DIAGONALIZACIÓN III

MENÚ:

- DIMENSIÓN INFINITA
- POLINOMIO MINIMAL

//

EJEMPLOS EN $K^{\mathbb{N}}$

$\dim(K^{\mathbb{N}}) = \infty$ ⇝ NO HAY POL. CARACTERÍSTICO

1) SEA $S : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}$ DADO POR

$(a_1, a_2, \dots) \longmapsto (a_2, a_3, \dots)$

TODO $\lambda \in K$ ES AUTOVALOR DE S:

- SI $\lambda = 0$, $(1,0,0,\dots) \in \operatorname{Ker} S \setminus \{0\}$.
- SI $\lambda \neq 0$,

$0 \neq (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \overset{S}{\longmapsto} (\lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \dots) = \lambda(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$ //

2) $T : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}$, $(a_1, a_2, \dots) \longmapsto (0, a_1, a_2, \dots)$

NO TIENE AUTOVALORES:

$T(a) = \lambda a \iff$

$(0, a_1, a_2, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots)$;

- $\lambda = 0$: $(0, a_1, a_2, \dots) = 0 \Rightarrow a = 0$
- $\lambda \neq 0$: $\lambda a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$;

  $\lambda a_2 = a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$; ETC. //

POLINOMIO MINIMAL

$\underbrace{A \in K^{m \times m}}_{\text{ó } f \in End_K V,\ dim_K V < \infty}$. $m_A \in K[X]$ → ANULA A A → DE GRADO MÍNIMO → MÓNICO

EJEMPLOS :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A \overset{?}{=} \alpha \underbrace{I}_{= A^0}$: NO.
- $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^0} + \alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A^1}$:

  SÍ: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_0 = -3$

  $\rightsquigarrow m_A = X^2 - 4X + 3 \quad (= \chi_A)$ //

TEO (HAMILTON-CAYLEY): $\chi_A(A)=0$. i.e, $\underbrace{m_A \mid \chi_A}$.

LUEGO $\deg m_A \leq n$

ALGORITMO:

1 • $m=1$

2 • $S=\langle A^0, A^1, \dots, A^{m-1} \rangle$

3 • SI $A^m \in S$, DIGAMOS $A^m = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k A^k$,

DEVOLVER $X^m - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k X^k$.

4 • SI $A^m \notin S$, PONER $m=m+1$ E IR AL PASO 2

EJEMPLOS (CONT.):

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

SE TIENE QUE $\chi_A = X^4$. LUEGO $m_A = X^k$, CON $k \in \{1,2,3,4\}$

$A^1 \neq 0$, $A^2 \neq 0$, $A^3 \neq 0 \Rightarrow k=4$

ALTERNATIVAMENTE:

MINIMAL DEL VECTOR e_i (CON RESP. A A)

$m_A = \text{mcm}\{m_{e_i} : i=1,2,3,4\}$

- $A \cdot e_1 = e_2 \notin \langle A^0 e_1 \rangle$
- $A^2 e_1 = e_3 \notin \langle A^0 e_1, A^1 e_1 \rangle$
- $A^3 e_1 = e_4 \notin \langle A^0 e_1, A^1 e_1, A^2 e_1 \rangle$
- $A^4 e_1 = 0$

$$= \sum_{k=0}^{3} \alpha_k A^k e_1, \quad \text{CON } \alpha_0 = \cdots = \alpha_4 = 0.$$

$\rightsquigarrow m_{e_1} = X^4 - 0X^3 - 0X^2 - 0X^1 - 0X^0 = X^4;$

COMO $m_{e_1} \mid \underbrace{m_A}_{\text{GRADO } \leq 4}$, $m_A = m_{e_1} = X^4$.

//

3) SEA $V = K^{2\times 2}$, Y SEA

$$f: V \to V, \quad A \longmapsto \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}^{B} A$$

- $f \notin \langle 1_V \rangle$, PUES $\nexists \lambda \in K / \underbrace{\lambda A = BA \; \forall A}_{\lambda I \neq B}$

- $f^2(A) = B^2 A = -I \cdot A =$

$$= -A = -1_V(A)$$

$\rightsquigarrow m_f = X^2 + 1$

//

4) $T: K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}, \; (a_1, a_2, \dots) \longmapsto (0, a_1, a_2, \dots)$

NO ADMITE POLINOMIO MINIMAL PUES $\forall m \geq 1$

$$\underbrace{T^m}_{} \notin \langle \underbrace{T^0, T^1, \dots, T^{m-1}}_{} \rangle$$

CORRE TODA SUCESIÓN m LUGARES A LA DERECHA

SI $U = \sum_{k=0}^{\ell} \alpha_k T^k$ CON $\ell < m$ Y $\alpha_\ell \neq 0$, ENTONCES

$$U(1,0,0,\dots) = (*,\dots,*,\underbrace{\alpha_\ell}_{\text{LUGAR } \ell},0,\dots)$$

//

RECORDAR:

- TODA RAÍZ DE χ_A ES RAÍZ DE m_A
- A ES DIAG'BLE SII m_A SE FACTORIZA COMPLETAMENTE EN K, CON RAÍCES SIMPLES

PROBLEMA: DADO $k \in \mathbb{Q}$, HALLAR m_A PARA

$$A = \begin{pmatrix} k & -2k+4 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

//

CALCULAMOS: $\chi_A = (\lambda-2)^2(\lambda-4)(\lambda-k)$

- SI $k \neq 2, 4$, ENTONCES

$$m_A = \begin{cases} (\lambda-2)^{1}(\lambda-4)(\lambda-k), & \text{SI } A \text{ ES DIAG'BLE} \\ (\lambda-2)^{2}(\lambda-4)(\lambda-k), & \text{SI NO} \end{cases}$$

MÁS AÚN, A ES DIAG'BLE SII $\dim(E_2)=2$
SII $rg(A-2I)=2$;

$$A-2I=\begin{pmatrix} k-2 & -2k+4 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow rg=2$$

$\therefore\ m_A=(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-k)$

- SI $k=2$: $(\lambda-2)(\lambda-4) \mid m_A \mid (\lambda-2)^3(\lambda-4)$
  - $(A-2I)(A-4I)=0$

$\rightsquigarrow m_A=(\lambda-2)(\lambda-4)$ ($\Leftrightarrow$ A DIAG'BLE)

- SI $k=4$: $(\lambda-2)(\lambda-4) \mid m_A \mid (\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$
  - $(A-2I)(A-4I)\neq 0$
  - $(A-2I)^2(A-4I)\neq 0$
  - $(A-2I)(A-4I)^2=0$

$\rightsquigarrow m_A=(\lambda-2)(\lambda-4)^2$