ALGEBRA LINEAL - Práctica N°2 - Segundo cuatrimestre de 2020

Matrices y coordenadas

Ejercicio 1. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

i) Probar que si $A \in K^{m\times n}$ satisface que $Ax = 0\ \forall x \in K^n$, entonces $A = 0$. Deducir que si $A, B \in K^{m\times n}$ satisfacen que $Ax = Bx\ \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

ii) Probar que si $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j-ésima de B, entonces $A.B = (\,A.B_1 \mid \dots \mid A.B_r)$ (es decir, $A.B_j$ es la columna j-ésima de $A.B$).

Ejercicio 2.

i) Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ $(n \ge 2)$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $B = 0$
b) $A.B = A.C$ y $A \ne 0 \;\Rightarrow\; B = C$
c) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; B.A = 0$
d) $A^j = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$
e) $A^2 = A \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $A = I_n$

ii) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
b) $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

iii) Mostrar que si A y $B \in K^{n\times n}$, no necesariamente vale $(A.B)^2 = A^2.B^2$

Ejercicio 3. Sean A, $A' \in K^{n\times n}$; B, $B' \in K^{n\times m}$; C, $C' \in K^{m\times n}$ y D, $D' \in K^{m\times m}$.
Sean M, $M' \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definidas por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.
Probar que $M.M' = \begin{pmatrix} A.A' + B.C' & A.B' + B.D' \\ C.A' + D.C' & C.B' + D.D' \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.

i) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión.

a) $S_1 = \{A \in K^{n\times n} / \, A = A^t\}$ (matrices simétricas)
b) $S_2 = \{A \in K^{n\times n} / \, A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)
c) $S_3 = \{A \in K^{n\times n} / \, A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
d) $S_4 = \{A \in K^{n\times n} / \, A_{ij} = 0 \text{ si } i \ne j\}$ (matrices diagonales)
e) $S_5 = \{A \in K^{n\times n} / \, A_{ij} = 0 \text{ si } i \ne j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \dots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)
f) $S_6 = \{A \in K^{n\times n} / \, tr(A) = 0\}$

ii) Probar que:

a) $S_1 \oplus S_2 = K^{n\times n}$ si $2 \neq 0$ en K.

b) $S_5 \oplus S_6 = K^{n\times n}$ si $K = \mathbb{Q}\,, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Ejercicio 5. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto $T = \{B \in K^{n\times n} / \, A.B = 0\}$ es un subespacio de $K^{n\times n}$. Si $S \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A, probar que $\dim T = n. \dim S$.

Ejercicio 6. Sean A y $B \in K^{n\times n}$. Probar que:

i) Si A y B son triangulares superiores, $A.B$ es triangular superior.

ii) Si A y B son diagonales, $A.B$ es diagonal.

iii) Si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 7.

i) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n\times n} / \, A.B = B.A \ \ \forall\, B \in K^{n\times n}\}$.

ii) Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $K^{n\times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

iii) Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.

Ejercicio 8. Sean $A, A' \in K^{m\times n}$; $B \in K^{n\times r}$; $D, D' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

i) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

ii) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$

iii) $(A.B)^t = B^t.A^t$

iv) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$

v) $tr(\alpha.D) = \alpha.tr(D)$

vi) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

Ejercicio 9.

i) Sea $A \in K^{m\times n}$. Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son matrices simétricas. Dar un ejemplo donde $m = n$ y $A.A^t \neq A^t.A$.

ii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$.

iii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

Ejercicio 10. Sea $A \in K^{2\times 2}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea $\Delta = a.d - b.c$. Probar que, si $\Delta \neq 0$, $A \in GL(2, K)$ y $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11. Sea $A \in GL(n, K)$ y $B\,, \, C \in K^{n\times m}$. Probar que:

i) $A.B = A.C \ \Rightarrow \ B = C$

ii) $A.B = 0 \ \Rightarrow \ B = 0$

Ejercicio 12. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

i) $A\,,\,B \in GL(n,K) \;\Rightarrow\; A+B \in GL(n,K)$

ii) $A \in GL(n,K) \iff A^t \in GL(n,K)$

iii) $tr(A) = 0 \;\Rightarrow\; A \notin GL(n,K)$

iv) A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \,/\, A^j = 0$) $\;\Rightarrow\; A \notin GL(n,K)$

Ejercicio 13. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n \,/\, A.x = b\}$. Probar:

i) Si $C \in GL(m,K)$, entonces $H = \{x \in K^n \,/\, (C.A).x = C.b\}$.

ii) Si $m = n$ y $A \in GL(n,K)$, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Ejercicio 14.

i) Para cada i, j $(1 \le i, j \le n)$, sea $E^{ij} \in K^{n\times n}$ la matriz:

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman *matrices canónicas* de $K^{n\times n}$.

a) Si $a \in K - \{0\}$ y $1 \le i \le n$, se define $M_i(a) \in K^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + ... + a.E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + ... + E^{nn} = I_n + (a-1).E^{ii}.$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in K)$.

b) Sean $1 \le i, j \le n$, con $i \ne j$. Se define la matriz $P^{ij} \in K^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$.

c) Sean $1 \le i, j \le n$, con $i \ne j$ y $a \in K$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a.E^{ij}.$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in K)$.

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman *matrices elementales* de $K^{n\times n}$.

ii) Probar que:

a) $M_i(a) \in GL(n,K)$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1})$

b) $P^{ij} \in GL(n,K)$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$

c) $T^{ij} \in GL(n,K)$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

iii) Sea $A \in K^{n\times m}$, $A = (a_{ij})$, y sea F_i $(1 \le i \le n)$ la i-ésima fila de A, es decir, $F_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. Probar que:

a) $E^{ij}.A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \dots, 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.

b) $M_i(a).A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a.F_i$.

c) $P^{ij}.A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i\,,\, j$; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

d) $T^{ij}(a).A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + a.F_j$.

Notar como conclusión que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

Ejercicio 15.

i) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular A^{20} y $20.A$.

ii) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$.

iii) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20.B$.

Ejercicio 16. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$.

i) Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff A \in GL(n, K)$.

ii) Probar que $A \in GL(n, K) \iff$ las filas de A son linealmente independientes $\iff$ las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 18. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que $\exists\, B \in K^{n\times n}$ / $B.A = I_n \iff A \in GL(n, K)$. Deducir que $\exists\, B \in K^{n\times n}/\ A.B = I_n \iff A \in GL(n, K)$.

Ejercicio 19. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3\,;\ v = (1,-1,2)$ y $B = \{(1,2,-1),(2,1,3),(1,3,2)\}$

ii) $V = \mathbb{R}_3[X]\,;\ v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\,1+X\,,\,X^2+5\,,\,X^3+X^2\}$

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}\,;\ v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 20. Calcular $C(B,B')$ en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3,\ B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}\,,\ B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$

ii) $V = \mathbb{R}_2[X],\ B = \{3\,,\,1+X\,,\,X^2\}\,,\ B' = \{1\,,\,X+3\,,\,X^2+X\}$

iii) $V = \mathbb{R}^4,\ B = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}\,,\ B' = \{v_3,v_1,v_4,v_2\}$

iv) $V = \mathbb{R}^{2\times 2},\ B = \{E^{11},\,E^{12},\,E^{21},\,E^{22}\},\ B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 21. Dado $v \in V$ y las bases B y B', hallar las coordenadas de v respecto de B y, utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B'.

i) $v = (-1,5,6)$ y B, B' como en el Ejercicio 20. i)

ii) $v = 3 + X^2$ y B, B' como en el Ejercicio 20. ii)

iii) $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y B, B' como en el Ejercicio 20. iv)

Ejercicio 22. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1,v_2,v_3\}$ de K^3, hallar:

i) una base B_1 de K^3 tal que $M = C(B_1,B)$.

ii) una base B_2 de K^3 tal que $M = C(B,B_2)$.