ÁLGEBRA LINEAL

Recuperatorio del primer parcial — 14 de agosto de 2020

---

1. Sean $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ vectores tales que las coordenadas de v_i suman 1 para todo $1 \leq i \leq n$. Probar que existe un vector no nulo $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = a.$$

---

2. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \text{End}(V)$. Probar que

$$2\text{dim}(\text{Im} f) \leq \text{dim}(\text{Im} f^2) + \text{dim}(V).$$

Sugerencia: restringir f a un subespacio adecuado.

---

3. Sea $V = \mathbb{R}^4$ y sean $S, T \subseteq V$ subespacios dados por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + 2x_3 = 0 \ \text{ y } \ x_2 + x_3 = x_4 \right\} \quad \text{y}$$
$$T = \langle\, (2, -1, 0, 3),\ (1, 0, 0, 2),\ (3, -2, 0, 4) \,\rangle\,.$$

Encuentre $f \in \text{End}(V)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

(a) $f(S) = S \cap T$,

(b) $T \subseteq \operatorname{Nu} f \subseteq S + T$,

(c) f es nilpotente.

---

4. Dada $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ dada por $f(X) = AX - X^t A^t$. Hallar una base de $(Nu(f))^\circ$.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.
Por favor entregue cada ejercicio en hojas separadas.