

# Álgebra Lineal Computacional

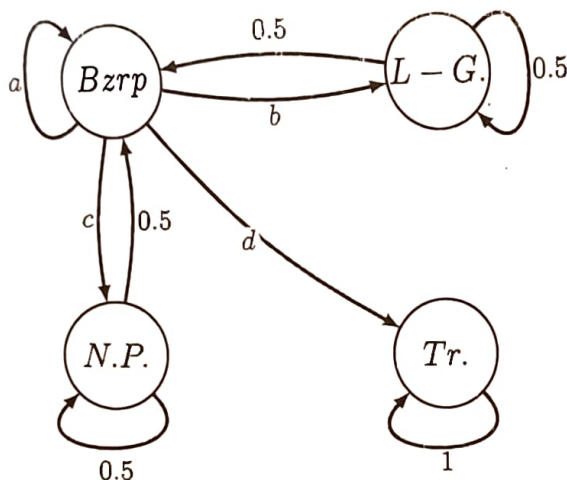
## Primer Parcial – 18 de octubre de 2022

(2.5) Ejercicio 1. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \dots & n^2 \\ 0 & \frac{1}{n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

- (a) (1,5 pts.) Probar que  $\text{Cond}_\infty(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . ✓  
 (b) (1 pt.) Probar que  $\text{Cond}_2(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . ✓

(2) Ejercicio 2. Una aplicación para escuchar música estudia un extraño comportamiento en las elecciones musicales de sus usuarios. Cada dos minutos cambian entre Trueno, Bizarrap, Nathy Peluso y L-Gante según el diagrama:



Por ejemplo, de quienes están escuchando a L-Gante keloké, en dos minutos el 50% pasará a escuchar a Bizarrap y el otro 50% seguirá escuchando a L-Gante.

Sabiendo que la matriz  $P$  que representa el proceso de transición es de Markov y que  $v = \frac{1}{8}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
  
 Bzrp
   
 L-Gante
   
 NP
   
 Trueno

es un estado de equilibrio,

- (a) (1 pt.) Dar la matriz de transición  $P$  y determinar si existe  $P^\infty$ . ✓  
 (b) (1,5 pts.) Si en el instante inicial del estudio hay 300 usuarios escuchando Bzrp, 100 usuarios escuchando L-Gante y 300 usuarios escuchando a Nathy Peluso ¿Cuántos usuarios aproximadamente estarán escuchando a Nathy Peluso a los 20 minutos?

2.5 Ejercicio 3. Sea  $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha + 2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ \alpha & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) (1 pt.) Hallar los valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para que  $A$  sea simétrica y  $\lambda = 0$  sea autovalor de  $A$ .
- (b) (1,5 pts.) Para el valor de  $\alpha$  hallado en (a), dar una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  formada con autovectores de  $A$ .

1.5 Ejercicio 4. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \times 10^{-3} \\ 1 & 1 \times 10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  y sea  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Se quiere resolver el sistema  $Ax = b$  con aritmética de punto flotante de base 10 de dos dígitos de mantisa y redondeo. Si  $\tilde{x}$  es la solución que da la máquina y  $\tilde{b} = A\tilde{x}$  (exacto), se requiere que  $\|\tilde{b} - b\|_\infty < 1 \times 10^{-2}$ .

- (a) (1 pt.) Mostrar que si se resuelve con eliminación gaussiana sin pivoteo la solución  $\tilde{x}$  obtenida no cumple la condición requerida.
- (b) (1,5 pts.) Proponer una matriz de permutación  $P$  y mostrar que la solución obtenida numéricamente de  $PAx = Pb$  sí satisface la cota requerida.

C. 9.9.9