TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean V, W dos K-espacios vectoriales.
Una función $f: V \to W$ es una transf. lineal si

$$\begin{cases} f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) & \forall v_1, v_2 \in V \\ f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v) & \forall \alpha \in K,\ v \in V \end{cases}$$

⊗ **OBS 1**: Si $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, entonces

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \boxed{f(v_i)}$$

O sea, conociendo los valores de $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$ podemos calcular f en cualquier vector de $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$.

⊗ **OBS 2**: Los valores de f en una BASE de V determinan f.

⊗ **TEOREMA**: Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V y $w_1, w_2, \dots, w_n$ son vectores de W (no necesariamente base, ni LI, ni distintos, ni nada) entonces $\exists!\ f: V \to W$ t.l. tal que $f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$.

⊗ **EJERCICIO**: Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, decidir si existe una t.l. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$\to f(1,0,1) = (1,3,0)$

$\to f(1,-1,0) = (-1,0,4)$

$f(k^2,1,2) = (k+4, 6, -4)$ $\quad f(v) = w$

En caso de que exista analizar además si es única.

Si los vectores $\underset{v_1}{(1,0,1)}$, $\underset{v_2}{(1,-1,0)}$ y $\underset{v_3}{(k^2,1,2)}$ son LI, entonces son base y por el teorema anterior sabemos que existe f y es única.

¿Para qué valores de k son LI?
Como v_1 y v_2 son LI (no son múltiplos), $\{v_1, v_2, v_3\}$ será LI a menos que $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$.

$$(k^2,1,2) = \alpha \cdot (1,0,1) + \beta \cdot (1,-1,0)$$

$$(k^2,1,2) = (\underbrace{\alpha+\beta}_{2+(-1)=1}, -\beta, \alpha) \to \alpha = 2,\ \beta = -1$$

Conclusión: $\boxed{v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle \iff k = \pm 1}$

Luego, si $k \neq 1, -1$ existe f y es única.
En caso contrario, $\boxed{v_3 = 2v_1 - v_2}$
Entonces, para que exista f necesitamos que

$$\boxed{(k+4, 6, -4)} = f(v_3) = 2f(v_1) - f(v_2)$$
$$= 2(1,3,0) - (-1,0,4)$$
$$= \boxed{(3,6,-4)} \rightsquigarrow k+4 = 3,\ k = -1$$

Por lo tanto: si $k=1$ NO EXISTE f.
Si $k = -1$

Núcleo e imagen $\quad f: V \to W$ t.l.

$Nu(f) = \{v \in V \ / \ f(v) = 0\}$
$Im(f) = \{w \in W / \ \exists v \in V$ tal que $f(v) = w\}$

son subespacios!

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN:
(si $\dim V < \infty$)

$$\dim(Nu(f)) + \dim(Im(f)) = \dim V \quad (= n)$$

Idea de la dem.: $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ base de $Nu(f)$

completo a $\{v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ base de V

$v_1, v_2, \dots, v_r \to 0$; $\quad v_{r+1}, \dots, v_n \to \boxed{w_{r+1} \cdots w_n}$ ← probar que estos son LI y generan $Im(f)$.

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN:
(si $\dim V < \infty$)

$$\dim(Nu(f)) + \dim(Im(f)) = \dim V \quad (= n)$$

⊗ **PROBLEMA**: Sea $f: K^9 \to K^9$ una t.l. tal que $\dim(Im(f)) = 6$ y $Nu(f) \subseteq Im(f)$.
Calcular $\dim(Im(f^2))$. $\qquad f^2 = f \circ f$

SOLUCIÓN: Por teo de la dimensión,

$$\dim(Nu(f)) + \underbrace{\dim(Im(f))}_{6} = \dim K^9 = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(Nu(f)) = 3}$$

Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de $Nu(f)$.
Como $Nu(f) \subseteq Im(f)$, en particular $v_1, v_2, v_3 \in Im(f)$,
luego existen $v_4, v_5, v_6 \in V$ tales que $f(v_4) = v_1$
$f(v_5) = v_2$
$f(v_6) = v_3$

¿El conj $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ es LI? Rta: sí!

Si $\quad \boxed{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cancel{\alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5 + \alpha_6 v_6} = 0}$,

entonces (aplico f) $\quad \underbrace{\cancel{\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_3 f(v_3)}}_{=0} + \alpha_4 f(v_4) + \alpha_5 f(v_5) + \alpha_6 f(v_6) = f(0) = 0$

$$\alpha_4 v_1 + \alpha_5 v_2 + \alpha_6 v_3 = 0$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ es LI $\Rightarrow \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$.

$\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ es LI $\Rightarrow$ puedo completar a una base de K^9 con vectores v_7, v_8, v_9

$$\begin{array}{ccccccccc} \multicolumn{3}{c}{\text{base de } Nu(f)} & & & & & & \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & f(v_7) & f(v_8) & f(v_9) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f^2(v_7) & f^2(v_8) & f^2(v_9) \end{array}$$

f, f

$Im(f) = \langle v_1, v_2, v_3, f(v_7), f(v_8), f(v_9) \rangle$

son LI!

$Im(f^2) = \langle f^2(v_7), f^2(v_8), f^2(v_9) \rangle$

Son l.i!

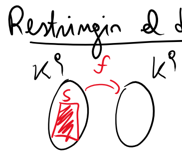
Rta: $\boxed{\dim(Im(f^2)) = 3}$.

Otra forma:

$\dim(Im(f^2))$

$$Im(f^2) = \{f^2(v) : v \in K^9\}$$
$$= \{f(f(v)) : v \in K^9\}$$
$$= \{f(w) : w \in Im(f)\}$$

Restringir el dominio: $S = Im(f)$ (subesp de K^9)



Consideramos $f|_S : S \to K^9$

Queremos $\dim Im(f|_S)$.

Sabemos que: $\boxed{\dim(S) = 6}$

$$\boxed{\dim(Nu(f|_S))} = \dim(Nu(f) \cap S)$$
$$= \dim(Nu(f)) = 3$$

$Nu(f) \subseteq Im(f) = S$ $\qquad$ teo dim

Por teo dim, $\quad \dim(Nu(f|_S)) + \dim(Im(f|_S)) = \dim S$

$$3 + \boxed{3} = 6$$