# Álgebra Lineal - Clase 26

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

# Esquema de la clase

- Formas bilineales simétricas reales.
- Clasificación vía autovalores.
- Clasificación vía menores principales.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 10.

# Clasificación de formas bilineales simétricas reales

Sea $V$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión $n$ y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Existe una base $B$ de $V$ tal que

$$(|\Phi|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq r, j = i \\ -1 & \text{si } r+1 \leq i \leq s, j = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \iff |\Phi|_B = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_{s-r} & \\ & & 0_{n-s} \end{pmatrix}$$

Para $x, y \in V$, si $(x)_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $(y)_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, entonces

$$\Phi(x,y) = (x)_B |\Phi|_B (y)_B^t = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_{s-r} & \\ & & 0_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i - \sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i \beta_i$$

En particular,

$$\Phi(x,x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 - \sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i^2$$

$$(x)_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Rightarrow \Phi(x,x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 - \sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i^2$$

Observación.

i) $\Phi$ es definida positiva si $\Phi(x,x) > 0 \ \forall x \neq 0$
$\iff r = n$.

ii) $\Phi$ es semidefinida positiva si $\Phi(x,x) \geq 0 \ \forall x \in V$
$\iff r < n$ y $s = r$.

iii) $\Phi$ es definida negativa si $\Phi(x,x) < 0 \ \forall x \neq 0$
$\iff r = 0$ y $s = n$.

iv) $\Phi$ es semidefinida negativa si $\Phi(x,x) \leq 0 \ \forall x \in V$
$\iff r = 0$ y $s < n$.

v) $\Phi$ es indefinida $\iff 0 < r < s$.

Definición.

Se define la signatura de $\Phi$ como la diferencia entre la cantidad de 1 y la cantidad de $-1$ en $|\Phi|_B$ (para una base $B$ de $V$ tal que la matriz es diagonal como vimos).

$\mathrm{sig}(\Phi) = 2r - s$.

Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base tal que $|\Phi|_B = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_{s-r} & \\ & & 0_{n-s} \end{pmatrix}$, entonces:

- $V^+ = < v_1, \dots, v_r >$ es un subespacio de $V$ de dimensión máxima tal que $\Phi_{|_{V^+ \times V^+}}$ es definida positiva.
- $V^- = < v_{r+1}, \dots, v_s >$ es un subespacio de $V$ de dimensión máxima tal que $\Phi_{|_{V^- \times V^-}}$ es definida negativa.

Observación.

- $\mathrm{rg}(\Phi) = \dim V^+ + \dim V^-$,
- $\mathrm{sig}(\Phi) = \dim V^+ - \dim V^-$

Los subespacios $V^+$ y $V^+$ no son únicos, aunque sí lo son sus dimensiones. Por ejemplo, para $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1 y_1$, podemos tomar $V^+ = < (1, 0) >$ o $V^+ = < (1, -1) >$ entre otros.

# Clasificación en términos de autovalores

**Proposición.**

Sea $V$ un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensión $n$ y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Sea $B$ una base de $V$. Entonces $\Phi$ es definida positiva si y sólo si todos los autovalores de $|\Phi|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son positivos.

**Demostración.**

$A = |\Phi|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica $\Rightarrow \exists O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que

$$O^t . A . O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D,$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son los autovalores de $A$.
$B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $V$ tal que $O = C(B', B) \Rightarrow |\Phi|_{B'} = D$.

($\Rightarrow$) $\forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_i = \Phi(v_i, v_i)$.
$\Phi$ definida positiva $\Rightarrow \Phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0 \; \forall\, 1 \leq i \leq n$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son positivos.
$\forall x \in V$, si $(x)_{B'} = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$\Phi(x, x) = (x)_{B'} . D . (x)^t_{B'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq 0,$$

y vale $\Phi(x, x) = 0 \iff x_i = 0 \ \forall \, 1 \leq i \leq n \iff x = 0$.
$\Rightarrow \Phi$ es definida positiva. $\square$

**Observación.**
Sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica.
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de $|\Phi|_B$ para $B$ una base de $V$:

- $\Phi$ definida positiva $\iff \forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_i > 0$
- $\Phi$ semidefinida positiva $\iff \forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \geq 0$
- $\Phi$ definida negativa $\iff \forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_i < 0$
- $\Phi$ semidefinida negativa $\iff \forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \leq 0$
- $\Phi$ indefinida $\iff \exists i \neq j$ tales que $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$.

Ejemplos.

1. $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineal tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   $\mathcal{X}_{|\Phi|_E} = (X-1)(X^2-5X) \Rightarrow$ Autovalores: 0, 1 y 5
   $\Rightarrow \Phi$ es semidefinida positiva.

2. $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineal tal que $|\Phi|_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   $\mathcal{X}_{|\Phi|_E} = X(X^2-2X-3) = X(X+1)(X-3)$
   $\Rightarrow$ Autovalores: 0, $-1$ y 3
   $\Rightarrow \Phi$ es indefinida.

# Clasificación vía menores principales

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Un menor principal de $A$ de orden $k$ es el determinante de una submatriz de $A$ obtenida al suprimir $n-k$ filas y las mismas $n-k$ columnas.
Llamaremos menores principales superiores de $A$ a los menores principales $\Delta_k = \det((a_{ij})_{1\leq i,j\leq k})$ para $k = 1, \ldots, n$.

Ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Menores principales de $A$:

- de orden 1: 1, 5 y 3
- de orden 2: $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) = 4$, $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) = 3$ y $\det\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) = 11$
- de orden 3: $\det(A) = 8$

Menores principales superiores de $A$:

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) = 4,\ \Delta_3 = \det(A) = 8$$

## Teorema (criterio de Sylvester).

Sean $V$ un $\mathbb{R}$-e.v de dimensión $n$ y $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Sea $B$ una base de $V$. Entonces $\Phi$ es definida positiva si y sólo si todos los menores principales superiores de $|\Phi|_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son positivos.

## Demostración.

Por inducción en $n = \dim(V)$.

Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $|\Phi|_B = A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Recordar: si $a_{11} \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{1n}}{a_{11}} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} . A . \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = A'$$

$A' = |\Phi|_{B'}$ para la base $B' = \{v_1, v_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}.v_1, \ldots, v_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}.v_1\}$.

Los menores principales superiores de $A'$ son iguales a los de $A$ (por la estructura triangular con 1 en la diagonal de $C(B', B)$.)

$\Rightarrow \Delta_k(A) = \Delta_k(A') = a_{11}.\Delta_{k-1}(M)\ \forall 2 \le k \le n.$

Sean $S = < v_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}.\, v_1, \ldots, v_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}.\, v_1 >$ y
$B_S = \{v_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}.\, v_1, \ldots, v_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}.\, v_1\}$.
$\Phi_{|_{S\times S}} : S \times S \to \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica y $M = |\Phi_{|_{S\times S}}|_{B_S}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Phi$ es definida positiva.
$\Delta_1(A) = a_{11} = \Phi(v_1, v_1) > 0$.
$\Phi_{|_{S\times S}} : S \times S \to \mathbb{R}$ definida positiva, $M = |\Phi_{|_{S\times S}}|_{B_S}$.
Por HI, los menores principales superiores de $M$ son positivos.
$\Rightarrow \Delta_k(A) = a_{11}.\, \Delta_{k-1}(M) > 0 \ \forall 2 \leq k \leq n$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\Delta_k(A) > 0 \ \forall 1 \leq k \leq n$.
$a_{11} = \Delta_1(A) > 0 \Rightarrow \Delta_j(M) = \Delta_{j+1}(A)/a_{11} > 0 \ \forall j$
$M = |\Phi_{|_{S\times S}}|_{B_S}$ y $\dim(S) = n - 1$.
Por HI, $\Phi_{|_{S\times S}} : S \times S \to \mathbb{R}$ es definida positiva.
$\Rightarrow \exists B' = \{w_2, \ldots, w_n\}$ base de $S$ tal que $|\Phi_{|_{S\times S}}|_{B'} = I_{n-1}$

$$\Rightarrow |\Phi|_{\{v_1, w_2, \ldots, w_n\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \text{ con } a_{11} > 0.$$

$\Rightarrow \Phi$ es definida positiva. $\square$

Observación.

Si $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ y $A = |\Phi|_B$ para una base de $B$ de $V$, entonces $\Phi$ es definida negativa $\iff$ $(-1)^k \Delta_k(A) > 0 \ \forall 1 \leq k \leq n$ ($\Delta_1(A) < 0$, $\Delta_2(A) > 0$, $\Delta_3(A) < 0$,... los menores principales superiores tienen signos alternados, comenzando con negativo).

Ejemplos.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$ y $\Delta_3 = 8 > 0$

   $\Rightarrow \Phi_A(x, y) = x.\, A.\, y^t$ es definida positiva.

   $\Rightarrow \Phi_A$ define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   $\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$ y $\Delta_3 = -5 < 0$

   $\Rightarrow \Phi_A(x, y) = x.\, A.\, y^t$ es definida negativa.

El criterio de los menores principales superiores no se extiende para determinar si una forma bilineal es semidefinida positiva o negativa.

Ejemplo.

Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\Delta_1(A) = 4 \geq 0$, $\Delta_2(A) = 0$ y $\Delta_3(A) = 0$
- $\Delta_1(A') = 1 \geq 0$, $\Delta_2(A') = 0$ y $\Delta_3(A') = 0$

La forma bilineal simétrica definida por $A$ es semidefinida positiva, pero la definida por $A'$ es indefinida (criterio de los autovalores).

## Proposición.

Sea $V$ un $\mathbb{R}$-e.v de dimensión $n$ y sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Sea $B$ una base de $V$.

- $\Phi$ es semidefinida positiva $\iff$ todos los menores principales de $|\Phi|_B$ son $\geq 0$.
- $\Phi$ es semidefinida negativa $\iff$ $\forall 1 \leq k \leq n$ todo menor principal $\Delta$ de orden $k$ de $|\Phi|_B$ cumple $(-1)^k \Delta \geq 0$.

## Ejemplos.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Phi_A$ semidefinida positiva
Menores principales:

- de orden 1: 4, 1, 1.
- de orden 2: 0, 4, 1.
- de orden 3: 0

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Phi_{A'}$ indefinida
Menores principales:

- de orden 1: 1, 0, 1.
- de orden 2: 0, $-3$, 0.
- de orden 3: 0