Álgebra Lineal

PRIMEROS PARCIALES

Temas del Programa que entran para el Primer Parcial

cms.dm.uba.ar/academico/programas/algebra_lineal

IMPORTANTE: Los contenidos a evaluar en los exámenes parciales van variando, ya que dependen del orden en que el docente decide impartir la materia.

Repaso 1:
(se supone conocido) Kn. Dependencia lineal. Sistemas de ecuaciones lineales. Notación Matricial. Método de eliminación de Gauss. Dependencia lineal de filas y columnas. Resultados básicos: Sistemas homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene solución no trivial.
Capítulo I:
a) Determinantes de 2x2 y 3x3. Permutaciones. El Grupo Simétrico (Ciclos, Ciclos Disjuntos, Transposiciones. Paridad) Determinante de orden n. Propiedades fundamentales. Teorema: Determinante es la única forma multilineal alternada (salvo constante). Determinantes como volumen. Cálculo determinantes, menores, cofactores. Teorema de Laplace, desarrollo por filas y columnas.
b) Matrices, suma, producto. Anillo de Matrices. Determinante del producto. Matriz adjunta. Matriz inversa. Regla de Cramer. Operaciones Elementales de filas y columnas. Matrices elementales. El Grupo General lineal. Equivalencia de matrices. Rango por determinantes (invariante para la equivalencia).
Capítulo II:
a) Espacios Vectoriales Abstractos. Dependencia lineal. Generadores. Cardinalidad de Conjuntos Linealmente Independientes $\leq$ Cardinalidad de Conjuntos de Generadores. Bases. Existencia de Base en dimensión finita. Coordenadas Isomorfismo con K^n. Subespacios, Subespacios transladados (variedades lineales). Intersección, Suma. Teorema de la Dimensión Suma Directa. Formas Lineales. Dual. Base dual. Anuladores.
b) Transformaciones Lineales u Operadores. Suma, composición. Matriz asociada (con respecto a una base). Matriz de la composición, isomorfismo con el anillo de matrices. Matriz de Cambio de Base y Cambio de Coordenadas. Efecto de un cambio de coordenadas en la matriz del Operador. Semejanza de matrices. Núcleo, Imagen, Teorema de la Dimensión. Valores y vectores propios, Polinomios Característico. Subespacios de vectores propios. Diagonalización si y sólo si existe base formada por vectores propios.
Capítulo IV:
a) Producto escalar en R^2, R^3, ángulo, coseno, proyección de un vector sobre otro, ortogonalidad, etc. Distancia entre variedades lineales (rectas y planos). Productos escalar en espacios abstractos. Caso real y caso complejo. (espacios euclideos y espacios unitarios). Cauchy-Schwartz. Angulo, Distancia, Norma, Ortogonalidad. Gram-Schmidt, Bases ortonormales, (fórmula para las coordenadas).
b) Isomorfismo con el Dual. Transformación adjunta. Trasformaciones y Matrices Ortogonales. Rotación en R^2, R^3, R^n. Existencia del eje de rotación. Estructura de una transformación Ortogonal. Transformaciones y Matrices Simétricas. Diagonzalización por medio de una transformación ortogonal (reducción de una forma cuadrática a sus ejes principales). Clasificación de Cuádricas con Centro. Relación con la signatura. Clasificación por signatura.
c) Descomposición polar. Caso Real. Raíz Cuadrada. Descomposición de una transformación Arbitraria en una Simétrica y una Ortogonal.

Régimen de Aprobación

Se deben aprobar los dos exámenes parciales. Para los alumnos que desaprueben alguno o ambos exámenes, habrá dos fechas de recuperación al finalizar el cuatrimestre. Se podrá rendir un solo parcial por fecha de recuperatorio, pudiendo los alumnos elegir cuál examen recuperar en cada fecha.

Bibliografía

La **bibliografía oficial** recomendada para la materia es:

- Notas de Álgebra Lineal, por Jerónimo G., Sabia J. y Tesauri S. - PDF
- V. Voieydine, Álgebra Lineal, Editorial MIR
- A. Kurosh, Curso de Álgebra Superior, Editorial MIR
- S. Lipschutz, Álgebra Lineal, Serie Schaum

Correlatividades

Según el régimen de correlatividades vigente desde 2008 para cursar la materia es necesario haber aprobado los trabajos prácticos de "Álgebra I".

Álgebra Lineal

2° Cuatrimestre 2018 – Primer Parcial – 19/10/18

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Dado $n \geq 1$, sea $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ la transformación lineal definida por
$$f(A) = 6A - 3\operatorname{tr}(A)\, I_n$$
   a) Probar que f es un isomorfismo si y solo si $n \neq 2$.
   b) Probar que para todo $n \geq 1$ se tiene que $\operatorname{Nu}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^{n\times n}$.
   c) ¿Es f un proyector?

2) Sean $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}_3[X]^*$ dados por $\epsilon(P) = P(1)$, $\delta(P) = P(-1)$, y sea $\mathbb{S} = \langle \epsilon, \delta \rangle$. Sea $\mathbb{T}$ el subespacio de $\mathbb{R}_3[X]$ dado por
$$\mathbb{T} = \langle X^3 + 2X^2 + kX - 2, X^3 + (5-k)X^2 - 2, (k-3)X^2 + (2k-1)X \rangle$$
Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}^{\circ} = \mathbb{R}_3[X]^*$.

3) Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ dos matrices tales que
   a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i < n$.
   b) $a_{ij} = b_{ij}$, para todos $1 \leq i < n$, $1 \leq j \leq n$.
   c) $\sum_{j=1}^{n} a_{nj} = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}$.

   Probar que $\det(A) = \det(B)$.

4) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las matrices dadas por
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2k+1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1-k & 3 \end{pmatrix}$$
Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $m_A = m_B$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2012 – Primer Parcial – 26/05/12 Tema D

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $f, g: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dos endomorfismos tales que $f \circ g = 0$ y $f + g$ es un isomorfismo.
   a) Probar que $\operatorname{Nu}(f) = \operatorname{Nu}(f^2)$.
   b) Probar que $\mathbb{V} = \operatorname{Nu}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

2)
   a) Sea $\mathbb{R}_3[X]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 y sean $k \in \mathbb{N}_0, \xi \in \mathbb{R}$ dados.
      i) Probar que la asignación $P \longmapsto P^{(k)}(\xi - 17k + \operatorname{sen}(\xi))$ define un elemento de $\mathbb{R}_3[X]^*$.
      [$P^{(k)}$ denota la derivada k-ésima de P.]
      ii) Probar que siempre existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que la igualdad:
      $$P^{(k)}(\xi - 17k + \operatorname{sen}(\xi)) = aP(0) + bP(1) + cP'(0) + d\big(P(2) - P(1)\big)$$
      se cumple para todo $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
   b) Hallar todos los $\xi \in \mathbb{R}$ para los que no existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que
   $$P^{(2)}(2\xi^2 - 4) = aP(0) + bP(1) + c\int_0^1 P(x)dx \qquad \forall P \in \mathbb{R}[X]$$

3) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ las matrices: $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 11 \\ 10 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Encontrar una matriz $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\operatorname{adj}(M) = A$.
   b) Probar que no existe $N \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\operatorname{adj}(N) = B$.

4) Sea $k \in \mathbb{C}$, y sea $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ la matriz
$$A = \begin{pmatrix} k & -2k+4 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcular, para cada valor de $k \in \mathbb{C}$, el polinomio minimal de A.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2012 – Recuperatorio Primer Parcial – 25/07/12

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sea $A \in K^{5\times 5}$ tal que $\mathrm{rg}(A^2) = 2$. Probar que $\mathrm{rg}(A) \leq 3$.

2) Dados $r_1, \dots, r_n \in K$ y $P(X) = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0 \in K[X]$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-2} & r_2^{n-2} & \dots & r_n^{n-2} \\ P(r_1) & P(r_2) & \dots & P(r_n) \end{pmatrix}$$

3) Consideremos los funcionales $\varepsilon, \delta \in (\mathbb{R}_3[X])^*$ definidos por $\varepsilon(P) = P(0)$, $\delta(P) = P'(0)$. Sea $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ el subespacio
$$\mathbb{S} = \langle X^3 + kX + 2k, -X^3 - X + (k^2 - 2), X^3 + X + k \rangle$$
Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que $\langle \varepsilon, \delta \rangle \oplus \mathbb{S}^\circ = (\mathbb{R}_3[X])^*$.

4) Sea $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal, con $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $P \in K[X]$ un polinomio irreducible. Probar que son equivalentes:
   a) P divide al polinomio minimal de f.
   b) $P(f)$ no es un monomorfismo.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

2° Cuatrimestre 2012 – Primer Parcial – 13/10/12 Tema 1

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sean $\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{R}^{3\times2}$: cada una de las filas de A suma $0\}$ y $\mathbb{T} = \{A \in \mathbb{R}^{3\times2}$: cada una de las columnas de A suma $0\}$.
   a) Calcular $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$ y $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T})$.
   b) Determinar un subespacio $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{3\times2}$ tal que $\mathbb{R}^{3\times2} = (\mathbb{S} + \mathbb{T}) \oplus \mathbb{U}$.

2) Sean $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{R}^3$ los $\mathbb{R}$-espacio vectorial con bases $B = \{(1,1), (1+2i, 0), (i, 1), (0, i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ y ε_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea $g_a: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal por
$$|g_a|_{B\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Determinar los valores de a para los cuales existe una t.l. $f_a: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2$ tal que $g_a \circ f_a = Id_{\mathbb{R}^3}$.
   b) Para cada a hallado, determinar una tal f_a dando su expresión $f_a(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

3) Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial, y sea $f \in \mathrm{End}_K(\mathbb{V})$. Probar que si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^2)$ y que si $\mathbb{V} = \mathrm{Nu}(f) + \mathrm{Im}(f)$, entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

4) (Un caso particular de la interpolación de Hermite) Sean $\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ los funcionales en $(\mathbb{R}_3[X])^*$ definidos por:
$$\varphi_{00}(P) = P(0), \varphi_{01}(P) = P'(0)\ \varphi_{10}(P) = P(1), \varphi_{11}(P) = P'(1), \forall P \in \mathbb{R}_3[X]$$
   a) Hallar una base B de $\mathbb{R}_3[X]$ tal que $B^* = \{\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{10}, \varphi_{11}\}$.
   b) Probar que dados $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P \in \mathbb{R}_3[X]$ que satisfaga las condiciones: $P(0) = a_{00}, P'(0) = a_{01}, P(1) = a_{10}, P'(1) = a_{11}$.

5) Sean $y = (1,1,1,1, \ldots, 1,1), z = (-1,1,-1,1, \ldots, -1,1) \in \mathbb{R}^{2n}$. Dado $x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, calcular su proyección ortogonal $P_{\mathbb{S}}(x)$ al subespacio $\mathbb{S} = \langle y, z\rangle$ (para el producto interno canónico) y deducir la siguiente desigualdad:
$$\left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i x_i\right)^2 \leq 2n\left(\sum_{i=1}^{2n} x_i^2\right), \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

2° Cuatrimestre 2012 – 1er Recup. del Primer Parcial – 11/12/12

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sean $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$, y sea $f_\lambda : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ la función definida por

$$f_\lambda(h) := \lambda h - Xh'$$

   a) Probar que f_λ es una transformación lineal y determinar para qué valores del parámetro λ se tiene que f_λ es un isomorfismo.
   b) Para cada valor λ tal que f_λ no es un isomorfismo, determinar dimensión y base de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

2) Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ definida por $f(A) = (A + A^t)/2$, $\forall A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Demostrar que f es un proyector, determinar el núcleo y la imagen de f, y una base B de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} Id_r & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & 0_s \end{pmatrix}$$

para $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ adecuados (aquí $0_{r,s}$ denota la matriz nula en $\mathbb{R}^{r\times s}$, y análogamente para los otros casos).

3) Para $x_0 \in \mathbb{R}$ se define $D_{x_0} \in (\mathbb{R}_3[X])^*$ por $D_{x_0}(h) = h'(x_0)$, $\forall h \in \mathbb{R}_3[X]$. Se considera el subespacio $T \subset (\mathbb{R}_3[X])^*, T := \langle D_{x_0} : x_0 \in \mathbb{R}\rangle$.
   a) Determinar un subespacio $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}_3[X]$ tal que $\mathbb{S}^\circ = \mathbb{T}$.
   b) Determinar la dimensión y una base de $\mathbb{T}$.

4) Se considera $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno canónico $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   a) Sea $S = \langle Id_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Determinar $P_S(A)$, la proyección ortogonal de A sobre S, $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   b) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$, y sean B, B' dos bases de $\mathbb{V}$. Sea $T = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Probar que:

$$\mathrm{dist}(|f|_B, T) = \mathrm{dist}(|f|_{B'}, T)$$

   Sugerencia: Observar que $T = S^\perp \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

5) Hallar la distancia entre la recta $\mathbb{L} := \langle(1,2,3)\rangle + (0,2,1)$ y el plano Π paralelo a $\mathbb{L}$ que contiene a los puntos $P = (2,0,1)$ y $Q = (1,0,2)$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

2° Cuatrimestre 2012 – 2do Recup. del Primer Parcial – 18/12/12

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sea $H = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : 2a_{11} + a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22} = 0\}$ y $S = \langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle$. Determinar, si es posible, un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ tal que:
$$\mathrm{Nu}(f) + \mathrm{Im}(f) = H \quad \text{y} \quad \mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = S$$

2) Sea $\mathbb{V}$ un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(\mathbb{V})$. Probar que
$$\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$
¿Vale lo mismo si $\dim_K(\mathbb{V}) = \infty$?
(Considerar por ejemplo $\mathbb{V} = K^{\mathbb{N}}$ y $f \in \mathrm{End}_K(K^{\mathbb{N}})$ dado por $f(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$)

3) Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que
$$|f|_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
donde $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Determinar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ existe una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que
$$|f|_{B\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}$$
y para alguno de los valores hallados, calcular la base B.

4) Sea $\varphi_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ definido por $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{i} x_j$, $1 \le i \le n$. (Así, $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, $\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2$,..., $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$)
Probar que $B' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es base de $(\mathbb{R}^n)^*$ y calcular la base $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B^* = B'$.

5) En $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2011 – Primer Parcial – 10/05/11

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sean $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}_1$ y $g\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}_2$ transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) Existe una transformación lineal $h\colon \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ tal que $h \circ f = g$.
   b) $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Nu}(g)$.

2) Consideremos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ polinomios tales que
$$\langle p_1, p_2\rangle^\circ = \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_4\rangle \;\text{ y }\; \langle p_3, p_4\rangle^\circ = \langle 2\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4, \varphi_1 + \varphi_2 + 4\varphi_4\rangle$$
   a) Decida su el conjunto $\{p_1, p_2, 1 + 3x - x^2 + x^3\}$ es linealmente independiente.
   b) Determine $\dim\langle p_1, p_2, p_3, p_4\rangle$.

3) Sean $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de B.
   a) Muestre que $B' = \{v_1 + 2v_3, v_1 + v_2 + v_3, 2v_1 + 3v_3\}$ también es base de $\mathbb{V}$.
   b) Definamos transformaciones lineales $f, g\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tales que $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $|g|_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentre las coordenadas de $g(v_2 - v_3)$ en la base B' y una base del espacio $U = \{v \in \mathbb{V} : f(v) = g(v)\}$.

4) Sea $n \geq 0$. Para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ definimos una función lineal $\varphi_k \in (\mathbb{R}[x]_{\leq n})^*$ de manera que $\varphi_k(p) = \frac{1}{k!}\left(x^k p\right)^{(k)}(1)$ para cada $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$.
   a) El conjunto $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ es una base de $(\mathbb{R}[x]_{\leq n})^*$.
   Sugerencia: Calcule las coordenadas de φ_k en la base dual de $\{1, x - 1, \dots, (x - 1)^n\}$.
   b) La matriz $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ tal que $A_{ij} = \binom{i + j}{i}$ para todo $i, j \in \{1, x - 1, \dots, (x - 1)^n\}$ es inversible.
   Sugerencia: Calcule las coordenadas de φ_k en la base dual de $\{1, x, \dots, x^n\}$.

5) Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.
   a) Si $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\text{rg}(v^t w) \leq 1$.
   b) Sean $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}'$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ subespacios de un k-espacio vectorial $\mathbb{V}$. Se sabe que $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}'$,$\mathbb{S}' \subseteq \mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}' + \mathbb{T}')$, entonces $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{S}' + \mathbb{T}'$.
   c) Si α, β y γ son números reales no nulos y distintos, entonces el conjunto $\{(\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5), (\beta^3, \beta^4, \beta^5), (\gamma^3, \gamma^4, \gamma^5)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2011 – Primer Parcial – 15/07/11

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) (Desigualdad de Sylvester) Si $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $g: \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ son aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $\operatorname{rg}(g) + \operatorname{rg}(f) \leq \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim(\mathbb{W})$.

2) Sean $p, q: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dos proyectores.
   a) Muestre que la composición $g \circ f$ puede no ser un proyector.
   b) Pruebe que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:
      i) $g \circ f$ es un proyector y $f \circ g = g$.
      ii) $\operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$.

3) Sea $n \geq 1$. Sean $x_0, \dots, x_n$ los números reales distintos dos a dos y, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, consideremos la función $\varepsilon_i: \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon_i(p) = p(x_i)$ para cada $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$.
   a) El conjunto $B^* = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n\}$ es una base de $(\mathbb{R}[x]_{\leq n})^*$.
   b) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ cuya base dual es B^*. Sean $y_0, \dots, y_n$ números reales y sea $P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i P_i$. Muestre que P es el único polinomio de $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ tal que $P(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$.
   c) Pruebe que existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que para todo $P \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ se tiene que $\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i P(x_i)$.

4) Sea $M \in M_2(\mathbb{R})$ una matriz tal que $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, M\right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$ y sea $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ la base dual.
   a) Encuentre las coordenadas en la base B^* de una base de $\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle^\circ$.
   b) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\langle A \rangle^\circ = \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_4, 2\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \rangle$. Muestre que entonces $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A\right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

5) Sean $v_1 = (1, -2, 3, 0), v_2 = (2, 4, -1, 1), v_3 = (4, 0, 5, 1), v_4 = (0, 8, -7, 1) \in \mathbb{R}^4$. Determine todos las ternas vectores w_1, w_2 y $w_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que existe una transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con:

$$f(v_1) = w_1 - w_2 + 2w_3, f(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, f(v_3) = w_1 + 2w_3 \text{ y } f(v_4) = 4w_3$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

2° Cuatrimestre 2009 – Primer Parcial – 17/10/09

1	2	3	4	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-3 \\ a & 6 & 0 \\ a-2 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Sea $\mathbb{S} = \{B \in \mathbb{R}^{3\times 2} : AB = 0\}$, y sea $\mathbb{T} = \langle (b,1,1,1), (1,b,1,1), (1,1,b,1), (1,1,1,b) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
   a) Hallar todos los pares (a,b) de números reales tales que existe $f: \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^4$ transformación lineal $\dim(\mathrm{Nu}(f) \cap \mathbb{S}) = 1$ y $f(\mathbb{S}) = \mathbb{T}$.
   b) Para cada par (a,b) hallado, definir f epimorfismo que cumpla las condiciones del ítem anterior.

2)
   a) Sean $\mathbb{V}$ un k-espacio vectorial de dimensión n, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio y $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un proyector tal que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{S}$. Probar que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{S} \Longleftrightarrow \mathrm{Nu}(f) \cap \mathbb{S} = \{0\}$.
   b) Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = x_1 - x_4 = 0\}$. Hallar un proyector $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{S}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathbb{S} \neq \{0\}$.

3) Sean $A \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ tales que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 3$.
   a) Probar que $\mathrm{rg}(AB) = 3$.
   b) Probar que no es cierto en general que $\mathrm{rg}(BA) = 3$.
   c) Probar que $BA \neq 0$.

4) Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$, y sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\big)$. Probar que f es epimorfismo si y sólo si $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

5) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, y sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que
$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
donde E denota la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que $\det(v_1 - v_3 | v_1 + v_2 | 3v_2 + v_3) = 8$, calcular $\det(|f|_B)$.
Aclaración: Con $(v_1 - v_3 | v_1 + v_2 | 3v_2 + v_3)$ denotamos a la matriz de 3×3 cuya primera columna es $(v_1 - v_3)^t$, etc.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2008 – Primer Parcial – 09/05/08

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Consideramos $\mathbb{V} = \mathbb{Q}^4$ con la estructura usual de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Sean $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_3 = x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle (2,-1,0,3), (1,0,0,2), (3,-2,0,4) \rangle$ dos subespacios de $\mathbb{V}$. Hallar un endomorfismo $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ que cumpla lo siguiente:
   a) $f(\mathbb{S}) = \mathbb{S} + \mathbb{T}$
   b) $\mathbb{T} \subseteq \mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathbb{S} + \mathbb{T}$
   c) f es nilpotente

   Para la transformación f hallada, calcular $f(1,1,1,1)$.

2)
   a) Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Probar que existe un subespacio $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ que verifica simultáneamente $\mathrm{Nu}(f^2) = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S}) = \dim(f(\mathbb{S})) \leq \dim(\mathrm{Nu}(f))$.
   b) Deducir que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{rg}(A^2) + n \geq 2\,\mathrm{rg}(A)$.

3) Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:
$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + (k-1)x_4 = 2x_1 - x_3 = 0\}$$
$$\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_4 = (k+1)x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0\}$$
   a) Determinar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ no están en suma directa.
   b) Para uno de los k hallados, encontrar un subespacio $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^4$ y un proyector $P: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tales que $\mathrm{Nu}(P) = \mathbb{S}$, $\mathrm{Im}(P) = \mathbb{U}$ y $\mathbb{U} \cap \mathbb{T} \neq \{0\}$.

4) Sean $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}_2[X]$. Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial si y sólo si en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ es inversible la siguiente matriz:
$$\begin{pmatrix} f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) \\ f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) \end{pmatrix}$$

5) Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. $B_1^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y $B_2^* = \{\varphi_1 - 2\varphi_2, \varphi_3, \varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3\}$ sus respectivas bases duales. Hallar las coordenadas del vector $w_1 - w_2 + 3w_3$ en la base B_1.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2008 – Recuperatorio Primer Parcial – 15/07/08

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2-a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Se considera la transformación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x) = (Ax^t)^t$. Hallar todos los alores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

2) Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales tales que $\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathbb{W}) < \infty$ y sea $f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ dos subespacios de $\mathbb{V}$ tales que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si $\mathbb{W} = f(\mathbb{S}) \oplus f(\mathbb{W})$.

3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.
   a) Sean $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un proyector. Probar que la traza de f es igual al rango de f.
   b) Sean $f_1, f_2, f_3: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ proyectores que verifican $Id_{\mathbb{V}} = f_1 + f_2 + f_3$. Sean B_1, B_2, B_3 bases de $\mathrm{Im}(f_1)$, $\mathrm{Im}(f_2)$ e $\mathrm{Im}(f_3)$ respectivamente. Probar que $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ es base de $\mathbb{V}$.
   c) Deducir que para cada $v \in \mathbb{V}$ existe una única descomposición $v = w_1 + w_2 + w_3$ con $w_i \in \mathrm{Im}(f_i)$ para $i = 1,2,3$.

4) Sean $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Probar que:
   a) A^{500} y A^{501} son linealmente independientes.
   b) $\{B \in \mathbb{R}^{2\times2}: AB = BA\} = \langle A^{500}, A^{501} \rangle$.

5) Sean $B = \{(1,2,2), (0,0,-1), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ y $B' = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$. Supongamos que $\mathrm{Nu}(\varphi_1) \cap \mathrm{Nu}(\varphi_2) = \langle (1,1,1) \rangle$, $\mathrm{Nu}(\varphi_2) \cap \mathrm{Nu}(\varphi_3) = \langle (1,2,2) \rangle$ y que $\mathrm{Nu}(\varphi_1) \cap \mathrm{Nu}(\varphi_3) = \langle (0,0,-1) \rangle$.
   a) Probar que B es base de $\mathbb{R}^3$ y B' es base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
   b) Probar que $C(B', B^*)$ es una matriz diagonal.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2008 – 1er Recup. del Primer Parcial – 17/12/08

1	2	3	4	5	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sean $\mathbb{S} = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2}: \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = 0\right\}$ y $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Hallar una transformación lineal $f: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $f(\mathbb{S}) = f(\mathbb{T})$ y $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

2) Decidir para qué valores de a y b existe un proyector $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $p(1,0,0) = (1,-1,2)$ y $p(0,1,0) = (a, 0, b)$.

3) Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}_3[x])^*$ definidas por

$$\varphi_1(P) = \int_0^1 P(x)dx\,, \qquad \varphi_2(P) = P(1), \qquad \varphi_3(P) = P'(1)$$

   a) Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea $\psi_a \in (\mathbb{R}_3[x])^*$ definida por $\psi_a(P) = P''(a)$. Hallar todos los valores de a para los cuales $\psi_a \in \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$.
   b) Sea $\varphi_0 \in (\mathbb{R}_3[x])^*$ tal que $B = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_3[x])^*$, y sea $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ la base de $\mathbb{R}_3[x]$ cuya base dual es B. Probar que $\langle P_0, P_1 \rangle = \langle (x-1)^2, x(x-1)^2 \rangle$.

4) Sabiendo que $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -1$, calcular $\det(C)$, $\det(C^{-1})$ y $\det(\mathrm{adj}(C))$ siendo

$$C = \begin{pmatrix} 3b+3e+3h & 3c+3f+3i & 3a+3d+3g \\ e-2h & f-2i & d-2g \\ b+2e-2h & c+2f-2i & a+2d-2g \end{pmatrix}$$

5) Sean $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sea $T: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ definida por $T(A) = PAQ$.
   a) Probar que si $v \in \mathbb{C}^n$ es un autovector de P y $w \in \mathbb{C}^n$ es un autovector de Q^t, entonces $v^t.w$ es un autovector de T.
   b) Probar que P y Q son diagonalizables, y $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de autovectores de P y $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de autovectores de Q^t, entonces $\{v_i^t w_j : 1 \le i, j \le n\}$ es un conjunto linealmente independiente. Deducir que T es diagonalizable.
   c) Diagonalizar T para $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ (es decir, encontrar una base de autovectores de T y la matriz de T en esa base).

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2007 – Primer Parcial – 22/05/07

1	2	3	4	5	6	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sean $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las simetrías con respecto al eje x y a la recta $\langle(\sqrt{3}, 1)\rangle$ respectivamente.
   a) Calcular $[T_1]_E$ y $[T_2]_E$.
   b) Probar que $T_2 \circ T_1$ es una rotación de 60 grados.

2) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz dada por:
$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i + j = n + 1 \text{ y } i \neq j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$
   Calcular $\det(A_n)$.

3) Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]_{<n}$. Para cada $g \in \mathbb{V}$, sea $\varphi_g \in \mathbb{V}^*$ dada por:
$$\varphi_g(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$
   a) Probar que $B = \{\varphi_1, \varphi_x, \varphi_{x^2}, \dots, \varphi_{x^{n-1}}\}$ es una base de $\mathbb{V}^*$.
   b) Sea $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz dada por $(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$. Probar que $\det(H_n) \neq 0$.

   Sugerencia: Calcular $C(B, E^*)$, donde $E = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ es la base canónica de $\mathbb{V}$.

4) Sea $M \in K^{n\times n}$ una matriz cuadrada. Probar que existe $B \in K^{n\times n}$ tal que $\det(M + tB) \neq 0$ para todo $t \neq 0$.
   Sugerencia: Considerar primero el caso M escalonada por filas.

5) Sea $A \in K^{m\times n}$ y $b \in K^{m\times 1}$. Probar que el sistema $Ax = b$ es incompatible si y sólo si existe $c \in K^{1\times m}$ tal que $cA = 0$ y $cb \neq 0$.

6) Sean $v_1, \dots, v_n \in K^n$ vectores tales que sus coordenadas suman 1. Probar que existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tales que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2007 – Primer Recuperatorio del 1er Parcial – 23/07/07

1	2	3	4	5	6	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita. ¿Puede $\mathbb{V}$ tener tres subespacios propios distintos $\mathbb{W}_0$, $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ tales que $\mathbb{W}_0 \subset \mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_0 + \mathbb{W}_2 = \mathbb{V}$ y $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 = \{0\}$?

2) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio. Probar que el conjunto
$$\mathcal{X} = \{T \in \text{End}(\mathbb{V}) : \mathbb{W} \subseteq \text{Ker}(T)\}$$
es un subespacio de $\text{End}(\mathbb{V})$ y calcular su dimensión en función de $\dim(\mathbb{V})$ y $\dim(\mathbb{W})$.

3) Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Probar que $\text{adj}(\text{adj}(A)) = \det(A^{n-2})\,A$.

4) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz tal que $A^2 = A$. Probar que $\text{rg}(A) = \text{tr}(A)$.

5) Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean $\mathbb{S}_1, \dots, \mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{V}$ subespacios. Sean $\mathbb{T}_i = \mathbb{S}_1 + \cdots + \mathbb{S}_{i-1} + \mathbb{S}_{i+1} + \cdots + \mathbb{S}_n$ para $1 \leq i \leq n$. Probar que $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{S}_n$ si y sólo si $\mathbb{V}^* = \mathbb{T}_1^0 \oplus \dots \oplus \mathbb{T}_n^0$y $b \in K^{m\times 1}$.

6) Sean $f, g \in K[t]$. Probar que existe $p \in \mathbb{K}[x, y]$ no nulo tal que $p\big(f(t), g(t)\big) = 0$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Álgebra Lineal

1° Cuatrimestre 2007 – Segundo Recuperatorio del 1er Parcial – 28/07/07

1	2	3	4	5	6	CALIFICACIÓN

Nombre: L.U.:

1) Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz y sea $B \in K^{n\times n}$ la matriz que se obtiene rotando 90 grados (en sentido horario) a la matriz A. Calcular el $\det(B)$ en función del $\det(A)$.

2) Sean $f_0, \dots, f_n \in K[x]$ polinomios de grado menor que n y sean $a_0, \dots, a_n \in K$. Probar que
$$\det\begin{bmatrix} f_0(a_0) & \dots & f_n(a_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_0(a_n) & \dots & f_n(a_n) \end{bmatrix} = 0$$

3) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ tales que $A + B = I$ y $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$. Probar que A y B son proyectores.

4) Sea $A \in \mathbb{F}_2^{n\times n}$ la matriz que tiene $\bar{0}$ en la diagonal y $\bar{1}$ en todos los demás lugares. Calcular $\mathrm{rg}(A)$.

5) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A es un proyector si y sólo si $2A - I$ es idempotente (es decir, es inversa de sí misma).

6) Sean $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$, $\mathbb{V}_3$, $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$ y $\mathbb{W}_3$ espacios vectoriales. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama de transformaciones lineales:
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{V}_1 & \overset{a}{\rightarrow} & \mathbb{V}_1 & \overset{b}{\rightarrow} & \mathbb{V}_1 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ \mathbb{W}_1 & \overset{c}{\rightarrow} & \mathbb{W}_2 & \overset{d}{\rightarrow} & \mathbb{W}_3 \end{array}$$
donde a y c son monomorfismos, b y d son epimorfismos, $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(a)$, $\mathrm{Ker}(d) = \mathrm{Im}(c)$, $f_2 \circ a = c \circ f_1$ y $f_3 \circ b = d \circ f_2$. Probar que si f_1 y f_3 son monomorfismos (respectivamente epimorfismos), entonces f_2 también es monomorfismo (respectivamente epimorfismo).

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.