ESPACIOS VECTORIALES I

EJEMPLOS: (K CUERPO)

0) K^n, $K^{m\times n}$

1) X UN CONJUNTO, $V = K^X$ (FUNCIONES DE X EN K).
CONSIDERAMOS

$+ : V\times V \to V$, $\quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad (x\in X)$
$\cdot : K\times V \to V$, $\quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

$\rightsquigarrow$ $(V, +, \cdot)$ ES UN K-EV
AFIRMO

- VECTOR NULO: $\quad 0(x) = 0 \quad (x\in X)$
- VECTOR OPUESTO: $\quad (-f)(x) = -f(x) \quad (x\in X)$
- ETC...

OBS:
- $X = \{1,\dots,n\}$ DA K^n
- $X = \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$ DA $K^{m\times n}$
- $X = \mathbb{N}$ DA LAS SUCESIONES A VALORES EN K

2) SEAN K, L CUERPOS CON $K\subseteq L$. $\to$ POR EJ: $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$
CONSIDERAMOS

$+ : L\times L \to L$, LA SUMA DE L
$\cdot : K\times L \to L$, $\quad \lambda\cdot v = \lambda v$ $\to$ λ, v VIVEN EN L, LOS MULTIPLICO

$\rightsquigarrow$ L ES UN K-EV.
AFIRMO

TOMEMOS EN $L = \mathbb{Q}$ LA SUMA $+$ USUAL. SEA p UN PRIMO, Y SEA $K = \mathbb{Z}_p$

¿$\exists \cdot : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \,/\, (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ SEA UN $\mathbb{Z}_p$-E.V.?

NO: DE EXISTIR, TENDRÍAMOS

$$1 = \underbrace{1/p + \dots + 1/p}_{p \text{ VECES}} = \underbrace{p}_{=0} \cdot 1/p = 0, \text{ ABS!}$$

EJERCICIO: ¿Y SI CAMBIAMOS $\mathbb{Q}$ POR $\mathbb{Z}_q$ CON q UN PRIMO DISTINTO DE p?

SUBESPACIOS

DADO UN E.V. V Y UN SUBCONJ $S \subseteq V$, ENTONCES $S \subseteq V$ ES UN SUBESPACIO* SII

- $\vec{0} \in S$
- $x, y \in S \Rightarrow x + y \in S$
- $x \in S, \lambda \in K \Rightarrow \lambda x \in S$

(* i.e., S CON LAS OPERACIONES DE V RESTRINGIDAS ES UN K-EV)

EJEMPLOS:

0) SI $A \in K^{m \times n}$ ENTONCES

$$S = \{x \in K^n : A x^t = 0\}$$ (= KER A) (= SOLUCIONES DE UN SIST. LINEAL HOMOG.)

ES UN SUBESP. DE K^n.

1) SI $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ENTONCES

$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ CONT}\}$$

ES SUBESPACIO (ANÁLISIS I) ; MÁS AÚN,

$$T = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ ES DERIV} / C^1 / C^\infty\}$$

ES SUBESP.

2) $V = K^X$. TOMEMOS

$$S = \{ f \in V : \exists X_f \subseteq X \text{ FINITO TAL QUE } f(x) = 0 \ \forall x \in X \setminus X_f\} = K^{(X)}.$$

- $\vec{0} \in S$, TOMO $X_f = \emptyset$
- DADOS $f \in S$ y $\lambda \in K$, TOMO $X_{\lambda f} = X_f$.
  ASÍ, SI $x \in X \setminus X_{\lambda f}$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \underbrace{f(x)}_{=0, \text{ PUES } x \notin X_f} = 0$$

- DADAS $f_1, f_2 \in S$, SEA $f = f_1 + f_2$. TOMO

$$X_f = X_{f_1} \cup X_{f_2} \rightsquigarrow \text{¡FINITO!}$$

ASÍ, PARA $x \in X \setminus X_f$ TENEMOS

$$f(x) = \underbrace{f_1(x)}_{\substack{=0, \text{ PUES} \\ x \notin X_{f_1}}} + \underbrace{f_2(x)}_{\substack{=0, \text{ PUES} \\ x \notin X_{f_2}}} = 0$$

$\therefore$ $K^{(X)}$ ES UN SUBESPACIO

OBS: TENEMOS QUE $K^{(\mathbb{N})} \simeq K[X]$,
SI IDENTIFICAMOS

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \longleftrightarrow \sum_{n \geq 1} a_n X^n$$

3) $V = \mathbb{R}$ COMO $\mathbb{Q}$-EV.

- $S = \mathbb{Q}$ ES SUBESP
- $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ES SUBESP

SISTEMAS DE GENERADORES

DADO $X \subseteq V$, EL SUBESP. GEN POR X ES

$$\langle X \rangle = \Big\{ \sum_{x \in X} \lambda_x \cdot x \; : \; \lambda_x = 0 \; \underbrace{\forall\!\!\!\forall}_{\substack{\text{PARA TODOS} \\ \text{SALVO FINITOS}}} x \in X \Big\};$$

DECIMOS QUE X ES UN SISTEMA DE GENERADORES DE V
SI $V = \langle X \rangle$

OBS: $V = \langle V \rangle$, ie, V ES UN S.G. DE V.
PERO BUSCAMOS X LO MÁS CHICO POSIBLE
TAL QUE $V = \langle X \rangle$

EJEMPLOS:

1) $V = \{ x \in \mathbb{Z}_5^3 : \; 2x_1 + x_2 - x_3 = 4x_1 - x_3 = 0 \}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 4/2 F_1 = F_2 + 3F_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$(1/2 = 3$ EN $\mathbb{Z}_5$; $-4/2 = 3)$

- $3x_2 = 4x_3$, ie $x_2 = 3x_3$
- $2x_1 = -x_2 + x_3 = 3x_3$, ie $x_1 = 4x_3$

ASÍ, $V = \{ (x_3, 3x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{Z}_5 \} = \langle \{(4,3,1)\} \rangle$

2)
- $X = \{1, T, T^2, \dots\}$ ES UN SG. DE $K[T]$
- SI $Y \subsetneq X$, ENTONCES $\langle Y \rangle \neq K[T]$
- DADO $\lambda \in K$, $\{1, T-\lambda, (T-\lambda)^2, \dots\}$ ES UN SG. DE $K[T]$ (PARA $P \in K[T]$ DE GRADO m, $P = P_{m,\lambda}$, POL DE TAYLOR DE P DE GRADO m CENTRADO EN λ)

3) $\mathbb{R}$ COMO $\mathbb{Q}$-EV. ¿$\{1, \sqrt{2}\}$ ES UN SG? NO

AFIRMO: $\sqrt{3} \notin \langle 1, \sqrt{2} \rangle$

SUPONGAMOS $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, CON $a, b \in \mathbb{Q}$.
ENTONCES

$$3 = (a+b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$$

$$\Rightarrow 2ab\sqrt{2} = 3 - a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow ab = 0;$$

- SI $a = 0$, $2b^2 = 3$, ABS!
- SI $b = 0$, $a^2 = 3$, ABS!

EJERCICIO: $\langle 1, \sqrt{2}, \sqrt{3} \rangle \neq \mathbb{R}$

(MÁS AÚN, $\langle \{1\} \cup \{\sqrt{p} : p \text{ PRIMO}\} \rangle \neq \mathbb{R}$)