Valores singulares

Ejercicio 7. Considerar la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular una descomposición en valores singulares de $\boldsymbol{A}$.

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

a) $$A^t A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+9 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

Avds de $A^t A$

$$\chi_{A^tA}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 25 & -15 \\ -15 & \lambda - 25 \end{vmatrix} = (\lambda - 25)^2 - 15^2 = 0$$

Entonces quiero

$$(\lambda - 25)^2 = 15^2$$

$$|\lambda - 25| = 15$$

$$\lambda_1 = 40 \Rightarrow \sigma_1 = 2\sqrt{10}$$

$$\lambda_2 = 10 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{10}$$

Tengo Σ

Avecs

$$Nu \begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{40} = \langle (1,1) \rangle$$

$$Nu \begin{bmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow E_{10} = \langle (-1,1) \rangle$$

Tengo V

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Falta U

$$A v_1 = \sigma_1 . u_1$$

CA

$$2\sqrt{10} . \sqrt{2} = 2 . 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\sqrt{10} . u_1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{10}\sqrt{2}} . \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = u_1 \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

con $\|u_1\| = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}}$

$= 1$ ✓

$$A v_2 = \sigma_2 . u_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{10} . u_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = u_2 \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

con $\|u_2\| = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}}$

$= 1$ ✓

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$A = U \Sigma V^*$$

Atenti?

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

Reviso

singular value decomposition	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Result

$M = U.\Sigma.V^\dagger$

where

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

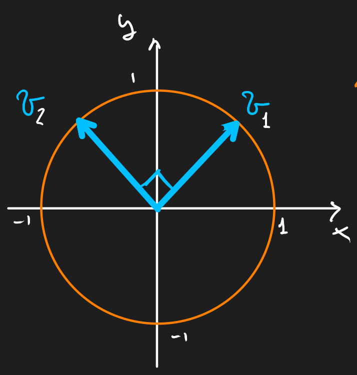
$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

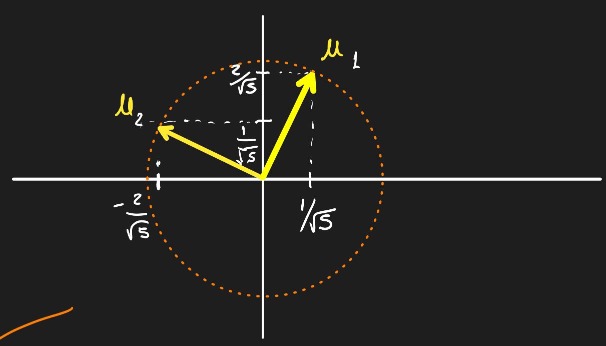
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(b) Dibujar el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ y la elipse $\{\boldsymbol{Ax} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$, señalando los valores singulares y los vectores singulares a izquierda y a derecha.

$\sqrt{10} \approx 3{,}16$



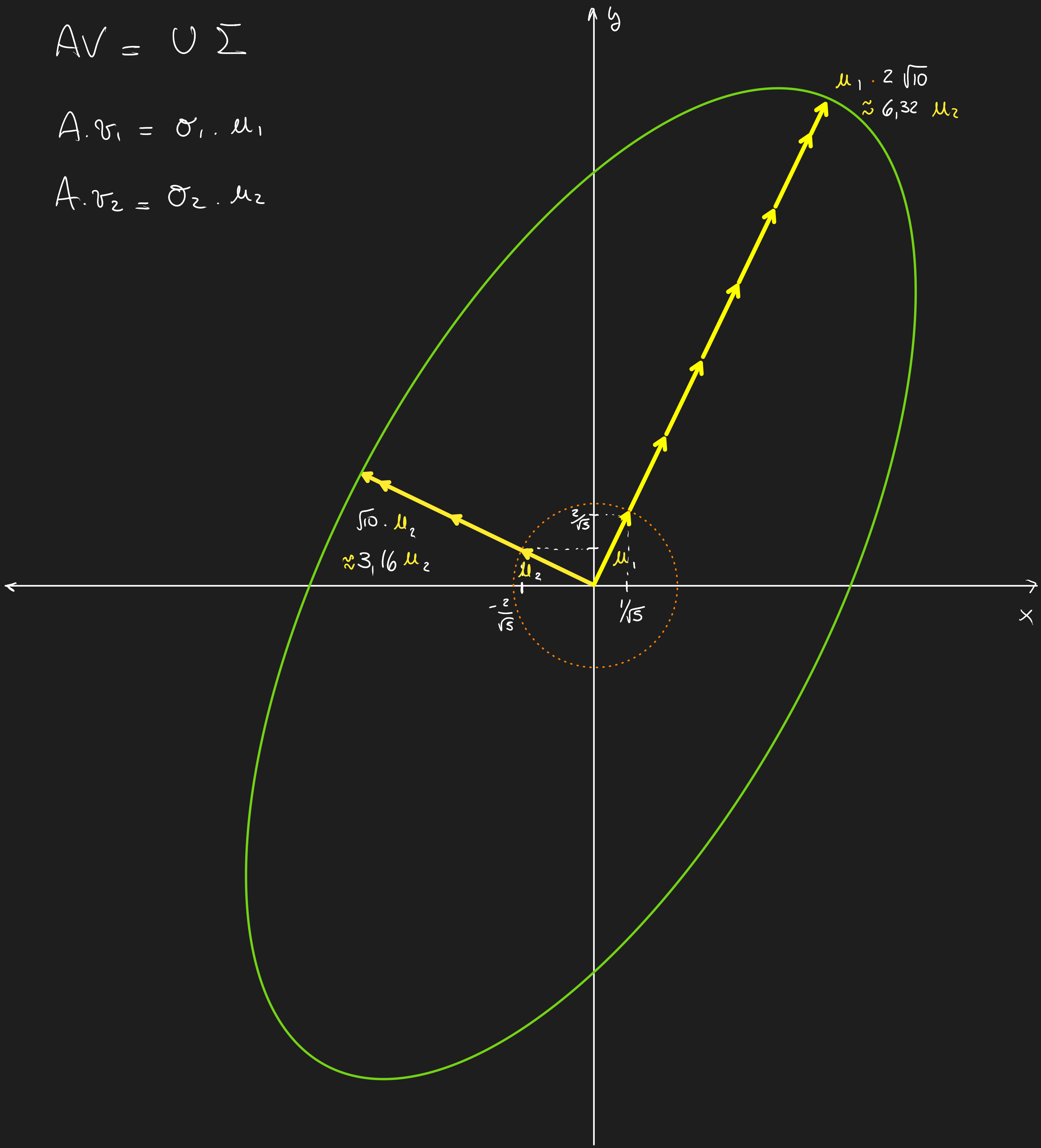


$$A = U \Sigma V^t$$

$$AV = U \Sigma$$

$$A . v_1 = \sigma_1 . u_1$$

$$A . v_2 = \sigma_2 . u_2$$



(c) Calcular $\|\boldsymbol{A}\|_2$ y $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})$.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\text{min avd } A^tA}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cond}_2\, A = 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 2$$

(d) Calcular $\boldsymbol{A}^{-1}$ usando la descomposición hallada.

Como $A = U \Sigma V^*$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V^*}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^*$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -2/\sqrt{3} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{U^*}$$

Ejercicio 8. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (b)\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

```
Lo mismo que ej1 pero ahora Sigma queda con una columna de ceros en a)
y una fila de ceros en b)

Recuerdo: Sigma tiene la misma dimensionalidad que la matriz a descomponer

Los vectores U y V se completan con vectores ortonormales a los otros
dos ya obtenidos.

Pues el rango de las matrices del ejercicio es 2,
pero necesitamos 3 vectores
- para V* en a) pues Sigma será de 2x3 y V* de 3x3 (con U de 2x2)
- para U en b) pues Sigma será de 3x2 y U de 3x3 (con V* de 2x2)
```

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

$$2\times 3 = 2\times 2 \; \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \; 3\times 3$$

$$3\times 2 = 3\times 3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \; 2\times 2$$

Ejercicio 9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\|Av\|_2 \geq 15\|v\|_2$.

Veo $A^t A$

Result

$M = U.\Sigma.V^{\dagger}$

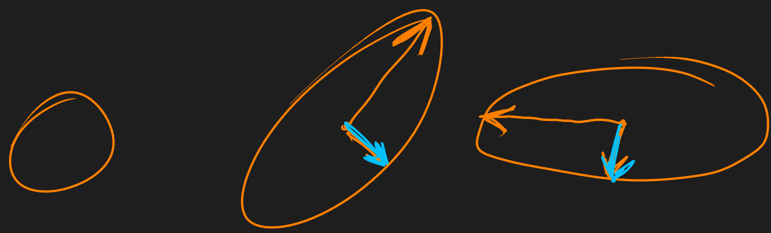
where

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \min \sigma_i$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$



Sé que

$$\|A\|_2 = \max_{v} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \max \text{ valor singular de } A = 30$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} \leq 30$$

$$\min_{v} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \min \text{ valor singular de } A = 15$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} \geq 15$$

Ejercicio 10. Mostrar que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene un valor singular nulo si y sólo si tiene un autovalor nulo.

Si $\lambda = 0$ es Avd de A

$\Rightarrow \chi_A = \lambda^j(\text{ algo })$ con $j \geq 1$

$\Rightarrow)$ $\sigma_i = 0$

avd de A^tA

$(A^tA)\, v_i = \sigma_i\, v_i$

?

$A^t A v_i = 0 \cdot v_i$

$A^t A v_i = \vec{0}$

$A A^t A v_i = A \cdot \vec{0}$

$\Leftarrow)$ $\lambda_i = 0$

$\Rightarrow A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$

$A v_i = 0 \cdot v_i$

$A v_i = \vec{0}$

$A^t A v_i = A^t \vec{0}$

$(A^tA) v_i = \vec{0}$

$(A^tA) v_i = 0 \cdot v_i$ $\therefore$ 0 es val.sing. de A.

Ejercicio 11. Sea que $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, demostrar que los valores singulares de la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ son $\sqrt{1+\sigma_i^2}$ donde $\boldsymbol{I}_n$ es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y σ_i es el i-ésimo valor singular de $\boldsymbol{A}$.

Bloques

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n} \;\vdots\; A^t \right] \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline & A & \end{matrix}\right] = I_n \cdot I_n + A^t A$$

$$= I_n + A^t A$$

$$I_n = I_n I_n I_n$$

$$A^t A = (U \Sigma V^*)^* U \Sigma V^*$$

$$= V \Sigma^* U^* U \Sigma V^*$$

$$= V \Sigma^2 V^*$$

$$I_n + A^t A = I_n + V \Sigma^2 V^*$$

$$= V \underbrace{\left(I_n + \Sigma^2\right)}_{\begin{bmatrix} 1+\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\sigma_2^2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1+\sigma_n^2 \end{bmatrix}} V^*$$

Tomo raíz de los elementos y obtengo valores singulares.

Ejercicio 12. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\sigma > 0$. Demostrar que σ es valor singular de $\boldsymbol{A}$ si y solo si la matriz $\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^* & -\sigma \boldsymbol{I}_n \\ -\sigma \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}}_{B}$ es singular, donde $\boldsymbol{I}_n$ es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

$\Rightarrow)$ σ es val. sing de $A \Rightarrow \sigma^2$ es avl de $A^*A \Rightarrow \exists v \neq 0 \,/\, A^*A v = \sigma^2 v$

$A^*A.v = \sigma^2.v = \sigma^2.I_n.v \Rightarrow A^*Av - \sigma^2 I_n v = 0$

$(A^*A - \sigma^2 I_n)v = 0 \underset{v\neq 0}{\Rightarrow} A^*A - \sigma^2 I_n = 0$

Pero $\det(B) = A^*A - \sigma^2 I_n = 0 \Rightarrow B$ es singular

$\Leftarrow)$ $\exists x \neq 0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,/\, \begin{pmatrix} A & -\sigma I \\ -\sigma I & A^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} Ax_1 = \sigma x_2 \\ A^t x_2 = \sigma x_1 \end{array}$

① $A^tAx_1 = \sigma A^t x_2 = \sigma^2 x_1 \rightarrow \sigma$ vs de A.

$AA^t x_2 = \sigma^2 x_2$

B es singular

$$\exists \vec{x} \neq \vec{0} \,/\, \begin{bmatrix} A^* & -\sigma I_n \\ -\sigma I_n & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A^* x_1 - \sigma.I_n.x_2 = 0$

$A^* x_1 = \sigma x_2$

$-\sigma.I_n.x_1 + Ax_2 = 0$

$Ax_2 = \sigma x_1$

$\Rightarrow A^*Ax_2 = A^*\sigma x_1$

$= \sigma \underbrace{A^* x_1}$

$\Rightarrow A^*Ax_2 = \sigma.\sigma.x_2$

$\Rightarrow A^*Ax_2 = \sigma^2.x_2$

$\Rightarrow \sigma^2$ es avd de A^*A

$\Rightarrow \sqrt{\sigma^2} = \sigma$ es val. sing.

de A

$\boxtimes$

Ejercicio 13. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, probar que los valores singulares de $\boldsymbol{A}^t$, $\bar{\boldsymbol{A}}$ y $\boldsymbol{A}^*$ son iguales a los de $\boldsymbol{A}$.

Los autovalores de AtA y de AAt son los mismos, pues ambos algoritmos son válidos para obtener los valores singulares de A.

Por lo tanto A y At tienen los mismos valores singulares.

A^tA tiene los mismos avds que $\overline{A^tA}$?

$$A^tA = (U \Sigma V^*)^t (U \Sigma V^*)$$

$$= \bar{V} \Sigma \underbrace{U^t U}_{I} \Sigma V^*$$

$$= \bar{V} \Sigma^2 V^*$$

$$\underbrace{\overline{A^tA}}_{= \bar{A}^t \bar{A}} = \overline{\bar{V} \Sigma^2 V^*} = V \Sigma^2 V^t$$

$$(A^tA)^* = A^*(A^t)^* = A^* \cdot \bar{A} = \bar{A}^t \bar{A}$$

Ejercicio 14. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango r, con valores singulares no nulos: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

(a) Probar que $\boldsymbol{A}$ puede escribirse como una suma de r matrices de rango 1.

(b) Probar que dado $s < r$ se pueden sumar s matrices de rango 1 matrices adecuadamente elegidas de manera de obtener una matriz $\boldsymbol{A}_s$ que satisface:

$$\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_s\|_2 = \sigma_{s+1}$$

Nota: $\boldsymbol{A}_s$ resulta ser la mejor aproximación a $\boldsymbol{A}$ (en norma 2), entre todas las matrices de rango s.

a) Uso escritura de SVD vista en clase como:

$$A = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^* + \sigma_2 \cdot u_2 \cdot v_2^* + \dots + \sigma_r \cdot u_r \cdot v_r^*$$

b) Hecho en clase.

La norma 2 de eso será el valor singular más grande, que en este caso es único, que es el sigma_s+1

Nota de Nota:
Que As resulte ser la mejor aproximación de A en norma 2, me da a entender que los valores singulares de mayor a menor se corresponden con la información contenida en la matriz original de mayor a menor.

En otras palabras, el primer valor singular con sus respectivos vectores la mayor cantidad de información de A.
Le sigue el segundo valor singular, y así hasta alcanzar el último valor singular, que es la parte de la descomposición que contiene la información menos significativa de A.

Ejercicio 15. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la matriz de rango 2 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

(b) Hallar la matriz de rango 1 que mejor aproxima a $\boldsymbol{A}$ en norma 2.

a) $A^t A =$

Result

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 0 \\ 8 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Eigenvalues
$\lambda_1 = 25$
$\lambda_2 = 9$
$\lambda_3 = 4$
Eigenvectors
$v_1 = (1, 1, 0)$
$v_2 = (-1, 1, 0)$
$v_3 = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow \sigma_1 = 5$

$\Rightarrow \sigma_2 = 3$

$\Rightarrow \sigma_3 = 2$

Quiero quedarme solo con σ_1 y σ_2 (tiro σ_3)

$$\tilde{A}_2 = \sigma_1 . u_1 . v_1^* + \sigma_2 . u_2 . v_2^*$$

$A . v_i = \sigma_i . u_i$:

$$\frac{1}{5} \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \overset{v_1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = u_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \underbrace{5}_{\sigma_1} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_1^*} + \underbrace{3}_{\sigma_2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_2^*}$$

$$= \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\tilde{A}_1 = \underbrace{5}_{\sigma_1} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{v_1^*} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 & 0 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 16. Dada una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, cuya descomposición en valores singulares reducida es $\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{V}}^t$. Se define la pseudo-inversa de $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}^\dagger = \hat{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{U}}^t$.

(a) Verificar que $\boldsymbol{A}^\dagger$ satisface las siguientes propiedades:

i. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

ii. $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger$

iii. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)^t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger$

iv. $(\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})^t = \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}$

(b) Probar que si dos matrices $\boldsymbol{B}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ satisfacen las 4 propiedades del ítem anterior, entonces verifican $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2$ y $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}$.

(c) Probar que la pseudo inversa de A es única.

a) i) $AA^+A = \hat U\hat\Sigma\hat V^t\,\hat V\hat\Sigma^{-1}\hat U^t\,\hat U\hat\Sigma\hat V^t$

$= \hat U\hat\Sigma\hat V^t\,\hat V\hat\Sigma^{-1}\hat U^t\,\hat U\hat\Sigma\hat V^t$

$= \hat U\hat\Sigma\,\hat\Sigma^{-1}\hat\Sigma\,\hat V^t$

$= \hat U\hat\Sigma\hat V^t = A$

ii) Lo mismo.

$A = \hat U\hat\Sigma\hat V^t$

$A^+ = \hat V\hat\Sigma^{-1}\hat U^t$

iii) $(AA^+)^t = (A^+)^t A^t$

$= (\hat V\hat\Sigma^{-1}\hat U^t)^t(\hat U\hat\Sigma\hat V^t)^t$

$= \hat U\underbrace{\hat\Sigma^{-1}}_{\text{Diag}}\hat V^t\,\hat V\underbrace{\hat\Sigma}_{\text{Diag}}U^t$

$= I$?

b) ?

c) ?

Ejercicio 17. Caracterizar geométricamente y graficar la imagen de la esfera unitaria

$$S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\|_2 = 1\}$$

por la transformación $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notar que U y V* no están normalizados, asi que NO tengo una descomposición SVD (aunque sí son vectores ortogonales)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/\sqrt{5} \\ 2 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Input

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 2 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exact result

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4(\sqrt{5}-5) & 2(5+2\sqrt{5}) & 2(10+\sqrt{5}) \\ 2(20+\sqrt{5}) & -2(\sqrt{5}-10) & 40-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

singular value decomposition	$\begin{pmatrix} 4-\frac{4}{\sqrt{5}} & 2+\frac{4}{\sqrt{5}} & 4+\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 8+\frac{2}{\sqrt{5}} & 4-\frac{2}{\sqrt{5}} & 8-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Result

$M = U.\Sigma.V^\dagger$

where

$$M = \begin{pmatrix} 2.21115 & 3.78885 & 4.89443 \\ 8.89443 & 3.10557 & 7.55279 \end{pmatrix}$$

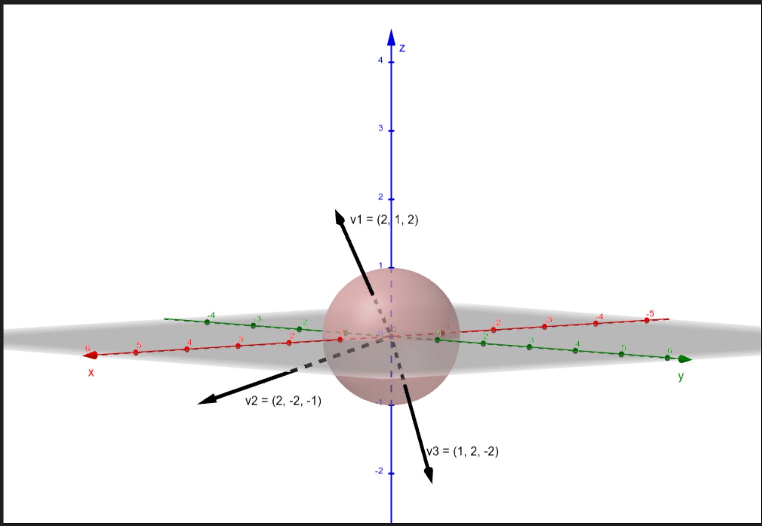
$$U = \begin{pmatrix} 0.447214 & -0.894427 \\ 0.894427 & 0.447214 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 13.4164 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

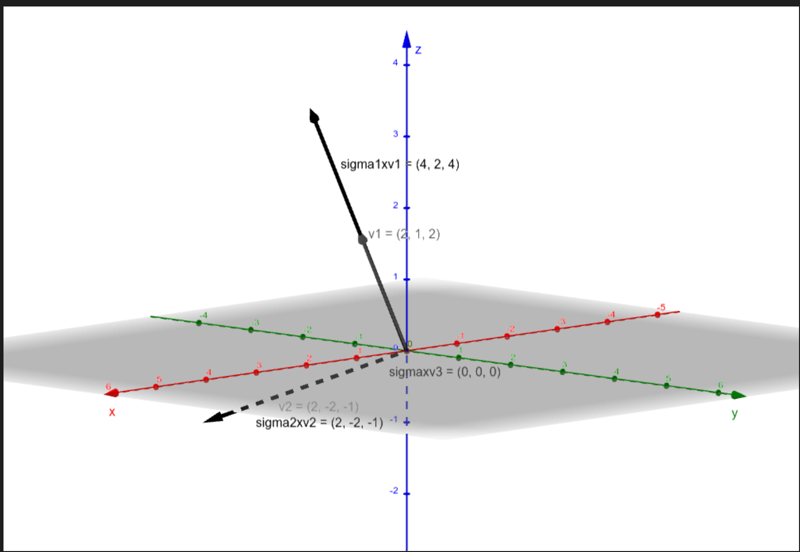
$$V = \begin{pmatrix} 0.666667 & 0.666667 & -0.333333 \\ 0.333333 & -0.666667 & -0.666667 \\ 0.666667 & -0.333333 & 0.666667 \end{pmatrix}$$

?

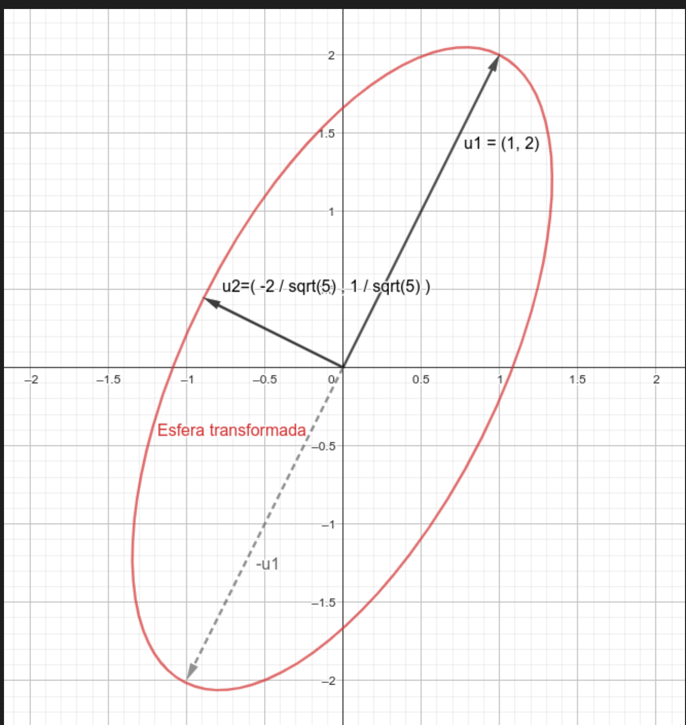
Será que la interpretación geométrica puedo pensarla de la misma forma que con SVD? donde tengo los vectores vi en R3 que definen mi espacio de entrada a los ui en R2 que definen mi espacio de llegada, multiplicados por un factor de escalamiento definido por los elementos de la diagonal de la matriz del centro dada.



v1 = (2, 1, 2)
v2 = (2, -2, -1)
v3 = (1, 2, -2)



sigma1xv1 = (4, 2, 4)
v1 = (2, 1, 2)
sigmaxv3 = (0, 0, 0)
v2 = (2, -2, -1)
sigma2xv2 = (2, -2, -1)



u1 = (1, 2)
u2=(-2 / sqrt(5) , 1 / sqrt(5))
Esfera transformada
-u1

Ejercicio 18. Hallar, si existe, una matriz A con coeficientes reales y del tamaño adecuado para que los valores singulares no nulos de $\boldsymbol{A}$ sean $\{\frac{3}{2}, 3\}$,

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{?\times ? \quad 3\times 1}_{} = 3\times 1 \qquad \underbrace{1\times 3 \quad ?\times ?}_{} = 1\times 3$$

$$A\in\mathbb{R}^{3\times 3} \qquad\qquad A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$A = U\,\Sigma\,V^*$$

$$A = U\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}V^*$$

3×3 pues $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

$\Rightarrow$ La 3° col de U no importa (pues $\sigma_3 = 0$)

$\Rightarrow$ La 3° fila de V^* no importa (pues $\sigma_3 = 0$)

elijo

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix}* & * & 0\\ * & * & 0\\ * & * & 0\end{bmatrix}$$

elijo

$$\Rightarrow V = \begin{bmatrix}* & * & *\\ * & * & *\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = U\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}V^*\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\left(\sigma_1\cdot u_1\cdot v_1^* + \sigma_2\cdot u_2\cdot v_2^*\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$=\left(3\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}* & * & *\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\cdot\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}* & * & *\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

elijo $v_1^* = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$

elijo $v_2^* = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$

$$=\left(3\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\cdot\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{3}{2}\cdot\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}}_{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix} + \frac{9}{2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}*\\*\\*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} + \frac{9}{2\sqrt{2}}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{\sqrt{2}} a + \frac{9}{2\sqrt{2}} x = 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} b + \frac{9}{2\sqrt{2}} y = 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} c + \frac{9}{2\sqrt{2}} z = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{\sqrt{2}} a = -\frac{9}{2\sqrt{2}} x$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{9}{2\sqrt{2}} x$$

$$a = \frac{9}{6} x$$

$$a = \frac{3}{2} x$$

$$b = \frac{3}{2} y$$

$$c = \frac{3}{2} z$$

Uh, me tenian que quedar ortogonales...

Creo que debería haber agregado solo esa condición para los v1 y v2 en vez de elegir dos particulares, y lo mismo con u1 y u2.

Lo otro que también queda es usar el segundo dato, que puede plantearse de manera parecida, y recien al final despejar las variables que quedaron.

Posiblemente haya una forma menos cuentosa de hacer ésto, debo consultar en clase.