Álgebra Lineal - Clase 5

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Matrices elementales.
- Coordenadas y cambios de base.
- Noción de transformación lineal.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 2 (Secciones 2.3 y 2.4), Capítulo 3 (Sección 3.1.1).

Matrices elementales

Operación de filas en matrices $n \times n$	$\leftrightsquigarrow$	Matriz que se obtiene al aplicar operación de filas a I_n

1. Intercambiar dos filas.
   Para $1 \leq i, j \leq n$, se define $P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}$, la matriz que resulta al intercambiar las filas i y j en I_n.

   Si $A \in K^{n \times n}$, el producto $P^{ij}A$ es la matriz que resulta al intercambiar las filas i y j en A.

   $P^{ij}\, P^{ij} = I_n \Rightarrow P^{ij} \in GL(n, K)$ y ${P^{ij}}^{-1} = P^{ij}$.

Ejemplo.

En $K^{3\times 3}$, $P^{12} = I_3 - E^{11} - E^{22} + E^{12} + E^{21}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2. Multiplicar una fila por una constante no nula.

   Para $\lambda \in K - \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, $M_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1).E^{ii}$ se obtiene al mutiplicar por λ la i-ésima fila de I_n.

   Si $A \in K^{n\times n}$, el producto $M_i(\lambda)A$ es la matriz que resulta al multiplicar por λ la i-ésima fila de A.

   $M_i(\lambda)M_i(\lambda^{-1}) = I_n$ y $M_i(\lambda^{-1})M_i(\lambda) = I_n$
   $\Rightarrow M_i(\lambda) \in GL(n, K)$ y $(M_i(\lambda))^{-1} = M_i(\lambda^{-1})$.

Ejemplo.

En $K^{3\times 3}$, $M_3(\lambda) = I_3 + (\lambda - 1)E^{33}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

3. Reemplazar una fila por ella misma más un múltiplo de otra.
   Para $\lambda \in K$ y $1 \leq i, j \leq n$ con $i \neq j$, $T^{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E^{ij}$ se obtiene de I_n al sumarle a la i-ésima fila, λ por la fila j.

   Si $A \in K^{n\times n}$, $T^{ij}(\lambda)A$ es la matriz que se obtiene de A al sumarle a la i-ésima fila, λ por la fila j.

   $T^{ij}(\lambda)T^{ij}(-\lambda) = I_n$ y $T^{ij}(-\lambda)T^{ij}(\lambda) = I_n$
   $\Rightarrow$ $T^{ij}(\lambda) \in GL(n, K)$ y $(T^{ij}(\lambda))^{-1} = T^{ij}(-\lambda)$.

Ejemplo.

En $K^{3\times 3}$, $T^{31}(\lambda) = I_3 + \lambda E^{31}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{11} + a_{31} & \lambda a_{12} + a_{32} & \lambda a_{13} + a_{33} \end{pmatrix}$$

Observación.

Las matrices elementales se pueden pensar a partir de hacer operaciones en las columnas de I_n y, por multiplicación a derecha, producen esas operaciones en las columnas de $A \in K^{n\times n}$.

Observación.

Escalonar una matriz mediante operaciones de filas es multiplicarla a izquierda por matrices elementales.

Proposición.

Dada $A \in K^{n\times n}$, existen matrices elementales $E_1, \dots, E_r \in K^{n\times n}$ tales que $E_r \dots E_1 A$ es triangular superior.
Si, además, $E_r \dots E_1 A$ no tiene ceros en la diagonal, existen matrices elementales $E_{r+1}, \dots, E_s$ tales que $E_s \dots E_{r+1} E_r \dots E_1 A = I_n$. En consecuencia, A es producto de matrices elementales, $A = E_1^{-1} \dots E_s^{-1}$, y $A^{-1} = E_s \dots E_1$.

En particular, si por medio de la aplicación de operaciones elementales a las filas de A se obtiene I_n, aplicando las mismas operaciones en las filas de I_n se obtiene A^{-1}:

$$(A \mid I_n) \rightsquigarrow (I_n \mid A^{-1})$$

Coordenadas en una base

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Para cada $v \in V$ existen únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

El vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ se llama el vector de coordenadas de v en la base B. Lo notaremos $(v)_B$.

Demostración.

Existencia: B base de $V \Rightarrow B$ es un sistema de generadores de V.
Unicidad: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$.
$\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.i. $\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq n$.
$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \forall 1 \leq i \leq n$. $\square$

Ejemplos.

- $V = \mathbb{R}_4[X]$, $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ y
  $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$ bases de V.
  $(2X^3 + 3X^2 - 1)_B = (-1, 0, 3, 2, 0)$.
  $(2X^3 + 3X^2 - 1)_{B'} = (0, 2, 3, 0, -1)$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica.
  Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, vale $(x, y, z)_E = (x, y, z)$.
- $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(0, 2, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\}$.
  Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) =$$
$$z(0, 2, 1) + (-y + 2z)(1, -1, 0) + (x + y - 2z)(1, 0, 0).$$

$\Rightarrow (x, y, z)_B = (z, -y + 2z, x + y - 2z)$.

Observar:

$$(v)_B^t = \begin{pmatrix} z \\ -y + 2z \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \cdot (v)_E^t.$$

Cambios de base

Definición.
Sea V un K-e.v. y sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de V. Para cada $1 \leq j \leq n$, sea $v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i$. Se llama matriz de cambio de base de B_1 a B_2, y se nota $C(B_1, B_2) \in K^{n\times n}$, a la matriz definida por $(C(B_1, B_2))_{ij} = \alpha_{ij}$ para cada $1 \leq i, j \leq n$.

$$C(B_1, B_2) = \left((v_1)^t_{B_2} \ldots (v_j)^t_{B_2} \ldots (v_n)^t_{B_2}\right).$$

Ejemplo. $V = \mathbb{R}^3$, $B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(0,2,1), (1,-1,0), (1,0,0)\}$.

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= 0.(0,2,1) + 0.(1,-1,0) + 1.(1,0,0) \\
(0,1,0) &= 0.(0,2,1) + (-1).(1,-1,0) + 1.(1,0,0) \\
(0,0,1) &= 1.(0,2,1) + 2.(1,-1,0) + (-2).(1,0,0)
\end{aligned}$$

$$C(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proposición.

Sea V un K-e.v. dimensión finita, y sean B_1 y B_2 bases de V. Entonces $C(B_1, B_2)$ es la única matriz en $K^{n\times n}$ que verifica $C(B_1, B_2).(v)^t_{B_1} = (v)^t_{B_2}$ para todo $v \in V$.

Demostración.

Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Supongamos que $(C(B_1, B_2))_{ij} = \alpha_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$, es decir $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} w_i$ $\forall j$. Sea $v \in V$, $v = \sum_{k=1}^n a_k v_k$. Para cada $1 \leq h \leq n$, sea

$$b_h = \left(C(B_1, B_2).(v)^t_{B_1}\right)_h = \sum_{k=1}^n \alpha_{hk} a_k.$$

Basta ver que $v = \sum_{h=1}^n b_h w_h$.

$$\sum_{h=1}^n b_h w_h = \sum_{h=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n \alpha_{hk} a_k\Big) w_h = \sum_{h=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n \alpha_{hk} a_k w_h\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{h=1}^n \alpha_{hk} a_k w_h\Big) = \sum_{k=1}^n a_k \Big(\sum_{h=1}^n \alpha_{hk} w_h\Big) = \sum_{k=1}^n a_k v_k = v.$$

Unicidad: consecuencia de que si $A, A' \in K^{n\times n}$ verifican $A.x = A'.x$ para todo $x \in K^n$, entonces $A = A'$. $\square$

Corolario

Sean V un K-e.v. de dimensión finita y B_1, B_2 y B_3 bases de V. Entonces:

- $C(B_1, B_3) = C(B_2, B_3)C(B_1, B_2)$.
- $C(B_2, B_1) = C(B_1, B_2)^{-1}$.

Demostración.

- $C(B_2, B_3)C(B_1, B_2)(v)^t_{B_1} = C(B_2, B_3)(v)^t_{B_2} = (v)^t_{B_3}\ \forall\, v \in V$

  $\Rightarrow C(B_2, B_3)C(B_1, B_2) = C(B_1, B_3)$
- $C(B_2, B_1)C(B_1, B_2) = C(B_1, B_1) = I_n$,
  $C(B_1, B_2)C(B_2, B_1) = C(B_2, B_2) = I_n$

  $\Rightarrow C(B_2, B_1) = C(B_1, B_2)^{-1}$. $\square$

Proposición

Dada $A \in GL(n, K)$, existen bases B_1, B_2 de K^n tales que $A = C(B_1, B_2)$.

Demostración.

Supongamos que $A_{ij} = a_{ij}$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.
Sean $B_2 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, la base canónica de K^n, y
$B_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i \right\}$ (vectores columna de A).
Veamos que B_1 es l.i.: si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) = 0$,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_j a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} \right) e_i.$$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$, o equivalentemente, $A.\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$
A inversible $\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Luego, B_1 es una base de K^n.
Es claro que $C(B_1, E) = A$. $\square$

Proposición.

Sea $A \in GL(n,K)$ y sea B una base de un K-e.v. V. Entonces:

i) Existe una base B_1 de V tal que $A = C(B_1, B)$.

ii) Existe una base B_2 de V tal que $A = C(B, B_2)$.

Demostración.

i) Se prueba como la proposición, reemplazando la base canónica E de K^n por la base B de V.

ii) Por la parte i), dadas $A^{-1} \in GL(n,K)$ y la base B de V, existe una base B_2 de V tal que $A^{-1} = C(B_2, B)$.
$\Rightarrow A = C(B_2, B)^{-1} = C(B, B_2)$. $\square$

Ejemplo.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \mathbb{R}[X]_2$ y $B = \{1, X, X^2\}$.

$B_1 = \{1, -1+X, 2-3X+X^2\} \Rightarrow B_1$ base de V y $C(B_1, B) = A$.

Transformaciones lineales

Definición.
Sean $(V, +_v, \cdot_v)$ y $(W, +_w, \cdot_w)$ dos K-espacios vectoriales. Una función $f : V \to W$ se llama una transformación lineal de V en W si cumple:

i) $f(v +_v v') = f(v) +_w f(v') \quad \forall\, v, v' \in V.$

ii) $f(\lambda \cdot_v v) = \lambda \cdot_w f(v) \quad \forall\, \lambda \in K, \forall\, v \in V.$

Observación.
Si $f : V \to W$ es una t.l., entonces $f(0_V) = 0_W$.

En efecto, si $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$, entonces

$$\begin{aligned} 0_W &= f(0_V) + (-f(0_V)) = \Big(f(0_V) + f(0_V)\Big) + (-f(0_V)) = \\ &= f(0_V) + \Big(f(0_V) + (-f(0_V))\Big) = f(0_V) + 0_W \ = \ f(0_V). \end{aligned}$$

Ejemplos.

- Si V y W son dos K-e.v., $0 : V \to W$, $0(x) = 0_W \ \forall x \in V$, es una transformación lineal.
- Si V es un K-e.v., $id : V \to V$, $id(x) = x \ \forall x \in V$, es una transformación lineal.
- Si $A \in K^{m\times n}$, $f_A : K^n \to K^m$ definida por $f_A(x) = (A.x^t)^t$ es una transformación lineal.
- $\delta : K[X] \to K[X]$, $\delta(P) = P'$ es una transformación lineal.
- $F : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$, $F(g) = \int_0^1 g(x)\, dx$ es una transformación lineal.

Ejemplo. Hallar, si es posible, una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifique $f(1,1) = (0,1)$ y $f(1,0) = (2,3)$.

$$(x_1, x_2) = x_2.(1,1) + (x_1 - x_2).(1,0)$$

Si f cumple lo pedido:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_2.(1,1) + (x_1 - x_2).(1,0)) \\ &= f(x_2.(1,1)) + f((x_1 - x_2).(1,0)) \\ &= x_2.f(1,1) + (x_1 - x_2).f(1,0) \\ &= x_2.(0,1) + (x_1 - x_2).(2,3) \\ &= (2x_1 - 2x_2, 3x_1 - 2x_2). \end{aligned}$$

f es una t.l., $f(1,1) = (0,1)$ y $f(1,0) = (2,3)$ ✓

Observación.

Si $f : V \to W$ es una t.l., $v_1, \dots, v_r \in V$ y $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$, entonces

$$f(v) = f\Big(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\Big) \underset{\text{i)}}{=} \sum_{i=1}^{r} f(\alpha_i v_i) \underset{\text{ii)}}{=} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(v_i).$$

Teorema.
Sean V y W dos K-e.v., $\dim(V) = n$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y sean $w_1, \dots, w_n \in W$ vectores arbitrarios.
Existe una única transformación lineal $f : V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i \ \forall 1 \leq i \leq n$.

Demostración.
Existencia: $v \in V \Rightarrow \exists$ únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Definimos $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$. Veamos que f es una t.l.:

i) Sean $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i$ en V.

$$v + v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha'_i) v_i.$$

$$f(v+v') = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha'_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i w_i = f(v) + f(v').$$

ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v) \ \forall \lambda \in K, \forall v \in V$, se prueba similarmente.

Unicidad: Supongamos que f y g son dos t.l. de V en W tales que $f(v_i) = w_i$ y $g(v_i) = w_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$.
Si $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, se tiene que

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(v_i) = g(v).$$

$\Rightarrow f(v) = g(v)$ $\forall v \in V \Rightarrow f = g$. $\square$

Observación.
Similarmente se prueba que, si V y W son dos K-e.v. (V no necesariamente de dimensión finita), $B = \{v_i : i \in I\}$ es una base de V y $\{w_i : i \in I\} \subset W$, existe una única transformación lineal $f : V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i$ $\forall i \in I$.