Álgebra Lineal - Clase 4

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Matrices
- Operaciones
- Matrices inversibles

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 2 (Secciones 2.1 y 2.2).

Definiciones básicas

$$K^{n\times m} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} / \ a_{ij} \in K \ \forall 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m \right\}$$

es el conjunto de las matrices de n filas y m columnas con coeficientes en K.

Si $A \in K^{n\times m}$, para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, escribimos A_{ij} para especificar el elemento que se halla en el lugar ij, correspondiente a la intersección de la fila i y la columna j.

Ejemplo.
$A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ tal que $A_{ij} = i - j$, para $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 4$, es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación.
Si $A, B \in K^{n\times m}$, $\ A = B \iff A_{ij} = B_{ij} \ \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Definición

Sea $A \in K^{n\times m}$. Se llama matriz transpuesta de A, y se nota A^t, a la matriz $A^t \in K^{m\times n}$ definida por $(A^t)_{ij} = A_{ji}$ para cada $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Definición.

Si $A \in K^{n\times n}$, la traza de A es el escalar $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow tr(A) = 1 + (-3) + 7 = 5.$$

Operaciones

La suma de matrices y el producto por escalares se definen como

$$+ : \; K^{n\times m} \times K^{n\times m} \to K^{n\times m}, \; (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$
$$\cdot : \; K \times K^{n\times m} \to K^{n\times m}, \; (\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda A_{ij} \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m).$$

$(K^{n\times m}, +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

El producto de matrices se define para matrices A y B tales que la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B: si $A \in K^{n\times m}$ y $B \in K^{m\times r}$, se define $A \cdot B \in K^{n\times r}$ como

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj} \qquad (1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq r).$$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ B \in \mathbb{R}^{3\times 2} \Rightarrow A\cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 3} \Rightarrow B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto de matrices.

1. Propiedad asociativa: si $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times r}$ y $C \in K^{r\times s}$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. Para cada $r \in \mathbb{N}$, sea $I_r \in K^{r\times r}$, $(I_r)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

   la matriz identidad de $K^{r\times r}$.

   Si $A \in K^{n\times m}$, se verifica: $I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$.
3. Propiedades distributivas:
   3.1 Si $A \in K^{n\times m}$ y $B, C \in K^{m\times r}$, entonces $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
   3.2 Si $A, B \in K^{n\times m}$ y $C \in K^{m\times r}$, entonces $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Observación.

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ es un anillo.

Demostración. (Propiedad asociativa)

Observar que si $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times r}$ y $C \in K^{r\times s}$, entonces $(A\cdot B)\cdot C \in K^{n\times s}$ y $A\cdot(B\cdot C) \in K^{n\times s}$.

Para cada $1 \le i \le n$, $1 \le j \le s$:

$$\begin{aligned}
\big((A\cdot B)\cdot C\big)_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^{r}(A\cdot B)_{i\alpha}C_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{r}\Big(\sum_{\beta=1}^{m}A_{i\beta}B_{\beta\alpha}\Big)C_{\alpha j} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{r}\Big(\sum_{\beta=1}^{m}A_{i\beta}B_{\beta\alpha}C_{\alpha j}\Big) = \sum_{\beta=1}^{m}\Big(\sum_{\alpha=1}^{r}A_{i\beta}B_{\beta\alpha}C_{\alpha j}\Big) \\
&= \sum_{\beta=1}^{m}A_{i\beta}\Big(\sum_{\alpha=1}^{r}B_{\beta\alpha}C_{\alpha j}\Big) = \sum_{\beta=1}^{m}A_{i\beta}(B.C)_{\beta j} \\
&= \big(A\cdot(B\cdot C)\big)_{ij}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$. $\square$

Observación.

- El producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo.
  Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
  $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ o $B = 0$.
  En el ejemplo anterior, $A \neq 0$ y $B \neq 0$, pero $A \cdot B = 0$.
- $A \cdot B = A \cdot C \not\Rightarrow B = C$
  Por ejemplo, si A y B son las anteriores y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
  se tiene que $A \cdot B = A \cdot C$ y $B \neq C$.

Producto de matrices y sistemas lineales

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

puede escribirse como una ecuación matricial:

$$A \cdot x = b$$

- $A \in K^{m \times n}$ es la matriz de coeficientes del sistema,
- $x \in K^{n \times 1}$ se define como $x_{i1} = x_i$ (matriz de una columna cuyos elementos son las incógnitas del sistema),
- $b \in K^{m \times 1}$ se define como $b_{j1} = b_j$ (matriz de una columna cuyos elementos son los resultados de las ecuaciones).

Si existe A^{-1} inversa de A para el producto de matrices,

$Ax = b \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Rightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$

Pero esto no siempre ocurre...

Matrices inversibles

Definición.
$A \in K^{n\times n}$ se dice inversible si existe una matriz $B \in K^{n\times n}$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

La matriz B, si existe, es única y la notaremos $B = A^{-1}$:
si $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ y $A \cdot B' = B' \cdot A = I_n$, entonces

$$B = I_n \cdot B = (B' \cdot A) \cdot B = B' \cdot (A \cdot B) = B' \cdot I_n = B'.$$

Observación.
No toda matriz en $K^{n\times n}$ tiene inversa para el producto.
Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ no tiene inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $GL(n, K) = \{A \in K^{n\times n} / \ A \text{ es inversible}\}$.

Proposición.

1. $I_n \in GL(n, K)$.
2. $A, B \in GL(n, K) \Rightarrow AB \in GL(n, K)$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $A \in GL(n, K) \Rightarrow A^{-1} \in GL(n, K)$ y $(A^{-1})^{-1} = A$.

Demostración.

1. $I_n.I_n = I_n$.
2. $A, B \in GL(n, K) \Rightarrow \exists\ A^{-1}$ y B^{-1} en $K^{n\times n}$.
   $(AB).(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\, I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$.
   Análogamente, $(B^{-1}A^{-1}).(AB) = I_n$.
   $\Rightarrow AB$ es inversible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $A \in GL(n, K) \Rightarrow A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$
   $\Rightarrow A^{-1}$ es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$ □

$(GL(n, K), \cdot)$ es un grupo, llamado el grupo lineal general.

Cálculo de la inversa de una matriz

Ejemplo.

Hallar, si existe, la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Buscamos $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A.B = B.A = I_3$.

$$A \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos estos tres sistemas lineales simultáneamente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica $A.B = I_3$.

Además, podemos comprobar que vale $B.A = I_3$.

$\Rightarrow A.B = B.A = I_3$, es decir $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cómo decidir si $A \in K^{n\times n}$ es inversible y hallar su inversa:

- Armar la matriz $(A \mid I_n)$ en $K^{n\times 2n}$.
  Esto corresponde a plantear $A.B = I_n$ con $B \in K^{n\times n}$, considerar n sistemas lineales igualando columna a columna, y escribir la matriz ampliada para resolverlos simultáneamente.
- Si al escalonar la matriz no aparece ningún 0 en la diagonal, se sigue haciendo operaciones de filas hasta llegar a $(I_n \mid B)$. En este caso, A es inversible y $A^{-1} = B$.
- Si al escalonar la matriz aparece algún 0 en la diagonal, entonces A no es inversible.
  En efecto, en este caso el sistema homogéneo $A.x = 0$ tiene solución no trivial. Pero si A es inversible,
  $x = A^{-1}.A.x = A^{-1}.0 = 0$, contradicción.