Álgebra Lineal - Clase 8

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Espacios vectoriales de transformaciones lineales.
- Espacio dual de un K-espacio vectorial.
- Bases duales.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 3 (Sección 3.7) y Capítulo 4 (Secciones 4.1 y 4.2).

Espacios vectoriales de transformaciones lineales

Definición.
Sean V y W dos K-espacios vectoriales. Se define
$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{f\colon V \to W \ / \ f$ es una transformación lineal$\}$.

- Suma.
  Dadas $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ se define
  $f+g : V \to W$ como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall\, x \in V$.
  Observar que $f + g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$
  $\Rightarrow +$ es una operación en $\mathrm{Hom}_K(V,W)$.
- Producto por escalares.
  Dados $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ y $\lambda \in K$ se define
  $(\lambda \cdot f) : V \to W$ como $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)\ \forall\, x \in V$.
  Observar que $\lambda \cdot f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$
  $\Rightarrow \cdot$ es una acción de K en $\mathrm{Hom}_K(V,W)$,

$(\mathrm{Hom}_K(V,W), +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

Proposición.

Sean V y W dos K-e.v. con $\dim V = n$ y $\dim W = m$.
Sean B y B' bases de V y W respectivamente. La función $T : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to K^{m\times n}$, $T(f) = |f|_{BB'}$ es un isomorfismo.
En particular, $\dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = mn$.

Demostración.

Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$.

- T es una transformación lineal:
  $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \Rightarrow T(f + g) = |f + g|_{BB'}$.
  $\forall 1 \leq j \leq n$, la j-ésima columna de $|f + g|_{BB'}$ es
  $$\big((f + g)(v_j)\big)_{B'} = \big(f(v_j) + g(v_j)\big)_{B'} = (f(v_j))_{B'} + (g(v_j))_{B'},$$
  la suma de las j-ésimas columnas de $|f|_{BB'}$ y $|g|_{BB'}$.
  $\Rightarrow T(f + g) = |f + g|_{BB'} = |f|_{BB'} + |g|_{BB'} = T(f) + T(g)$.
  En forma análoga se prueba que $T(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot T(f)$.

- T es un isomorfismo:
  - T es monomorfismo:
  $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W),\ T(f) = 0 \Rightarrow |f|_{BB'} = 0.$
  $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \{0\} \Rightarrow f \equiv 0.$
  - T es epimorfismo:
  Dada $A \in K^{m\times n}$, sea
  $f_A : V \to W,\ \big(f_A(x)\big)_{B'} = \big(A.(x)_B^t\big)^t\ \forall x \in V.$
  $f_A \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ y $T(f_A) = |f_A|_{BB'} = A.$

  $T : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to K^{m\times n}$ isomorfismo
  $\Rightarrow \dim(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim(K^{m\times n}) = mn.$ $\square$

Espacio dual de un espacio vectorial

Definición.

Sea V un K-e.v. Se llama espacio dual de V, y se lo nota V^*, a $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{f\colon V \to K / f$ es transformación lineal$\}$.

Si $\dim(V) = n$, V^* es isomorfo a $K^{1\times n}$ y $\dim(V^*) = n = \dim(V)$.

Ejemplo.

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^3)^* &= \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es transformación lineal}\} \\ &= \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ &\qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, 3$, sea $\delta_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\delta_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$.

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^3)^* &= \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ f = a\,\delta_1 + b\,\delta_2 + c\,\delta_3 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= <\delta_1, \delta_2, \delta_3>

Base dual

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Existe una única base $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de V^*, que llamaremos la base dual de B, tal que $\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Ejemplo.

$V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$\begin{array}{ccc}
\delta_1(1,0,0) = 1 & \delta_2(1,0,0) = 0 & \delta_3(1,0,0) = 0 \\
\delta_1(0,1,0) = 0 & \delta_2(0,1,0) = 1 & \delta_3(0,1,0) = 0 \\
\delta_1(0,0,1) = 0 & \delta_2(0,0,1) = 0 & \delta_3(0,0,1) = 1 \\
\delta_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 & \delta_2(x_1,x_2,x_3) = x_2 & \delta_3(x_1,x_2,x_3) = x_3
\end{array}$$

$B^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, donde $\delta_i(x_1,x_2,x_3) = x_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Demostración.

Existencia. Para $1 \leq i \leq n$, sea $\varphi_i : V \to K$ la t.l. definida en la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ por $\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Sea $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset V^*$.

Como $\dim(V^*) = n$, para probar que B^* es base de V^*, basta ver que es l.i.

Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n = 0$.

Evaluamos en v_i, para $i = 1, \ldots, n$:

$$a_i = a_1 \underbrace{\varphi_1(v_i)}_{=0} + \cdots + a_i \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{=1} + \cdots + a_n \underbrace{\varphi_n(v_i)}_{=0} = 0$$

Unicidad. Si $\{\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_n\}$ es otra base que satisface las condiciones, para cada $1 \leq i \leq n$:

- $\widetilde{\varphi}_i(v_j) = 0 = \varphi_i(v_j)$ si $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$,
- $\widetilde{\varphi}_i(v_i) = 1 = \varphi_i(v_i)$.

$\Rightarrow \widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$ (coinciden sobre una base). $\square$

Ejemplo.

$V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$.

Si $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subset (\mathbb{R}^2)^*$ es la base dual de B:

- $\varphi_1(1,1) = 1$ y $\varphi_1(1,-1) = 0$
- $\varphi_2(1,1) = 0$ y $\varphi_2(1,-1) = 1$

$$(x,y) = \frac{x+y}{2} \cdot (1,1) + \frac{x-y}{2} \cdot (1,-1)$$

$$\varphi_1(x,y) = \frac{x+y}{2} \underbrace{\varphi_1(1,1)}_{=1} + \frac{x-y}{2} \underbrace{\varphi_1(1,-1)}_{=0} = \frac{x+y}{2}$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{x+y}{2} \underbrace{\varphi_2(1,1)}_{=0} + \frac{x-y}{2} \underbrace{\varphi_2(1,-1)}_{=1} = \frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x,y) = \frac{x+y}{2} \quad \text{y} \quad \varphi_2(x,y) = \frac{x-y}{2}.$$

Coordenadas y bases duales

Observación.
Sea V un K-e.v. de dimensión n. Sean $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ una base y $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset V^*$ su base dual.

- Para $v \in V$, $(v)_B = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$.

  $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, con $\alpha_i \in K$.

  $\Rightarrow \varphi_j(v) = \varphi_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_j(v_i) = \alpha_j.$

- Para $\varphi \in V^*$, $(\varphi)_{B^*} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$.

  $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i$ con $\beta_i \in K$.

  $\Rightarrow \varphi(v_j) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i\Big)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i(v_j) = \beta_j.$

Ejemplo.
$V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$,
$B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subset (\mathbb{R}^2)^*$, con $\varphi_1(x,y) = \frac{x+y}{2}$, $\varphi_2(x,y) = \frac{x-y}{2}$.

- Las coordenadas de $v = (-1,3)$ en la base B son $(v)_B = (\varphi_1(-1,3), \varphi_2(-1,3)) = (1,-2)$
- Las coordenadas de $\varphi(x,y) = 5x - 3y$ en la base B^* son $(\varphi)_{B^*} = (\varphi(1,1), \varphi(1,-1)) = (2,8)$

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión n.
Si $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ son bases de V y $B_1^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $B_2^* = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ sus bases duales, entonces $C(B_1^*, B_2^*) = C(B_2, B_1)^t$.

Demostración.

$$C(B_1^*, B_2^*) = \left((\varphi_1)^t_{B_2^*} \cdots (\varphi_n)^t_{B_2^*} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \cdots & \varphi_n(w_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(w_n) & \cdots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}$$

$$C(B_2, B_1) = \left((w_1)^t_{B_1} \cdots (w_n)^t_{B_1} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \cdots & \varphi_1(w_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(w_1) & \cdots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C(B_1^*, B_2^*) = C(B_2, B_1)^t$. $\square$

Más sobre bases duales

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión n. Si $B_1 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es una base de V^*, existe una única base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V que satisface $B^* = B_1$.

Demostración.

Existencia. Sean $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de V y B_2^* su base dual.

Sea $M = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \varphi_1(w_2) & \cdots & \varphi_1(w_n) \\ \varphi_2(w_1) & \varphi_2(w_2) & \cdots & \varphi_2(w_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(w_1) & \varphi_n(w_2) & \cdots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}$.

[Observar: si B cumple $B^* = B_1$, entonces $M = C(B_2, B)$.]

$\forall 1 \leq i \leq n$, $(\varphi_i)_{B_2^*} = (\varphi_i(w_1), \dots, \varphi_i(w_n))$ es la i-ésima fila de M.

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset V^*$ es l.i. $\Rightarrow \{(\varphi_1)_{B_2^*}, \dots, (\varphi_n)_{B_2^*}\} \subset K^n$ es l.i.

$\Rightarrow M$ es inversible

Sea $M^{-1} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

[Observar: si $M = C(B_2, B)$, entonces $M^{-1} = C(B, B_2)$.]

Para cada $1 \leq j \leq n$, sea $v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} w_k$.

- $\varphi_i(v_j) = \varphi_i\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} w_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \varphi_i(w_k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i(w_k) a_{kj} =$
  $\sum_{k=1}^{n} M_{ik}.(M^{-1})_{kj} = (M.M^{-1})_{ij} = (I_n)_{ij}$.
  $\Rightarrow \varphi_i(v_j) = 1$ si $i = j$ y $\varphi_i(v_j) = 0$ si $i \neq j$.
- $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V: basta ver que es l.i.
  $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \Rightarrow 0 = \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_i(v_j) = \alpha_i, \ \forall i$.

Unicidad. Si $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es otra base de V tal que $(B')^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, para $1 \leq i \leq n$,

$(u_i)_B = (\varphi_1(u_i), \ldots, \varphi_n(u_i)) = e_i = (v_i)_B \Rightarrow u_i = v_i$. $\square$

Ejemplo.

Sea $V = \mathbb{R}_2[X]$. Sean $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (\mathbb{R}^2[X])^*$ definidas por $\varepsilon_0(P) = P(0)$, $\varepsilon_1(P) = P(1)$ y $\varepsilon_2(P) = P(2)$ para $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

$\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$: como $\dim((\mathbb{R}_2[X])^*) = 3$, basta ver que es l.i. Supongamos que $\alpha_0\varepsilon_0 + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 = 0$.

$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $(\alpha_0\varepsilon_0 + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2)(P) = 0$, o sea

$$\alpha_0\varepsilon_0(P) + \alpha_1\varepsilon_1(P) + \alpha_2\varepsilon_2(P) = 0.$$

- $P = (X-1)(X-2) \Rightarrow \alpha_0 = 0$,
- $P = X(X-2) \Rightarrow \alpha_1 = 0$,
- $P = X(X-1) \Rightarrow \alpha_2 = 0$.

$\Rightarrow \exists!$ base $B = \{P_0, P_1, P_2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

$P_0(0) = 1$, $P_0(1) = 0$, $P_0(2) = 0$ y $\mathrm{gr}(P_0) \leq 2$

$\Rightarrow P_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$.

Análogamente: $P_1 = -X(X-2)$ y $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$.