# Álgebra Lineal Computacional - Segundo Parcial

Primer cuatrimestre de 2021 (6/7/2020)

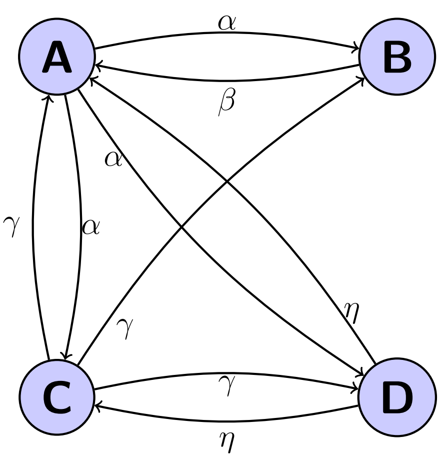
| Nombre y Apellido | 1 | 2 | 3 | Nota |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

1. Los puntos A, B, C y D del gráfico representan cuatro páginas de Internet. Las flechas indican los enlaces existentes en las páginas:

   - Desde la página A, hay enlaces a las páginas B, C y D.
   - Desde la página B, hay solo un enlace a la página A.
   - Desde la página C, hay enlaces a las páginas A, B y D.
   - Desde la página D, hay enlaces a las páginas A y C.

   Cada minuto, los visitantes de una página pasan a otra página siguiendo alguno de los enlaces en la página en la que se encuentran. Pueden elegir cualquiera de los enlaces de la página con la misma probabilidad.




   (a) Escribir la matriz de transición $P$.

   (b) Si inicialmente hay 2700 visitantes en cada página, ¿cuántos visitantes habrá luego de 1 minuto en cada página? ¿Cuántos visitantes habrá luego de 3 minutos del momento inicial en cada página?

   (c) Indicar si el estado inicial $v_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ tiene estado límite y en tal caso calcularlo. Decidir si dado cualquier estado inicial $v_0$ habrá un estado límite.

   (d) Decidir si existe $P^\infty$. Si existe, calcularla.

2. Dada una matriz $A$, notamos $A = D + L + U$, donde $D$ es diagonal, $L$ triangular inferior estricta y $U$ triangular superior estricta.

   (a) Probar que $x$ es solución de $Ax = b$ si y sólo si $x$ satisface:

$$\left(I + \frac{1}{2}L\right)x = -\left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)x + b$$

(b) Considerar el método iterativo derivado de la formulación anterior:

$$x_{n+1} = Bx_n + c,$$

donde $B = -\left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\left(D - I + \frac{1}{2}L + U\right)$ y $c = \left(I + \frac{1}{2}L\right)^{-1} b$. Probar que $\lambda$ es un autovalor de $B$ si y sólo si $\lambda$ es raíz de la ecuación:

$$\det\left(D - I + \frac{1}{2}L + U + \lambda\left(I + \frac{1}{2}L\right)\right) = 0.$$

(c) Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 + a^2 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que el método anterior converge si y sólo si $|a| < 1$.

(d) Probar que para que el método de Jacobi converja se debe cumplir la misma condición. ¿Qué método es preferible para la matriz $A$?

3. En un estudio de una especie de roedores en peligro de extinción, se cuenta la cantidad de estos roedores que se detectan en un punto de observación a lo largo de 2 años, obteniéndose los valores que figuran en la tabla.

| $x$ | 0. | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1. | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 200. | 192. | 170. | 139. | 105. | 73. | 47. | 28. | 15. | 8. | 4. |

(a) Hallar los valores de $a$, $b$ y $c$ que se obtienen al ajustar los datos con una función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ utilizando cuadrados mínimos. Calcular el error $E = \sum_i (y_i - f(x_i))^2$.

(b) Hallar los valores de $k$ y $d$ que se obtienen al ajustar los datos con una función del tipo $g(x) = ke^{dx^2}$ utilizando cuadrados mínimos. Calcular el error $E = \sum_i (y_i - g(x_i))^2$.

(c) A partir de los ajustes obtenidos, ¿cuántos roedores se podrían observar en $t = 0.3$ según la estimación polinomial? ¿Cuántos roedores se podrían observar en $t = 0.3$ según la estimación exponencial?

(d) Graficar conjuntamente los datos y los dos ajustes.