Álgebra Lineal - Clase 15

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Complementos invariantes.
- Transformaciones lineales nilpotentes.
- Forma de Jordan: caso nilpotente.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 6 (Sección 6.4) y Capítulo 7 (Sección 7.1).

Subespacios invariantes - Complementos

Definición.

Sean V un K-e.v, $f : V \to V$ una t.l y $S \subseteq V$ un subespacio f-invariante ($f(S) \subseteq S$). Un complemento invariante para S es un subespacio T de V tal que T es f-invariante y $S \oplus T = V$.

Si V es de dimensión finita, $s = \dim(S) > 0$ y $t = \dim(T) > 0$,

$B_S = \{v_1, \ldots, v_s\}$ y $B_T = \{w_1, \ldots, w_t\}$ bases de S y T resp.
$\Rightarrow B = B_S \cup B_T = \{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_t\}$ es una base de V.

$$|f|_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ con } A_1 = |f_{|_S}|_{B_S} \text{ y } A_2 = |f_{|_T}|_{B_T},$$

donde $f_{|_S} : S \to S$ y $f_{|_T} : T \to T$ son las restricciones.

Proposición.

i) $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{f_{|_S}} \cdot \mathcal{X}_{f_{|_T}}$

ii) $m_f = \mathrm{mcm}(m_{f_{|_S}}, m_{f_{|_T}})$

Transformaciones lineales y matrices nilpotentes

Definición

Sea V un K-e.v. Una transformación lineal $f : V \to V$ se dice nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ veces}} = 0$.

Si $f : V \to V$ es una t.l. nilpotente, se define el índice de nilpotencia de f como $\min\{j \in \mathbb{N} \ / \ f^j = 0\}$.

Análogamente, se dice que una matriz $A \in K^{n\times n}$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$ y se define su índice de nilpotencia como $\min\{j \in \mathbb{N} \ / \ A^j = 0\}$.

$f : V \to V$ t.l es nilpotente $\iff$ para cualquier base B de V, $|f|_B$ es una matriz nilpotente.

Lema

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una t.l.
f es nilpotente de índice $k \iff m_f = X^k$.
En particular, si $n = \dim(V)$, f es nilpotente $\iff f^n = 0$.

Demostración.

$(\Rightarrow)$ f nilpotente de índice $k \Rightarrow f^k = 0$ y $f^{k-1} \neq 0$.
X^k anula a $f \Rightarrow m_f \mid X^k \Rightarrow \exists j \leq k$ tal que $m_f = X^j$.
X^{k-1} no anula a $f \Rightarrow j = k$ y $m_f = X^k$.

$(\Leftarrow)$ $m_f = X^k \Rightarrow f^k = 0$ y $f^{k-1} \neq 0 \Rightarrow f$ es nilpotente de índice k. $\square$

Lema (Ejercicio)

Si $f : V \to V$ es una t.l. nilpotente de índice k, entonces

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Nu}(f) \subsetneq \mathrm{Nu}(f^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Nu}(f^k) = V$$

(todas las inclusiones son estrictas).

Forma de Jordan nilpotente - Existencia

Un caso particular.

Sean V un K-e.v. de dimensión n y $f : V \to V$ una t.l. nilpotente de índice n.

$f^{n-1} \neq 0 \Rightarrow \exists v \in V$ tal que $f^{n-1}(v) \neq 0$.

$m_v \mid m_f = X^n \Rightarrow m_v = X^k$ con $1 \leq k \leq n$.
$f^{n-1}(v) \neq 0 \Rightarrow m_v = X^n$

$\Rightarrow B = \{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ es una base de V.

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A una matriz de este tipo la llamaremos un bloque de Jordan nilpotente de $n \times n$.

Teorema

Sea V un K-e.v. de dimensión n, y sea $f : V \to V$ una t.l. nilpotente de índice k. Existe una base B de V tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

donde, para cada $1 \leq i \leq r$, $J_i \in K^{n_i \times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

Una matriz de este tipo se llama una forma de Jordan nilpotente.
A una base B para la cual $|f|_B$ es una forma de Jordan la llamaremos una base de Jordan para f.

Lema

Sea $f : V \to V$ una t.l. y sea $i \in \mathbb{N}_0$. Si $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto l.i. tal que $\text{Nu}(f^i) \cap < v_1, \dots, v_r > = \{0\}$, entonces $\{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ es l.i. y $\text{Nu}(f^{i-1}) \cap < f(v_1), \dots, f(v_r) > = \{0\}$.

Demostración.

Sea $v \in \text{Nu}(f^{i-1}) \cap < f(v_1), \dots, f(v_r) >$.

$v = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) \in \text{Nu}(f^{i-1})$.

$0 = f^{i-1}(v) = f^{i-1}(\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r)) = f^i(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r)$
$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in \text{Nu}(f^i)$.

$\text{Nu}(f^i) \cap < v_1, \dots, v_r > = \{0\} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$.
$\{v_1, \dots, v_r\}$ l.i. $\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.
Luego, $v = 0$.

En particular, $\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_r f(v_r) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.
$\Rightarrow \{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$ es l.i. $\square$

Demostración del Teorema.

Para $1 \leq j \leq k$, sea B_j una base de $\mathrm{Nu}(f^j)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & B_1 & & B_{k-2} & & B_{k-1} & & \\
\{0\} \subsetneq & \mathrm{Nu}(f) & \subsetneq \cdots \subsetneq & \mathrm{Nu}(f^{k-2}) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(f^{k-1}) & \subsetneq & V = \mathrm{Nu}(f^k) \\
 & & \ldots & f^2(D_k) & & f(D_k) & & D_k \\
 & & \ldots & f(D_{k-1}) & & D_{k-1} & & \\
 & & \ldots & D_{k-2} & & & &
\end{array}$$

- D_k conjunto l.i. tal que $B_{k-1} \cup D_k$ es base de $V = \mathrm{Nu}(f^k)$.
  Llamamos $C_k = D_k$.
  $\Rightarrow \mathrm{Nu}(f^{k-1}) \oplus < C_k > = V$
- $C_k \subset \mathrm{Nu}(f^k)$ es l.i. y $\mathrm{Nu}(f^{k-1}) \cap < C_k > = \{0\}$
  $\Rightarrow f(C_k) \subset \mathrm{Nu}(f^{k-1})$ es l.i. y $\mathrm{Nu}(f^{k-2}) \cap f(C_k) = \{0\}$.
  $\Rightarrow B_{k-2} \cup f(C_k)$ l.i.

  $D_{k-1} \subset \mathrm{Nu}(f^{k-1})$ conjunto l.i. tal que $B_{k-2} \cup f(C_k) \cup D_{k-1}$ es base de $\mathrm{Nu}(f^{k-1})$.

  $\Rightarrow C_{k-1} = f(C_k) \cup D_{k-1} \subset \mathrm{Nu}(f^{k-1})$ conjunto l.i. tal que $B_{k-2} \cup C_{k-1}$ es base de $\mathrm{Nu}(f^{k-1})$.

  $\Rightarrow \mathrm{Nu}(f^{k-2}) \oplus < C_{k-1} > = \mathrm{Nu}(f^{k-1})$.

De esta manera, se construyen recursivamente conjuntos l.i.
D_j y $C_j \subset \text{Nu}(f^j)$ para $j = k, k-1, \ldots, 1$ tales que:

- $C_j = f(C_{j+1}) \cup D_j$,
- $\text{Nu}(f^{j-1}) \oplus < C_j > = \text{Nu}(f^j)$.

(donde $C_{k+1} = \emptyset$).

$\Rightarrow \bigoplus_{j=1}^{k} < C_j > = \text{Nu}(f^k) = V$ y $\bigcup_{j=1}^{k} C_j$ es una base de V.

Si $D_j = \{v_1^{(j)}, \ldots, v_{r_j}^{(j)}\} \subset \text{Nu}(f^j)$, entonces

$$\begin{aligned} B = \; & \{v_1^{(k)}, f(v_1^{(k)}), \ldots, f^{k-1}(v_1^{(k)}), \ldots, v_{r_k}^{(k)}, f(v_{r_k}^{(k)}), \ldots, f^{k-1}(v_{r_k}^{(k)}), \ldots, \\ & \ldots, v_1^{(j)}, f(v_1^{(j)}), \ldots, f^{j-1}(v_1^{(j)}), \ldots, v_{r_j}^{(j)}, f(v_{r_j}^{(j)}), \ldots, f^{j-1}(v_{r_j}^{(j)}), \ldots \\ & \ldots, v_1^{(1)}, \ldots, v_{r_1}^{(1)}\} \end{aligned}$$

es una base de Jordan para f.
$|f|_B$ tiene la forma del enunciado del Teorema.
Más aún, para $j = k, k-1, \ldots, 1$, $|f|_B$ tiene $r_j = \#D_j$ bloques de Jordan nilpotentes de tamaño $j \times j$ en la diagonal. $\square$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \subsetneq & \mathrm{Nu}(f) & \subsetneq \cdots \subsetneq & \mathrm{Nu}(f^{k-2}) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(f^{k-1}) & \subsetneq & V = \mathrm{Nu}(f^{k}) \\
 & & f^{k-1}(v_1^{(k)}) & \cdots & f^{2}(v_1^{(k)}) & & f(v_1^{(k)}) & & v_1^{(k)} \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 & & f^{k-1}(v_{r_k}^{(k)}) & \cdots & f^{2}(v_{r_k}^{(k)}) & & f(v_{r_k}^{(k)}) & & v_{r_k}^{(k)} \\
 & & f^{k-2}(v_1^{(k-1)}) & \cdots & f(v_1^{(k-1)}) & & v_1^{(k-1)} & & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & f^{k-2}(v_{r_{k-1}}^{(k-1)}) & \cdots & f(v_{r_{k-1}}^{(k-1)}) & & v_{r_{k-1}}^{(k-1)} & & \\
 & & f^{k-3}(v_1^{(k-2)}) & \cdots & v_1^{(k-2)} & & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & f^{k-3}(v_{r_{k-2}}^{(k-2)}) & \cdots & v_{r_{k-2}}^{(k-2)} & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & & v_1^{(1)} & & & & & & \\
 & & \vdots & & & & & & \\
 & & v_{r_1}^{(1)} & & & & & &
\end{array}
$$

La base de Jordan B se arma recorriendo las filas de esta tabla de arriba hacia abajo y de derecha a izquierda.

Teorema.

Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz nilpotente. Entonces A es semejante a una forma de Jordan nilpotente.

A una base B de K^n tal que $|f_A|_B = J_A$ es una forma de Jordan nilpotente la llamaremos una base de Jordan para A, y a la matriz J_A una forma de Jordan para A.

Ejemplo.

Hallar una forma de Jordan y una base de Jordan para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

$\mathcal{X}_A = X^6 \Rightarrow A$ es nilpotente. $\quad A^2 \neq 0,\ A^3 = 0 \Rightarrow m_A = X^3.$

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Nu}(A) \subsetneq \mathrm{Nu}(A^2) \subsetneq \mathrm{Nu}(A^3) = \mathbb{R}^6$$

$B_1 = \{e_3, e_4, e_6\}$ bases de $\mathrm{Nu}(A)$,
$B_2 = \{e_3, e_4, e_6, e_2, e_5\}$ base de $\mathrm{Nu}(A^2)$.

1. Extendemos B_2 a una base de $\mathrm{Nu}(A^3) = \mathbb{R}^6$ con $D_3 = \{e_1\}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^2) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^3) & = \mathbb{R}^6 \\
 & & A^2.e_1 & & A.e_1 & & e_1 &
\end{array}$$

2. Extendemos $B_1 \cup \{A.e_1\} = \{e_3, e_4, e_6, e_2 - e_3 - e_5 + e_6\} \subset \mathrm{Nu}(A^2)$ a una base de $\mathrm{Nu}(A^2)$ con $D_2 = \{e_5\}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^2) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^3) & = \mathbb{R}^6 \\
 & & A^2.e_1 & & A.e_1 & & e_1 & \\
 & & A.e_5 & & e_5 & & &
\end{array}$$

3. Extendemos $\{A^2.e_1, A.e_5\} = \{-e_3 + e_6, e_4 - e_6\} \subset \mathrm{Nu}(A)$ a una base de $\mathrm{Nu}(A)$ con $D_1 = \{e_3\}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^2) & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A^3) & = \mathbb{R}^6 \\
 & & A^2.e_1 & & A.e_1 & & e_1 & \\
 & & A.e_5 & & e_5 & & & \\
 & & e_3 & & & & &
\end{array}$$

Una base de Jordan para A es

$$
\begin{aligned}
B &= \{e_1,\ A.e_1,\ A^2.e_1,\ e_5,\ A.e_5,\ e_3\} \\
&= \{(1,0,0,0,0,0),(0,1,-1,0,-1,1),(0,0,-1,0,0,1), \\
&\quad (0,0,0,0,1,0),(0,0,0,1,0,-1),(0,0,1,0,0,0)\}
\end{aligned}
$$

y una forma de Jordan de A es

$$
J_A = |f_A|_B = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Forma de Jordan nilpotente - Unicidad

Observación.

Si $J \in K^{m\times m}$ es un bloque de Jordan nilpotente, entonces $\mathrm{rg}(J^i) = m - i$ para cada $1 \leq i \leq m$.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^t & e_3^t & \dots & e_{m-1}^t & e_m^t & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}(J) = m - 1.$

$$J^2 = \begin{pmatrix} e_3^t & e_4^t & \dots & \dots & e_m^t & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(J^2) = m - 2$$

$$J^i = \begin{pmatrix} e_{i+1}^t & e_{i+2}^t & \dots & e_m^t & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \; \forall 1 \leq i \leq m-1$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}(J^i) = m - i$

$J^m = 0$

Proposición

Sea $A \in K^{n \times n}$ una forma de Jordan nilpotente de índice k.

- El bloque de Jordan más grande que aparece en A es de $k \times k$.
- La cantidad total de bloques de Jordan que forman A es $n - \text{rg}(A) = \dim(\text{Nu}(A))$.
- La cantidad de bloques de tamaño $j \times j$ con $j > i$ en A es $b_i = \text{rg}(A^i) - \text{rg}(A^{i+1})\ \forall 0 \leq i \leq k-1$.
- La cantidad de bloques de tamaño $j \times j$ en A es $c_j = \text{rg}(A^{j-1}) - 2\text{rg}(A^j) + \text{rg}(A^{j+1})\ \forall 1 \leq j \leq k$.

Demostración.

$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}$ con $J_\ell \in K^{n_\ell \times n_\ell}$ bloque de Jordan nilpotente y $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

A nilpotente de índice $k \Rightarrow m_A = X^k$

$m_A = \text{mcm}\{m_{J_1}, \dots, m_{J_r}\} = \text{mcm}\{X^{n_1}, \dots, X^{n_r}\} = X^{n_1}$

$\Rightarrow n_1 = k$.

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix} \text{ con } J_\ell \in K^{n_\ell \times n_\ell} \text{ bloque de Jordan nilpotente.}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rg}(A) = \sum_{1 \le \ell \le r} \mathrm{rg}(J_\ell) = \sum_{1 \le \ell \le r} (n_\ell - 1) = n - r$$

$$\Rightarrow r = n - \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Nu}(A)).$$

$J \in K^{j \times j}$ bloque de Jordan nilpotente $\Rightarrow J^i = 0$ si $j \le i$ o $\mathrm{rg}(J^i) = j - i$ si $j > i$.

Si c_j es la cantidad de bloques de $j \times j$ en A,

$$\mathrm{rg}(A^i) = \sum_{\ell=1}^{r} \mathrm{rg}(J_\ell^i) = \sum_{j=i+1}^{k} c_j . (j - i).$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A^i) - \mathrm{rg}(A^{i+1}) &= \sum_{j=i+1}^{k} c_j . (j - i) - \sum_{j=i+2}^{k} c_j . (j - (i+1)) \\ &= \sum_{j=i+1}^{k} c_j = b_i. \end{aligned}$$

$$c_j = b_{j-1} - b_j = \mathrm{rg}(A^{j-1}) - 2\mathrm{rg}(A^j) + \mathrm{rg}(A^{j+1}). \qquad \square$$