	1	2	3	Calificación
Nombre y apellido:				
Número de libreta:				

Álgebra Lineal Computacional

Recuperatorio del Primer Parcial – 15 de julio de 2022

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4.

Ejercicio 1. Sean $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 - x_4, -\alpha x_3 + x_4, x_3 - x_4)$$

y los subespacios:

$$\begin{aligned} S = & \quad \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 = 0,\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0\} \\ T = & \quad \langle (1,1,1,-3), (1,-1,0,0), (1,-3,-1,-3) \rangle \end{aligned}$$

a) (1 pt.) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

b) (1 pt.) Para $\alpha = 1$, decidir si existe una transformación lineal $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(S+T) = \mathrm{Im}(f)$ y que $g(\mathrm{Nu}(f)) = (0,0,0,0)$. En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

c) (1 pt.) Para $\alpha = 1$ y considerando $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 - 2x_3, x_1)$$

decidir si $f \circ h$ es monomorfismo. En caso contrario, hallar una base de $\mathrm{Nu}(f \circ h)$

Ejercicio 2. Para las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3-\varepsilon & 2+\varepsilon \\ 0 & 1+\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

a) (1.5 pts.) Probar que $\mathrm{Cond}_\infty(A) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$ y deducir que $\mathrm{Cond}_2(A) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$.

b) (1 pt.) Para $\varepsilon = 0.001$, calcular la descomposición LU de A.

c) (1 pt.) Para $\varepsilon = 0.001$, resolver el sistema $Ax = b$ mediante eliminación gaussiana sin pivoteo usando aritmética de punto flotante en base 10 con 3 dígitos de mantisa y sistema de redondeo.

d) (0.5 pts.) Para $\varepsilon = 0.001$, hallar la solución exacta x del sistema y calcular el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

donde $\tilde{x}$ es la solución aproximada hallada en el ítem anterior.

Ejercicio 3. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, en cada caso, el Método de la Potencia dado por la siguiente iteración:

$$\begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Av^{(k-1)}}{\|Av^{(k-1)}\|} \\ \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t A v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(k)} = \dfrac{Bv^{(k-1)}}{\|Bv^{(k-1)}\|} \\ \\ r_k = \dfrac{(v^{(k)})^t B v^{(k)}}{(v^{(k)})^t v^{(k)}} \end{cases},$$

para $k \geq 1$.

a) (1 pt.) Calcular los autovalores y los autovectores de A y de B. Determinar si las matrices cumplen las hipótesis del Método de la Potencia.

b) (1 pt.) Para la matriz A, definir un subespacio S tal que r_k converja al autovalor de módulo máximo para cualquier $v^{(0)} \in \mathbb{R}^3 - S$.

c) (1 pt.) Para la matriz B, hallar un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el Método de la Potencia con $v^{(0)} = (-1, \alpha, -2)$ encuentre el segundo autovalor de mayor módulo.