Matrices simétricas

Def: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice simétrica si $A = A^t$, es decir, se cumple que $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$.

Cuando estamos en $\mathbb{C}$, las llamamos Hermitianas y cumplen que $A^* = A$ donde $A^* = \overline{A}^t$, y $\overline{A}$ consiste en conjugar cada elemento: $(\overline{A})_{ij} = \overline{a_{ij}}$

- Observar que el caso Hermitiano es más general e incluye a las matrices simétricas.

- Observar que las matrices Hermitianas deben ser cuadradas.

Matrices definidas positivas

Def: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice definida positiva si
$\forall x \neq 0 : x^t A x > 0$ (con $x \in \mathbb{R}^n$)

Veamos algunos ejemplos:

- matriz identidad: $x^t I x = x^t x = \|x\|_2^2 > 0$ para todo $x \neq 0$

- matriz diagonal $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + 2x_2^2 > 0$$

para todo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- En general trabajaremos con matrices simétricas definidas positivas pero veamos que también existen matrices definidas positivas <u>no simétricas</u>, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 - x_1 x_2 + x_2 x_1 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Si una matriz cuadrada no necesariamente simétrica es definida positiva, su traspuesta también es def. pos. . Sea $x \neq 0$:

$$0 < x^t A x = (x^t A x)^t = (Ax)^t (x^t)^t = x^t A^t x$$

observar que $x^t A x \in \mathbb{R}$ entonces podemos trasponerlo y no cambia.

- Una de las propiedades más importantes de las matrices def. pos. es que son inversibles. Efectivamente, sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz def. pos. Supongamos que no es inversible, entonces $\exists x \neq 0 \;/\; Ax = 0$

$\Longrightarrow x^tAx = 0$ abs!! (pues A es def. pos.)

- Todos los elementos de la diagonal de una matriz def. pos. son positivos

Se cumple que $x^tAx > 0$ para todo $x \neq 0$

Consideremos $x = e_j$ (canónico j-ésimo)

$$e_j^t \underbrace{A e_j}_{col_j(A)} = e_j^t \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{jj} > 0 \quad \text{pues } A \text{ es def. pos.}$$

- Cualquier submatriz principal de una matriz def. pos. es también def pos.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ def pos escrito por bloques como

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k} \\ A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)} \\ \text{para } 1 \leq k \leq n-1 \end{array}$$

Tomando algún $k \in [1, n)$ en A_{11} tenemos cualquier submatriz principal de A.

Consideremos $x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\tilde{x} \in \mathbb{R}^k$ y $\tilde{x} \neq 0$

$$\Rightarrow (\tilde{x}^t \; 0) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix} = (\tilde{x}^t \; 0) \begin{pmatrix} A_{11}\tilde{x} \\ A_{21}\tilde{x} \end{pmatrix} =$$

$$= \tilde{x}^t A_{11} \tilde{x} > 0$$

pues $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y A es def. pos.

Todas estas propiedades nos aseguran la existencia de la descomposición LU para matrices (simétricas) definidas positivas.

Si A es (simétrica) def. pos. sabemos que es inversible. También podemos asegurar que todas las submatrices principales son inversibles (pues son def. pos.) y podemos aplicar el teorema de existencia de la descomp. LU.

Veamos otra propiedad interesante:

cada paso de eliminación gaussiana mantiene la propiedad de simétrica definida positiva sobre la submatriz que aún no fue triangulada.

Es decir, suponiendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sim. def. pos.

$$A \xrightarrow[\text{elim. gaussiana}]{1^{\text{er}}\text{ paso}} \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A}_{22} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Luego del 1er paso $\tilde{A}_{22}$ se mantiene sim. def. pos.

Veamos que esto se cumple para el primer paso y podremos asegurar inductivamente que la propiedad de ser sim. def. pos se mantiene para todos los pasos.

consideremos $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & b^t \\ \hline b & A_{22} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

una matriz simétrico def. pos. con $b = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La siguiente matriz es lo que utilizamos en el primer paso de triangulación.

$$L_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -\frac{b}{a_{11}} & I \end{array}\right)$$

Sabemos que $a_{11} \neq 0$ por ser A sim. def. pos.

Verifiquemos:

$$L_1 A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -\frac{b}{a_{11}} & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & b^t \\ \hline b & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & b^t \\ \hline 0 & A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}} \end{array}\right)$$

$\tilde{A}_{22} = A_{22} - \dfrac{bb^t}{a_{11}}$ es la matriz que resulta luego del primer paso de elim. gaussiana y que queremos probar que sim. def pos.

Efectivamente es simétrica:

$$\left(A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}}\right)^t = A_{22}^t - \left(\frac{bb^t}{a_{11}}\right)^t = A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}}$$

Ahora multipliquemos a derecha por L_1^t y veamos que el bloque (2,2) se mantiene igual:

$$(L_1 A) L_1^t = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & b^t \\ \hline 0 & A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & -b^t/a_{11} \\ \hline 0 & I \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ llegamos a que $L_1 A L_1^t = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}} \end{array}\right)$

Usemos el siguiente lema (ejercicio de la práctica!!)

Lema Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces A es sim. def. pos y B es inversible si y sólo si la matriz $B^t A B$ es sim. def. pos.

Aplicando el lema anterior, como A es sim. def. pos y L_1 es inversible entonces podemos asegurar que

$$L_1 A L_1^t = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}} \end{array}\right) \text{ es sim. def. pos.}$$

Como $L_1 A L_1^t$ es sim. def. pos entonces

$x^t L_1 A L_1^t x > 0 \quad \forall x \neq 0$,

en particular sea $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$ con $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{x} \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \tilde{x}^t \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{x}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \left(A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}}\right) \tilde{x} \end{pmatrix} =$$

$$= \tilde{x}^t \left(A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}}\right) \tilde{x} > 0$$

$\Rightarrow A_{22} - \frac{bb^t}{a_{11}}$ es sim. def. pos.

#

Resumiendo

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es sim. def. pos. vimos que podemos asegurar la existencia de la factorización LU y que además el algoritmo de elim. gaussiana mantiene la prop. de sim. def. pos. sobre la submatriz que aún resta triangular.

Consideremos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sim. def. pos

$\Rightarrow$ $\exists\, L$ triangular inferior (con 1's en la diag)
$\exists\, U$ triangular superior
ambas inversibles tal que $A = LU$

A es simétrica $\Rightarrow A^t = A$

$$\Rightarrow (LU)^t = LU$$
$$U^t L^t = LU$$

Vimos que A es inversible $\Rightarrow L$ y U también lo son

Multipliquemos por L^{-1} a izquierda y por $(L^t)^{-1}$ a derecha de la igualdad.

$$\Rightarrow \quad L^{-1}U^tL^t = \overbrace{L^{-1}L}^{I}U \qquad (\text{por } L^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}U^tL^t = U$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}U^t\underbrace{L^t(L^t)^{-1}}_{I} = U(L^t)^{-1} \qquad (\text{por } (L^t)^{-1})$$

$$\Longrightarrow \quad L^{-1}U^t = U(L^t)^{-1}$$

Observamos cada término:

$$\underbrace{\underbrace{L^{-1}}_{\substack{\text{triang.}\\ \text{inf.}}}\underbrace{U^t}_{\substack{\text{triang.}\\ \text{inf.}}}}_{\text{triang. inf}} = \underbrace{\underbrace{U}_{\substack{\text{triang.}\\ \text{sup.}}}\underbrace{(L^t)^{-1}}_{\substack{\text{triang.}\\ \text{sup.}}}}_{\text{triang. sup.}}$$

Tenemos una matriz triang. inferior igualada a una triang. superior $\Rightarrow$ debe ser diagonal

$$\Longrightarrow \quad L^{-1}U^t = \underbrace{U(L^t)^{-1} = D}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = DL^t} \qquad \Longrightarrow \quad A = L\underbrace{DL^t}_{U}$$

Veamos que como A es sim. def. pos. entonces los elementos de la diagonal de D son positivos.

$x^t L D L^t x > 0 \quad \forall x \neq 0$ pues A es sim. def. pos.

tomemos x tal que $L^t x = e_i \Rightarrow x = L^{-t} e_i$

Luego, $x^t L D L^t x = e_i^t L^{-1} L D L^t L^{-t} e_i =$

$= e_i^t D e_i = d_{ii} > 0$

Definimos $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & & 0 \\ & \sqrt{d_{22}} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}$ diagonal

$\Rightarrow D = \sqrt{D}\sqrt{D}$

Luego, $A = L D L^t = \underbrace{L\sqrt{D}}_{\tilde{L}}\,\underbrace{\sqrt{D}\,L^t}_{\tilde{L}^t} = \tilde{L}\,\tilde{L}^t$

FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY

Acabamos de probar que toda matriz simétrica definida positiva se puede factorizar como $A = LL^t$ con L triangular inferior con diagonal positiva. A esta factorización la llamamos factorización de CHOLESKY

Veamos que también vale la recíproca: toda matriz que tiene fact. de CHOLESKY es simétrica def. pos.

Si $A = LL^t \Rightarrow A^t = (LL^t)^t = (L^t)^t L^t = LL^t$

$\Rightarrow$ A es simétrica

Veamos si es def. pos.: sea $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

$\Rightarrow x^t L L^t x = (x^t L)(L^t x) = (L^t x)^t (L^t x) = \|L^t x\|_2^2$

L es triang. inf. y $l_{ii} > 0 \Rightarrow L$ es inversible

$\Rightarrow L^t x \neq 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow \underline{\|L^t x\|_2^2 > 0 \ \forall x \neq 0}$

Luego llegamos al siguiente teorema

Teorema Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A es sim. def. positiva si y solo si existe $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular inferior con diagonal positiva tal que $A = LL^t$ (factorización de Cholesky)

Además, la factorización es única

Probemos la unicidad por inducción en n (n es la dimensión de la matriz)

Para $n=1$ (caso base) vemos que claramente se cumple:

$A = [a_{11}]$ con $a_{11} > 0$ pues A es sim. def. pos.

$\Rightarrow A = \underbrace{\sqrt{a_{11}}}_{L} \cdot \underbrace{\sqrt{a_{11}}}_{L^t}$ y esta descomp. es única si pedimos diagonal positiva.

Supongamos que la propiedad vale para n (es decir, cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene única fact. de CHOL.)

Veamos que se cumple para $n+1$.

$\Rightarrow$ Sea $B = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1\times n+1}$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

una matriz sim. def. pos.

Sabemos que B tiene fact. de CHOLESKY que será de la pinta:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ \ell^t & \tilde{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^t & \ell \\ 0 & \tilde{\ell} \end{pmatrix}$$

con $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\ell \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\ell} \in \mathbb{R}$

y L triangular inf. con diagonal positiva y $\tilde{\ell} > 0$

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ \ell^t & \tilde{\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^t & \ell \\ 0 & \tilde{\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LL^t & L\ell \\ \ell^t L^t & \ell^t \ell + \tilde{\ell}^2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ tenemos las siguientes ecuaciones igualando bloque a bloque

$$\begin{cases} ① \ A = LL^t \\ ② \ b = L\ell \\ ③ \ b^t = \ell^t L^t \\ ④ \ c = \ell^t \ell + \tilde{\ell}^2 \end{cases}$$

① tenemos A igualado a un producto de matri triang. inf. (con diagonal positiva) por su traspuesta.

$\rightarrow$ LL^t es una fact. de CHOLESKY para A!!

Por hipotesis inductiva esta factoriz. es única! (pues dijimos que la propiedad vale para matrices sim. def. pos. de tamaño $n \times n$)

Ahora veamos que el resto de las componentes de la fact. de CHOLESKY se pueden calcular de una única forma.

② $b = L\,l$

aquí L es una matriz inversible luego, el sistema $L\,l = b$ tiene única solución: $l = L^{-1}b$

③ $b^t = l^t L^t$ esta ecuación es la misma que en ② si trasponemos de ambos lados de la igualdad.

④ $c = l^t l + \tilde{l}^2 \Rightarrow \tilde{l}^2 = c - l^t l$

$\Rightarrow \tilde{l} = \sqrt{c - l^t l}$ observar que también podría tomarse $-\sqrt{c - l^t l}$ como valor de $\tilde{l}$ pero si pedimos diagonal positiva en la factorización $\tilde{l}$ debe valer $\sqrt{c - l^t l}$

También tenemos el siguiente criterio para determinar si una matriz simétrica es definida positiva

teorema (criterio de Sylvester)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica es definida positiva si y solo si

$$\det\big(\underbrace{A(1:k,1:k)}_{\text{submatriz principal de orden } k}\big) > 0 \quad \forall k = 1,\dots,n$$

Veamos un ejemplo con la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$ A es simétrica.

Usemos el criterio de Sylvester para chequear si es def. positiva.

$$\left.\begin{array}{l}\det([2]) = 2 > 0 \\[2ex] \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = 2 > 0 \\[2ex] \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 6 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{es sim. def. pos.}$$

Entonces podremos calcular su fact. de CHOLESKY

Vimos que podemos comenzar con su fact. LU

triangulo 1^{ra} columna con $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

triangulo 2^{da} columna con $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L_2 (L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode a : $L_2 L_1 A = U$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

Notons que $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^t}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

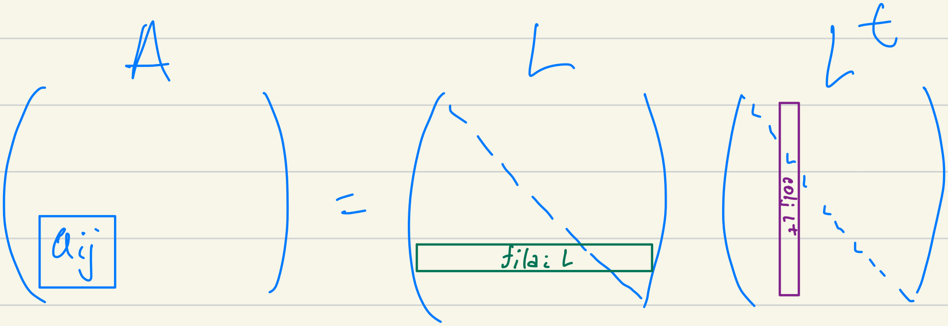
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{\tilde{L}}\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{L}^t} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \tilde{L}\,\tilde{L}^t$$

Algoritmo

Si bien se puede construir la fact. de Cholesky a partir de LU, otras derivaciones son posibles para construir un algoritmo que calcule cada elemento de L.

Podemos derivar otro a partir de que cada a_{ij} es el producto interno entre la fila i de L y la columna j de L^t



$$a_{ij} = \text{fila}_i(L) \cdot \text{columna}_j(L^t)$$

$$a_{ij} = \text{fila}_i(L) \cdot \text{fila}_j(L)$$

Entonces: $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk}$

Pero veamos que sólo necesitamos realizar los cálculos para l_{ij} con $i \geq j$ (es decir, para la parte triang. inferior de L pues $l_{ij} = 0$ para $j < i$)

Y como $i \geq j$ la sumatoria sobre k la podemos realizar hasta j pues $l_{jk} = 0$ para $k = j+1, \ldots, n$.

$$\Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} \quad \text{con } 1 \leq j \leq i \leq n$$

Separando el último término $k = j$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} + l_{ij} l_{jj}$$

De la ecuación anterior podemos sepa-
rar el caso $i=j$ del resto y despejar
l_{jj} y l_{ji} obteniendo así nuestro
algoritmo:

Para $j=1,\dots,n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

Para $i=j+1,\dots,n$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) \Big/ l_{jj}$$

Como la matriz A es simétrica y solo se nece-
sita calcular la parte triangular inf. de L, po-
dríamos usar la misma matriz A para ir
guardando los elementos de L

Este algoritmo requiere $\simeq \frac{1}{3} n^3$ operaciones

Comentarios para el caso complejo

Así como aseguramos la existencia de la fact. de CHOLESKY para cualquier matriz simétrica definida positiva, también podemos hacer la extensión al campo complejo para matrices hermitianas.

Así como $(AB)^t = B^t A^t$, también se cumple que $(AB)^* = B^* A^*$ y se puede probar que si A es hermitiana entonces $\forall x \in \mathbb{C}^n : x^* A x \in \mathbb{R}$

De esta forma diremos que una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitiana que satisface $\forall x \in \mathbb{C}, x \neq 0 : x^* A x > 0$ es una matriz definida positiva.

Podemos hacer un desarrollo similar para matrices en $\mathbb{C}$ y probar que cualquier matriz hermitiana def. pos. tiene fact. de CHOLESKY $A = LL^*$ con $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ triangular inferior y diagonal real positiva.