Álgebra Lineal Computacional

1er Cuatrimestre 2023

Práctica N° 3: Sistemas lineales.

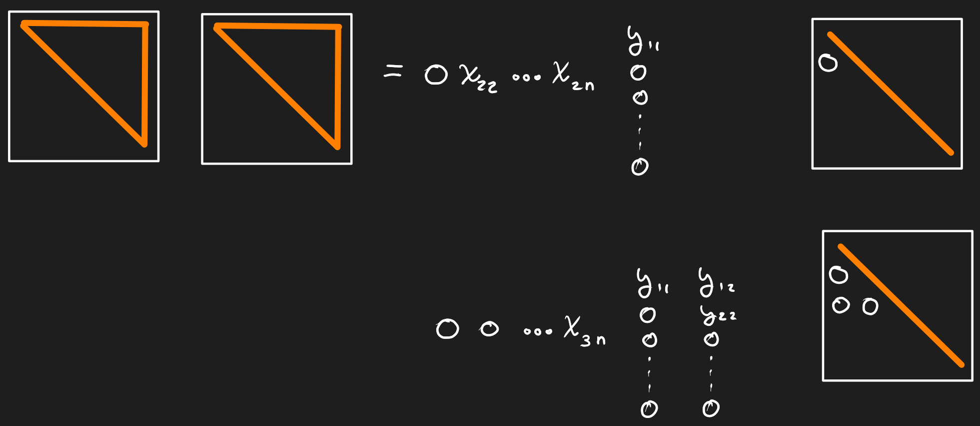
Ejercicio 1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son triangulares superiores, $\boldsymbol{AB}$ es triangular superior.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son diagonales, $\boldsymbol{AB}$ es diagonal.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $\boldsymbol{A}^n = 0$.

a) Idea



b) Misma idea pero mas fácil

c) Diag es cero y vale b de a)

Ejercicio 2. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Escalonar la matriz $\boldsymbol{A}$ multiplicándola a izquierda por matrices elementales $\boldsymbol{T}^{ij}(a)$, $a \in \mathbb{R}$, $1 \le i,\, j \le 4$, con $i \neq j$.

Recordar que $\boldsymbol{T}^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ *se define como:*

$$\boldsymbol{T}^{ij}(a) = \boldsymbol{I}_n + a\boldsymbol{E}^{ij}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad i \neq j, \quad a \in K,$$

siendo $\boldsymbol{E}^{ij}$ *las matrices canónicas de* $K^{n\times n}$.

(b) Hallar la descomposición $\boldsymbol{LU}$ de $\boldsymbol{A}$.

(c) Usando la descomposición del ítem anterior resolver el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, para $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Escribir funciones de `Python` que calculen la solución de un sistema:

(a) $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, siendo $\boldsymbol{L}$ triangular inferior.

(b) $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, siendo $\boldsymbol{U}$ triangular superior.

Ejercicio 4. Escribir funciones de `Python` que realicen las siguientes tareas:

(a) Calcular la descomposición LU de una matriz dada $\boldsymbol{A}$, asumiendo que no es necesario realizar pivoteos.

(b) Resolver un sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, utilizando la función del ítem anterior y las del ejercicio 3. Aplicar esta función para resolver el ítem c. del ejercicio 2

Ejercicio 5. Considerar la matriz: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ no admite descomposición LU.

(b) Hallar la descomposición LU de $\boldsymbol{PA}$ para alguna matriz de permutación $\boldsymbol{P}$ adecuada.

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{TS}$ donde $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular inferior y $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior. Probar:

(a) $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{S}$ son inversibles.

(b) $\boldsymbol{A}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de $\boldsymbol{L}$).

(c) La matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^t & d \end{pmatrix}$ tiene factorización LU (con unos en la diagonal de $\boldsymbol{L}$), para cualquier $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Hallarla explícitamente en función de $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ y d.

a) $A = TS$ Como A es invertible

$\Rightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow \det(TS) \neq 0$

$\det(TS) = \det T \cdot \det S \neq 0$

$\Rightarrow \det T \neq 0$ y $\det S \neq 0$

$\therefore$ T y S son invertibles.

b) $A = TS$

¿Opero sobre T y S para obtener L y U?

c) Es como la del TP:

Ejercicio 7. Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

$$10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-2}$$

$$2 = 0,2 \cdot 10^{1}$$

$$8 = 0,8 \cdot 10^{1}$$

$$1 = 0,1 \cdot 10^{1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,1 \cdot 10^{-2} & 0,2 \cdot 10^{1} & 0,8 \cdot 10^{1} \\ 0,1 \cdot 10^{1} & 0,1 \cdot 10^{1} & 0,2 \cdot 10^{1} \end{array}\right) - F_1 \cdot 10^{3} \left(\begin{array}{cc|c} 0,1 \cdot 10^{-2} & 0,2 \cdot 10^{1} & 0,8 \cdot 10^{1} \\ 0 & \underbrace{0,1 \cdot 10^{1} - 0,2 \cdot 10^{4}} & \underbrace{0,2 \cdot 10^{1} - 0,8 \cdot 10^{4}} \end{array}\right)$$

$$= 0,2001 \cdot 10^{4} \qquad = -0,7998 \cdot 10^{4}$$

redondeo

$$= 0,2 \cdot 10^{4} \qquad = -0,8 \cdot 10^{4}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,1 \cdot 10^{-2} & 0,2 \cdot 10^{1} & 0,8 \cdot 10^{1} \\ 0 & 0,2 \cdot 10^{4} & -0,8 \cdot 10^{4} \end{array}\right)$$

$$0,2 \cdot 10^{4}\, y = -0,8 \cdot 10^{4}$$

$$y = \frac{-0,8}{0,2} = -4$$

$$0,1 \cdot 10^{-2}\, x + 0,2 \cdot 10^{1}\, y = 0,8 \cdot 10^{1}$$

$$0,1 \cdot 10^{-2}\, x - 0,8 \cdot 10^{1} = 0,8 \cdot 10^{1}$$

$$0,1 \cdot 10^{-2}\, x = 0,16 \cdot 10^{2}$$

$$x = 0,16 \cdot 10^{2} \cdot 0,1 \cdot 10^{2}$$

$$x = 16000$$

$$sol = \begin{bmatrix} 16000 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Real :

```python
np.linalg.solve(np.array([[1e-3, 2],
                          [1,    1]]),
                np.array([8,
                          2]))
```

✓ 0.0s

```
array([-2.0010005,  4.0010005])
```

b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}1 \cdot 10^{1} & 0{,}1 \cdot 10^{1} & 0{,}2 \cdot 10^{1} \\ 0{,}1 \cdot 10^{-2} & 0{,}2 \cdot 10^{1} & 0{,}8 \cdot 10^{1} \end{array}\right) - F_1 \cdot 10^{-3} \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}1 \cdot 10^{1} & 0{,}1 \cdot 10^{1} & 0{,}2 \cdot 10^{1} \\ 0 & \underbrace{0{,}2 \cdot 10^{1} - 0{,}1 \cdot 10^{-2}} & \underbrace{0{,}8 \cdot 10^{1} - 0{,}2 \cdot 10^{-2}} \end{array}\right)$$

$= 0{,}1999 \cdot 10^{1}$ $\quad$ $= 0{,}7998 \cdot 10^{1}$

redondeo

$= 0{,}2 \cdot 10^{1}$ $\quad$ $= 0{,}8 \cdot 10^{1}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}1 \cdot 10^{1} & 0{,}1 \cdot 10^{1} & 0{,}2 \cdot 10^{1} \\ 0 & 0{,}2 \cdot 10^{1} & 0{,}8 \cdot 10^{1} \end{array}\right)$$

$$0{,}2 \cdot 10^{1} \cdot y = 0{,}8 \cdot 10^{1}$$

$$y = 4$$

$$0{,}1 \cdot 10^{1} \cdot x + 0{,}1 \cdot 10^{1} \cdot y = 0{,}2 \cdot 10^{1}$$

$$0{,}1 \cdot 10^{1} \cdot x + 0{,}1 \cdot 10^{1} \cdot 4 = 0{,}2 \cdot 10^{1}$$

$$0{,}1 \cdot 10^{1} \cdot x = -0{,}2 \cdot 10^{1}$$

$$x = -\frac{0{,}2}{0{,}1} = -2$$

$$\text{Sol} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```python
np.linalg.solve(np.array([[1e-3, 2],
                          [1,    1]]),
                np.array([8,
                          2]))
```

✓ 0.0s

```
array([-2.0010005,  4.0010005])
```

Ejercicio 8. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.

Primero veo si se puede:

∘) es simétrica ✓

∘) es dp?:

+) $\det 4 = 4 > 0$ ✓

+) $\det \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 4 > 0$ ✓

+) $\det A = 16 > 0$ ✓

Calculo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - \frac{F_1}{2} \\ F_2 + \frac{F_1}{2} \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L_1} A$$

$$F_3 - 3 . \frac{F_2}{2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L_2} L_1 . A$$

$$L_2 . L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}}$$

$$L_2 . L_1 . A = U$$

$$\tilde{L} . A = U$$

$$\tilde{L} \cdot A \, \tilde{L}^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Si $\tilde{L}^{-1} = L$

$$\Rightarrow \quad A = L \cdot D \cdot L^t$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificado con calc online ✓

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{L}^t}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \hat{L} \cdot \hat{L}^t$$

Ejercicio 9. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{x}_j$.

Uso Cholesky

$\Rightarrow$) Si A es spd $\Rightarrow$ $A = L L^t$

$$L L^t = \begin{bmatrix} \overline{\quad x_i^t \quad} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \, \Big| & & \\ & & \\ \end{bmatrix}$$

L triangular $\Rightarrow$ filas li y columnas li

Las filas de L son vectores li pues L triangular, y al hacer $x_i^t \cdot x_j$ obtengo cada uno de los a_ij de A

$\Leftarrow$) A simétrica y $\exists \{x_1, \dots, x_n\}$ li / $a_{ij} = x_i^t x_j$

$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} = x_i^t x_j = x_j^t x_i$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^t x_1 & x_1^t x_2 & \cdots & x_1^t x_n \\ x_2^t x_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n^t x_1 & \cdots & \cdots & x_n^t x_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} — x_1^t — \\ — x_2^t — \\ \vdots \\ — x_n^t — \end{bmatrix}}_{=:\tilde{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{=:\tilde{L}^t}$$

Puedo diagonalizarla pues x_i son li (la llamo L)

$A = L L^t \Rightarrow A$ es sdp

∎

Ejercicio 10. Sean las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva y $\boldsymbol{B}$ es no singular si y sólo si $\boldsymbol{BAB}^t$ es simétrica definida positiva.

$\Rightarrow$) A es sdp y B es no singular

Simetría de BAB^t

$$(BAB^t)^t = BA^tB^t \overset{A=A^t}{=} BAB^t$$

$\therefore$ BAB^t es simétrica ✓

Def. pos de BAB^t

$$x^t . BAB^t . x = (x^t . BA)(\underbrace{B^t . x})$$

Como B no singular

$\Rightarrow B^t$ no singular

$\Rightarrow B^t x \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

$\Rightarrow$ llamo $v := B^t x$

$\Rightarrow v^t = x^t B$

$\Rightarrow x^t B . A . B^t x = v^t . A . v$

Como A es sdp

$\Rightarrow v^t . A . v > 0 \quad \forall v \neq \vec{0}$

$\Rightarrow x^t B A B x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$\therefore$ BAB es dp ✓

$\Leftarrow)$ BAB^t es sdp

$\Rightarrow x^t BAB^t x > 0$

y

$BAB^t = LL^t$

$$BAB^t \overset{\text{sime.}}{=} (BAB^t)^t \qquad BAB^t \overset{\text{inversible}}{=} (BAB^t)^{-1}$$

$$BAB^t = BA^tB^t \qquad BAB^t = B^{-t}A^{-1}B^{-1}$$

?

Ejercicio 11. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\boldsymbol{A}\|_2 < 1$, siendo $\|\cdot\|_2$ la norma matricial inducida por la norma 2 vectorial.

(a) Probar que $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^t & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

$$\|A\|_2 < 1 \Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|} < 1$$

$$x^t \; C \; x > 0$$

$$C = LL^t$$

a) Simetría

$$(I - A^tA)^t = I^t - (A^tA)^t$$

$$= I - A^tA \quad \checkmark$$

DP:

qvq

$$\underbrace{x^t (I - A^tA) \cdot x}_{x^t I x \; - \; x^t A^t A x} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\underbrace{x^t x}_{\|x\|_2^2} \qquad (x^tA^t)(A\,x)$$

$$\underbrace{(Ax)^t (Ax)}_{\|Ax\|_2^2}$$

Como $\|A\|_2 = \max\limits_{x} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \Rightarrow \|A\|_2 \geq \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

$$\overset{\|x\|_2 > 0}{\Rightarrow} \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2$$

elevo a la 2 (vale pues $\|\cdot\| \geq 0$)

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 \leq \|A\|_2^2 . \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 - \|A\|_2^2 . \|x\|_2^2$$

$$\geq \underbrace{\|x\|_2^2}_{>0} \left(1 - \|A\|_2^2\right)$$

Como $0 \leq \|A\|_2 < 1$

$$\Rightarrow 1 - \|A\|_2^2 > 0$$

$$\Rightarrow \|x\|_2^2 - \|Ax\|_2^2 > 0$$

$\therefore$

$$x^t (I - A^t A) . x > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad \checkmark$$

b) Por ej 20 b:

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n\times n}$ y $M \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

(b) Probar que la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^t & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva.

$$I A^t = A^t I \quad \checkmark$$

ej 20b

$\Rightarrow$ Cumple que

$$\det M = \det(II - A^t A)$$

$$= \det(I - A^t A) > 0$$

?

Si $C = I - A^t A$

Como C es sdp por a)

entonces todos sus menores principales

son mayores a cero.

$$\Rightarrow \quad \det C(1:i, 1:i) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} I & A \\ A^t & I \end{bmatrix} \text{ es sdp.}$$