FORMA DE JORDAN

Problemas surtidos

① Sea $A \in \mathbb{C}^{11\times 11}$ una matriz que cumple las siguientes condiciones:

- Los autovalores de A son -1, 0 y 2.
- $\mathrm{tr}(A) = 15$.
- m_A tiene grado 5.
- $\mathrm{rg}(A - 2I) = 6$.

Si $B \in \mathbb{C}^{11\times 11}$ es otra matriz que cumple las mismas condiciones, ¿es necesariamente semejante a A? ¿Y si además sabemos que $m_A = m_B$?

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{11}$ los autovalores de A (contados con multiplicidad). Entonces $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{11} \lambda_i = 15$.

Entre los autovalores hay a iguales a -1, b iguales a 0, c iguales a 2.

$$\boxed{\begin{aligned} a+b+c &= 11 \\ -a \quad +2c &= 15 \end{aligned}} \to \quad 2c \geq 15 \implies c \geq 8$$

Si $c=8$, tenemos que completar con un -1 y dos 0.

Es imposible que $c>8$: la única posibilidad sería $c=9$ y $a=b=1$, pero en ese caso $\mathrm{tr}(A) = 17 \neq 15$.

CONCLUSIÓN: $\boxed{\chi_A = (\lambda-2)^8(\lambda+1)\lambda^2}$

Sabemos que $\mathrm{gr}(m_A) = 5$.

Además vimos que $m_A \mid \chi_A$ (Hamilton-Cayley) y tienen las mismas raíces.

Las posibilidades para m_A son:

$$\boxed{\begin{aligned} m_A &= (\lambda-2)^3(\lambda+1)\lambda \\ m_A &= (\lambda-2)^2(\lambda+1)\lambda^2 \end{aligned}}$$

$\mathrm{rg}(A-2I) = 6 \implies \dim \mathrm{Nu}(A-2I) = 11-6 = 5$

$\implies$ $\boxed{\text{hay 5 bloques de autovalor 2 en la forma de Jordan de } A}$

$$\boxed{\chi_A = (\lambda-2)^8(\lambda+1)\lambda^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \to\ m_A &= (\lambda-2)^3(\lambda+1)\lambda \\ \to\ m_A &= (\lambda-2)^2(\lambda+1)\lambda^2 \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{hay 5 bloques de autovalor 2 en la forma de Jordan de } A}$

PRIMER CASO

Bloques de autovalor 2: $\underbrace{3+2+1+1+1}_{\text{única posibilidad!}} = 8$

autovalor -1: 1

autovalor 0: $1+1 = 2$

SEGUNDO CASO

Bloques de autovalor 2: $2+\underbrace{2+2+1+1}_{\text{única posibilidad}} = 8$

-1: 1

0: 2

Posibles forma de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{smallmatrix} &&&&&&& \\ & \begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix} &&&&&& \\ && 2 &&&&& \\ &&& 2 &&&& \\ &&&& 2 &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix} &&&&&& \\ & \begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix} &&&&& \\ && \begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix} &&&& \\ &&& 2 &&& \\ &&&& 2 && \\ &&&&& -1 & \\ &&&&&& \begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

Hay dos posibilidades para la forma de Jordan de A, (y B) por lo tanto no es necesariamente cierto que A y B son semejantes.

Sin embargo estas posibilidades tienen minimales distintos.

Si tenemos el dato adicional $m_A = m_B$ entonces sí son necesariamente semejantes.

② Ana y Beto juegan a tratar de descubrir la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$. Ana conoce el polinomio característico de A y Beto el minimal, pero ninguno de los dos tiene acceso a la matriz ni a la información del otro.
Se da la siguiente secuencia:

1. Ana dice que el dato que tiene no es suficiente para determinar la forma de Jordan de A, y le pide a Beto que le diga cuál es el minimal, ya que con eso sí podría calcularla.
2. Beto dice que tampoco tiene información suficiente para conocer la forma de Jordan de A, pero se niega a darle el minimal a Ana.
3. Ana dice que sigue sin tener información suficiente y le pide a Beto que aunque sea le diga si la matriz es diagonalizable o no, ya que con eso le alcanzaría.
4. Después de eso, Beto dice que ya sabe cuál es la forma de Jordan de A.

¿Cómo puede haber hecho Beto para llegar a esa conclusión?

Posibilidades para χ_A:

$\boxed{\mathrm{gr}(m_A) < 5}$

$\cancel{(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)(\lambda-e)}$

$\cancel{(\lambda-a)^2(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)}$

$\boxed{(\lambda-a)^3(\lambda-b)(\lambda-c)}$

$\cancel{(\lambda-a)^2(\lambda-b)^2(\lambda-c)}$

$\cancel{(\lambda-a)^4(\lambda-b)}$

$\cancel{(\lambda-a)^3(\lambda-b)^2}$

$\cancel{(\lambda-a)^5}$

$\boxed{m_A = (\lambda-a)^2(\lambda-b)(\lambda-c)}$

$m_A = (\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)$

$m_A = (\lambda-a)(\lambda-b)^2(\lambda-c)$

$\cancel{m_A = (\lambda-a)^3(\lambda-b)}$

$m_A = (\lambda-a)^2(\lambda-b)^2$.

$m_A = (\lambda-a)(\lambda-b)^2$.

$m_A = (\lambda-a)^2(\lambda-b)$.

$m_A = (\lambda-a)(\lambda-b)$