Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Producto Matricial por bloques

Una matriz rectangular A puede particionarse en submatrices trazando líneas horizontales entre filas seleccionadas y líneas verticales entre columnas. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puede particionarse de alguna de las siguientes formas:

$$(i)\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(iii)\ \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (iv)\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En (i) la matriz A es dividida en 4 submatrices

$$A_{11} = [1],\ A_{12} = [4, 2],\ A_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que en (ii) y (iii) la partición es en columnas y filas respectivamente. Observar que las líneas se extienden de comienzo a fin; particiones como las siguientes no son válidas:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & \multicolumn{1}{|c}{4} & 2 \\ \cline{2-2} 2 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{2} \\ \cline{3-3} 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc} 1 & \multicolumn{1}{|c}{4} & 2 \\ \hline 2 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{2} \\ 1 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{1} \end{array}\right)$$

Las submatrices de una partición usualmente se las llama **bloques** y una matriz particionada es usualmente llamada **matriz en bloques**.

Consideremos de aquí en más las matrices $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ y $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Las siguientes son algunas de las reglas y observaciones para la realización de la multiplicación matricial en bloques.

1. Si $B = (B_{11}, \ldots, B_{1n})$ es una partición en columnas de la matriz B (es decir, $B_{1k} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix}$ para $1 \le k \le n$), entonces la partición en bloques del producto AB en columnas es

   $$AB = (A\,B_{11}, A\,B_{12}, \ldots, A\,B_{1n})$$

   En particular, si I es la matriz identidad de orden p entonces

   $$A = AI = A(e_1, e_2, \ldots, e_p) = (Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_p)$$

   y podemos observar que la columna j-ésima de A se puede escribir como Ae_j para $j = 1, \ldots, p$.

2. De forma análoga, si A es particionada por filas como $A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix}$ donde $A_{k1} = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kp})$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_{11}B \\ A_{21}B \\ \vdots \\ A_{m1}B \end{pmatrix},$$

y tomando $A = I$ se tiene que la fila i de B se puede escribir como $e_i^t B$ para $i = 1, \ldots, m$.

3. Si $B = (B_1, B_2)$, con $B_1 \in \mathbb{K}^{p\times r}$ y $B_2 \in \mathbb{K}^{p\times(n-r)}$ entonces

$$A\,(B_1, B_2) = (A\,B_1, A\,B_2).$$

Esto se observa a partir de aplicar la Regla 1 agrupando las columnas de B de forma conveniente.

4. Si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ donde $A_1 \in \mathbb{K}^{k\times p}$ y $A_2 \in \mathbb{K}^{(m-k)\times p}$ entonces

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1\,B \\ A_2\,B \end{pmatrix}.$$

Esto se observa a partir de aplicar la Regla 2 agrupando las filas de A de forma conveniente.

5. Si $A = (A_1, A_2)$ y $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ con $A_1 \in \mathbb{K}^{m\times s}, A_2 \in \mathbb{K}^{m\times(p-s)}, B_1 \in \mathbb{K}^{s\times n}$ y $B_2 \in \mathbb{K}^{(p-s)\times n}$ entonces

$$(A_1, A_2)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = (A_1B_1 + A_2B_2).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=s+1}^{p} a_{ik}b_{kj} \\ &= (A_1B_1)_{ij} + (A_2B_2)_{ij} = (A_1B_1 + A_2B_2)_{ij}\end{aligned}$$

6. Si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix},$$

Aquí debe cumplirse que la partición vertical de A coincide con la partición horizontal de B, es decir, el número de columnas de A_{11} y A_{21} es igual al número de filas de B_{11} y B_{12}, y el número de columnas de A es igual al número de filas de B.
Verifiquemos que funciona usando las reglas anteriores:

$$AB \overset{\text{(Regla 3)}}{=} \left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} \right)$$

$$\stackrel{\text{(Regla 4)}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$\stackrel{\text{(Regla 5)}}{=} \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

7. Consideremos finalmente el caso general. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times p}$ particionada en r filas de bloques y s columnas de bloques, con cada bloque $A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times p_j}, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$:

$$A = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & & p_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} m_1 + \ldots + m_r = m \\ p_1 + \ldots + p_s = p \end{cases}$$

Y sea $B \in \mathbb{K}^{p \times n}$ una matriz en bloques con s filas de bloques y t columnas de bloques:

$$B = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & & n_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \dots & B_{st} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} p_1 + \ldots + p_s = p \\ n_1 + \ldots + n_t = n \end{cases}$$

Si todos los productos $A_{ik}B_{kj}$ en

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}, \quad i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, t$$

se encuentran bien definidos, entonces

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \dots & B_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \dots & C_{rt} \end{pmatrix}$$

Para que el producto por bloques pueda realizarse se tienen los siguientes requerimientos:

a) La estructura de las filas de los bloques de B debe coincidir con la estructura de las columnas de los bloques de A: la matriz B debe tener una cantidad de filas de bloques que coincida con la cantidad de columnas de bloques de A.

b) Deben coincidir las dimensiones respectivas para hacer posible el producto bloque a bloque: si consideramos la columna i-ésima de bloques de A (es decir, $A_{1i}, A_{2i}, \ldots$), y la i-ésima fila de bloques de B (es decir, $B_{i1}, B_{i2}, \ldots$) el producto $A_{1i}B_{i1}$ debe poder realizarse, para lo cual, $\#cols(A_{1i}) = \#filas(B_{i1})$ para todo i.

c) La partición en filas de bloques de A y en columnas de bloques de B puede ser cualquiera.

La partición en bloques de $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ está determinada por la partición de las filas de A y las columnas de B:

$$C = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n_1 & & n_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \dots & C_{rt} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} n_1 + \ldots + n_t = n \\ m_1 + \ldots + m_r = m \end{cases}$$

Ejemplo 1. Usualmente es muy útil escribir el producto matriz-vector Ax, con $x \in \mathbb{K}^p$, como una combinación lineal de las columnas de A. Veamos que esto es un caso particular de la multiplicación en bloques. Si A es particionada por columnas como $A = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1p})$ entonces para que el producto en bloques sea realizable, x debe particionarse en filas de bloques de la misma forma. Luego,

$$Ax = (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1p}) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \vdots \\ \hline x_p \end{array}\right) = x_1 A_{11} + x_2 A_{12} + \cdots + x_p A_{1p}.$$

Ejemplo 2.

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$$

Aquí tenemos un caso particular de la Regla 6 donde se verifican las condiciones: hay dos columnas de bloques en A y dos filas de bloques en B. Además, coinciden las dimensiones respectivas para que el producto sea realizable. Observando la Regla 7, el producto C tiene la misma partición que A y B:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \hline c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right)$$

Veamos qué operaciones se realizan para el cálculo de cada bloque:

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \underbrace{a_{11} \cdot b_{11}}_{1\times1 \,\cdot\, 1\times1} + \underbrace{(a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}}_{2\times1 \,\cdot\, 1\times2}$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \underbrace{a_{11} \cdot (b_{12}, b_{13})}_{1\times1 \,\cdot\, 1\times2} + \underbrace{(a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{1\times2 \,\cdot\, 2\times2}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot b_{11}}_{2\times1 \,\cdot\, 1\times1} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}}_{2\times2 \,\cdot\, 2\times1}$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} (b_{12}, b_{13})}_{2\times1 \,\cdot\, 1\times2} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{2\times2 \,\cdot\, 2\times2}$$

Observar que todos los productos son realizables.

Ejercicio para el lector. Dadas las siguientes particiones, determinar si el producto por bloques es realizable y en tal caso, determinar las dimensiones de los bloques de C y calcularlos.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejercicio

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar, mediante inducción en la dimensión de la matriz, que si A y B son triangulares inferiores (superiores) entonces el producto AB es triangular inferior (superior).

Resolución. Probaremos esta propiedad para matrices cuadradas y triangulares inferiores, y la inducción la realizaremos en n, el tamaño de la matriz. El mecanismo para la demostración es similar a cualquier demo por inducción: por un lado podemos asumir que la propiedad es cierta para matrices de tamaño n y probar que vale para tamaño $n+1$, o podemos probar la propiedad para matrices de tamaño n asumiendo que la propiedad vale para matrices de tamaño estrictamente menor a n.

Utilizando este segundo esquema, nuestra **hipótesis inductiva** será:

Para cualquier $A, B \in \mathbb{K}^{k\times k}$ matrices triangulares inferiores, <u>con $k < n$</u>, el producto AB es triangular inferior.

Caso base. Considerando $n = 1$, la propiedad se cumple trivialmente para escalares.

Paso inductivo. Nuestro objetivo aquí es probar que la propiedad se cumple para matrices de tamaño $n \times n$. Considerando $n > 1$, aquí es donde nos resulta útil la partición en bloques, ya que al ser éstos de tamaño menor a n podremos aplicar el argumento inductivo. Luego, probaremos que AB es triangular inferior para $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ asumiendo que vale nuestra hipótesis inductiva (i.e., que la propiedad vale para matrices de tamaños menores).

Consideremos la partición en bloques cuadrados:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

Asumiendo $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con n par[1], entonces los bloques A_{ij} y B_{ij} son de tamaño $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$, para $1 \leq i, j \leq 2$. Nuestras matrices A y B son triangulares inferiores, por lo tanto A_{11}, A_{22}, B_{11} y B_{22} deben ser triangulares inferiores, $A_{12} = 0$ y $B_{12} = 0$.

Dadas estas dos matrices triangulares inferiores veamos cómo es el producto AB:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + 0 \cdot B_{21} & A_{11} \cdot 0 + 0 \cdot B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21} \cdot 0 + A_{22}B_{22} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} & 0 \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{array}\right)$$

Observar que el bloque $(1, 2)$ es una matriz nula. Para terminar de demostrar que este producto es triangular inferior, debemos ver que el bloque $(1, 1)$ y el bloque $(2, 2)$ son triangulares inferiores (observar que el bloque $(2, 1)$ no nos importa).

En el bloque $(1, 1)$ tenemos el producto $A_{11}B_{11}$. Aquí es donde podemos aplicar nuestra hipótesis inductiva ya que estamos ante el producto de dos matrices triangulares inferiores de tamaño menor estricto a n. El mismo argumento podemos aplicarlo para el bloque $(2, 2)$: A_{22} y B_{22} son dos matrices triangulares inferiores de tamaño menor estricto a n y por lo tanto $A_{22}B_{22}$ también es triangular inferior por H.I.

[1] Luego de leer toda la resolución, queda como ejercicio para el lector verificar que para n impar el producto por bloques es realizable.

Verificando que los bloques $(1,1)$ y $(2,2)$ del producto de matrices son triangulares inferiores entonces la matriz AB es triangular inferior, lo que concluye nuestra demostración. $\square$

Ejercicios para el lector

- Repetir la demostración pero considerando una nueva partición donde la primera fila y columna se separan del resto de la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

  donde $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n-1}$ y $A_{12} = (a_{12}, \dots, a_{1n})$ es un vector fila de $n-1$ componentes. La misma descripción se aplica a la partición de B.

- Repetir la demostración para el caso triangular superior.