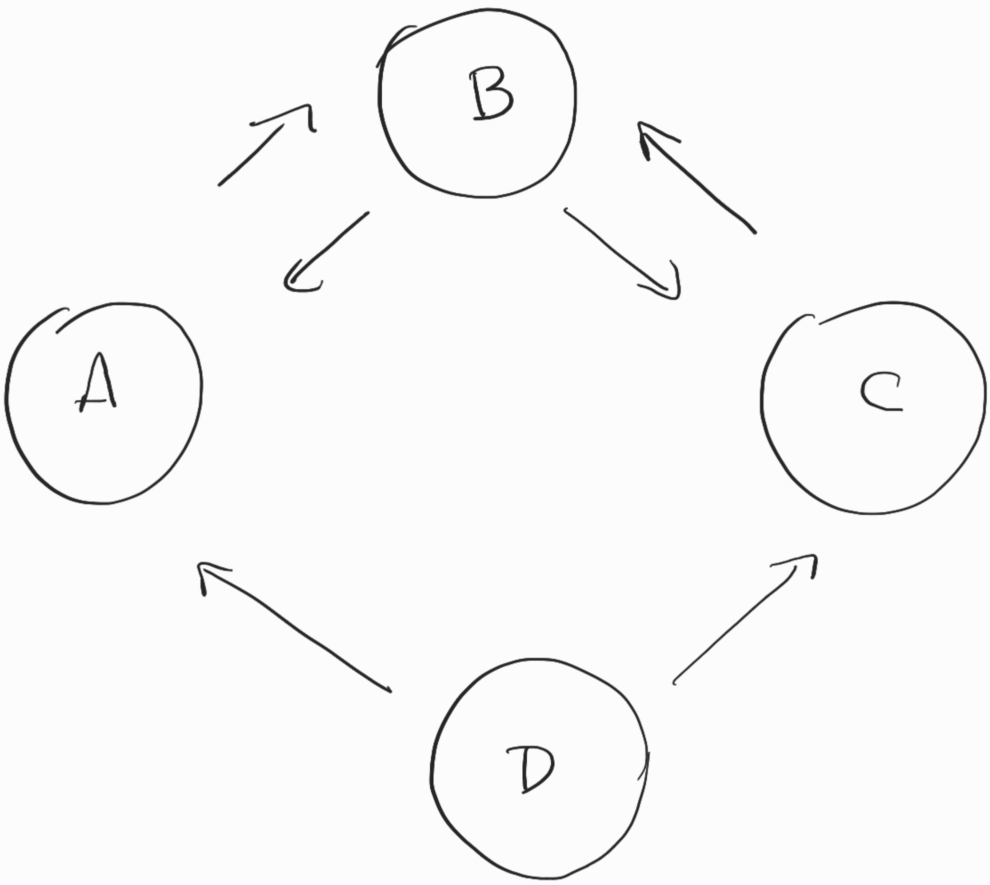
Procesos de Markov

Google Page Rank (ver apunte ALC)

Se quiere estudiar la relevancia de 4 páginas de google.

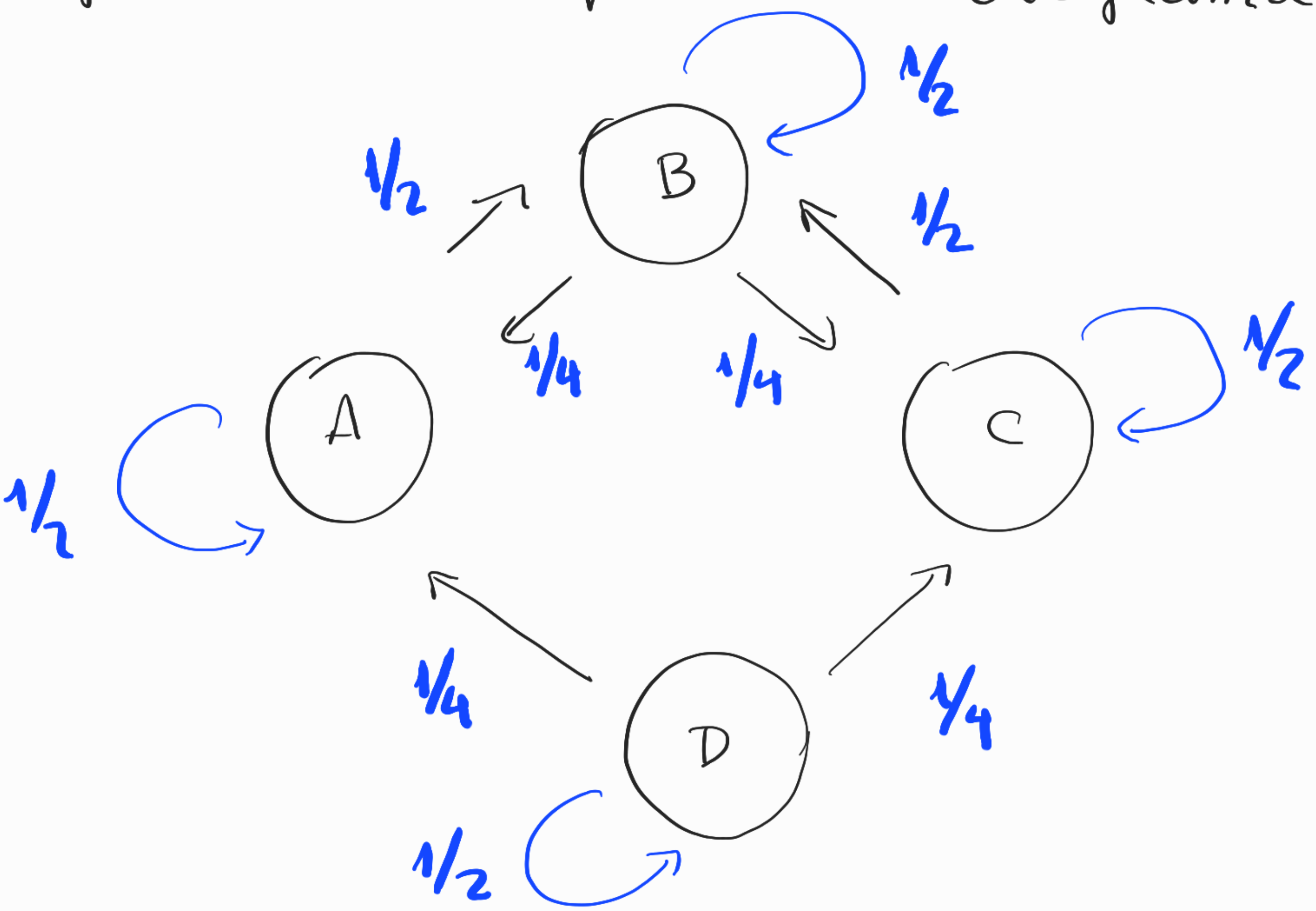


Las flechas indican los enlaces que hay en cada página.

Cada minuto los navegantes pueden clickear al azar alguno de los links disponibles.

Por ejemplo, si un navegante está en la página B puede ir a la C o la A, o se puede quedar en B.

Considerando que cada minuto la mitad de los navegantes que están en una página se quedan en esa página y la otra mitad clickean al azar alguno de los links disponibles que encuentran en la página, podemos completar el diagrama:



Si inicialmente hay 1.000 personas en cada página, queremos estudiar cuantas habrá a la media hora en cada una. Y cuántas habrá a largo plazo en cada una?

Este tipo de procesos se pueden plantear matricialmente:

Llamamos

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} A(0) \\ B(0) \\ C(0) \\ D(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$ al estado inicial del sistema.

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} A(1) \\ B(1) \\ C(1) \\ D(1) \end{pmatrix}$$ al estado del sistema al minuto.

Vemos que

$$A(1) = \underbrace{\frac{1}{2} A(0)}_{\text{la mitad se queda en la página A de un período a otro}} + \underbrace{\frac{1}{4} B(0)}_{\text{1/4 de los que estaban en B en el estado inicial fueron a A en el estado siguiente (minuto 1)}} + \overbrace{\frac{1}{4} D(0)}^{\text{idem anterior}}$$

Es decir, miro las flechas que entran en A en el diagrama para ver cómo se modifica A de un estado a otro.

De manera análoga vemos que

$$B(1) = \frac{1}{2} A(0) + \frac{1}{2} B(0) + \frac{1}{2} C(0)$$

$$C(1) = \frac{1}{4} B(0) + \frac{1}{2} C(0) + \frac{1}{4} D(0)$$

$$D(1) = \frac{1}{2} D(0)$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} A(1) \\ B(1) \\ C(1) \\ D(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(0) \\ B(0) \\ C(0) \\ D(0) \end{pmatrix}$$

Otra forma de escribir esto es:

$$\begin{pmatrix} A(1) \\ B(1) \\ C(1) \\ D(1) \end{pmatrix} = A(0)\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + B(0)\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + C(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + D(0)\underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

Aca van los valores de todas las flechas que salen de A hacia A, B, C, D

Acá van los valores de todas las flechas que salen de D

Notar que todos los vectores columna de la matriz tienen coordenadas entre 0 y 1 y sus coordenadas suman 1.

En general, podemos decir que el estudio del sistema de un minuto al siguiente viene dado por la igualdad

$$\begin{pmatrix} A(k+1) \\ B(k+1) \\ C(k+1) \\ D(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(k) \\ B(k) \\ C(k) \\ D(k) \end{pmatrix}$$

<u>Definición</u>: Decimos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de Markov (o estocástica) si:

- $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j = 1, \dots, n.$
- $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \forall j$

Es decir, todas las entradas de A son números reales no negativos y las columnas de A suman 1.

<u>OBS</u>: Si A es matriz de Markov, todas las entradas $a_{ij} \in [0, 1]$.

<u>Definición</u>: Un proceso dado iterativamente por

$$v^{(k+1)} = A v^{(k)} \quad \text{con } k \geq 0$$

se llama proceso de Markov. A cada vector $v^{(k)}$ se lo llama estado del sistema en tiempo k. Además a la matriz A se la llama matriz de transición.

Autovalores de matrices de Markov

<u>Proposición</u>: Sea A una matriz de Markov, entonces:

i) 1 es autovalor de A.

ii) Si λ es autovalor $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$.

<u>Dem</u>:

i) $A = \left(C_1(A) | \cdots | C_n(A) \right)$

$$\Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} C_1(A)^t \\ \hline \vdots \\ \hline C_n(A)^t \end{pmatrix}$$

con lo cual los elementos de cada fila de A suman 1.

$$\Rightarrow A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego, 1 es autovalor de A^t con $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ autovector asociado. Como los autovalores de A y A^t son los mismos, 1 debe ser autovalor de A

ii) Sea λ autovalor de A, queremos ver que $|\lambda| \leq 1$. Tomamos v autovector asociado a λ, es decir

$$A \cdot v = \lambda \cdot v \quad \text{con} \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda x_i = F_i(A) \cdot x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow \underbrace{|\lambda x_i|}_{|\lambda||x_i|} = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \underset{\substack{\downarrow \\ a_{ij} \geq 0 \text{ siempre}}}{\sum_{j=1}^{n}} a_{ij} |x_j|$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_j|}_{\sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}_{\substack{\text{suma de col } j \\ = 1}} \Big) |x_j|}$$

$$\Rightarrow |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1.$$

<u>Proposición</u>: Sea A una matriz de Markov y λ un autovalor de A, $\lambda \neq 1$. Si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es un autovector asociado a λ

$$\Rightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0.$$

<u>Dem</u>:

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i}_{\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j}$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

luego, como $\lambda \neq 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Estados de equilibrio

Def: Dada A una matriz de Markov, se dice que v es un estado de equilibrio si $Av = v$ (es decir v es autovector de A asociado al autovalor 1).

De acuerdo a la literatura, se considera equilibrios a:

- autovectores de autovalor 1 con coordenadas no negativas.
- autovectores de autovalor 1 cuyas coordenadas sumen 1.

<u>OBS</u>: Si $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es autovector de autovalor 1 $\Rightarrow$ $\dfrac{v}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ es autovector de autovalor 1 y sus coordenadas suman 1. Además es el único múltiplo de v con esa propiedad (si $\sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0$)

Vamos a usar esta definición:

<u>Def</u>: Dada A una matriz de Markov, se dice que v es un estado de equilibrio si $Av = v$ (es decir v es autovector de A asociado al autovalor 1) y v tiene coordenadas no negativas que suman 1.

Propiedades: Sea A matriz de Markov

- Existe al menos un equilibrio.
- Puede existir más de un equilibrio.
- El autoespacio de autovectores asociado al autovalor 1 tiene la dimensión de la multiplicidad del 1 en el polinomio característico.
- No toda matriz de Markov es diagonalizable.

En el ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & \lambda-1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & \lambda-1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\underbrace{\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)} \left(\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{8} \right) + \tfrac{1}{4} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \underbrace{\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)} \right)$$

$$= \left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\underbrace{\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}} \right)$$

$$\left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} = 0 \iff$$

$$\left|\lambda-\tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} \quad < \begin{matrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$$

$$= \left(\lambda-\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot (\lambda-1) \cdot \lambda$$

Autovalores:
$0, \underbrace{\tfrac{1}{2}}, 1$
multipl. 2.

$\lambda = 1$ busco equilibrios

$$1 \cdot I - A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1+F_2 \to F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3+F_2\to F_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}x_4=0 \Rightarrow x_4=0$$

$$\frac{1}{4}x_2-\frac{1}{2}x_3=0 \longrightarrow x_3=\frac{1}{2}x_2$$

$$x_1-\frac{1}{4}x_2=0 \longrightarrow x_1=\frac{1}{4}x_2$$

$$\left(\frac{1}{4}x_2,\ x_2,\ \frac{1}{2}x_2,\ 0\right)=x_2\left(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2},0\right)$$

son los autovectores.

Calculamos $\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$

$$\Rightarrow \frac{4}{7}\left(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2},0\right)=\boxed{\left(\frac{1}{7},\frac{4}{7},\frac{2}{7},0\right)}$$

es el único equilibrio.

NOTA: tendremos único equilibrio siempre que $\dim E_1=1$.

$\lambda=\frac{1}{2}$ buscamos autovectores

$$\frac{1}{2}I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 - x_3 = 0$

$-x_2 - x_4 = 0$

$x_1 = -x_3$

$x_2 = -x_4$

$$(-x_3, -x_4, x_3, x_4) = x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1)$$

$\to$ A es diagonalizable.

Además

$\lambda = 0$ buscamos autovectores

$$0 \cdot I - A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 0 \qquad -\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \to x_3 = -\frac{1}{2}x_2$

$$-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 = 0 \to x_1 = -\frac{1}{2}x_2$$

$$\left(-\frac{1}{2}x_2, x_2, -\frac{1}{2}x_2, 0\right) = x_2\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

A es diagonalizable y tenemos

$$A\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estados límite (v^{∞})

Dado un proceso de Markov con $v^{(0)}$ dato inicial, dado por

$$v^{(k+1)} = A\, v^{(k)}$$

con A matriz de Markov.

Entonces

$$v^{(k)} = A^k v^{(0)}$$

¿Qué podemos decir de

$$\lim_{k \to +\infty} v^{(k)} \; ?$$

- Si A es diagonalizable, tomamos $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de autovectores $\Rightarrow$ cualquier $v^{(0)}$ se escribe como combinación lineal de $v_1, \dots, v_n$.

Supongamos

$$v^{(0)} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow v^{(k)} = A^k v^{(0)}$$

$$= \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k v_n$$

Sabemos que $|\lambda_i| \leq 1$

Vemos que este límite dependerá de si $\lambda_i = 1, -1$ o tiene módulo < 1:

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 \Rightarrow 1^k = 1 \xrightarrow{k \to +\infty} 1 \\ -1 \Rightarrow (-1)^k \text{ no tiene límite} \\ |\lambda_i| < 1 \Rightarrow (\lambda_i)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

- Si $\lambda = -1$ no es autovalor de A

$\Rightarrow$ ese límite existe.

- Si $\lambda = -1$ sí es autovalor de A

$\to$ ese límite puede no existir (dependiendo de $v^{(0)}$)

<u>Definición</u>: Dado $v^{(0)}$, decimos que hay estado límite si existe $\lim_{k \to +\infty} v^{(k)}$. En este caso llamamos a ese estado límite

$$v^{(\infty)} = \lim_{k \to +\infty} v^{(k)} .$$

<u>OBS</u>: Si A no es diagonalizable para ciertos $v^{(0)}$ puede existir el estado límite $v^{(k)}$. Esto

depende de si $v^{(0)}$ se escribe como combinación lineal de autovectores de A aunque estos no sean una base y depende también de si -1 es autovalor.

<u>Proposición</u>: Si A es diagonalizable y -1 no es autovalor de A, entonces existe $v^{(\infty)}$ para todo dato inicial $v^{(0)}$. Además, si existe $v^{(\infty)} \neq v^{(\infty)}$ es autovector de autovalor 1.

<u>Dem</u>: $v^{(k+1)} = A v^{(k)}$, tomando límite nos queda

$$v^{(\infty)} = A \cdot v^{(\infty)}$$

Sigamos con el ejemplo:

Vimos que A es diagonalizable y

$$A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

es decir

$$E_0=\langle(-\tfrac{1}{2},1,-\tfrac{1}{2},0)\rangle=\langle(1,-2,1,0)\rangle$$

$$E_1=\langle(\tfrac{1}{4},1,\tfrac{1}{2},0)\rangle=\langle(1,4,2,0)\rangle$$

$$E_{\frac{1}{2}}=\langle(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\rangle$$

Ya sabemos que A es diagonalizable y -1 no es autovalor $\Rightarrow$ existe $v^{(\infty)}=\lim\limits_{k\to+\infty} v^{(k)}$ $\forall v^{(0)}$. Además, sabemos que $v^{(\infty)}$ es autovector de autovalor 1, es decir

$$v^{(\infty)}=\alpha\cdot(1,4,2,0).$$

¿Quién es α? Hagamos la cuenta.

Si $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ queremos ver cómo se escribe $v^{(0)}$ como comb. lineal de los autovectores. Planteamos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -14 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{\alpha_4 = 1}$

$-14\alpha_3 - 1 = 3 \to \boxed{\alpha_3 = -\frac{2}{7}}$

$-6\alpha_2 - \frac{8}{7} - 1 = -3$

$\to \boxed{\alpha_2 = \frac{1}{7}}$

$\alpha_1 + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = 1$

$\to \boxed{\alpha_1 = \frac{4}{7}}$

luego

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \frac{4000}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1000}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2000}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1000\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix} = A^k\left[\frac{4000}{7}\begin{pmatrix}1\\4\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1000}{7}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{2000}{7}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 1000\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{4000}{7}\underbrace{A^k\begin{pmatrix}1\\4\\2\\0\end{pmatrix}}_{1^k\begin{pmatrix}1\\4\\2\\0\end{pmatrix}} + \frac{1000}{7}\underbrace{A^k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}}_{0^k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}} - \frac{2000}{7}\cdot\underbrace{A^k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}} + 1000\cdot\underbrace{A^k\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^k\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow v^{(\infty)} = \lim_{k\to+\infty} v^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} A^k\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix} = \frac{4000}{7}\begin{pmatrix}1\\4\\2\\0\end{pmatrix}$$

Notar que inicialmente había 4.000 navegantes y en el límite hay

$$\frac{4000}{7} + \frac{4000}{7}\cdot 4 + \frac{4000}{7}\cdot 2 = 4000$$

¿Esto es razonable, no? ¿Pero siempre pasa?

Veamos que sí:

Para eso definimos vector de probabilidad como un $v \in \mathbb{R}^n$ que tiene coordenadas no negativas que suman 1. Es decir, v es un vector de probabilidad si

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ satisface que

$$x_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

<u>Proposición:</u>

1) Sea A matriz de Markov y v un vector: $v_1 + \dots + v_n = 1$
$\Rightarrow$ las coordenadas de Av suman 1

<u>Dem:</u> $A = (a_{ij})_{i,j}$

$$\Rightarrow (Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (Av)_i = \sum_i \sum_j a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}}_{=1} \Big) v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j = 1$$

2) Sea A una matriz de Markov y v un vector con coord. no

negativas $\Rightarrow$ $A v$ tiene coord.

no negativas.

Dem: $A = (a_{ij})_{i,j}$

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}}_{\geq 0} \overbrace{v_j}^{\geq 0 \text{ por hip}} \geq 0.$$

≥ 0 por ser A de Markov

3) Juntando 1) y 2) tenemos que si A es de Markov y v es un vector de probabilidad $\Rightarrow$ $A.v$ es un vector de probabilidad.

4) Si A es de Markov y

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow A.v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

satisface que $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Dem: En 1) lo vimos si $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (Av)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)}_{= 1} x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j .$$

5) Sean A y B matrices de Markov $\Rightarrow$ $A \cdot B$ es de Markov.

__Dem:__ $A \cdot B = \left(A \cdot C_1(B) \mid \ldots \mid A \, C_n(B) \right)$

donde $C_i(B)$ son vectores cuya coordenadas suman $\Rightarrow$ por 1) $A \cdot C_i(B)$ también.

6) Si A es de Markov $\Rightarrow$ A^k es de Markov $\forall k \geq 1$

(sale de lo anterior).

Matriz A^∞

Se define $A^\infty = \lim_{k \to +\infty} A^k$

Si A es diagonalizable

$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ donde

D es una matriz diagonal

que tiene los autovalores en

la diagonal.

Si A es matriz de Markov

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ con } |d_i| \leq 1$$

Además

$$A^k = C \cdot \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix} C^{-1}$$

Supongamos que $d=-1$ no es autovalor de A y $d=1$ tiene multiplicidad 1.

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \text{con } |d_i| < 1 \text{ para } i \geq 2.$$

$$\Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} A^k = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} C^{-1}$$

donde $C = C(B, E) = \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, v_n \right)$

v_1 autovector corresp. a $d_1 = 1$.

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} A^k = \left(v_1 | \cdots | v_1\right) C^{-1}$$

$$= \left(a_1 v_1 | \cdots | a_n v_1\right)$$

si $C^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}$

Como A es de Markov,

A^k es de Markov

$\Rightarrow A^{\infty}$ es de Markov.

$\Rightarrow A^{\infty} = \lim A^k = \left(a_1 v_1 | \cdots | a_n v_1\right)$

satisface que si $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Lo mismo para cada fila, con lo cual

$$a_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$ y además

$$A^{\infty} = \left(w | \cdots | w \right)$$ donde

w es el único autovector de autovalor 1 cuyas coordenadas suman 1 $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right)$.

En el ejemplo, tendremos

$$A^{\infty} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 4/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde podíamos concluir

que $\forall\ v^{(0)}$ inicial

$$v^{(\infty)} = \lim_{k \to +\infty} v^{(k)} = \lim_{k \to +\infty} A^k v^{(0)}$$

$$= A^{\infty} v^{(0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 4/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v^{(0)}$$

Es decir, si existe A^{∞}, entonces existe $v^{(\infty)}$ para todo $v^{(0)}$.

En particular si $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

tendremos

$$v^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 4/7 & 4/7 & 4/7 & 4/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000/7 \\ 16000/7 \\ 8000/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como ya vimos.

En general vemos que vale que:

<u>Proposición</u>: Dada A matriz de Markov:

1) Si existe $A^{\infty} \Rightarrow v^{(\infty)} = A^{(\infty)} v^{(0)}$

2) Si -1 no es autovalor de A, entonces existe $A^{(\infty)}$.

3) Si -1 no es autovalor de A y $\dim E_1 = 1$ entonces

$$A^{(\infty)} = \left(w \,|\, w \,|\, \cdots \,|\, w \right)$$ donde

$w \in E_1$ y es vector de probabilidad.