donde $A = \left(f(e_1)^t \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, f(e_n)^t \right)$

Definición Matriz de la transformación lineal.

Dados V y W dos $\mathbb{K}$-ev y $f: V \to W$ una t.l. si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base de $W \Rightarrow$ se llama matriz de la transformación lineal de la base B en la base B' a aquella matriz $[f]_{BB'}$ que satisface

$$[f]_{BB'} (v)^t_B = (f(v))^t_{B'}$$

para todo $v \in V$.

Luego si tomamos como v a cada v_i de la base B

$$[f]_{BB'} \underbrace{(v_i)^t_B}_{e_i^t} = (f(v_i))^t_{B'}$$

e_i^t canónico en ya

que $v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} \dots + 0 \cdot v_n$

$$\Rightarrow \underbrace{[f]_{BB'} e_i^t}_{\text{columna } i \text{ de } [f]_{BB'}} = (f(v_i))^t_{B'}$$

columna i de $[f]_{BB'}$.

Entonces

$$[f]_{BB'} = \left((f(v_1))^t_{B'} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, (f(v_n))^t_{B'} \right).$$

Notar que dado $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, si

$\mathcal{E}_n$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$

$\mathcal{E}_m$ " " $\mathbb{K}^m$

entonces $[f]_{\mathcal{E}_n \mathcal{E}_m} = \left(f(e_1)^t \,|\, \dots \,|\, f(e_n)^t \right).$

2) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una t.l tal que $f(1,0,0) = (1,2)$ $f(0,1,0) = (2,-3)$ y $f(0,0,1) = (-1,0)$

Vemos que como

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$

y f debe ser una t.l, entonces

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 f(1,0,0) + x_2 f(0,1,0) + x_3 f(0,0,1)$$

$$= x_1 (1,2) + x_2 (2,-3) + x_3 (-1,0)$$

$$= (x_1 + 2x_2 - x_3,\ 2x_1 - 3x_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

donde en las columnas de la matriz que determina a esta tl se tienen los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$ y $f(e_3)$.

Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = [f]_{\mathcal{E}_3 \mathcal{E}_2}.$$

3) Dado $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (-1,0,2)\}$

una base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una tl:

$$f(1,1,0) = (1,2)$$
$$f(0,1,1) = (3,0)$$
$$f(-1,0,2) = (0,1)$$

entonces $f(0,2,3) = ?$

vemos que

$$(0,2,3) = (1,1,0) + (0,1,1) + (-1,0,2)$$

y como f es tl $\Rightarrow$

$$f(0,2,3) = f(1,1,0) + f(0,1,1) + f(-1,0,2)$$
$$= (1,2) + (3,0) + (0,1)$$

$$= (4,3).$$

En general, ¿sabemos cuánto vale $f(x_1,x_2,x_3)$?

Una opción es escribir a (x_1,x_2,x_3) general en sus coordenadas en la base B y usar que es una tl, como antes.

Les dejo las cuentas....

Vemos cómo se escribe (x_1,x_2,x_3) en la base B:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 2 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_2 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_3 - x_2 + 2x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 + 2x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_2 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2 + 2x_1)\,(1,1,0)$$
$$+ (-x_3 + 2x_2 - 2x_1)(0,1,1)$$
$$+ (x_3 - x_2 + x_1)\,(-1,0,2)$$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2 + 2x_1)\cdot f(1,1,0)$$
$$+ (-x_3 + 2x_2 - 2x_1)\cdot f(0,1,1)$$
$$+ (x_3 - x_2 + x_1)\cdot f(-1,0,2)$$

$$= (x_3 - x_2 + 2x_1)\cdot(1,2)$$

$$+ (-x_3 + 2x_2 - 2x_1)\cdot(3,0)$$

$$+ (x_3 - x_2 + x_1)\cdot(0,1)$$

$$= \big(x_3 - x_2 + 2x_1 + 3\cdot(-x_3 + 2x_2 - 2x_1),$$

$$2(x_3 - x_2 + 2x_1) + (x_3 - x_2 + x_1) \big)$$

$$= (-4x_1 + 5x_2 - 2x_3,\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3)$$

$$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

esta es la matriz asociada a esta transformación lineal

Otra opción es usar la propiedad siguiente: Dados V y W dos $\mathbb{K}$-ev y sean B y B' bases de V y B'' base de W.

$$[f]_{BB''} = [f]_{B'B''} C(B,B')$$

$$[f]_{BB''} = C(B',B'')[f]_{BB'}$$

Como $f(1,1,0) = (1,2)$, $f(0,1,1) = (3,0)$, $f(-1,0,2) = (0,1)$

y $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(-1,0,2)\}$

$$[f]_{BE_2} = \left((f(1,1,0))^t \middle| (f(0,1,1))^t \middle| (f(-1,0,2))^t \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queremos $[f]_{\mathcal{E}_3 \mathcal{E}_2} \Rightarrow$

usamos que $[f]_{\mathcal{E}_3 \mathcal{E}_2} = [f]_{B \mathcal{E}_2} \, C(\mathcal{E}_3, B)$

Calculamos

$$C(B, \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y$$

usamos que $C(\mathcal{E}_3, B) = \left[C(B, \mathcal{E}_3)\right]^{-1}$

$$\underset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

chequear

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{E}_3 \mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$ igual

que de la otra forma.

Proposición: Sea V un $\mathbb{K}$-ev y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V. Podemos definir (en forma unívoca) un tl de V en W definiendo cada $f(v_i)\in W$ con $i=1\dots n$.

Dem:

Todo $w\in V$ se escribe de forma única en la base B. Si

$$(w)_B=(a_1,\dots,a_n)$$, es decir

$$w=a_1v_1+\dots+a_nv_n$$, entonces

$$f(w)=\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i).$$

Imagen, núcleo y teorema de la dimensión.

Dado $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, vimos:

$$Nu(A) = \{ x \in \mathbb{K}^n : Ax = \bar{0} \}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.

$$Im(A) = \{ A \cdot x, \ x \in \mathbb{K}^n \}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}^m$,

y $Im(A) = \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$

$rg(A) = \dim(Im A)$.

Teorema: Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se tiene que

$$\dim(\mathrm{Nu}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n.$$

Dem:

$\mathrm{Nu}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^n$.
Suponemos $\dim \mathrm{Nu}(A) = r \leq n$,
$\Rightarrow$ existe una base de $\mathrm{Nu}(A)$

$$B_{\mathrm{Nu}(A)} = \{u_1, \dots, u_r\}$$

Como $r \leq n$, podemos extender a una base de $\mathbb{K}^n$ con $w_{r+1}, \dots, w_n$, de manera que

$B_{\mathbb{K}^n} = \{u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$

es una base de $\mathbb{K}^n$.

Luego, dado $v \in \mathbb{K}^n$,

existen $a_1, \dots, a_n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i w_i$$

$\Rightarrow$

$$A \cdot v = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{A \cdot u_i}_{=0} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i A w_i$$

$\Rightarrow \{A w_{r+1}, \dots, A w_n\}$ generan $\operatorname{Im} A$.

Veamos que son l.i., con lo cual tendremos que

$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} A} = \{ Aw_{r+1}, \dots, Aw_n \}$ es una base de $\operatorname{Im} A$.

Supongamos existen escalares $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos:

$$\alpha_{r+1} A w_{r+1} + \dots + \alpha_n A w_n = \bar{0}$$

$\Rightarrow$

$$A(\alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n \in \underbrace{Nu(A)}_{= \langle u_1, \dots, u_r \rangle}$$

$$\Rightarrow \alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n$$

$$= \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r$$

$\Rightarrow \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r + (-\alpha_{r+1}) w_{r+1}$

$+ \dots \quad + (-\alpha_m) w_m = 0$

es una comb. no nula del 0.

Pero $\{u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$

era un conjunto l.i (por ser base)

con lo cual llegamos a un

absurdo.

Este absurdo provino de

suponer que $\{Aw_{r+1}, \dots, Aw_m\}$

no era l.i.

Luego $\{Aw_{r+1}, \dots, Aw_m\}$

es una base de $\operatorname{Im} A \Rightarrow$

$B_{\mathbb{R}^n} = \{\underbrace{u_1, \dots, u_r}, \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_m}\}$

son una base de $NU(A)$

$\Rightarrow \dim NU(A) = r$

$n-r$ vectores que es la misma cantidad que $\dim \operatorname{Im} A = n-r$

$$\Rightarrow n = \dim(NU(A)) + \dim(\operatorname{Im}(A))$$

$\boxtimes$

<u>Definición</u>: Dados V, W dos $\mathbb{K}$-ev y $f: V \to W$ una t.l.

1) f se dice monomorfismo si f es inyectiva.

2) f se dice epimorfismo si f es sobreyectiva

3) f se dice isomorfismo si f es mono y epi.

<u>Proposición</u>: Dados V, W dos $\mathbb{K}$-ev y $f: V \to W$ una t.l.

1) f es mono si y sólo si

$$f(v) = 0 \Rightarrow v = 0.$$
$$(\mathrm{Nu}\, f = \{0\})$$

<u>Dem</u>:

$\Rightarrow$) Si $f(v) = 0$, como $f(0) = 0$ y f es mono $\Rightarrow v = 0$.

$\Leftarrow$) Si $f(v) = f(w)$ $\Rightarrow$ $f(v - w) = 0$ $\overset{\text{por hip}}{\Rightarrow}$ $v - w = 0$.

f tl

$\Rightarrow v = w.$

2) f es epi si y sólo si $\operatorname{Im} f = W$

3) Si $V = W = \mathbb{K}^n$. Son equivalentes

i) f es mono

ii) f es epi

iii) f es iso.

<u>Dem</u>: $f = T_A$

i) $\Rightarrow$ ii)

$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es mono

$\Rightarrow \quad Nu(A) = \{0\}$

Teo dim.

$\Rightarrow n = \dim \operatorname{Im}(A)$

$\Rightarrow \quad T_A$ es sobreyectiva.

ii) $\Rightarrow$ iii)

f es epi $\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Im}(A) = m$
$\overset{\text{teo dim}}{\Rightarrow}$ $\dim \mathrm{Nu}(A) = 0$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Nu}(A) = \{0\}$

$\Rightarrow$ f es mono

$\Rightarrow$ f es epi y mono

$\Rightarrow$ f es iso.

iii) $\Rightarrow$ i) ✓

NOTA: No confundir teo de la dim de tl:

teo: Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un tl

$\Rightarrow$ $n = \dim \mathrm{Nu}\,T + \dim \mathrm{Im}\,T$

con teo de la dim de subesp:

<u>teo</u>: Sea V un k-ev de dim finita y S_1, S_2 dos subesp. de $V \Rightarrow$

$\dim S_1 + S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$

<u>Dem</u>: $S_1 \cap S_2 \subseteq V$ y supongamos que $S_1 \cap S_2$ tiene dimensión r que debe ser menor o igual que $\dim S_1$ y $\dim S_2$.

Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de $S_1 \cap S_2$

$\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq S_1 \subseteq V$ entonces existen $w_{r+1}, \ldots, w_k$ que extienden la base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de $S_1 \cap S_2$ a una base de S_1. (Acá $k = \dim S_1$)

De la misma forma, como

$\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq S_2 \subseteq V$ entonces existen $u_{r+1}, \ldots, u_j$ que extienden la base $\{v_1, \dots, v_r\}$ de $S_1 \cap S_2$

a una base de S_2. (Sea $j = \dim S_2$)

Veamos que

$$B = \{ \overbrace{w_{r+1}, \dots, w_k, \underbrace{v_1, \dots, v_r}^{\text{base de } S_1}, u_{r+1}, \dots, u_j}_{\text{base de } S_2} \}$$

es una base de $S_1 + S_2$.

Si probamos esto tendremos que

$$\dim S_1 + S_2 = r + k - r + j - r = k + j - r$$

$$= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

Veamos que B genera $S_1 + S_2$:

Sea $v \in S_1 + S_2 \Rightarrow v = s_1 + s_2$ con

$s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$.

$$s_1 \in S_1 \Rightarrow s_1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i w_i$$

$$s_2 \in S_2 \Rightarrow s_2 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i + \sum_{i=r+1}^{j} \beta_i u_i$$

$$\Rightarrow s_1 + s_2 = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_i) v_i + \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{i=r+1}^{j} \beta_i u_i$$

Veamos que B es un cjto li

$$\text{Si } 0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i w_i + \sum_{i=r+1}^{j} \beta_i u_i$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\sum_{i=r+1}^{j} \beta_i u_i}_{\in S_2} = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i w_i}_{\in S_1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i w_i}_{\displaystyle \Rightarrow \quad = \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i} \in S_1 \cap S_2$$

$$\Rightarrow \quad -\sum_{i=r+1}^{j} \beta_i u_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=r+1}^{j} \beta_i u_i = 0$$

Como $\{v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_j\}$ es base

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 = \beta_{r+1} = \dots = \beta_j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=r+1}^{k} \alpha_i w_i = 0 \Rightarrow \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_k = 0$$

$\{w_{r+1}, \dots, w_k\}$ es li

con lo cual queda probado que

B es un conjunto li.