Álgebra Lineal - Clase 7

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Matriz de una transformación lineal.
- Matriz de la composición y de la inversa. Cambios de base.
- Rango de una matriz.
- Equivalencia de matrices.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 3 (Secciones 3.5 y 3.6).

Matriz de una transformación lineal

Recordar: si $A \in K^{m\times n}$, $f_A \colon K^n \to K^m$, $f_A(x) = Ax$ es una t.l.

Definición.

Sea $f : V \to W$ una transformación lineal entre dos K-e.v. de dimensión finita. Sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W.

Supongamos que $(f(v_j))_{B_2} = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})$ $\forall 1 \leq j \leq n$.

Llamamos matriz de f en las bases B_1, B_2 a la matriz $|f|_{B_1B_2}$ en $K^{m\times n}$ definida por $(|f|_{B_1B_2})_{ij} = \alpha_{ij}$ $\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

$$|f|_{B_1B_2} = \left((f(v_1))^t_{B_2} \cdots (f(v_j))^t_{B_2} \cdots (f(v_n))^t_{B_2}\right)$$

Si $f : V \to V$ y $B_1 = B_2 = B$, notaremos $|f|_B = |f|_{BB}$.

Ejemplos.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + 3x_2)$,
   B_1 y B_2 las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

   $$f(1,0,0) = (1,1), \quad f(0,1,0) = (2,3), \quad f(0,0,1) = (-1,0).$$

   $$\Rightarrow |f|_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $f_A : K^n \to K^m$, $f_A(x) = Ax$ con $A \in K^{m \times n}$,
   E_1 y E_2 las bases canónicas de K^n y K^m respectivamente.
   $\Rightarrow |f|_{E_1 E_2} = A$.

3. $f : \mathbb{R}[X]_2 \to \mathbb{R}[X]_2$, $f(P) = P'$; $B_1 = B_2 = B = \{1, X, X^2\}$.

   $$f(1) = 0, \qquad f(X) = 1, \qquad f(X^2) = 2X$$

   $$(f(1))_B = (0,0,0), \ (f(X))_B = (1,0,0), \ (f(X^2))_B = (0,2,0)$$

   $$\Rightarrow |f|_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. V un K-e.v. de dimensión n, $id_V : V \to V$, $id_V(x) = x$, B_1 y B_2 dos bases de V.
   $\Rightarrow |id_V|_{B_1B_2} = C(B_1, B_2) \in K^{n\times n}$.

Proposición.

Si $f : V \to W$ es una t.l. y B_1 y B_2 son bases de V y W respectivamente, para cada $x \in V$, $|f|_{B_1B_2}.(x)_{B_1} = (f(x))_{B_2}$.

Demostración.

Supongamos que $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Para cada $1 \le j \le n$, la j-ésima columna de $|f|_{B_1B_2}$ es $C_j = (f(v_j))_{B_2}$.

Sea $x \in V$ y sea $(x)_{B_1} = (x_1, \ldots, x_n)$, es decir, $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j v_j$.

$$\begin{aligned} |f|_{B_1B_2}.(x)_{B_1} &= \sum_{j=1}^{n} x_j C_j = \sum_{j=1}^{n} x_j.(f(v_j))_{B_2} = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j)\Big)_{B_2} \\ &= \Big(f\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\Big)\Big)_{B_2} = (f(x))_{B_2}. \end{aligned}$$

Matriz de la composición y de la inversa

Proposición.

Sean V, W y U tres K-e.v. de dimensión finita y B_1, B_2 y B_3 bases de V, W y U respectivamente. Si $f: V \to W$ y $g: W \to U$ son transformaciones lineales,

$$|g \circ f|_{B_1 B_3} = |g|_{B_2 B_3} . |f|_{B_1 B_2} .$$

Demostración.

Sean $n = \dim V$, $m = \dim W$ y $r = \dim U$.

- $|g|_{B_2 B_3} \in K^{r \times m}$ y $|f|_{B_1 B_2} \in K^{m \times n} \Rightarrow |g|_{B_2 B_3} . |f|_{B_1 B_2} \in K^{r \times n}$.
- $|g \circ f|_{B_1 B_3} \in K^{r \times n}$.

Para cada $x \in V$:

$$\begin{aligned} |g|_{B_2 B_3} . |f|_{B_1 B_2} . (x)_{B_1} &= |g|_{B_2 B_3} . (f(x))_{B_2} = g(f(x))_{B_3} \\ &= (g \circ f(x))_{B_3} = |g \circ f|_{B_1 B_3} . (x)_{B_1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |g|_{B_2 B_3} . |f|_{B_1 B_2} = |g \circ f|_{B_1 B_3}$. $\square$

Corolario

Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, y B_1, B_2 bases de V y W respectivamente. Si $f : V \to W$ es un isomorfismo, entonces $|f^{-1}|_{B_2 B_1} = (|f|_{B_1 B_2})^{-1}$.

Demostración.

- $|f^{-1}|_{B_2 B_1} |f|_{B_1 B_2} = |f^{-1} \circ f|_{B_1} = |id_V|_{B_1} = I_n$
- $|f|_{B_1 B_2} |f^{-1}|_{B_2 B_1} = |f \circ f^{-1}|_{B_2} = |id_W|_{B_2} = I_n$. □

Cambios de base

Proposición.

Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal.
Si B_1, B_1' son bases de V y B_2, B_2' son bases de W, entonces

$$|f|_{B_1' B_2'} = C(B_2, B_2').|f|_{B_1 B_2}.C(B_1', B_1).$$

Demostración.

Se tiene que $f = id_W \circ f \circ id_V$.

$$\begin{aligned} |f|_{B_1' B_2'} &= |id_W \circ f \circ id_V|_{B_1' B_2'} = |id_W \circ f|_{B_1 B_2'} |id_V|_{B_1' B_1} \\ &= |id_W|_{B_2 B_2'}.|f|_{B_1 B_2}.|id_V|_{B_1' B_1} \\ &= C(B_2, B_2').|f|_{B_1 B_2}.C(B_1', B_1). \end{aligned}$$

$\square$

Rango de una matriz

Definición.

Sea $A \in K^{n\times m}$. Se llama rango columna de A, y se nota $\text{rg}_C(A)$, a la dimensión del subespacio de K^n generado por las columnas de A:

$$A = (C_1 \mid \cdots \mid C_m) \Rightarrow \text{rg}_C(A) = \dim(< C_1, \ldots, C_m >).$$

Observación.

Sea $f : V \to W$ una t.l. entre dos K-e.v. tales que $\dim V = m$ y $\dim W = n$. Sean B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente y consideremos $|f|_{B_1B_2} \in K^{n\times m}$.

$$\begin{aligned}\text{rg}_C(|f|_{B_1B_2}) &= \dim(< (f(v_1))_{B_2}, \ldots, (f(v_m))_{B_2} >)\\ &= \dim(< f(v_1), \ldots, f(v_m) >) = \dim(\text{Im}(f)).\end{aligned}$$

Proposición.

Sea $A \in K^{n \times m}$ y sea $S = \{x \in K^m \,/\, A.x = 0\}$. Entonces $\dim(S) = m - \mathrm{rg}_C(A)$.

Demostración.

Sea $f_A : K^m \to K^n$ definida por $f_A(x) = A.x$.

- $A = |f_A|_{EE'}$ (E y E' bases canónicas de K^m y K^n resp.)
- $S = \mathrm{Nu}(f_A)$.

$\dim(S) = \dim(\mathrm{Nu}(f_A)) = \dim(K^m) - \dim(\mathrm{Im}(f_A)) = m - \mathrm{rg}_C(A)$.

Ejemplo.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, A.x = 0\}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rg}_C(A) = \dim(< (1, -1, 1, 2), (-2, 2, -2, -4), (3, 1, 4, 0) >) = 2$.

$\Rightarrow \dim(S) = 3 - \mathrm{rg}_C(A) = 3 - 2 = 1$.

Definición.

Sea $A \in K^{n\times m}$. Se llama rango fila de A, y se nota $\text{rg}_F(A)$, a la dimensión del subespacio de K^m generado por las filas de A:

$$A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}_F(A) = \dim(< F_1, \dots, F_n >).$$

Ejemplo.

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{rg}_F(A) &= \dim(< (1,-2,3), (-1,2,1), (1,-2,4), (2,-4,0) >) \\ &= \dim(< (1,-2,0), (0,0,1) >) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{rg}_C(A) = \dim(< (1,-1,1,2), (-2,2,-2,-4), (3,1,4,0) >) = 2.$$

Veremos que, para toda $A \in K^{n\times m}$, $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A)$. A este número lo llamaremos el rango de A y lo notaremos $\mathrm{rg}(A)$.

Lema.
Sea $A \in K^{n\times m}$. Si $C \in GL(n, K)$ y $D \in GL(m, K)$, entonces $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_C(C.A.D)$.

Demostración.
Sea $f_A : K^m \to K^n$, $f_A(x) = A.x$.

- $|f_A|_{EE'} = A$ si E y E' son las bases canónicas de K^m y K^n $\Rightarrow \mathrm{rg}_C(A) = \dim(\mathrm{Im}(f_A))$.
- $D \in GL(m, K) \Rightarrow \exists B_1$ base de K^m tal que $D = C(B_1, E)$
  $C \in GL(n, K) \Rightarrow \exists B_2$ base de K^n tal que $C = C(E', B_2)$.
- $C.A.D = C(E', B_2).|f_A|_{EE'}.C(B_1, E) = |f_A|_{B_1B_2}$
  $\Rightarrow \mathrm{rg}_C(C.A.D) = \mathrm{rg}_C(|f_A|_{B_1B_2}) = \dim(\mathrm{Im}(f_A))$.

Luego, $\mathrm{rg}_C(A) = \dim(\mathrm{Im}(f_A)) = \mathrm{rg}_C(C.A.D)$. $\square$

Lema.

Sea $A \in K^{n\times m} - \{0\}$. Existen $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$, y matrices $C \in GL(n, K)$ y $D \in GL(m, K)$ tales que

$$(C.A.D)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{si } i = j > k \text{ o } i \neq j. \end{cases} \rightsquigarrow \ 1_k^{n\times m} \in K^{n\times m}.$$

Demostración.

Sea $f_A : K^m \to K^n$, $f_A(x) = A.x$.

Sean $\{v_1, \dots, v_s\}$ base de $\mathrm{Nu}(f_A)$ y $w_1, \dots, w_{m-s} \in K^m$ tales que $B_1 = \{w_1, \dots, w_{m-s}, v_1, \dots, v_s\}$ es una base de K^m.

$\Rightarrow \{f_A(w_1), \dots, f_A(w_{m-s})\}$ base de $\mathrm{Im}(f_A)$.

Sean $z_1, \dots, z_{n-m+s} \in K^n$ tales que

$B_2 = \{f_A(w_1), \dots, f_A(w_{m-s}), z_1, \dots, z_{n-m+s}\}$ es base de K^n.

$(f_A(w_i))_{B_2} = e_i \ \forall 1 \leq i \leq k = m - s$ y $(f_A(v_i))_{B_2} = 0 \ \forall 1 \leq i \leq s$.

$$\Rightarrow (|f_A|_{B_1 B_2})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{si } i = j > k \text{ o } i \neq j \end{cases}$$

y $|f_A|_{B_1 B_2} = \underbrace{C(E', B_2)}_{C} . \underbrace{|f_A|_{EE'}}_{A} . \underbrace{C(B_1, E)}_{D}$ $\square$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

$\{(-1,1,0,1),(-1,0,1,0)\}$ base de $\mathrm{Nu}(f_A)$.

$B_1 = \{(0,0,1,0),(0,0,0,1),(-1,1,0,1),(-1,0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow \{f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)\} = \{(1,0,1),(1,1,2)\}$ base de $\mathrm{Im}(f)$.

$B_2 = \{(1,0,1),(1,1,2),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

$$C = C(E', B_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ D = C(B_1, E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C\,A\,D = |f_A|_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1_2^{3\times 4}$$

Teorema.
Sea $A \in K^{n\times m}$. Entonces $\mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_F(A)$.

Demostración.
Si $A = 0$ ✓
Si $A \in K^{n\times m} - \{0\}$, existen $C \in GL(n, K)$, $D \in GL(m, K)$ y $k \in \mathbb{N}$, tales que $C\,A\,D = 1_k^{n\times m}$.
$\Rightarrow \mathrm{rg}_C(A) = \mathrm{rg}_C(C\,A\,D) = k$.

Transponemos:

$(C\,A\,D)^t = D^t A^t C^t$ y $(1_k^{n\times m})^t = 1_k^{m\times n}$

$\Rightarrow D^t A^t C^t = 1_k^{m\times n}$ con $D^t \in GL(m, K)$ y $C^t \in GL(n, K)$

$\Rightarrow \mathrm{rg}_C(A^t) = \mathrm{rg}_C(D^t A^t C^t) = k$.

$\Rightarrow \mathrm{rg}_F(A) = \mathrm{rg}_C(A^t) = k = \mathrm{rg}_C(A)$. $\square$

Equivalencia de matrices

Definición.
Sean $A, B \in K^{n\times m}$. Se dice que A es equivalente a B, y se nota $A \equiv B$, si existen $C \in GL(n,K)$ y $D \in GL(m,K)$ tales que $A = C\,B\,D$.

$\equiv$ es una relación de equivalencia en $K^{n\times m}$.

Proposición.
Sean $A, B \in K^{n\times m}$. Entonces $A \equiv B \iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Demostración.

($\Rightarrow$) $A = C\,B\,D$ con C, D inversibles $\Rightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

($\Leftarrow$) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = k$
$\Rightarrow \exists C_1, C_2 \in GL(n,K)$ y $D_1, D_2 \in GL(m,K)$ tales que $C_1\,A\,D_1 = 1_k^{n\times m}$ y $C_2\,B\,D_2 = 1_k^{n\times m}$.
$\Rightarrow C_1\,A\,D_1 = C_2\,B\,D_2 \Rightarrow A = \underbrace{(C_1^{-1}C_2)}_{C}\,B\,\underbrace{(D_2D_1^{-1})}_{D} = C\,B\,D$
$\Rightarrow A \equiv B$. □

Proposición.

Sean $A, B \in K^{n\times m}$. Entonces:
$A \equiv B \iff \exists f : K^m \to K^n$ t.l. y bases B_1, B_1' de K^m y B_2, B_2' de K^n tales que $|f|_{B_1 B_2} = A$ y $|f|_{B_1' B_2'} = B$.

Demostración.

$(\Leftarrow)$ $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(B) \Rightarrow A \equiv B$.

$(\Rightarrow)$ Sea $f : K^m \to K^n$, $f(x) = B.x$
$B = |f|_{EE'}$, con E y E' las bases canónicas de K^m y K^n resp .
$A \equiv B \Rightarrow \exists C \in GL(n, K)$ y $D \in GL(m, K)$: $A = C\,B\,D$.
Sean B_1 base de K^m tal que $D = C(B_1, E)$ y B_2 base de K^n tal que $C = C(E', B_2)$.
$\Rightarrow A = C\,B\,D = C(E', B_2)|f|_{EE'}C(B_1, E) = |f|_{B_1 B_2}$. $\square$