Álgebra Lineal - Clase 11

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Determinantes y matrices inversibles.
- Adjunta de una matriz y regla de Cramer.
- Rango de matrices y determinantes.
- Fórmula para el determinante.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 5 (Secciones 5.3 a 5.6).

Inversibilidad de matrices

Teorema.
Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
Más aún, si A es inversible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Demostración.
$(\Rightarrow)$ $A \in K^{n\times n}$ inversible $\exists A^{-1} \in K^{n\times n}$ tal que $A.A^{-1} = I_n$.

$$\begin{array}{rcl} \det(A.A^{-1}) & = & \det(I_n) \\ \det(A).\det(A^{-1}) & = & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

$(\Leftarrow)$ $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ las columnas de A son l.i.
$\Rightarrow A$ es inversible. $\square$

Adjunta de una matriz

Definición.

Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Se llama adjunta de A, y se nota $\mathrm{adj}(A)$, a la matriz $\mathrm{adj}(A) \in K^{n\times n}$ definida por

$$(\mathrm{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(j|i)).$$

Ejemplos.

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

   Observar:
   $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A).I_2$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) & +\det\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ -\det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & +\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ +\det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) & -\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) & +\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A.\,\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}.\,\text{adj}(A).$$

$\det(A) = 9$

Proposición

Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces $A.\operatorname{adj}(A) = \det(A).\, I_n$.

Si $\det(A) \neq 0$, se tiene que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.\operatorname{adj}(A)$.

Demostración. Si $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$,

$$(A.\operatorname{adj}(A))_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}.\,(\operatorname{adj}(A))_{i\ell} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\,(-1)^{i+\ell}\det(A(\ell|i)).$$

Si $k = \ell$, $(A.\operatorname{adj}(A))_{\ell\ell} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+\ell}a_{\ell i}\det(A(\ell|i)) = \det(A)$.

Si $k \neq \ell$,

$$(A.\operatorname{adj}(A))_{k\ell} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+\ell}a_{ki}\det(A(\ell|i)) = \det\begin{pmatrix} F_1(A) \\ \vdots \\ F_k(A) \\ \vdots \\ F_k(A) \\ \vdots \\ F_n(A) \end{pmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow A.\operatorname{adj}(A) = \det(A).I_n$. □

Regla de Cramer

Proposición.

Sean $A = (A_1|\dots|A_n) \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y $b \in K^{n\times 1}$.
La (única) solución del sistema lineal $A.x = b$ es $x = (x_1, \dots, x_n)$

con $x_i = \dfrac{\det(A_1|\dots|A_{i-1} \mid b \mid A_{i+1}|\dots|A_n)}{\det(A)} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$

Demostración.

$A.x = b \Rightarrow \mathrm{adj}(A).A.x = \mathrm{adj}(A).\, b.$
A es inversible $\Rightarrow \mathrm{adj}(A).A = A.\,\mathrm{adj}(A) = \det(A).\, I_n.$

$$\det(A).x = \mathrm{adj}(A).\, b.$$

Para $1 \leq i \leq n$,

$\det(A).x_i = (\mathrm{adj}(A).\, b)_{i1} =$
$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A(j|i))\, b_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \det(A(j|i)) =$
$= \det(A_1|\dots|A_{i-1} \mid b \mid A_{i+1}|\dots|A_n).$ $\square$

Ejemplo.

La solución de $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 & = & 3 \\ -3x_1 + 4x_2 & = & 5 \end{array} \right.$ es $x = (x_1, x_2)$ con

$$x_1 = \frac{\det \left(\begin{smallmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 4 \end{smallmatrix} \right)}{\det \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix} \right)} = \frac{27}{(-1)} = -27$$

$$x_2 = \frac{\det \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{smallmatrix} \right)}{\det \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix} \right)} = \frac{19}{(-1)} = -19$$

Ejemplo.

Si $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ verifica $\det(A) = \pm 1$, entonces, para todo $b \in \mathbb{Z}^n$, el sistema lineal $A.x = b$ tiene solución en $\mathbb{Z}^n$.

Rango de una matriz y determinantes

Definición.
Sea $A \in K^{n\times m}$ y sean $1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq m$. Una submatriz de A de $r \times s$ es una matriz $B \in K^{r\times s}$ que se obtiene suprimiendo $n - r$ filas y $m - s$ columnas de A.

Ejemplo.
Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ submatriz de A.
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ submatriz de A.

Proposición.

Sea $A \in K^{n\times m}$. Entonces:

$$\mathrm{rg}(A) \geq r \iff \exists B \in K^{r\times r} \text{ submatriz de } A \text{ con } \det(B) \neq 0.$$

Demostración.

$(\Rightarrow)$ $\mathrm{rg}(A) \geq r \Rightarrow \exists\ r$ filas de A que son l.i.
Sea $A' \in K^{r\times m}$ la submatriz de A formada por esas filas.
$\mathrm{rg}(A') = r \Rightarrow A'$ tiene r columnas l.i.
Sea $B \in K^{r\times r}$ la submatriz de A' formada por esas r columnas.
$\Rightarrow B$ es una submatriz de A.
Las columnas de B son l.i. $\Rightarrow \det(B) \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ $B \in K^{r\times r}$ submatriz de A con $\det(B) \neq 0 \Rightarrow$ las columnas de B son l.i.
Sea $A' \in K^{r\times m}$ la submatriz de A que resulta de suprimir las mismas filas que para obtener B (pero sin suprimir columnas).
Las columnas de B son columnas de $A' \Rightarrow \mathrm{rg}(A') \geq \mathrm{rg}(B) = r$
Las filas de A son filas de $A' \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \geq \mathrm{rg}(A') \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \geq r$. $\square$

Ejemplo. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

- $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 0$,
- $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0$,
- $\det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 0$,
- $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 0$.

$\nexists B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ submatriz de A con $\det(B) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) < 3$.
$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenida al suprimir fila 3 y columnas 3 y 4 de A,
cumple $\det(B) = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$.
Conclusión: $\operatorname{rg}(A) = 2$.

Proposición.

$\operatorname{rg}(A) = \max\{r \in \mathbb{N}_0 \mid \exists B \in K^{r\times r} \text{ submatriz de } A : \det(B) \neq 0\}$.

Otra fórmula para el determinante

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}\left[a_{22}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{23}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right] + \\
&\quad + a_{12}\left[a_{21}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + a_{23}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\right] + \\
&\quad + a_{13}\left[a_{21}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= a_{11}\left[a_{22}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + a_{23}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}\right] + \\
&\quad + a_{12}\left[a_{21}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + a_{23}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + \\
&\quad + a_{13}\left[a_{21}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} +$$

$$+ a_{12}a_{21}a_{33}\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31}\det\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32}\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31}\det\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Similarmente, para $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$,

$$\det(A) = \sum_{1 \leq j_1, j_2, \dots, j_n \leq n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \det \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}$$

donde, en cada término, $\{j_1, j_2, \dots, j_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Una permutación de $\{1, 2, \dots, n\}$ es una función
$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ biyectiva.
El conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$ se nota S_n.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \underbrace{\det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ e_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}}_{\mathrm{sg}(\sigma) = \text{signo de } \sigma}$$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sg}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.}$$