PROBLEMAS SURTIDOS

1) Consideremos en $\mathbb{C}^{n\times n}$ el producto interno dado por $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$. Dada $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sea $T_Q : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ la transformación lineal definida por $T_Q(A) = QA - AQ$.

(a) Hallar ${T_Q}^*$.

(b) Probar que T_Q es autoadjunta si y sólo si $Q = Q^* + \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) QUIERO "RESOLVER"

$$\langle T_Q(A), B\rangle = \langle A, (T_Q)^*(B)\rangle$$

CALCULO:

$$\langle T_Q(A), B\rangle = \mathrm{tr}(T_Q(A)B^*)$$

$$= \mathrm{tr}((QA - AQ)B^*) = \mathrm{tr}(Q(AB^*)) - \mathrm{tr}(AQB^*)$$

$$= \mathrm{tr}(AB^*Q) - \mathrm{tr}(AQB^*) = \mathrm{tr}(A((B^*Q - QB^*)^*)^*)$$

$$= \langle A, (B^*Q - QB^*)^*\rangle$$

$\leadsto$ ASÍ, $(T_Q)^*(B) = (B^*Q - QB^*)^*$; MÁS AÚN,

$$(T_Q)^*(B) = Q^*\underbrace{(B^*)^*}_{B} - \underbrace{(B^*)^*}_{B}Q^* = T_{Q^*}(B),$$

i.e. : $(T_Q)^* = T_{Q^*}$

(b) T_Q ES AUTOADJ SII $T_Q = T_{Q^*}$

SII $QA - AQ = Q^*A - AQ^* \quad \forall A$

SII $(Q - Q^*) A = A (Q - Q^*) \quad \forall A$

SII $(\exists \lambda \in \mathbb{C})\ Q - Q^* = \lambda I$

2) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, de dimensión n. Dado $w \in V$ no nulo, denotamos por s_w a la transformación lineal

$$s_w : V \longrightarrow V, \qquad s_w(v) = v - 2\,\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\,w\,.$$

(a) Probar que s_w es una transformación ortogonal, con $\det(s_w) = -1$.

A estas transformaciones ortogonales las llamaremos *simetrías*.

(b) Sea $f : V \to V$ una transformación ortogonal tal que $f \neq id_V$. Probar que existen $v \in V$ no nulo y una simetría s_w tales que $(s_w \circ f)(v) = v$.

(c) Probar que toda transformación ortogonal $f : V \to V$ es una composición de a lo sumo n simetrías. Es decir, que existen $w_1, \ldots, w_m \in V$ no nulos, con $0 \leq m \leq n$, tales que $f = s_{w_1} \circ \cdots \circ s_{w_m}$.

(a) SEA $\mathcal{B} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ BON CON $V_1 = \overbrace{\lambda}^{\neq 0} W$.

- $S_W(V_1) = \lambda S_W(W) = \lambda \left(W - 2 \underbrace{\frac{\langle W, W\rangle}{\|W\|^2}}_{=1} W \right)$
  $= -\lambda W = -V_1$

- $S_W(V_i) = V_i - 2 \underbrace{\frac{\langle V_i, W\rangle}{\|W\|^2}}_{= \frac{1}{\lambda}\langle V_i, V_1\rangle} W = V_i, \quad i > 1$

ASÍ,

$$[S_w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ORTOGONAL},$$

CON LO QUE S_w ES ORTOGONAL; MÁS AÚN,

$$\det(S_w) = \det([S_w]_{\mathcal{B}}) = -1$$

(OBS: $S_{\lambda w}(v) = v - 2\frac{\langle v, \cancel{\lambda} w\rangle}{\|\cancel{\lambda} w\|^2}\cancel{\lambda} w = S_w(v)$,

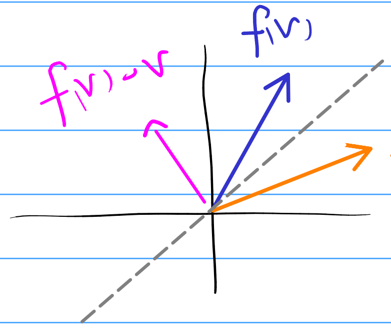
CON LO QUE $S_{\lambda w} = S_w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^\times$;

ADEMÁS, $S_w^2 = 1_W$)

b) $f: V \to V$, $f \neq 1_V$ ¿S_w?

$\rightsquigarrow (\exists v \in V \setminus \{0\})\ f(v) \neq v$

DIBUJO:



$\rightsquigarrow$ PROPONEMOS $w = f(v) - v$

SEA $u = v + f(v)$. ASÍ,

$$\langle u, w\rangle = \langle v + f(v), f(v) - v\rangle$$

$$= \cancel{\langle v, f(v)\rangle} - \cancel{\langle v, v\rangle} + \cancel{\langle f(v), f(v)\rangle} - \cancel{\langle f(v), v\rangle} = 0$$

PUES f ES ORTOGONAL

$\rightsquigarrow$ $S_w(u) = u$, o sea:

S_w simetría

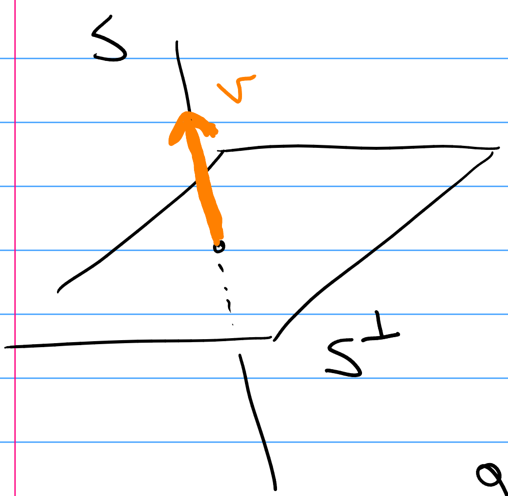
$$S_w(v+f(v)) = v+f(v);$$

Además $S_w(f(v)-v) = v-f(v)$

$$\cancel{2}S_w(f(v)) = \cancel{2}v$$

(c) Sea $f: V \to V$ ortogonal

- Si $f = 1_V$, es la composición de 0 simetrías
- Sup $f \neq 1_V$. Sean v, w como en (b)



Sea $S = \langle v \rangle$,
y sea $g = S_w \circ f$.

Como g es ortogonal, podemos considerar

y $g(S) \subseteq S$

$$g|_{S^\perp}: S^\perp \to S^\perp$$

Como $\dim(S^\perp) = n-1$, existen $w_2, \dots, w_m \in S^\perp$, con $m \leq n$ tales que

$$g|_{S^\perp} = S_{w_2} \circ \dots \circ S_{w_m}$$

simetrías en $S^\perp$

SIMETRÍAS EN V

AFIRMO: $f = S_{w} \circ S_{w_2} \circ \cdots \circ S_{w_m}$

DEM: BVQ COINCIDEN EN S Y $S^{\perp}$.

- $S_w\Big(\underbrace{(S_{w_2}\circ\cdots\circ S_{w_m})(v)}_{=\,v,\ \text{PUES } v \in \langle w_2,\dots,w_m\rangle^{\perp}}\Big) = S_w(v) = f(v)$

- SI $u \in S^{\perp}$,

$$(S_{w_2}\circ\cdots\circ S_{w_m})(u) = g|_{S^{\perp}}(u) = S_w(f(u))$$

$$\overset{S_w^{-1}=S_w}{\leadsto} \quad (S_w \circ S_{w_2} \circ \cdots S_{w_m})(u) = f(u)$$

$\boxtimes$