1	2	3	4

Calificación

ÁLGEBRA LINEAL

Primer parcial — 16 de octubre de 2020

1. Consideremos el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $V = \mathbb{Q}^{2\times 2}$. Sean S, T los subespacios

$$S = \{A \in V \,:\, \operatorname{tr} A = 0\}, \qquad T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{Q}$ para los cuales existe una transformación lineal nilpotente $f : V \to V$ tal que $f(S) = T$ y $f(T) \subseteq S$.

Para alguno de los valores hallados definir una f que cumpla estas condiciones.

Recordar: f es nilpotente si existe $n \geq 1$ tal que $f^n = 0$.

2. Sea $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}\} \subseteq K^{\mathbb{N}}$ un conjunto linealmente independiente; cada $a^{(j)}$ es una sucesión infinita

$$a^{(j)} = \left(a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)}, \ldots\right).$$

Para cada $m \geq 1$ consideremos la matriz $A_m \in K^{m\times r}$ dada por $(A_m)_{ij} = a_i^{(j)}$.

Sea $S_m = \{x \in K^r \,:\, A_m \cdot x^t = 0\}$. Probar que:

(a) $S_{m+1} \subseteq S_m$ para todo m.

(b) Si $x \in K^r$ es tal que $x \in S_m$ para todo $m \geq 1$, entonces $x = 0$.

(c) Existe m_0 tal que $\operatorname{rg}(A_m) = r$ para todo $m \geq m_0$.

3. Sea B una base de $\mathbb{Q}^4$ y sea $B^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ su base dual. Sean $w, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Q}^4$ tales que

- $(w)_B = (-1, 1, 0, 1)$.
- $\langle v_1, v_2\rangle^\circ = \langle \delta_1 + \delta_2 - 3\delta_3, \delta_2 - \delta_4\rangle$.
- $\langle v_2, v_3\rangle^\circ = \langle \delta_1 + 2\delta_2 + \delta_4, 3\delta_1 - 4\delta_2 - 3\delta_3 + 11\delta_4\rangle$.

(a) Probar que $\{w, v_1, v_2\}$ es linealmente dependiente.

(b) Calcular $\dim(\langle v_1, v_2, v_3\rangle)$.

4. Sean $x, a_1, \ldots, a_n \in K$. Probar que el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x + a_n \end{pmatrix}$$

es igual a $x^n + (a_1 + \cdots + a_n)\, x^{n-1}$.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y escriba con claridad