Álgebra Lineal - Clase 13

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Caracterización de matrices diagonalizables vía polinomio característico y autoespacios.
- Polinomio minimal de una matriz y de una transformación lineal.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 6 (Secciones 6.2 y 6.3).

Suma directa de subespacios

Sean V un K-e.v. y $S_1, S_2, \dots, S_r$ subespacios de V. Se define la suma de $S_1, S_2, \dots, S_r$ como (el subespacio de V)

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_r = \{s_1 + \cdots + s_r \,/\, s_i \in S_i,\ 1 \leq i \leq r\}.$$

Se dice que $S_1, S_2, \dots, S_r$ están en suma directa si, para cada $v \in S_1 + S_2 + \cdots + S_r$ existen únicos $s_i \in S_i$, $1 \leq i \leq r$, tales que $v = s_1 + \cdots + s_r$.

En este caso se nota $S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_r = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$.

Son equivalentes:

i) $W = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$.

ii) $W = S_1 + \cdots + S_r$ y, para cada $1 \leq j \leq r$, vale $S_j \cap (S_1 + \cdots + S_{j-1} + S_{j+1} + \cdots + S_r) = \{0\}$.

iii) Si para cada $1 \leq i \leq r$, B_i es una base de S_i, entonces $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$ es una base de W.

Espacios de autovectores y bases

Sea $A \in K^{n\times n}$. Para $\lambda \in K$ un autovalor de A,
$E_\lambda = \{v \in K^n \,/\, A.v = \lambda.v\} = \{v \in K^n \,/\, (\lambda\, I_n - A).v = 0\}$.

Proposición.

Sea $A \in K^{n\times n}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son autovalores distintos de A, entonces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ están en suma directa.

Demostración.

Por inducción en r.

$\boxed{r = 2}$: $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \Rightarrow A.v = \lambda_1.v$ y $A.v = \lambda_2.v$

$\lambda_1.v = \lambda_2.v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2).v = 0 \overset{\lambda_1\neq\lambda_2}{\Rightarrow} v = 0.$

Luego, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.

$\boxed{r \Rightarrow r+1}$: Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ autovalores distintos de A.

Veamos que $\forall 1 \leq i \leq r+1,\ E_{\lambda_i} \cap \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r+1} E_{\lambda_j} = \{0\}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = r+1$.

$v \in E_{\lambda_{r+1}} \cap \bigoplus_{j=1}^{r} E_{\lambda_j} \Rightarrow v = v_1 + \cdots + v_r$ con $v_j \in E_{\lambda_j}$ $\forall 1 \leq j \leq r$.

$$\begin{aligned} Av &= Av_1 + \cdots + Av_r \\ \lambda_{r+1} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \\ \lambda_{r+1} v_1 + \cdots + \lambda_{r+1} v_r &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \end{aligned}$$

$(\lambda_{r+1} - \lambda_1) v_1 + \cdots + (\lambda_{r+1} - \lambda_r) v_r = 0$ con $(\lambda_{r+1} - \lambda_j) v_j \in E_{\lambda_j}$ $\forall j$

Además, $0 + \cdots + 0 = 0$, con $0 \in E_{\lambda_j}$ $\forall 1 \leq j \leq r$.

Por HI, $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$ están en suma directa
$\Rightarrow \forall 1 \leq j \leq r$, $(\lambda_{r+1} - \lambda_j) v_j = 0 \Rightarrow v_j = 0$.
Luego, $v = v_1 + \cdots + v_r = 0$. $\square$

Consecuencia.
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ son autovalores distintos de $A \in K^{n \times n}$ y, para cada $1 \leq j \leq r$, B_j es una base de E_{λ_j}, entonces $\bigcup_{j=1}^{r} B_j$ es l.i.

Dimensión de autoespacio y multiplicidad

Proposición.

Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $\lambda \in K$ un autovalor de A. Si m es la multiplicidad de λ como raíz de $\mathcal{X}_A$, entonces $\dim(E_\lambda) \leq m$.

Demostración.

Sea $f_A : K^n \to K^n$, $f_A(x) = A.x$.
Sean $s = \dim(E_\lambda)$ y $\{v_1, \ldots, v_s\}$ una base de E_λ.
La extendemos a $B = \{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ una base de K^n.

$f_A(v_i) = \lambda v_i \; \forall 1 \leq i \leq s$.

$$|f_A|_B = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{matrix}}^{s\times s} & N \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}_{f_A} &= \det \left(\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} X-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & X-\lambda \end{matrix}}^{s\times s} & -N \\ 0 & XI_{n-s}-M \end{array} \right) \\
&= (X-\lambda)^s \det(XI_{n-s}-M) \\
&= (X-\lambda)^s Q.
\end{aligned}
$$

Por hipótesis, $\operatorname{mult}(\lambda, \mathcal{X}_A) = m$, es decir, $\mathcal{X}_A = (X-\lambda)^m P$ con $P \in K[X]$ tal que $P(\lambda) \neq 0$.

$$
(X-\lambda)^s Q = \mathcal{X}_{f_A} = \mathcal{X}_A = (X-\lambda)^m P \quad \text{y} \quad X-\lambda \nmid P.
$$

$\Rightarrow s \leq m$, es decir, $\dim(E_\lambda) \leq \operatorname{mult}(\lambda, \mathcal{X}_A)$. $\square$

Caracterización de matrices diagonalizables

Teorema.
Sea $A \in K^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los autovalores de A en K, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Son equivalentes:

i) A es diagonalizable en $K^{n\times n}$.

ii) $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = K^n$.

iii) $\mathcal{X}_A = (X-\lambda_1)^{a_1}\dots(X-\lambda_r)^{a_r}$ y $a_i = \dim(E_{\lambda_i})\ \forall 1 \leq i \leq r$.

Demostración.
i) $\Rightarrow$ ii) A es diagonalizable en $K^{n\times n} \Rightarrow \exists B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de K^n formada por autovectores de A.

Para cada $v_j \in B$, $\exists i$, $1 \leq i \leq r$, tal que $v_j \in E_{\lambda_i} \Rightarrow v_j \in \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$.

$\Rightarrow K^n = < v_1, \dots, v_n > = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) $\forall 1 \leq i \leq r$, $\dim(E_{\lambda_i}) \leq \operatorname{mult}(\lambda_i, \mathcal{X}_A)$. Si $K^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$,

$n = \dim K^n = \sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}) \leq \sum_{i=1}^{r} \operatorname{mult}(\lambda_i, \mathcal{X}_A) \leq \operatorname{gr}(\mathcal{X}_A) = n$.

$\Rightarrow$ los $\leq$ deben ser $=$. Sea $a_i = \operatorname{mult}(\lambda_i, \mathcal{X}_A)$ $\forall 1 \leq i \leq r$.

- $\sum_{i=1}^{r} a_i = \operatorname{gr}(\mathcal{X}_A) \Rightarrow \mathcal{X}_A = (X - \lambda_1)^{a_1} \dots (X - \lambda_r)^{a_r}$.
- $\dim(E_{\lambda_i}) \leq a_i$ $\forall 1 \leq i \leq r$ y $\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{r} a_i$

  $\Rightarrow \dim(E_{\lambda_i}) = a_i$ $\forall 1 \leq i \leq r$.

iii) $\Rightarrow$ i) $\mathcal{X}_A = (X - \lambda_1)^{a_1} \dots (X - \lambda_r)^{a_r}$ y $a_i = \dim(E_{\lambda_i})$.

B_i base de E_{λ_i} $\forall 1 \leq i \leq r \Rightarrow B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ base de $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$.

$\# B = \sum_{i=1}^{r} \# B_i = \sum_{i=1}^{r} a_i = \operatorname{gr}(\mathcal{X}_A) = n \Rightarrow \dim \left(\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} \right) = \dim K^n$.

$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = K^n$.

B base de K^n formada por autovect. de $A \Rightarrow A$ diagonalizable. $\square$

Ejemplos.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^{4\times 4}$ y en $\mathbb{C}^{4\times 4}$.

   - $\mathcal{X}_A = (X-1)^3(X-2)$
   - $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \,/\, (I_4 - A).x = 0\} = < (0,1,0,0), (0,0,1,0) >$
     $\dim(E_1) = 2 < 3 = \mathrm{mult}(1, \mathcal{X}_A)$

     $\Rightarrow A$ no es diagonalizable en $\mathbb{R}^{4\times 4}$ ni $\mathbb{C}^{4\times 4}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\mathbb{C}^{3\times 3}$.

   - $\mathcal{X}_A = X^3 - 8 = (X-2)(X^2+2X+4)$ no tiene todas sus raíces en $\mathbb{R} \Rightarrow A$ no es diagonalizable en $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
   - $\mathcal{X}_A = X^3 - 8 = (X-2)(X+1-\sqrt{3}i)(X+1+\sqrt{3}i)$ tiene tres raíces distintas en $\mathbb{C} \Rightarrow A$ es diagonalizable en $\mathbb{C}^{3\times 3}$.

Polinomio minimal de una matriz

Sea $P \in K[X]$, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_r X^r$.
Dada $A \in K^{n\times n}$, definimos

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_r A^r \in K^{n\times n}.$$

Dada una t.l. $f : V \to V$, con V es un K-e.v., definimos

$$P(f) = a_0 id_V + a_1 f + \cdots + a_r f^r \;\in\; \mathrm{Hom}_K(V, V),$$

donde, para $k \in \mathbb{N}$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ veces}}$ es la composición.

Si $P, Q \in K[X]$, $A \in K^{n\times n}$ y $f : V \to V$ t.l., entonces:

- $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$ y $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$.
- $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$ y $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Lema.
Sea $A \in K^{n\times n}$. Existe $P \in K[X]$, $P \neq 0$, tal que $P(A) = 0$.

Demostración.
$\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\} \subseteq K^{n\times n}$ es l.d., porque tiene $n^2 + 1$ elementos y $\dim(K^{n\times n}) = n^2$.
$\Rightarrow \exists a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in K$ no todos nulos, tales que $\sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0$.
Si $P = \sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i \in K[X]$, vale $P \neq 0$ y $P(A) = 0$. $\square$

Definición.
Sea $A \in K^{n\times n}$. Llamamos polinomio minimal de A, y lo notamos m_A, al polinomio mónico de grado mínimo en $K[X]$ que anula a A.

Existencia. $H = \{\mathrm{gr}(P) : P \in K[X],\ P \neq 0,\ P(A) = 0\} \subseteq \mathbb{N}_0$ es no vacío. Sean $r = \min(H)$ y $P_0 \in K[X]$ tal que $P_0(A) = 0$ y $\mathrm{gr}(P_0) = r$.
$\Rightarrow Q = \frac{1}{cp(P_0)} P_0 \in K[X]$ es mónico, $Q(A) = 0$ y $\mathrm{gr}(Q) = \mathrm{gr}(P_0)$.
Unicidad. Sea $P \in K[X]$ mónico, $P \neq Q$, $\mathrm{gr}(P) = r$ y $P(A) = 0$.
$(P - Q)(A) = 0$, $P - Q \neq 0$ y $\mathrm{gr}(P - Q) < r$ (porque P y Q son ambos mónicos), lo que contradice que $r = \min(H)$.

Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular m_A.

- $\{I_2, A\}$ es l.i. $\Rightarrow \nexists P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $\mathrm{gr}(P) = 1$ y $P(A) = 0$.
- Consideramos $\{I_2, A, A^2\}$ para buscar $P = a_0 + a_1 X + X^2$ que anule a A:

$$a_0 I_2 + a_1 A + A^2 = 0$$

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + 1 & = 0 \\ \quad a_1 - 2 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

$\Rightarrow P = 1 + 2X + X^2$ cumple $P(A) = 0$.

Luego, $m_A = X^2 + 2X + 1$.

Propiedades del polinomio minimal

Proposición.

Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $P \in K[X]$. Entonces $P(A) = 0 \iff m_A \mid P$.

Demostración.

($\Leftarrow$) $m_A \mid P \Rightarrow \exists Q \in K[X]$ tal que $P = Q.\, m_A$.
$\Rightarrow P(A) = (Q.\, m_A)(A) = Q(A).\, m_A(A) = Q(A).\, 0 = 0.$

($\Rightarrow$) $P \in K[X] \Rightarrow \exists Q, R \in K[X]$ tales que $P = Q.\, m_A + R$ con $R = 0$ o $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(m_A)$.

$0 = P(A) = Q(A).\, m_A(A) + R(A) = Q(A).\, 0 + R(A) = R(A).$

m_A polinomio de grado mínimo que anula a $A \Rightarrow R = 0$. $\square$

Proposición.

Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $\lambda \in K$. Entonces:
λ es autovalor de $A \iff \lambda$ es raíz de m_A.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\lambda \in K$ un autovalor de A.

$\exists Q \in K[X]$ y $R \in K$ tales que $m_A = Q.(X-\lambda) + R$.

$\Rightarrow 0 = m_A(A) = Q(A).(A - \lambda I_n) + R.I_n$.

λ autovalor de $A \Rightarrow \exists v \in K^n$, $v \neq 0$, tal que $A.v = \lambda.v$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= Q(A).(A-\lambda I_n).v + R.v = Q(A).(Av - \lambda\, v) + R.v \\ &= Q(A).0 + R.v = R.v.\end{aligned}$$

$R.v = 0$, $R \in K$, $v \neq 0 \Rightarrow R = 0$.

$\Rightarrow m_A = Q.(X-\lambda)$ y λ es raíz de m_A.

($\Leftarrow$) Sea $\lambda \in K$ una raíz de m_A.

$m_A = (X-\lambda).Q \Rightarrow (A-\lambda I_n).Q(A) = m_A(A) = 0$.

$\mathrm{gr}(Q) = \mathrm{gr}(m_A) - 1 \Rightarrow Q(A) \neq 0$

$\Rightarrow \exists w \in K^n$ tal que $Q(A).w \neq 0$.

$v = Q(A).w \Rightarrow (A - \lambda I_n).v = (A-\lambda I_n).Q(A).w = 0.w = 0$

$\Rightarrow A.v = \lambda.v \Rightarrow \lambda$ es un autovalor de A. $\square$

Polinomio minimal de una transformación lineal