Álgebra Lineal - Clase 21

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Transformaciones lineales unitarias y ortogonales.
- Clasificación de transformaciones ortogonales.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 8 (Sección 8.3).

Transformaciones lineales unitarias y ortogonales

Recordar:

- $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice unitaria si es inversible y $U^{-1} = U^*$.
- $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice ortogonal si es inversible y $O^{-1} = O^t$.

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. Si B y B' bases ortonormales de V, entonces $C(B, B')$ es una matriz unitaria (u ortogonal).

Demostración.

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$, entonces, $\forall 1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned}(C(B,B')^{-1})_{ij} &= C(B',B)_{ij} = \langle w_j, v_i \rangle = \overline{\langle v_i, w_j \rangle} \\ &= \overline{C(B,B')_{ji}} = (C(B,B')^*)_{ij}\end{aligned}$$

$\Rightarrow C(B, B')^{-1} = C(B, B')^*$. $\square$

Teorema.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Son equivalentes:

i) $\exists B$ base ortonormal de V tal que $f(B)$ es una base ortonormal de V.

ii) $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \ \forall v, w \in V$.

iii) $\forall B$ base ortonormal de V, $f(B)$ es una base ortonormal de V.

iv) $\|f(v)\| = \|v\| \ \forall v \in V$.

v) $f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$.

Definición.

Una transformación lineal $f : V \to V$ que cumple las condiciones equivalentes del Teorema se dice unitaria si V es un $\mathbb{C}$-e.v., u ortogonal si V es un $\mathbb{R}$-e.v.

Demostración del Teorema.

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de V tal que $f(B) = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es una base ortonormal de V.

Si $v, w \in V$ con $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, entonces

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \right\rangle \overset{B \text{ bon}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} \\ \langle f(v), f(w) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(v_j) \right\rangle \overset{f(B) \text{ bon}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}, \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V.

$$\begin{aligned} \langle f(v_i), f(v_i) \rangle &= \langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ \langle f(v_i), f(v_j) \rangle &= \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \ i \neq j. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(B)$ es una base ortonormal de V.

iii) $\Rightarrow$ i) ✓

ii) $\Rightarrow$ iv) $\forall v \in V$, $\|f(v)\| = \langle f(v), f(v)\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} = \|v\|$.

iv) $\Rightarrow$ ii) Si V es un $\mathbb{R}$-e.v.,

$$\begin{aligned}
\langle f(v), f(w)\rangle &= \frac{1}{4}\|f(v)+f(w)\|^2 - \frac{1}{4}\|f(v)-f(w)\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\|f(v+w)\|^2 - \frac{1}{4}\|f(v-w)\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2 \ = \ \langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

y análogamente si V es un $\mathbb{C}$-e.v. con la identidad correspondiente.

ii) $\Rightarrow$ v) Sea $v \in V$. Para cada $w \in V$,

$\langle f^* \circ f(v),\ w\rangle = \langle f^*(f(v)),\ w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$,

$\Rightarrow \langle f^* \circ f(v) - v,\ w\rangle = 0\ \forall w \in V$.

$\Rightarrow f^* \circ f(v) - v = 0 \Rightarrow f^* \circ f(v) = v$.

$\Rightarrow f^* \circ f = id_V$. ($V$ de dim. finita $\Rightarrow f \circ f^* = id_V$.)

v) $\Rightarrow$ ii) $\forall v, w \in V$,

$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, f^*(f(w))\rangle = \langle v,\ f^* \circ f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. $\square$

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. y sea B una base ortonormal de V. Si $f : V \to V$ es una t.l, entonces

f es unitaria (ortogonal) $\iff$ $|f|_B$ es unitaria (ortogonal).

Demostración.

Si V es un $\mathbb{C}$-e.v. (para un $\mathbb{R}$-e.v. es análogo):

$(\Rightarrow)$ f unitaria $\Rightarrow f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$.

$$\Rightarrow I_n = |f^* \circ f|_B = |f^*|_B \cdot |f|_B \overset{B \text{ bon}}{=} (|f|_B)^* \cdot |f|_B.$$

$$\Rightarrow |f|_B \text{ es inversible y } (|f|_B)^{-1} = (|f|_B)^*.$$

$(\Leftarrow)$ $|f|_B$ unitaria $\Rightarrow |f|_B^{-1} = (|f|_B)^*$
$\Rightarrow |f^* \circ f|_B = |f \circ f^*|_B = I_n \Rightarrow f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$. $\square$

Ejemplo.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Lema.
Sea $f : V \to V$ una t.l. unitaria (ortogonal) y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) un autovalor de f. Entonces $|\lambda| = 1$.

Demostración.
λ autovalor de $f \Rightarrow \exists v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda.v$.
f unitaria (ortogonal) $\Rightarrow \|f(v)\| = \|v\|$.

$\Rightarrow \|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda.v\| = |\lambda|.\|v\| \overset{v\neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1.$ $\square$

Lema.
Sea $f : V \to V$ una t.l. unitaria (ortogonal). Si $S \subseteq V$ es un subespacio f-invariante, entonces $S^{\perp}$ es f-invariante.

Demostración.
Sea $x \in S^{\perp}$. Veamos que $f(x) \in S^{\perp}$.
$f_{|_S} : S \to S$ t.l. unitaria (ortogonal) $\Rightarrow f_{|_S}$ isomorfismo.
$s \in S \Rightarrow \exists s' \in S$ tal que $s = f(s')$.

$$\langle f(x), s\rangle = \langle f(x), f(s')\rangle = \langle x, s'\rangle = 0.$$

$\Rightarrow \langle f(x), s\rangle = 0 \ \forall s \in S$. Luego, $f(x) \in S^{\perp}$. $\square$

Clasificación de t.l. ortogonales en e.v. de dimensión 2

En lo que sigue, $(V, \langle , \rangle)$ es un espacio euclídeo de dimensión 2.

Sea $f : V \to V$ una transformación lineal ortogonal.

$B = \{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $V \Rightarrow \{f(v_1), f(v_2)\}$ base ortonormal de V

$f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2$ y $f(v_2) = \alpha' v_1 + \beta' v_2$
$\Rightarrow \{(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \|(\alpha, \beta)\| = 1$ y $(\alpha', \beta') = (-\beta, \alpha)$ o $(\alpha', \beta') = (\beta, -\alpha)$.

(1) $|f|_B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$\det(f) = 1$

(2) $|f|_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

$\det(f) = -1$

(1) $|f|_B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

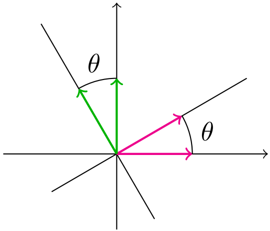
$\mathcal{X}_f = (X-\alpha)^2 + \beta^2 = X^2 - 2\alpha X + 1.$

$\alpha = \pm 1 \Rightarrow f = \pm id_V$. Si no, $\mathcal{X}_f$ no tiene raíces reales.

$\|(\alpha, \beta)\| = 1 \Rightarrow \exists \theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$.

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Se puede tomar $\theta \in [0, \pi]$, cambiando $\{v_1, v_2\}$ por $\{v_1, -v_2\}$ de ser necesario.



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una rotación de ángulo θ.

(2) $|f|_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{X}_f = (X-\alpha)(X+\alpha) - \beta^2 = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

$|f|_B$ simétrica $\Rightarrow \exists B'$ base ortonormal de V tal que

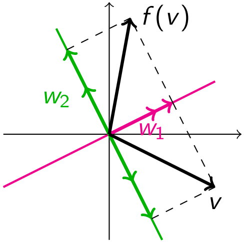
$$|f|_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$B' = \{w_1, w_2\}$

$w_1 \perp w_2$

$f(w_1) = w_1$

$f(w_2) = -w_2.$



$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la simetría respecto de $H = < w_1 >$.

Definición.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal ortogonal.

(1) Se dice que f es una rotación si $\det(f) = 1$.

(2) Sea $H \subseteq \mathbb{R}^2$ un subespacio de dimensión 1. Se dice que f es una simetría respecto de H si $f_{|_H} = id_H$ y $f_{|_{H^\perp}} = -id_{H^\perp}$.

Proposición.
Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal ortogonal, entonces f es una rotación o f es una simetría.

Ejemplos.

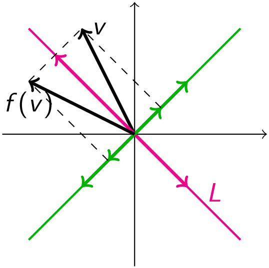
1. Hallar la simetría $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto de la recta $L : x + y = 0$.

$L = <(1, -1)>$,
$L^{\perp} = <(1, 1)>$.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por:

$$\begin{aligned} f(1, -1) &= (1, -1) \\ f(1, 1) &= (-1, -1). \end{aligned}$$

$f_{|_L} = id_L$ y $f_{|_{L^{\perp}}} = -id_{L^{\perp}}$
$\Rightarrow f$ simetría respecto de L.

$f(x, y) = (-y, -x) \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.



2. Hallar, si es posible, una rotación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(2,1) = (1,2)$.

f ortogonal $\Rightarrow \|f(v)\| = \|v\| \ \forall v \in V$.
$\|f(2,1)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{5} = \|(2,1)\|$ ✓

Definimos f en una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que contiene a $\frac{1}{\|(2,1)\|}(2,1) = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \rightsquigarrow B = \left\{ (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \right\}$.

$f(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}} f(2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

$(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{3}{5}(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & * \\ \frac{3}{5} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{3}{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{4}{5}(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) & = & (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \\ f(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) & = & (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}). \end{array} \right.$$

- f es ortogonal, porque $f(B)$ es una base ortonormal para B base ortonormal.
- f es una rotación, porque $\det(f) = 1$.
- $f(2,1) = (1,2)$ ✓