$ax^2 + bx + c$

$\boxed{a+b+c=0}$

1. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $f: V \to V$ una transformación lineal tal que

   i) $f(1) = 1 + x - x^2$, ii) $x - 2x^2 \in \mathrm{Im}(f)$, iii) $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) \cap \overbrace{\{p \in V \mid p(1) = 0\}}^{T}$.

   a) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ para cualquier transformación lineal $f: V \to V$ que cumpla las condiciones anteriores.

   b) Si $V = \mathbb{R}_3[x]$, probar que no existe $f: V \to V$ que cumpla simultáneamente i) y iii).

a) Como $f(1) = 1 + x - x^2$, tenemos que $1 + x - x^2 \in \mathrm{Im}(f)$.
Además, por ii), $x - 2x^2 \in \mathrm{Im}(f)$.
Con esto ya sabemos, como $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio, que
$S = \underbrace{\langle 1+x-x^2,\ x-2x^2 \rangle}_{\text{subesp de dim 2 (los generadores son LI)}} \subseteq \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) \geq 2$

Como $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$, que tiene dim 3, $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ o 3.
Además, si $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ entonces $\mathrm{Im}(f) = S$,
y si $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$ entonces $\mathrm{Im}(f) = V$.

Veamos que el último caso no puede ocurrir:
Si fuera $\mathrm{Im}(f) = V$, entonces por iii) tendríamos que
$\mathrm{Nu}(f) = V \cap \underbrace{\{p \in V \mid p(1) = 0\}}_{\text{lo llamamos } T} = T$. Pero $\dim T = 2$,
entonces ocurriría que $\dim \mathrm{Nu}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 2 + 3 = 5 \neq \dim(V) = 3$.
Esto contradice el teorema de la dimensión.
Concluimos que $\mathrm{Im}(f) = S$, y una base está dada por
$\{1 + x - x^2,\ x - 2x^2\}$.
Ahora calculamos $\mathrm{Nu}(f) = S \cap T$:

$p = \underbrace{\alpha \cdot (1 + x - x^2) + \beta \cdot (x - 2x^2)}_{\text{elemento genérico de } S} \rightsquigarrow p(1) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (-1) = \alpha - \beta$

$p \in T \iff \alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta$

$\Rightarrow p = \alpha \cdot (1 + x - x^2) + \alpha \cdot (x - 2x^2) = \alpha \cdot (1 + 2x - 3x^2)$

CONCLUSIÓN: $S \cap T = \langle 1 + 2x - 3x^2 \rangle = \mathrm{Nu}(f)$

Base de $\mathrm{Nu}(f) = \{1 + 2x - 3x^2\}$.

1. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $f: V \to V$ una transformación lineal tal que

   i) $f(1) = 1 + x - x^2$, ii) $x - 2x^2 \in \mathrm{Im}(f)$, iii) $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) \cap \overbrace{\{p \in V \mid p(1) = 0\}}^{T}$.

   a) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ para cualquier transformación lineal $f: V \to V$ que cumpla las condiciones anteriores.

   b) Si $V = \mathbb{R}_3[x]$, probar que no existe $f: V \to V$ que cumpla simultáneamente i) y iii).

b) Observemos que iii) implica que $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.
$\Rightarrow \dim \mathrm{Nu}(f) \leq \dim \mathrm{Im}(f)$.
Como por el teo de la dimensión sabemos que suman $4 = \dim(V)$, podemos concluir que $\dim \mathrm{Im}(f) \geq 2$.

- Si fuera $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, debería ser $\dim \mathrm{Nu}(f) = 2$.
  Pero $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) \cap T$, entonces la única manera de que esto se cumpla sería si $\mathrm{Im}(f) \subseteq T$.
  Esto no ocurre ya que $1 + x - x^2 \in \mathrm{Im}(f)$ y $1 + x - x^2 \notin T$.

- Si fuera $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$, debería ser $\dim \mathrm{Nu}(f) = 1$.
  Pero $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) \cap T$.
  Por el teo de la dim para suma de subespacios,
  $\dim(\mathrm{Im}(f) + T) = \underbrace{\dim \mathrm{Im}(f)}_{3} + \underbrace{\dim T}_{3} - \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f) \cap T)}_{1} = 5$.

  ABS! porque $\dim V = 4$.

- Si fuera $\dim \mathrm{Im}(f) = 4$, sería $\mathrm{Im}(f) = V$,
  $\mathrm{Nu}(f) = V \cap T = T$, pero entonces
  $\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Nu}(f) = 4 + 3 = 7 \neq \dim(V) = 4$, ABS!

Analizados todos los casos, concluimos que no existe $f: V \to V$ tal que cumpla (i) y (iii).

Otra: Por el teo dim para suma de subesp,

$\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f) + T)}_{4} = \dim \mathrm{Im}(f) + \underbrace{\dim T}_{3} - \dim(\overbrace{\mathrm{Im}(f) \cap T}^{\mathrm{Nu}(f)})$ (*)

Como sabemos que $\mathrm{Im}(f) \not\subseteq T$ (pues contiene al polinomio $1 + x - x^2$),
$\dim(\mathrm{Im}(f) + T) > \dim T = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f) + T) = 4$

Reemplazando este valor en (*) obtenemos $4 = \dim \mathrm{Im}(f) + 3 - \dim \mathrm{Nu}(f)$

$\rightsquigarrow 1 = \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Nu}(f)$

Esto implicaría que uno es par y el otro impar, luego su suma es impar así que no puede ser 4, ABS!

2. Sean $\underbrace{A}_{} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ y $\underbrace{B}_{} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ tales que $\det(\underbrace{A \cdot B}_{4\times 4}) \neq \det(\underbrace{B \cdot A}_{5\times 5})$. Probar que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 4$.

Sean $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ la t.l. tal que $A = [f]$ $(f(x) = A \cdot x)$
$g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ la t.l. tal que $B = [g]$
La condición es que $\det([f \circ g]) \neq \det([g \circ f])$, y tenemos que probar $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Im}(g) = 4$.

$\mathbb{R}^5 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^5$, $g \circ f$

Veamos que $g \circ f$ NO puede ser isomorfismo:
$\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$, pero como
$\dim \mathrm{Im}(g) + \dim \mathrm{Nu}(g) = 4$ (teo de la dimensión),
sabemos que $\dim \mathrm{Im}(g) \leq 4$.
Luego también $\dim \mathrm{Im}(g \circ f) \leq 4 < 5$
$\Rightarrow g \circ f$ no es epi $\Rightarrow$ no es iso
$\Rightarrow \det([g \circ f]) = 0$.

Por lo tanto, para que $\det([f \circ g]) \neq \det([g \circ f])$ necesitamos que $f \circ g$ sea un isomorfismo.

$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^5 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$, $f \circ g$

Como $f \circ g$ es iso, $\dim \mathrm{Im}(f \circ g) = 4$.
Pero $\mathbb{R}^4 \supseteq \mathrm{Im}(f) \supseteq \mathrm{Im}(f \circ g)$
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$
$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = 4$ ✓

Como $\mathrm{Im}(f \circ g) = f(\mathrm{Im}(g))$, resulta que
$\underbrace{\dim \mathrm{Im}(f \circ g)}_{=4 \text{ por hipótesis}} \leq \dim \mathrm{Im}(g)$, como $\dim \mathrm{Im}(g) \leq 4$ (de nuevo x teo de la dimensión)

concluimos $\dim \mathrm{Im}(g) = 4$ ✓

3. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, B una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Sean $v \in V$ y $S, T \subset V$ subespacios tales que

   $[v]_B = (2, 2, -2, 1)$, $S^\circ = \langle \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_3 + 2\varphi_4 \rangle$ y $T^\circ = \langle \varphi_1 - 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 8\varphi_4, \varphi_2 - 2\varphi_4 \rangle$.

   a) Hallar $\dim(S + T)$. b) Decidir si $v \in S \cap T$.

a) Recordemos que $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$, y que
$\dim(S+T)^\circ = n - \dim(S+T) = 4 - \dim(S+T)$
Así que bastará calcular $S^\circ \cap T^\circ$.
Tomando coordenadas en base B^* podemos decir que
$S^\circ = \langle (1\ -1\ 0\ 0), (0\ 0\ 1\ 2) \rangle$,
$T^\circ = \langle (1\ -2\ 3\ 8), (0\ 1\ 0\ -2) \rangle$

$\alpha(1\ -1\ 0\ 0) + \beta(0\ 0\ 1\ 2) = \gamma(1\ -2\ 3\ 8) + \delta(0\ 1\ 0\ -2)$
$(\alpha\ -\alpha\ \beta\ 2\beta) = (\gamma\ -2\gamma+\delta\ 3\gamma\ 8\gamma-2\delta)$

$\rightarrow \gamma = \alpha$ (mirando la 1ra coordenada)
$(\alpha\ -\alpha\ \beta\ 2\beta) = (\alpha\ -2\alpha+\delta\ 3\alpha\ 8\alpha-2\delta)$

$\rightarrow \beta = 3\alpha$ (mirando la 3ra coordenada)
$(\alpha\ -\alpha\ 3\alpha\ 6\alpha) = (\alpha\ -2\alpha+\delta\ 3\alpha\ 8\alpha-2\delta)$

$\rightarrow \delta = \alpha$
$(\alpha\ -\alpha\ 3\alpha\ 6\alpha) = \alpha \cdot (1\ -1\ 3\ 6)$

$\Rightarrow S^\circ \cap T^\circ = \langle \varphi_1 - \varphi_2 + 3\varphi_3 + 6\varphi_4 \rangle$
$\Rightarrow \dim S^\circ \cap T^\circ = 1 = \dim(S+T)^\circ$
$\Rightarrow \dim(S+T) = 4 - \dim(S+T)^\circ = 3$ ✓

3. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, B una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Sean $v \in V$ y $S, T \subset V$ subespacios tales que

   $[v]_B = (2, 2, -2, 1)$, $S^\circ = \langle \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_3 + 2\varphi_4 \rangle$ y $T^\circ = \langle \varphi_1 - 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 8\varphi_4, \varphi_2 - 2\varphi_4 \rangle$.

   a) Hallar $\dim(S + T)$. b) Decidir si $v \in S \cap T$.

b) $v \in S \cap T \iff v \in S$ y $v \in T$
Vale (visto en la teórica) que $v \in S \iff \forall \varphi \in S^\circ, \varphi(v) = 0$

$[v]_B = (\underbrace{\varphi_1(v)}_{2}, \underbrace{\varphi_2(v)}_{2}, \underbrace{\varphi_3(v)}_{-2}, \underbrace{\varphi_4(v)}_{1})$ (pues $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ es la base dual de B)

$(\varphi_1 - \varphi_2)(v) = 2 - 2 = 0$
$(\varphi_3 + 2\varphi_4)(v) = -2 + 2 \cdot 1 = 0$
$\Rightarrow v \in S$ porque toda función de S° se anula en v

$(\varphi_1 - 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 8\varphi_4)(v) = 2 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = 0$
$(\varphi_2 - 2\varphi_4)(v) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$
$\Rightarrow v \in T$

conclusión: $v \in S \cap T$ ✓

4. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

   $\det(v_1 + v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid 2v_2 - 2v_3) = 16.$

   Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

   $f(v_1) = (1, 2, 3)$, $f(v_2) = (3, 0, -1)$ y $f(v_3) = (2, 4, 5)$. $\Rightarrow [f]_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   Calcular el determinante de la matriz $[f]_B$.

$[f]_B = C(E,B) \cdot [f]_{BE}$ Como det es una función multiplicativa,

$\Rightarrow \det([f]_B) = \det(C(E,B)) \cdot \det([f]_{BE})$
$= \det(C(B,E)^{-1}) \cdot \det([f]_{BE})$ y $\boxed{C(B,E) = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)}$
$= \dfrac{1}{\det(C(B,E))} \cdot \det([f]_{BE}) = \dfrac{6}{2} = 3$

$16 = \det(v_1 + v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid 2v_2 - 2v_3)$
$= 2 \cdot \det(v_1 + v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid v_2 - v_3)$
$= 2 \cdot \det(4v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid v_2 - v_3)$ (le resto C_2 a C_1)
$= 8 \cdot \det(v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid v_2 - v_3)$
$= 8 \cdot \det(v_2 \mid v_1 \mid -v_3)$ le sumo $3C_1$ a C_2, le resto C_1 a C_3
$= -8 \cdot \det(v_2 \mid v_1 \mid v_3)$
$= (-8) \cdot (-1) \cdot \det(v_1 \mid v_2 \mid v_3)$
$= 8 \cdot \det(v_1 \mid v_2 \mid v_3) \Rightarrow \det(v_1 \mid v_2 \mid v_3) = 2$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = -4 + 36 - (-4) - 30 = 6$

ALTERNATIVA:

$16 = \det(v_1 + v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid 2v_2 - 2v_3)$

$\det(v_1 \mid v_1 - 3v_2 \mid 2v_2 - 2v_3) + \det(v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid 2v_2 - 2v_3)$

×

$= \det(v_1 \mid -3v_2 \mid -2v_3) + \det(v_2 \mid v_1 \mid -2v_3)$
$= 6 \det(v_1 \mid v_2 \mid v_3) - 2 \det(v_2 \mid v_1 \mid v_3)$
$= 6 \det(v_1 \mid v_2 \mid v_3) + 2 \det(v_1 \mid v_2 \mid v_3) = 8 \underbrace{\det(v_1 \mid v_2 \mid v_3)}_{2}$