2do PARCIAL

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Busco las matrices de iteración en c/caso. $A = L + D + U$

Gauss-Seidel: $A = \underset{L+D}{M} + \underset{U}{N}$ $\quad x_{n+1} = -(L+D)^{-1}U x_n + (L+D)^{-1} b$

$x_{n+1} = \underbrace{-M^{-1}.N}_{B_{GS}} x_n + M^{-1} b$

* G-S cvge $\Leftrightarrow \rho(-M^{-1}N) < 1$. Busco avals de $\underbrace{-M^{-1}N}_{B_{GS}}$:

| λ aval de $-M^{-1}N \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \det(\lambda M + N) = 0$ ejcio 8 a)

$\det\begin{pmatrix} \lambda & 2\alpha & 0 \\ \lambda\alpha & \lambda & 0 \\ 0 & \alpha\lambda & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda\alpha^2) = \lambda^2(\lambda - 2\alpha^2)$

$\rho(B_{GS}) = \max\{0, |2\alpha^2|\} = 2\alpha^2$

* $\boxed{\text{G-S cvge} \Leftrightarrow 2\alpha^2 < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Jacobi: $A = \underset{D}{M} + \underset{L+U}{N}$ $\quad x_{n+1} = -D^{-1}(L+U)x_n + D^{-1}b.$

$= \underbrace{-M^{-1}N}_{B_J} x_n + M^{-1} b$

* Jacobi cvge $\Leftrightarrow \rho(B_J) < 1$. Busco avals de B_J:

$\det(\lambda D + L + U) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2\alpha & 0 \\ \alpha & \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 2\alpha^2) = \lambda(\lambda - \sqrt{2}\alpha)(\lambda + \sqrt{2}\alpha)$

$\rho(B_J) = \max\{0, \sqrt{2}|\alpha|\}$.

* $\boxed{\text{Jacobi cvge}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\alpha| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{\text{G-S cvge}}$ Como queríamos ver

¿Qué método prefiero? Converge más rápido el método cuya matriz de iteración tiene menor radio espectral. Sea $\alpha / |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (fijo)

$2\alpha^2 \overset{?}{\gtrless} \sqrt{2}|\alpha| \iff \dfrac{\alpha^2}{|\alpha|} \gtrless \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff |\alpha| \gtrless \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\alpha^2 < \sqrt{2}|\alpha| \Rightarrow$ [$\rho(B_{GS}) < \rho(B_J) \Rightarrow$ Gauss-Seidel converge más rápido.].

b) $\alpha = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. método Jacobi: $x_{n+1} = -D^{-1}(L+U)x_n + D^{-1}b$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow D^{-1} = I \longrightarrow x_{n+1} = -(L+U)x_n + b$.

$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Si $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ¡no depende de t!

¿Cuál es la solución de $A\bar{x} = b$?

$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ¡es solución!

[Si $t = 0$ ya x_0 es la solución, si $t \neq 0$ en un paso se llega a la sol
$\Rightarrow$ en a lo sumo un paso se llega a la sol $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.]

En el ítem (a) probamos q. si $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ el método cvge para cualquier vector inicial.

$\alpha = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ luego dependiendo del vector inicial el método puede converger o no (No hay contradicción)

2

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}}_{M} x_{n+1} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} x_n + b.$$

a) Si $x_n \longrightarrow x^* \Rightarrow M x_{n+1} = -N x_n + b$

$$M x^* = -N x^* + b \Rightarrow \overbrace{(M+N)}^{A} x^* = b.$$

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]} x^* = b$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1/3 & 0 \end{pmatrix} x^* = b.$$

$\Rightarrow x^*$ es sol de $Ax = b$.

b) $x_{n+1} = \underbrace{-M^{-1}N}_{B} x_n + M^{-1}b.$

Construyo la matriz de iteración:

$$M^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 3F_1 \\ \\ 3F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \} F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) F_2 - 6F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{B} = -\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -3k & 0 \\ -3k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

El método cvge $\forall$ vector inicial $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$. Busco avals:

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 3k & 0 \\ 3k & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 9k^2) = \lambda(\lambda - 3k)(\lambda + 3k)$$

$$\rho(B) = \max\{0, 3|k|\} = 3|k|$$

[El método conv. $\forall$ vector inic $\Leftrightarrow 3|k| < 1 \Leftrightarrow |k| < \frac{1}{3}$].

c) $e_n = x_n - x^*$ Donde x^* es sol de $Ax=b$, $x^* = Bx^* + M^{-1}b$.

$e_n = Bx_{n-1} + M^{-1}b - (Bx^* + M^{-1}b)$

$\Rightarrow \boxed{e_n = B(x_{n-1} - x^*) = B \cdot e_{n-1}}$

$\Rightarrow e_n = B^n e_0 \Rightarrow \|e_n\| = \|B^n\| \|e_0\| \leq \|B\|^n \|e_0\|$.

Si $\boxed{\rho(B) \leq \frac{1}{4}}$, como $\rho(B) = \min_{\|\cdot\|} \{\|B\|\}$, podemos asegurar que existe una norma / $\|B\| \leq \frac{1}{4}$ y así $\left[\|e_n\| \leq \|B\|^n \|e_0\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \|e_0\| \right]$

Como $\rho(B) = 3|k|$, imponemos $3|k| \leq \frac{1}{4}$

$|k| \leq \frac{1}{12}$

$\left[\text{Si } |k| \leq \frac{1}{12} \text{ podemos asegurar que } \|e_n\| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \|e_0\| \right]$

3 ¿Tamaño de A? $\underset{3\times1}{A^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow A^t \in \mathbb{R}^{2\times3} \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{3\times2}$

Propongo A con su DVS: $\boxed{A = \underset{3\times3}{U} \underset{3\times2}{\Sigma} \underset{2\times2}{V^t}}$, $U \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $V \in \mathbb{R}^{2\times2}$ ortogonales.

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Como $\max_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} = 2 \Rightarrow$ el mayor valor singular $\sigma_1 = 2$

  $\min_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} = 1 \rightarrow$ el menor valor singular $\sigma_2 = 1$

  $\Rightarrow \boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

- Como $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es avec de $A^tA \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es vector singular de A, 5

$AV = \sigma \cdot u$ Elijo $\sigma = 2$ (podría ser $\sigma = 1$) y v es la 1° col de V

$A\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot u$

$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Completo a V ortogonal (V ortog $\Leftrightarrow$ sus filas/columnas forman una BON de $\mathbb{R}^2$)

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- $A^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = V \Sigma^t U^t$ $\quad rg(A^t) = 2 \Rightarrow \dim Nu(A^t) = 1$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} — u_1 — \\ — u_2 — \\ \boxed{— u_3 —} \end{pmatrix} \longrightarrow u_3 \in Nu(A^t)$$

$\Rightarrow$ Tomo $u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y completo a BON de $\mathbb{R}^3$ con u_1 y u_2, por ej, $u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\Rightarrow A = \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad u_3 \\ \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ es una } A \text{ posible}}$$

4

Buscamos ajustar
$$\begin{cases} f(0) = a \cdot 0 + b\cos(\pi \cdot 0) = 1 \\ f(1/2) = a \cdot \frac{1}{2} + b\cos(\pi \cdot \frac{1}{2}) = 2 \\ f(1) = a \cdot 1 + b\cos(\pi) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ \frac{1}{2}a = 2 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

No tiene solución, buscamos la mejor aproximación en el sentido de cuad. mín. ($\sum_{i=0}^{2} |f(x_i) - y_i|^2$ mínimo)

impulsado por CamScanner

Planteo y resuelvo las ecuaciones normales $A^tA\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1/2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5/4 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c}5/4 & -1 & 3\\-1 & 2 & -1\end{array}\right) \xrightarrow{4F_1} \left(\begin{array}{cc|c}5 & -4 & 12\\-1 & 2 & -1\end{array}\right) 5F_2+F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}5 & -4 & 12\\0 & 6 & 7\end{array}\right) \quad \begin{cases}5a-4b=12 \longrightarrow 5a-\cancel{4}^{2}\cdot\frac{7}{\cancel{6}_3}=12 \Rightarrow 5a=12+\frac{14}{3} \Rightarrow a=\frac{10}{3}\\ 6b=7 \rightarrow b=7/6\end{cases}$$

[La mejor aproximación es $f(x)=\frac{10}{3}x+\frac{7}{6}\cos(\pi x)$]

Para estimar a la hora y media calculo $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{7}{6}\cos\left(\pi\cdot\frac{3}{2}\right)=5$

La concentración será aproximada de $5\,mg/m^3$