PRODUCTOS INTERNOS I

MENÚ:
- EJEMPLOS
- MATRIZ DE UN P.I.

RECORDAR: $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. V un K-EV. UN PRODUCTO INTERNO EN V ES UNA FUNCIÓN $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to K$ TAL QUE

i) $x \longmapsto \langle x, y \rangle \in V^* \quad \forall y \in V$.

ii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y$.

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x$, Y VALE 0 SII $x = 0$.

EJEMPLOS:

1) $V = \mathbb{R}^2$. DEFINIMOS

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot x_1 y_1 - 2 x_1 y_2 - 2 x_2 y_1 + 6 x_2 y_2$$

OBS: $\langle x, y \rangle = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$= (x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \langle (1,0), (1,0) \rangle & \langle (1,0), (0,1) \rangle \\ \langle (0,1), (1,0) \rangle & \langle (0,1), (0,1) \rangle \end{pmatrix}}_{\text{MATRIZ DEL P.I.}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

LO CUAL PRUEBA i, ii; PARA iii:

$\langle x,x\rangle = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = (x_1-2x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0,$

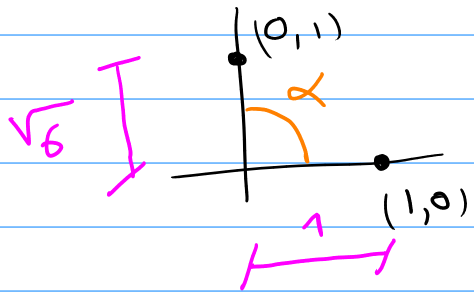
Y VALE 0 SII $x_1 - 2x_2 = x_2 = 0$ SII $x = 0$.

ALGUNAS CUENTAS:

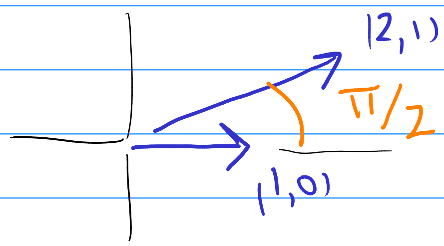
- $\|(1,0)\| = \sqrt{(1-2\,0)^2 + 2\cdot 0^2} = 1$
- $\|(0,1)\| = \sqrt{(0-2\cdot 1)^2 + 2\cdot 1^2} = \sqrt{6}$
- SI $\alpha = \measuredangle((1,0),(0,1))$ ⇝ ÁNGULO,

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle (1,0),(0,1)\rangle}{1\cdot\sqrt{6}} = -2/\sqrt{6}$$

⇝ $\alpha = 2{,}526\ldots$



NOTA2: $\langle (1,0),(2,1)\rangle = 0$



⇝ $\{(1,0),(2,1)\}$ ES UNA BASE ORTOGONAL

//

2) $V = \mathbb{C}^2 \quad (K = \mathbb{C})$,

$$\langle x,y\rangle = 3x_1\bar{y}_1 + 2x_1\bar{y}_2 + 2x_2\bar{y}_1 + 1\cdot x_2\bar{y}_2$$

$$= (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

OBS: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ CUMPLE $\overline{A^t} = A$

$$\rightsquigarrow \overline{\langle x,y\rangle} = \overline{\langle x,y\rangle}^t = (\bar{x}\bar{A}\bar{y}^t)^t$$

$$= y\bar{A}^t\bar{x}^t = \langle y,x\rangle$$

ANALICEMOS iii:

(RECORDAR: $|z+w|^2 = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2$, $z,w \in \mathbb{C}$)

$$\langle x,x\rangle = 3x_1\bar{x}_1 + 2x_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1x_2 + x_2\bar{x}_2$$

$$= 3|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2\left(|x_1+x_2|^2 - |x_1|^2 - |x_2|^2\right)$$

$$= 2|x_1+x_2|^2 + |x_1|^2 - |x_2|^2$$

$\rightsquigarrow$ VALE 0 (AL MENOS) PARA $x = (x_1, -x_1)$;

$\langle\, ,\rangle$ NO ES UN P.I.

3) $\ell^2 = \{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 1} a_n^2 < \infty \}$

AFIRMO:

- ℓ^2 ES UN SUBESP DE $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\langle a, b \rangle = \sum_{n\geq 1} a_n b_n$ DA UN PI EN

EN EFECTO, PARA $a \in \ell^2$ DENOTEMOS, PARA CADA $k \geq 1$,

$$a^{(k)} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k .$$

ASÍ, $\sum_{n=1}^{k} |a_n b_n| = \langle (|a_1|, \dots, |a_k|), (|b_1|, \dots, |b_k|) \rangle_{\mathbb{R}^k}$

$$\leq \|a^{(k)}\|_{\mathbb{R}^k} \|b^{(k)}\|_{\mathbb{R}^k} \leq \underbrace{\left(\sum_{n\geq 1} a_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n\geq 1} b_n^2 \right)^{1/2}}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ FIJO}}$$

$\xrightarrow[k \to +\infty]{}$ $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ CONVERGE (ABSOLUT.)

AHORA, SEAN $a, b \in \ell^2$. TENEMOS, PARA CADA $k \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)^2 = \|a^{(k)} + b^{(k)}\|_{\mathbb{R}^k}^2$$

$$\leq \left(\|a^{(k)}\|_{\mathbb{R}^k} + \|b^{(k)}\|_{\mathbb{R}^k} \right)^2 \leq \underbrace{\left(\|a\|_{\ell^2} + \|b\|_{\ell^2} \right)^2}_{\in \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ FIJO}}$$

$\xrightarrow[k \to +\infty]{}$ $\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n)^2 < +\infty$, i.e.: $a + b \in \ell^2$.

OBS: SI $e^i = (0,\dots,0,1,0,\dots) \in \ell^2$,

ENTONCES $\langle e^i, e^j \rangle = \delta_{ij}$.

PERO $\{e^i\}_{i\geq 1}$ NO ES UNA BASE:

$$\langle \{e^i\}_{i\geq 1} \rangle = \{ a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_m = 0 \ \forall m \gg 0 \}$$

$$\not\ni (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots) \longrightarrow \text{NORMA: } \pi/\sqrt{6}$$

4) DADO $v \in \mathbb{R}^3$, SEA $L_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $w \mapsto \underbrace{v \times w}_{\text{PROD. VECTORIAL}}$.
DEFINIMOS

$$\langle v, w \rangle = Tr(\underbrace{L_v \circ L_w}_{\in End(\mathbb{R}^3)}), \quad v, w \in \mathbb{R}^3.$$

- $Tr(L \circ L') = Tr(L' \circ L) \quad \forall L, L' \in End(\mathbb{R}^3)$

  $\rightsquigarrow$ ES SIMÉTRICO

- $v \times (w + w') = v \times w + v \times w' \Rightarrow L_{w+w'} = L_w + L_{w'}$

  $\Rightarrow L \circ (L_{w+w'}) = L \circ L_w + L \circ L_{w'} \quad \forall L$

  $\rightsquigarrow$ ES ADITIVO EN w

- $v \times (\lambda w) = \lambda\, v \times w \rightsquigarrow$ SACA ESCALARES

$$\underbrace{e_i \times e_j \times}_{=\pm e_k}$$

- $(\overbrace{L_v \circ L_v}^{T_v})(w) = L_v(v \times w) = v \times (v \times w)$;

CALCULEMOS $\operatorname{Tr}[T_v]_E$, CON E LA CANÓNICA.

- $$v \times (v \times e_1) = v \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & v_3 & -v_2 \end{vmatrix}$$

$$= (-v_2^2 - v_3^2, *, *)$$

- $$v \times (v \times e_2) = v \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ -v_3 & 0 & v_1 \end{vmatrix}$$

$$= (*, -v_1^2 - v_3^2, *)$$

- $$v \times (v \times e_3) = v \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (*, *, -v_1^2 - v_2^2)$$

ASÍ, $$[T_v]_E = \begin{pmatrix} -v_2^2 - v_3^2 & * & * \\ * & -v_1^2 - v_3^2 & * \\ * & * & -v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \langle v, v \rangle = -2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$;

NO ES UN P.I. PERO $[v, w] = -\langle v, w \rangle$ SÍ

$= 2 \cdot \langle v, w \rangle_{\text{USUAL}}$

$\downarrow$

EJERCICIO