Nombre y apellido:

Número de libreta:

1	2	3	4	Calificación
2	2,5	1,25	2,5	8,25 (7)

Álgebra Lineal Computacional

Recuperatorio del Segundo Parcial – 28 de Marzo de 2023

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4. ***Realice todos los ejercicios en hojas separadas.***

Ejercicio 1. Considerar las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & \beta+2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

y, en cada caso, el Método de la Potencia dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|} \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Bv^{(k-1)}}{\|Bv^{(k-1)}\|} \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t B v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases},$$

para $k \geq 1$.

a) (1 pt.) Corroborar que la matriz A satisface las hipótesis del Método de la Potencia. Hallar un subespacio S tal que si $v^{(0)} \in \mathbb{R}^4 - S$, r_k converja al autovalor de módulo máximo.

b) (0.5pts) Hallar un vector inicial $v^{(0)} \in \mathbb{R}^4$ que no sea autovector de A tal que r_k converja a un autovalor distinto al del ítem anterior.

c) (1 pt.) Para la matriz B, ¿para qué valores de β se verifican las hipótesis del método de la potencia? Probar que para $v^{(0)} = (1,0,0)$, r_k converge a un autovalor de B independientemente del valor de β.

Ejercicio 2. Se desea resolver un sistema de la forma $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

a) (1 pt.) ¿Puede utilizarse el método de Jacobi? ¿Y el de Gauss-Seidel?

b) (0.5 pts.) Se propone el método iterativo:

$$x_{x+1} = (I - A)x_n + b$$

Probar que si la sucesión $(x_n)_n$ generada por el método converge a un cierto vector x^*, entonces x^* es solución de $Ax = b$.

c) (1 pt.) Probar que el método del ítem anterior aplicado a A converge.

Ejercicio 3. Dada las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) (0.5 pts.) Verificar que el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones.

b) (1 pt.) Hallar la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$ de A.

c) (1 pt.) Calcular la pseudo inversa de A y utilizarla para hallar una solución x^* del sistema $Ax = b$. Buscar otra solución z del sistema y verificar si se cumple $\|x^*\|_2 < \|z\|_2$.

Ejercicio 4. Una empresa lleva un registro de la venta de sus productos. En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos, donde x es el año desde el comienzo de la actividad de la empresa e y la cantidad de productos vendidos ese año (en miles de unidades):

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2.74	6.77	0.41	7.07	8.78	22.44	45.05

a) (1 pt.) Hallar el polinomio $f(x) = c_0 + c_2x^2$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

b) (1 pt.) Ajustar una función de la forma $g(x) = (d_0 + d_1x)^3$ aplicando cuadrados mínimos sobre la función transformada convenientemente. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.

c) (0.5 pts.) Cuando las ventas excedan 80 mil unidades, la empresa abrirá una nueva fábrica para poder satisfacer la demanda. Para cada modelo de los ítems anteriores, ¿luego de cuántos años será necesario abrir una nueva fábrica?

Recuperatorio 2° parcial ALC

1)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Utilizando np.linalg.eig(A), los autovalores de A son $\{\overset{\lambda_1}{6}, \overset{\lambda_2}{2}, \overset{\lambda_3}{-2}, \overset{\lambda_4}{0}\}$ ✓

Como son 4 autovalores distintos, A es diagonalizable. ✓

Además hay un único autovalor de módulo máximo. Por lo tanto la matriz A satisface las hipótesis del método de la potencia. ✓

Con la misma función obtengo $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v^{(0)} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + a_4 w_4$$

para que r_k converja al autovalor de módulo máximo, tengo que garantizar que $a_1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad v^{(0)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$ ✓

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & -1 & 1 & t \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & 1 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & -1 & 1 & t \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 - F_2 \\ F_3 + F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z-x+y \\ 0 & 0 & -1 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z-x+y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-x+y+t \end{array}\right)_{F_4 + F_3} \underset{F_4/2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z-x+y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(z-x+y+t)}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x-y+\frac{z}{2}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{t}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & z-x+y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(z-x+y+t)}{2} \end{array}\right)$$

$F_1 + F_4$

no generan un subespacio.

$a_1 = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} + \frac{t}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{x-y+z+t}{2}$

x, y, z, t son escalares $\Rightarrow \frac{x-y+z+t}{2}$ es un número

si $v^{(0)} \in \frac{x-y+z+t}{2}$, r_k no va a converger al autovalor de módulo máximo $\Rightarrow$ Si $v^{(0)} \in \mathbb{R}^4 - S$, r_k converge al autovalor de módulo máximo

S es el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ $S: x - y + z + t = 0$ ok!

(Fijate que justo S está generado por $\langle w_2, w_3, w_4 \rangle$)

b)

$$v^{(0)} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + a_4 w_4$$

- Me piden que r_k converja a un autovalor distinto del autovalor de módulo máximo
  $\Rightarrow a_1 = 0$ ✓
- Me piden que $v^{(0)}$ no sea autovector de A
  $\Rightarrow a_2 \neq 0 \wedge a_3 \neq 0$ (por ejemplo) ya que $v^{(0)}$ será CL de w_2 y w_3 y w_4
  $\wedge\ a_4 \neq 0$

Como $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$, sí o sí necesitás que $a_2 = 0$ o $a_3 = 0$, si no $v^{(k)}$ no converge a autovector

Elijo un $v^{(0)}$ que satisface lo pedido

$$v^{(0)} = 0\, w_1 + 1\, w_2 + 1\, w_3 + 1\, w_4 = w_2 + w_3 + w_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} =$$

Alguno de estos debería ser 0.

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

NOTA

c)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & \beta+2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculo autovalores

$$\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & 7 \\ 0 & (\beta+2-\lambda) & 0 \\ 0 & 1 & (-4-\lambda) \end{vmatrix} = (\beta+2-\lambda)(-1-\lambda)(-4-\lambda) = 0$$

Los autovalores son $\{\beta+2, -1, -4\}$

Para que se cumplan las hipotesis del metodo de la potencia,

$$\beta+2 \neq 4$$
$$\beta \neq 2$$

Si $\beta=-6$, sigue habiendo un único autovalor de módulo máximo (-4) con m. a. $=2$, por lo que debo verificar si $E_{\lambda=-4}$ es de dimensión 2 (Tiene 2 autovectores L. I)

$\lambda=-4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1+4 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x+7z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{7}{3}z \\ y=0 \end{cases}$$

$E_{\lambda=-4} = (-\frac{7}{3}z, 0, z)$ $\dim(E_{\lambda=-4}) = 1$.

Si $\beta=-6$, B no es diagonalizable

Respuesta: β verifica las hipotesis del metodo $\forall \beta \in \mathbb{R} - \{2; -6\}$

NOTA

Calculo a_1, a_2, a_3 para $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -a_1 + 7a_3 = 1 \\ (\beta+2)\,a_2 = 0 \\ a_2 - 4a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\beta + 2 = 0 \ \vee \ a_2 = 0$$

Si $\beta = -2$, como vimos anteriormente, se cumplen las hipótesis y r_k converge a un autovalor. Si $\beta \neq -2$, $a_2 = 0$ y r_k converge a un autovalor. Esto sucede porque estoy considerando $(\beta+2)$ como el segundo autovalor de mayor módulo, pero si lo considero como el primer autovalor de mayor módulo se cumple lo mismo con a_1 ($\beta = -2 \vee a_1 = 0$) y si lo considero como el tercer autovalor de mayor módulo, se cumple lo mismo con a_3 ($\beta = -2 \vee a_3 = 0$) entonces Independientemente del valor de β, r_k converge a un autovalor de B

NOTA

2)

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \qquad A = D + U + L$$

$$D = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Jacobi

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}(U+L)\,x^{(n)} + D^{-1}b$$

Método de Gauss-Seidel

$$x^{(n+1)} = -(D+L)^{-1}U + (D+L)^{-1}b$$

a)

$\det(D) = 0 \Rightarrow D$ no es inversible y no se puede usar el metodo de Jacobi

$$\det(D) = \left|\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}(0) = 0$$

$$\det(D+L) = \left|\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}(0) = 0$$ $\Rightarrow (D+L)$ no es inversible y no se puede usar el metodo de Gauss-Seidel

b)

$$x^{(n+1)} = (I - A)\,x^{(n)} + b$$

· Si el metodo converge a x^*

$Ix^* = x^*$

$$x^* = (I - A)\,x^* + b$$

$$I x^* - (I - A)x^* = b$$

$$\cancel{I} - \cancel{I} + A \quad x^* = b$$

$$A\,x^* = b \quad \Rightarrow x^* \text{ es solución de } Ax = b$$

NOTA

c) Probar que el método del ítem anterior aplicado a A converge

$$T = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Utilizando np.linalg.eig(T), $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $\lambda_3 = 0$

$\rho(T) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \Rightarrow \rho(T) = \frac{1}{2}$

Como $\rho(T) < 1 \Rightarrow$ el método converge $\forall x^{(0)}$

$(\rho(T) < 1 \Leftrightarrow$ El método converge $\forall x^{(0)})$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) $Ax = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x - y + z = 0 \\ -z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = y - 3 \end{cases}$$

Los x solución del sistema tienen la forma $(y-3\,;\, y\,;\, 3)$, es decir, se trata de los infinitos puntos de una recta, y por lo tanto el sist. $Ax=b$ tiene infinitas soluciones

b) Hallar la descomposición en valores singulares $A = U \Sigma V^T$ de A

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo los autovalores y autovectores de A^TA con np.linalg.eig(A.T@A)

np.linalg.eig(A^TA) te devuelve los autovectores por columna, no por fila

$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} -0{,}41 \\ 0{,}71 \\ -0{,}58 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0{,}82 \\ 0 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0{,}41 \\ 0{,}71 \\ 0{,}58 \end{pmatrix}$ con v_1, v_2, v_3 ya normalizados $\|v_1\|_2 = \|v_2\|_2 = \|v_3\|_2 = 1$

$v_1 = \begin{pmatrix} -0{,}41\ldots \\ -0{,}41\ldots \\ 0{,}81\ldots \end{pmatrix}$

v_1, v_2, v_3 son ortonormales ya que A^TA es simétrica def ≥ 0

$\sigma_1 = \sqrt{4} = 2 \qquad \sigma_2 = \sqrt{1} = 1 \qquad \sigma_3 = \sqrt{0} = 0$

Hasta ahora tengo

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V^T = \begin{pmatrix} -0{,}41 & -0{,}82 & 0{,}41 \\ 0{,}71 & 0 & 0{,}71 \\ -0{,}58 & 0{,}58 & 0{,}58 \end{pmatrix}^T$$

Arrastrás el error

NOTA

calculo las columnas de la matriz U

$$U_1 = \frac{1}{2} A v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}41 \\ 0{,}71 \\ -0{,}58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}29 \\ -0{,}85 \\ 0{,}29 \end{pmatrix}$$

Arrastrás el error, pero bien calculado

$$U_2 = 1\ A . v_2 = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}82 \\ 0 \\ 0{,}58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}58 \\ -0{,}24 \\ -0{,}58 \end{pmatrix}$$

Para calcular U_3, dado que $\sigma_3 = 0$, puedo utilizar gram-Schmidt para hallar un vector ortonormal a u_1 y u_2, o en este caso, por ser $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, puedo realizar el producto vectorial, obteniendo $u_3 = u_1 \times u_2$ ✓

$$u_3 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -0{,}29 & -0{,}85 & 0{,}29 \\ 0{,}58 & -0{,}24 & -0{,}58 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(0{,}56) - \hat{\jmath}(0) + \hat{k}(0{,}56)$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0{,}56 \\ 0 \\ 0{,}56 \end{pmatrix}$$ ✓

Finalmente

$$A = U . \Sigma . V^T = \begin{pmatrix} -0{,}29 & 0{,}58 & 0{,}56 \\ -0{,}85 & -0{,}24 & 0 \\ 0{,}29 & -0{,}58 & 0{,}56 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}41 & -0{,}82 & 0{,}41 \\ 0{,}71 & 0 & 0{,}71 \\ -0{,}58 & 0{,}58 & 0{,}58 \end{pmatrix}^T$$ ✓

Arrastrás el error pero el procedimiento está bien.

NOTA

4) a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \\ 1 & 16 \\ 1 & 25 \\ 1 & 36 \end{pmatrix}$$

Premultiplico por A.T para obtener la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos

resuelvo $(A.T @ A)c = (A.T @ y')$

calculo c y obtengo $C_0 = -0,76$, $c_2 = 1,08$ $\quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$f(x) = -0,76 + 1,08x^2$

b) Quiero ajustar la función de la forma $g(x) = (d_0 + d_1 x)^3$.
Para eso linealizo con el cambio de variable $h(x) = cbrt(g(x))$ $\sqrt[3]{\ }$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Igual que en el ej anterior, premultiplico por B.T para hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos

resuelvo $(B.T @ B)d = (B.T @ y')$. $\quad d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$

$d_0 = 1,02$, $d_1 = 0,34$

$g(x) = (1,02 + 0,34x)^3$

c) quiero hallar $x / f(x) = 80$ y $x / g(x) = 80$

$-0,76 + 1,08x^2 = 80$

$x^2 = 74,78$

$x = 8,65$

$(1,02 + 0,34x)^3 = 80$

$1,02 + 0,34x = 4,31$

$x = 9,67$

Respuesta: Con el primer método será necesario abrir una fábrica luego de 8,65 años

con el segundo método, luego de 9,67 años