Álgebra Lineal - Clase 24

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

Variedades lineales en espacios euclídeos.

- Ortogonalidad de variedades lineales.
- Ángulo entre rectas y planos.
- Distancia de un punto a una variedad lineal.
- Distancia entre variedades lineales.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 9 (Sección 9.3).

Ortogonalidad de variedades lineales

Definición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo. Sean $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$ (con S_1, S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$) variedades lineales en V. Se dice que M_1 y M_2 son ortogonales si $S_1 \perp S_2$, es decir, si $\forall s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, $\langle s_1, s_2 \rangle = 0$.

Ejemplo.
$L_1 = <(1,2,3)> + (1,5,4)$ y $L_2 = <(1,1,-1)> + (1,0,0)$ son rectas ortogonales en $\mathbb{R}^3$ (con el p.i. canónico), porque $\langle (1,2,3), (1,1,-1) \rangle = 0$.

Definición.
Sea M una variedad lineal en un espacio euclídeo V de dimensión finita y sea $q \in V$.
El complemento ortogonal a M por q es la variedad lineal $M_q^\perp = S^\perp + q$, donde S es el subespacio de V asociado a M.
Escribiremos $M^\perp$ para el complemento ortogonal a M por $q = 0$.

Ejemplos.

1. Hallar $L^{\perp}_{(1,1,2)}$ para $L = <(1,2,3)> + (1,5,4) \subseteq \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} L^{\perp}_{(1,1,2)} &= <(1,2,3)>^{\perp} + (1,1,2) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + 3z = 0\} + (1,1,2) \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + 3z = 9\}. \end{aligned}$$

2. Hallar $\Pi^{\perp}_{(1,0,1)}$ para $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x - 2y + z = 7\}$.

$$\begin{aligned} \Pi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x - 2y + z = 0\} + (0,0,7) \\ &= <(3,-2,1)>^{\perp} + (0,0,7). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\perp}_{(1,0,1)} &= \left(<(3,-2,1)>^{\perp}\right)^{\perp} + (1,0,1) \\ &= <(3,-2,1)> + (1,0,1). \end{aligned}$$

Ángulo entre rectas y planos

Definición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo. Sean $L_1 = < v_1 > + p_1$ y $L_2 = < v_2 > + p_2$, con $v_1, v_2 \in V$ no nulos. Se define el ángulo entre L_1 y L_2 como el (único) número real en $[0, \frac{\pi}{2}]$ que coincide con el ángulo entre v_1 y v_2 o con el ángulo entre $-v_1$ y v_2.

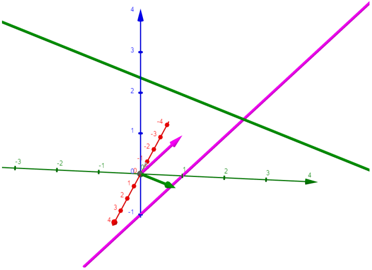
Ejemplo.

$L_1 = < (1,1,0) > + (0,1,2)$ y
$L_2 = < (0,1,1) > + (0,1,0)$

$v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$

$\cos(\theta) = \frac{\langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle}{\|(1,1,0)\| . \|(0,1,1)\|} = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ es el ángulo entre L_1 y L_2



Definición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo con $\dim V = 3$.

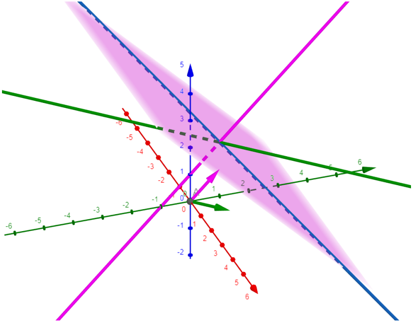
- Si L es una recta y Π un plano en V, se define el ángulo entre L y Π como $\frac{\pi}{2} - \alpha$, con α el ángulo entre las rectas L y $\Pi^{\perp}$.
- Si Π_1 y Π_2 son planos en V, se define el ángulo entre Π_1 y Π_2 como el ángulo entre las rectas $\Pi_1^{\perp}$ y $\Pi_2^{\perp}$.

Ejemplo.

$L = <(1,1,0)> + (0,1,2)$,
$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 1\}$

$\Pi^{\perp} = <(0,1,1)>$

$\theta(L, \Pi^{\perp}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta(L, \Pi) = \frac{\pi}{6}$



Distancia de un punto a una variedad lineal

Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita.

Definición.
Sea M una variedad lineal en V y sea $q \in V$. Se define la distancia de q a M como $d(q, M) = \inf\{d(q, z) \ / \ z \in M\}$.

Si $M = S + p$ con S un subespacio de V y $p \in V$,

$$\begin{aligned} d(q, M) &= \inf\{d(q, z) \,/\, z \in M\} = \inf\{d(q, s + p) \,/\, s \in S\} \\ &= \inf\{\|q - (s + p)\| \,/\, s \in S\} \\ &= \inf\{\|q - p - s\| \,/\, s \in S\} = d(q - p,\ S) \\ &= d(q - p,\ p_S(q - p)) = \|p_{S^\perp}(q - p)\|, \end{aligned}$$

donde p_S y $p_{S^\perp}$ denotan las proyecciones ortogonales sobre S y $S^\perp$.

$d(q, M) = \|q - (p_S(q - p) + p)\|$

$\Rightarrow$ $p_S(q - p) + p$ es el punto de M más cercano a q.

Ejemplo.

Calcular la distancia de $q = (-3, 2, 2)$ a $M = <(1,1,0),(0,-1,1)> + (0,3,1)$ y hallar el punto de M más cercano a q.

$S = <(1,1,0),(0,-1,1)>$, $p = (0,3,1)$

- $d(q, M) = \|p_{S^\perp}(q-p)\|$

  $S^\perp = <(-1,1,1)>$

  $p_{S^\perp}(q-p) = p_{S^\perp}((-3,2,2)-(0,3,1)) = p_{S^\perp}(-3,-1,1)$

  $= \frac{\langle(-3,-1,1),(-1,1,1)\rangle}{\|(-1,1,1)\|^2}(-1,1,1) = \frac{3}{3}(-1,1,1) = (-1,1,1)$

  $\Rightarrow d(q,M) = \|p_{S^\perp}(q-p)\| = \|(-1,1,1)\| = \sqrt{3}$

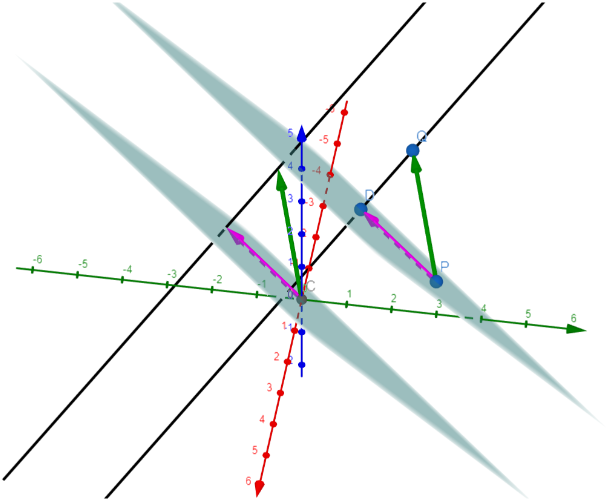
- El punto de M más cercano a q es $q' = p_S(q-p) + p$.

  $p_S(q-p) = p_S(-3,-1,1) = (-3,-1,1) - p_{S^\perp}(-3,-1,1)$

  $= (-3,-1,1) - (-1,1,1) = (-2,-2,0)$

  $\Rightarrow q' = p_S(q-p) + p = (-2,-2,0) + (0,3,1) = (-2,1,1)$

$d(q,M) = \|q - q'\| = \|(-3,2,2) - (-2,1,1)\| = \|(-1,1,1)\| = \sqrt{3}$ ✓



$$M \cap M_q^{\perp} = \{p_S(q-p)+p\}.$$

Distancia entre variedades lineales

Definición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita. Si M_1 y M_2 son variedades lineales en V, la distancia entre M_1 y M_2 es

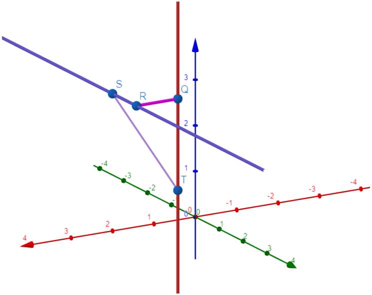
$$d(M_1, M_2) = \inf\{d(m_1, m_2) \ / \ m_1 \in M_1, \ m_2 \in M_2\}.$$

Ejemplo.

$L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 1, x_2 = 1\}$

$L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 2, x_3 = 3\}$.

Hallar $d(L_1, L_2)$.



$$\begin{aligned} d(L_1, L_2) &= \inf\{d(m_1, m_2) \,/\, m_1 \in L_1, m_2 \in L_2\} \\ &= \inf\{d((1,1,\alpha),(2,\beta,3)) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \inf\{\sqrt{1 + (1-\beta)^2 + (\alpha - 3)^2} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \ = \ 1. \end{aligned}$$

El conjunto posee mínimo, que se alcanza para $\alpha = 3, \ \beta = 1$.
$\Rightarrow d(L_1, L_2)$ coincide con la distancia entre los puntos
$Q = (1,1,3) \in L_1$ y $R = (2,1,3) \in L_2$.

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita.
Si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, con S_1, S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$, entonces $d(M_1, M_2) = \|p_{(S_1+S_2)^\perp}(p_1 - p_2)\|$.

Demostración.

$M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, con S_1, S_2 subespacios de V.

Sea $S = S_1 + S_2$.
Si $v = p_S(p_1 - p_2) \in S$ y $u = p_{S^\perp}(p_1 - p_2) \in S^\perp$, entonces $p_1 - p_2 = v + u$.

- $u \in S^\perp$ no depende $p_1 \in M_1$ y $p_2 \in M_2$, es decir, $\forall p_1' \in M_1, p_2' \in M_2$, vale $p_{S^\perp}(p_1' - p_2') = u$:

  $p_1' \in M_1$ y $p_2' \in M_2 \Rightarrow \exists s_1' \in S_1$ y $s_2' \in S_2$ tales que $p_1' = s_1' + p_1$ y $p_2' = s_2' + p_2$.

$$\begin{aligned} p_1' - p_2' &= s_1' + p_1 - (s_2' + p_2) = s_1' - s_2' + (p_1 - p_2) \\ &= s_1' - s_2' + v + u = v' + u. \end{aligned}$$

  con $v' = s_1' - s_2' + v \in S$.
  $\Rightarrow p_{S^\perp}(p_1' - p_2') = p_{S^\perp}(v' + u) = u.$

- $d(x,y) \geq \|u\|\ \forall x \in M_1,\ y \in M_2$:

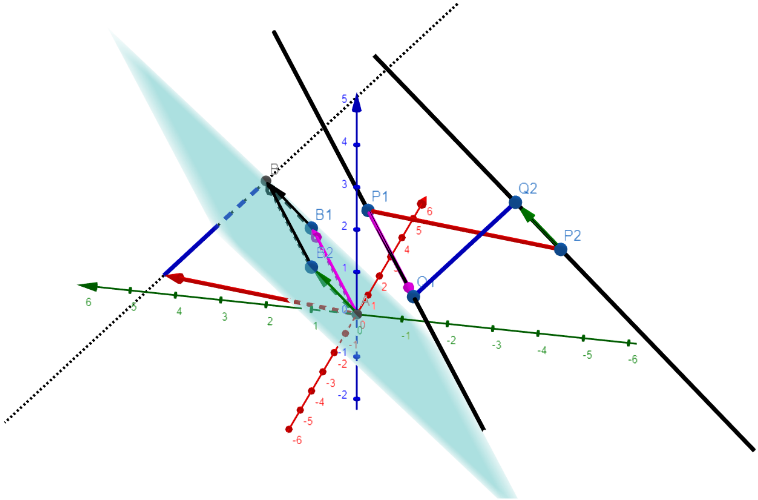
  Para $x \in M_1$, $y \in M_2$, se tiene que $x - y = v_{xy} + u$, para algún $v_{xy} \in S$.
  $v_{xy} \in S$, $u \in S^{\perp} \Rightarrow \langle v_{xy}, u\rangle = 0$
  $\Rightarrow \|x-y\|^2 = \|v_{xy}\|^2 + \|u\|^2 \geq \|u\|^2$.
  $\Rightarrow d(x,y) \geq \|u\|$.
- Existen $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$ tales que $d(m_1, m_2) = \|u\|$:

  Si $p_1 - p_2 = v + u$, con $v \in S = S_1 + S_2$ y $u \in S^{\perp}$, existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $v = s_1 + s_2$.
  Sean $m_1 = -s_1 + p_1 \in M_1$ y $m_2 = s_2 + p_2 \in M_2$.

$$\begin{aligned} d(m_1, m_2) &= \|m_1 - m_2\| = \|(-s_1 + p_1) - (s_2 + p_2)\| \\ &= \|(p_1 - p_2) - (s_1 + s_2)\| \\ &= \|(v + u) - v\| = \|u\|. \end{aligned}$$

$\Rightarrow d(M_1, M_2) = d(m_1, m_2) = \|u\| = \|p_{(S_1+S_2)^{\perp}}(p_1 - p_2)\|.$ $\square$

Ejemplo.
$L_1 = <(2,1,0)> + (1,0,2)$ y $L_2 = <(0,1,1)> + (-2,-5,3)$.
Calcular $d(L_1, L_2)$ y hallar $q_1 \in L_1$ y $q_2 \in L_2$ tales que $d(L_1, L_2) = d(q_1, q_2)$.



- $S = S_1 + S_2 = <(2,1,0),(0,1,1)> \Rightarrow S^{\perp} = <(1,-2,2)>$
- $p_1 - p_2 = (1,0,2) - (-2,-5,3) = (3,5,-1)$
- $u = p_{S^{\perp}}(p_1 - p_2) = p_{S^{\perp}}(3,5,-1) = \frac{\langle (3,5,-1),(1,-2,2)\rangle}{\|(1,-2,2)\|^2}(1,-2,2)$
  $= \frac{-9}{9}(1,-2,2) = (-1,2,-2)$
- $\boxed{d(L_1,L_2) = \|u\| = \|(-1,2,-2)\| = 3}$

- $p_1 - p_2 = v + u$ con $v = (3,5,-1) - (-1,2,-2) = (4,3,1)$
  $v = p_S(p_1 - p_2) \in S$
- $v = s_1 + s_2 = (4,2,0) + (0,1,1)$ con $(4,2,0) \in S_1$, $(0,1,1) \in S_2$
- $q_1 = -s_1 + p_1 = (-4,-2,0) + (1,0,2) = (-3,-2,2) \in L_1$
  $q_2 = s_2 + p_2 = (0,1,1) + (-2,-5,3) = (-2,-4,4) \in L_2$

Verificación:

$d(q_1,q_2) = \|q_1 - q_2\| = \|(-1,2,-2)\| = 3 = d(L_1,L_2)$.