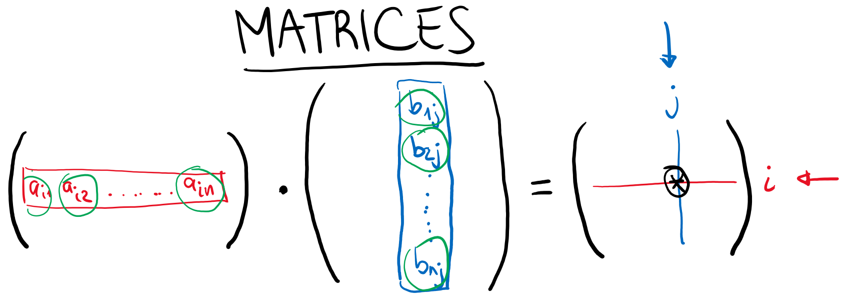
MATRICES



$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{A\cdot B}$$

$$(A\cdot B)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}$$

EJEMPLO 1: Matrices canónicas

$K^{n\times n}$ es un K-e.v. de dimensión n^2.
Las matrices que tienen un 1 y el resto de las entradas iguales a 0 forman una base.
Para $1\leq p,q\leq n$, definimos $E^{pq}\in K^{n\times n}$ como sigue:

$$(E^{pq})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=p,\ j=q \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E^{pq}\cdot E^{rs} = ??$$

$$(E^{pq}\cdot E^{rs})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (E^{pq})_{ik}(E^{rs})_{kj}$$

- si $i\neq p$, entonces $(E^{pq})_{ik}=0$ $\forall k=1,2,\ldots,n$, y por lo tanto la suma es 0.
- si $j\neq s$, ocurre algo similar.
- Sólo falta considerar

$$(E^{pq}\cdot E^{rs})_{ps} = \sum_{k=1}^{n} (E^{pq})_{pk}(E^{rs})_{ks}$$

$(E^{pq})_{pk}=0$ si $k\neq q$, entonces el único término que queda es

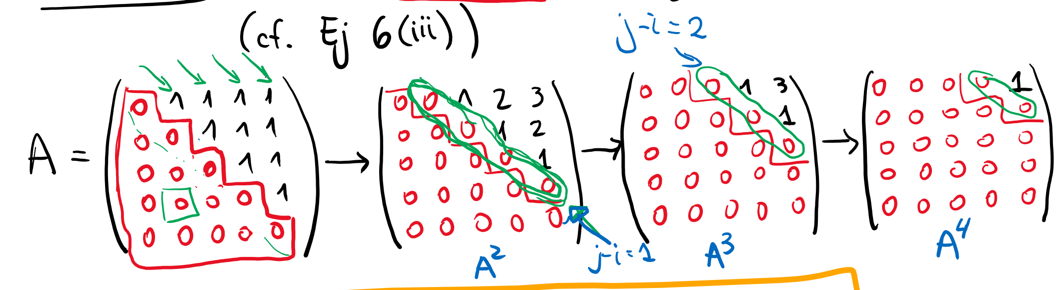
$$\underbrace{(E^{pq})_{pq}}_{=1}\cdot(E^{rs})_{qs} = \begin{cases} 1 & \text{si } q=r \\ 0 & \text{si } q\neq r \end{cases}$$

Conclusión:

$$E^{pq}\cdot E^{rs} = \begin{cases} E^{ps} & \text{si } q=r \\ 0 & \text{si } q\neq r \end{cases}$$

(matriz nula)

EJEMPLO 2: Matrices estrictamente triangulares (cf. Ej 6(iii))



$a_{ij}=0$ si $i\geq j$ (si $j-i\leq 0$)

Probar que: $\boxed{A\in K^{n\times n} \text{ estrictamente triangular superior} \Rightarrow A^n=0}$

Idea: A^{k+1} tiene una "diagonal de ceros" más que A^k

$$P(k):\ (A^k)_{ij}=0 \quad \text{si } j-i\leq k-1$$

Caso base: $A_{ij}=0$ si $j-i\leq 1-1=0$ ✓
(A es estrictamente triangular superior)

paso inductivo: supongamos que $(A^k)_{ij}=0$ si $j-i\leq k-1$.

$$A^{k+1}=A^k\cdot A \qquad (A^{k+1})_{ij} = \boxed{\sum_{r=1}^{n}(A^k)_{ir}\cdot A_{rj}}$$

queremos ver que si $j-i\leq (k+1)-1=k$, esa coordenada es 0.

para que $(A^k)_{ir}\boxed{A_{rj}}\neq 0$, necesitamos que $\boxed{\begin{array}{l} r-i\geq k \\ j-r\geq 1\end{array}}$ (HI)

$$\overline{\quad j-i\geq k+1 \quad}$$

CONCLUSIÓN: si $j-i\leq k$, $(A^{k+1})_{ij}=0$ ✓