Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Si la solución es única, puede verificarse el resultado en `Python` utilizando el comando np.linalg.solve[1].

(a) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 & = & -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 & = & 2i \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

Ejercicio 3. En `Python`, importar la librería numpy con el siguiente comando: import numpy as np, y probar los siguientes comandos:

```python
import numpy as np

1 + 3
a = 7
b = a + 1
print("b = ", b)

# Vectores
v = np.array([1,2,3,-1])
w = np.array([2,3,0,5])
print("v + w = ", v + w)
print("2*v = ", 2*v)
print("v**2 = ", v**2)

# Matrices (ejecutar los comandos uno a uno para ver los resultados)
A = np.array([[1,2,3,4,5],[0,1,2,3,4],[2,3,4,5,6],[0,0,1,2,3],[0,0,0,0,1]])
print(A)
A[0:2,3:5]
A[:2,3:]
```

[1] `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html`

```
A[[0,2,4],:]
ind = np.array([0,2,4])
A[ind,ind]
A[ind,ind[:,None]]

# Numeros complejos
1j*1j
(1+2j)*1j
```

Ejercicio 4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$. Verificar el resultado obtenido usando `Python`. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt #libreria para graficar

# ...
# Aca, crear la matriz y resolver el sistema para calcular a,b y c.
# ...

xx = np.array([1,2,3])
yy = np.array([1,2,0])
x  = np.linspace(0,4,100) #genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f  = lambda t: a*t**2+b*t+c #esto genera una funcion f de t.
plt.plot(xx,yy,'*')
plt.plot(x,f(x))
plt.show()
```

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - z = 0; \ x - y = 0\}$

(b) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{3\times3} : \ \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^t\}$

(c) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times3} : \ tr(\boldsymbol{A}) = 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : \ x_1 + x_2 - ix_4 = 0, \ ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

Ejercicio 6. Sea $S = \langle(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

(b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

(c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) \rangle \qquad T = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$.

(d) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\quad S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji} \ \forall\, i,j\} \qquad T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $\quad S = \langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0) \rangle \qquad T = \{x \in \mathbb{C}^3 :\ (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

(a) $\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle = \langle (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) \rangle$.

(b) $S \cap T = \langle (0,1,1) \rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1,k,2), (-1,2,k) \rangle$.

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V . Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1,4,-1,3)\,,\,(2,1,-3,-1)\,,\,(0,2,1,-5)\}$ en $\mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(1-i, i)\,,\,(2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 11. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S. Extender la base de S a una base del espacio vectorial correspondiente.

(a) $S = \langle (1,1,2),\,(1,3,5),\,(1,1,4),\,(5,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

(b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 12. Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ satisface que $\boldsymbol{Ax} = 0 \ \forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = 0$. Deducir que si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ satisfacen que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Bx} \ \forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

(b) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$ con $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{AB} = (\,\boldsymbol{AB}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{AB}_r)$ (es decir, $\boldsymbol{AB}_j$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{AB}$).

Ejercicio 14. Sean las siguientes matrices de 3×3:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Y consideremos el producto $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ en bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

Para cada una de las particiones en bloques mencionadas a continuación, indicar si es realizable el producto $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ en bloques. En caso de ser realizable, calcular cada bloque C_{ij} indicando sus dimensiones.

(a) $A_{11} = [a_{11}],\ A_{12} = [a_{12},\ a_{13}],\ A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12},\ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(b) $A_{11} = [a_{11}\ \ a_{12}],\ A_{12} = [a_{13}],\ A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

$B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12}\ \ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

(c) $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\ A_{21} = [a_{31}],\ A_{11} = [a_{32}\ a_{33}]$

$B_{11} = [b_{11}],\ B_{12} = [b_{12}\ b_{13}],\ B_{21} = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$

¿Qué otras particiones válidas son posibles?

Ejercicio 15. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ y $B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$

(a) Calcular $[(1,1,0)]_B$ y $[(1,1,0)]_{B'}$.

(b) Calcular la matriz de cambio de base $C(B,B')$.

(c) Comprobar que $C(B,B')[(1,1,0)]_B = [(1,1,0)]_{B'}$.

Ejercicio 16. Sean $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A'} \in K^{m\times n}$; $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$; $\boldsymbol{D},\boldsymbol{D'} \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

(a) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A'})^t = \boldsymbol{A}^t + (\boldsymbol{A'})^t$

(b) $(\alpha\boldsymbol{A})^t = \alpha\boldsymbol{A}^t$

(c) $(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$

(d) $\boldsymbol{AA}^t$ y $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ son matrices simétricas.

(e) $tr(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D'}) = tr(\boldsymbol{D}) + tr(\boldsymbol{D'})$

(f) $tr(\alpha\boldsymbol{D}) = \alpha tr(\boldsymbol{D})$

(g) $tr(\boldsymbol{DD'}) = tr(\boldsymbol{D'D})$

Ejercicio 17. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{n\times n}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

(a) $S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es triangular inferior}\}$ (b) $S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es simétrica}\}$

Ejercicio 18. Calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Cuando sea posible, verificar utilizando `Python`, con el comando np.linalg.inv.

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n\times n}$ y $M \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

Ejercicio 21. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes operaciones:

(a) Calcular la traza de una matriz.

(b) Calcular la sumatoria de todos los elementos de una matriz.

Ejercicio 22. Probar las siguientes estimaciones:

(a) $3n^3 = \mathcal{O}(n^3)$ (b) $2n^4 - 5 = \mathcal{O}(n^4)$ (c) $n^3 - 2n^2 + 1 = \mathcal{O}(n^3)$

Ejercicio 23. Calcular la complejidad de las siguientes funciones de Python utilizando la notación $\mathcal{O}$.

```
def function1(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            print(i, j)
```

```
def function2(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n * n):
            print(i, j)
```

```
def function3(n):
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            print(i, j)
```

Ejercicio 24. Para cada una de las siguientes operaciones, estime la cantidad máxima de sumas, multiplicaciones y divisiones que deben realizarse. Exprese el resultado usando la notación de la $\mathcal{O}$.

(a) sumar dos matrices de $n \times n$,

(b) multiplicar dos matrices de $n \times n$,

(c) multiplicar dos polinomios de grado n.