DIAGONALIZACIÓN

- Dada $A \in K^{n\times n}$:
  - los autovalores de A son las raíces del polinomio característico
    $$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$
  - para cada autovalor λ, el autoespacio asociado es
    $$E_\lambda = \{v \in K^n : \underbrace{(\lambda I - A)\cdot v = 0}_{Nu(\lambda I - A)}\} = \{v \in K^n : A\cdot v = \lambda v\}$$
  - PROPIEDAD: para cada autovalor λ,
    $$0 < \dim E_\lambda \leq mult(\lambda, \chi_A)$$
    A es diagonalizable $\Rightarrow$ vale la igualdad para todo λ
    vale la vuelta si la suma de las mult es n (por ej, si $K = \mathbb{C}$)

---

① Determinar todos los $k \in \mathbb{Q}$ tales que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & -2k+4 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-k & 2k-4 & 2-k & 4-2k \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-4 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-k)\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1}\cdot\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-4 & 2-k \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

desarrollo x 1ra col

$$= (\lambda-k)(\lambda-2)\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1}\cdot\det\begin{pmatrix} \lambda-4 & 2-k \\ 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

desarrollo x 1ra fila

$$= (\lambda-k)(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-2) = \boxed{(\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-k)}$$

Analizamos 3 casos:

(i) Si $k=2$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-4)$

Para ver si es diagonalizable basta calcular $\dim E_2$.

$$2I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

claramente $rg(2I-A) = 1 \Rightarrow \dim Nu(2I-A) = 4-1 = 3$

$\dim E_2 = 3$

por lo tanto, A es diagonalizable

(ii) Si $k=4$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$

Buscamos $\dim E_4$.

$$4I - A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{matrix}$$

Las primeras 3 filas son LI $\Rightarrow rg(4I-A) \geq 3$

$\Rightarrow \dim Nu(4I-A) \leq 1$

$\dim E_4 \leq \boxed{1 < 2}$

por lo tanto A NO es diagonalizable

(iii) Si $k \neq 2$, $k \neq 4$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-k)$

$\Rightarrow$ basta mirar $\dim E_2$

$\Rightarrow$ por argumento visto antes, $\dim E_2 \geq 2$

$\Rightarrow$ A es diagonalizable

RTA: A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ $k \neq 4$

POTENCIAS Y RAÍCES

② Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

(a) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) Hallar una matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $B^2 = A$.

Sea $A \in K^{n\times n}$ diagonalizable, entonces

$\boxed{A = C \cdot D \cdot C^{-1}}$ con C inversible, D diagonal

$$[f]_E = C(B,E)\cdot[f]_B\cdot \cancel{C(E,B)}\; C(B,E)^{-1}$$

$$A^3 = (CD\cancel{C^{-1}})(\cancel{C}D\cancel{C^{-1}})(\cancel{C}DC^{-1}) = CD^3C^{-1}$$

en general: $A^n = C \cdot D^n \cdot C^{-1}$

$A = CDC^{-1}$ $\qquad B \rightsquigarrow B^2 = CDC^{-1}$

$B = C\tilde{D}C^{-1} \rightarrow B^2 = C\tilde{D}^2C^{-1}$

---

② Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

(a) Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) Hallar una matriz $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $B^2 = A$.

(a) Intentamos diagonalizar A.

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\cdot\underbrace{(-1)^{2+2}}_{=1}\cdot\det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)[\lambda(\lambda-3) - (-2)]$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

$$= \boxed{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}$$

Autovalores de A = $\{1, 2\}$

Buscamos E_1.

$$E_1 = Nu(I-A) = Nu\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

busco (x_1, x_2, x_3) tal que

$$(1\ 0\ -2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_1 - 2x_3 = 0$$

$\rightarrow E_1 = \langle (2\ 0\ 1), (0\ 1\ 0) \rangle$

Buscamos E_2.

$$E_2 = Nu(2I-A) = Nu\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-2} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow E_2 = \langle (1\ 1\ 1) \rangle$$

Por lo tanto $A = CDC^{-1}$ con $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\underset{\text{(cuenta)}}{\Longrightarrow} C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) $$A^n = CD^nC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 0 & -2+2^{n+1} \\ 1-2^n & 1 & -2+2^{n+1} \\ 1-2^n & 0 & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$$

(b) tomo $B = C\tilde{D}C^{-1}$ con $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 0 & -2+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 & -2+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 0 & -1+2\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$