ESPACIO DUAL II

RECORDAR: DADA $\mathcal{B}$ BASE DE V^*, $\exists!$ B BASE DE V TAL QUE $B^* = \mathcal{B}$, LA BASE PREDUAL.

¿CÓMO HALLARLA?

$\dim V = 2$

EJEMPLO: SEAN $\alpha_0, \alpha_1 \in K$, $\alpha_0 \neq \alpha_1$. SEA $V = K_1[X]$

TOMEMOS $ev_i \in V^*$, $ev_i(P) = P(\alpha_i)$.

AFIRMO: $\mathcal{B} = \{ev_0, ev_1\}$ ES BASE DE V^*

DEM: BVQ SON L.I., Y PARA ESTO (EJ. 4) BVQ $\ker(ev_0) \neq \ker(ev_1)$;

EN EFECTO $X - \alpha_1 \in \ker ev_1 \setminus \underbrace{\ker ev_0}_{\text{PUES } \alpha_0 \neq \alpha_1}$ $\square$

¿CUÁL ES SU BASE PREDUAL B?

SEA $E = \{1, X\}$ $\rightarrow$ BASE CANÓNICA DE $K_1[X]$

$\rightsquigarrow$ $C(B,E) \underset{\text{PROP}}{=} C(E^*, \mathcal{B})^t = \Big(\underbrace{C(\mathcal{B}, E^*)}_{\text{FÁCIL}}{}^{-1}\Big)^t$

- $(ev_0)_{E^*} = (ev_0(1), ev_0(X)) = (1, \alpha_0)$
- $(ev_1)_{E^*} = (ev_1(1), ev_1(X)) = (1, \alpha_1)$

CUENTA

Así, $C(B,E) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^t = \dfrac{1}{\alpha_1-\alpha_0}\begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

y por lo tanto $B = \{P_0, P_1\}$, con

$$P_0 = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}(\alpha_1 - X), \quad P_1 = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}(-\alpha_0+X).$$

$\rightsquigarrow$ Los polinomios interp. de Lagrange

//

Recordar: dado $S \subseteq V$ el anulador de S es

$$S^0 = \{f \in V^* : f(S) = \{0\}\} \subseteq V^*;$$

satisface que $\dim S + \dim S^0 = \dim V$ $\rightarrow$ si es finita

Ejemplos:

- Si $S = \{x \in K^4 : x_1+x_3 = 0,\ 2x_3+x_4 = 0\}$, entonces

  $S^0 = \langle \varphi, \psi \rangle$,

  con $\varphi(x) = x_1+x_3$, $\psi(x) = 2x_3+x_4$;

  $\supseteq)$: pues $\varphi(S) = \psi(S) = \{0\}$

  $=)$: $\dim(S^0) = 4 - \dim S = 2$, $\{\varphi, \psi\}$ L.I.

- SI $S = \langle (1,1,1) \rangle \subseteq K^3$ ENTONCES

$$S^0 = \langle \varphi, \psi \rangle, \text{ CON}$$

$$\varphi(x) = x_1 - x_2, \quad \psi = x_2 - x_3$$

(IDEM: $\varphi, \psi \in S^0$, Y SON LI)

⟶ EN K^n EL ANULADOR "ES" LAS ECUACIONES //

PROBLEMA:

SEA $B = \{(1,1,2), (-1,1,0), w\}$ UNA BASE DE $\mathbb{Q}^3$, Y SEA $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ SU DUAL.

SEA $v \in \mathbb{Q}^3$ TAL QUE $\langle v \rangle^0 = \langle \varphi_1 - 2\varphi_2 + 3\varphi_3, \varphi_2 - 2\varphi_3 \rangle$. PROBAR QUE $\{(1,1,2), (-1,1,0), v\}$ ES BASE DE $\mathbb{Q}^3$. //

POR EL ABSURDO,

$T \subseteq S$ SII $S^0 \subseteq T^0$

$v \in \langle (1,1,2), (-1,1,0) \rangle =: S$ SII $\langle v \rangle \subseteq S$ SII $S^0 \subseteq \langle v \rangle^0$;

AHORA, $S^0 = \langle \varphi \rangle$, CON $\varphi(x) = x_1 + x_2 - x_3$ ($\varphi \in S^0$ + dim)

⟶ BVQ $\varphi \notin \langle \varphi_1 - 2\varphi_2 + 3\varphi_3, \varphi_2 - 2\varphi_3 \rangle$;

AHORA, $(\varphi)_{B^*} = (\varphi(1,1,2), \varphi(-1,1,0), \varphi(w))$
$= (0, 0, \varphi(w))$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi(w)\varphi_3 \notin \langle \varphi_1 - 2\varphi_2 + 3\varphi_3, \varphi_2 - 2\varphi_3 \rangle$$ //