ÁLGEBRA LINEAL COMPUTACIONAL

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 4: Autovalores y autovectores.

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$):

(a)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$
, $a \in \mathbb{R}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

Autovalores:

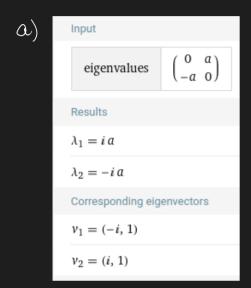
Autore ctorer:

$$(A - \lambda; T) \cdot v = 0$$

Ejercicio 2. Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la tranformación lineal tal que $[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = A$. Decidir si es posible encontrar una base \mathcal{B} de \mathbb{K}^n tal que $[f]_{BB}$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular \mathbf{C}_{BE} .

(a)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$
 (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ (d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ (e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die go nelización i



Como la multiplicidad de los autovalores es 1, entonces A es diagonalizable.

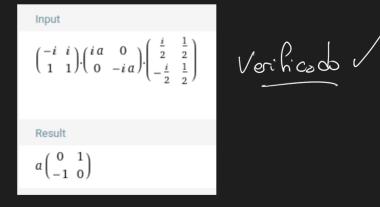
$$A = C_{EB}. D. C_{BE}$$

$$A = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{bmatrix} \underbrace{1 \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{bmatrix}}_{=\frac{i}{2}}$$

$$dd = -i - i$$

$$-2i$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$



Ejercicio 3. Considerar la sucesión de Fibonacci, dada por la recursión: $F_0=0,\,F_1=1,\,F_{n+1}=F_n+F_{n-1}.$

(a) Hallar una matriz
$$\boldsymbol{A}$$
 tal que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Mostrar que $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}$

(b) Diagonalizar A.

(c) Dar una fórmula cerrada para
$$F_n$$
.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b = 1 \\ d = 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+1 = 1 \\ a=0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. Recordando que la solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t), \quad a \in \mathbb{R}$$

con condición inicial $x(0) = c_0$ es $x(t) = c_0 e^{at}$, resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales x(0) = 3, y(0) = -1.

Sugerencia: Hallar una matriz C tal que $C^{-1}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1}.\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

variables
$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$
.



Ejercicio 5. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

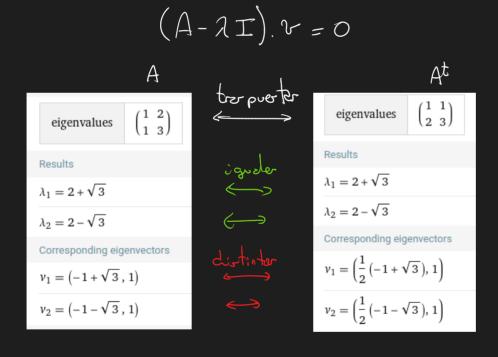
Como det
$$A = det(A^{t})$$

$$= det(\lambda I - A)^{t}$$

$$= det(\lambda . I^{t} - A^{t})$$

$$= det(\lambda - A^{t})$$

Mismos autovalores pues mismos polinomios característicos



Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y λ un autovalor de $\boldsymbol{A}.$ Probar que:

- (a) Si \boldsymbol{A} es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.
- (b) λ^k es autovalor de \boldsymbol{A}^k , con el mismo autovector.
- (c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{I}$, con el mismo autovector.
- (d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\boldsymbol{A})$.

Ejercicio 7. (a) Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(\mathbf{A}) = -4$. Calcular los autovalores de \mathbf{A} sabiendo que los autovalores de $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}$ son -1, 3 y 8.

(b) Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(\mathbf{A}) = 6$; 1 y -2 son autovalores de \mathbf{A} y -4 es autovalor de la matriz $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$. Hallar los restantes autovalores de \mathbf{A} .

$$a) \quad p(A) = A^2 + 2A$$

The matrix A has n eigenvalues (including each according to its multiplicity).

The sum of the n eigenvalues of A is the same as the trace of A (that is, the sum of the diagonal elements of A).

The product of the n eigenvalues of A is the same as the determinant of A.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -4$$

Ejercicio 8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar:

- (a) Si los autovalores de \boldsymbol{A} son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.
- (b) Si \boldsymbol{A} es simétrica, entonces sus autovalores son reales.
- (c) Si \boldsymbol{A} es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)
- (d) Si ${\bf A}$ es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

Ejercicio 9. Una transformación lineal $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se llama proyector si verifica f(f(x)) = f(x) para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

$$f(x) = A \cdot x$$

$$f(f(x)) = A^2 \times A \times$$

Ejercicio 10. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$[f] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probar que fes un proyector y hallar una base ${\mathcal B}$ tal que $[f]_{{\mathcal B}{\mathcal B}}$ sea diagonal.

Ejercicio 11. Considerar las matrices

$$m{A} = \begin{pmatrix} 1 & rac{1}{arepsilon} \\ arepsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad m{B} = \begin{pmatrix} 1 & rac{1}{arepsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\varepsilon \ll 1$ es arbitrario. Calcular los polinomios característicos y los autovalores de \boldsymbol{A} y de \boldsymbol{B} . Concluir que pequeñas perturbaciones en los coeficientes de un polinomio pueden conducir a grandes variaciones en sus raíces (el problema está mal condicionado). En particular, esto afecta el cómputo de autovalores como raíces del polinomio característico.