Aritmética de punto flotante

Ejercicio 6. Algunos experimentos: Realizar las siguientes operaciones en `Python`. En todos los casos, pensar: ¿cuál es el resultado esperado? ¿coincide con el obtenido? ¿a qué se debe el problema (si lo hay)? (Notamos ε al épsilon de la máquina. Puede obtenerse importando la librería `numpy` como `np` y ejecutando el comando np.finfo(np.float).eps).

a) Tomando p =1e34, $q = 1$, calcular $p + q - p$.

b) Tomando $p = 100$, q =1e−15, calcular $(p + q) + q$ y $((p + q) + q) + q$. Comparar con $p + 2q$ y con $p + 3q$ respectivamente.

c) `0.1+0.2 == 0.3`

d) `0.1+0.3 == 0.4`

e) 1e−323

f) 1e−324

g) $\frac{\varepsilon}{2}$

h) $(1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}$

i) $1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$

j) $((1 + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2}) - 1$

k) $(1 + (\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2})) - 1$

l) $\operatorname{sen}(10^j\pi)$ para $1 \le j \le 25$.

m) $\operatorname{sen}(\pi/2 + \pi 10^j)$ para $1 \le j \le 25$.

```
#a)
p=1e34
q=1
```

```
print(p)
print(q)
```

```
1e+34
1
```

```
p+q-p
```

```
0.0
```

```
#b)
p=100
q=1e-15
```

```
(p+q)+q
```

```
100.0
```

```
((p+q)+q)+q
```

```
100.0
```

```
p+2*q
```

```
100.0
```

```
p+3*q
```

```
100.0
```

```
p+300*q
```

```
100.0000000000003
```

```
#c)
```

```
0.1+0.2==0.3
```

```
False
```

```
0.1+0.2
```

```
0.30000000000000004
```

```
#d)
0.1+0.3==0.4
```

```
True
```

```
#e)
1e-323
```

```
1e-323
```

```
#f)
1e-324
```

```
0.0
```

```
#g)
import numpy as np
```

```
np.finfo(np.float)
```

```
finfo(resolution=1e-15, min=-1.7976931348623157e+308, max=1.7976931348623157e+308, dtype=float64)
```

```
np.finfo(np.float).eps
```

```
2.220446049250313e-16
```

```
eps = np.finfo(np.float).eps
eps
```

```
2.220446049250313e-16
```

```
x=eps/2.
x
```

```
1.1102230246251565e-16
```

```
#h)
(1+eps/2)+eps/2
```

```
1.0
```

```
#i)
1+(eps/2 + eps/2)
```

```
1.0000000000000002
```

```
1+(eps/2 + eps/2)-1
```

```
2.220446049250313e-16
```

```
#j)
((1+eps/2)+eps/2)-1
```

```
0.0
```

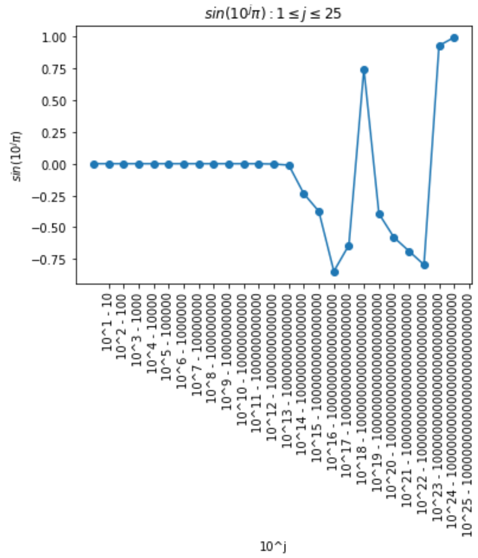
```
#k)
(1 + (eps/2 + eps/2)) - 1
```

```
2.220446049250313e-16
```

```python
#l)
res = []
for j in range(1, 26):
    x = np.sin(10**j*np.pi)
    print(j, x)
    res.append(x)
```

```
1 -1.2246467991473533e-15
2 1.9643867237284720e-15
3 -3.2141664592756335e-13
4 -4.85682353956849e-13
5 -3.3960653996302193e-11
6 -2.231912181360871e-10
7 5.620555424855643e-10
8 -3.9082928156687315e-08
9 -3.3201412914529495e-08
10 -2.2393627619559233e-06
11 -1.4764233087791559e-05
12 -0.00026971264011324254
13 -0.0026971231637969895
14 -0.011346020891205282
15 -0.2362090532517409
16 -0.3752128900123344
17 -0.8479696810401983
18 -0.6416534819105048
19 0.7463367130158111
20 -0.3940709604247648
21 -0.5808054397535704
22 -0.6886746870200211
23 -0.7965162588457232
24 0.9301407542552305
25 0.9948086285918382
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(res, marker="o")
plt.title(r"$sin(10^j \pi) : 1 \leq j \leq 25$")
plt.xlabel("10^j")
plt.ylabel(r"$sin(10^j \pi)$")
plt.xticks(ticks=range(1,26),
           labels=[f"10^{j} - {10**j}" for j in range(1,26)],
           rotation="vertical")
plt.show()
print("Obs: El seno de cualquier múltiplo de pi debería dar cero")
```

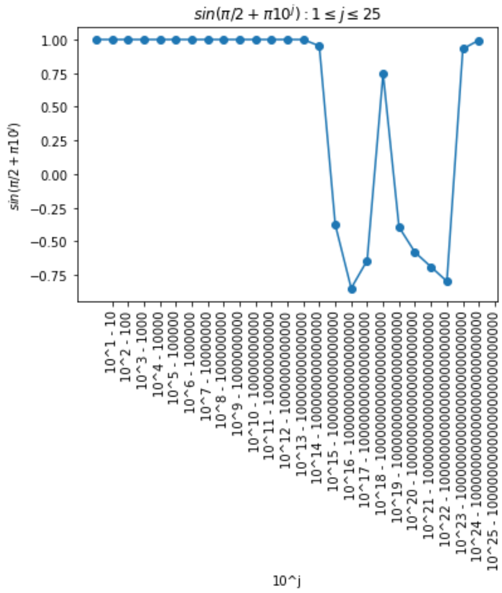



```
Obs: El seno de cualquier múltiplo de pi debería dar cero
```

```python
#m)
res = []
for j in range(1, 26):
    x = np.sin(np.pi/2 + np.pi * 10**j)
    print(x)
    res.append(x)
```

```
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
0.9999999999999984
0.9999999999999916
0.9999999999987206
0.9999999999468543
0.999999964819047
0.9999949407725442
0.9998070905094508
0.9525593659368664
-0.3752128900123344
-0.8479696810401983
-0.6416534819105048
0.7463367130158111
-0.3940709604247648
-0.5808054397535704
-0.6886746870200211
-0.7965162588457232
0.9301407542552305
0.9948086285918382
```

```python
plt.plot(res, marker="o")
plt.title(r"$sin(\pi/2 + \pi 10^j) : 1 \leq j \leq 25$")
plt.xlabel("10^j")
plt.ylabel(r"$sin(\pi/2 + \pi 10^j)$")
plt.xticks(ticks=range(1,26),
           labels=[f"10^{j} - {10**j}" for j in range(1,26)],
           rotation="vertical")
plt.show()
print("Obs: El seno de cualquier múltiplo de 3/2 pi debería dar 1")
```




```
Obs: El seno de cualquier múltiplo de 3/2 pi debería dar 1
```

Ejercicio 7. Mostrar que una serie divergente de términos que tienden a 0 (e.g.: $\sum_n \frac{1}{n}$) podría resultar convergente en aritmética de punto flotante. ¿Qué debería ocurrir para que el resultado numérico sea Inf? ¿Cuál es la mejor estrategia para realizar numéricamente una sumatoria de términos positivos?

Ejercicio 8. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3-\varepsilon & 2+\varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

a) Tomando $\varepsilon = 0.001$, resolver el sistema $Ax = b$ mediante eliminación gaussiana sin intercambio de filas usando aritmética de punto flotante en base 10 con 3 dígitos de mantisa y sistema de redondeo.

b) Para $\varepsilon = 0.001$, hallar la solución exacta x del sistema y comparar con la solución del ítem anterior ¿Cómo explica la diferencia?

Ejercicio 9. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \quad \text{y } b = \begin{pmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{n}{3} \end{pmatrix},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

a) Para $n = 10^4$, resolver el sistema $Ax = b$ por eliminación gaussiana sin intercambio de filas utilizando aritmética de 4 dígitos con redondeo (en base 10).

b) Verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la solución exacta del sistema es $x = \left(0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ y comparar, para $n = 10^4$, la solución aproximada con la solución exacta.