Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 4: Autovalores y autovectores.

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz $\boldsymbol{A}$ en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$):

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

(e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalores :

$$\underbrace{\chi_A}_{\text{P.C.}} = \det(\lambda I - A) = 0$$

↳ Calculo raíces para obtener λ_i

Autovectores :

Para cada λ_i, como sé que

autovec. asociado a λ_i

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$$A v_i - \lambda_i v_i = 0$$

$$(A - \lambda_i . I) . v_i = 0$$

Ejercicio 2. Para cada una de las matrices $\boldsymbol{A}$ del ejercicio anterior, sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la tranformación lineal tal que $[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \boldsymbol{A}$. Decidir si es posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ tal que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$.

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ (e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonalización :

a)

Input

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = i\,a$

$\lambda_2 = -i\,a$

Corresponding eigenvectors

$v_1 = (-i, 1)$

$v_2 = (i, 1)$

Como la multiplicidad de los autovalores es 1, entonces A es diagonalizable.

$\swarrow C_{EB}^{-1}$

$$A = C_{EB} \cdot D \cdot C_{BE}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\det = -i - i \\ -2i}} \begin{bmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{bmatrix} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{-2i}}_{=\frac{i}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{bmatrix}}_{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}}$$

Input

$$\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i\,a & 0 \\ 0 & -i\,a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Result

$$a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificado ✓

Ejercicio 3. Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

(a) Hallar una matriz $\boldsymbol{A}$ tal que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Mostrar que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

(b) Diagonalizar $\boldsymbol{A}$.

(c) Dar una fórmula cerrada para F_n.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b = 1 \\ d = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a+1 = 1 \\ a = 0 \\ c+1 = 1 \\ c = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \times \quad ?$$

Ejercicio 4. Recordando que la solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

con condición inicial $x(0) = c_0$ es $x(t) = c_0 e^{at}$, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 6\,x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) &= 2\,x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Sugerencia: Hallar una matriz $\boldsymbol{C}$ tal que $\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{C}$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}.\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Dej...

Ejercicio 5. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Como $\det A = \det(A^t)$

$$\Rightarrow \det(\lambda I - A) = \det\left((\lambda I - A)^t\right)$$

$$= \det(\lambda . I^t - A^t)$$

$$= \det(\lambda - A^t) \quad \checkmark$$

Mismos autovalores pues mismos polinomios característicos

$$(A - \lambda I).v = 0$$

A

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$

$\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$

Corresponding eigenvectors

$v_1 = (-1 + \sqrt{3}, 1)$

$v_2 = (-1 - \sqrt{3}, 1)$

trasponer $\longleftrightarrow$

iguales $\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

distintos $\longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow$

A^t

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$

$\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$

Corresponding eigenvectors

$v_1 = \left(\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}), 1\right)$

$v_2 = \left(\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}), 1\right)$

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un autovalor de $\boldsymbol{A}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de $\boldsymbol{A}^k$, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\boldsymbol{A})$.

Ejercicio 7. (a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ diagonalizable con $tr(\boldsymbol{A}) = -4$. Calcular los autovalores de $\boldsymbol{A}$ sabiendo que los autovalores de $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}$ son $-1, 3$ y 8.

(b) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times4}$ tal que $\det(\boldsymbol{A}) = 6$; 1 y -2 son autovalores de $\boldsymbol{A}$ y -4 es autovalor de la matriz $\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}$. Hallar los restantes autovalores de $\boldsymbol{A}$.

a) $p(A) = A^2 + 2A$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$

The matrix A has n eigenvalues
(including each according to its multiplicity).

The sum of the n eigenvalues of A is the same as the trace of A
(that is, the sum of the diagonal elements of A).

The product of the n eigenvalues of A is the same as the
determinant of A.

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4$

Ejercicio 8. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

(a) Si los autovalores de $\boldsymbol{A}$ son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, entonces sus autovalores son reales.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)

(d) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

Ejercicio 9. Una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

$$f(x) = A . x$$

$$f(f(x)) = A^2 . x = A . x$$

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probar que f es un proyector y hallar una base $\mathcal{B}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ sea diagonal.

Ejercicio 11. Considerar las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon} \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\varepsilon \ll 1$ es arbitrario. Calcular los polinomios característicos y los autovalores de $\boldsymbol{A}$ y de $\boldsymbol{B}$. Concluir que pequeñas perturbaciones en los coeficientes de un polinomio pueden conducir a grandes variaciones en sus raíces (el problema está mal condicionado). En particular, esto afecta el cómputo de autovalores como raíces del polinomio característico.