Álgebra Lineal - Clase 23

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Variedades lineales: nociones básicas.
- Intersección y suma de variedades lineales.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 9 (Secciones 9.1 y 9.2).

Variedades lineales

Definición.

Sea V un K-espacio vectorial. Una variedad lineal $M \subseteq V$ es un conjunto de la forma $M = S + p = \{s + p \ / \ s \in S\}$, donde S es un subespacio de V y $p \in V$.

Ejemplos.

- Subespacios de un K-e.v. V: $S = S + \vec{0}$.
- Conjuntos formados por un punto de un K-e.v.: $\{p\} = \{0\} + p$.
- Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, planos en $\mathbb{R}^3$.
- Conjuntos de soluciones de sistemas lineales compatibles.

  $A \in K^{m\times n}$ y $b \in K^{m\times 1} \Rightarrow \{x \in K^n \mid A.x = b\} = S_0 + p$, donde $S_0 = \{\mathrm{x} \in K^n \mid A.x = 0\}$ y p es una solución particular de $A.x = b$.

- En $K[X]$,

$$\begin{aligned} M &= \{P \in K[X] \ / \ P(0) = 1\} \\ &= \{P \in K[X] \ / \ P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i + 1\} \\ &= \{P \in K[X] \ / \ P(0) = 0\} + 1. \end{aligned}$$

es una variedad lineal.

- En $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} M &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ f'' = \operatorname{sen}(x)\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ (f + \operatorname{sen}(x))'' = 0\}. \end{aligned}$$

$S = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \ / \ g'' = 0\}$ es un subespacio de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,
$f \in M \iff f + \operatorname{sen}(x) \in S$.

$\Rightarrow M = S + (-\operatorname{sen}(x))$ es una variedad lineal.

Proposición.

Sea V un K-e.v. y sea $M \subseteq V$ una variedad lineal. Si $p, p' \in V$ y S, S' son subespacios de V tales que $M = S + p$ y $M = S' + p'$, entonces $S = S'$ y $p - p' \in S$.

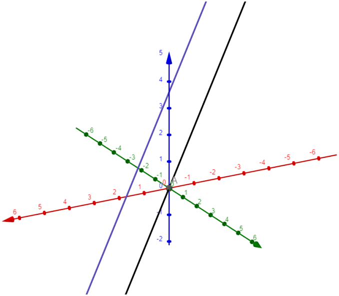
Demostración.

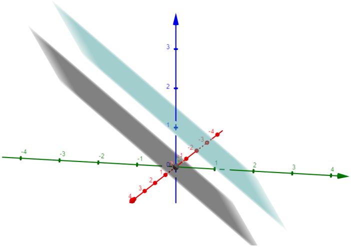
- $p' \in M = S + p \Rightarrow p' - p \in S$:
  $\exists s_0 \in S$ tal que $p' = s_0 + p \Rightarrow p' - p = s_0 \in S$.
- $S' \subseteq S$:
  $s' \in S' \Rightarrow s' + p' \in M = S' + p' = S + p$
  $\Rightarrow \exists s \in S$ tal que $s' + p' = s + p$.
  $\Rightarrow s' = s + (p - p') = s - s_0 \in S$. Así, $S' \subseteq S$.

Análogamente se prueba que $S \subseteq S'$. Luego, $S = S'$. $\square$

Definición.

Si $M \subseteq V$ es una variedad lineal, $M = S + p$ con S subespacio de V y $p \in V$, S se llama el subespacio asociado a M. Si S es de dimensión finita, se define la dimensión de M como
$\dim(M) = \dim(S)$.





Observación.

$M = S + p \subseteq V$ variedad lineal y $p' \in M \Rightarrow M = S + p'$.

$p' \in M = S + p \Rightarrow p' = s' + p$ con $s' \in S$.

($\subseteq$) Sea $s + p \in M$, con $s \in S$.

$s+p = s+p-p'+p' = s+(p-p')+p' = (s-s')+p' \in S+p'$.

($\supseteq$) Sea $s + p' \in S + p'$.

$s + p' = s + (s' + p) = (s + s') + p \in S + p = M$.

Algunas variedades lineales particulares

Sea V un K-espacio vectorial.

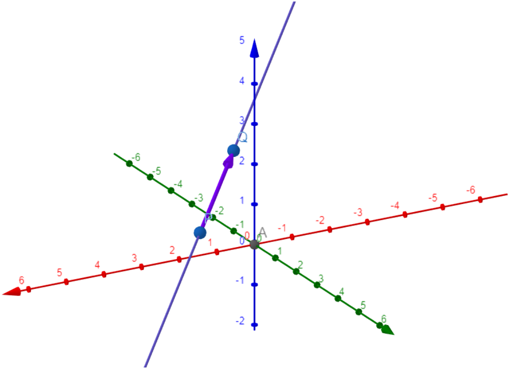
Definición.

- Una recta en V es una variedad lineal de dimensión 1: $L = < v > + p$, con $v, p \in V$, $v \neq \vec{0}$.
- Un plano en V es una variedad lineal de dimensión 2: $\Pi = < v, w > + p$, con $\{v, w\} \subset V$ l.i.
- Si $\dim V = n$, un hiperplano de V es una variedad lineal de dimensión $n - 1$.

Observación.

1. Dados $p \neq q \in V$, existe una única recta $L \subseteq V$ tal que $p \in L$ y $q \in L$.
2. Dados $x, y, z \in V$ no alineados (es decir, que no pertenecen a una misma recta), existe un único plano $\Pi \subseteq V$ tal que $x, y, z \in \Pi$.

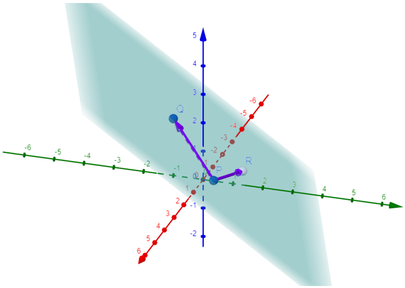
$L = < p - q > + q$ es la única recta tal que $p \in L$ y $q \in L$.



L es una recta: $p \neq q \Rightarrow \dim(< p - q >) = 1$.
$q = 0 + q \in L$ ✓ y $p = (p - q) + q \in L$ ✓.

Sea $L' \subset V$ una recta tal que $p \in L'$ y $q \in L'$.
$\exists S \subset V$ subespacio $\dim S = 1$ tal que $L' = S + p$ y $L' = S + q$
$\Rightarrow p - q \in S$, $p - q \neq 0$ y $\dim S = 1 \Rightarrow S = < p - q >$.
Luego $L' = L$.

$\Pi = < y - x,\ z - x > + x$ es el único plano tal que $x, y, z \in \Pi$



$x = 0 + x \in \Pi$, $y = (y - x) + x \in \Pi$ y $z = (z - x) + x \in \Pi$.
Π es un plano:
x, y, z no alineados $\Rightarrow \dim(< y - x,\ z - x >) = 2$
Sea $\Pi' = S + p$ es un plano con $x, y, z \in \Pi'$.
$\Pi' = S + x$, $\Pi' = S + y$, $\Pi' = S + z \Rightarrow y - x \in S$ y $z - x \in S$.
$\Rightarrow S = < y - x,\ z - x >$.
Luego, $\Pi' = \Pi$.

Definición.
Dados $a_0, a_1, \ldots, a_n \in V$, se llama variedad lineal generada por $a_0, \ldots, a_n$ a la variedad lineal $M \subseteq V$ más chica (en el sentido de la inclusión) tal que $a_i \in M \ \forall 0 \leq i \leq n$ (es decir, $M' \subset V$ variedad lineal con $a_i \in M' \ \forall 0 \leq i \leq n \Rightarrow M \subset M'$).

Proposición.
La variedad lineal generada por $a_0, a_1, \ldots, a_n \in V$ es

$$M = < a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0 > + a_0.$$

Observar que $\dim(M) \leq n$.

Demostración.
$a_0 = 0 + a_0 \in M$ y $a_i = (a_i - a_0) + a_0 \in M \ \forall 1 \leq i \leq n$.
Sea $M' = S + a_0$ tal que $a_i \in M' \ \forall 0 \leq i \leq n$.
$a_0, a_i \in M' \Rightarrow a_i - a_0 \in S \ \forall 1 \leq i \leq n$
$\Rightarrow < a_1 - a_0,\ a_2 - a_0, \ldots,\ a_n - a_0 > \subseteq S$
$\Rightarrow M = < a_1 - a_0,\ a_2 - a_0, \ldots,\ a_n - a_0 > + p \subseteq S + p = M'$. $\square$

Intersección de variedades lineales

Proposición.

Sean M_1 y M_2 variedades lineales en un K-e.v. V. Entonces $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ o $M_1 \cap M_2$ es una variedad lineal.

Demostración.

Supongamos que $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ y sea $p \in M_1 \cap M_2$.
$\Rightarrow M_1 = S_1 + p$ y $M_2 = S_2 + p$ con S_1 y S_2 subespacios de V.
Veamos que $M_1 \cap M_2 = (S_1 \cap S_2) + p$:

($\subseteq$) $q \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow \exists s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que
$q = s_1 + p = s_2 + p$.
$\Rightarrow s_1 = s_2 \in S_1 \cap S_2$, es decir $q = s + p$ con $s \in S_1 \cap S_2$.

($\supseteq$) Si $q = s + p$ con $s \in S_1 \cap S_2$
$\Rightarrow q \in M_1 = S_1 + p$ y $q \in M_2 = S_2 + p$; luego $q \in M_1 \cap M_2$.
$\square$

Variedades lineales paralelas y alabeadas

Definición.
Sean $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$ variedades lineales en un K-e.v. V. Se dice que M_1 y M_2 son paralelas, y se nota $M_1 \parallel M_2$, si $S_1 \subseteq S_2$ o $S_2 \subseteq S_1$.

En particular, si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$ son variedades lineales de la misma dimensión, $M_1 \parallel M_2 \iff S_1 = S_2$.

Ejemplos.

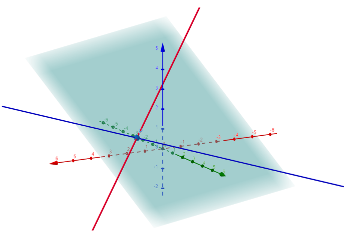
- Un punto en V es paralelo a cualquier variedad lineal en V.
- $L = <(-1,2,1)> + (0,1,0)$ es paralela al plano
  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 4\}$:
  $S_L = <(-1,2,1)>$ y $S_\Pi = \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \Rightarrow S_L \subset S_\Pi$
- $L_1 = <(-1,2,1)> + (0,1,0)$ y
  $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_3 = 4\}$ son paralelas:
  $S_{L_1} = <(-1,2,1)>$,
  $S_{L_2} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 0\} \Rightarrow S_{L_1} = S_{L_2}$.

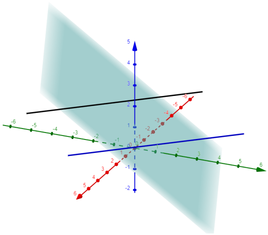
Proposición.

Sean L_1 y L_2 rectas en un K-e.v. V. Son equivalentes:

i) Existe $\Pi \subseteq V$ plano tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$.

ii) $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ o $L_1 \parallel L_2$.





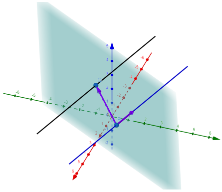
Demostración.

ii) $\Rightarrow$ i)

- Si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$:
  $p \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow L_1 = < v_1 > + p$ y $L_2 = < v_2 > + p$, con $v_1, v_2 \in V$ no nulos.
  Si v_1 y v_2 son l.i., $\Pi = < v_1, v_2 > + p$ es un plano que contiene a L_1 y a L_2.
  Si v_1 y v_2 son l.d., sea $w \in V$ tal que $\{v_1, w\}$ es l.i.
  $\Rightarrow \Pi = < v_1, w > + p$ es un plano que contiene a $L_1 = L_2$.
- Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $L_1 \parallel L_2$:
  $\exists v \in V$, $v \neq 0$, tal que $L_1 = < v > + p_1$ y $L_2 = < v > + p_2$.

  Sea $\Pi = < v,\ p_1 - p_2 > + p_2$.

  $p_1 - p_2 = \lambda.v \Rightarrow$
  $p_1 = \lambda.v + p_2 \in L_1 \cap L_2$. Abs!
  $\Rightarrow \dim(< v, p_1 - p_2 >) = 2$
  $\Rightarrow \Pi$ es un plano.



  $L_1 = < v > + p_1 \subset < v, p_1 - p_2 > + p_2 = \Pi$ y $L_2 \subset \Pi$ ✓.

i) $\Rightarrow$ ii)

Sean Π plano con $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ y S el subespacio asociado a Π. $L_1 = < v_1 > + p_1$ y $L_2 = < v_2 > + p_2$, con $v_1, v_2 \in V$ no nulos y $p_1, p_2 \in V$.

- $v_1 + p_1 \in L_1 \subset \Pi,\ \ p_1 \in \Pi \Rightarrow v_1 \in S$
- $p_1 \in L_1 \subset \Pi$, $p_2 \in L_2 \subset \Pi \Rightarrow p_2 - p_1 \in S$
- $v_2 + p_2 \in L_2 \subset \Pi,\ \ p_2 \in \Pi \Rightarrow v_2 \in S$.

$\dim(S) = 2 \Rightarrow \exists a, b, c$ no todos nulos tales que

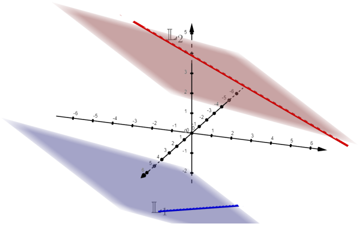
$$a\, v_1 + b\,(p_2 - p_1) + c\, v_2 = 0.$$

$b = 0 \Rightarrow < v_1 > = < v_2 > \Rightarrow L_1 \parallel L_2$.

$b \neq 0 \Rightarrow \frac{c}{b} v_2 + p_2 = -\frac{a}{b}\, v_1 + p_1 \Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. $\square$

Definición.

Dos variedades lineales M_1 y M_2 de un K-e.v. V se dicen alabeadas si $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $M_1 \nparallel M_2$.



Ejemplos.

- $L_1 = < (1,0,0) > + (0,0,1)$ y $L_2 = < (0,1,0) > + (0,0,2)$ son dos rectas alabeadas en $\mathbb{R}^3$.
- Los planos definidos en $\mathbb{R}^4$ por
  $\Pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 1,\ x_2 = 1\}$ y
  $\Pi_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 2,\ x_3 = 3\}$ son alabeados.

Suma de variedades lineales

Definición.
Sea V un K-e.v. y sean M_1 y M_2 variedades lineales en V. Si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$ con S_1 y S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$, se define la variedad lineal suma de M_1 y M_2, como

$$M_1 \vee M_2 = (S_1 + S_2 + < p_1 - p_2 >) + p_2.$$

Observación.

- La definición de $M_1 \vee M_2$ no depende de las descripciones de M_1 y M_2:
  si $M_1 = S_1 + p_1 = S_1 + p_1'$ y $M_2 = S_2 + p_2 = S_2 + p_2'$, con S_i subespacio de V y $p_i, p_i' \in V$ para $i = 1, 2$, entonces

  $$(S_1 + S_2 + < p_1' - p_2' >) + p_2' = (S_1 + S_2 + < p_1 - p_2 >) + p_2.$$

- $M_1 \subseteq M_1 \vee M_2$ y $M_2 \subseteq M_1 \vee M_2$.

- Si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, entonces
  $p_1 - p_2 \in S_1 + S_2 \iff M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.
  En este caso, $M_1 \vee M_2 = (S_1 + S_2) + p_2$.

  $(\Rightarrow)$ $p_1 - p_2 \in S_1 + S_2 \Rightarrow \exists s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que
  $p_1 - p_2 = s_1 + s_2 \Rightarrow -s_1 + p_1 = s_2 + p_2 \in M_1 \cap M_2$.

  $(\Rightarrow)$ $q \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow \exists s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que
  $s_1 + p_1 = q = s_2 + p_2 \Rightarrow p_1 - p_2 = -s_1 + s_2 \in S_1 + S_2$.

Ejemplo.
Si L_1 y L_2 son dos rectas distintas en $\mathbb{R}^3$, entonces:

- $L_1 \vee L_2$ es el plano que las contiene, si $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ o $L_1 \parallel L_2$.
- $L_1 \vee L_2 = \mathbb{R}^3$, si L_1 y L_2 son alabeadas.

Teorema de la dimensión para la suma de variedades lineales.

Sea V un K-e.v. y sean M_1 y M_2 variedades lineales de V de dimensión finita. Entonces:

i) Si $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$,

$$\dim(M_1 \vee M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(M_1 \cap M_2).$$

ii) Si $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$, con S_1, S_2 subespacios de V y $p_1, p_2 \in V$,

$$\dim(M_1 \vee M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(S_1 \cap S_2) + 1.$$

Demostración.

Por definición, si $M_1 = S_1 + p_1$ y $M_2 = S_2 + p_2$,
$\dim(M_1) = \dim(S_1)$, $\dim(M_2) = \dim(S_2)$ y
$\dim(M_1 \vee M_2) = \dim(S_1 + S_2 + < p_1 - p_2 >)$.
Se aplica el Teorema de la dimensión para subespacios, teniendo en cuenta que $p_1 - p_2 \in S_1 + S_2 \iff M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. $\square$