FORMA DE JORDAN

(caso nilpotente)

Bloque de Jordan nilpotente

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\
[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

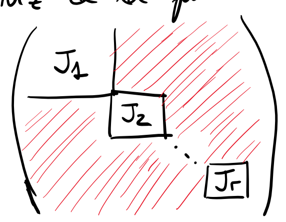
$f(v_1) = v_2$
$f(v_2) = v_3$
$\vdots$
$f(v_{n-1}) = v_n$
$f(v_n) = 0$

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \dots \to v_{n-1} \to v_n \to 0$$

$v_1 \in Nu(f^n) \setminus Nu(f^{n-1})$, $\quad v_2 \in Nu(f^{n-1}) \setminus Nu(f^{n-2})$, ...

Forma de Jordan (nilpotente)

Es una matriz de la forma



donde cada J_i es un bloque de Jordan nilpotente de tamaño n_i, y $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

TEOREMA: $A \in K^{n\times n}$ nilpotente $\Rightarrow$ existe una única forma de Jordan nilpotente J tal que $A \sim J$.

Otra manera de pensarlo: $f: K^n \to K^n$ nilpotente $\Rightarrow$ existe una base B de K^n tal que $[f]_B$ es una forma de Jordan.

---

① Hallar la forma y una base de Jordan para la matriz nilpotente

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} & & & 0 & & 0 \\ & & & 0 & & 0 \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & 0 & & 0 \\ & & & 1 & & 1 \\ & & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Considero la t.l. $f: \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ tq $A = [f]_E$. $\qquad e_4 \to e_1+e_3 \to e_3+e_5$

$Nu(f) = \langle e_3, e_5, e_4 - e_6 \rangle$
dim 3

$Nu(f^2) = Nu(f) \oplus \langle e_1, e_2 \rangle$
dim 5

$\mathbb{C}^6 = Nu(f^3) = Nu(f^2) \oplus \langle e_4 \rangle$
dim 6

$$Nu(f^3) \supsetneq Nu(f^2) \supsetneq Nu(f) \supsetneq \{0\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} e_4 & \to & e_1+e_3 & \to & e_3+e_5 & \to & 0 \\ & & e_2 & \to & e_5 & \to & 0 \\ & & & & e_4-e_6 & \to & 0 \end{array}$$

Base de Jordan: $B = \{ e_4, e_1+e_3, e_3+e_5, e_2, e_5, e_4 - e_6 \}$

Forma de Jordan:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ 1&0&0& & & \\ 0&1&0& & & \\ 0&0&0&0&0& \\ 0&0&0&1&0& \\ 0&0&0& & &0 \end{pmatrix}$$

⚠ ALGUNAS OBSERVACIONES GENERALES

- Si f nilpotente de índice k $\Rightarrow$ el bloque más grande en la forma de Jordan es de tamaño k.
- $\dim Nu(f) = \#$ bloques en la forma de Jordan

---

② Probar que la siguiente matriz nilpotente es semejante a A del ej anterior:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & & \end{array} \\
B = \begin{pmatrix} 1&-1&0&0&0&0 \\ 1&-1&0&0&0&0 \\ 1&-1&0&0&0&0 \\ 1&-1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ y $\langle e_5, e_6 \rangle$ son subespacios invariantes por B

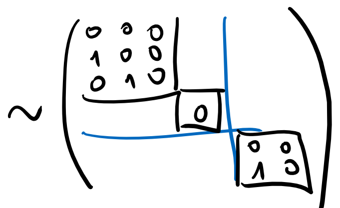
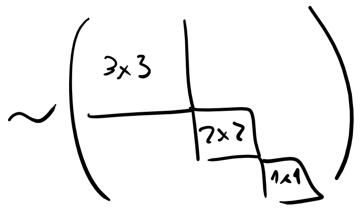
→ Basta probar que B tiene la misma forma de Jordan de A!

$$e_1 \to e_1+e_2+e_3+e_4 \to e_4 \to 0$$

Esto ya nos dice que el índice de nilpotencia de ese primer bloque es por lo menos 3.
Si es 3, la única opción para la forma de Jordan es tener un bloque de tamaño 3 y un bloque de tamaño 1.
Si es 4, la forma de Jordan será un solo bloque de tamaño 4.
Como tenemos 2 vectores LI en el núcleo, que son e4 y e1+e2, el segundo caso queda descartado.

$$e_6 \to e_5 \to 0$$

Para el segundo bloque vemos que el índice de nilpotencia es 2, luego hay un bloque de tamaño 2 y como la matriz es de 2x2 ese bloque será el único.

$\Rightarrow B \sim$  $\sim$  $\sim A$