Matrices hermitianas:

Vimos la clase pasada que

Corolario: Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es hermitiana entonces A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real.

Es decir, toda matriz hermitiana se diagonaliza, sus autovalores son reales y se puede elegir una base de autovectores que sea una BON.

Ejemplo:

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$, queremos encontrar autovalores y base ortonormal de autovectores.

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1-i \\ -1+i & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2) - (-1-i)(-1+i)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda$$

$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ ó $\lambda = 3$

Calculamos autovectores:

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1-i \\ -1+i & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_2 - (1-i)F_1 \to F_2$

$-2 + (1-i)(1+i) = 0$

$x + (1+i)y = 0$

$x = -(1+i)y$

$E_0 = \langle (-(1+i), 1) \rangle_{gen}$

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2x - (1+i)y = 0$

$x = \frac{(1+i)}{2} y$

$F_2 + \frac{(1-i)}{2} F_1 \to F_2$

$1 - \frac{(1-i)(1+i)}{2} = 0$

$E_3 = \langle \left(\frac{1+i}{2}, 1\right) \rangle_{gen}$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1-i & \frac{1+i}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot C^{-1}$$

Recordar que en $\mathbb{C}^2$ el pi viene dado

por $\langle x, y \rangle = x^* \cdot y$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\begin{pmatrix} -1+i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = (-1+i)\left(\frac{1+i}{2}\right) + 1 = 0$$

Es decir los autovectores son ortogonales.

Además podemos elegirlos de norma 1

$$\|(-1-i, 1)\|_2 = \sqrt{|-1-i|^2 + |1|^2} = \sqrt{3}$$

$$\left\|\left(\frac{1+i}{2}, 1\right)\right\|_2 = \sqrt{\left|\frac{1+i}{2}\right|^2 + |1|^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Usamos $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ es un matriz unitaria,

ya que sus columnas son una BON (además de ser base de autovectores).

$$\Rightarrow \quad U^{-1} = U^* = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

y $A = U \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*$.

Vemos que pudimos ver que A es unitariamente semejante a una matriz diagonal real. (Como sabíamos por el Corolario).

¿Cómo es el procedimiento general para construir la matriz de cambio de base que sea unitaria?

Es necesario el siguiente Lema.

<u>Lema:</u> Sea $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ $\Rightarrow$ $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ $\forall\, x,y \in \mathbb{k}^n$. Si A es hermitiana, se tiene
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall\, x,y \in \mathbb{k}^n.$$

<u>Dem:</u> $\langle Ax, y\rangle = (Ax)^* \cdot y = x^* \cdot A^* y$
$= \langle x, A^* y\rangle$

Si A es hermitiana $A^* = A \Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

∎

<u>Lema:</u> Si A es hermitiana y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ son autovalores distintos, entonces cualquier par de autovectores v, w asociados a λ y μ respectivamente son ortogonales.

<u>Dem:</u> $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$

$$\Rightarrow \langle Av, w\rangle = \bar{\lambda} \langle v, w\rangle \underset{\lambda \text{ es real}}{=} \lambda \langle v, w\rangle$$

$\shortparallel$

$$\langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu \langle v, w\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0 \underset{\lambda \neq \mu}{\Rightarrow} \langle v, w\rangle = 0.$$

∎

Luego, dado $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ hermitiana para encontrar U unitaria:

$$A = U \cdot D\, U^* \quad \text{con } D \text{ diagonal real}$$

hacemos lo siguiente:

1) Calculamos autovalores

$d_1, \dots, d_k$ (que son reales, $k \leq n$, contamos solo los distintos)

2) Calculamos

$E_{d_i} = Nu(d_i I - A)$ los

autoespacios con $i = 1 \dots, k$

Como sabemos que A es diagonalizable en $\mathbb{K}$ debe ser $\dim E_{d_i} =$ multiplicidad de d_i en $\chi_A(d)$.

Además sabemos que si $v_i \in E_{d_i}$ $v_j \in E_{d_j}$ con $d_i \neq d_j \Rightarrow v_i \perp v_j$

3) En cada E_{d_i} que tengan dimensión ≥ 2 hacemos un proceso de Gram-Schmidt para quedarnos con una base ortonormal de E_{d_i}

En cada E_{d_i} que tenga dim $= 1$ solo normalizamos para quedarnos con un autovector de norma 1.

Si llamamos B_i a cada base de autovectores que sean una BON para cada E_{d_i} $\Rightarrow$

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

es una BON que sirve para poner en las columnas de U.

<u>Ejemplo</u>: Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A es simétrica $\Rightarrow$ sus autovalores son reales y se diagonaliza por una BON.

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)\left((\lambda-2)^2-1\right)$$

$$+ \underbrace{(-(\lambda-2)-1)}_{-\lambda+1} - (\underbrace{1+\lambda-2}_{\lambda-1})$$

$$= (\lambda-2)\underbrace{(\lambda^2-4\lambda+3)}_{(\lambda-1)(\lambda-3)} - 2(\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-2\right]$$

$$= (\lambda-1)\underbrace{\left[\lambda^2-5\lambda+4\right]}_{(\lambda-1)(\lambda-4)} = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$\lambda = 4$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $E_4 = \langle (1,1,1) \rangle$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $E_1 = \langle (-1,0,1), (-1,1,0) \rangle$

BON de E_4, $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

Buscamos BON de E_1

$$\dot{q}_2 = (-1,1,0) - \frac{\langle (-1,0,1), (-1,1,0) \rangle}{2}(-1,0,1)$$

$$= (-1,1,0) - \frac{1}{2}(-1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

$\Rightarrow$ Si $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $A = U \cdot D \cdot U^*$.

(Para chequear, ver que U es unitaria

y que $A \cdot U = U \cdot D$).

Norma 2 de matrices hermitianas:

Recordemos

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es hermitiana $\Rightarrow$ existen $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria y $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal y real:

$$A = U \cdot D \, U^*$$

donde $U = \left(q_1 | \cdots | q_n \right)$ con

$\{q_1, \dots, q_n\}$ es una BON de autovectores.

y $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ con $d_1, \dots, d_n$ autovalores

Entonces

$$\|Ax\|_2 = \|U D U^* x\|_2 = \|D U^* x\|_2$$

$\downarrow$

U unitaria

Si llamamos $y = U^* x$

$$Dy = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 y_1 \\ d_2 y_2 \\ \vdots \\ d_n y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|Dy\|_2^2 = |d_1 y_1|^2 + \cdots + |d_n y_n|^2$$
$$= |d_1|^2 |y_1|^2 + \cdots + |d_n|^2 |y_n|^2$$
$$\leq \max_{i=1\dots n} |d_i|^2 \, \|y\|_2^2$$

OBS: $\max_{i=1..n} |d_i|^2 = \left(\max_{i=1..n} |d_i| \right)^2 = \lambda_{max}^2$

Luego tenemos que $\forall x \neq 0$

$$\|Ax\|_2 = \|DU^* x\|_2 \leq \lambda_{max} \underbrace{\|U^* x\|_2}_{\|x\|_2}$$ porque U^* es unitaria

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \lambda_{max} \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \lambda_{max} . \quad (1)$$

Además vemos que $\lambda_{max} = |\lambda_{i_0}|$ para algún i_0 : $1 \leq i_0 \leq n$

Sea v_{i_0} el autovector asociado a λ_{i_0}

$$\Rightarrow \frac{\| A v_{i_0} \|_2}{\| v_{i_0} \|_2} = \frac{\| \lambda_{i_0} v_{i_0} \|_2}{\| v_{i_0} \|_2} = |\lambda_{i_0}| = \lambda_{max}$$

$\Rightarrow$ como hay un $v_{i_0} \neq 0$: $\dfrac{\| A v_{i_0} \|_2}{\| v_{i_0} \|_2} = \lambda_{max}$

tenemos que $\max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\| Ax \|}{\| x \|} \geq \lambda_{max}$ (2)

Juntando (1) y (2) llegamos a que si A es hermitiana $\Rightarrow \| A \|_2 = \lambda_{max}$

<u>Definición</u>: Dada $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se define radio espectral de A ($\rho(A)$) al mayor de los módulos de los autovalores

de A. Es decir

$$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$$

$$= \max_{i=1\dots n} |\lambda_i| = \lambda_{\text{máx}}$$

Probamos recién que **si A es hermitiana**, entonces

$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

¿Qué podemos decir para una $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ cualquiera?

Para esto veamos que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$\Rightarrow$ A^*A es hermitiana y semidefinida positiva.

$$(A^* A)^* = A^* \cdot A \Rightarrow A^* \cdot A \text{ es hermit.}$$

Sea $x \in \mathbb{K}^n$ (vertical)

$$x^* A^* A x = (Ax)^* A x = \|Ax\|_2^2 \geq 0.$$

Por ser A^*A hermitiana, entonces es unitariamente equivalente a una matriz diagonal real.

Además, los autovalores de A^*A son no negativos ya que si λ es autovalor y v autovector asociado, por la cuenta de antes

$$\underbrace{\|Av\|_2^2}_{\geq 0} = v^* \underbrace{A^*Av}_{\lambda v} = \lambda \underbrace{\|v\|_2^2}_{>0}$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Además tenemos que

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$

$$= \langle x, A^* A x \rangle$$

$$\leq \|x\|_2 \, \|A^* A x\|_2$$

$$\leq \|A^* A\|_2 \, \|x\|_2^2$$

y como $A^* A$ es hermitiana vimos

que $\|A^* A\|_2 = \rho(A^* A)$

si $x \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right)^2 \leq \rho(A^* A)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho(A^* A)}$$

$$\Rightarrow \quad \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho(A^* A)}$$

Además sea $\lambda_{max} = \rho(A^* A)$ el máximo de los módulos de los autovalores de A^*A y sea v_{max} el autovector asociado a λ_{max}

$$\Rightarrow \|Av_{max}\|_2^2 = \langle Av_{max}, Av_{max} \rangle$$

$$= \langle v_{max}, A^*A v_{max} \rangle$$

$$= \langle v_{max}, \lambda_{max} v_{max} \rangle = \lambda_{max} \|v_{max}\|_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av_{max}\|_2^2}{\|v_{max}\|_2^2} = \lambda_{max} = \rho(A^*A)$$

$$\Rightarrow \frac{\|Av_{max}\|_2}{\|v_{max}\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$