Normas vectoriales y sucesiones

Ejercicio 10. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

Ejercicio 11. Para cada una de las siguientes sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, determinar si existe $\lim_{n\to\infty} x_n$, y en caso afirmativo hallarlo.

a) $x_n = \frac{1}{n}$,

b) $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$,

c) $x_n = (-1)^n$

d) $x_n = (-1)^n e^{-n}$

a) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} \overset{L'H}{=} \lim \frac{2n}{2n} = 1$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

c) No tiene límite

d) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{Acotado}} \cdot \underbrace{e^{-n}}_{\to 0} = 0$

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ejercicio 12. Para cada una de las siguientes sucesiones de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^2$, determinar si existe $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n$, y en caso afirmativo hallarlo.

a) $\boldsymbol{x}_n = (1+\frac{1}{n}, 3)$,

b) $\boldsymbol{x}_n = ((-1)^n, e^{-n})$,

c) $\boldsymbol{x}_n = \begin{cases}(1/n, 0) & \text{si } n \text{ es par}\\ (0, -1/n) & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}$,

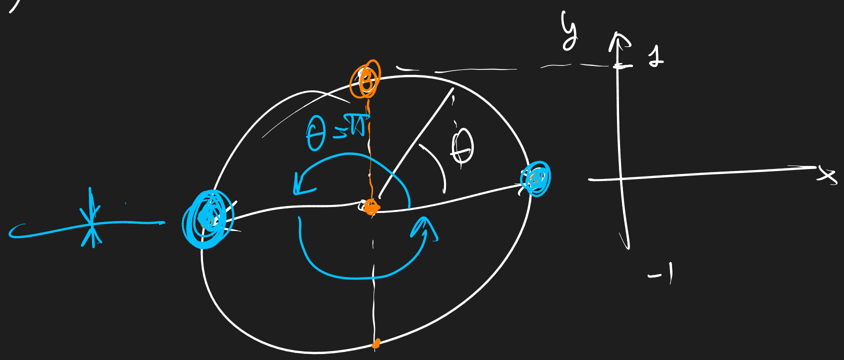
d) $\boldsymbol{x}_n = (\frac{1}{2^n}, 4, \operatorname{sen}(\pi n))$.

a) $x_n \longrightarrow (1, 3)$ $\qquad \lim_{n\to\infty} 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = 1$

b) x_n no tiene límite pues $(-1)^n$ no converge.

c) $\left.\begin{array}{l} (\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \\ (0, -\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \longrightarrow (0,0)$

d) $(\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}, \underbrace{4}_{=4}, \underbrace{\sin(\pi n)}_{=0\,\forall n}) \longrightarrow (0, 4, 0)$



Ejercicio 13. Dada una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ y dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ de $\mathbb{R}^k$, usando la equivalencia de normas, probar

$$\|\boldsymbol{x}_n\|_a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \iff \quad \|\boldsymbol{x}_n\|_b \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ejercicio 14. Dada una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ probar

$$\|\boldsymbol{x}_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\boldsymbol{x}_n)_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq k,$$

donde $(\boldsymbol{x}_n)_i$ es la i-ésima coordenada de $\boldsymbol{x}_n$.

Normas matriciales

Ejercicio 15. Si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 16. Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\text{(a) } ||\boldsymbol{A}||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(b) } ||\boldsymbol{A}||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Ejercicio 17. Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ como el máximo del valor $\|\boldsymbol{Ax}\|_2/\|\boldsymbol{x}\|_2$ entre varios vectores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz A y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|\boldsymbol{Ax}_k\|_2}{\|\boldsymbol{x}_k\|_2}\right\}$$

  donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar en la bola unitaria: $B = \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1\}$.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

$$\max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$$

Recordar que tanto la norma 2 puede calcularse con el comando np.linalg .norm. Tener en cuenta que los vectores generados al azar (comando np.random.random) tienen coordenadas en el intervalo $[0, 1]$.

```python
A = np.asarray([[10,0,0],
                [20,1,0],
                [30,0,1]])
A
```

✓ 0.0s

```
array([[10,  0,  0],
       [20,  1,  0],
       [30,  0,  1]])
```

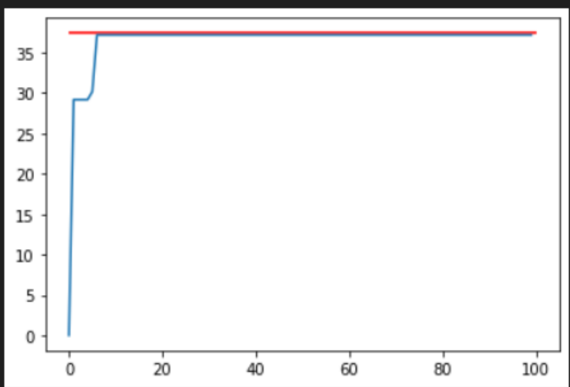
```python
def generador(A):
    n = 100
    s1 = 0
    sk = s1
    serie = []
    serie.append(sk)
    while len(serie) < n:
        x = np.random.rand(3, 1)
        norm_x = np.linalg.norm(x, ord=2)
        if norm_x > 1 or norm_x == 0:
            # genero otro x
            continue

        normA = np.linalg.norm(A @ x, ord=2) / norm_x
        sk = max(sk, normA)
        serie.append(sk)

    return serie

serie = generador(A)
```

$$\left\| \begin{bmatrix} 0{,}99 \\ 0{,}99 \\ 0{,}99 \end{bmatrix} \right\| \approx \sqrt{3} > 1$$

≤ 1 ✓

```python
plt.plot(serie)
plt.hlines(y=np.linalg.norm(A, ord=2), xmin=0, xmax=100, color='r')
plt.show()
```

✓ 0.2s



Condición de matrices

Ejercicio 18. Se tiene el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

a) Sea $\boldsymbol{x}$ la solución exacta y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $\mathbf{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. Si notamos $\mathbf{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$, mostrar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto $\boldsymbol{b}$ se conoce una aproximación $\tilde{\boldsymbol{b}}$. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ es tal que $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$. Probar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 19. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error relativo en los datos $(\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|})$, si se desea que el error relativo en la aproximación de la solución $(\frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|})$ sea menor que 10^{-4} (en $\|\cdot\|_\infty$)?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $\boldsymbol{b} = (3, 2, 2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar $\boldsymbol{b}$ obteniendo $\tilde{\boldsymbol{b}}$. Finalmente, resolver $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ y verificar que $\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| < 10^{-4}$.

a) $\mathrm{Cond}_\infty A = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 5/4 & -3/4 \\ 0 & -3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

$= 3 \cdot 2$

$= 6$

b) Sabemos

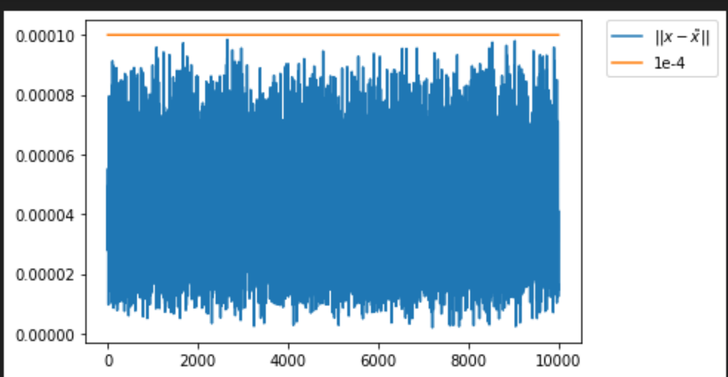
$$\frac{1}{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \underbrace{\frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}}_{<10^{-4}} \leq \underbrace{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})}_{=6}\underbrace{\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}}_{?}.$$

$10^{-4} < 6 \cdot b_e$

$$\frac{10^{-4}}{6} < \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|(3,2,2)\|}$$

$$\frac{10^{-4}}{6} \cdot \sqrt{17} < \|b-\tilde{b}\|$$

c)



Ver notebook.

Ejercicio 20. Probar que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\|\cdot\|$ es una norma matricial, la condición de $\boldsymbol{A}$ verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \leq \inf\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \geq \sup\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})$ mide la distancia relativa de $\boldsymbol{A}$ a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 21. (a) Estimar la $\mathrm{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Concluir que la condición de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

a) i) $1 \ \varepsilon \ \varepsilon^2 \longrightarrow \underbrace{1 \ 0 \ 0}_{\text{ld}} \Rightarrow \text{cond } A \to \infty$

ii) $1 \ 0 \ 1+\varepsilon \longrightarrow 1 \ 0 \ 1$

$1-\varepsilon \ 0 \ 1 \longrightarrow 1 \ 0 \ 1 \qquad \text{cond } A \to \infty$

b) Es indep. de la norma.

Ejercicio 22. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix}$$

con $n \in \mathbb{N}$, probar que existe una constante $c > 0$ tal que $\operatorname{cond}_\infty(A) \geq cn$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y deducir que $\operatorname{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

$$\|A\|_\infty = \max \begin{pmatrix} 1 + n + 5n \\ 1 + 3n + 3n \\ 1 + n + 2n \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 1 + 6n \\ 1 + 6n \\ 1 + 3n \end{pmatrix} \quad n > 0$$

$$\|A\|_\infty = 1 + 6n$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & n & 5n & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3n & 3n & 0 & 1 & 0 \\ 1 & n & 2n & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & n & 5n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2n & -2n & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3n & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & n & 5n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

$$\times n \quad \begin{matrix} 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & n & -n & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6n & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \\ \times n & 0 & 0 & n & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \times -6 & 0 & 0 & -6n & -2 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

$$\frac{2}{6n} - \frac{3}{6n}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6n} & \frac{1}{2n} & -\frac{1}{3n} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{array}\right)$$

Verifico

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{(matrix inverse)}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{6n} & \frac{1}{2n} & -\frac{1}{3n} \\ \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{6n} & \frac{1}{2n} & -\frac{1}{3n} \\ \frac{1}{3n} & 0 & -\frac{1}{3n} \end{bmatrix} \qquad \|A^{-1}\|_\infty = \max \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{6n} + \frac{3}{6n} + \frac{2}{6n} = \frac{1}{n} \\ \frac{2}{3n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

$$\frac{2}{3n} \leq \frac{2}{3}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 3$$

$$\therefore \ \text{Cond}_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$$

$$= (1+6n) \cdot 3$$

$$= 3 + 18n \ \underset{n>0}{\overset{\text{quiero}}{\geq}} \ C \cdot n$$

$$\Rightarrow \quad C \leq \frac{3}{n} + 18$$

Como $\frac{3}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \frac{3}{n} + 18 \xrightarrow{n \to \infty} 18$

$\Rightarrow$ elijo $C = 17$ (Podría elegir $C \in (0, 18]$)

Ejercicio 23. Sea $\boldsymbol{D}_n = \frac{1}{10} I_n$. Verificar que $\det(\boldsymbol{D}_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿$\boldsymbol{D}_n$ está mal condicionada? ¿Es el determinante un buen indicador de cuán cerca está una matriz de ser singular?

```
El determinante de una matriz diagonalizada es el producto de
los elementos de su diagonal.

A medida que n aumenta, aumenta la cantidad de 1/10 que se involucran
en ese producto, con lo cual, cuando n tiende a inf, ese producto
tiende a cero.
```

$$\det D_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{10} = \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

```
No está mal condicionada, el determinante no me dice nada sobre la
condición de la matriz, que en este caso, es 1.
```

Ejercicio 24. Sea $\boldsymbol{A}_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $\boldsymbol{A}_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $\operatorname{cond}_\infty(\boldsymbol{A}_n) \geq f(n)$ para alguna función $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

b) Probar que $\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A}_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

$n=2:\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ $\quad n=3:\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $\quad n=4:\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

a) qvq

$\operatorname{cond}_\infty A_n \geq c \cdot n^2$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

Result

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} \text{(ma}$$

Result

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Expanded form

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} \text{(matrix inverse)}$$

Result

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 12 & -6 & -8 \\ 3 & -6 & 15 & -12 \\ 4 & -8 & -12 & 16 \end{pmatrix}$$

Expanded form

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{15}{8} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1} \text{(matrix inver}$$

Result

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 22 & -6 & -8 & -10 \\ 3 & -6 & 30 & -12 & -15 \\ 4 & -8 & -12 & 36 & -20 \\ 5 & -10 & -15 & -20 & 40 \end{pmatrix}$$

Expanded form

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{22}{13} & -\frac{6}{13} & -\frac{8}{13} & -\frac{10}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{30}{13} & -\frac{12}{13} & -\frac{15}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{8}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{36}{13} & -\frac{20}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{10}{13} & -\frac{15}{13} & -\frac{20}{13} & \frac{40}{13} \end{pmatrix}$$

Prop:

$$\text{Cond } A_n \geq \frac{\| A_n \|}{\| A_n - B \|} \quad \forall B \text{ singular.}$$

Como A_n es de la forma

$n=2$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ $n=3$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $n=4$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

$$\| A_n \|_\infty = \| A_n \|_1 = n$$

Quiero un B singular /

$$\frac{\| A_n \|}{\| A_n - B \|} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$$\frac{n}{\| A_n - B \|} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$$\Rightarrow \quad \| A_n - B \| < n$$

Si $B = \begin{bmatrix} A_{n-1:n} \\ \hdashline 1 \quad 0 \cdots \frac{1}{n} \quad 0 \end{bmatrix}$ ↺ repito fila anterior

$$\Rightarrow \quad A_n - B = \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline 0 \quad 0 \cdots -1/n \quad 1/n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|A_n - B\|_\infty = \left|-\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\|A_n - B\|} = n \cdot \frac{n}{2} = \underbrace{\frac{n^2}{2}}_{O(n^2)} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

Con $\|\cdot\|_1$ elijo

$$B = \begin{bmatrix} A_{n:n-1} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/n \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

repito col.

y es todo igual.

Como

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A\|_1 \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|A\|_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|A\|_\infty \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|A\|_\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} n \leqslant \|A\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot n$$

$$\underbrace{n^{1/2} \leqslant \|A\|_2 \leqslant n^{3/2}}$$

$$\|A\|_2 \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

Como

$$\operatorname{Cond}_2 A = \underset{\longrightarrow \infty}{\|A\|_2} \cdot \underbrace{\|A^{-1}\|_2}_{>0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cond}_2 A \xrightarrow{n \to \infty} \infty$$

$$c \leq y \leq d$$

$$\frac{a}{y} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{y}$$

$$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$$