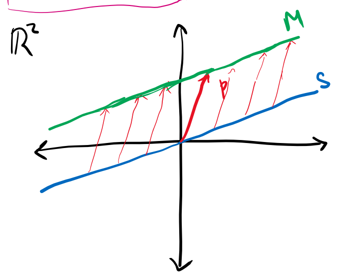
VARIEDADES LINEALES

Una variedad lineal es un conjunto de la forma $\boxed{M = S + p}$ con S subespacio y $p \in V$.



El subespacio S está unívocamente determinado por M, no así el punto p.

⊗ **PROPOSICIÓN**: Sea $M = S + p$ una variedad lineal.
Entonces
① $S = \{x - y : x, y \in M\}$ (en particular, S está determinado por M)
② $M = S + q \iff q \in M \iff q - p \in S$.

DEM: ① $(\subseteq)$ sea $v \in S$, notemos que $v + p \in M$ y también $0 + p = p \in M$, luego $(v+p) - (0+p) = v$ pertenece al conjunto de la derecha.
$(\supseteq)$ si $x, y \in M$, entonces $x = v + p$ e $y = w + p$ con $v, w \in S$, por lo tanto $x - y = (v+\cancel{p}) - (w+\cancel{p}) = v - w \in S$

② $(\Rightarrow)$ es claro pues $0 + q = q \in S + q = M$.
$(\Rightarrow)$ se deduce de ① pues $q, p \in M$
$(\Leftarrow)$ $(q - p) + p = q \in S + p = M$
$(\Leftarrow)$ que $q \in M$ significa que $q = v + p$ con $v \in S$.
Queremos ver que $M = S + q$, es decir que $S + p = S + v + p$. Para eso basta probar que $S = S + v$. Esto es cierto porque S es subespacio y $v \in S$ [ejercicio].

Sean $M_1 = S_1 + p_1$, $M_2 = S_2 + p_2$ dos variedades lineales. ¿Cuándo pasa que $M_1 \subseteq M_2$?

⊗ **COROLARIO**: $M_1 \subseteq M_2 \iff S_1 \subseteq S_2$ y $\underbrace{p_1 \in M_2}$

(esta parte, a su vez, equivale a que $p_1 - p_2 \in S_2$)

DEM: $(\Rightarrow)$ Que $p_1 \in M_2$ es claro pues $p_1 = 0 + p_1 \in M_1$.
Como S_1 es el conj de todas las diferencias entre dos puntos de M_1 y lo mismo con S_2, queda claro que $S_1 \subseteq S_2$ pues todo punto de M_1 está también en M_2.
$(\Leftarrow)$ Como $p_1 \in M_2$, entonces $M_2 = S_2 + p_1$.
Como $M_1 = S_1 + p_1$, es claro que
$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow M_1 \subseteq M_2$. ■

⊗ **EJERCICIO**: En $\mathbb{R}^4$ consideramos los planos
$\Pi_1 : \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$
$\Pi_2 : \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,\ x_1 + x_4 = -1\}$

(a) Hallar dos rectas paralelas L_1 y L_2 tales que $L_1 \subseteq \Pi_1$ y $L_2 \subseteq \Pi_2$.

(b) Hallar un plano Π que contenga a L_1 y L_2.

SOLUCIÓN
Notemos que $\Pi_1 = S_1 + p_1$ y $\Pi_2 = S_2 + p_2$ donde S_1, S_2 son las soluciones de los sistemas homogéneos asociados y p_1, p_2 son soluciones particulares.

$$\Pi_1 = \langle (-1,1,0,-1) ; (-1,0,1,-1) \rangle + (1,0,0,0)$$
$$\Pi_2 = \langle (1,0,0,-1) ; (0,1,-1,0) \rangle + (-1,4,0,0)$$

Sean $L_1 = \langle w \rangle + q_1$, $L_2 = \langle w \rangle + q_2$.

Necesariamente $w \in \langle (-1,1,0,-1) ; (-1,0,1,-1) \rangle \cap \langle (1,0,0,-1) ; (0,1,-1,0) \rangle$
$= \langle (0,1,-1,0) \rangle$

Así que podemos tomar
$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= \langle (0,1,-1,0) \rangle + (1,0,0,0) \leftarrow q_1 \\ L_2 &= \langle (0,1,-1,0) \rangle + (-1,4,0,0) \leftarrow q_2 \end{aligned}}$$

b) Tomamos $\Pi = \langle (0,1,-1,0) ; \underset{q_2 - q_1}{(-2,4,0,0)} \rangle + (1,0,0,0)$

SUMA DE VARIEDADES

Dadas $M_1 = S_1 + p_1$, $M_2 = S_2 + p_2$, se define $M_1 \vee M_2$ como la mínima variedad que contiene a ambas. Vale:

$$M_1 \vee M_2 = \left(S_1 + S_2 + \langle p_2 - p_1 \rangle\right) + p_1$$