Álgebra Lineal - Clase 25

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Formas bilineales.
- Matriz de una forma bilineal.
- Formas bilineales simétricas. Diagonalización.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 10.

Formas bilineales

Definición.

Sea V un K-e.v. Una función $\Phi : V \times V \to K$ es una forma bilineal si:

i) $\Phi(v + v', w) = \Phi(v, w) + \Phi(v', w) \ \ \forall v, v', w \in V$.

ii) $\Phi(\lambda v, w) = \lambda.\Phi(v, w) \ \ \forall \lambda \in K, \forall v, w \in V$.

iii) $\Phi(v, w + w') = \Phi(v, w) + \Phi(v, w') \ \ \forall v, w, w' \in V$.

iv) $\Phi(v, \lambda.w) = \lambda.\Phi(v, w) \ \ \forall \lambda \in K, \forall v, w \in V$.

Ejemplos.

- Los productos internos reales son formas bilineales.
- Sean $f : V \to K$ y $g : V \to K$ transformaciones lineales en un K-e.v. V. Entonces $\Phi : V \times V \to K$ definida por $\Phi(v, w) = f(v).\, g(w)$ es una forma bilineal.
- Sea $A \in K^{n \times n}$. Entonces $\Phi : K^n \times K^n \to K$, $\Phi(x, y) = x.\, A.\, y^t$, es una forma bilineal.

Matriz de una forma bilineal

Definición.
Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal. Se define la matriz de Φ en la base B como

$$(|\Phi|_B)_{ij} = \Phi(v_i, v_j) \qquad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Ejemplo.
Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por
$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_2$.

$$|\Phi|_E = \begin{pmatrix} \Phi(e_1, e_1) & \Phi(e_1, e_2) \\ \Phi(e_2, e_1) & \Phi(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observar que

$$\begin{aligned} (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (x_1\ x_2). \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + 3y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2 \end{aligned}$$

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Si $\Phi : V \times V \to K$ es una forma bilineal, entonces $\forall x, y \in V$, $\Phi(x, y) = (x)_B . |\Phi|_B . (y)^t_B$.

Más aún, si $A \in K^{n\times n}$ satisface $\forall x, y \in V$, $(x)_B.A.(y)^t_B = \Phi(x, y)$,
$\Rightarrow \Phi(v_i, v_j) = (v_i)_B . A. (v_j)^t_B = e_i . A. e^t_j = A_{ij}\ \forall 1 \leq i, j \leq n$
$\Rightarrow A = |\Phi|_B$.

Proposición (cambios de base).

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sean B_1 y B_2 bases de V. Si $\Phi : V \times V \to K$ es una forma bilineal, entonces

$$|\Phi|_{B_2} = C(B_2, B_1)^t . |\Phi|_{B_1} . C(B_2, B_1).$$

Demostración.

Sea $A = C(B_2, B_1)^t.|\Phi|_{B_1}.C(B_2, B_1)$.

Basta verificar que $(x)_{B_2}.A.(y)^t_{B_2} = \Phi(x, y)\ \forall x, y \in V$.

$$\begin{aligned}
(x)_{B_2}.A.(y)^t_{B_2} &= (x)_{B_2}.C(B_2, B_1)^t.|\Phi|_{B_1}.C(B_2, B_1).(y)^t_{B_2} \\
&= \left(C(B_2, B_1).(x)^t_{B_2}\right)^t.|\Phi|_{B_1}.\left(C(B_2, B_1).(y)^t_{B_2}\right) \\
&= (x)_{B_1}|\Phi|_{B_1}(y)^t_{B_1} = \Phi(x, y). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo.

Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.
Calcular $|\Phi|_B$ para $B = \{(3, -2), (-1, 1)\}$.

$$\begin{aligned}
|\Phi|_B &= C(B, E)^t.\,|\Phi|_E.\,C(B, E) \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Formas bilineales simétricas

Definición.
Una forma bilineal $\Phi : V \times V \to K$ se dice simétrica si $\Phi(x,y) = \Phi(y,x) \; \forall \, x, y \in V$.

Ejemplo.
Un producto interno real es una forma bilineal simétrica.

Proposición.
Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal en un K-e.v. V de dimensión finita.
Φ es simétrica $\iff$ $|\Phi|_B$ es simétrica para B base de V.

Definición.
Sea $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Se define el núcleo de Φ como $\mathrm{Nu}(\Phi) = \{x \in V \; / \; \Phi(x,y) = 0 \; \forall y \in V\}$.

$\mathrm{Nu}(\Phi)$ es un subespacio de V.
Si $\mathrm{Nu}(\Phi) \neq \{0\}$ se dice que Φ es degenerada.

Observación.
Un producto interno en un $\mathbb{R}$-e.v. es una forma bilineal simétrica no degenerada.

Ejemplo.
Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica definida por

$$\Phi(x, y) = (x_1 \ \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$x \in \mathrm{Nu}(\Phi) \iff (x_1 + 2x_2 \ \ 2x_1 + 4x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + 4x_2 & = & 0 \end{cases} \iff x_1 + 2x_2 = 0.$$

$\Rightarrow \mathrm{Nu}(\Phi) = < (-2, 1) >$.
Φ es una forma bilineal simétrica degenerada.

Si V es un K-e.v. de dimensión finita y $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica, se define el rango de Φ como

$$\mathrm{rg}(\Phi) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Nu}(\Phi)).$$

Sea B una base de V (dimensión finita).

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nu}(\Phi) &\iff (x)_B . |\Phi|_B . (y)_B^t = 0 \ \forall y \in V \\ &\iff (x)_B . |\Phi|_B = 0 \iff |\Phi|_B^t . (x)_B^t = 0 \\ &\iff |\Phi|_B . (x)_B^t = 0 \\ &\iff (x)_B \in \mathrm{Nu}(|\Phi|_B) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Nu}(\Phi) = \dim \mathrm{Nu}(|\Phi|_B) = \dim(V) - \mathrm{rg}(|\Phi|_B)$.

$\Rightarrow \mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(|\Phi|_B)$.

Diagonalización de formas bilineales simétricas

Proposición.

Sea K un cuerpo tal que $2 \neq 0$ en K. Sean V un K-e.v. de dimensión finita y $\Phi : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Existe una base B de V tal que $|\Phi|_B$ es diagonal.

Demostración.

Sea B_0 una base de V. Supongamos que $|\Phi|_{B_0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{12} & & \\ \vdots & M & \\ a_{1n} & & \end{pmatrix}$,

donde $M \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ es simétrica.

1. Si $a_{11} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & M & \\ a_{1n} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$ con M' simétrica. Se sigue con M'.

2. Si $a_{1i} = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n$:

$$|\Phi|_{B_0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & M & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$ y basta diagonalizar M.

3. Si $a_{11} = 0$ y existe i, $2 \leq i \leq n$, tal que $a_{1i} \neq 0$:

   i) Si $a_{ii} \neq 0$, se multiplica a izquierda y a derecha por la matriz elemental P^{1i}.
   $P^{1i}.|\Phi|_{B_0}.P^{1i}$ es simétrica y $(P^{1i}.|\Phi|_{B_0}.P^{1i})_{11} = a_{ii}$.
   $\Rightarrow$ estamos en el primer caso.

   ii) Si $a_{ii} = 0$, sea $C^{(i)} = I_n + E^{i1} \in K^{n\times n}$.
   [Al multiplicar una matriz a derecha por $C^{(i)}$, a la columna 1 se le suma la columna i y, al multiplicar a izquierda por $(C^{(i)})^t$, a la fila 1 se le suma la fila i.]

   $((C^{(i)})^t.|\Phi|_{B_0}.C^{(i)})_{11} = 2a_{1i}$ y la matriz es simétrica
   $\Rightarrow$ estamos en el primer caso, porque $2 \neq 0$ en K. $\square$

Ejemplos.

En cada caso, hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|\Phi|_B$ sea diagonal.

(1) $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- $a_{11} = 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$ (caso 3.i) de la demostración):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $a_{11} \neq 0$ (caso 1. de la demostración):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- diagonalizamos $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (caso 1.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(B,E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \{(0,1,0),(1,-1,0),(1,-1,1)\} \text{ y } |\Phi|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resumen:

$$|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F_1 \leftrightarrow F_2, \; C_1 \leftrightarrow C_2$ $\qquad$ $F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F_2 - F_1 \to F_2, \; C_2 - C_1 \to C_2$ $\qquad$ $F_2 - F_1 \to F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F_3 + F_2 \to F_3, \; C_3 + C_2 \to C_3$ $\qquad$ $F_3 + F_2 \to F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |\Phi|_B \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = C(B,E)^t$$

(2) $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- $a_{11} = 0$, $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} = 0$ (caso 3. ii) de la demostración):
  $C^{(2)} = I_3 + E^{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(C^{(2)})^t . |\Phi|_E . C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $a_{11} \neq 0$ (caso 1.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- diagonalizamos $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (caso 1.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $C(B,E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Formas bilineales simétricas reales

Definición.

Sea V un $\mathbb{R}$-e.v. Una forma bilineal simétrica $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ se dice:

i) definida positiva si $\Phi(x, x) > 0 \ \forall x \neq 0$.

ii) semidefinida positiva si $\Phi(x, x) \geq 0 \ \forall x \in V$.

iii) definida negativa si $\Phi(x, x) < 0 \ \forall x \neq 0$.

iv) semidefinida negativa si $\Phi(x, x) \leq 0 \ \forall x \in V$.

v) indefinida si no vale ninguna de las condiciones anteriores.

Ejemplos.

i) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ es definida positiva.

ii) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1 y_1$ es semidefinida positiva.

iii) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ es definida negativa.

iv) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = -x_1 y_1$ es semidefinida negativa.

v) $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$, $\Phi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ es indefinida.

Teorema.

Sea V un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión n y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Existe una base B de V tal que

$$(|\Phi|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq r, j = i \\ -1 & \text{si } r+1 \leq i \leq s, j = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir, $|\Phi|_B$ es diagonal con 1, -1 y 0 en la diagonal.

Demostración.

Φ simétrica, B_1 una base de $V \Rightarrow |\Phi|_{B_1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica
$\Rightarrow \exists O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que

$$O^t . |\Phi|_{B_1} . O = \begin{pmatrix} \alpha_1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && \alpha_r &&&&& \\ &&& \beta_{r+1} &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& \beta_s && \\ &&&&&& 0 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha_i > 0,\ \beta_i < 0.$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} & \text{si } 1 \leq i \leq r,\ j = i \\ \frac{1}{\sqrt{-\beta_i}} & \text{si } r+1 \leq i \leq s,\ j = i \\ 1 & \text{si } i = j > s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\Rightarrow A.O^t.\,|\Phi|_{B_1}.\,O.A$ tiene la forma del enunciado del teorema.

O y A inversibles $\Rightarrow O.A$ inversible.
$\Rightarrow \exists B$ base de V tal que $O.A = C(B, B_1)$.

$A.O^t = A^t.O^t = (O.A)^t = C(B, B_1)^t$.

$\Rightarrow |\Phi|_B = C(B, B_1)^t.\,|\Phi|_{B_1}.\,C(B, B_1) = A.O^t.\,|\Phi|_{B_1}.\,O.A.$ $\square$

Observación.
Las cantidades de 1, -1 y 0 en la matriz diagonal $|\Phi|_B$ están unívocamente determinadas por Φ (no dependen de la base B).

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que $|\Phi|_B$ es diagonal como en el teorema.
$s = \mathrm{rg}(|\Phi|_B) = \dim V - \dim \mathrm{Nu}(\Phi)$ es la cantidad total de 1 y -1 y $\mathrm{Nu}(\Phi) = < v_{s+1}, \ldots, v_n >$.

- V^+ subespacio de V de dimensión máxima tal que $\Phi_{|_{V^+ \times V^+}}$ es definida positiva.
- V^- subespacio de V de dimensión máxima tal que $\Phi_{|_{V^- \times V^-}}$ es definida negativa.

Afirmación: V^+, V^- y $\mathrm{Nu}(\Phi)$ están en suma directa.

$S = < v_1, \ldots, v_r > \Rightarrow \Phi_{|_{S \times S}}$ es definida positiva.
V^+ tiene dimensión máxima entre los subespacios donde Φ es definida positiva $\Rightarrow \dim V^+ \geq \dim S = r$.

$T = < v_{r+1}, \ldots, v_s > \Rightarrow \Phi_{|_{T \times T}}$ definida negativa.
$\Rightarrow \dim V^- \geq \dim T = s - r$.

$$
\begin{aligned}
n &\geq \dim(V^+ \oplus V^- \oplus \mathrm{Nu}(\Phi)) = \dim V^+ + \dim V^- + \dim \mathrm{Nu}(\Phi) \\
&\geq r + (s - r) + (n - s) = n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow V^+ \oplus V^- \oplus \mathrm{Nu}(\Phi) = V$, $\dim V^+ = r$ y $\dim V^- = s - r$.

V^+, V^- y $\mathrm{Nu}(\Phi)$ están en suma directa:

i) $V^+ \cap (V^- + \mathrm{Nu}(\Phi)) = \{0\}$:
Sea $x \in V^+$, $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in V^-$ y $x_2 \in \mathrm{Nu}(\Phi)$.

$$\begin{aligned} \Phi(x,x) &= \Phi(x_1 + x_2, x_1 + x_2) \\ &= \Phi(x_1, x_1) + 2\,\Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_2) = \Phi(x_1, x_1) \end{aligned}$$

$x_2 \in \mathrm{Nu}(\Phi) \Rightarrow \Phi(x_1, x_2) = \Phi(x_2, x_2) = 0$.
$x_1 \in V^- \Rightarrow \Phi(x_1, x_1) \leq 0$
$x \in V^+ \Rightarrow \Phi(x,x) > 0$ o $x = 0$. Luego, $x = 0$.

ii) $V^- \cap (V^+ + \mathrm{Nu}(\Phi)) = \{0\}$: análogo.

iii) $\mathrm{Nu}(\Phi) \cap (V^+ + V^-) = \{0\}$:
$x \in \mathrm{Nu}(\Phi)$, $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in V^+$, $x_2 \in V^-$.

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(x, x_1) = \Phi(x_1 + x_2, x_1) = \Phi(x_1, x_1) + \Phi(x_2, x_1), \\ 0 &= \Phi(x, x_2) = \Phi(x_1 + x_2, x_2) = \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_2), \end{aligned}$$

$\Phi(x_1, x_2) = \Phi(x_2, x_1) \Rightarrow \Phi(x_1, x_1) = \Phi(x_2, x_2)$.
$x_1 \in V^+$ y $x_2 \in V^- \Rightarrow \Phi(x_1, x_1) \geq 0$ y $\Phi(x_2, x_2) \leq 0$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x = x_1 + x_2 = 0$