Repaso Gram-Schmidt.

Dada una base $B=\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de vectores de algún subespacio $S \leq \mathbb{K}^n$, buscamos una base U, $U=\{u_1, \dots, u_k\}$ tal que U sea un conjunto ortogonal y que $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ genere S.

Vamos a hacerlo de una forma particular. Queremos: $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$$
$$\vdots$$
$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$$

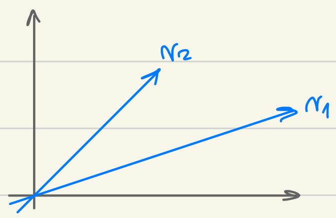
- Veamos un ejemplo en $\mathbb{R}^2$

Queremos $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = \mathbb{R}^2$$

En $\mathbb{R}^2$ podemos pensar que necesitamos proyectar un vector sobre otro.

Consideremos $\{v_1, v_2\}$ dos vectores linealmente independientes como los del siguiente gráfico

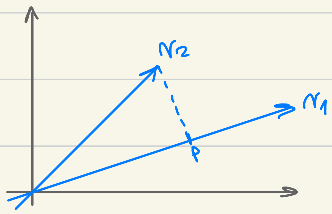


Inicialmente podemos considerar $u_1 = v_1$

$\Rightarrow \langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$

El objetivo ahora es elegir un u_2 que cumpla que $u_1 \perp u_2$ y $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$

Podemos tomar un punto p sobre la recta de tal forma que $v_2 - p \perp v_1$



p se encuentre sobre la recta $\Rightarrow p = \alpha v_1$

$$\Rightarrow v_1 \perp v_2 - p \Rightarrow v_1^t (v_2 - \alpha p) = 0$$

$$\Rightarrow v_1^t v_2 - \alpha v_1^t p = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{v_1^t v_2}{v_1^t v_1}$$

$$\Rightarrow u_2 = v_2 - p = v_2 - \underbrace{\left(\frac{v_1^t v_2}{v_1^t v_1}\right) v_1}_{\text{proyección de } v_2 \text{ sobre } \langle v_1 \rangle}$$

Llamaremos $P_{u_1}(v_2)$ a la proyección de v_2 sobre $\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$

$$P_{u_1}(v_2) = \underbrace{\left(\frac{u_1^t v_2}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} u_1 = u_1 \underbrace{\left(\frac{u_1^t v_2}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\left(\frac{u_1 u_1^t}{u_1^t u_1}\right)}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} v_2$$

$\leftarrow$ matriz de proyección

OBS si estamos en $\mathbb{C}$:

$$P_{u_1}(v_2) = \left(\frac{u_1^* v_2}{u_1^* u_1}\right) u_1$$

se cumple

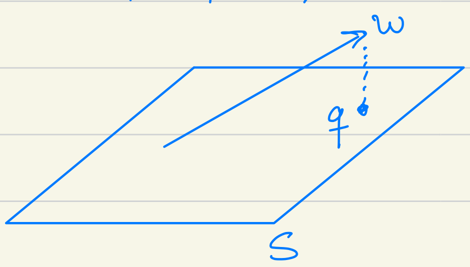
$u_2 \perp u_1$

$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

Esta forma de restar a un vector su proyección sobre un subespacio para obtener un vector ortogonal al subespacio funciona para más dimensiones

Sea $C = \{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonal del subespacio $S = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

Buscamos proyectar ortogonalmente w sobre S



Definimos $q = P_{u_1}(w) + P_{u_2}(w) + \cdots + P_{u_k}(w)$

Se cumple:
1) $q \in S$
2) $w - q \perp S \quad \forall s \in S$

1) Se cumple claramente pues

$$q = \frac{u_1^* w}{u_1^* u_1} u_1 + \dots + \frac{u_k^* w}{u_k^* u_k} u_k$$ es una

combinación lineal de elementos de S ✓

2) veamos que $u_j \perp w - q$ para $1 \leq j \leq k$

$$u_j^* (w - q) = u_j^* \left(w - \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(w) \right) =$$

$$= u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} u_j^* P_{u_i}(w) = u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} u_j^* \left(\frac{u_i^* w}{u_i^* u_i} \right) u_i$$

$$= u_j^* w - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{u_i^* w}{u_i^* u_i} \right) \underbrace{u_j^* u_i}_{=0 \text{ si } j \neq i} =$$

$$= \cancel{u_j^* w} - \cancel{\frac{u_j^* w}{u_j^* u_j} \cdot u_j^* u_j} = 0$$ ✓

Luego, si q es ortogonal a cada componente de la base C que generan entonces q es ortogonal a cualquier combinación de ellos. Es decir, a cualquier $s \in S$.

Llamamos $P_S(w) = \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(w)$

a la proyección de w sobre el subesp. S.

Vimos que a partir de una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ podemos "ortogonormalizarla" con Gram-Schmidt y obtener una nueva base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ que cumple:

$\langle v_1 \rangle = \langle q_1 \rangle$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle$

$\vdots$

$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle$

Esto nos permite escribir cada v_i como combinación lineal de los q_i:

$$\langle v_1 \rangle = \langle q_1 \rangle \Rightarrow v_1 = r_{11} q_1$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1, q_2 \rangle \Rightarrow v_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2$$

$$\vdots$$

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle q_1, q_2, \dots, q_n \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_n = r_{1n} q_1 + r_{2n} q_2 + \dots + r_{nn} q_n$$

Reescribamos lo anterior de forma matricial

$$\left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, v_n \right) = \underbrace{\left(q_1 \,\middle|\, q_2 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, q_n \right)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}}_{R}$$

con $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz "ortogonal"

$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz triangular superior con $r_{ii} \neq 0$

FACTORIZACION QR

Matrices ortogonales

Sea $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada.
Dicimos que Q es una matriz ortogonal si cumple cualquiera de las siguientes propiedades (ver ejercicio 18 - Práctico 3)

① $Q^{-1} = Q^t$
② Las columnas de Q forman una b.o.n
③ Las filas de Q forman una b.o.n
④ $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Cualquiera de estas propiedades es una definición válida de matriz ortogonal.

En $\mathbb{C}^{n \times n}$ las llamamos matrices unitarias y reemplazamos la propiedad ① por $Q^{-1} = Q^*$ siendo $Q^* = \bar{Q}^t$

Sea Q con columnas $q_1, \dots, q_n$:

$$Q = \left(q_1 \middle| q_2 \middle| \cdots \middle| q_n \right)$$

Usando ① obtenemos la siguiente igualdad:

$$\underline{Q^t Q = I}$$

$$\begin{pmatrix} q_1^t \\ \hline q_2^t \\ \hline \vdots \\ \hline q_n^t \end{pmatrix} \left(q_1 \middle| q_2 \middle| \cdots \middle| q_n \right) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Si igualamos la posición (i,j) del resultado del producto a la izquierda de la igualdad con la posición (i,j) de la matriz a la derecha de la igualdad obtenemos:

$$q_i^t q_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

lo cual nos dice que las columnas de Q forman una b.o.n. (es decir, ① $\Rightarrow$ ②)

Veamos algunas propiedades

- Si Q_1 y Q_2 son ortogonales $\Rightarrow Q_1 \cdot Q_2$ también

Verifiquemos que $Q_1 Q_2$ cumple (1)

$$(Q_1 Q_2)^t (Q_1 Q_2) = Q_2^t \underbrace{Q_1^t Q_1}_{I} Q_2 = Q_2^t Q_2 = I$$

$\Rightarrow (Q_1 Q_2)^t$ es la inversa de $Q_1 Q_2$

- Veamos que (1) $\Rightarrow$ (4)

q.v.q. $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, Q ortogonal

veamos $\|Qx\|_2^2 = (Qx)^t (Qx) = x^t \underbrace{Q^t Q}_{\substack{= \\ I \\ \text{por (1)}}} x = x^t x = \|x\|_2^2$

$\Rightarrow \|Qx\|_2 = \|x\|_2$

- $\|Q\|_2 = 1$

En efecto, $\|Q\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Qx\|_2 \overset{(4)}{=} \max_{\|x\|_2=1} \|x\|_2 = 1$

Como Q^{-1} también es ortogonal $\Rightarrow \|Q^{-1}\|_2 = 1$

Luego: $\underline{\text{cond}_2(Q) = \|Q\|_2 \|Q^{-1}\|_2 = 1}$

- $|\det(Q)| = 1$

$$1 = \det(I) = \det(Q^{-1}Q) = \det(Q^{-1})\det(Q) =$$
$$= \det(Q^t)\det(Q) = \det(Q)\det(Q) = \det(Q)^2$$
$$\Rightarrow 1 = |\det Q|$$

Ejemplos de matrices unitarias:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Nota (y ejercicio): todas las propiedades anteriores se pueden verificar para $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria.

Factorización QR vía reflexiones.

Def: $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de Householder si $\exists\, u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$, tal que

$$H = I - 2\underbrace{uu^t}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}}$$

Obs: si el vector u no tiene norma 1 entonces podemos definir $H = I - 2\dfrac{uu^t}{u^tu}$

Como $u^tu = \|u\|_2^2 \Rightarrow H = I - 2\dfrac{uu^t}{\|u\|_2^2} = I - 2\dfrac{u}{\|u\|_2}\dfrac{u^t}{\|u\|_2}$

Nuestro objetivo será utilizar matrices de Householder para triangular una matriz de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1A} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{H_2H_1A} \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & * & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{n-1}\cdots H_1A} \cdots \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{triang. superior}}$$

Veamos algunas propiedades de $H = I - 2uu^t$

- H es simétrica: $H^t = (I - 2uu^t)^t = I^t - 2(uu^t)^t$
$$= I - 2(u^t)^t u^t = I - 2uu^t = H \checkmark$$

- H es ortogonal: $H^t H = I$

$$H^t H = HH = (I - 2uu^t)(I - 2uu^t) =$$
$$= I - 2uu^t - 2uu^t + 4u \underbrace{u^t u}_{\|u\|_2^2 = 1} u^t =$$
$$= I - 4uu^t + 4uu^t = I \checkmark$$

Además recordemos que H por ser ortogonal no modifica la norma 2 de los vectores:

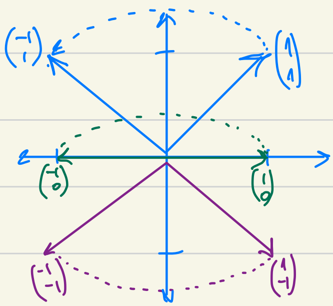
$$\| Hx \|_2 = \| x \|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Veamos en ejemplo en $\mathbb{R}^2$ el efecto que tiene H sobre vectores.

Consideremos $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow H = I - 2uu^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que H refleja respecto al plano vertical generado por $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es decir, respecto a una dirección perpendicular a u (u es el vector que define H).

(<u>Ejercicio</u>: tomar $u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. ¿Qué efecto tiene H? ¿Respecto a qué dirección refleja?)

Teorema Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\|_2 = \|w\|_2$ y sea $u = \dfrac{v-w}{\|v-w\|_2}$ con $H = I - 2uu^t$ la matriz de Householder asociada.
Entonces se cumple $Hv = w$ y $Hw = v$.

Dem Hacemos la cuenta: $Hv = (I - 2uu^t)v$

$$= \left(I - 2\frac{(v-w)(v-w)^t}{\|v-w\|_2^2} \right) v = v - \frac{2(v-w)(v-w)^t v}{\|v-w\|_2^2} = (*)$$

Consideremos el denominador $\|v-w\|_2^2$

$$\|v-w\|_2^2 = (v-w)^t(v-w) = v^tv - w^tv - v^tw + w^tw =$$

$$\underset{w^tv = v^tw}{=} \|v\|_2^2 - 2v^tw + \|w\|_2^2 \underset{\|v\|_2 = \|w\|_2}{=} 2\|v\|_2^2 - 2v^tw =$$

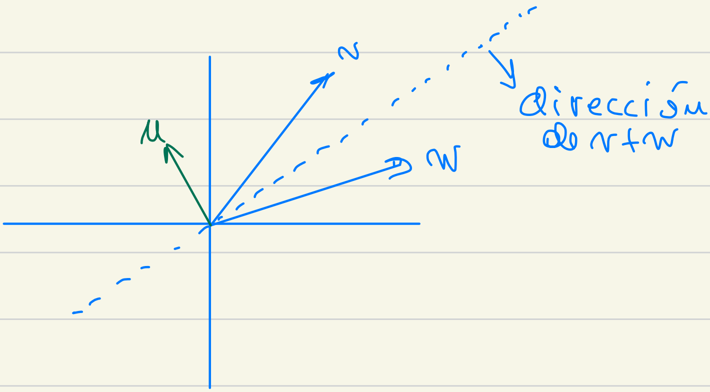
$$= 2v^tv - 2v^tw = 2v^t(v-w) = 2(v-w)^t v$$

$$(*) = v - \frac{\cancel{2}(v-w)\cancel{(v-w)^t v}}{\cancel{2(v-w)^t v}} = v - (v-w) = w$$

$\#$

Para $Hw = v$ se hace un desarrollo similar y se deja como ejercicio.

Veamos gráficamente lo que nos dice el teorema



$$u = \frac{v-w}{\|v-w\|_2}$$

$$H = I - 2uu^t$$

Habíamos interpretado que H refleja respecto de una dirección que es perpendicular al vector u que define la matriz H.
La dirección de u es v−w y H refleja respecto a v+w. Veamos que estas direcciones son perpendiculares entre sí, es decir, veamos que $v-w \perp v+w$:

$$(v-w)^t(v+w) = v^t v + \cancel{v^t w} - \cancel{w^t v} - w^t w =$$

$$= \|v\|_2^2 - \|w\|_2^2 = 0 \quad \text{pues } \|v\|_2 = \|w\|_2 \quad \checkmark$$

Si $v+w$ es la dirección respecto a la cual refleja H, ¿cuál será el efecto esperado de H sobre $v+w$? Debería mantenerlo igual.

$$H(v+w) = (I - 2uu^t)(v+w) =$$

$$= \left(I - 2\frac{(v-w)(v-w)}{\|v-w\|_2^2}\right)v+w = v+w-2\frac{(v-w)\overbrace{(v-w)^t(v+w)}^{\overset{\circ}{\parallel}}}{\|v-w\|_2^2}$$

$$= v+w$$

¿Cuál será el efecto de H sobre u?

$$Hu = H\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} = \left(I - 2\frac{(v-w)(v-w)^t}{\|v-w\|_2^2}\right)\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} =$$

$$= \frac{v-w}{\|v-w\|_2} - 2\frac{(v-w)\cancel{(v-w)^t}}{\cancel{\|v-w\|_2^2}}\frac{\cancel{(v-w)}}{\|v-w\|_2} = \frac{v-w}{\|v-w\|_2} - 2\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} =$$

$$= -\frac{(v-w)}{\|v-w\|_2} = -u \longrightarrow \text{reflexión de } u \text{ respecto de } v+w \ (\perp u)$$

¿Cómo usamos reflexiones para triangular?
Veamos ejemplo en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejemplo sea $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$

Queremos triangularla para llevar A a una matriz R triangular superior.

$\Rightarrow$ Buscamos H / $HA=\left[H\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \middle| H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}}_{w}$ con $* = \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

de esta forma $\|v\|_2 = \|w\|_2$ y usando teorema definimos u

$u = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}_{v} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ $\quad H = I - 2uu^T$ (Notar que $\|u\|_2 = 1$)

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos:

$$H\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 + 3/4 \\ 3/4 - \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además $H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow HA = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = H^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Recordemos que H es ortogonal y simétrico

$$\Rightarrow H^{-1} = H$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = QR$$

$\#$

¿Cómo calculamos $A=QR$ usando reflexiones cuando tenemos matrices de mayor dimensión?

El primer paso para triangular la primera columna de A ya lo sabemos hacer:

$$H_1 A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \to A_1$$

Para este primer paso construimos una H_1 que refleje:

$$H_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tomando $u = \begin{pmatrix} a_{11} - * \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ $\qquad H_1 = I - 2\dfrac{uu^t}{u^t u}$

$$* = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$H_1 A = \overbrace{\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\tilde{A}_1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}^{A_1} \qquad \tilde{A}_1 \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$$

Para el segundo paso volvemos a realizar lo mismo sobre $\tilde{A}_1$. Es decir, considero $\tilde{A}_1$ y $\tilde{H}_2$ / $\hat{H}_2 \tilde{A}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}}$

Definimos $H_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{H}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

$$\Rightarrow H_2(H_1 A) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{H}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \hat{H}_2 \tilde{A}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} * & \cdot & \cdot & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & 0 & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

De esta forma continuamos

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \vline & \\ & \ddots & & \vline & 0 \\ & & 1 & \vline & \\ \hline & 0 & & \vline & \boxed{\tilde{H}_{n-1}} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vline & 0 \\ 0 & 1 & \vline & \\ \hline & 0 & \vline & \tilde{H}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vline & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \vline & \\ \vdots & \vline & \tilde{H}_2 \\ 0 & \vline & \end{pmatrix} H_1 A = \underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots 0 & * \end{pmatrix}}_{\substack{R \\ \text{triang. sup.}}}$$

$$\Rightarrow \quad H_{n-1} \cdots H_2 H_1 A = R$$

$$A = \underbrace{H_1^t H_2^t \cdots H_{n-1}^t}_{Q} R = QR$$

¿Cómo resolvemos un sistema conociendo la fact. QR?

$$Ax = b \rightarrow Q\underbrace{Rx}_{y} = b \quad \begin{cases} Qy = b \xrightarrow{\text{fácil!!}} y = Q^t b \\ Rx = y \end{cases}$$

↳ triang. sup.
resuelvo con sustitución hacia atrás.

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, no singular.
Entonces existen únicas $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior con $r_{ii} > 0$ tal que $A = QR$.

dem La existencia ya la justificamos por construcción usando Householder.
Veamos unicidad.
Supongamos existen dos factorizaciones
$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ (todas invertibles!)

$$\Rightarrow \quad \underbrace{R_1 R_2^{-1}}_{\text{t. sup.}} = \underbrace{Q_1^t Q_2}_{\text{ortog.}}$$

Usemos el siguiente lema:

Lema Si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular y ortogonal entonces es diagonal (con ± 1 en la diagonal).

(La dem del lema la dejamos como ejercicio para el lector!)

Luego, usando el lema: $R_1 R_2^{-1} = Q_1^t Q_2 = D$

con $D = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$ diagonal.

$$\Rightarrow \quad R_1 = \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{pmatrix} R_2$$

pero ambas $(R_2)_{ii} > 0$ y $(R_1)_{ii} > 0$

$\Rightarrow D = I \quad \Rightarrow R_1 = R_2$ y $Q_1 = Q_2$

$\#$