Álgebra Lineal - Clase 20

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Adjunta de una transformación lineal.
- Transformación lineal autoadjunta.
- Diagonalización de matrices hermitianas.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 8 (Sección 8.3).

Adjunta de una transformación lineal

Definición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. y sea $f : V \to V$ una t.l. Se llama adjunta de f a una t.l. $f^* : V \to V$ tal que

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \quad \forall\, v, w \in V.$$

Ejemplo.
Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = (x + iy, 2x - (1 + i)y)$.
Para el p.i. canónico de $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
\langle f(x, y), (z, w)\rangle &= \langle (x + iy, 2x - (1 + i)y), (z, w)\rangle \\
&= (x + iy)\,\overline{z} + (2x - (1 + i)y)\,\overline{w} \\
&= x\,(\overline{z} + 2\overline{w}) + y\,(i\overline{z} - (1 + i)\overline{w}) \\
&= x\,\overline{(z + 2w)} + y\,\overline{(-iz + (-1 + i)w)} \\
&= \langle (x, y), (z + 2w, -iz + (-1 + i)w)\rangle.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f^* : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f^*(z, w) = (z + 2w, -iz + (-1 + i)w)$.

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. y sea $f : V \to V$ una t.l. Existe una única t.l. $f^* : V \to V$ que satisface $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle \ \forall v, w \in V$.

Demostración.

Unicidad. Supongamos que $f_1^* : V \to V$ y $f_2^* : V \to V$ son t.l. que verifican la propiedad.
Sea $w \in V$.

$\forall v \in V$, $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f_1^*(w)\rangle$ y $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f_2^*(w)\rangle$.

$\Rightarrow \forall v \in V$, $\langle v,\ f_1^*(w) - f_2^*(w)\rangle = \langle v,\ f_1^*(w)\rangle - \langle v,\ f_2^*(w)\rangle = 0$.

$v = f_1^*(w) - f_2^*(w) \Rightarrow \langle f_1^*(w) - f_2^*(w),\ f_1^*(w) - f_2^*(w)\rangle = 0$

$\Rightarrow f_1^*(w) - f_2^*(w) = 0$, o sea, $f_1^*(w) = f_2^*(w)$.

Luego, $f_1^* = f_2^*$.

Existencia. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V.
Si $f^* : V \to V$ cumple la condición requerida, $\forall w \in V$,

$$f^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle f^*(w), v_i \rangle \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle v_i, f^*(w) \rangle} \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle f(v_i), w \rangle} \, v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle w, f(v_i) \rangle \, v_i.$$

Definimos $f^* : V \to V$ como $f^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle w, f(v_i) \rangle \, v_i$.

- f^* es una transformación lineal:

$$\begin{aligned} f^*(w + w') &= \sum_{i=1}^{n} \langle w + w', f(v_i) \rangle \, v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\langle w, f(v_i) \rangle + \langle w', f(v_i) \rangle) \, v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle w, f(v_i) \rangle \, v_i + \sum_{i=1}^{n} \langle w', f(v_i) \rangle \, v_i \\ &= f^*(w) + f^*(w') \qquad \forall w, w' \in V. \end{aligned}$$

$$f^*(\lambda\, w) = \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda w, f(v_i) \rangle \, v_i \; = \; \sum_{i=1}^{n} \lambda \, \langle w, f(v_i) \rangle \, v_i = \lambda \, f^*(w)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), $\forall w \in V$.

- $\forall v, w \in V$, vale $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, v_i \Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, f(v_i).$$

$$\langle f(v), w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle f(v_i),\ w \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, \langle f(v_i), w\rangle.$$

$$\langle v, f^*(w)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, v_i,\ \sum_{j=1}^{n} \langle w, f(v_j)\rangle\, v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \left\langle v_i,\ \sum_{j=1}^{n} \langle w, f(v_j)\rangle\, v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\langle w, f(v_j)\rangle} \langle v_i, v_j\rangle \right) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \overline{\langle w, f(v_i)\rangle}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle\, \langle f(v_i), w\rangle.$$

$$\Rightarrow \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle. \qquad \square$$

Proposición.

Sean $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. y $f : V \to V$ una t.l. Si B es una base ortonormal de V, entonces $|f^*|_B = (|f|_B)^*$.

Recordar: para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se define $A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ como $(A^*)_{ij} = \overline{A}_{ji}$ $\forall i, j$.

Demostración.

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ la base ortonormal de V. Para cada $1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned}(|f^*|_B)_{ij} &= \langle f^*(v_j), v_i\rangle = \overline{\langle v_i, f^*(v_j)\rangle} = \overline{\langle f(v_i), v_j\rangle} \\ &= (\overline{|f|_B})_{ji} = ((|f|_B)^*)_{ij}\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo (continuación).

En $\mathbb{C}^2$ con el p.i. canónico,

$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = (x + iy, 2x - (1 + i)y)$,

$f^* : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f^*(x, y) = (x + 2y, -ix + (-1 + i)y)$.

$$|f|_E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |f^*|_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & -1+i \end{pmatrix} = (|f|_E)^*.$$

Ejemplo.
Sea $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$,
$f(x, y, z) = (x + iy - iz, (2 + i)x + iy + z, (1 + i)y + 2z)$.
Hallar f^* para el producto interno canónico de $\mathbb{C}^3$.

E base canónica de $\mathbb{C}^3$ es ortonormal para el p.i. canónico.

$$|f|_E = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 2+i & i & 1 \\ 0 & 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow |f^*|_E = (|f|_E)^* = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ -i & -i & 1-i \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$f^*(x, y, z) = (x + (2 - i)y, -ix - iy + (1 - i)z, ix + y + 2z)$.

Transformaciones lineales autoadjuntas

Definición.
Sean $(V, \langle , \rangle)$ un e.v de dimensión finita con p.i. y $f : V \to V$ una t.l. Se dice que f es autoadjunta si $f^* = f$.

$f : V \to V$ autoadjunta $\iff \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \ \forall v, w \in V$.

Definición.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice simétrica si $A_{ij} = A_{ji} \ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$ $(A = A^t)$.
$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice hermitiana si $A_{ij} = \overline{A_{ji}} \ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$ $(A = A^*)$.

Proposición.

Sean $(V, \langle , \rangle)$ un e.v de dimensión finita con p.i. y $f : V \to V$ t.l. Son equivalentes:

i) f es autoadjunta.
ii) $\forall\, B$ base ortonormal de V, $|f|_B$ es hermitiana.
iii) $\exists\, B$ base ortonormal de V tal que $|f|_B$ es hermitiana.

Diagonalización de transformaciones lineales autoadjuntas

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i.
Si $f : V \to V$ es una t.l. autoadjunta, entonces el polinomio característico de f tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$.

Demostración.

- Si V es un $\mathbb{C}$-e.v.:
  $\lambda \in \mathbb{C}$ raíz de $\mathcal{X}_f \Rightarrow \lambda$ autovalor de f.
  Sea $v \in V$ un autovector de f de autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$.

  $$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

  $\langle v, v\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Si V es un $\mathbb{R}$-e.v.:
  Sean B base ortonormal de V y $A = |f|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
  f autoadjunta $\Rightarrow A$ simétrica.
  $\lambda \in \mathbb{C}$ raíz de $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_A \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,
  $f_A(x) = Ax$ autoadjunta para el p.i. canónico.
  $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. Si $f : V \to V$ es una t.l. autoadjunta, existe una base ortonormal B de V tal que $|f|_B$ es diagonal real.

Demostración. Por inducción en $n = \dim V$: $n = 1$ ✓
Sea $n = \dim V > 1$ y supongamos que vale para t.l. autoadjuntas en e.v. de dimensión $n - 1$.
$f : V \to V$ t.l. autoadjunta, λ autovalor de $f \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.
Sea $v \in V$ autovector asociado a λ y sea $S = < v >^{\perp}$.
$\dim(S) = n - 1$ y S es f-invariante:

$$\forall x \in S,\ \langle f(x), v\rangle = \langle x, f(v)\rangle = \langle x, \lambda v\rangle = \lambda\langle x, v\rangle = 0,$$

$\Rightarrow f(x) \in < v >^{\perp} = S$.
$(S, \langle , \rangle)$ con el p.i. de V restringido $\Rightarrow f_{|_S} : S \to S$ autoadjunta.
Por HI, $\exists B'$ base ortonormal de S tal que $|f_{|_S}|_{B'}$ es diagonal real.
$\Rightarrow B = \{\frac{1}{\|v\|} v\} \cup B'$ es una base ortonormal de V y
$|f|_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & |f_{|_S}|_{B'} \end{pmatrix}$ es diagonal real. $\square$

Ejemplo.

Sea $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = (x + iy, -ix + y)$. Hallar, si es posible, una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

$|f|_E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ es hermitiana, E es base ortonormal de $\mathbb{C}^2$
$\Rightarrow f$ es autoadjunta

- $\mathcal{X}_f = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -i \\ i & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$
  Autovalores de f: $\lambda = 2$ y $\lambda = 0$
- $E_2 = \mathrm{Nu}(2\, id - f) = \mathrm{Nu} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right) = <(i, 1)>$,
  $E_0 = \mathrm{Nu}(f) = <(-i, 1)>$.

$B = \left\{ \frac{1}{\|(i,1)\|}(i, 1), \frac{1}{\|(-i,1)\|}(-i, 1) \right\} = \left\{ (\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ y $|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Diagonalización de matrices hermitianas y simétricas

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana.
$f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f_A(x) = A.x$, es autoadjunta para el p.i. canónico.
$\Rightarrow \exists B$ base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f_A|_B = D$ es diagonal real.

$$C(B,E)^{-1}.\,A.\,C(B,E) = D.$$

Como E y B son bases ortonormales de $\mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}(C(B,E)^{-1})_{ij} &= C(E,B)_{ij} = \langle e_j, v_i\rangle = \overline{\langle v_i, e_j\rangle}\\ &= \overline{C(B,E)_{ji}} = (C(B,E)^*)_{ij} \qquad \forall 1 \le i,j \le n.\end{aligned}$$

$\Rightarrow C(B,E)^{-1} = C(B,E)^*$.

Análogamente, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, existe una base ortonormal B de $\mathbb{R}^n$ tal que $|f_A|_B = D$ es diagonal.

$C(B,E)^{-1}.\,A.\,C(B,E) = D$ y vale $C(B,E)^{-1} = C(B,E)^t$.

Definición.

- $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice unitaria si es inversible y $U^{-1} = U^*$.
- $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice ortogonal si es inversible y $O^{-1} = O^t$.

Corolario

- Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana, existe $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U^*.A.U$ es diagonal real.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, existe $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $O^t.A.O$ es diagonal.

Ejemplos.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ matriz hermitiana del ejemplo anterior.

$B = \{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ formada por autovectores de A.

$\Rightarrow U = C(B,E) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ cumple $U^*AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

y $U^{-1} = U^*$.

(2) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallar $O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ortogonal tal que $O^t A O$ sea diagonal.

Buscamos B base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A.

- $\mathcal{X}_A = (\lambda - 4)^2(\lambda + 5)$
- $E_4 = < (1,0,1),(0,2,1) >$ y $E_{-5} = < (2,1,-2) >$

$v \in E_4$, $w \in E_{-5} \Rightarrow v$ y w son ortogonales.

$\{(1,0,1),(0,2,1)\}$ no es ortogonal $\Rightarrow$ aplicamos Gram-Schmidt

$$z_1 = (1,0,1)$$
$$z_2 = (0,2,1) - \frac{\langle (0,2,1),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) = (-\tfrac{1}{2}, 2, \tfrac{1}{2}).$$

$\{(1,0,1),(-\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}),(2,1,-2)\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

Normalizamos:

$B = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})\}$ base ortonormal.

$B=\{(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{6}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A.

$O=C(B,E)=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ cumple:

- $O^tO=I_3 \Rightarrow O$ es ortogonal
- $O^tAO=C(E,B).|f_A|_E.C(B,E)=|f_A|_B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.