1	2	3	4

Calificación

ÁLGEBRA LINEAL

Recuperatorio del primer parcial — 15 de diciembre de 2020

1. Consideremos el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $V = \mathbb{Q}_3[X]$. Sean $S, T \subseteq V$ los subespacios

$$S = \langle kX^3 + X^2 - 2X + 1,\ 2X - (k+3),\ (k+3)X^2 - 4X \rangle,$$
$$T = \{p \in \mathbb{Q}_3[X] : p(1) = p'(1) = 0\}.$$

(a) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{Q}$ para los cuales existe un proyector $f : V \to V$ con $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$.

(b) Para alguno de los valores hallados, definir f en una base de V y dar la matriz de f en esa base.

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión 9, y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim \mathrm{Im}(f) = 7$ y $\dim \mathrm{Nu}(f^2) = 4$.

Probar que $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

3. Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y sea $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Por último, sea T el subespacio de V^* generado por todas las funciones de la forma $\varphi_i - \varphi_j$ con $1 \leq i < j \leq 4$.

(a) Hallar una base del subespacio $S \subseteq V$ tal que $S^\circ = T$.

(b) Determinar si $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \in T$.

4. Sean $v, w \in K^{1\times n}$, y sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible. Probar que

(a) $\det(I_n + v^t w) = 1 + wv^t$.

(b) $\det(A + v^t w) = \det(A) + w\,\mathrm{adj}(A)v^t$.

Nota: la segunda afirmación vale también si A no es inversible.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y escriba con claridad