DETERMINANTES II

MENÚ:
- MATRIZ ADJUNTA
- REGLA DE CRAMER
- PERMUTACIONES

RECORDAR: $A \in K^{m\times m}$. LA ADJUNTA DE A ES LA MATRIZ

$$\operatorname{adj} A \in K^{m\times m}, \quad (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\underbrace{A(j|i)}_{})$$

A SIN LA FILA j, COL. i

EJEMPLO $(m=2)$:

SI $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ENTONCES

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ RELACIONAR CON EJ 10, P. II

PROP: $A\cdot(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)\cdot A = (\det A)\cdot I_m$

(VALE AÚN CUANDO K ES SOLAMENTE UN ANILLO CONMUTATIVO, e.g. $K=\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m$)

EJERCICIO: SEA $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$,

$$B = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 11 \\ 10 & 0 & -15 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

HALLAR $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ / $\operatorname{adj} A = B$.

$$\operatorname{adj} A = B \overset{\text{SI } \exists A^{-1}}{\iff} A \cdot B = A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\det A) I_3$$

$$\underset{\text{SI } \exists B^{-1}}{\iff} \quad A = \underbrace{(\det A)}_{¿?} B^{-1} \qquad (*)$$

CUENTA: B ES INV. MÁS AÚN,

$$B^{-1} = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det B = 25$$

EN PART, $(*)$ $\Rightarrow$ A ES INVERSIBLE

$\Rightarrow$ $\cancel{A = 0}$

AHORA:

$$A \cdot (\operatorname{adj} A) = (\det A) I_3 \Rightarrow$$

$$(\det A)(\det(\operatorname{adj} A)) = (\det A)^3$$

$$\underset{A \text{ INV}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{\det(\operatorname{adj} A)}_{= \det B = 25} = (\det A)^2$$

$\rightsquigarrow$ TOMO $A = 5 \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

OBS: TAMBIÉN SIRVE $A = -5 \cdot B^{-1}$; ESTO SE DEBE A QUE $\mathrm{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \, \mathrm{adj}\, A$

PAR, SI $n=3$

¿Y SI NOS PIDEN $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ /

$$\mathrm{adj}\, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =: B \quad ?$$

EN ESTE CASO $\det B = -1$, CON LO QUE SI $\exists$ TAL A ENTONCES

$$(\det A)^2 = -1 \rightsquigarrow \nexists \text{ TAL } A$$

(HAY QUE AGREGAR i...)

PARA PENSAR: $\nexists A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ /

$$\mathrm{adj}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ USAR (Y HACER) EJ 18, P.V

DEF: SEA p UN NÚMERO PRIMO. DADO $x \in \mathbb{Q}$, DIREMOS QUE x ES UN ENTERO p-ÁDICO SI

$x = a/b$, CON a, b ENTEROS COPRIMOS, $p \nmid b$.

NOTACIÓN: $\mathbb{Z}_{(p)} = \{x \in \mathbb{Q} : x \text{ es entero } p\text{-ádico}\}$

EJEMPLO: $5/7 \in \mathbb{Z}_{(p)}$ sii $p \neq 7$; $7/5 \in \mathbb{Z}_{(p)}$ sii $p \neq 5$.

PROP: Sea $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ con $\det A \neq 0$. Sea $b \in \mathbb{Q}^n$. Sea $x \in \mathbb{Q}^n$ la solución de $Ax = b$.

Si $A_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ $\forall i,j$ y $(\det A)^{-1} \in \mathbb{Z}_{(p)}$, entonces $x_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ $\forall i$.

"No puede, de la nada, aparecer un p en un denominador".

DEM: Según la regla de Cramer, si $A = (A_1 | \cdots | A_n)$,

$$x_i = \overbrace{(\det A)^{-1}}^{\in \mathbb{Z}_{(p)}} \cdot \det(B_i), \text{ siendo}$$

$$B_i = \underbrace{(A_1 | \cdots | A_{i-1} | b | A_{i+1} | \cdots | A_n)}_{\text{matriz con coef en } \mathbb{Z}_{(p)}}$$

$\rightsquigarrow$ Basta con probar que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un anillo, esto es:

$$\underbrace{x, y \in \mathbb{Z}_{(p)} \Rightarrow x+y,\ xy \in \mathbb{Z}_{(p)}}_{\text{Ejercicio, Álg. I}}$$

$\square$

PROBLEMA: SEA $P \in \mathbb{Q}[X]$,

$$P(X) = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & X \\ 5 & 7 & -X & 2 \\ 3 & 2X & 6 & 1 \\ 5X & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_4[X].$$

CALCULAR LOS COEF DE X^3, X^4 DE P USANDO PERMUTACIONES.

RECORDAR: SI $A \in K^{n\times n}$,

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}}_{\in \mathbb{Q}_1[X], \text{ EN EL EJEMPLO}}$$

EN ESTE CASO, SI τ: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$, $4 \mapsto 1$

$$P(X) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \underbrace{X}_{A_{14}} \cdot \underbrace{(-X)}_{A_{23}} \cdot \underbrace{(2X)}_{A_{32}} \cdot \underbrace{(5X)}_{A_{14}}$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_4 \setminus \{\tau\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{\prod_i A_{i\sigma_i}}_{\in \mathbb{Q}_2[X]}$$

- EL COEF DE X^3 ES 0
- EL COEF DE X^4 $\operatorname{sgn}(\tau) \cdot (-1) \cdot 10$, SIENDO

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \det \begin{pmatrix} - e_{\tau(1)} - \\ - e_{\tau(2)} - \\ - e_{\tau(3)} - \\ - e_{\tau(4)} - \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$