Álgebra Lineal - Clase 16

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Repaso de forma de Jordan nilpotente. Unicidad y semejanza de matrices nilpotentes.
- Forma de Jordan: caso general.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 7 (Secciones 7.1 y 7.2).

Forma de Jordan nilpotente (repaso)

$f : V \to V$ t.l. nilpotente definida en un K-e.v. de dimensión n.
$m_f = X^k \rightsquigarrow k$ es el índice de nilpotencia: $f^k = 0$ y $f^{k-1} \neq 0$

Para $1 \leq j \leq k-1$, B_j base de $\mathrm{Nu}(f^j)$.
Se construyen conjuntos $D_j = \{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\} \subset \mathrm{Nu}(f^j)$, para $j = k, k-1, \dots, 1$:

- D_k extiende B_{k-1} a una base de $V = \mathrm{Nu}(f^k)$.
- D_{k-1} extiende $B_{k-2} \cup f(D_k)$ a una base de $\mathrm{Nu}(f^{k-1})$.
- $\dots$
- D_1 extiende $\bigcup_{j=1}^{k-1} f^j(D_{j+1})$ a una base de $\mathrm{Nu}(f)$.

$$
\begin{array}{cccccc}
\{0\} \subsetneq & \overset{B_1}{\mathrm{Nu}(f)} & \subsetneq \cdots \subsetneq & \overset{B_{k-2}}{\mathrm{Nu}(f^{k-2})} \subsetneq & \overset{B_{k-1}}{\mathrm{Nu}(f^{k-1})} \subsetneq & V = \mathrm{Nu}(f^k) \\
 & f^{k-1}(D_k) & \dots & f^2(D_k) & f(D_k) & D_k \\
 & f^{k-2}(D_{k-1}) & \dots & f(D_{k-1}) & D_{k-1} & \\
 & f^{k-3}(D_{k-2}) & \dots & D_{k-2} & & \\
 & \dots & & & & \\
 & D_1 & & & &
\end{array}
$$

Con los vectores de la tabla, recorrida de arriba hacia abajo y, cada fila de derecha a izquierda, se obtiene una base de Jordan B para f.

$|f|_B$ es la forma de Jordan de f. Cada fila de la tabla genera un subespacio f-invariante que corresponde a un bloque de Jordan.

$$|f|_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix} \text{ con } J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n_i \times n_i}$$

y $k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$.

- El bloque de Jordan más grande es de $k \times k$, con $k =$ índice de nilpotencia de f.
- La cantidad total de bloques es $r = \dim(\mathrm{Nu}(f))$.
- La cantidad de bloques de tamaño j, $1 \leq j \leq k$, es $r_j = \# D_j$. Depende sólo de las dimensiones de los núcleos de las potencias de f.

Corolario
Sean J y J' en $K^{n\times n}$ formas de Jordan nilpotentes.
Si $J \sim J'$, entonces $J = J'$.

Demostración.
$J \sim J' \Rightarrow \text{rg}(J^i) = \text{rg}((J')^i)\ \forall i.$
$\Rightarrow$ J y J' tienen la cantidad de bloques de cada tamaño.
$\Rightarrow J = J'$. $\square$

Teorema
Sean V un K-e.v. de dimensión n y $f : V \to V$ una t.l. nilpotente.
Entonces existe una única forma de Jordan nilpotente $J_f \in K^{n\times n}$ tal que $|f|_B = J_f$ para alguna base B de V.

Teorema
Sean $A, B \in K^{n\times n}$ matrices nilpotentes. Sean J_A y J_B formas de Jordan nilpotentes en $K^{n\times n}$ tales que $A \sim J_A$ y $B \sim J_B$. Entonces $A \sim B \iff J_A = J_B$.

Ejemplo.

Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ son dos matrices tales que $m_A = m_B = X^3$, entonces $A \sim B$.

Basta ver que existe una única forma de Jordan nilpotente $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $m_J = X^3$.
En tal caso, $J_A = J_B = J$, con lo cual $A \sim B$.

$m_J = X^3 \Rightarrow$ el bloque más grande en J es de 3×3.
$J \in \mathbb{R}^{4\times 4} \Rightarrow$ la única posibilidad es que esté formada por un bloque de 3×3 y otro de 1×1:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array} \right).$$

Forma de Jordan de una transformación lineal

Un caso particular.

Sea V un K-e.v. de dimensión n y sea $f : V \to V$ una t.l. tal que $m_f = (X - \lambda)^k$ para algún $k \leq n$.

$(f - \lambda id_V)^k = 0$ y $(f - \lambda id_V)^{k-1} \neq 0$

$f_\lambda = f - \lambda id_V$ nilpotente de índice $k \Rightarrow \exists B$ base de V tal que

$$|f_\lambda|_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix} \text{ con } J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n_i \times n_i} \text{ y}$$

$k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

$$|f|_B = |f - \lambda id_V|_B + |\lambda id_V|_B = |f_\lambda|_B + \lambda.\, I_n$$

$$|f|_B = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r(\lambda) \end{pmatrix} \text{ con } J_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n_i \times n_i}$$

y $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$.

Forma de Jordan - Existencia

Lema

Sea V un K e.v. de dimensión finita. Sea $f : V \to V$ una t.l. tal que $m_f = P.\,Q$ con $(P : Q) = 1$. Entonces:

1. $\mathrm{Nu}(P(f))$ y $\mathrm{Nu}(Q(f))$ son subespacios invariantes por f,
2. $V = \mathrm{Nu}(P(f)) \oplus \mathrm{Nu}(Q(f))$,
3. $m_{f_{|_{\mathrm{Nu}(P(f))}}} = P$ y $m_{f_{|_{\mathrm{Nu}(Q(f))}}} = Q$.

Demostración.

1. $v \in \mathrm{Nu}(P(f)) \Rightarrow P(f)(v) = 0$.

   $P(f)(f(v)) = (P(f) \circ f)(v) = ((P(X).X)(f))(v) =$
   $((X.P(X)(f))(v) = (f \circ P(f))(v) = f(P(f)(v)) = f(0) = 0$

   $\Rightarrow f(v) \in \mathrm{Nu}(P(f))$.
   Luego, $\mathrm{Nu}(P(f)$ es f-invariante. De igual forma, $\mathrm{Nu}(Q(f))$ es f-invariante.

2. $V = \mathrm{Nu}(P(f)) \oplus \mathrm{Nu}(Q(f))$:
$(P : Q) = 1 \Rightarrow \exists S, T \in K[X]$ tales que $1 = S.P + T.Q$

$$id_V = S(f) \circ P(f) + T(f) \circ Q(f).$$

Sea $v \in \mathrm{Nu}(P(f)) \cap \mathrm{Nu}(Q(f))$. Entonces

$$\begin{aligned} v = id_V(v) &= S(f)\big(P(f)(v)\big) + T(f)\big(Q(f)(v)\big) \\ &= S(f)(0) + T(f)(0) = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{Nu}(P(f)) \cap \mathrm{Nu}(Q(f)) = \{0\}$.
Para cada $v \in V$,

$$v = (S(f) \circ P(f))(v) + (T(f) \circ Q(f))(v) = w + u$$

Como $Q(f) \circ S(f) = (Q.S)(f) = (S.Q)(f) = S(f) \circ Q(f)$,

$$\begin{aligned} Q(f)(w) &= (Q(f) \circ S(f) \circ P(f))(v) = S(f)\,((Q(f) \circ P(f))(v)) \\ &= S(f)(m_f(f)(v)) = S(f)(0) = 0, \end{aligned}$$

$\Rightarrow w \in \mathrm{Nu}(Q(f))$. Análogamente, $u \in \mathrm{Nu}(P(f))$.
$\Rightarrow \mathrm{Nu}(P(f)) + \mathrm{Nu}(Q(f)) = V$.

3. $m_{f|_{\mathrm{Nu}(P(f))}} = P$ y $m_{f|_{\mathrm{Nu}(Q(f))}} = Q$:

Sean f_1 y f_2 las restricciones de f a $\mathrm{Nu}(P(f))$ y $\mathrm{Nu}(Q(f))$ resp.

$V = \mathrm{Nu}(P(f)) \oplus \mathrm{Nu}(Q(f)) \Rightarrow m_f = \mathrm{mcm}(m_{f_1}, m_{f_2})$.

Si $P = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i X_i$, para $v \in \mathrm{Nu}(P(f))$,

$P(f_1)(v) = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i f_1^i(v) = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i f^i(v) = P(f)(v) = 0$

$\Rightarrow m_{f_1} \mid P$. Análogamente, $m_{f_2} \mid Q$.

$(P : Q) = 1 \Rightarrow (m_{f_1} : m_{f_2}) = 1$

$$P.Q = m_f = \mathrm{mcm}(m_{f_1}, m_{f_2}) = m_{f_1} . m_{f_2}$$

$\Rightarrow m_{f_1} = P$ y $m_{f_2} = Q$. $\square$

Teorema.

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una t.l. tal que m_f se factoriza linealmente sobre K. Entonces existe una base B de V, que llamamos una base de Jordan para f, tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_s \end{pmatrix} \quad \text{(forma de Jordan para } f\text{)},$$

donde, para cada $1 \leq i \leq s$, J_i es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^{(i)}) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_i, n_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix}$$

con $n_1^{(i)} \geq \dots \geq n_{r_i}^{(i)}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Para $\lambda \in K$ y $m \in \mathbb{N}$, $J(\lambda, m)$ es un bloque de Jordan de autovalor λ y tamaño $m \times m$.

Demostración.

Inducción en $n = \dim(V)$. Para $n = 1$ ✓

Supongamos que vale para K-e.v. de dimensión $m < n$.

Si $m_f = (X - \lambda)^k$, ya lo vimos. ✓

Supongamos que f tiene al menos dos autovalores distintos, $m_f = (X - \lambda_1)^{k_1} Q$ con $\mathrm{gr}(Q) \geq 1$ y $((X - \lambda_1)^{k_1} : Q) = 1$.

- $S = \mathrm{Nu}\big((f - \lambda_1 id_V)^{k_1}\big)$ y $T = \mathrm{Nu}(Q(f))$ son subespacios f-invariantes de V,
- $V = S \oplus T$, $0 < \dim(S) < n$ y $0 < \dim(T) < n$,
- $m_{f|_S} = (X - \lambda_1)^{k_1}$ y $m_{f|_T} = Q$.

Por HI para $f_1 = f|_S : S \to S$ y $f_2 = f|_T : T \to T$, existen bases B_1 de S y B_2 de T tales que $|f_1|_{B_1}$ y $|f_2|_{B_2}$ son formas de Jordan.

$\Rightarrow B = B_1 \cup B_2$ es base de V y $|f|_B = \begin{pmatrix} |f_1|_{B_1} & 0 \\ 0 & |f_2|_{B_2} \end{pmatrix}$.

$m_{f_1} = (X - \lambda_1)^{k_1}$ y $m_{f_2} = Q$, con $Q(\lambda_1) \neq 0$.

$\Rightarrow |f_1|_{B_1}$ está formada por bloques de Jordan de autovalor λ_1 y $|f_2|_{B_2}$ por bloques de Jordan de autovalores $\neq \lambda_1$.

$\Rightarrow |f|_B$ es una forma de Jordan. $\square$

Cómo hallar una base de Jordan y la forma de Jordan para f.

Si $m_f = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{k_i}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$,

$V = \mathrm{Nu}((f - \lambda_1 .\, id_V)^{k_1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Nu}((f - \lambda_r .\, id_V)^{k_r})$.

Para $i = 1, \ldots, r$:

- Considerar la restricción f_i de f a $S_i = \mathrm{Nu}((f - \lambda_i .\, id_V)^{k_i})$.
- $m_{f_i} = (X - \lambda_i)^{k_i} \Rightarrow f_{\lambda_i} = f_i - \lambda_i .\, id : S_i \to S_i$ es nilpotente de índice k_i.
- Hallar una base de Jordan B_i de S_i para f_{λ_i} y su forma de Jordan (caso nilpotente).

$B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ es una base de V y

$$|f|_B = \begin{pmatrix} |f_1|_{B_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |f_2|_{B_2} & \ldots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & |f_r|_{B_r} \end{pmatrix}$$

es una forma de Jordan para f.

Teorema.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces A es semejante a una forma de Jordan.

A una base B de K^n tal que $|f_A|_B$ es una forma de Jordan, la llamaremos una base de Jordan para A, y a la matriz $|f_A|_B$ una forma de Jordan para A.

Ejemplo.

Hallar una forma de Jordan semejante a A y una base de Jordan para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$.

$\mathcal{X}_A = (X-1)^2(X+1)^2$,
$m_A = (X-1)^2(X+1)$.

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

$J_1 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con autovalor 1 y
$J_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con autovalor -1.

$\mathbb{C}^4 = \mathrm{Nu}((A-I)^2) \oplus \mathrm{Nu}(A+I)$

- Base y forma de Jordan de $f_1 : S_1 \to S_1$, restricción de f_A a $S_1 = \mathrm{Nu}((A-I)^2)$.

  $m_{f_1} = (X-1)^2 \Rightarrow f_1 - id_{S_1}$ es nilpotente de índice 2.

  $$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  $\mathrm{Nu}(A-I) = <(1,1,1,0)>$ y
  $\mathrm{Nu}((A-I)^2) = <(1,1,1,0),(0,0,0,1)>$.

  Extendemos una base de $\mathrm{Nu}(A-I)$ a una de $\mathrm{Nu}((A-I)^2)$ con $e_4 = (0,0,0,1)$:

  $$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \subsetneq & \mathrm{Nu}(A-I) & \subsetneq & \mathrm{Nu}((A-I)^2) \\ & & (A-I).e_4 & & e_4 \end{array}$$

  $\Rightarrow B_1 = \{e_4, (A-I).e_4\} = \{(0,0,0,1),(2,2,2,0)\}$ es una base de Jordan para f_1 y la forma de Jordan de f_1 es
  $|f_1|_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Base y forma de Jordan de $f_2 : S_2 \to S_2$, restricción de f_A a $S_2 = \mathrm{Nu}(A+I)$.

  $m_{f_2} = X + 1 \Rightarrow f_2$ es diagonalizable.

  $$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  $\mathrm{Nu}(A+I) = < (0,1,0,0), (0,0,1,0) >$

  $\Rightarrow B_2 = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ es una base de Jordan para f_2 y la forma de Jordan de f_2 es $|f_2|_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$B = B_1 \cup B_2 = \{(0,0,0,1), (2,2,2,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ es una base de Jordan para A y una forma de Jordan para A es

$$J_A = \begin{pmatrix} |f_1|_{B_1} & 0 \\ 0 & |f_2|_{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Forma de Jordan - Unicidad y semejanza de matrices

Teorema.
Sean V un K-e.v. de dimensión n y $f : V \to V$ una t.l. tal que m_f se factoriza linealmente sobre K. Entonces existe una única forma de Jordan $J \in K^{n\times n}$ (salvo por el orden de los autovalores) tal que para alguna base B de V, $|f|_B = J$.

Teorema.
Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y sean J_A y J_B las formas de Jordan de A y B.
$A \sim B \iff J_A = J_B \quad$ (salvo el orden de los autovalores).

Demostración.
$(\Rightarrow)$ $A \sim B$, $A \sim J_A$ y $B \sim J_B \Rightarrow J_A \sim J_B$.
$\Rightarrow \exists f : K^n \to K^n$ t.l. y bases B_1 y B_2 de K^n tales que $|f|_{B_1} = J_A$ y $|f|_{B_2} = J_B$.
$\Rightarrow J_A = J_B$ salvo el orden de los autovalores (Teorema anterior).
$(\Leftarrow)$ $A \sim J_A$, $B \sim J_B$ y $J_A = J_B \Rightarrow A \sim B$. $\square$