Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Álgebra Lineal Computacional

2do Cuatrimestre 2023

Práctica N° 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$. Si la solución es única, puede verificarse el resultado en `Python` utilizando el comando np.linalg.solve[1].

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 = 2i \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 5F_3 + 2F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 29 & 9 & 38 \end{array}\right)$$

$$29x_3 + 9x_4 = 38$$

Variable libre $\in \mathbb{R}$

$$x_4 = \frac{38}{9} - \frac{29}{9}x_3$$

$$-5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9$$

$$-5x_2 + 7x_3 + 2\left(\frac{38}{9} - \frac{29}{9}x_3\right) = 9$$

$$-5x_2 + \frac{5}{9}x_3 + \frac{79}{9} = 9$$

$$-5x_2 = \frac{5}{9} - \frac{5}{9}x_3$$

$$x_2 = \frac{1}{9}x_3 - \frac{1}{9}$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \qquad \boxed{\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}}$$

$$x_1 + \left(\frac{1}{9}x_3 - \frac{1}{9}\right) - 2x_3 + \left(\frac{38}{9} - \frac{29}{9}x_3\right) = -2$$

$$x_1 - \frac{49}{9}x_3 + \frac{37}{9} = -2$$

$$x_1 = \frac{49}{9}x_3 - \frac{55}{9}$$

Con x_1 Libre

Input interpretation

solve	$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2$
	$3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3$
	$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$

Result

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2} \wedge x_3 = \frac{x_1}{2} + \frac{3}{2} \wedge x_4 = \frac{1}{2} - \frac{x_1}{2}$$

Capaz me equivoqué !! :(

$$x_2 = \frac{1}{9}x_3 - \frac{1}{9}$$

$x_3 \in \mathbb{R}$ (Libre)

$$x_4 = \frac{38}{9} - \frac{29}{9}x_3$$

$$Sol = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{49}{9}x_3 - \frac{55}{9} \\ \frac{1}{9}x_3 - \frac{1}{9} \\ x_3 \\ -\frac{29}{9}x_3 + \frac{38}{9} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{con } x_3 \in \mathbb{R}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{55}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 0 \\ \frac{38}{9} \end{pmatrix}}_{\text{Sol Part}} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} \frac{49}{9} \\ \frac{1}{9} \\ 1 \\ -\frac{29}{9} \end{pmatrix}}_{\text{Sol Homogéneo}} \right\} \quad \text{con } x_3 \in \mathbb{R}$$

Sistema Compatible Determinado (∞ soluciones)

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Me cansé ...

systems of equations calculator

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT

Computational Inputs:

Assuming a system of three equations | Use

» equation 1: x_1+x_2+x_3-2x_4+x_5=

» equation 2: x_1-3x_2+x_3+x_4+x_5=

» equation 3: 0=0

Compute

Input interpretation

	$x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 + x_5 = 1$
solve	$x_1 - 3\,x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$
	True

Result

$$x_4 = \frac{4\,x_2}{3} - \frac{1}{3} \land x_5 = -x_1 + \frac{5\,x_2}{3} - x_3 + \frac{1}{3}$$

Ejercicio 2. (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & (k-2) & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & k+1 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_3, x_2 \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (k-1)x_3 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{k-1} \qquad k \neq 1$$

Si $k = 1$

$\Rightarrow$ el sistema no tiene soluciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad 0x_3 = 1 \text{ Abs!}$$

Si $k \neq 1$:

$$x_3 = \frac{1}{k-1}$$

$$(k+1)x_2 + \underbrace{(k^2-1)}_{(k+1)(k-1)} x_3 = 0$$

$$(k+1)x_2 + (k+1) = 0$$

Si $k+1=0 \Rightarrow 0=0$

$\therefore$ Si $k=-1$:

el sistema es CI

Si $k+1 \neq 0$ $(k \neq -1)$

$\Rightarrow x_2 + 1 = 0$

$x_2 = -1$

$x_1 + k x_2 - x_3 = 1$ $\qquad x_3 = \dfrac{1}{k-1}$

$x_1 - k - \dfrac{1}{k-1} = 1$

$x_1 = 1 + k + \dfrac{1}{k-1}$ con $k \neq 1 \wedge k \neq -1$

$\therefore$ Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$:

el sistema es CD. (sol única)

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

$(k-1)x_3 = 0$

$\Rightarrow k = 1$

$k=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$2 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 = x_3$$

$$Sol = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Verifico:

Sé que $k = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 + 0 - x_3 = 0 \checkmark \\ -x_3 + 0 + x_3 = 0 \checkmark \\ x_3 + 0 - x_3 = 0 \checkmark \end{array}$$

Verificado

Si $k = -1 \Rightarrow$ CI

Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow$ CD

Ejercicio 3. En `Python`, importar la librería numpy con el siguiente comando: import numpy as np, y probar los siguientes comandos:

Nociones básicas de estructuras con numpy.

```
import numpy as np

1 + 3
a = 7
b = a + 1
print("b = ", b)

# Vectores
v = np.array([1,2,3,-1])
w = np.array([2,3,0,5])
print("v + w = ", v + w)
print("2*v = ", 2*v)
print("v**2 = ", v**2)

# Matrices (ejecutar los comandos uno a uno para ver los resultados)
A = np.array([[1,2,3,4,5],[0,1,2,3,4],[2,3,4,5,6],[0,0,1,2,3],[0,0,0,0,1]])
print(A)
A[0:2,3:5]
A[:2,3:]
A[[0,2,4],:]
ind = np.array([0,2,4])
A[ind,ind]
A[ind,ind[:,None]]

# Numeros complejos
1j*1j
(1+2j)*1j
```

1j, 2j, nj : imaginario puro

j no está definido, siempre se acompaña por un "real" nj

$1,2j ** 2 \Rightarrow (1,44 + \underset{\text{cero}}{0}j)$

Ejercicio 4. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,0)$. Verificar el resultado obtenido usando `Python`. Graficar los puntos y la parábola aprovechando el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt #libreria para graficar

# ...
# Aca, crear la matriz y resolver el sistema para calcular a,b y c.
# ...

xx = np.array([1,2,3])
yy = np.array([1,2,0])
x  = np.linspace(0,4,100) #genera 100 puntos equiespaciados entre 0 y 4.
f  = lambda t: a*t**2+b*t+c #esto genera una funcion f de t.
plt.plot(xx,yy,'*')
plt.plot(x,f(x))
plt.show()
```

Debe pasar por los 3 puntos, entonces (x,y) debe cumplirse para cada punto.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= 2 \\ 9a + 3b + c &= 0 \end{aligned}$$

busco a, b, c

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 9F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & -9 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 3F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

(3) $\boxed{c = -3}$

(2) $-2b - 3.(-3) = -2$

$$-2b = -11$$

$$\boxed{b = \frac{11}{2}}$$

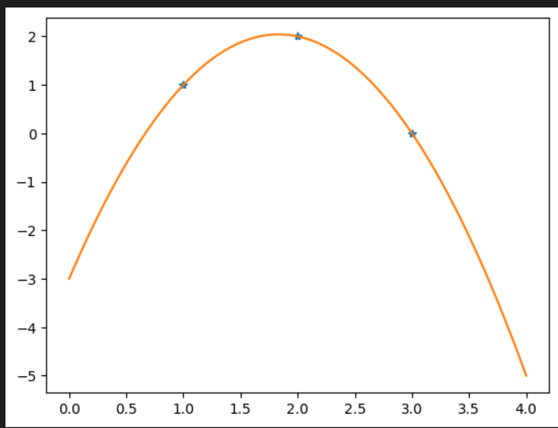
$$(1) \quad a + \underbrace{\frac{11}{2} - 3}_{\frac{5}{2}} = 1$$

$$a = \frac{2}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

Verifico:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

####### Completar aqui #######
a = -3/2
b = 11/2
c = -3
##############################

xx = np.array([1, 2, 3])
yy = np.array([1, 2, 0])

x = np.linspace(0, 4, 100)

f = lambda t: a*t**2 + b*t + c

plt.plot(xx, yy, '*')
plt.plot(x, f(x))
plt.show()
```



Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y - z = 0; \; x - y = 0\}$

(b) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \; \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^t\}$

(c) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \; tr(\boldsymbol{A}) = 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : \; x_1 + x_2 - ix_4 = 0, \; ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

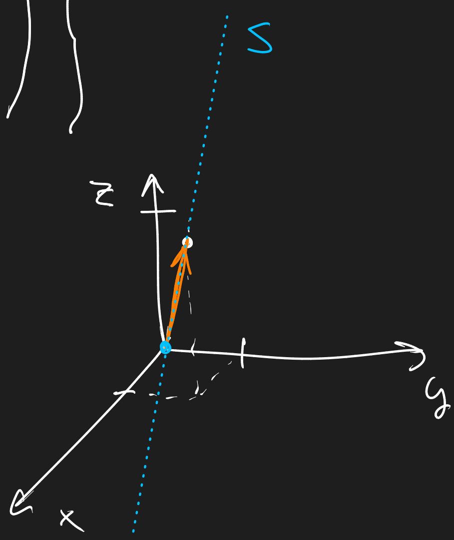
$$y = \frac{1}{2} z$$

$$x + y - 2y = 0$$

$$x = y$$

$$x = \frac{1}{2} z$$

$$\text{sol} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} z \\ \frac{1}{2} z \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



Generador

$$S = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

(b) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \; \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^t\}$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$a = -a \Rightarrow a = 0$
$e = -e \quad e = 0$
$i = -i \quad i = 0$

$b = -d$
$c = -g$
$d = -b$
$f = -h$
$g = -c$
$h = -f$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } b, c, f \in \mathbb{C}$$

separo en 3

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(c) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : tr(\boldsymbol{A}) = 0\}$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$
$$a_{33} = -a_{11} - a_{22}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Separo en 8!?

8 grados de libertad

$\Rightarrow$ dim 8

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0,\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ i & (1+i) & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - i.F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1-i & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_2 - (1+i)x_3 - x_4 = 0$$

$$x_4 = -x_2 + (1+i)x_3$$

$$x_1 + x_2 - i.x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - i\left(-x_2 + (1+i)x_3\right) = 0$$

$$x_1 + x_2 + i\,x_2 + (1-i)\,x_3 = 0$$

$$x_1 + (1+i)\,x_2 + (1-i)\,x_3 = 0$$

$$x_1 = -(1+i)x_2 - (1-i)\,x_3$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -(1+i)x_2 - (1-i)x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_2 + (1+i)x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1+i \\ 0 \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\}$$

$$S = \left\langle (-1-i, 1, 0, -1), (-1+i, 0, 1, 1+i) \right\rangle$$

v_1 $\qquad\qquad$ v_2 $\qquad\qquad$ v_3

Ejercicio 6. Sea $S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

(b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

(c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

a) Busco combinación lineal de los generadores

q.v.q.

$$a . v_1 + b . v_2 + c . v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

son iguales

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) F_3 + \frac{6}{4} F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 + \frac{9}{2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Abs!}} \\ & & & \end{array}\right)$$

$$(2,1,3,5) \notin S$$

(b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

$$x_1 = x_2 + x_3$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_2+x_3 \\ -1 & 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 0 & -1 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2+F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_2+x_3 \\ 0 & 4 & 2 & 2x_2+x_3 \\ 0 & -6 & -3 & -2x_2-x_3 \\ 0 & -4 & -2 & x_4-x_2-x_3 \end{array}\right)$$

$$F_3 + \frac{6}{4}F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_2+x_3 \\ 0 & 4 & 2 & 2x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_2 - x_3 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \underbrace{x_2 + \frac{1}{2}x_3} \\ & & & \end{array}\right)$$

solo vale si $x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0$

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_3$$

Ejercicio 6. Sea $S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

(b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

(c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Estoy agregando una condición extra.

$\therefore T \not\subseteq S$

(c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. $= T$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$$

Sea $v \in S$

$$\Rightarrow v = a.(1,-1,2,1) + b.(3,1,0,-1) + c.(1,1,-1,-1)$$

$$v = (\underbrace{a+3b+c}_{x_1}, \underbrace{-a+b+c}_{x_2}, \underbrace{2a-c}_{x_3}, \underbrace{a-b-c}_{x_4})$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

Qvq

$v \in T$

Basta con verificar la ecuación de T

$$x_1 = x_2 + x_3$$

$$v = (\underbrace{a+3b+c}_{x_1}, \underbrace{-a+b+c}_{x_2}, \underbrace{2a-c}_{x_3}, \underbrace{a-b-c}_{x_4}) \in S$$

$$a + 3b + c = -a + b + c + 2a - c$$

$$a + 3b + c = a + b$$

$$2b = -c$$ X me agrega otra condición

Otra forma es usar prop que dice

Si cada uno de los generadores de S está en T, entonces S incluido en T

$(1,-1,2,1) \in T$? sí, pues $x_1 = x_2 + x_3$ ✓

$(3,1,0,-1) \in T$? $x_2 + x_3 = 1 \neq x_1 = 3$ ✗

$\therefore S \not\subset T$

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle(1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle$ $T = \langle(1, 1, 0), (3, 2, 1)\rangle$.

(d) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji}\ \forall\, i, j\}$ $T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle(i, 1, 3 - i), (4, 1 - i, 0)\rangle$ $T = \{x \in \mathbb{C}^3 : (1 - i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

a) $S \cap T = \{(x,y,z) : 3x - 2y + z = 0 \ \wedge \ \underbrace{x + z = 0}_{z = -x}\}$

$= \{(x,y,z) : y = x\} \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow$ no es directa

$S + T = \langle \underbrace{(3,0,0), (0,-2,0), (0,0,1)}_{S}, \underbrace{(1,0,0), (0,0,1)}_{T} \rangle$

$= \langle (3,0,0), (0,-2,0), (0,0,1) \rangle$

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$.

Si $v \in T \Rightarrow v = a(1,1,0) + b(5,7,3)$

$= (\underbrace{a + 5b}_{x}, \underbrace{a + 7b}_{y}, \underbrace{3b}_{z})$

Si $v \in S \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3a + 15b - 2a - 14b + 3b = 0 \\ a + 5b = a + 7b \end{cases}$$

$\hookrightarrow \quad 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

$\hookrightarrow \quad 3a - 2a = 0$

$a = 0$

La $\underbrace{\text{única}}$ sol es $(a,b) = (0,0)$

o sea en $S \cap T$ solo existe el $(0,0)$

$\Rightarrow \quad S \cap T = \{\vec{0}\}$

$\therefore$ la suma $\underline{\text{es}}$ directa.

$S \oplus T$:

$3x - 2x + z = 0$ pues $x = y$

$$S = \{(x,y,z) : x + z = 0 \ \wedge \ x = y \}$$

$$= \langle (1,1,-1) \rangle \qquad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S \oplus T = \langle (1,1,-1), (1,1,0), (5,7,3) \rangle$$

(c) $V = \mathbb{R}^3, \quad S = \langle (1,1,3),(1,3,5),(6,12,24) \rangle \qquad T = \langle (1,1,0),(3,2,1) \rangle.$

$v \in S \Rightarrow v = a(1,1,3) + b(1,3,5) + c(6,12,24)$

$$= (\underbrace{a+b+6c}_{x}, \underbrace{a+3b+12c}_{y}, \underbrace{3a+5b+24c}_{z})$$

$v \in T \Rightarrow v = d(1,1,0) + e(3,2,1)$

$$= (d+3e, d+2e, e)$$

$v \in S \cap T$: Puedo plantear

$$(a+b+6c, a+3b+12c, 3a+5b+24c) =$$

$$= (d+3e, d+2e, e)$$

Pero no quiero. Paso T a ecuaciones:

$T = \langle (1,1,0),(3,2,1) \rangle$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \circlearrowleft \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 2 & y \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & y-x+z \end{array}\right)$$

Obtuve

$$y - x + z = 0$$

$$x = y + z$$

Verifico.

$$\left\{\begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = \left\{ y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Tenía

$$v = (\underbrace{a+b+6c}_{x}, \underbrace{a+3b+12c}_{y}, \underbrace{3a+5b+24c}_{z})$$

Si $v \in T \Rightarrow \quad x = y+z$

$$a+b+6c = a+3b+12c + 3a+5b+24c$$

$$0 = 3a+7b+18c$$

$$a = -\frac{7}{3}b - 6c \qquad b,c \in \mathbb{R}$$

$\therefore \; S \cap T \neq \{\vec{0}\}$

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24) \rangle \qquad T = \langle (1,1,0), (3,2,1) \rangle$.

$$S+T = \langle (1,1,3), (1,3,5), (6,12,24), (1,1,0), (3,2,1) \rangle$$

(d) $V=\mathbb{R}^{3\times 3}$, $\quad S=\{(x_{ij})\,/\,x_{ij}=x_{ji}\ \forall i,j\}$ $\qquad T=\{(x_{ij})\,/\,x_{11}+x_{12}+x_{13}=0\}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{+} = 0$$

$$S\cap T = \{(x_{ij})\,/\,\underbrace{x_{ij}=x_{ji}}_{A=A^t} \wedge \underbrace{x_{11}+x_{12}+x_{13}=0}_{\text{Fila 1 suma cero}}\}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{A=A^t \ \wedge\ \text{Fila 1 suma cero}}$$

$$S\cap T = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix} : a_{11}+b+c=0 \text{ con } a_{ij}, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

No es suma directa pues (por ejemplo) d puede ser cualquier valor.

$S+T$:

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$a_{11}+b+c=0 \Rightarrow a_{11}=-b-c$$

$$\begin{bmatrix} -b-c & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$T = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

En principio, $S+T$ es juntar <u>TODOS</u> los generadores, pero hay repetidos y dependencias lineales

$$\Big\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{de } S}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{de } T} \Big\rangle$$

(e) $V=\mathbb{C}^3$, $S=\langle (i,1,3-i),(4,1-i,0)\rangle$ $T=\{x\in\mathbb{C}^3 : (1-i)x_1-4x_2+x_3=0\}$.

Si $\omega \in S \Rightarrow \omega = a(i,1,3-i)+b(4,1-i,0)$

$$= (\underbrace{a.i+4b}_{x_1}, \underbrace{a+b-bi}_{x_2}, \underbrace{3a-3ai}_{x_3})$$

Si $\omega\in T \Rightarrow (1-i)(a.i+4b)-4(a+b-bi)+3a-3i=0$

$$a.i+4b+a-4bi-4a-4b+4bi+3a-3ai=0$$

$$a.i-3ai=0$$

$$-2ai=0$$

$$a=0$$

↳ b <u>no</u> está condicionado.

$\Rightarrow S\cap T\neq\{\vec{0}\}$ pues b libre.

$S+T=\langle (i,1,3-i),(4,1-i,0)$, los generadores de $T\rangle$

$$x_3 = 4x_2-(1-i)x_1$$

$$T=\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ 4x_2-(1-i)x_1\end{pmatrix}\right\}$$

$$T=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\i-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$S+T = \left\langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0), \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

(a) $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle(1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)\rangle$.

(b) $S \cap T = \langle(0,1,1)\rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle(1,k,2),(-1,2,k)\rangle$.

a) Pruebo doble inclusión

b) Si $\underbrace{v \in S \cap T}_{\text{está en } S \text{ y en } T} \Rightarrow v = a(0,1,1)$

$= (0, a, a) \quad a \in \mathbb{R}$

Si $v \in T$:

$$v = b(1,k,2) + c(-1,2,k)$$

$$= (b - c \ , \ k.b + 2c \ , \ 2b + k.c)$$

$$= (0, a, a)$$

$\Rightarrow \quad b - c = 0 \Rightarrow b = c$

$$\Rightarrow \begin{cases} k.b + 2b = (k+2).b = a \\ 2b + kb = (k+2).b = a \end{cases}$$

$$v = (\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{(k+2).b}_{x_2}, \underbrace{(k+2).b}_{x_3})$$

Si $v \in S$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$ ✓ verifica $\forall k \in \mathbb{R}$

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

$S \cup T$ es subespacio de $V \iff S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$

$\Leftarrow)$ $S \subseteq T \Rightarrow S \cup T = T$

Como T es subespacio de V

$\Rightarrow S \cup T$ es subespacio de V.

(equiv con $T \subseteq S$)

$\Rightarrow)$ $S \cup T$ es subespacio de V

- Si $S \subseteq T$:

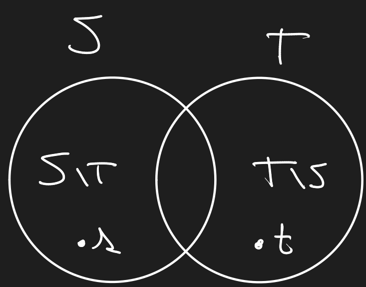
$v \in S \cup T \Rightarrow v \in \underbrace{S \cap T}_{=S}$ ó $v \in T$

Como S y T son subespacio.

$\Rightarrow S \cup T$ es subespacio

- Lo mismo con $T \subseteq S$

- Si $S \not\subseteq T$ y $T \not\subseteq S$



$\Rightarrow$ Sean $s \in S \setminus T$

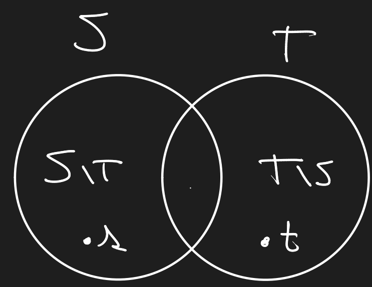
$t \in T \setminus S$

Como $S \cup T$ es subespacio de V (es la hipótesis)

Sumar 2 elementos en $S \cup T$ queda en $S \cup T$

$\Rightarrow s+t \in S \cup T$ pues $s \in S \cup T$

$t \in S \cup T$



$\Rightarrow s+t \in S$ ó $s+t \in T$

Si $s+t \in S$:

puedo escribir (magia):

$$t = t + s - s$$

$$t = \underbrace{\underbrace{(s+t)}_{\in S} - \underbrace{s}_{\in S}}_{\text{la resta \underline{debe} estar en } S \text{ pues } S \text{ es subespacio}}$$

<u>pero</u> $t \in T \setminus S$

<u>Abs</u>!

Lo mismo para:

$s+t \in T$:

Armo

$$\underbrace{s}_{\in S} = \underbrace{\underbrace{(s+t)}_{\in T} - \underbrace{t}_{\in T}}_{\in T}$$

<u>Abs</u>! $s \in T \setminus S$

Por lo tanto, no puede darse el caso donde

$$S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S.$$

Solo vale si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$

$\boxtimes$

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1,4,-1,3)\,,\,(2,1,-3,-1)\,,\,(0,2,1,-5)\}$ en $\mathbb{R}^4$, para $K=\mathbb{R}$.

(b) $\{(1-i,i)\,,\,(2,-1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $K=\mathbb{C}$.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 - 2F \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$F_3 + \frac{7}{2}F_2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -5.\frac{7}{2}-7 \end{pmatrix} \Bigg\} \text{ son } \underline{\text{li.}}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & -1+i \end{pmatrix} (1+i)F_1 \begin{pmatrix} 1+1 & i-1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix} \Bigg\} \text{ son } \underline{\text{ld}}$$

Ejercicio 11. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S. Extender la base de S a una base del espacio vectorial correspondiente.

(a) $S = \langle (1,1,2),\ (1,3,5),\ (1,1,4),\ (5,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3,\ \ K = \mathbb{R}$

(b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2},\ K = \mathbb{C}$

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

estos 3 son li

$\leftarrow$ Tiro éste

$$\mathcal{B}_S = \{ (1,1,2), (1,3,5), (1,1,4) \} = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Dim } S = 3$$

$$\mathcal{B}_V = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \} = \mathbb{R}^3$$

b) Busco los "casi canónicos"

$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es canónico

$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no lo es, pero casi si le sumo iA_3

$$A_4 + i A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$1 + (-1)$

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ con A_3 puedo dejarlo como $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ con A_4 puedo dejarlo como $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

son <u>ld</u> (junto con A_3 y A_4)

Borro A,

$$B_S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$$

$$\operatorname{Dim} S = 3$$

$$B_{\mathbb{C}^{2\times 2}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow B_{\mathbb{C}^{2\times 2}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$