Álgebra Lineal - Clase 2

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Sistemas de generadores.
- Independencia lineal.
- Bases y dimensión.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 1 (Sección 1.3).

Más ejemplos de subespacios

Proposición

Sea V un K-espacio vectorial, y sean S y T subespacios de V. Entonces $S \cap T$ es un subespacio de V.

Demostración.

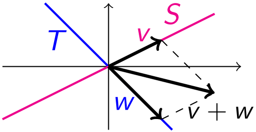
i) $0 \in S$ y $0 \in T \Rightarrow 0 \in S \cap T$.

ii) $v, w \in S \cap T \Rightarrow v \in S$, $v \in T$, $w \in S$ y $w \in T$.
$v, w \in S$ subespacio $\Rightarrow v + w \in S$. Idem, $v + w \in T$.
$\Rightarrow v + w \in S \cap T$.

iii) Sean $\lambda \in K$ y $v \in S \cap T$.
$v \in S \cap T \Rightarrow v \in S$ y $v \in T$.
$\lambda \in K$, $v \in S$ subespacio $\Rightarrow \lambda \cdot v \in S$. Idem, $\lambda \cdot v \in T$.
$\Rightarrow \lambda \cdot v \in S \cap T$. $\square$

Observación.

S y T subespacios $\not\Rightarrow S \cup T$ subespacio.



Ejemplos.

- $S = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid A\mathrm{x} = 0\}$ con $A \in K^{m \times n}$ es un subespacio de K^n (conjunto solución de un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas):
  si $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m}$, entonces $S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i$ con
  $S_i = \{\mathrm{x} \in K^n \mid a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0\}$ subespacio.

- $K_n[X] = \{f \in K[X] \mid f = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(f) \le n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, es un subespacio de $K[X]$:
  i) $0 \in K_n[X]$.
  ii) Sean $f, g \in K_n[X]$. Si $f = 0$, $g = 0$ o $f + g = 0$, entonces $f + g \in K_n[X]$ ✓.
  Si no, $\mathrm{gr}(f + g) \le \max(\mathrm{gr}(f), \mathrm{gr}(g)) \le n \Rightarrow f + g \in K_n[X]$.
  iii) Sean $\lambda \in K$ y $f \in K_n[X]$. Si $\lambda = 0$ o $f = 0$, $\lambda.f = 0 \in K_n[X]$.
  Si no, $\mathrm{gr}(\lambda.f) = \mathrm{gr}(f) \Rightarrow \lambda.f \in K_n[X]$.

Combinaciones lineales

Ejemplos.

- Si S es una recta en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, sus puntos son $\mathrm{x} = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), con v un vector director.
- Si S es un plano por el origen en $\mathbb{R}^3$, sus puntos son $\mathrm{x} = \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), con v, w direcciones del plano.
- Si S es el conjunto solución de un sistema lineal en K^n, podemos representar sus elementos en forma paramétrica $\mathrm{x} = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_r \cdot v_r$ ($\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$), con $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ fijos.

Definición.

Sea V un K-espacio vectorial y sea $G = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$.
Una combinación lineal de G es un elemento $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i . v_i$ con $\alpha_i \in K$ para cada $1 \leq i \leq r$.

Ejemplos.

- $G = \{(1,1),(2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
  $v = \alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (2,3)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $G = \{1, X, \ldots, X^n\} \subseteq \mathbb{R}_n[X]$.
  $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $\forall 0 \leq i \leq n$.

Definición.

Sean V un K-espacio vectorial, I un conjunto de índices y $G = \{v_i \,/\, i \in I\} \subset V$. Una combinación lineal de G es un elemento $v = \sum_{i \in I} \alpha_i . v_i$ donde $\alpha_i \in K$ y $\alpha_i = 0$ salvo para finitos $i \in I$.

Ejemplos.

- $G = \{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{R}[X]$.
  Una combinación lineal de G es $P = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i X^i$ donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $\alpha_i = 0$ salvo para finitos valores de $i \in \mathbb{N}_0$.
- $G = \{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
  Una combinación lineal de G es $v = \sum_{t \in \mathbb{R}} \alpha_t . (t,0)$ tal que $\alpha_t \in \mathbb{R}$ y $\alpha_t = 0$ salvo para finitos $t \in \mathbb{R}$.

Sistemas de generadores

Definición.
Sea V un K-espacio vectorial y sea $G \subseteq V$. Se dice que G es un sistema de generadores de V o que V está generado por G, y se nota $< G > = V$, si todo $v \in V$ es una combinación lineal de G.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}^2 = <(1,0),(0,1)>$, ya que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$.
  $\mathbb{R}^2 = <(1,1),(2,3)>$, ya que
  $(x,y) = (3x-2y)(1,1) + (y-x)(2,3)$.
- $K^n = <(1,0\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)>$.
  $(x_1,x_2,\dots,x_n) =$
  $x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \cdots + x_n(0,\dots,0,1)$.
- $K^{m\times n} = < E^{ij} >_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ donde $(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
  $K^{2\times 3} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\1&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&1&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$
- $K[X] = < X^i >_{i\in\mathbb{N}_0}$.

Proposición.

Sean V un K-e.v., S un subespacio de V y $\{v_i \,/\, i \in I\} \subseteq V$.
Entonces $< v_i, i \in I > \subseteq S \iff v_i \in S \; \forall \, i \in I$.
$< v_i, i \in I >$ es el subespacio más chico de V que contiene a todos los $v_i, i \in I$.

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Para cada $i_0 \in I$,
$v_{i_0} = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ con $\alpha_{i_0} = 1$ y $\alpha_i = 0$ si $i \neq i_0$.
$\Rightarrow v_{i_0} \in < v_i, i \in I > \subseteq S$.

$(\Leftarrow)$ $v_i \in S$ y S subespacio $\Rightarrow \alpha_i v_i \in S \; \forall \alpha_i \in K$.
Si $\alpha_i \neq 0$ sólo para finitos $i \in I$, $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ es una suma (finita) de elementos de S subespacio $\Rightarrow \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \in S$. $\square$

Corolario.

Sea V un K-e.v. y sea $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\} \subseteq V$. Entonces:
$< v_1, \dots, v_n, v_{n+1} > = < v_1, \dots, v_n > \iff v_{n+1} \in < v_1, \dots, v_n >$.

Proposición

Sea V un K-e.v. y sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Entonces:

1. $< v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n > = < v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n >$.
2. $< v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n > = < v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n >$ para $\lambda \in K - \{0\}$.
3. $< v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n > =$ $< v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n >$ para $\lambda \in K$.

Independencia lineal

Definición.
Sea V un K-e.v. Se dice que $\{v_i\}_{i \in I} \subset V$ es linealmente independiente (l.i.) si

$$\sum_{i \in I} \alpha_i . v_i = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_i = 0 \quad \forall\, i \in I.$$

Si $\{v_i\}_{i \in I}$ no es linealmente independiente, se dice que es linealmente dependiente (l.d.).

Ejemplos.

- En $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,1),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ es l.i.:

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,-1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0).$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ -\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0).$$

- En $\mathbb{R}[X]$, $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ es l.i.:
  Sean $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ tales que $\alpha_i = 0$ para casi todo $i \in \mathbb{N}_0$ y $\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \alpha_i X^i = 0$.
  Polinomio nulo $\iff$ todos sus coeficientes son 0.
  $\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}_0$.
- En $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,1),(1,-1,0),(0,1,1)\}$ es l.d.:

$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,-1,0) + \alpha_3(0,1,1) = (0,0,0).$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \alpha_3(-1,1,1),\ \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

  Por ejemplo:
  $(-1)\cdot(1,0,1) + 1\cdot(1,-1,0) + 1\cdot(0,1,1) = (0,0,0)$

  Observar que $(1,0,1) = (1,-1,0) + (0,1,1)$
  $\Rightarrow (1,0,1) \in \, < (1,-1,0),(0,1,1) >$

Observación.

Sea V un K-e.v. El conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es l.i. si y sólo si

$$< v_1, \ldots, v_n > \neq < v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n > \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

$< v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n >=$ subesp. generado por $\{v_1, \ldots, v_n\} - \{v_i\}$.

Proposición

Sea V un K-e.v. y sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Entonces:

1. $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ es l.i. $\iff$ $\{v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ es l.i.
2. $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n\}$ es l.i. $\iff$ $\{v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n\}$ es l.i. para $\lambda \in K - \{0\}$.
3. $\{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ es l.i. $\iff$ $\{v_1, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ es l.i. para $\lambda \in K$.

Consecuencia: para decidir si $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset K^n$ es l.i. o l.d podemos proceder como sigue:

- Considerar la matriz A cuyas filas son $v_1, \ldots, v_r$.
- Escalonar la matriz A.
- Si la matriz escalonada obtenida tiene alguna fila nula, el conjunto es l.d. De lo contrario, es l.i.

Ejemplos.

- $\{(1,0,1),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ es l.i.:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ sin filas nulas.
- $\{(1,0,1),(1,-1,0),(0,1,1)\}$ es l.d.:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bases y dimensión

Definición.
Sea V un K-e.v.. Una familia $\{v_i\}_{i\in I}$ se llama una base de V si $\{v_i\}_{i\in I}$ es l.i. y satisface $< v_i, \, i \in I >= V$.

Ejemplos.

- En K^n, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, donde $(e_i)_i = 1$ y $(e_i)_j = 0$ si $j \neq i$, es una base, llamada la base canónica de K^n.
- En $K^{m\times n}$, $B = \{E^{ij} \ / \ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ es una base.
- En $K[X]$, $B = \{X^i \ / \ i \in \mathbb{N}_0\}$ es una base.
- En $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-e.v., $B = \{1, i\}$ es una base.

Teorema.

Sea V un K-e.v. Si $< v_1, \ldots, v_r > = V$ y $\{w_1, \ldots, w_s\} \subseteq V$ es l.i., entonces $s \leq r$.

Demostración.

$V = < v_1, \ldots, v_r > \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq s,\ w_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} v_j$ con $\alpha_{ij} \in K$.

Consideremos el sistema lineal de r ecuaciones y s incógnitas:

$$\sum_{h=1}^{s} \alpha_{hj} x_h = 0, \qquad 1 \leq j \leq r.$$

Si $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ es una solución,

$$\sum_{h=1}^{s} \beta_h w_h = \sum_{h=1}^{s} \beta_h \Big(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{hj} v_j \Big) = \sum_{h=1}^{s} \Big(\sum_{j=1}^{r} \beta_h \alpha_{hj} v_j \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \Big(\sum_{h=1}^{s} \beta_h \alpha_{hj} v_j \Big) = \sum_{j=1}^{r} \Big(\sum_{h=1}^{s} \alpha_{hj} \beta_h \Big) v_j = 0.$$

$\{w_1, \ldots, w_s\}$ l.i. $\Rightarrow (\beta_1, \ldots, \beta_s) = 0$ (solución única).

$\Rightarrow$ cantidad de ecuaciones $(r) \geq$ cantidad de variables (s) $\square$

Corolario.
Sea V un K-espacio vectorial y sean $B_1 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ y $B_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de V. Entonces $n = m$.

Demostración.

- B_1 genera V y B_2 es l.i. $\implies n \geq m$.
- B_2 genera V y B_1 es l.i. $\implies m \geq n$.

Luego, $n = m$. $\square$

Definición.
Sean V un K-espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Decimos que n es la dimensión de V (como K-e.v.) y escribimos $n = \dim_K(V)$, o simplemente $\dim(V)$ si el cuerpo K queda claro por el contexto. Por convención, $\dim(\{0\}) = 0$.

Ejemplos.

- $\dim_K(K^n) = n$
- $\dim_K(K^{m\times n}) = mn$
- $\dim_K(K_n[X]) = n + 1$
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

Extracción y extensión de bases

Proposición

Sea V un K-e.v. de dimensión finita.

i) Si $\{v_1, \ldots, v_s\}$ es un sistema de generadores de V, existe $B \subseteq \{v_1, \ldots, v_s\}$ que es una base de V.

ii) Si $\{w_1, \ldots, w_r\}$ un conjunto l.i. de V, existen $w_{r+1}, \ldots, w_n \in V$ tales que $\{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ es una base de V.

Demostración.

i) Si $\{v_1, \ldots, v_s\}$ es l.i. ✓
Si no, algún v_i es combinación lineal de los otros.
Supongamos que $v_s \in < v_1, \ldots, v_{s-1} >$.
$\Rightarrow < v_1, \ldots, v_{s-1} > = < v_1, \ldots, v_{s-1}, v_s >$
$\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_{s-1}\}$ es un sistema de generadores de V.
Procedemos inductivamente.

ii) Sea $B = \{z_1, \ldots, z_n\}$ una base de V.
Sea $G_0 = \{w_1, \ldots, w_r\}$. Consideramos

$$G_1 := \begin{cases} \{w_1, \ldots, w_r, z_1\} & \text{si } z_1 \notin < G_0 > \\ \{w_1, \ldots, w_r\} & \text{si } z_1 \in < G_0 >. \end{cases}$$

Inductivamente para $2 \leq i \leq n$:

$$G_i := \begin{cases} G_{i-1} \cup \{z_i\} & \text{si } z_i \notin < G_{i-1} > \\ G_{i-1} & \text{si } z_i \in < G_{i-1} >. \end{cases}$$

Para cada $1 \leq i \leq n$:

- $\{w_1, \ldots, w_r\} \subseteq G_i$,
- $< z_1, \ldots, z_i > \subseteq < G_i >$,
- G_i es l.i.

En particular, $V = < z_1, \ldots, z_n > \subseteq < G_n >$ y G_n es l.i.
$\Rightarrow G_n$ es una base de V. $\square$

Proposición.

Sean S y T subespacios de un K-e.v. V de dimensión finita. Entonces:

i) $S \subseteq T \;\Rightarrow\; \dim S \leq \dim T$.

ii) $S \subseteq T$ y $\dim S = \dim T \;\Rightarrow\; S = T$.

Demostración.

i) Sean $\{s_1, \ldots, s_r\}$ una base de S y $n = \dim T$.
$S \subseteq T \Rightarrow \{s_1, \ldots, s_r\} \subseteq T$, y es l.i.
$\Rightarrow \{s_1, \ldots, s_r\}$ puede extenderse a una base de T
$\Rightarrow \dim S = r \leq n = \dim T$.

ii) Si $\{s_1, \ldots, s_r\}$ es una base de S, como $\dim S = \dim T$, al extenderla a una base de T no se agrega ningún vector.
$\Rightarrow S = < s_1, \ldots, s_r > = T$. $\square$

Ejemplos.

1. Extraer una base de $S = <(1,0,1),(1,-1,0),(0,1,1)>$ del sistema de generadores dado.

   Vimos que el sistema de generadores es l.d. Más aún, que
   $(1,0,1) = (1,-1,0) + (0,1,1) \in <(1,-1,0),(0,1,1)>$
   $\Rightarrow S = <(1,-1,0),(0,1,1)>$
   Además, $\{(1,-1,0),(0,1,1)\}$ es l.i. (no son múltiplos).
   $\Rightarrow B_S = \{(1,-1,0),(0,1,1)\}$ es base de S.

2. Extender B_S a una base de $\mathbb{R}^3$.

   Consideramos una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la base canónica
   $E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
   Agregamos vectores de E a $G_0 = B_S = \{(1,-1,0),(0,1,1)\}$ hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$.
   $(1,0,0) \notin <(1,-1,0),(0,1,1)>$
   $\Rightarrow G_1 = \{(1,-1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$ es l.i.
   $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y G_1 tiene 3 vectores l.i $\Rightarrow G_1$ es base de $\mathbb{R}^3$.