Álgebra Lineal - Clase 12

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Transformaciones lineales y matrices diagonalizables.
- Autovalores y autovectores.
- Semejanza.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 6 (Sección 6.1).

Transformaciones lineales diagonalizables

Sea V un K-e.v. de dimensión n y sea $f : V \to V$ una transformación lineal (*endomorfismo de V*).

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $V \rightsquigarrow |f|_B \in K^{n \times n}$

$\forall v \in V$, $(f(v))_B = |f|_B (v)_B$

Si $|f|_B$ es "simple", es "fácil" calcular $f(v)$.

Por ejemplo, si $|f|_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$,

$(v)_B = (a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow (f(v))_B = (\lambda_1 a_1, \ldots, \lambda_n a_n)$.

Definición.
Se dice que f es diagonalizable si existe una base B de V tal que $|f|_B$ es diagonal.

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ entonces } f(v_i) = \lambda_i v_i \ \forall 1 \leq i \leq n.$$

Recíprocamente, si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V tal que $f(v_i) = \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \in K$ $\forall 1 \leq i \leq n$, $|f|_B$ es diagonal como arriba.

Definición.

Sean V un K-e.v. y $f : V \to V$ una t.l.. Se dice que $v \in V$, $v \neq 0$, es un autovector de f si existe $\lambda \in K$ tal que $f(v) = \lambda.v$.
$\lambda \in K$ se llama un autovalor de f.
Decimos que v es un autovector asociado al autovalor λ.

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión n y sea $f : V \to V$ una t.l.
f es diagonalizable $\iff$ $\exists$ B base de V formada por autovectores de f.

Matrices diagonalizables

$A \in K^{n\times n} \rightsquigarrow f_A : K^n \to K^n$, $f_A(x) = A.x$ transformación lineal tal que $|f_A|_E = A$
$v \in K^n$, $v \neq 0$, es un autovector de f_A de autovalor λ si y sólo si $A.v = \lambda.v$.

Definición.
Se dice que $v \in K^n$, $v \neq 0$, es un autovector de $A \in K^{n\times n}$ si existe $\lambda \in K$ tal que $A.v = \lambda.v$.
$\lambda \in K$ se llama un autovalor de A.

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de K^n formada por autovectores de A

$\Rightarrow A = |f_A|_E = C(B,E)|f_A|_B C(E,B) = C.\, D.\, C^{-1}$

con $C = C(B,E) \in GL(n,K)$ y $D \in K^{n\times n}$ diagonal.

Definición.
Una matriz $A \in K^{n\times n}$ se dice diagonalizable si existe una matriz $C \in GL(n,K)$ tal que $C^{-1}.A.C$ es una matriz diagonal.

Proposición.

$A \in K^{n\times n}$ es diagonalizable $\iff$ $\exists$ B base de K^n formada por autovectores de A.

Ejemplo.

Decidir si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es diagonalizable.

Buscamos autovectores de A, es decir, vectores $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \neq (0,0)$ y $A.x = \lambda.x$.

$$A.x = \lambda.x \iff (\lambda I_2 - A).x = 0$$
$$\iff \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema homogéneo tiene solución no trivial $\iff$ $\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$

$\Rightarrow$ los autovalores de A son $\lambda = -1$ y $\lambda = 4$.

Buscamos los autovectores asociados:

- Para $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ el conjunto de autovectores asociados a $\lambda = -1$ es $< (1, -1) > - \{(0, 0)\}$.

- Para $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ el conjunto de autovectores asociados a $\lambda = 4$ es $< (3, 2) > - \{(0, 0)\}$.

$B = \{(1, -1), (3, 2)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de A.

$\Rightarrow A$ es diagonalizable: $A = C.D.C^{-1}$

con $C = C(B, E) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Polinomio característico y autovalores

Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $\lambda \in K$.

λ es autovalor de A

$\iff \exists\, x \in K^n - \{0\}$ tal que $A.x = \lambda.x$.

$\iff$ El sistema $A.x = \lambda.x$ tiene solución no trivial.

$\iff$ El sistema $(\lambda.I_n - A).x = 0$ tiene solución no trivial.

$\iff \det(\lambda.I_n - A) = 0$.

Definición.
Sea $A \in K^{n\times n}$. Se llama polinomio característico de A, y se nota $\mathcal{X}_A$, al polinomio $\mathcal{X}_A = \det(X.I_n - A) \in K[X]$.

Si $A \in K^{n\times n}$, $\mathcal{X}_A$ es un polinomio mónico de grado n.

Proposición.

Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $\lambda \in K$. Entonces:
λ es autovalor de $A \iff \lambda$ es raíz de $\mathcal{X}_A$.

Ejemplo.

Decidir si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

$$\mathcal{X}_A = \det \begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix} = X^2 + 1.$$

$\mathcal{X}_A$ no tiene raíces en $\mathbb{R} \Rightarrow A$ no tiene autovalores en $\mathbb{R}$
$\Rightarrow A$ no es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Los autovalores de $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ son las raíces $\mathcal{X}_A$ en $\mathbb{C}$: i y $-i$.

- Para $\lambda = i$:
  $i\,I_2 - A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow$ los autovectores asociados son $< (1, i) > - \{(0,0)\}$
- Para $\lambda = -i$:
  $(-i)I_2 - A = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow$ los autovectores asociados son $< (1, -i) > - \{(0,0)\}$.

$B = \{(1, i), (1, -i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$ formada por autovectores de $A \Rightarrow A$ es diagonalizable en $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Matrices semejantes

Dadas $f : K^n \to K^n$ t.l. y B_1 y B_2 bases de K^n, se tiene que:

$$|f|_{B_1} = C(B_2, B_1)|f|_{B_2}C(B_1, B_2) = C(B_2, B_1)|f|_{B_2}C(B_2, B_1)^{-1}.$$

$\Rightarrow C = C(B_2, B_1) \in GL(n, K)$ cumple $|f|_{B_1} = C.\,|f|_{B_2}.\,C^{-1}$.

Recíprocamente, si $A, B \in K^{n\times n}$ y existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.B.C^{-1}$, definiendo $f : K^n \to K^n$ como $f(x) = A.x$, con $B_1 = E$ la base canónica de K^n y B_2 la base de K^n formada por las columnas de C, resulta que

$$A = |f|_{B_1} \quad \text{y} \quad B = C^{-1}.A.C = C(E, B_2)|f|_E\, C(B_2, E) = |f|_{B_2}.$$

Definición.
Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Se dice que A y B son semejantes, y se nota $A \sim B$, si $\exists\ C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.B.C^{-1}$.

Proposición.

Sean $A, B \in K^{n\times n}$.
$A \sim B \iff \exists\ f : K^n \to K^n$ transformación lineal y bases B_1 y B_2 de K^n tales que $|f|_{B_1} = A$ y $|f|_{B_2} = B$.

Observaciones.

1. $A \in K^{n\times n}$ diagonalizable $\iff \exists D \in K^{n\times n}$ diagonal tal que $A \sim D$.
2. $\sim$ es una relación de equivalencia en $K^{n\times n}$.

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una t.l.
f es diagonalizable $\iff |f|_B$ es diagonalizable $\forall B$ base de V.

Proposición.

Sean $A, B \in K^{n\times n}$ tales que $A \sim B$. Entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$.

Demostración.

Si $A = C.B.C^{-1}$ con $C \in GL(n, K)$, entonces:

$\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{C.B.C^{-1}} = \det(X.I_n - C.B.C^{-1}) =$

$= \det(X.C.C^{-1} - C.\,B.\,C^{-1}) = \det(C.(X.I_n - B).C^{-1}) =$

$= \det(C)\det(X.I_n - B)\det(C)^{-1} = \det(X.I_n - B) = \mathcal{X}_B \qquad \square$

Definición.

Sea V un K-e.v. de dimensión finita, y sea $f : V \to V$ una t.l. Se define el polinomio característico de f como $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{|f|_B}$, donde B es una base cualquiera de V.

$\lambda \in K$ es autovalor de $f \iff \lambda \in K$ es raíz de $\mathcal{X}_f$.

Ejemplo.

Sea $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$, $f(P) = P'$. Decidir si f es diagonalizable.

Consideramos $B = \{1, t, t^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[t]$,

$$A = |f|_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_A = \det(X.I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -2 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} = X^3$$

$\Rightarrow$ el único autovalor de f es $\lambda = 0$.

f no es diagonalizable: si lo fuera,
$A = C\, \mathbb{O}_{3\times 3}\, C^{-1}$, con $\mathbb{O}_{3\times 3}$ la matriz nula $\Rightarrow A = \mathbb{O}_{3\times 3}$. Abs!

Observación.

Para la matriz A del ejemplo vale $\mathcal{X}_A = X^3 = \mathcal{X}_{\mathbb{O}_{3\times 3}}$ y $A \not\sim \mathbb{O}_{3\times 3}$.

Espacios de autovectores

Definición.
Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $\lambda \in K$ un autovalor de A.
Llamamos autoespacio asociado a λ a
$E_\lambda = \{v \in K^n \,/\, A.v = \lambda.v\} = \{v \in K^n \,/\, (\lambda\, I_n - A).v = 0\}$,
el subespacio de K^n formado por el vector nulo y los autovectores de A asociados al autovalor λ.

Ejemplo.
Sean $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} X-1 & -3 & 0 \\ -1 & X+1 & 0 \\ 1 & * & X-2 \end{pmatrix} = (X-2)(X^2-4)$$

$\mathcal{X}_{A_1} = \mathcal{X}_{A_2} = (X-2)^2(X+2) \Rightarrow$ Autovalores: 2 y -2.

1. Autoespacios de $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:
   - Para $\lambda = 2$:
     $2I_3 - A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = < (3,1,0),(0,0,1) >$
   - Para $\lambda = -2$:
     $-2I_3 - A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-2} = < (1,-1,1) >$

   $B = \{(3,1,0),(0,0,1),(1,-1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A_1.

   $\Rightarrow A_1 = C\,D\,C^{-1}$ con $C = C(B,E)$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Autoespacios de $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

- Para $\lambda = 2$:

  $$2I_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = <(0,0,1)>$$

- Para $\lambda = -2$:

  $$-2I_3 - A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{-2} = <(2,-2,1)>$$

$\nexists$ B base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A_2 (no hay 3 autovectores l.i.).

$\Rightarrow$ A_2 no es diagonalizable.