ÁLGEBRA LINEAL

Primer parcial — 23 de junio de 2020

---

1. Sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dados por

$$\mathrm{S} = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \mathrm{tr}(A) = 0\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{T} = \left\langle \begin{pmatrix} k & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & -k \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple que $\mathrm{S} \cap \mathrm{T} \neq \{0\}$. Para cada uno de esos valores de k decidir si existe un subespacio $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\mathrm{S} \cap \mathrm{T} \subsetneq \mathrm{U} \subsetneq \mathrm{S}$.

---

2. Hallar una base del subespacio S de $K^{n\times n}$ dado por

$$\mathrm{S} = \{A \in K^{n\times n} \ : \ A = AP^{ij} \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n\},$$

donde $P^{ij} \in K^{n\times n}$ es la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad.

---

3. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V y sean $f, g \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ tales que:

- $\mathrm{Nu}(f) = \langle v_2 + v_3 + v_4, v_1 + v_4\rangle$.
- $f(-2v_1 - v_2 + 2v_3) = v_2 + v_3 + v_4$.
- $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Encontrar bases de $\mathrm{Nu}(f \circ g)$ y de $\mathrm{Im}(f \circ g)$.

---

4. Sea $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tal que $\mathcal{B} = \{2 + X - X^2,\ -2 + X + 3X^2,\ P\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$ y sea $\mathcal{B}^*$ su base dual. Hallar generadores de $\langle\, 1 - X^2 \,\rangle^\circ$ y determinar sus coordenadas en la base $\mathcal{B}^*$.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.
Por favor entregue cada ejercicio en hojas separadas.