Álgebra Lineal - Clase 19

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Método de Gram-Schmidt.
- Complemento ortogonal.
- Proyección ortogonal.
- Distancia de un punto a un subespacio.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 8 (Sección 8.2).

Conjuntos ortogonales y ortonormales

Recordar:

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$-e.v. con p.i.

- $v, w \in V$ son ortogonales si $\langle v, w \rangle = 0$.
- $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$.
- $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ es un conjunto ortonormal si es ortogonal y $\|v_i\| = 1$ $\forall 1 \leq i \leq r$.
- Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es l.i.
- $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ ortogonal tal que $v_i \neq 0$ $\forall 1 \leq i \leq r$ y $v \in < v_1, \dots, v_r > \Rightarrow v = \sum_{j=1}^{r} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} . v_j$.
- $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ ortonormal y $v \in < v_1, \dots, v_r > \Rightarrow$ $v = \sum_{j=1}^{r} \langle v, v_j \rangle . v_j$.

Ejemplo.

Se considera $\mathbb{R}^2$ con el p.i. definido por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3\, x_2 y_2.$$

Hallar una base de $\mathbb{R}^2$ ortonormal para $\langle , \rangle$.

Elegimos $v_1 \in \mathbb{R}^2$, $v_1 \neq 0$. Por ejemplo, $(1, 0)$.
Buscamos $v_2 = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ortogonal v_1:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle (1, 0), (y_1, y_2) \rangle = y_1 - y_2$$
$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \iff y_1 = y_2$$

Por ejemplo, $v_2 = (1, 1)$.
$\Rightarrow B_0 = \{(1, 0), (1, 1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ para $\langle , \rangle$.

- $\|(1, 0)\| = 1$,
- $\|(1, 1)\| = \langle (1, 1), (1, 1) \rangle^{\frac{1}{2}} = (1 - 1 - 1 + 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow B = \left\{ (1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ para $\langle , \rangle$.

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Proposición

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Existe un base ortonormal $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ de V tal que $< v_1, \dots, v_k > = < w_1, \dots, w_k > \forall 1 \leq k \leq n$.

Demostración.

Recursivamente, se construye una base ortogonal $\{z_1, \dots, z_n\}$ de V tal que $< z_1, \dots, z_k > = < v_1, \dots, v_k > \forall 1 \leq k \leq n$. Normalizando los z_i se obtiene la base ortonormal buscada.

(1) $z_1 = v_1$ satisface $< z_1 > = < v_1 >$.

(2) $z_2 \in V$ con $\langle z_2, z_1 \rangle = 0$ y tal que $< z_1, z_2 > = < v_1, v_2 >$.

$z_2 = v_2 + a v_1$ con a tal que $\langle z_2, z_1 \rangle = 0$.

$\langle z_2, z_1 \rangle = \langle v_2 + a v_1, z_1 \rangle = \langle v_2, z_1 \rangle + a \langle v_1, z_1 \rangle = \langle v_2, z_1 \rangle + a \|z_1\|^2$

$\langle z_2, z_1 \rangle = 0 \iff a = -\frac{\langle v_2, z_1 \rangle}{\|z_1\|^2}$.

$\Rightarrow z_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, z_1 \rangle}{\|z_1\|^2} . z_1$

$(r+1)$ Supongamos construidos $z_1, \ldots, z_r \in V$ tales que

- $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.
- $< z_1, \ldots, z_k > = < v_1, \ldots, v_k > \quad \forall\, 1 \leq k \leq r$.

Buscamos $z_{r+1} = v_{r+1} - v$ con $v \in < z_1, \ldots, z_r >$ tal que $\langle z_{r+1}, z_j \rangle = 0 \ \forall 1 \leq j \leq r$.

$$\langle z_{r+1}, z_j \rangle = \langle v_{r+1} - v, z_j \rangle = \langle v_{r+1}, z_j \rangle - \langle v, z_j \rangle = 0$$
$$\iff \langle v, z_j \rangle = \langle v_{r+1}, z_j \rangle$$

$\{z_1, \ldots, z_r\}$ ortogonal $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v, z_i \rangle}{\|z_i\|^2}.z_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, z_i \rangle}{\|z_i\|^2}.z_i$

$\Rightarrow z_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, z_i \rangle}{\|z_i\|^2}.z_i$ verifica:

- $\forall 1 \leq j \leq r$, $\langle z_{r+1}, z_j \rangle = \langle z_{r+1}, z_j \rangle - \langle v, z_j \rangle = 0$.
- $< z_1, \ldots, z_r, z_{r+1} > = < z_1, \ldots, z_r, v_{r+1} > =$
  $< z_1, \ldots, z_r > + < v_{r+1} > = < v_1, \ldots, v_r, v_{r+1} >$.

Si $w_i = \frac{1}{\|z_i\|} z_i \ \forall 1 \leq i \leq n$, entonces $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base ortonormal de V con las condiciones pedidas. $\square$

Complemento ortogonal

Definición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. y sea $S \subseteq V$. El complemento ortogonal de S es $S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \ \forall\, s \in S\}$.

Observación.

$S^{\perp}$ es un subespacio de V:

i) $\langle 0, s \rangle = 0 \ \forall s \in S \Rightarrow 0 \in S^{\perp}$.

ii) $v, w \in S^{\perp} \Rightarrow \forall s \in S$, $\langle v, s \rangle = 0$ y $\langle w, s \rangle = 0$
$\Rightarrow \langle v + w, s \rangle = \langle v, s \rangle + \langle w, s \rangle = 0 + 0 = 0.$
$\Rightarrow v + w \in S^{\perp}$.

iii) $v \in S^{\perp}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) $\Rightarrow \forall s \in S$, $\langle \lambda v, s \rangle = \lambda \langle v, s \rangle = \lambda . 0 = 0.$
$\Rightarrow \lambda v \in S^{\perp}$.

Ejemplos.

(1) En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico:

$$\begin{aligned} \{(1,1)\}^{\perp} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \langle (x,y), (1,1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 0\} \ = \ < (1,-1) >. \end{aligned}$$

(2) En $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico:

$$\begin{aligned}
&< (1, i, 1+i) >^{\perp} = \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : \langle (x,y,z), (\alpha, \alpha i, \alpha(1+i)) \rangle = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{C}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : \overline{\alpha}\,(x.1 + y(-i) + z(1-i)) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{C}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x - iy + (1-i)z = 0\} \\
&= < (i, 1, 0), (i-1, 0, 1) >.
\end{aligned}$$

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. y sea $S \subseteq V$ un subespacio. Entonces:

i) $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

ii) $\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim V$.

En consecuencia, $S \oplus S^{\perp} = V$.

Demostración.

i) Sea $x \in S \cap S^{\perp}$.
$x \in S^{\perp} \Rightarrow \forall s \in S,\ \langle x, s\rangle = 0$.
Tomando $s = x \in S,\ \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

ii) Sean $\{s_1, \ldots, s_r\}$ una base de S y $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $\{s_1, \ldots, s_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V.
Gram-Schmidt $\rightsquigarrow B = \{w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ base ortonormal de V y $< w_1, \ldots, w_r > = < s_1, \ldots, s_r > = S$.
Veamos que $w_j \in S^{\perp}\ \forall r+1 \leq j \leq n$:

$$s \in S = < w_1, \ldots, w_r > \Rightarrow s = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i.$$

$$\Rightarrow \langle w_j, s\rangle = \left\langle w_j, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_i}\langle w_j, w_i\rangle = 0.$$

$S^{\perp}$ subespacio $\Rightarrow < w_{r+1}, \ldots, w_n > \subseteq S^{\perp}$
$\Rightarrow \dim(S^{\perp}) \geq \dim(< w_{r+1}, \ldots, w_n >) = n - r = n - \dim(S)$.

$$n \leq \dim(S) + \dim(S^{\perp}) \overset{S \cap S^{\perp} = \{0\}}{=} \dim(S + S^{\perp}) \leq \dim(V) = n.$$

$\Rightarrow \dim(S) + \dim(S^{\perp}) = \dim(V)$.

Más aún, $S^{\perp} = < w_{r+1}, \ldots, w_n >$. $\square$

Proposición.

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. y sea S un subespacio de V. Entonces $(S^\perp)^\perp = S$.

Demostración.

- $S \subseteq (S^\perp)^\perp = \{v \in V : \langle v, t\rangle = 0\ \forall t \in S^\perp\}$:
  $s \in S \Rightarrow \forall t \in S^\perp$, $\langle s, t\rangle = \overline{\langle t, s\rangle} = 0 \Rightarrow s \in (S^\perp)^\perp$.
- $\dim((S^\perp)^\perp) = \dim(V) - \dim(S^\perp) = \dim S$.

$\Rightarrow S = (S^\perp)^\perp$. $\square$

Ejemplo.

Para el p.i. canónico de $\mathbb{C}^4$, hallar el complemento ortogonal de $S = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{C}^4 / x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0; (1-i)x_2 + x_3 = 0\right\}$.

- $x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0 \Leftrightarrow \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, -i, 1, -1)\rangle = 0$.
- $(1-i)x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1+i, 1, 0)\rangle = 0$.

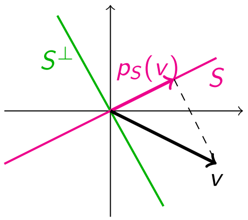
$\Rightarrow S = < (1, -i, 1, -1), (0, 1+i, 1, 0) >^\perp$

$\Rightarrow S^\perp = (< (1, -i, 1, -1), (0, 1+i, 1, 0) >^\perp)^\perp =$

$= < (1, -i, 1, -1), (0, 1+i, 1, 0) >$.

Proyección ortogonal

Definición.
Sea $(V, \langle,\rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i y sea $S \subseteq V$ un subespacio. Se define la proyección ortogonal sobre S como la transformación lineal $p_S : V \to V$ que satisface:
$p_S(s) = s \ \forall s \in S$ y $p_S(t) = 0 \ \forall t \in S^{\perp}$.



$B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$
base de V tal que
$\{v_1, \dots, v_r\}$ es base de S y
$\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es base de $S^{\perp}$
$\Rightarrow p_S : V \to V$ satisface:
$p_S(v_i) = v_i \quad \forall 1 \leq i \leq r$ y
$p_S(v_i) = 0 \quad \forall\, r+1 \leq i \leq n$.

Si $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal, $\forall v \in V$,

$$p_S(v) = p_S\Big(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} . v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} . p_S(v_i) = \sum_{i=1}^{r} \tfrac{\langle v, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} . v_i .$$

Ejemplo.

Sea $S = <(1,0,i),(1,1,2+i)>$. Hallar la proyección ortogonal $p_S : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.

Buscamos una base ortogonal de S:

$$\begin{aligned} z_1 &= s_1 = (1,0,i) \\ z_2 &= s_2 - \frac{\langle s_2, z_1\rangle}{\|z_1\|^2}.\, z_1 = (1,1,2+i) - \frac{\langle (1,1,2+i),(1,0,i)\rangle}{\|(1,0,i)\|^2}.\,(1,0,i) \\ &= (1,1,2+i) - (1-i).\,(1,0,i) = (i,1,1). \end{aligned}$$

Para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, vale

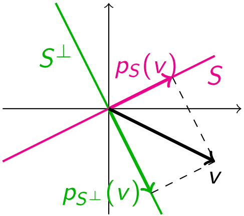
$$p_S(x) = \frac{\langle x,(1,0,i)\rangle}{\|(1,0,i)\|^2}(1,0,i) + \frac{\langle x,(i,1,1)\rangle}{\|(i,1,1)\|^2}(i,1,1)$$

$$= \left(\tfrac{x_1 - ix_3}{2}, 0, \tfrac{ix_1 + x_3}{2}\right) + \left(\tfrac{x_1 + ix_2 + ix_3}{3}, \tfrac{-ix_1 + x_2 + x_3}{3}, \tfrac{-ix_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$$

$$= \left(\tfrac{5}{6}\,x_1 + \tfrac{i}{3}\,x_2 - \tfrac{i}{6}\,x_3,\ -\tfrac{i}{3}\,x_1 + \tfrac{1}{3}\,x_2 + \tfrac{1}{3}\,x_3,\ \tfrac{i}{6}\,x_1 + \tfrac{1}{3}\,x_2 + \tfrac{5}{6}\,x_3\right).$$

Observación.

Sea V un e.v. de dimensión finita con p.i. y sea S un subespacio de V. Entonces $p_S + p_{S^\perp} = id_V$.



$B = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V tal que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de S y $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es base de $S^\perp$.

- $p_S(v) = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle . \, v_i$
- $p_{S^\perp}(v) = \sum_{i=r+1}^{n} \langle v, v_i \rangle . \, v_i.$

$\Rightarrow \forall v \in V, \; p_S(v) + p_{S^\perp}(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle . \, v_i = v.$

Ejemplo.

Sea $S = \{x \in \mathbb{C}^3 : ix_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Hallar la proyección ortogonal $p_S : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$.

$$S = \{x \in \mathbb{C}^3 : \langle x, (-i, 2, -1)\rangle = 0\} \Rightarrow S^\perp = \langle (-i, 2, -1)\rangle$$

$$\begin{aligned} p_{S^\perp}(x) &= \tfrac{\langle x,(-i,2,-1)\rangle}{\|(-i,2,-1)\|^2}(-i,2,-1) = \tfrac{ix_1+2x_2-x_3}{6}(-i,2,-1) \\ &= \left(\tfrac{x_1-2ix_2+ix_3}{6}, \tfrac{ix_1+2x_2-x_3}{3}, \tfrac{-ix_1-2x_2+x_3}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_S(x) = x - p_{S^\perp}(x) =$$

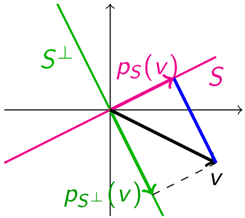
$$= \left(\tfrac{5}{6}\, x_1 + \tfrac{i}{3}\, x_2 - \tfrac{i}{6}\, x_3,\ -\tfrac{i}{3}\, x_1 + \tfrac{1}{3}\, x_2 + \tfrac{1}{3}\, x_3,\ \tfrac{i}{6}\, x_1 + \tfrac{1}{3}\, x_2 + \tfrac{5}{6}\, x_3\right).$$

Distancia de un punto a un subespacio

Definición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. y sea $S \subseteq V$. Para $v \in V$ se define la distancia de v a S como

$$d(v, S) = \inf\{d(v, s) : s \in S\} = \inf\{\|v - s\| : s \in S\}.$$

Proposición.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. de dimensión finita con p.i. y sea $S \subseteq V$ un subespacio. Para cada $v \in V$, el punto de S a menor distancia de v es $p_S(v)$ y $d(v, S) = \|v - p_S(v)\|$.



$$\begin{aligned} d(v, S) &= \|v - p_S(v)\| \\ &= \|p_{S^\perp}(v)\| \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V tal que $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es una base de S. Para cada $s \in S$,

$$v - s = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle . v_i - \sum_{i=1}^{r} \langle s, v_i \rangle . v_i = \sum_{i=1}^{r} \langle v - s, v_i \rangle . v_i + \sum_{i=r+1}^{n} \langle v, v_i \rangle . v_i$$

$$\|v - s\|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v - s, v_i \rangle|^2 + \sum_{i=r+1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2 \geq \sum_{i=r+1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$$

y la igualdad vale si y sólo si

$$|\langle v - s, v_i \rangle| = 0 \ \forall 1 \leq i \leq r \iff \langle s, v_i \rangle = \langle v, v_i \rangle \ \forall\, 1 \leq i \leq r$$
$$\iff s = \sum_{i=1}^{r} \langle s, v_i \rangle . v_i = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle . \, v_i = p_S(v).$$

$\Rightarrow$ el punto de S a menor distancia de v es $p_S(v)$ y $d(v, S) = \|v - p_S(v)\|$. $\square$

Ejemplo.

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Hallar la distancia de $(1, -1, 2)$ a S y el punto de S más cercano a $(1, -1, 2)$.

$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, (2, 2, -1)\rangle = 0\} = < (2, 2, -1) >^{\perp}$
$\Rightarrow S^{\perp} = < (2, 2, -1) >$.

$$\begin{aligned} p_{S^\perp}(1, -1, 2) &= \tfrac{\langle (1,-1,2),(2,2,-1)\rangle}{\|(2,2,-1)\|^2}.\,(2, 2, -1) \\ &= -\tfrac{2}{9}.\,(2, 2, -1) = \Big(-\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\Big), \end{aligned}$$

$$d((1, -1, 2), S) = \|p_{S^\perp}(1, -1, 2)\| = \Big\|\Big(-\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\Big)\Big\| = \tfrac{2}{3}.$$

El punto de S más cercano a $(1, -1, 2)$ es

$$\begin{aligned} p_S(1, -1, 2) &= (1, -1, 2) - p_{S^\perp}(1, -1, 2) \\ &= (1, -1, 2) - \Big(-\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\Big) = \Big(\tfrac{13}{9}, -\tfrac{5}{9}, \tfrac{16}{9}\Big). \end{aligned}$$