DETERMINANTES

Prerequisitos:

- Def y propiedades de funciones multilineales alternadas (5.1 y 5.2 en el apunte)
- Cálculo del determinante desarrollando por una fila/columna (CBC – 5.11 en el apunte)

---

(1) Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 102 & 1 & 0 & 2 \\ 3987 & 9 & 8 & 7 \\ 110 & 1 & 1 & 0 \\ 341 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$100c_2 + 10c_3 + 1c_4 = \begin{pmatrix} 102 \\ 987 \\ 110 \\ 341 \end{pmatrix}$$

Por multilinealidad,

$$\det(A) = \det\left(c_1 - 100c_2 - 10c_3 - c_4 \,\middle|\, c_2 \,\middle|\, c_3 \,\middle|\, c_4 \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3000 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3000 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{3000 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1}} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -3000 \cdot (1+8+0-6) = \boxed{-9000}$$

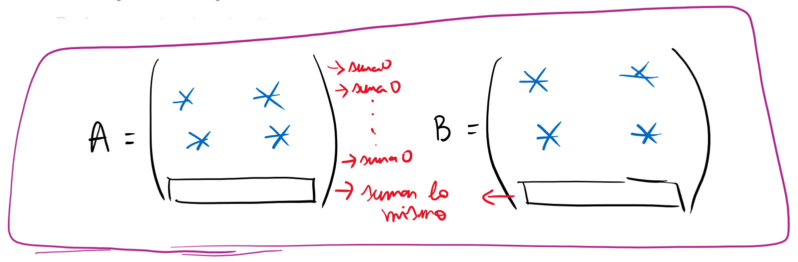
---

(2) Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in K^{n\times n}$ dos matrices t

(a) $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i < n$. (suma de fila i de $A = 0$)

(b) $a_{ij} = b_{ij}$, para todos $1 \leq i < n$, $1 \leq j \leq n$

(c) $\sum_{j=1}^n a_{nj} = \sum_{j=1}^n b_{nj}$.



$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

$\det(A-B) = 0$

$\det(A) - \det(B)$

$\boxed{\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)}$

Sea $s = \sum_{j=1}^n a_{nj} = \sum_{j=1}^n b_{nj}$.

Al sumar las n columnas de A se obtiene $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$.

Por multilinealidad, $\underset{B}{\det(A)} = \det\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_n \,\middle|\, c_2 \,\middle|\, c_3 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, c_n \right)$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ \vdots & A(n|1) \\ 0 & \\ s & \end{pmatrix}$$

$$= s \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det(A(n|1))$$

Análogamente,

$$\det(B) = s \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det(B(n|1))$$

son iguales!!

---

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la matriz tridiagonal

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1^2 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $\det(A_n)$ (en función de n).

<u>Solución</u>: Llamo $d_n = \det(A_n)$. Buscaremos una fórmula recursiva para los d_n.

$$d_{n+1} = \det(A_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1^2 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Desarrollo x última fila)

$$= \underbrace{1 \cdot (-1)^{2n+2} \cdot \det(A_n)} + n^2 \cdot (-1)^{2n+1} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1^2 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$= d_n - n^2 \cdot (-1) \cdot \cancel{(-1)^{n+n}} \cdot \underline{\det(A_{n-1})}$$

$$= d_n + n^2 d_{n-1}$$

CONCLUSIÓN: $d_{n+1} = d_n + n^2 d_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

$A_1 = (1) \qquad d_1 = 1 = 1!$ ✓

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad d_2 = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1^2 = 2 = 2!$ ✓

$d_3 = d_2 + 4 d_1 = 6 = 3!$

$d_4 = d_3 + 9 d_2 = 6 + 9 \cdot 2 = 24 = 4!$

$d_5 = d_4 + 16 d_3 = 24 + 16 \cdot 6 = 120 = 5!$

<u>Conjetura</u>: $d_n = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se demuestra por inducción.