ESPACIO DUAL

Definición Sea V un K-esp vectorial,
$V^* = \{ \varphi : V \to K \ / \ \varphi \text{ es t.l.} \}$

Base dual Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V.
Definimos $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in V^*$ como sigue:

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Resulta entonces que $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ es base de V^*
(se llama la base dual de B).

Otra manera de pensar a las φ_i

$\psi_1 : V \to K$
$\psi_1(v) =$ primera coordenada de v en base B
$\psi_1 \in V^*$ $\quad \psi_1(v_1) = 1 \quad \psi_1(v_j) = 0$ si $j > 1$
$\rightsquigarrow \psi_1 = \varphi_1$!

En general, φ_i es la función que calcula la i-ésima coordenada en base B.

Dos propiedades MUY útiles Sean $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V,
$B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ base de V^*.

① Dado $v \in V$, las coordenadas de v en base B son
$(\varphi_1(v), \varphi_2(v), \dots, \varphi_n(v))$.

② Dada $\psi \in V^*$, las coordenadas de ψ en base B^* son
$(\psi(v_1), \psi(v_2), \dots, \psi(v_n))$.

Teorema Toda base de V^* es la base dual de una base de V.
Es decir: si B' es base de V^*, existe B base de V tal que $B^* = B'$.

EJERCICIO: Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las funciones definidas por

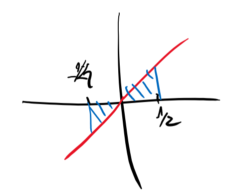
$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = \int_{-1/2}^{1/2} P(x)\,dx$

(a) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
(b) Sea $Q = 5X^2 - 7X$. Hallar las coordenadas de Q en base B.
(c) Sea $\psi \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ definida por $\psi(P) = P'(0)$. Hallar las coordenadas de ψ en base B^*.

(a) Queremos $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ tales que
$\varphi_i(p_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Podemos tomar $p_2 = X$:

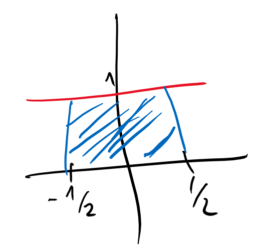
$\varphi_1(p_2) = 0$
$\varphi_2(p_2) = 1$
$\varphi_3(p_2) = \int_{-1/2}^{1/2} x\,dx = 0$



Buscamos p_1: $\quad p_1 = ax^2 + bx + 1 \qquad a + b + 1 = 0$
$\qquad b = -1 - a$

$p_1 = ax^2 + (-1-a)x + 1$

$$\int_{-1/2}^{1/2} ax^2 + (-1-a)x + 1 \, dx = 0$$



$$\int_{-1/2}^{1/2} ax^2\,dx + 1 = 0$$

$$a \cdot \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-1/2}^{1/2} \right) + 1 = 0$$

$$a \cdot \left(\frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24}\right) \right) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{12} a + 1 = 0 \rightsquigarrow \boxed{a = -12}$$

$$\boxed{p_1 = -12x^2 + 11x + 1}$$

Buscamos p_3: como $\varphi_1(p_3) = \varphi_2(p_3) = 0$, 0 y 1 son raíces de p_3
y como $\operatorname{gr}(p_3) \leq 2$, $p_3 = \alpha \cdot X \cdot (X-1)$
$p_3 = \alpha X^2 - \alpha X$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \alpha x^2 - \alpha x \, dx = 1 \rightsquigarrow \int_{-1/2}^{1/2} \alpha x^2 \, dx = 1$$

lo puedo ignorar xq es impar

$$\frac{1}{12}\alpha = 1 \rightsquigarrow \alpha = 12$$

$$\boxed{p_3 = 12X^2 - 12X}$$

EJERCICIO: Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las funciones definidas por

$\varphi_1(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P(1), \quad \varphi_3(P) = \int_{-1/2}^{1/2} P(x)\,dx$

(a) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.
(b) Sea $Q = 5X^2 - 7X$. Hallar las coordenadas de Q en base B.
(c) Sea $\psi \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ definida por $\psi(P) = P'(0)$. Hallar las coordenadas de ψ en base B^*.

(a) $B = \{ \underbrace{-12X^2 + 11X + 1}_{p_1}, \underbrace{X}_{p_2}, \underbrace{12X^2 - 12X}_{p_3} \}$

(b) $(Q)_B = (\varphi_1(Q), \varphi_2(Q), \varphi_3(Q)) = (0, -2, \frac{5}{12})$

(c) $(\psi)_{B^*} = (\psi(p_1), \psi(p_2), \psi(p_3)) = (11, 1, -12)$