# TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

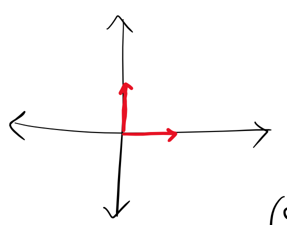
Sean $V$ un $\mathbb{R}$-e.v. con prod interno y $f: V \to V$ una t.l.
Son equivalentes:

1. $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall v, w \in V$
2. $\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$
3. $f$ manda una BON a una BON

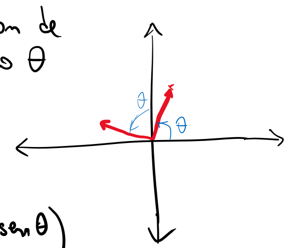
Una transformación ortogonal es una $f: V \to V$ tq que cumpla alguna (luego todas) de las condiciones anteriores.

---

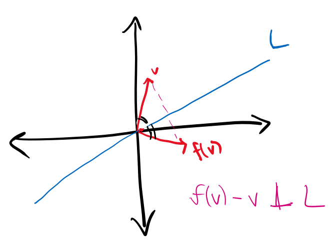
**EJEMPLOS** En $\mathbb{R}^2$



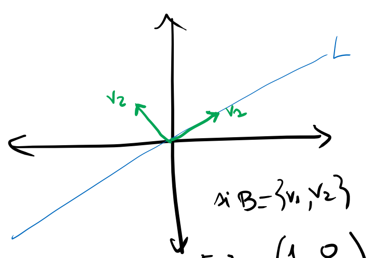
rotación de ángulo $\theta$




$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$




Simetría respecto de una recta $L$




si $B = \{v_1, v_2\}$

$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

⊗ **TEOREMA**: Toda $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ortogonal es una rotación o una simetría.

Algunas maneras de distinguirlas:

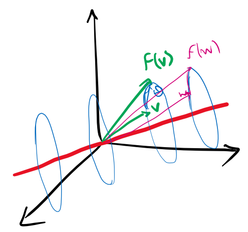
determinante $\quad \det(f) = 1 \Rightarrow$ rotación
$\det(f) = -1 \Rightarrow$ simetría

autovalor 1 $\quad$ SI $f \neq id$, 1 es autovalor $\Rightarrow$ simetría (el autoespacio es el eje de simetría)
1 no autovalor $\Rightarrow$ rotación

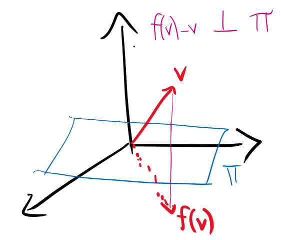
---

¿Qué pasa en $\mathbb{R}^3$?

– Rotación con respecto a un eje y ángulo $\theta$




– Simetría con respecto a un plano




---

**EJERCICIO**: En $\mathbb{R}^3$ consideramos los subespacios

$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y

$T = \langle (1,-1,0)\,;\,(1,0,-1)\rangle$

a) Definir una simetría $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(S) = T$. ¿Es única?

b) Definir una transf ortogonal $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(S) = T$ y $g(T) \neq S$, y clasificarla.

---

a) Sea $v = (1,2,-2)$. Entonces $\langle v\rangle = S^\perp$

Sea $w = (1,1,1)$. Entonces $\langle w\rangle = T^\perp$

Como $f$ será una transf ortogonal,

$$f(S) = T \iff f(S^\perp) = T^\perp \iff f(\langle v\rangle) = \langle w\rangle.$$
$$\iff f(v) \in \langle w\rangle$$

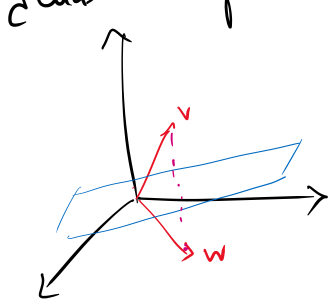
Como $\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ y $f$ es ortogonal, también $\|f(v)\| = 3$.

$\|w\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Como $\|\lambda \cdot w\| = |\lambda| \cdot \|w\|$, entonces hay dos múltiplos de $w$ cuya norma es 3:
$(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

---

Supongamos que $f(1,2,-2) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.
¿Cuál es el plano de simetría?




Hay un único plano posible, ya que debe ser ortogonal a $v - w = (1-\sqrt{3},\, 2-\sqrt{3},\, -2-\sqrt{3})$.

$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, (1-\sqrt{3})x + (2-\sqrt{3})y + (-2-\sqrt{3})z = 0\}$.

$f$ = simetría respecto de $\Pi$ ✓

¿Si quisiera $[f]_E$?

Encontrar una base ortonormal $B = \{\underbrace{v_1, v_2}_{\text{BON de } \Pi}, v_3\}$, $v_3 \in \Pi^\perp$

y usar que $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, cambio de base, etc.

---

b) Definir una transf ortogonal $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(S) = T$ y $g(T) \neq S$, y clasificarla.

---

$g(1,2,-2) = \pm(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}) \qquad S \cap T = \langle (-4,3,1)\rangle$

Base de $S = \{(-4,3,1)\,;\,(2\ 0\ 1)\}$ $\qquad \|(-4,3,1)\| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26}$

Base de $T = \{(-4,3,1)\,;\,(1,-1,0)\}$ $\qquad \|(1,-1,0)\| = \sqrt{2}$

Definimos $g$ de la sig manera:

$g(1,2,-2) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$
$g(-4,3,1) = (\sqrt{13}, -\sqrt{13}, 0)$
$g(v_3) =$

Si $\{(-4,3,1), v_3\}$ es base ortogonal de $S$,