Álgebra Lineal - Clase 9

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Espacio dual de un K-espacio vectorial (repaso).
- Anulador de un subespacio.
- Doble dual.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 4.

Espacio dual (repaso)

Sea V un K-e.v. El espacio dual de V se define como

$V^* = \{f\colon V \to K / f$ es transformación lineal$\}$.

Si V es de dimensión finita:

- $\dim(V^*) = \dim(V)$.
- $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $V \rightsquigarrow B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ base de V^* tal que $\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ base dual de B.
- $\forall v \in V$, $(v)_B = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$.
- $\forall \varphi \in V^*$, $(\varphi)_{B^*} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$.
- $\mathcal{B}$ base de $V^* \Rightarrow \exists$ una única base B de V tal que $B^* = \mathcal{B}$.

Ejemplo.

Dados $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, hallar un polinomio $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tal que $P(0) = c_0$, $P(1) = c_1$ y $P(2) = c_2$.

- $B^* = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$,
  $\varepsilon_0(P) = P(0)$, $\varepsilon_1(P) = P(1)$ y $\varepsilon_2(P) = P(2)$ $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$.
- $B = \{P_0, P_1, P_2\}$,
  $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ y $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$.

Para $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$(P)_B = (\varepsilon_0(P), \varepsilon_1(P), \varepsilon_2(P)) = (P(0), P(1), P(2)).$$

$P(0) = c_0$, $P(1) = c_1$ y $P(2) = c_2 \iff (P)_B = (c_0, c_1, c_2)$

$$\begin{aligned} P &= c_0.P_0 + c_1.P_1 + c_2.P_2 \\ &= \frac{c_0}{2}(X-1)(X-2) - c_1 X(X-2) + \frac{c_2}{2}X(X-1). \end{aligned}$$

Es el único polinomio de grado menor o igual que 2 tal que $P(0) = c_0$, $P(1) = c_1$ y $P(2) = c_2$ (interpolador de Lagrange).

Anulador de un subespacio

Definición.
Sean V un K-espacio vectorial y S un subespacio de V.
Se llama anulador de S al conjunto
$S^\circ = \{f \in V^* \ / \ f(s) = 0 \ \forall s \in S\} = \{f \in V^* \ / \ S \subseteq \mathrm{Nu}(f)\}$.

Observación. S° es un subespacio de V^*.

- $0 \in S^\circ$. ✓
- $f, g \in S^\circ \Rightarrow f(s) = 0$ y $g(s) = 0 \ \forall s \in S$
  $\Rightarrow (f+g)(s) = f(s) + g(s) = 0 \ \forall s \in S$.
  Luego, $f + g \in S^\circ$.
- $\lambda \in K$ y $f \in S^\circ \Rightarrow (\lambda \cdot f)(s) = \lambda \cdot f(s) = \lambda \cdot 0 = 0 \ \forall s \in S$.
  Luego $\lambda \cdot f \in S^\circ$.

Proposición.

Sean V un K-e.v. de dimensión n y S un subespacio de V.
Entonces $\dim(S^\circ) = n - \dim(S)$.

Demostración.

Sean $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de S y $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V.
Sea $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\} \subset V^*$ la base dual de B.
$\forall r+1 \leq i \leq n$, $\varphi_i(v_1) = \cdots = \varphi_i(v_r) = 0 \Rightarrow \varphi_i(s) = 0 \ \forall s \in S$.
$\Rightarrow \{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\} \subseteq S^\circ$.
Veamos que $\{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\}$ es base de S°.

- Es l.i. por ser parte de una base de V^*.
- Genera S°: sea $g \in S^\circ$.
  $(g)_{B^*} = (g(v_1), \ldots, g(v_r), g(v_{r+1}), \ldots, g(v_n))$.
  $g \in S^\circ$ y $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset S \Rightarrow g(v_i) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq r$.
  $\Rightarrow (g)_{B^*} = (0, \ldots, 0, g(v_{r+1}), \ldots, g(v_n))$.
  $\Rightarrow g = \sum_{i=r+1}^{n} g(v_i)\varphi_i \Rightarrow g \in < \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n >$.

Luego, $\dim(S^\circ) = n - r = n - \dim(S)$. $\square$

Ejemplo.

Sea $S = <(1,1,0),(1-i,1,1)> \subseteq \mathbb{C}^3$. Hallar una base de S°.

Extendemos una base de S a una base de $\mathbb{C}^3$:
$B = \{(1,1,0),(1-i,1,1),(1,0,0)\}$.

$B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ base dual de $B \Rightarrow \{\varphi_3\}$ es base de S°.

$\varphi_3(1,1,0) = 0$, $\varphi_3(1-i,1,1) = 0$, $\varphi_3(1,0,0) = 1$
$\Rightarrow \varphi_3(x,y,z) = x - y + iz$.

Observar: $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - y + iz = 0\}$

Proposición.

Sean V un K-e.v. de dimensión n y S un subespacio de V.
Entonces $\{x \in V \,/\, f(x) = 0 \; \forall f \in S^\circ\} = S$.

Demostración.

Sea $T = \{x \in V \,/\, f(x) = 0 \; \forall f \in S^\circ\}$. Veamos que $T = S$.

$S \subset T$: si $x \in S$, $\forall f \in S^\circ$ vale $f(x) = 0$. Luego, $x \in T$.

Sea $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de S.
Si $S \subsetneq T$, $\exists x \in T$ tal que $x \notin S = < v_1, \dots, v_r >$.
$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r, x\}$ es l.i.
Extendemos a una base $B = \{v_1, \dots, v_r, x, v_{r+2}, \dots, v_n\}$ de V.
Si $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_n\}$ es la base dual de B,
$\varphi_{r+1}(v_1) = \cdots = \varphi_{r+1}(v_r) = 0$
$\Rightarrow \varphi_{r+1} \in S^\circ$.
$x \in T$ y $\varphi_{r+1} \in S^\circ \Rightarrow \varphi_{r+1}(x) = 0$ Abs! porque $\varphi_{r+1}(x) = 1$.
Luego, $S = T$. $\square$

Observación.

Sean V un K-e.v. de dimensión finita y S un subespacio de V. Si $S^\circ = < \varphi_1, \dots, \varphi_r >$, entonces $S = \{v \in V \ / \ \varphi_1(v) = 0, \dots, \varphi_r(v) = 0\}$.

$(\subseteq)$ ✓

$(\supseteq)$ Sea $v \in V$ tal que $\varphi_1(v) = 0, \dots, \varphi_r(v) = 0$.

$f \in S^\circ \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ tales que $f = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi_i$.

$$\Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi_i(v) = 0$$

$\{v \in V / \varphi_1(v) = 0, \dots, \varphi_r(v) = 0\} \subseteq \{v \in V / f(v) = 0 \ \forall f \in S^\circ\}$
$= S$

Ejemplo.

Hallar ecuaciones para $S = < (1,1,0), (1-i,1,1) > \subseteq \mathbb{C}^3$.

$S^\circ = \langle \varphi_3 \rangle$ con $\varphi_3(x,y,z) = x - y + iz$.

$\Rightarrow S = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 / x - y + iz = 0\}$.

Anulador de la suma y la intersección de subespacios

Proposición.

Sea V un K-e.v. de dimensión n y sean S y T subespacios de V.

1. $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.
2. $(S\cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$.

Demostración.

1. Sea $f \in V^*$.

$$\begin{aligned} f \in (S+T)^\circ \quad &\Longleftrightarrow \quad f(s+t)=0 \ \forall s\in S,\ \forall t \in T \\ &\Longleftrightarrow \quad f(s)=0 \ \forall s \in S \text{ y } f(t)=0 \ \forall t\in T \\ &\Longleftrightarrow \quad f \in S^\circ \cap T^\circ \end{aligned}$$

2. $S^\circ + T^\circ \subseteq (S\cap T)^\circ$:

   $f \in S^\circ + T^\circ \Rightarrow f = f_S + f_T$, con $f_S \in S^\circ$ y $f_T \in T^\circ$.
   $v \in S\cap T \Rightarrow f(v) = f_S(v) + f_T(v) = 0 + 0 = 0.$
   $\Rightarrow f \in (S\cap T)^\circ$.

$$
\begin{aligned}
\dim(S^\circ + T^\circ) &= \dim(S^\circ) + \dim(T^\circ) - \dim(S^\circ \cap T^\circ) \\
&= \dim(S^\circ) + \dim(T^\circ) - \dim\left((S+T)^\circ\right) \\
&= (n - \dim(S)) + (n - \dim(T)) - \\
&\qquad\qquad - (n - \dim(S+T)) \\
&= n - (\dim(S) + \dim(T) - \dim(S+T)) \\
&= n - \dim(S \cap T) \\
&= \dim\left((S \cap T)^\circ\right).
\end{aligned}
$$

Luego, $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$. $\square$

Observación.

Sea V un K-e.v. de dimensión n.

- $S = \{v \in V / \psi(v) = 0\}$, con $\psi \in V^* - \{0\} \Rightarrow S^\circ = <\psi>$.
    - $<\psi> \subset S^\circ$ ✓
    - $S = \mathrm{Nu}(\psi)$ y $\psi : V \to K$ no nula $\Rightarrow \dim(S) = n - 1$
      $\Rightarrow \dim(S^\circ) = 1 = \dim(<\psi>)$
- $S = \{v \in V / \psi_1(v) = 0, \ldots, \psi_r(v) = 0\}$ con $\psi_i \in V^* \Rightarrow$
  $S^\circ = <\psi_1, \ldots, \psi_r>$

  Por inducción en r.

  $r = 1$: ✓

  $r > 1$: $S = \bigcap_{i=1}^{r} S_i$ con $S_i = \{v \in V / \psi_i(v) = 0\}$ $\forall 1 \leq i \leq r$.

  $\Rightarrow S^\circ = \left(\bigcap_{i=1}^{r} S_i\right)^\circ = \left(\bigcap_{i=1}^{r-1} S_i\right)^\circ + (S_r)^\circ \overset{HI}{=}$
  $<\psi_1, \ldots, \psi_{r-1}> + <\psi_r> = <\psi_1, \ldots, \psi_r>$.

Ejemplo.
Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\}$ y
$T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$

- $S^\circ = <\psi_1, \psi_2>$, $\psi_1(x) = x_1 + x_2 - x_3$ y $\psi_2(x) = x_2 - x_4$.
- $T^\circ = <\psi_3, \psi_4>$, $\psi_3(x) = x_1 - x_3 + x_4$ y $\psi_4(x) = x_2 + x_3$.
- $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ = <\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4>$
- $(S + T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ = <\psi_3>$
  $S + T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$

Doble dual

Sea V un K-espacio vectorial.

$\rightsquigarrow V^* = \{\varphi : V \to K / \, \varphi \text{ es transformación lineal}\}$

$\rightsquigarrow V^{**} = (V^*)^* = \{\Theta : V^* \to K / \, \Theta \text{ es transformación lineal}\}$

Lema.
Sea V un K-e.v. Para cada $v \in V$, sea $\Theta_v : V^* \to K$ definida por $\Theta_v(\varphi) = \varphi(v)$. Entonces $\Theta_v \in V^{**}$.

Demostración.

- $\Theta_v(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) = \Theta_v(\varphi) + \Theta_v(\psi)$ $\forall \varphi, \psi \in V^*$.
- $\Theta_v(\lambda \cdot \varphi) = (\lambda \cdot \varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v)$ $\forall \lambda \in K$, $\varphi \in V^*$.

Ejemplo.
$V = \mathbb{R}^3$, $v = (2, -1, 3) \Rightarrow \Theta_v : (\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R}$, $\Theta_v(\varphi) = \varphi(2, -1, 3)$.

Teorema.

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita. La función $T : V \to V^{**}$ definida por $T(v) = \Theta_v$ es un isomorfismo.

Demostración.

T es una transformación lineal:

- $T(v+w) = \Theta_{v+w}$, donde $\Theta_{v+w} : V^* \to K$.
  $\Theta_{v+w}(\varphi) = \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \Theta_v(\varphi) + \Theta_w(\varphi) = (\Theta_v + \Theta_w)(\varphi)\ \forall \varphi \in V^*$
  $\Rightarrow \Theta_{v+w} = \Theta_v + \Theta_w$, es decir, $T(v+w) = T(v) + T(w)$.
- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ se prueba análogamente.

T es monomorfismo:

- $v \in \mathrm{Nu}(T) \Rightarrow T(v) = \Theta_v = 0$
  $\Theta_v = 0 \Rightarrow \forall \varphi \in V^*, \Theta_v(\varphi) = \varphi(v) = 0$

  Si $v \neq 0$, completamos a una base $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ de V.
  $\exists \varphi : V \to K$ t.l. definida por $\varphi(v) = 1$ y $\varphi(v_i) = 0\ \forall i \geq 2$.
  Abs! $\Rightarrow v = 0$

T es isomorfismo, porque $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$. $\square$