Álgebra Lineal - Clase 3

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Suma de subespacios.
- Teorema de la dimensión para subespacios.
- Suma directa.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 1 (Sección 1.4).

Subespacio suma

Definición.
Sea V un K-espacio vectorial, y sean S y T subespacios de V. Se llama suma de S y T al conjunto

$$\begin{aligned} S+T &= \{v \in V \ / \ \exists\, x \in S,\ y \in T \text{ tales que } v = x+y\} \\ &= \{x+y \ / \ x \in S,\ y \in T\}. \end{aligned}$$

Proposición.
Sea V un K-e.v., y sean S y T subespacios de V. Entonces:

(a) $S+T$ es un subespacio de V.

(b) $S+T$ es el menor subespacio (con respecto a la inclusión) que contiene a $S \cup T$.

(c) Si $\{v_i\}_{i\in I}$ es un sistema de generadores de S y $\{w_j\}_{j\in J}$ es un sistema de generadores de T, entonces $\{v_i\}_{i\in I} \cup \{w_j\}_{j\in J}$ es un sistema de generadores de $S+T$.

(a) i) $0 \in S$ y $0 \in T \Rightarrow 0 = 0 + 0 \in S + T$.

ii) $v, v' \in S + T \Rightarrow$ existen $x, x' \in S$, $y, y' \in T$ tales que $v = x + y$, $v' = x' + y'$.
$\Rightarrow v + v' = (x + y) + (x' + y') = (x + x') + (y + y') \in S + T$
S y T subespacios $\Rightarrow x + x' \in S$, $y + y' \in T$.

iii) Sea $v \in S + T$ y sea $\lambda \in K$.
Existen $x \in S$, $y \in T$ tales que $v = x + y$.
$\Rightarrow \lambda.v = \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y \in S + T$.
$\lambda \in K$, $x \in S$ subespacio $\Rightarrow \lambda.x \in S$. Idem $\lambda.y \in T$.

(b) Sea W un subespacio de V tal que $S \cup T \subseteq W$.
$v \in S + T \Rightarrow v = x + y$ con $x \in S$, $y \in T$.

$$\left.\begin{array}{ccc} S \subseteq S \cup T \subseteq W & \Rightarrow & x \in W \\ T \subseteq S \cup T \subseteq W & \Rightarrow & y \in W \end{array}\right\} \underset{W \text{ subesp.}}{\Rightarrow} v = x + y \in W$$

Luego, $S + T \subseteq W$.

(c) $v \in S+T \Rightarrow v = x + y$ con $x \in S$, $y \in T$.

$S = < v_i,\, i \in I > \Rightarrow$ existen $\alpha_i \in K$ $(i \in I)$, con $\alpha_i = 0$ salvo para finitos $i \in I$, tales que $x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$.

$T = < w_j,\, j \in J > \Rightarrow$ existen $\beta_j \in K$ $(j \in J)$, con $\beta_j = 0$ salvo para finitos $j \in J$, tales que $y = \sum_{j \in J} \beta_j w_j$.

$\Rightarrow v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J} \beta_j w_j$

es una combinación lineal de $\{v_i\}_{i \in I} \cup \{w_j\}_{j \in J} \subseteq S + T$. $\square$

Ejemplo. Sean $S = < (1,1,0,1), (2,3,1,1) >$ y $T = < (0,0,1,1), (1,2,2,1) >$ en $\mathbb{R}^4$. Hallar una base de $S+T$.

Por la proposición anterior,
$S + T = < (1,1,0,1), (2,3,1,1), (0,0,1,1), (1,2,2,1) >$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{(1,1,0,1), (0,1,1,-1), (0,0,1,1)\}$ es una base de $S+T$.

Ejemplo. Sean $S = < (1,1,0,1), (2,3,1,1) >$ y $T = < (0,0,1,1), (1,2,2,1) >$ en $\mathbb{R}^4$. Hallar una base de $S + T$ que contenga una base de S y una base de T.

$\dim(S) = 2$, $\dim(T) = 2$, $\dim(S + T) = 3$

Buscamos $B_{S+T} = \{\underbrace{v_1,\ \mathrlap{\overbrace{}^{\text{base de } T}}v_2,}_{\text{base de } S}\ v_3\}$. Para esto, $v_2 \in S \cap T$.

- Cálculos auxiliares: $S \cap T = < (1,2,1,0) >$
  $B_{S\cap T} = \{(1,2,1,0)\}$
- Extendemos a una base de S: $B_S = \{(1,1,0,1), (1,2,1,0)\}$
- Extendemos a una base de T: $B_T = \{(1,2,1,0), (0,0,1,1)\}$

$\Rightarrow B_{S+T} = \{(1,1,0,1), (1,2,1,0), (0,0,1,1)\}$

Teorema de la dimensión para la suma de subespacios

Teorema de la dimensión para subespacios.

Sea V un K-espacio vectorial. Sean S y T subespacios de V de dimensión finita. Entonces

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

Demostración.

Sean $s = \dim S$, $t = \dim T$ y $r = \dim(S \cap T)$.
Si $s = 0$ (o sea $S = \{0\}$), entonces $S + T = T$ y $S \cap T = \{0\}$ y la igualdad vale. Idem si $t = 0$.

- Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ base de $S \cap T$ (si $r = 0$, $\emptyset$).
- Se extiende a $B_S = \{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ base de S.
- Se extiende a $B_T = \{v_1, \ldots, v_r, u_{r+1}, \ldots, u_t\}$ base de T.

$\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s, u_{r+1}, \ldots, u_t\}$ base de $S + T$.

Es un sistema de generadores de $S+T$ ✓.
Independencia lineal: supongamos que

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i+\sum_{j=r+1}^{s}\beta_j w_j+\sum_{k=r+1}^{t}\gamma_k u_k=0.$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i+\sum_{j=r+1}^{s}\beta_j w_j}_{\in S}=-\underbrace{\sum_{k=r+1}^{t}\gamma_k u_k}_{\in T}\in S\cap T.$$

$\Rightarrow \exists\delta_1,\dots,\delta_r\in K$ tales que $-\sum_{k=r+1}^{t}\gamma_k u_k=\sum_{\ell=1}^{r}\delta_\ell v_\ell$, o sea,

$$\sum_{\ell=1}^{r}\delta_\ell v_\ell+\sum_{k=r+1}^{t}\gamma_k u_k=0.$$

$B_T=\{v_1,\dots,v_r,u_{r+1},\dots,u_t\}$ es l.i. $\Rightarrow \delta_\ell=0\ \forall\,\ell$ y $\gamma_k=0\ \forall k$.

$$\sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k u_k = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i . v_i + \sum_{j=r+1}^{s} \beta_j . w_j = 0$$

$B_S = \{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s\}$ es l.i. $\Rightarrow \alpha_i = 0 \;\forall\, i$ y $\beta_j = 0 \;\forall\, j$.

Luego, $B_{S+T} = \{v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_s, u_{r+1}, \ldots, u_t\}$ es un base de $S + T$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \dim(S+T) &= \#B_{S+T} = r + (s - r) + (t - r) \\ &= s + t - r = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T). \qquad \square \end{aligned}$$

Suma directa

Definición.
Sea V un K-espacio vectorial, y sean S y T subespacios de V. Se dice que V es suma directa de S y T, y se nota $V = S \oplus T$, si:

- $V = S + T$,
- $S \cap T = \{0\}$.

Ejemplos.

1. $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = < (1,1,1) >$.
   - $S \cap T = \{0\}$.
   - $\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 1 - 0 = 3$ $\Rightarrow S + T = \mathbb{R}^3$.

   Luego, $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.
2. S y T subespacios de $\mathbb{R}^5$ de dimensión 3.
   $\dim(S \cap T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S + T) \geq 3 + 3 - 5 = 1$
   $\Rightarrow S \cap T \neq \{0\}$.
   S y T no están en suma directa.

Proposición.

Sea V un K-espacio vectorial. Sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Entonces, para cada $v \in V$, existen únicos $x \in S$ e $y \in T$ tales que $v = x + y$.

Demostración.

Existencia: Consecuencia de que $V = S + T$.
Unicidad: Si $v = x + y$ y $v = x' + y'$ con $x, x' \in S$, $y, y' \in T$,
$\Rightarrow x - x' = y' - y \in S \cap T = \{0\}$.
En consecuencia $x - x' = y' - y = 0$, es decir, $x = x'$, $y = y'$. $\square$

Observación.

La unicidad no vale si S y T no están en suma directa.
$S = <(1,0,-1),(0,1,1)>$ y $T = <(0,1,1),(2,0,1)>$.
$\Rightarrow S + T = \mathbb{R}^3$ y $S \cap T = <(0,1,1)>$.

Por ejemplo,

$$(3,1,1) = \underbrace{(1,1,0)}_{(1,0,-1)+(0,1,1)\in S} + \underbrace{(2,0,1)}_{\in T} = \underbrace{(1,0,-1)}_{\in S} + \underbrace{(2,1,2)}_{(0,1,1)+(2,0,1)\in T}$$

Proposición.

Sean V un K-e.v., S y T subespacios de V. Sean B_S y B_T bases de S y T respectivamente. Son equivalentes:

i) $V = S \oplus T$

ii) $B = B_S \cup B_T$ es una base de V
(*familia* obtenida mediante la unión de las familias B_S y B_T.)

Demostración. Supongamos $B_S = \{v_i\}_{i\in I}$ y $B_T = \{w_j\}_{j\in J}$.

i) $\Rightarrow$ ii) B_S y B_T generan S y T respectivamente $\Rightarrow B = B_S \cup B_T$ genera $V = S \oplus T$.

Supongamos $$\underbrace{\sum_{i\in I} \alpha_i v_i}_{\in S} + \underbrace{\sum_{j\in J} \beta_j w_j}_{\in T} = 0.$$

Como $0 + 0 = 0$ con $0 \in S$ y $0 \in T$, por la proposición anterior, $\sum_{i\in I} \alpha_i v_i = 0$ y $\sum_{j\in J} \beta_j w_j = 0$.

B_S y B_T son l.i. $\Rightarrow \alpha_i = 0 \; \forall\, i \in I$ y $\beta_j = 0 \; \forall\, j \in J$.

Luego, B es linealmente independiente.

ii) $\Rightarrow$ i)

- Sea $v \in V$.
  $B = B_S \cup B_T$ genera $V \Rightarrow$ existen $\alpha_i \in K$, $i \in I$, y $\beta_j \in K$, $j \in J$, casi todos nulos, tales que $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J} \beta_j w_j$.
  $\Rightarrow x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \in S$, $y = \sum_{j \in J} \beta_j w_j \in T$ y vale $v = x + y$.
  Luego, $V = S + T$.
- $v \in S \cap T \Rightarrow v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ y $v = \sum_{j \in J} \beta_j w_j$.
  $\Rightarrow \sum_{i \in I} \alpha_i v_i + \sum_{j \in J} (-\beta_j) w_j = 0$.
  $B = B_S \cup B_T$ es l.i. $\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall\, i \in I$ y $\beta_j = 0 \ \forall\, j \in J$
  $\Rightarrow v = 0$
  Luego, $S \cap T = \{0\}$. $\square$

Definición.
Sea V un K-e.v. y sea $S \subseteq V$ un subespacio de V. Diremos que T es un complemento de S si $S \oplus T = V$.

Ejemplos.

1. Un complemento de $S = \mathbb{R}_n[X]$ en $\mathbb{R}[X]$.
   $B_S = \{1, X, \dots, X^n\}$ es una base de $S = \mathbb{R}_n[X]$.
   $B = \{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\} = \{1, X, \dots, X^n, X^{n+1}, \dots X^i, \dots\}$ es una base de $\mathbb{R}[X]$.
   Sea $T = < X^{n+1}, \dots, X^i, \dots > = < X^i,\ i \geq n+1 >$.
   - $B_T = \{X^i \mid i \geq n+1\}$ es una base de T.
   - $B_S \cup B_T = B$ es una base de $\mathbb{R}[X]$.

   $\Rightarrow S \oplus T = \mathbb{R}[X]$.
2. Un complemento de $S = \{f \in \mathbb{R}[X] / f(1) = 0\}$ en $\mathbb{R}[X]$.
   $S = < (X-1)X^i, i \in \mathbb{N}_0 >$. Sea $T = < 1 >$.
   - $f \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow f = \big(f - f(1)\big) + f(1)$, con $f - f(1) \in S$ y $f(1) \in T$. Entonces, $S + T = \mathbb{R}[X]$.
   - Sea $f \in S \cap T$.
   $$\left.\begin{array}{lcl} f \in S & \Rightarrow & f(1) = 0 \\ f \in T & \Rightarrow & f = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(f) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow f = 0$$

   $\Rightarrow S \oplus T = \mathbb{R}[X]$.