

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K -espacio vectorial V . Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Ejercicio 12. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{R} si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{C} .

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ satisface que $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \ \forall \mathbf{x} \in K^n$, entonces $\mathbf{A} = 0$. Deducir que si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ satisfacen que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} \ \forall \mathbf{x} \in K^n$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(b) Probar que si $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times r}$ con $\mathbf{B} = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es

la columna j -ésima de \mathbf{B} , entonces $\mathbf{AB} = (\mathbf{AB}_1 \mid \dots \mid \mathbf{AB}_r)$ (es decir, \mathbf{AB}_j es la columna j -ésima de \mathbf{AB}).

Ejercicio 16. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in K^{m \times n}$; $\mathbf{B} \in K^{n \times r}$; $\mathbf{D}, \mathbf{D}' \in K^{n \times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{A}')^t = \mathbf{A}^t + (\mathbf{A}')^t$

(e) $tr(\mathbf{D} + \mathbf{D}') = tr(\mathbf{D}) + tr(\mathbf{D}')$

(b) $(\alpha \mathbf{A})^t = \alpha \mathbf{A}^t$

(f) $tr(\alpha \mathbf{D}) = \alpha tr(\mathbf{D})$

(c) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$

(d) \mathbf{AA}^t y $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$ son matrices simétricas.

(g) $tr(\mathbf{DD}') = tr(\mathbf{D}'\mathbf{D})$

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n \times n}$ y $M \in K^{2n \times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

Normas vectoriales y sucesiones

Ejercicio 10. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_\infty &\leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_1 &\leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1\end{aligned}$$

- Matricial

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{A}\|_\infty &\leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_\infty \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{A}\|_1 &\leq \|\mathbf{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{A}\|_1\end{aligned}$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

Ejercicio 16. Probar que para toda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$(a) \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (b) \|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Condición de matrices

Ejercicio 18. Se tiene el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- a) Sea \mathbf{x} la solución exacta y $\tilde{\mathbf{x}}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$. Si notamos $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$, mostrar que:

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

- b) En lugar del dato exacto \mathbf{b} se conoce una aproximación $\tilde{\mathbf{b}}$. $\tilde{\mathbf{x}}$ es tal que $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$. Probar que:

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 20. Probar que si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz inversible y $\|\cdot\|$ es una norma matricial, la condición de \mathbf{A} verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \leq \inf \left\{ \frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|} : \mathbf{B} \text{ es singular} \right\}.$$

Deducir que

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \geq \sup \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|} : \mathbf{B} \text{ es singular} \right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $\text{cond}(\mathbf{A})$ mide la distancia relativa de \mathbf{A} a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 1. Sean \mathbf{A} y $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$. Probar que:

- (a) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son triangulares superiores, \mathbf{AB} es triangular superior.
- (b) Si \mathbf{A} y \mathbf{B} son diagonales, \mathbf{AB} es diagonal.
- (c) Si \mathbf{A} es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$.

Ejercicio 3. Escribir funciones de **Python** que calculen la solución de un sistema:

- (a) $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, siendo \mathbf{L} triangular inferior.
- (b) $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, siendo \mathbf{U} triangular superior.

Ejercicio 9. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Probar que \mathbf{A} es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \mathbf{x}_i^t \mathbf{x}_j$.

Ejercicio 10. Sean las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demostrar que \mathbf{A} es simétrica definida positiva y \mathbf{B} es no singular si y sólo si \mathbf{BAB}^t es simétrica definida positiva.

Ejercicio 12. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}).

- (a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$\mathbf{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\mathbf{v}_1^*}{\|\mathbf{v}_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{\mathbf{v}_2^*}{\|\mathbf{v}_2\|_2^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{\mathbf{v}_n^*}{\|\mathbf{v}_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

- (b) Probar que si B es ortonormal, entonces $\mathbf{C}_{EB} = \mathbf{C}_{BE}^*$.
- (c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector \mathbf{v} en base B son:

$$(\mathbf{v})_B = (\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}, \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}_n^* \mathbf{v}).$$

- (d) Calcular $(\mathbf{v})_B$ siendo $\mathbf{v} = (1, -i, 3)$, $B = \{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, i)\}$.

Ejercicio 16. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$. Probar que:

- (a) La transformación lineal definida por la matriz \mathbf{vv}^* es la proyección ortogonal sobre $\langle \mathbf{v} \rangle$.
- (b) Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S , entonces: $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S .
- (c) Si \mathbf{A} es como en el ítem anterior, $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ es la proyección ortogonal sobre S^\perp .
- (d) Eligiendo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\mathbf{vv}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$.

Ejercicio 18. Sea $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

- (a) $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^t$.
- (b) Las columnas de \mathbf{Q} forman un conjunto ortonormal.
- (c) Las filas de \mathbf{Q} forman un conjunto ortonormal.
- (d) $\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geoméricamente.

Sugerencia: para demostrar la implicación (d \Rightarrow b) usar que $\mathbf{x}^t \mathbf{y} = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2)$.

Ejercicio 5. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que \mathbf{A} y \mathbf{A}^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Ejercicio 6. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y λ un autovalor de \mathbf{A} . Probar que:

- (a) Si \mathbf{A} es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.
- (b) λ^k es autovalor de \mathbf{A}^k , con el mismo autovector.
- (c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\mathbf{A} + \mu \mathbf{I}$, con el mismo autovector.
- (d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\mathbf{A})$.

Ejercicio 8. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar:

- (a) Si los autovalores de \mathbf{A} son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.
- (b) Si \mathbf{A} es simétrica, entonces sus autovalores son reales.
- (c) Si \mathbf{A} es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)
- (d) Si \mathbf{A} es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

Ejercicio 9. Una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

Ejercicio 13. Probar que \mathbf{P} y \mathbf{Q} son matrices estocásticas, entonces:

- (a) \mathbf{PQ} es estocástica.
- (b) \mathbf{P}^n es estocástica ($n \in \mathbb{N}$).
- (c) $\mathbf{P}^n \mathbf{Q}^m$ es estocástica ($n, m \in \mathbb{N}$).