

# Descomposición en Valores Singulares

Cualquier matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$  puede escribirse como el producto de tres matrices  $U, \Sigma$  y  $V$ . A esta descomposición o factorización la llamamos descomp. en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés). Veamos quienes son estas matrices.

$$A = U \Sigma V^*$$

$$A \in \mathbb{K}^{m \times m}$$

$$U \in \mathbb{K}^{m \times m}$$
 unitaria

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$$
 diagonal

$$V \in \mathbb{K}^{m \times m}$$
 unitaria

los elementos de la diagonal de  $\Sigma$ , los llamaremos  $\sigma_i$  y cumplen  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$  y son los llamados valores singulares.

## Observaciones

- Los valores singulares siempre son reales no negativos. (Y están ordenados)
- Esta descomposición existe para cualquier matriz de cualquier tamaño.
- Al ser  $U$  y  $V$  unitarios: las columnas de  $U$  forman una b.o.n de  $\mathbb{K}^m$  y las columnas de  $V$  forman una b.o.n. de  $\mathbb{K}^n$ .

¿Qué "forma" tiene la SVJ? Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$m \geq n$

$$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} V^*$$

$m \times n$

$m \times m$

$m \times m$

$m \times m$

$m \leq n$

$$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} V^*$$

$m \times m$

$m \times m$

$m \times m$

$m \times m$

Tratemos de entender qué significan  $V$ ,  $\Sigma$  y  $U$ , y qué propiedades deberían cumplir sus componentes.

Para ello, **asumamos que existe la SVJ**:  $A = U \Sigma V^*$

llamemos  $u_i$  y  $v_i$  a las columnas de  $U$  y  $V$  respectivamente

$$\Rightarrow A = \left( u_1 \mid u_2 \mid \dots \mid u_m \right) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{pmatrix}$$

Obs. ①

$$A^* A = (\Sigma V^*)^* (\Sigma V^*) = V^* \underbrace{\Sigma^* \Sigma}_{\text{I}} V^* = V^* (\Sigma^* \Sigma) V^*$$

Como  $V$  es unitaria:  $V^* = V^{-1}$

$\Sigma^* \Sigma$  es cuadrada y diagonal, además  $\Sigma^* = \Sigma^+$   
 $\Sigma^* \Sigma = \Sigma^+ \Sigma = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$  (pues  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ )

$\rightarrow A^* A = V D V^* \rightarrow$  es una diagonalización  $m \times n$

Una diagonalización revela los autovalores  
y autovectores de la matriz.  
Efectivamente:

$$\begin{aligned} (A^* A) v_i &= (\underbrace{V \Sigma^t V^*}_{= U \Sigma^t U^*}) v_i = \sqrt{\Sigma^t} \sum e_i = \sqrt{\Sigma^t} \sigma_i e_i = \\ &= \sqrt{\Sigma^t} e_i \sigma_i = \sqrt{e_i \sigma_i^2} = \sigma_i^2 v_i \\ \Rightarrow (A^* A) v_i &= \sigma_i^2 v_i \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_i$  son autovectores de  $A^* A$  con autovalor  $\sigma_i^2$

Obs. 2 Podemos hacer un desarrollo similar para  $AA^*$ :

$$\begin{aligned} AA^* &= (U \Sigma V^*) (U \Sigma V^*)^* = U \Sigma \underbrace{V^* V^*}_{= I} \Sigma^* U^* = \\ &= U \Sigma \Sigma^+ U^* = U \tilde{D} U^* \end{aligned}$$

$AA^* \in \mathbb{K}^{m \times m}$  y  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es diagonal y cuadrada

Notar que  $D$  y  $\tilde{D}$  tienen diferente dimensión si  $m \neq n$

En ambos casos  $D_{ii} = \tilde{D}_{ii} = \sigma_i^2$ ,  $1 \leq i \leq \min\{n, m\}$

Con ello de desarrollo similar:

$$\begin{aligned}(AA^*)u_i &= \left(U\Sigma\Sigma^tU^*\right)u_i = U\Sigma\Sigma^te_i = U\Sigma\sigma_i e_i = \\ &= Ue_i\tau_i^2 = \tau_i^2 u_i \\ \Rightarrow (AA^*)u_i &= \tau_i^2 u_i\end{aligned}$$

$u_i$  son autovectores de  $AA^*$  con autovalor  $\tau_i^2$

Obs 3  $A = U\Sigma V^* \Leftrightarrow A^T = V\Sigma U^*$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \dots & | & v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & | & u_2 & | & \dots & | & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 & & & & & & \\ & \tau_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \end{pmatrix}$$

A la izquierda de la igualdad tenemos una matriz con columnas  $A^T v_i$

Una columna de la matriz a la derecha de la igualdad la podemos obtener mediante

$$U \cdot \text{col}_i(\Sigma) = U \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = U e_i \tau_i = u_i \tau_i$$

$\hookrightarrow \tau_i$  en posición i-ésima

luego, se cumple que  $\underline{A \nu_i = r_i u_i}$

Notemos que  $\{\nu_1, \dots, \nu_m\}$  es una base de  $K^n$   
 $\Rightarrow$  tenemos definida la transformación  
lineal determinada por  $A$  sobre una base.

QSC ④ similar a la observación anterior  
consideremos  $A^*$

$$A^* = (U \Sigma V^*)^* = V \Sigma^* U^* = V \Sigma^t U^*$$

$$\Rightarrow A^* = V \Sigma^t U^* \Leftrightarrow A^* U = V \Sigma^t$$

con un desarrollo igual que antes obtenemos

$$\underline{A^* u_i = r_i v_i}$$

Las 4 observaciones anteriores son propiedades que logramos deducir a partir de asumir la existencia de lo SVD

Escribamos el teorema que establece la existencia de la descomposición y mostraremos que podemos ir calculando cada uno de los componentes.

Teo

Dada una matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$  existen matrices  $U \in \mathbb{K}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{K}^{m \times m}$  unitarias y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal (con  $\Sigma_{ii} = r_i$  y  $r_i \geq r_j \geq 0$  para  $j > i$ ) tales que

$$A = U \Sigma V^*$$

Plamemos valor singular a los  $r_i$ .

Observación: los valores singulares que se encuentran en la diagonal de  $\Sigma$  siempre están ordenados en orden decreciente y son mayores o iguales a 0.

Justifiquemos cómo podemos construirlos la descomposición.

A partir de la obs. ① vimos que  $v_i$  y  $\tau_i$  deben corresponderse a los autovectores y autovalores de  $A^*A$ . Los  $n$  vectores  $v_i$  deberían formar una base de  $\mathbb{K}^n$ .

Podemos asegurarnos que existe dicha base de autovectores?

La respuesta es sí. Pues  $A^*A$  es una matriz Hermitiana y vimos que (x Schur) estas matrices tienen base de autovectores.

Por otro lado,  $A^*A$  es semidefinito positiva

Esto quiere decir que  $\forall x \in \mathbb{K}^n$ :

$$x^*(A^*A)x \geq 0$$

Efectivamente:  $x^* A^* A x = (Ax)^*(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$

En particular, si  $x = v_i$  (es decir, es autovector de  $A^*A$ ) entonces

$$v_i^* A^* A v_i = v_i^* \lambda_i v_i = \lambda_i \|v_i\|_2^2 = \lambda_i \geq 0$$

asumimos  
autovectores de norma 1

→ Por Schur sabemos que las matrices Hermitianas tienen autovalores reales y acobamos de ver que además, para  $A^*A$ , son  $\geq 0$

→ Podemos tomar  $\tau_i = \sqrt{\lambda_i}$  siendo  $\lambda_i$  autovalor de  $A^*A$  asociado a  $v_i$ .

Supo, ya tenemos la matriz  $V$  y  $\Sigma$  formada  $V$  con los autovectores de  $A^*A$  y definiendo  $r_i = \sqrt{\lambda_i}$  (de esta forma se cumple lo que vimos en la obs ① que los  $r_i^2$  eran autovaleos de  $A^*A$ )

Nos resta construir la matriz  $U \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Si bien observamos que los  $u_i$  deben ser autovectores de  $AA^*$  en la obs ②, también debe cumplirse la obs ③:

$$A r_i = r_i u_i$$

Entonces definimos  $u_i = \frac{A r_i}{r_i}$  (para  $r_i \neq 0$ )

Con esta definición se cumple:

- $u_i \perp u_j$  ( $i \neq j$ )

$$\underbrace{r_i \perp r_j}_{r_i \neq 0, r_j \neq 0}$$

$$i \neq j : u_i^* u_j = \left( \frac{A r_i}{r_i} \right)^* \left( \frac{A r_j}{r_j} \right) = \frac{r_i^* A^* A r_j}{r_i r_j} = \lambda_i \frac{r_i^* r_j}{r_i r_j} = 0$$

- $\|u_i\|_2 = 1$
- $$\|u_i\|_2^2 = u_i^* u_i = \underbrace{v_i^*}_{\parallel} \underbrace{A^* A v_i}_{\parallel} \underbrace{\|v_i\|_2^2}_{\parallel} = \frac{\lambda_i}{\sigma_i^2} \|v_i\|_2^2 = 1$$
- $u_i$  es autovector de  $A A^*$  (se cumple QSS ②)

Sabemos que  $A^* A v_i = \lambda_i v_i \Rightarrow$   
 (multiplico x A)  $\Rightarrow A A^* (\underbrace{A v_i}_{\parallel}) = \lambda_i (\underbrace{A v_i}_{\parallel})$   
 $\Rightarrow A A^* \sigma_i u_i = \lambda_i \sigma_i u_i$        $\sigma_i \neq 0$   
 $\Rightarrow A A^* u_i = \lambda_i u_i$

- Se cumple QSS ④ :  $A^* u_i = \sigma_i v_i$

Por como definimos  $u_i$ :  $u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i} \Rightarrow A v_i = \sigma_i u_i$

mult. por  $A^*$   $\Rightarrow \underbrace{A^* A v_i}_{\lambda_i v_i} = \sigma_i A^* u_i \Rightarrow \underbrace{\lambda_i}_{\sigma_i} v_i = A^* u_i$   
 $\sigma_i v_i$

Hasta aquí tenemos:

- $v_1, \dots, v_m$  son autovectores de  $A^*A$
- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  con  $\lambda_i$  autovalor de  $A^*A$  asociado con autovector  $v_i$
- $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$  para los  $\sigma_i \neq 0$

| Estos candidatos cumplen con todas las operaciones realizadas al comienzo

Solo nos resta definir los  $u_i$  restantes cuando  $\sigma_i = 0$

Cómo obtener los restantes?

→ extendemos a una b.o.n para obtener una base de  $\mathbb{K}^m$  y construir la matriz  $U$ .

Observemos que los  $u_i$  que restan definir están asociados al auto valor  $\lambda_i = 0$

Planteamos r a la cantidad de  $\lambda_i$ 's no nulos

$$\Rightarrow A^*A \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i \text{ con } d_1 \dots d_r > 0 \\ \text{y } d_{r+1} \dots d_m = 0$$

$$\Rightarrow u_i = \frac{A \mathbf{r}_i}{\lambda_i} \text{ para } i=1, \dots, r$$

y  $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$  es b.o. n

Observar que  $u_1, \dots, u_r$  están en  $J\mu(A)$

Ejemplo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  Busco  $A = U \Sigma V^t$

Buscamos  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

PASO 1: calculo  $V$  y  $\Sigma$ . Calculo autoval.

y autorect. de  $A^T A$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda - 4)$$

$\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_1 = x_2$$

$\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2x_1 + x_2 = 0$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_1 = -x_2$$

Normalizamos autovalores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2 \quad \sigma_2 = 0$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PASO 2 Calcular  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\text{Definimos } M_1 = A v_1 = \frac{A v_1}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 0 \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & | & u_2 & | & u_3 \end{pmatrix}$$

Buscamos  $u_2$  y  $u_3$   
tengamos  $\{u_1, u_2, u_3\}$   
s.b.o.u

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{puedes elegir} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Otra opción: S.O.U del  $\text{Nu}(A^t)$

$$\left( \text{ya que } \text{Nu}(A^t) = \text{Im}(A)^\perp \oplus \text{Im}(A) = \mathbb{R}^3 \right)$$

$$\langle M_2, M_3 \rangle \quad \langle M_1 \rangle$$

$$\text{Nu}(A^t) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow x+z=0 \Rightarrow x=-z \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Nu}(A^t) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

U                   Σ                   V<sup>t</sup>

Observar que  $U\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_i u_i & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 2/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$u_2$  y  $u_3$  se anulan en  $U\Sigma$

---

Pode mencionar que así como calculamos la SVD comenzando por definir  $V$  y  $\Sigma$  y luego definir  $U$ , podríamos hacer esto por el otro "camino": comenzar calculando autovalores y autovectores de  $A A^t$  para encontrar primero los  $\sigma_i$  y  $v_i$  y luego definir los  $u_i$  de la siguiente manera a partir de la observación ④:  $A^t u_i = \sigma_i v_i$

$\Rightarrow$  definimos  $v_i = \frac{A^t u_i}{\sigma_i}$ ,  $\sigma_i \neq 0$

Si queremos que autos, para los  $r_i = 0$  restantes  
nos completemos con  $N_i$  para formar  
una S.O.M.

Vemos en el ejemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

comenzamos buscando  
autovectores de  $A A^T$

$$A A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) + 4\lambda = \lambda(4 - (2-\lambda)^2) =$$

$$= -\lambda((2-\lambda)^2 - 4) = -\lambda(\lambda(\lambda-4)) = 0$$

$$\text{si } \lambda = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

$$\text{Paro } \lambda = 4 : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + 2z = 0 \\ -4y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Paro } \lambda = 0 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ 2x + 2z = 0 \rightarrow x = -z \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Berechnen } U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Definieren: } V_1 = \frac{A^t U_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y para obtener  $V_2$  extendemos a  
una g.o.n

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Observemos que la segunda columna de  $\Sigma$  hace que podamos expresar la SVD de una manera más resumida.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}_{2 \times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}_{3 \times 1} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}_{1 \times 2}$$

Una de las propiedades importantes de la SVD es que revela el rango de la matriz observando cuántos valores singulares no nulos existen.

Suponiendo que existen  $r$  valores singulares no nulos (es decir,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , y  $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = 0$ ), podemos expresar de forma reducida la SVD donde la matriz  $\Sigma$  tiene cuadros.

## Forma reducida de la SVD

Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  de rango  $r \leq \min\{m, n\}$

$$\Rightarrow A = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^* \text{ con } \begin{array}{l} \hat{U} \in \mathbb{K}^{m \times r} \\ \hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r} \\ \hat{V} \in \mathbb{K}^{n \times r} \end{array}$$

$$\hat{U} = (u_1 | u_2 | \dots | u_r)$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots & \sigma_r \end{pmatrix}$$

$$\hat{V} = (v_1 | v_2 | \dots | v_r)$$

Pasos para calcular SVD de  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$U \in \mathbb{K}^{m \times m}, \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, V \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$A$  matriz de rango  $r$  ( $r$  autov. normales de  $A^*A$ )

1)  $(\lambda_i, x_i)$  pares de  
(autoval, autover) de  $A^*A$

$$2) \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, v_i = x_i / \|x_i\|_2$$

$$3) u_i = \frac{A v_i}{\sigma_i} \text{ para } i=1, \dots, r$$

4) Extender a base  
ortogonal:  $u_{r+1}, \dots, u_m$

1)  $(\lambda_i, x_i)$  pares de  
(autoval, autover) de  $A^*A$

$$2) \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, u_i = x_i / \|x_i\|_2$$

$$3) v_i = \frac{A^* u_i}{\sigma_i} \text{ para } i=1 \dots r$$

4) Extender a base  
ortogonal:  $v_{r+1}, \dots, v_n$

Tarea Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , entonces  $\|A\|_2 = \sigma_1$

$$\text{des} \|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \left\| U \sum V^* x \right\|_2 = \textcircled{1}$$

Recordemos que para las matrices unitarias  $U$  se cumple  $\forall x: \|Ux\|_2 = \|x\|_2$  (no cambia la norma 2 de los vectores).

$$\Rightarrow \left\| U \left( \sum V^* x \right) \right\|_2 = \left\| \sum V^* x \right\|_2$$

$$\textcircled{1} = \max_{\|x\|_2=1} \left\| \sum V^* x \right\|_2 \stackrel{\textcircled{2}}{=} \max_{\|y\|_2=1} \left\| \sum y \right\|_2 =$$

$$(\textcircled{2}: V^* x = y \Leftrightarrow V y = x \quad \|x\|_2 = \|y\|_2)$$

$$= \max_{\|y\|_2=1} \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 y \\ \sigma_2 y \\ \vdots \\ \sigma_n y \end{pmatrix} \right\|_2 = \max_{\|y\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 |y_i|^2} \leq$$

$$\leq \max_{\|y\|_2=1} \sqrt{\sigma_1^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \sigma_1 \max_{\|y\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \sigma_1 \|y\|_2$$

Veamos que también se cumple la igualdad.

Si  $\tau_i$  es el autovector de  $A^t A$  con su  
autovalue  $\lambda_i = \tau_i^2$

$$\begin{aligned} \|A\tau_i\|_2 &= \sqrt{(A\tau_i)^*(A\tau_i)} = \sqrt{\tau_i^* A^* A \tau_i} = \\ &= \sqrt{\tau_i^* \tau_i} \lambda_i = \sqrt{\lambda_i} \frac{\sqrt{\tau_i^* \tau_i}}{\|\tau_i\|_2} = \sigma_i \end{aligned}$$

$$\therefore \|A\|_2 = \underline{\sigma_i}$$

Otra propiedad para cualquier  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$   
(inversible)

$$\text{cond}_2(A) = \tau_1 / \sigma_r$$

Recordemos que  $\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$

Acabamos de ver que  $\|A\|_2 = \sigma_1$

Por otro lado se sabe además que los valores singulares de  $A^{-1}$  son  $1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_m$ , con  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  valores singulares de  $A$ . El mayor de los valores singulares es la norma 2  $\Rightarrow$  para  $A^{-1}$  el mayor de todos es  $1/\sigma_m$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = 1/\sigma_m$$

$$\Rightarrow \text{cond}_2(A) = \sigma_1/\sigma_m$$

---

Recordemos que  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$

Esta norma de Frobenius también se puede expresar en función de los valores singulares de  $A$ :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}$$

La norma de frobenius es invariantes ante matrices unitarias. Para cualquier

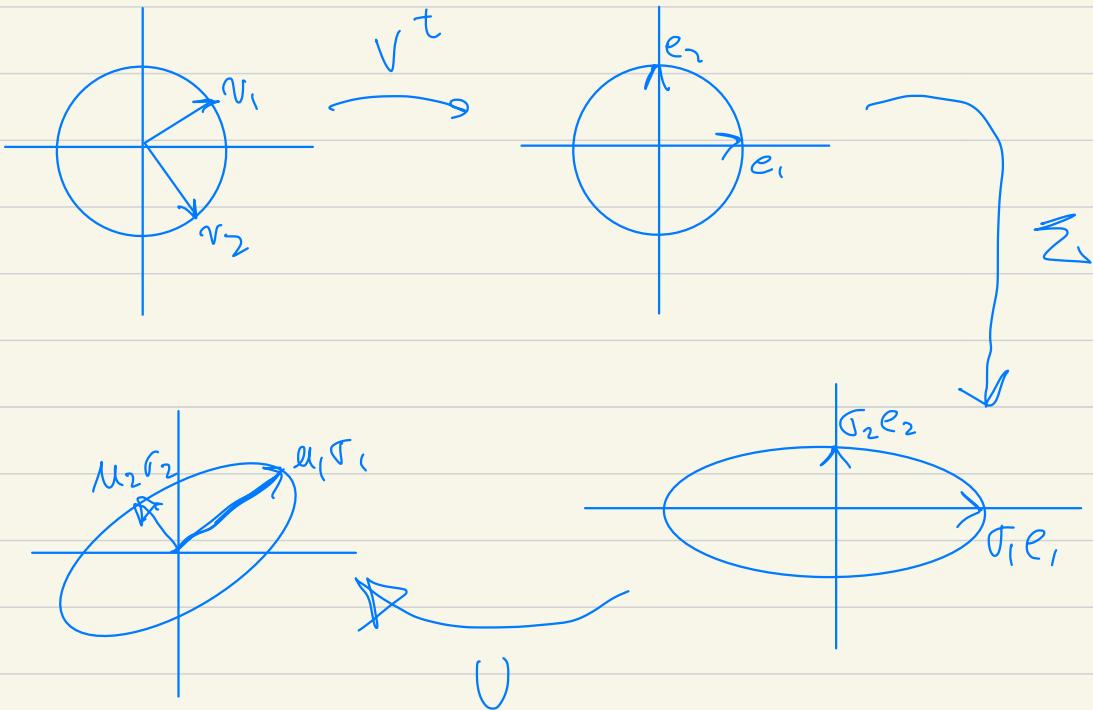
$Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$  unitaria y  $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$

por ejemplo:  $\|B\|_F = \|QB\|_F = \|BQ\|_F$   
 (probarlo!!)

$$\Rightarrow \|A\|_F = \|U\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma V^*\|_F = \|\Sigma\|_F$$

$$\|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2} .$$

Interpretación geométrica  $A = U \Sigma V^t$



$$A = (\mu_1 | \mu_2) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^t \\ v_2^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = U \Sigma V^t x = (\mu_1 v_1 | \mu_2 r_2) \begin{pmatrix} v_1^t x \\ v_2^t x \end{pmatrix} = \underbrace{\mu_1 v_1 (v_1^t x)}_{\alpha_1} + \underbrace{\mu_2 r_2 (r_2^t x)}_{\alpha_2}$$

~~teo~~ Sea  $A \in K^{m \times m}$  invertible y  
 $A = U \Sigma V^*$  su SVD.

Definimos  $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{m-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Entonces la matriz  $\hat{A} = U \hat{\Sigma} V^*$  es la matriz singulares más cercana a  $A$  en norma 2.

Es decir,  $\|A - \hat{A}\|_2 = \min_{B \text{ singular}} \|A - B\|_2$

Además  $\|A - \hat{A}\|_2 = \sigma_m$

~~des~~ Queremos encontrar una matriz  $B \in K^{m \times m}$  tal que  $A + B$  sea singular y  $\|B\|_2$  sea lo más chica posible.

Veamos que  $A + B = A(I + A^{-1}B)$

Consideremos el siguiente lema

Sea  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Si  $\|C\| < 1 \Rightarrow I + C$  es inversible.

~~dem~~ Supongamos que  $I + C$  no es inversible

Entonces  $\exists x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$  tal que  $(I + C)x = 0$

$$\Rightarrow x + Cx = 0 \Rightarrow Cx = -x$$

$$\Rightarrow \|Cx\| = \|-x\| = \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|Cx\|}{\|x\|} = 1 \Rightarrow \|C\| \geq 1 \text{ abs!}$$

(Consideramos  $\|\cdot\|: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  cualquier norma inducida)

Usando el lema anterior,

si  $\|A^{-1}B\| < 1 \Rightarrow I + A^{-1}B$  es inversible  
y entonces también lo será  $A + B$

Por el contrario, si  $A+B$  es singular y  $A$  es invertible  $\Rightarrow I+A^{-1}B$  debe ser singular.

Pero  $I+A^{-1}B$  singular  $\Rightarrow \|A^{-1}B\| \geq 1$

$$\Rightarrow 1 \leq \|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \|B\|$$

prop. submultiplic. de norma multiplicada

$$\Rightarrow \|B\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

llegamos a que para que  $A+B$  sea singular debe cumplirse  $\|B\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Sabemos que  $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_m} \Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\|} = \sigma_m$

siendo  $\sigma_m$  el  $m$ -ésimo valor singular de  $A$ .

$\Rightarrow$  Debe ser  $\|B\| \geq \underline{\sigma_m}$

Construyamos una  $B$  que cumpla  
la igualdad.

Sea  $B = U \Sigma V^*$  con  $U$  y  $V$  los  
matrices de la SVD de  $A$ . Y,

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & -\sigma_m \end{pmatrix}$$

$$\|B\|_2 = \|E\|_2 = \sigma_m$$

$$\Rightarrow A+B = U(\Sigma+E)V^* = U\hat{\Sigma}V^*$$

Además se cumple  $\|A - (A+B)\|_2 = \sigma_m$

Ejemplo. ¿Cuál es la matriz singular más cercana a  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ?

Podemos calcular la SVD y aplicar el teorema.

Consideremos una matriz de permutación que "ordene" la diagonal (en módulo)

$$\text{sea } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^t \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P = P^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^t \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^t$$

$$\text{Por otro lado: } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{permutación}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{permutación}} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U \Sigma V^t$$

Luego, ya tenemos una SVD para  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Obs: podríamos haber calculado la SVD por el camino tradicional: calculando autovalores y autovectores de  $A^T A$  para calcular  $V$  y  $\Sigma$  y luego definiendo los valores para  $U$ .

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U \Sigma V^t$$

$\Rightarrow$  aplicando el teorema :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es la matriz singular más cercana a  $A$

$$\text{y } \|A - \hat{A}\|_2 = 2 = G_3$$

Este resultado se puede generalizar para obtener la matriz más cercana a otra de un rango específico.

Teo Sea  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  de rango  $r > 0$ , con  $A = U \Sigma V^*$  su SVD. La matriz  $A_k \in \mathbb{K}^{m \times n}$  de rango  $k < r$  más cercana a  $A$  (en norma 2) es  $A_k = U \Sigma_k V^*$ , con

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Eso decir,

$$\sigma_{k+1} = \|A - A_k\|_2 = \min \{ \|A - B\|_2 \mid \text{rango}(B) \leq k \}$$

→  $\Sigma_k$  es la matriz que resulta de poner en cero los elementos de la diagonal de  $\Sigma$  de la posición  $(k+1, k+1)$  en adelante. El resto de los valores singulares desde 1 a  $k$  quedan iguales.