Número de libreta:

2,5	2,5	2,5	2,5	10

Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 23 de febrero de 2023

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4. ***Realice todos los ejercicios en hojas separadas.***

Ejercicio 1. Sean

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\},$$
$$T = \langle (0, -2, 1, 3), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle,$$

subespacios de $\mathbb{R}^4$ y $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S + T$.

a) (1.5 pts.) Hallar $M_{\mathcal{E}}(f)$, la matriz de f en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$.

b) (1 pt.) Para $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_4),$$

decidir si $h \circ f$ es epimorfismo.

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1.64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1.64 & 0 & 9.07 \end{pmatrix}.$$

a) (1 pt.) Mostrar que A es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky utilizando aritmética de punto flotante de 2 dígitos y redondeo.

b) (1 pt.) Utilizar la descomposición obtenida en el ítem anterior para resolver el sistema $Ax = b$ con $b = (4, -1, 1.64)$ con aritmética de punto flotante de 2 dígitos y redondeo.

c) (0.5 pts.) Corroborar que la solución exacta es $x = (1, -1, 0)$ y calcular $\frac{\|x - \tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$, donde $\tilde{x}$ es la solución numérica hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Para $n \geq 3$, considerar:

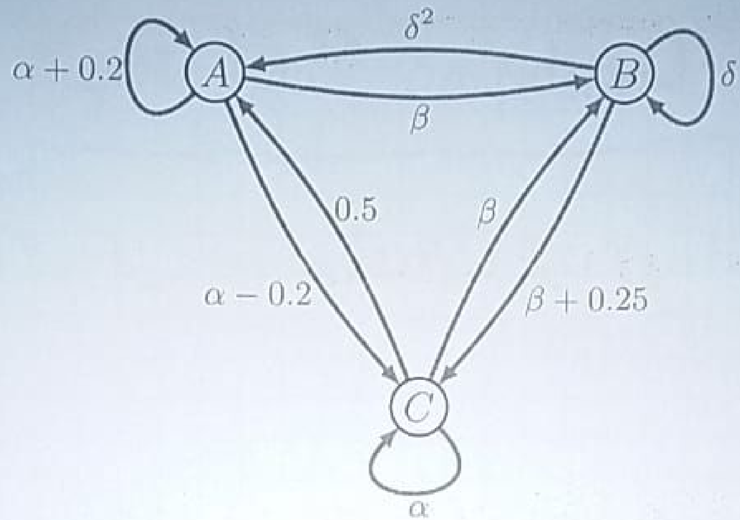
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Probar que $\mathrm{cond}_1(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.

Sugerencia: recordar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) (1 pt.) Probar que $\mathrm{cond}_2(A_{20}) > 10$.

Ejercicio 4. Un mismo día se televisan tres finales: la de un torneo de fútbol (A), la de un torneo de básquet (B) y la de un torneo de tenis (C). Todas ellas ocurren durante el mismo horario y cada una es transmitida por un canal distinto. Por esta razón, los televidentes hacen mucho *zapping* entre los tres canales. El siguiente diagrama muestra el comportamiento de los televidentes cada minuto:



Por ejemplo, después de un minuto, el 50% de los que están viendo la final de tenis cambian al canal de la final de fútbol.

a) (1 pt.) Hallar la matriz de transición P y calcular sus autovalores.

b) (0.5 pts.) Inicialmente hay 300 espectadores mirando fútbol, 300 mirando básquet y 600 mirando tenis. Luego de 5 minutos, ¿aproximadamente cuántos televidentes tendrá la final de fútbol? ¿Cuántos tendrá la final de tenis luego de 8 minutos?

c) (1 pt.) Decidir si existe P^∞. En caso afirmativo, calcularla y hallar el estado límite del estado inicial correspondiente a la situación del ítem b).

Algebra Lineal Computacional: 1er Parcial

1) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$T = \langle (0,-2,1,3), (0,-1,0,1), (0,0,1,1) \rangle$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ proyección ortogonal de $S+T$

a) $M_{\varepsilon}(f)$?

Primero quiero conseguir una base de $S+T$, para eso, necesito un sistema de generadores de S ✓

$$S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Como se ve, el sistema de ecuaciones ya está escalonado, por lo que despejo las incognitas.

$$x_2 - x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_2 = x_3 - x_4}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2.(x_3 - x_4) - 2x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + \cancel{2x_3} - \cancel{2x_4} - \cancel{2x_3} + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_4 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1 = x_4}$$

x_3 y x_4 libres ✓

$S = x_3 \cdot (0,1,1,0) + x_4 \cdot (1,-1,0,1)$

$S = \langle (0,1,1,0), (1,-1,0,1) \rangle$ ✓

Se que $S+T$ está generado por la unión de los generadores de S y los de T ✓

$S+T = \langle (0,-2,1,3), (0,-1,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,0), (1,-1,0,1) \rangle$

Pero como tiene 5 generadores, y no pueden generar algo de mayor dimensión que $\mathbb{R}^4$, al menos 1 de sus generadores es generado por el resto. Descarto el primer generador, ya que

$(0,-2,1,3) = 2 \cdot (0,-1,0,1) + (0,0,1,1)$ ✓

$S+T = \langle (0,-1,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,0), (1,-1,0,1) \rangle$

Finalmente, uso Gauss para ver si son l.i, y extraigo una base de $S+T$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1+L_3 \to L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{L_1-L_2 \to L_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_1 \leftrightarrow L_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ~~como no está escalonada,~~

Como la matriz tiene una fila de ceros, no es l.i, pero si no estuviese la 4ta fila, que pertenece al generador $(0,-1,0,1)$, sería un sistema compatible determinado. ✓

Extraigo una base removiendo este generador

ALC: 1er parcial

$$S+T = \{(0,0,1,1), (0,1,1,0), (1,-1,0,1)\}$$ ✓

Me piden hallar la matriz de la proyección ortogonal sobre $S+T$. Para eso, uso que:

$$M_E(f) = \sum_{i=1}^{3} v_i v_i^*$$ donde v_i son los generadores de una base ortonormal de $S+T$ ✓
columnas
(Prac. 3, ej 12 b))

Usando el algoritmo de Gram-Schmidt, ortonormalizo $S+T$ ✓

$$u_1 = (0,0,1,1) \Rightarrow q_1 = \frac{(0,0,1,1)}{\|(0,0,1,1)\|_2} = \frac{(0,0,1,1)}{\sqrt{2}} = \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_2 = (0,1,1,0) - \frac{\langle (0,0,1,1),(0,1,1,0)\rangle}{\langle (0,0,1,1),(0,0,1,1)\rangle} \cdot (0,0,1,1)$$ ✓

$$= (0,1,1,0) - \frac{1}{2} \cdot (0,0,1,1) = \left(0,1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)$$ ✓

$$q_2 = \frac{(0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}{\|(0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\|_2} = \frac{(0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left(0,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}\right)$$

$$u_3 = (1,-1,0,1) - \frac{\langle (0,0,1,1),(1,-1,0,1)\rangle}{\langle (0,0,1,1),(0,0,1,1)\rangle}(0,0,1,1) - \frac{\langle (0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(1,-1,0,1)\rangle}{\langle (0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),(0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\rangle} \cdot (0,1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})$$

$v_3 = (1,-1,0,1) - \frac{1}{2} \cdot (0,0,1,1) + \frac{\cancel{(+\frac{3}{2})}}{\cancel{(\frac{3}{2})}} \cdot (0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$= (1,-1,0,1) - (0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + (0,1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = (1,0,0,0) = \varphi_3$

$S+T = \{(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}),(1,0,0,0)\}$

Armo la matriz ortogonal:

$M_E(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} (0,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1\,0\,0\,0)$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & -1/3 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ Rta: $M_E(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

b) $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$:

$h(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_4)$.

Decidir si $h \circ f$ es epimorfismo

No hace falta leer esto

Como $h \circ f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ es una función que va de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2$, puedo decir con certeza que no es monomorfismo. Por el Teorema de la Dimensión

$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(Nu(h \circ f)) + \dim(Im(h \circ f))$

Pero $\dim(\mathrm{Im}(h \circ f))$ está acotada superiormente por 2, por lo que $\dim(\mathrm{Nu}(h \circ f)) \geq 2$, es decir $\dim(\mathrm{Nu}(h \circ f)) \neq 0$

Por ende $h \circ f$ no es monomorfismo, y, al no serlo, tampoco es isomorfismo.

(Me confundí isomorfismo con epimorfismo)

Veo si $h \circ f$ es epimorfismo.

Sé que la matriz de h (en base canónica) está dada, en sus columnas, por la aplicación de h a la base canónica.

$$\left.\begin{array}{l} h(1,0,0,0) = (2,0) \\ h(0,1,0,0) = (-1,0) \\ h(0,0,1,0) = (1,0) \\ h(0,0,0,1) = (0,1) \end{array}\right\} M_E(h) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consigo la matriz de $h \circ f$ multiplicando la de h y la de f:

$$M_E(h \circ f) = M_E(h) \cdot M_E(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} =$$

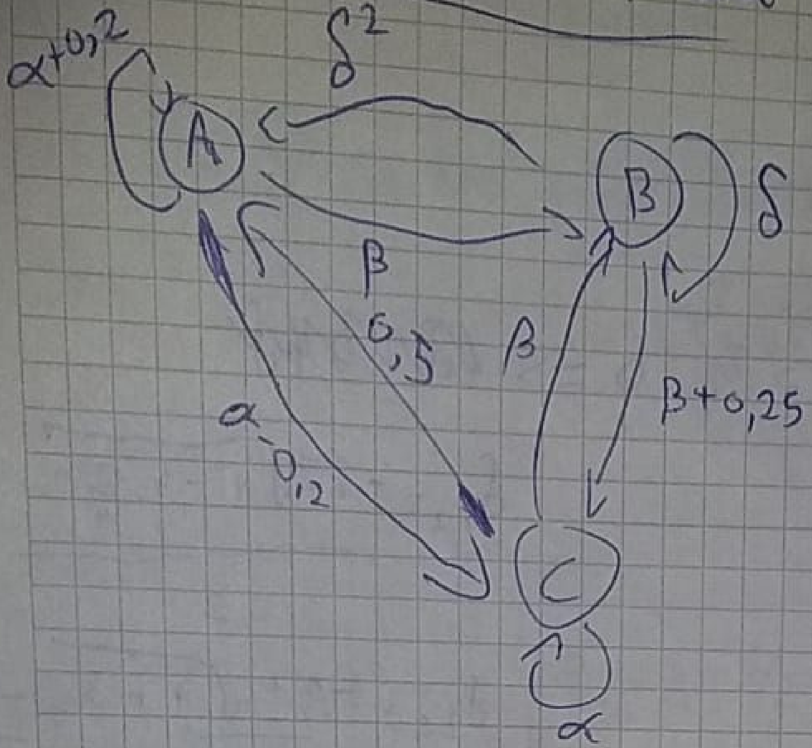
$$M_{\mathcal{E}}(h\circ f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

entonces

$\mathrm{Im}(h\circ f) = \langle (2,0), (-1/3, 1/3), (1/3, 1/3), (2/3, 2/3) \rangle$

cuya dimensión claramente es 2, ya que veo 2 vectores li ($(2,0)$ y $(-1/3, 1/3)$ son claramente l.i), y como ~~dim~~ $\dim(\mathrm{Im}(h\circ f)) \leq \dim(\mathbb{R}^2)$ entonces $\dim(\mathrm{Im}(h\circ f)) = 2 = \dim$

$h\circ f$ es epimorfismo



el comportamiento de un televidente cambia por minuto

a) Hallar matriz de Transición

$$
P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\alpha+0,2 & \delta^2 & 0,5 \\
\beta & \delta & \beta \\
\alpha-0,2 & \beta+0,25 & \alpha
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Como esta es una matriz estocastica, debe cumplir que la suma de sus columnas sea 1, y que todos sus elementos sean mayores o iguales a 0

$$
\begin{cases}
\alpha+0,2+\beta+\alpha-0,2=1 \\
\delta^2+\delta+\beta+0,25=1 \\
0,5+\beta+\alpha=1
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
2\alpha+\beta=1 & (1) \\
\alpha+\beta=0,5 & (2) \\
\delta^2+\delta+\beta=0,75 & (3)
\end{cases}
$$

② $\alpha = 0,5 - \beta \Rightarrow$ ① $2.(0,5-\beta) + \beta = 1 \Rightarrow \cancel{1} - 2\beta + \beta - \cancel{1} \Rightarrow -\beta = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{\beta = 0}$

$\beta = 0 \overset{①}{\Rightarrow} \alpha = 0,5$

$\Downarrow$

③ $\delta^2 + \delta = 0,75 \Rightarrow \delta^2 + \delta - 3/4 = 0 \Rightarrow$

$$\delta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot -\frac{3}{4} \cdot 1}}{2}$$

$$\delta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{-1 \pm 2}{2}$$

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \overset{\delta \geq 0}{\Longrightarrow} \boxed{\delta = 1/2 = 0,5}$$

Reemplazando en P:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

b) $V^0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix} = \frac{1}{1200} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Para calcular los televidentes de fútbol despues de 5 minutos y los de tenis despues de 8, necesito calcular $V^{(5)}$ y $V^{(8)}$, respectivamente. Para esto uso la formula:

$$V^k = a_1 \cdot \lambda_1^k \cdot w_1 + a_2 \cdot \lambda_2^k \cdot w_2 + a_3 \cdot \lambda_3^k \cdot w_3,$$

donde λ_i es autovalor de P, w_i autovector asociado a ese autovalor, y (a_1, a_2, a_3) las coordenadas de $V^{(0)}$ en la base de autovectores $\{w_1, w_2, w_3\}$ (aquí asumo que P es diagonalizable)

ALC: 1er parcial

Primero calculo los autovalores: estos son los λ que cumplen

$$\det(P-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 7/10-\lambda & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2-\lambda & 0 \\ 3/10 & 1/4 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1/2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 7/10-\lambda & 1/2 \\ 3/10 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (1/2-\lambda)\cdot\left[(7/10-\lambda)(1/2-\lambda)-3/20\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1/2-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-6/5\lambda+7/20-3/20\right)=0 \Leftrightarrow (1/2-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-6/5\lambda+1/5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1/2-\lambda)\cdot(\lambda-1)(\lambda-1/5)=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=1/2\\ \lambda_3=1/5\end{array}}$$ autovalores de P ✓

Hallo los autovectores asociados a c/autovalor, sabiendo que

$$E_{\lambda_1=1}=\cancel{\ }\ Nu(P-\lambda_1 I)$$

$E_{\lambda_1=1}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0,7-1 & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5-1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,5-1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,3 & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -3/10 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1/4 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{L_3+L_1\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -3/10 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{L_3+L_2\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -3/10 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$L_1+1/2 L_2 \to L_1$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3/10 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -3/10 x_1 + 1/2 x_3 = 0 \\ -1/2 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5/3 x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$x_3 . (5/3, 0, 1) = \langle (5/3, 0, 1) \rangle$

$E_{\lambda_2=1/2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0,7-0,5 & 0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5-0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,25 & 0,5-0,5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1/5 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1/4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{1/5 L_3 - 3/10 L_1 \to L_3}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1/5 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/40 & -3/20 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{L_1+10L_2\to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1/5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/40 & -3/20 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\begin{cases} 1/5 x_1 - x_3 = 0 \\ -1/40 x_2 - 3/20 x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_3 \\ x_2 = -6x_3 \end{cases} \Rightarrow x_3 . (5, -6, 1) = \langle (5, -6, 1) \rangle$

ALC: 1er parcial

$$E_{\lambda_3 = 1/5}: \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}7-0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5-0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}5-0{,}7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1/4 & 3/10 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{2}L_3 - \frac{3}{10}L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/20 & 0 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow[\frac{3}{10}L_3 - \frac{1}{20}L_2 \to L_3]{\frac{3}{10}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{3}{10}x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_3 \cdot (-1,0,1) = \langle(-1,0,1)\rangle$$

Hallamos una base de autovectores.

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 5/3 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solo nos falta hallar las coordenadas de $v^{(0)} = (300, 300, 600)$ en esta base: usando Gauss con matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5/3 & 5 & -1 & 300 \\ 0 & -6 & 0 & 300 \\ 1 & 1 & 1 & 600 \end{array}\right) \xRightarrow[L_2/-6]{L_3 - 5/3 L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10/3 & -8/3 & -700 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 1 & 1 & 1 & 600 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3-L_2\to L_3}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -8/3 & -1600/3 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 1 & 0 & 1 & 650 \end{array}\right) \overset{L_1\cdot -3/8}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 1 & 0 & 1 & 650 \end{array}\right)$$

$L_1 - 10/3 L_2$

$$\Downarrow L_3 - L_1 \to L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 1 & 0 & 0 & 450 \end{array}\right)$$

$a_1 = 450$

$a_2 = -50$

$a_3 = 200$

$$v^{(k)} = 450 \cdot 1^k \cdot (5/3, 0, 1) - 50 \cdot (1/2)^k \cdot (5, -6, 1) + 200 \cdot (1/5)^k \cdot (-1, 0, 1)$$

i) $v^{(5)} = 450 \cdot (5/3, 0, 1) - \frac{50}{32} \cdot (5, -6, 1) + \frac{200}{3125} \cdot (-1, 0, 1)$

$= \left(750 - \frac{125}{16} - \frac{200}{3125}, \frac{300}{32}, 450 - \frac{50}{32} + \frac{200}{3125}\right)$

$= (742{,}1235, 9{,}375, 448{,}5015) \approx (742, 9, 449)$

Como el fútbol es representado por la 1ra coordenada, habrá aproximadamente 742 personas viendo futbol luego de 5 minutos.

ii) $v^{(8)} = 450 \cdot 1^k \cdot (5/3, 0, 1) - \frac{50}{256}(5, -6, 1) + \frac{200}{390625}(-1, 0, 1)$

$= \left(750 - \frac{125}{128} - \frac{200}{390625}, \frac{300}{256}, 450 - \frac{50}{256} + \frac{200}{390625}\right) =$

$(749{,}0226695, 1{,}171875, 449{,}8051995)$

$\approx (749, 1, 450)$

Como el tenis es representado por la 3ra coordenada, habrá aproximadamente 450 personas mirando tenis luego de 8 minutos.

c) Como vimos en el ejercicio anterior, los autovalores de P son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/5$. Como el único autovalor módulo 1 es 1, me puedo asegurar de que existe P^∞, ya que solo puede no existir si P no es diagonalizable (lo cual es, ya que tiene tantos autovalores como filas tiene P) o si tiene un autovalor módulo 1 distinto de 1. Como P diagonalizable ✓

$$P = C_{BE}\, D\, C_{EB}$$

$$P^\infty = C_{BE}\, D^\infty\, C_{EB}$$

C_{BE} es la matriz de la base de autovectores hallada en b), y

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \Rightarrow D^\infty = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^k & 0 \\ 0 & 0 & (1/5)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

Me falta $C_{EB} = C_{BE}^{-1}$. Hallo la inversa usando Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5/3 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2/-6]{L_1 - 5/3 L_3 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 10/3 & -8/3 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$L_3 - L_2 \to L_3$

$L_1 - \frac{10}{3}L_2 \to L_1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -8/3 & 1 & 5/4 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{L_1/-8/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -3/8 & -5/24 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 - L_1 \to L_3$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -3/8 & -5/24 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{array}\right) \xRightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & -5/24 & 5/8 \end{array}\right)$$

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ -3/8 & -5/24 & 5/8 \end{pmatrix}$$

entonces

$$P^\infty = C_{BE} \cdot D^\infty \cdot C_{EB} = \begin{pmatrix} 5/3 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ -3/8 & -5/24 & 5/8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5/3 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 5/8 & 5/8 \\ -9/4 & -9/4 & -9/4 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

El resultado obtenido NO es P^∞, porque no cumple las propiedades de matriz esto. Me faltó normalizar los autovectores antes de calcular la inversa ✓

Burdman

Lo 18/22

Hoja 12

$$D^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C_{BE} es la matriz de autovectores, solo que estos estan normalizados a norma 1:

$$C_{BE} = \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3 \right) \qquad v_1 = \frac{(5/3, 0, 1)}{\|(5/3,0,1)\|_1} = (5/8, 0, 3/8)$$

$$v_2 = \frac{(5,-6,1)}{\|(5,-6,1)\|_1} = (5/12, -1/2, 1/12)$$

$$v_3 = \frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|_1} = (-1/2, 0, 1/2)$$

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 5/8 & 5/12 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 3/8 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$C_{EB} = C_{BE}^{-1}$, La calculo mediante Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5/8 & 5/12 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/8 & 1/12 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2/-1/2}{\overset{5/8 L_3 - 3/8 L_1 \to L_3}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5/8 & 5/12 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ [illegible] & & & & & \end{array}\right) \underset{L_3 + 5/48 L_2 \to L_3}{\overset{L_1 - 5/12 L_2 \to L_1}{\Longrightarrow}}$$

$L_1 \cdot 8/5$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5/8 & 0 & 0 & 1 & 5/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/8 & -5/24 & 5/8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5/12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & -5/12 & 5/4 \end{array}\right)$$

$L_3 \cdot 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5/8 & 0 & -1/2 & 1 & 5/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/8 & -5/24 & 5/8 \end{array}\right) \overset{L_3 \cdot 2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5/6 & 0 & & & \\ 0 & -2 & 0 & & & \\ -3/4 & -5/12 & 5/4 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5/8 & 0 & -1/2 & 1 & 5/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & -5/12 & 5/4 \end{array}\right)$$

$L_1 + \frac{1}{2} L_3 \to L_1$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5/8 & 0 & 0 & 17/8 & 25/24 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & -5/12 & 5/4 \end{array}\right)$$

Usando Python, la matriz inversa es

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3/4 & -5/12 & 5/4 \end{pmatrix} \checkmark$$

Entonces

$$P^{\infty} = C_{BE} \cdot D^{\infty} \cdot C_{EB} = \begin{pmatrix} 5/8 & 5/12 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 3/8 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3/4 & -5/12 & 5/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/8 & 5/12 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 3/8 & 1/12 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 5/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix} 5/8 & 5/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \checkmark$$

Muy bien justificado todo!

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1{,}64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1{,}64 & 0 & 9{,}07 \end{pmatrix}$

a) Una forma de determinar si una matriz $\mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva (>0) es si $\det(M_k(A)) > 0 \; \forall \, 1 \leq k \leq n$, siendo $M_k(A)$ el menor principal de A de k filas y k columnas

$\det(M_1(A)) = \det(4) = 4 > 0$ ✓

$\det(M_2(A)) = \det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 0 > 0$

$\det(M_3(A)) =$

$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1{,}64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1{,}64 & 0 & 9{,}07 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1{,}64 \\ 1{,}64 & 9{,}07 \end{pmatrix} =$

$1 \cdot (4 \cdot 9{,}07 - 1{,}64^2) = 33{,}6704 > 0.$ ✓

Por ende, $A > 0$

Busco la descomposición de Cholesky, sabiendo que $A > 0$ y A simétrica (hermitiana), usando aritmética de punto flotante de 2 dígitos y redondeo

$$A = LL^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{21} l_{11} & l_{31} l_{11} \\ l_{21} l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} \\ l_{31} l_{11} & l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

donde L triangular inferior

elijo los elementos de la diagonal > 0

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1,64 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,64 & 0 & 9,07 \end{pmatrix} \Downarrow fl$$

$$fl(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1,6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1,6 & 0 & 9,1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11}^2 \\ a_{21} = a_{12} = l_{21} l_{11} \\ a_{31} = a_{13} = l_{31} l_{11} \\ a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \\ a_{23} = a_{32} = l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} \\ a_{33} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{cases}$$

(1) $l_{11} = \sqrt{fl(a_{11})}$

$l_{11} = fl(\sqrt{4})$

$l_{11} = fl(2) = 2$

(2) $l_{21} = fl\left(\frac{fl(a_{21})}{l_{11}}\right) = fl\left(\frac{0}{2}\right) = 0$

(3) $l_{31} = fl\left(\frac{fl(a_{31})}{l_{11}}\right) = fl\left(\frac{1,6}{2}\right) = fl(0,8) = 0,8$

(4) $l_{22} = fl\left(\sqrt{fl(a_{22}) - fl(l_{21}^2)}\right) = fl\left(\sqrt{1 - 0^2}\right) = fl(1) = 1$

(5) $l_{32} = fl\left(\frac{fl(a_{32}) - fl(l_{31} \cdot l_{21})}{fl(l_{22})}\right) = fl\left(\frac{0 - 0}{1}\right) = 0$

(6) $l_{33} = fl\left(\sqrt{fl(a_{33}) - fl(l_{31}^2) - fl(l_{32}^2)}\right) = fl\left(\sqrt{9,1 - 0,64 - 0}\right) =$

$fl\left(\sqrt{fl(9,1 - 0,64)}\right) = fl\left(\sqrt{fl(8,46)}\right) = fl\left(\sqrt{8,5}\right) = fl(2,9154759..) = 2,9$

$$A \cong \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,8 & 0 & 2,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2,9 \end{pmatrix}$$

ALC: 1er parcial

b) Usando la descomposición obtenida en A, resuelvo $Ax = b$ para $b = (4, -1, 1{,}64)$ con arit. punto flotante de 2 dígitos y redondeo:

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow L \cdot L^T x = b \Rightarrow \begin{cases} L \cdot Y = b \\ L^T x = Y \end{cases}$$

$b = fl(b) = (4, -1, 1{,}6)$

① $LY = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0{,}8 & 0 & 2{,}9 & 1{,}6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$2x_1 = 4$

$x_1 = fl(4/2) = 2$

$x_2 = -1$

$0{,}8 \cdot x_1 + 2{,}9 \cdot x_3 = 1{,}6$

$$x_3 = fl\left(\frac{fl(1{,}6 - fl(0{,}8 \cdot 2))}{2{,}9}\right) = fl\left(\frac{0}{2{,}9}\right) = 0$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② $L^T x = Y$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0{,}8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2{,}9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2{,}9x_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_3 = 0}$$

$\underline{x_2 = -1}$

$2x_1 + 0{,}8x_3 = 2$

$$x_1 = fl\left(\frac{fl(2 - fl(0{,}8x_3))}{2}\right)$$

$$\underline{x_1 = fl\left(\frac{fl(2 - 0)}{2}\right) = 1}$$

~~Por esta razón, los televidentes hacen~~