ADJUNTA DE UNA T.L.

RECORDAR: V EVPI, $\dim V < \infty$. DADA $f: V \to V$ LA ADJUNTA DE f ES LA TL $f^*: V \to V$ "DADA" POR

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in W$$

EJEMPLOS:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-2y+z,\ y-z,\ 2x+3z)$.

$$\langle f(x,y,z), (u,v,w) \rangle = (x-2y+z)u + (y-z)v + (2x+3z)w$$

$$= x(u+2w) + y(-2u+v) + z(u-v+3w)$$

$$= \langle (x,y,z), \underbrace{(u+2w, -2u+v, u-v+3w)}_{= f^*(u,v,w)} \rangle$$

NOTAR: $[f^*]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^* = [f]_E^*$

$\rightsquigarrow$ DE HECHO $[f^*]_B = [f]_B^* \quad \forall B$ BON

2) SEA $S: \ell^2 \to \ell^2$, $a \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$.

$$\langle S(a), b\rangle = \langle (0, a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots)\rangle$$

$$= a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots = \langle a, \underbrace{(b_2, b_3, \dots)}_{S^*(b)}\rangle$$

$S^*(b)$; ¡EXISTE!

3) SEA $V = \{a \in \ell^2 : (\exists m_0)\ a_m = 0 \ \forall m \geq m_0\}$

SI $e^i \in V$ ESTÁ DADA POR

$$(e^i)_j = \delta_{ij},$$

ENTONCES $\{e^i : i \geq 1\}$ ES BON DE V.

SEA $f : V \to V$, $e^i \mapsto \sum_{k \leq i} e^i = (1, \dots, \overset{i}{1}, 0, 0, \dots)$.

SUPONGAMOS QUE $\exists f^* : V \to V$. FIJO k, Y TOMO $i \geq k$. ASÍ

- $\langle f(e^i), e^k\rangle = 1$
- $\langle e^i, f^*(e^k)\rangle = 0$, SI $i \gg 0$ ¡ABS! //

PROBLEMA: V EVPI CON $\dim V < \infty$, $f : V \to V$ /

- f NILPOTENTE
- f NORMAL (ie, $f \circ f^* = f^* \circ f$)

PROBAR QUE $f = 0$.

$(\forall x)\ f(x)=0$ sii $0=\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, f^* f(x)\rangle$

$\rightsquigarrow$ BVQ $f^* \circ f = 0$

como $f^*\circ f = f\circ f^*$, $(\forall m)\ (f^*\circ f)^m = (f^*)^m \circ f^m$

$\rightsquigarrow$ $f^*\circ f$ es nilpotente; sea
f NILP

$m=\min\{m\geq 1 : (f^*\circ f)^m = 0\}$ (QVQ $m=1$)

si $m>1$,

$$\langle (f^*\circ f)^{m-1}(x), (f^*\circ f)^{m-1}(x)\rangle \overset{f \text{ NORMAL}}{=} \langle x, \underbrace{(f^*\circ f)^{2m-2}(x)}_{=0,\ \text{pues } 2m-2\geq m}\rangle$$

$\rightsquigarrow (f^*\circ f)^{m-1}=0$, ¡ABS!

RECORDAR: V EVPI con $\dim V<\infty$, $f: V\to V$ es AUTOADJUNTA si $f=f^*$.

EJEMPLOS:

1) $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $(z,w)\mapsto(2z-3iw, 3iz+2w)$.

$\langle f(z,w), (u,v)\rangle = (2z-3iw)\bar{u} + (3iz+2w)\bar{v}$

$= z\underbrace{(2\bar{u}+3i\bar{v})}_{=\overline{2u-3iv}} + w\underbrace{(-3i\bar{u}+2\bar{v})}_{=\overline{3iu+2v}}$

$$= \langle (z,w), \overbrace{(2u - 3iv, 3iu + 2v)}^{f^*(u,v) = f(u,v)} \rangle$$

$\rightsquigarrow f$ ES AADJ.

NOTAR: SI $A = [f]_E = \begin{pmatrix} 2 & -3i \\ 3i & 2 \end{pmatrix}$, SE TIENE QUE $A^* = A$ ($\underset{E \text{ BON}}{\Leftrightarrow}$ f AADJ)

2) $V = C([0,1])$. $h \in V$ FIJA,

$$M_h : V \to V, \quad f \mapsto fh$$

ASÍ, $\langle M_h(f), g \rangle = \int_0^1 (fh) \cdot g = \int_0^1 f(hg)$

$= \langle f, M_h(g) \rangle$ $\rightsquigarrow M_h$ ES AADJ

3) SEA $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ BIY CON $\sigma^2 = 1_{\mathbb{N}}$. SEA

$$f_\sigma : \ell^2 \to \ell^2, \quad a \mapsto (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots).$$

ASÍ, $\langle f_\sigma(a), b \rangle = \sum_{i \geq 1} a_{\sigma(i)} b_i$

$\underset{\text{REORDENO}}{=} \sum_{j \geq 1} a_j b_{\sigma^{-1}(j)} = \langle a, f_{\underbrace{\sigma^{-1}}_{=\sigma, \text{ PUES } \sigma^2 = 1_{\mathbb{N}}}}(b) \rangle$

$\rightsquigarrow f_\sigma$ ES AADJ

RECORDAR: SI f ES AADJ $\exists B$ BON DE AVECS DE f, Y $\lambda \in \mathbb{R}$ $\forall \lambda$ AVAL DE f

PROBLEMA: SEA f AADJ. PROBAR QUE SON EQUIV:

i) $\langle f(v), v\rangle \geq 0 \quad \forall v$ "f ES NO NEGATIVA"

ii) $\lambda \geq 0 \quad \forall \lambda$ AVAL DE f

iii) $(\exists g \text{ AADJ}) \quad g^2 = f$

iv) $(\exists g) \quad g \circ g^* = f$ //

i => ii) SI $f(v) = \lambda v$ CON $v \neq 0$,

$$0 \leq \langle f(v), v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{>0} \Rightarrow 0 \leq \lambda$$

ii => iii) $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ES BON CON $f(v_i) = \lambda_i v_i$,

DEFINO g: $\quad g(v_i) = \sqrt{\lambda_i}\, v_i$

$\rightsquigarrow \quad g^2 = f$, Y g ES AADJ, PUES $[g]_B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix}$.

iii => iv) PUES $g^* = g$

iv => i) $\langle f(v), v\rangle = \langle g \circ g^*(v), v\rangle$

$$= \langle g^*(v), g^*(v)\rangle \geq 0 \quad \forall v$$ //