Álgebra Lineal - Clase 18

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Producto interno.
- Norma y distancia.
- Ortogonalidad.
- Matriz de un producto interno.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 8.

Producto interno

En $\mathbb{R}^n$, tenemos el producto escalar o producto interno canónico:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Nociones geométricas asociadas:

- Ortogonalidad: $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $\mathrm{v} \cdot \mathrm{w} = 0$
- Distancia: dados P y Q en $\mathbb{R}^n$,
  $d(P, Q) = ||Q - P|| = \sqrt{(Q - P) \cdot (Q - P)}$.

Objetivo: generalizarlo a otros espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

En todo lo que sigue, V será un e.v. sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$.

Definición.

Un producto interno sobre V es una función $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ (respectivamente $\mathbb{C}$) que cumple:

i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), y $v, w, z \in V$
   - $\Phi(v + w, z) = \Phi(v, z) + \Phi(w, z)$
   - $\Phi(\alpha.v, z) = \alpha.\,\Phi(v, z)$

ii) $\Phi(v, w) = \overline{\Phi(w, v)}\ \ \forall\, v, w \in V$.
   ($\Rightarrow \forall v \in V$, $\Phi(v, v) = \overline{\Phi(v, v)}$, es decir, $\Phi(v, v) \in \mathbb{R}$.)

iii) $\Phi(v, v) > 0$ si $v \neq 0$.

A un espacio vectorial real (resp. complejo) provisto de un producto interno se lo llama un espacio euclídeo (resp. espacio unitario).

De i) y ii) se deduce que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), y $v, w, z \in V$ vale:

- $\Phi(v, w + z) = \overline{\Phi(w + z, v)} = \overline{\Phi(w, v) + \Phi(z, v)} =$
  $= \overline{\Phi(w, v)} + \overline{\Phi(z, v)} = \Phi(v, w) + \Phi(v, z)$.
- $\Phi(v, \alpha.w) = \overline{\alpha}\,.\Phi(v, w)$.

Ejemplos.

- Producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$:
  $\Phi((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.
- Producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$:
  $\Phi((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = x_1 \overline{y}_1 + \cdots + x_n \overline{y}_n$.
- $\Phi : \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}$, $\Phi(A, B) = \mathrm{tr}(A.B^*)$,
  donde $B^* \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es la matriz transpuesta conjugada de B,
  es decir, $(B^*)_{ij} = \overline{B_{ji}}$.
- Si $a < b \in \mathbb{R}$ y $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ / \ f$ continua$\}$,
  $\Phi : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$, $\Phi(f, g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\, dx$.

- $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
  $\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + k.\, x_2 y_2$
  es un producto interno $\iff k > 1$.

  i) y ii) valen $\forall k \in \mathbb{R}$. Veamos cuándo vale iii).

  $$\begin{aligned} \Phi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + k x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + (k-1) x_2^2 \\ &= \underbrace{(x_1 - x_2)^2}_{\geq 0} + (k-1)\underbrace{x_2^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

  Si $k > 1$, $\Phi(v, v) \geq 0\ \forall v \in \mathbb{R}^2$, y vale
  $\Phi(v, v) = 0 \iff x_1 - x_2 = 0$ y $x_2 = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$.
  $\Rightarrow \Phi(v, v) > 0\ \forall v \neq 0$.

  Si $k \leq 1$, para $v = (1, 1)$ vale $\Phi(v, v) = k - 1 \leq 0$
  $\Rightarrow \Phi$ no es un producto interno.

Notación.

Si Φ es un producto interno en un $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$-e.v. V, escribiremos $\Phi(v, w) = \langle v, w \rangle$ y diremos que $(V, \langle , \rangle)$ es un e.v. con producto interno.

Norma de un vector

Definición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con producto interno y sea $v \in V$. Se define la norma de v asociada a $\langle , \rangle$ como $\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Propiedades de la norma.

i) $\forall v \in V$, $\|v\| \geq 0$, y vale $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) y $v \in V$, $\|\alpha.v\| = |\alpha|. \|v\|$.

iii) Desigualdad de Cauchy-Schwartz:
$\forall v, w \in V$, $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|. \|w\|$.

iv) Desigualdad triangular:
$\forall v, w \in V$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Demostración.

i) Por la propiedad iii) de p.i.

ii) $\|\alpha.v\|^2 = \langle \alpha.v, \alpha.v \rangle = \alpha.\overline{\alpha}.\langle v, v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2$.

iii) Desigualdad de Cauchy-Schwartz:
$\forall v, w \in V,\ |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|.\|w\|$.

Si $w = 0$ ✓. Si $w \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w,\ v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \right\rangle \\
&= \left\langle v, v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \right\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} \left\langle w, v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, w \right\rangle \\
&= \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=\|v\|^2} - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2} \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} \underbrace{\langle w, v\rangle}_{=\overline{\langle v, w\rangle}} + \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\, \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2}\, \underbrace{\langle w, w\rangle}_{=\|w\|^2} \\
&= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow |\langle v, w\rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$.

iv) Desigualdad triangular: $\forall v, w \in V$, $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w,\ v+w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\,|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\,\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$ $\square$

Identidades de polarización.

i) Si $(V, \langle,\rangle)$ es un $\mathbb{R}$-e.v. con p.i., $\forall v, w \in V$,
$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2$.

ii) Si $(V, \langle,\rangle)$ es un $\mathbb{C}$-e.v. con p.i., $\forall v, w \in V$,
$\langle v,w\rangle = \frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2 + \frac{i}{4}\|v+iw\|^2 - \frac{i}{4}\|v-iw\|^2$.

Distancia

Definición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-(o $\mathbb{C}$-) e.v. con p.i. Se define $d : V \times V \to \mathbb{R}$ como $d(v, w) = \|v - w\|$.
Dados $v, w \in V$ se dice que $d(v, w)$ es la distancia entre v y w.

Propiedades.

i) $d(v, w) \geq 0 \ \forall v, w \in V$.

ii) $d(v, w) = 0 \iff v = w$.

iii) $d(v, w) = d(w, v) \ \forall v, w \in V$.

iv) $d(v, z) \leq d(v, w) + d(w, z) \ \forall v, w, z \in V$.

Ángulo y ortogonalidad

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo y sean $v, w \in V$ no nulos.
$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|.\|w\|$ (Cauchy-Schwartz) $\Rightarrow -1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|.\|w\|} \leq 1$.

Definición.
Se define el ángulo entre v y w no nulos como el único $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|.\|w\|}$.

Teorema del coseno: si α es el ángulo entre v y w, entonces

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\cos(\alpha)\|v\|\|w\| + \|w\|^2. \end{aligned}$$

Definición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$-e.v. con p.i.
$v, w \in V$ se dicen ortogonales (o perpendiculares) si $\langle v, w\rangle = 0$.

$v, w \in V$ ortogonales $\Rightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (Pitágoras).

Matriz de un producto interno

Definición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-(ó $\mathbb{C}$-) e.v. de dimensión finita con p.i. y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

Se define la matriz del producto interno $\langle , \rangle$ en la base B como la matriz $|\langle , \rangle|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (resp. $\mathbb{C}^{n\times n}$) tal que

$$(|\langle , \rangle|_B)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle \ \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Ejemplos.

- Si $\langle , \rangle$ es el p.i. canónico en $\mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$) y E es la base canónica, $|\langle , \rangle|_E = I_n$.
- Para el p.i. definido en $\mathbb{R}^2$ por
  $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + k\, x_2y_2 \qquad (k > 1)$,
  $|\langle , \rangle|_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$.

Observación.

Si A es la matriz de un producto interno, entonces $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ $\forall i, j$.

No vale la vuelta: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $A_{ij} = \overline{A}_{ji}$ $\forall i, j$.

Si fuera la matriz de un producto interno en una base $B = \{v, w\}$, entonces $\langle v, v \rangle = A_{11} = 0$. Abs!

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$-e.v. de dimensión finita con p.i. Sea B una base de V. Para cada $v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = (v)_B . |\langle , \rangle|_B . \overline{(w)_B^t}$.

Demostración.

Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $(v)_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(w)_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$,

$$\langle v, w \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big\langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j \rangle \Big).$$

$$(v)_B . |\langle , \rangle|_B . \overline{(w)_B^t} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(|\langle , \rangle|_B \overline{(w)_B^t} \Big)_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j \rangle \overline{\beta_j} \Big).$$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle = (v)_B . |\langle , \rangle|_B . \overline{(w)_B^t}$. $\square$

Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. Se dice que $\{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$. El conjunto se dice ortonormal si es ortogonal y $\|v_i\| = 1 \ \forall 1 \leq i \leq r$.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) con el p.i. canónico, la base canónica es un conjunto ortonormal:
   - $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.
   - $\|e_i\|^2 = \langle e_i, e_i \rangle = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n$.
2. En $\mathbb{R}^2$ con el p.i. canónico, $\{(1,1), (1,-1)\}$ es un conjunto ortogonal, pero no es ortonormal:
   - $\langle (1,1), (1,-1) \rangle = 0$.
   - $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \neq 1$ y $\|(1,-1)\| = \sqrt{2} \neq 1$.

   Normalizando los vectores, obtenemos un conjunto ortonormal: $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$.

Observación.

Si $(V, \langle , \rangle)$ es un e.v. de dimensión n con p.i. y B una base de V,

- B base ortogonal de V para $\langle , \rangle \iff |\langle , \rangle|_B$ diagonal.
- B base ortonormal de V para $\langle , \rangle \iff |\langle , \rangle|_B = I_n$.

Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal (bon) de V, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, v_i$, entonces:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \overline{\beta_i} \quad \text{ y } \quad \|v\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. Si $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ es ortogonal y $v_i \neq 0\ \forall 1 \leq i \leq r$, entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es l.i.

Demostración.

Supongamos que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0$. Para cada $1 \leq j \leq r$,

$$0 = \langle 0, v_j\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j . \|v_j\|^2$$

$v_j \neq 0 \Rightarrow \|v_j\| \neq 0 \Rightarrow \alpha_j = 0.$ $\square$

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i.

Si $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq 0$ $\forall 1 \leq i \leq r$ y $v \in < v_1, \dots, v_r >$, entonces $v = \sum_{j=1}^{r} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} . v_j$.

En particular, si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto ortonormal y $v \in < v_1, \dots, v_r >$, entonces $v = \sum_{j=1}^{r} \langle v, v_j \rangle . v_j$.

Demostración.

Si $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$, para cada $1 \leq j \leq r$,

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle = \alpha_j \, \|v_j\|^2$$

$$v_j \neq 0 \Rightarrow \alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}. \qquad \square$$

Corolario.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión n y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$.

- Si B es una base ortogonal de V, entonces $\forall v \in V$, $(v)_B = \left(\frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}, \dots, \frac{\langle v, v_n \rangle}{\|v_n\|^2}\right)$.
  Entonces, $\forall v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i \rangle . \overline{\langle w, v_i \rangle}}{\|v_i\|^2}$.
- Si B es una base ortonormal de V, entonces $\forall v \in V$, $(v)_B = (\langle v, v_1 \rangle, \dots, \langle v, v_n \rangle)$.
  Entonces, $\forall v, w \in V$, $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle . \overline{\langle w, v_i \rangle}$.