Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 5: Matrices hermitianas. Valores singulares.

Matrices hermitianas

Ejercicio 1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar una descomposición de Schur $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{UTU}^*$, con $\boldsymbol{U}$ unitaria y $\boldsymbol{T}$ triangular superior con los autovalores de la matriz $\boldsymbol{A}$ en la diagonal.

(b) Descomponer a la matriz $\boldsymbol{T}$ hallada en el ítem anterior como suma de una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz triangular superior $\boldsymbol{S}$ con ceros en la diagonal. Probar que $\boldsymbol{S}^j = 0$ para todo $j \geq 2$.

(c) Usar los ítems anteriores para calcular $\boldsymbol{A}^{10}$.

Ejercicio 2. Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ es hermitiana, entonces los elementos de la diagonal $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Dada $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ hermitiana, probar que existen matrices $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\boldsymbol{B}$ simétrica y $\boldsymbol{C}$ antisimétrica ($\boldsymbol{C}^t = -\boldsymbol{C}$) tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + i\boldsymbol{C}$.

Ejercicio 4. Dada $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ hermitiana y $S \subset K^n$ un subespacio invariante por $\boldsymbol{A}$, es decir $\boldsymbol{Av} \in S$ para todo $\boldsymbol{v} \in S$. Probar que $S^\perp$ es invariante por $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 5. Probar que $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ es hermitiana y definida positiva si y solo si $\boldsymbol{A}$ es unitariamente semejante a una matriz diagonal real positiva con elementos de la diagonal positivos.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

(b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.

Valores singulares

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de $\boldsymbol{A}$.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Probar que para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|\boldsymbol{Av}\|_2 \geq 15\|\boldsymbol{v}\|_2$.

Ejercicio 10. Mostrar que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene un valor singular nulo si y sólo si tiene un autovalor nulo.

Ejercicio 11. Sea que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$ donde $\boldsymbol{I}_n$ es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 12. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de $\boldsymbol{A}$ si y solo si la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* & -\sigma\boldsymbol{I}_n \\ -\sigma\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ es singular, donde $\boldsymbol{I}_n$ es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Ejercicio 13. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, probar que los valores singulares de $\boldsymbol{A}^t$, $\bar{\boldsymbol{A}}$ y $\boldsymbol{A}^*$ son iguales a los de $\boldsymbol{A}$.

Ejercicio 14. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

(b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1 matrices adecuadamente elegidas de manera de obtener una matriz $\boldsymbol{A}_s$ que satisface:

$$\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: $\boldsymbol{A}_s$ resulta ser la mejor aproximación a $\boldsymbol{A}$ (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

Ejercicio 15. Sea

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

(b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

Ejercicio 16. Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{V}}^t$. Se define la pseudo-inversa de $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}^\dagger = \hat{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{U}}^t$.

(a) Verificar que $\boldsymbol{A}^\dagger$ satisface las siguientes propiedades:

i. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

ii. $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger}$

iii. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger})^t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}$

iv. $(\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})^t = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}$

(b) Probar que si dos matrices $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ satisfacen las 4 propiedades del ítem anterior, entonces verifican $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2$ y $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}$.

(c) Probar que la pseudo inversa de A es única.

Ejercicio 17. Caracterizar geométricamente y graficar la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$$

por la transformación $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18. Hallar, si existe, una matriz A con coeficientes reales y del tamaño adecuado para que los valores singulares no nulos de $\boldsymbol{A}$ sean $\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$,

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compresión de Imágenes

El resultado del ejercicio 14 se puede aprovechar para comprimir imágenes. La idea es la siguiente: dada una imagen (en principio, en blanco y negro), se puede representar a través de una matriz en la que cada elemento indica la intensidad de color del pixel. El objetivo de los siguientes ejercicios es estudiar esta aplicación.

Ejercicio 19. Descargar la imagen `quijote.jpg` y utilizar el comando `imread` de la librería `matplotlib.pyplot` para cargarla. Imprimir el resultado. Mostrar la imagen utilizando el comando `imshow`. Probablemente, la gama de colores por defecto no sea en blanco y negro. Ejecutar el comando: `from matplotlib import cm` y volver a correr `imshow`, esta vez con la opción `cmap="gray"`. (Buscando `matplotlib colormap` se encuentran fácilmente distintos mapas de colores para graficar).

Ejercicio 20. Escribir un programa que reciba como input una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y un entero positivo r y:

- Calcule la descomposición en valores singulares $\boldsymbol{A}$, utilizando el comando `np.linalg.svd` o el comando `scipy.linalg.svd`. Ambos comandos devuelven $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{\min\{n,m\}}$, de manera tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{V}$.
- Devuelva: una tupla con la dimensión original de la matriz $\boldsymbol{A}$ (n, m), las matrices $\tilde{\boldsymbol{U}} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ y $\tilde{\boldsymbol{V}} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ que surgen de eliminar de $\boldsymbol{U}$ y $\boldsymbol{V}$ los vectores singulares con índice mayor a r y el vector de valores singulares $\tilde{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{R}^r$, también recortado.

Ejercicio 21. Escribir un programa que recontruya la matriz a partir del output del programa anterior. Es decir, que:

- Reciba el tamaño (n, m), las matrices $\tilde{\boldsymbol{U}}$ y $\tilde{\boldsymbol{V}}$ el vector $\tilde{\boldsymbol{s}}$.
- Amplie las matrices con ceros generando $\boldsymbol{U}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{V}' \in \mathbb{R}^{m\times m}$; y ponga $\tilde{\boldsymbol{s}}$ en la diagonal de una matriz $\boldsymbol{\Sigma}' \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
- Devuelva la matriz $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{\Sigma}'\boldsymbol{V}'$ (que es la mejor aproximación a $\boldsymbol{A}$ entre las matrices de rango r).

Ejercicio 22. Aplicar los programas anteriores a la imagen del ejemplo (y eventualmente a otras). El output del primer programa correspondería a la imagen comprimida, sólo se almacenan: una tupla con dos números ((n, m)), r vectores de longitud n, r vectores de longitud m y r valores singulares. El segundo programa *abre* los datos comprimidos y muestra la imagen. Naturalmente, la compresión implica la pérdida de información (y por lo tanto, de calidad en la imagen). Experimentar con distintos valores de r.

Se puede estudiar la calidad de la aproximación a través del error relativo:

$$\frac{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_r\|_2}{\|\boldsymbol{A}\|_2} = \frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1}.$$

Para analizar la proporción de compresión se puede calcular el cociente entre la cantidad datos almacenados por la matriz original (mn) y los datos almacenados por las matrices comprimidas ($(m+n)r + r + 2$).

Calcular el error relativo de aproximación y la proporción de compresión para distintos valores de r.

Ejercicio 23. La misma idea puede utilizarse con imágenes en color. Al leer una imagen color, imread genera un array A tridimensional, de $n \times m \times 3$. $A[:, :, 0]$, $A[:, :, 1]$ y $A[:, :, 2]$ son los canales RGB (en ese orden) de la imagen. Experimentar con alguna imagen color realizando la compresión en cada una de las componentes (puede ser con parámetros r_i distintos) y reensamblando el array tridimensional.