Álgebra Lineal - Clase 6

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Núcleo e imagen de una transformación lineal.
- Teorema de la dimensión para transformaciones lineales.
- Composición de transformaciones lineales.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 3 (Secciones 3.1 a 3.4).

Imágenes y preimágenes de subespacios por una t.l.

Proposición.

Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

1. Si S es un subespacio de V, $f(S)$ es un subespacio de W.
2. Si T es un subespacio de W, $f^{-1}(T)$ es un subespacio de V.

Demostración.

1. $f(S) = \{w \in W \,/\, \exists\, s \in S, f(s) = w\} = \{f(s) \,/\, s \in S\}$.
   - i) $0_V \in S$ y $f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_W \in f(S)$.
   - ii) $w, w' \in f(S) \Rightarrow \exists s, s' \in S$ tales que $w = f(s)$ y $w' = f(s')$.
     $\Rightarrow w + w' = f(s) + f(s') = f(s + s') \in f(S)$ $(s + s' \in S)$.
   - iii) $\lambda \in K$, $w \in f(S) \Rightarrow \exists s \in S$ tal que $w = f(s)$.
     $\Rightarrow \lambda \cdot w = \lambda \cdot f(s) = f(\lambda \cdot s) \in f(S)$ $(\lambda \cdot s \in S)$.
2. $f^{-1}(T) = \{v \in V \,/\, f(v) \in T\}$.
   - i) $f(0_V) = 0_W \in T \Rightarrow 0_V \in f^{-1}(T)$
   - ii) $v, v' \in f^{-1}(T) \Rightarrow f(v), f(v') \in T$
     $\Rightarrow f(v + v') = f(v) + f(v') \in T \Rightarrow v + v' \in f^{-1}(T)$.
   - iii) $\lambda \in K$, $v \in f^{-1}(T) \Rightarrow f(v) \in T$
     $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \in T. \Rightarrow \lambda \cdot v \in f^{-1}(T)$. $\square$

Núcleo e imagen de una transformación lineal

Definición.
Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se llama núcleo de f al conjunto $\mathrm{Nu}(f) = \{v \in V \;/\; f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.
La imagen de f es $\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \,/\, \exists\, v \in V, f(v) = w\} = f(V)$.

Observación.
$\mathrm{Nu}(f)$ es un subespacio de V e $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio de W.

Ejemplo. Hallar el núcleo y la imagen de la t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

$$\mathrm{Nu}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3) = (0, 0, 0)\}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 - x_2 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & x_2 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$\mathrm{Nu}(f) = <(1, 1, 0)>.$

$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}^3 \ / \ \exists x \in \mathbb{R}^3, \ f(x) = y\}$

$$\begin{aligned} y &= (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ &= (x_1, -x_1, 2x_1) + (-x_2, x_2, -2x_2) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1.(1, -1, 2) + x_2.(-1, 1, -2) + x_3.(0, 0, 1). \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(f) = < (1, -1, 2), (-1, 1, -2), (0, 0, 1) > =$
$< (1, -1, 2), (0, 0, 1) >$.

Otra forma:
$E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base (canónica) de $\mathbb{R}^3$. Para cada $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} x &= x_1.e_1 + x_2.e_2 + x_3.e_3, \\ f(x) &= x_1.f(e_1) + x_2.f(e_2) + x_3.f(e_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= < f(e_1), f(e_2), f(e_3) > \\ &= < (1, -1, 2), (-1, 1, -2), (0, 0, 1) > \\ &= < (1, -1, 2), (0, 0, 1) >. \end{aligned}$$

Proposición.

Sea $f : V \to W$ una t.l. Si $\{v_i : i \in I\}$ es un sistema de generadores de V, entonces $\{f(v_i) : i \in I\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$.

Demostración.

$f(v_i) \in \mathrm{Im}(f)\ \forall i \in I \Rightarrow < \{f(v_i) : i \in I\} > \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

$\mathrm{Im}(f) = \{f(v)\ /\ v \in V\}$, $\{v_i : i \in I\}$ sistema de generadores de V

$\Rightarrow \forall v \in V$, $\exists i_1, \ldots, i_n \in I$ y $\alpha_{i_j} \in K$ tales que $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} v_{i_j}$.

$$\Rightarrow f(v) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} f(v_{i_j})\ \in\ < \{f(v_i) : i \in I\} >.$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq < \{f(v_i) : i \in I\} >$.

Luego, $\mathrm{Im}(f) = < \{f(v_i) : i \in I\} >$. $\square$

Corolario

Ssea $f : V \to W$ una transformación lineal. Si V es de dimensión finita, entonces $\mathrm{Im}(f)$ también lo es y vale $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim V$.

Definición.

Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que:

- f es un monomorfismo si f es inyectiva.
- f es un epimorfismo si f es suryectiva.
- f es un isomorfismo si f es biyectiva.

Proposición.

Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:
f es monomorfismo $\iff \mathrm{Nu}(f) = \{0\}$.

Demostración.

$(\Rightarrow)$ $v \in \mathrm{Nu}(f) \Rightarrow f(v) = 0$.
f monomorfismo $\Rightarrow$ f es una función inyectiva.
$f(v) = 0 = f(0) \Rightarrow v = 0$.
Luego, $\mathrm{Nu}(f) = \{0\}$.

$(\Leftarrow)$ Sean $v, v' \in V$ tales que $f(v) = f(v')$.
$f(v - v') = f(v) - f(v') = 0 \Rightarrow v - v' \in \mathrm{Nu}(f) = \{0\}$
$\Rightarrow v - v' = 0$, es decir, $v = v'$. Luego, f es inyectiva. $\square$

Proposición.

Sea $f : V \to W$ un monomorfismo. Si $\{v_i : i \in I\} \subset V$ es l.i., entonces $\{f(v_i) : i \in I\} \subset W$ es l.i.

Demostración.

Supongamos que $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i f(v_i) = 0$, con $\alpha_i = 0$ para casi todo $i \in I$.

$\sum\limits_{i \in I} \alpha_i f(v_i) = f\Big(\sum\limits_{i \in I} \alpha_i v_i\Big) \Rightarrow \sum\limits_{i \in I} \alpha_i v_i \in \mathrm{Nu}(f) = \{0\}$

$\sum\limits_{i \in I} \alpha_i v_i = 0$ y $\{v_i : i \in I\}$ l.i. $\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall\, i \in I$. $\square$

Corolario.

Si $f : V \to W$ es un monomorfismo y $B = \{v_i : i \in I\}$ es una base de V, entonces $\{f(v_i) : i \in I\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$.

En particular, si V es un K-e.v. de dimensión finita y f es monomorfismo, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$.

Teorema de la dimensión para transformaciones lineales

Teorema

Sean V y W dos K-e.v., V de dimensión finita, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

$$\dim V = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Demostración. Sean $n = \dim V$ y $r = \dim(\mathrm{Nu}(f))$.

$r = n \Rightarrow f \equiv 0$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$. ✓

$r = 0 \Rightarrow f$ es un monomorfismo $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim V$ ✓

$0 < r < n$: Sean $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y $v_{r+1}, \dots, v_n$ en V tales que $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base de V.

Afirmación: $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$.

Entonces:

$$\dim(V) = n = r + (n - r) = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Veamos que $\{f(v_{r+1}),\ldots,f(v_n)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$.

- $\{v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n\}$ base de $V \Rightarrow$
  $$\mathrm{Im}(f) = < f(v_1),\ldots,f(v_r),f(v_{r+1}),\ldots,f(v_n) >$$
  $$= < f(v_{r+1}),\ldots,f(v_n) >,$$
  ya que $f(v_1)=0,\ldots,f(v_r)=0$.

- Supongamos que $\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i f(v_i) = 0$.

  $\Rightarrow f\Big(\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = 0$, es decir, $\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i \in \mathrm{Nu}(f)$.

  $\{v_1,\ldots,v_r\}$ base de $\mathrm{Nu}(f) \Rightarrow \exists\, \alpha_1,\ldots,\alpha_r \in K$ tales que
  $$\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \iff \sum_{i=1}^{r}(-\alpha_i)v_i + \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

  $\{v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n\}$ l.i. $\Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall 1 \le i \le n$.
  En particular, $\alpha_i = 0$ para $i = r+1,\ldots,n$.
  $\Rightarrow \{f(v_{r+1}),\ldots,f(v_n)\}$ es l.i. $\square$

Corolario

Sean V y W dos K-e.v. tales que $\dim(V) = \dim(W) = n$ y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Son equivalentes:

- f es un isomorfismo.
- f es un monomorfismo.
- f es un epimorfismo.

El resultado no vale para t.l. en espacios de dimensión infinita:

Ejemplo. Sea $V = K[X]$.

1. $f : K[X] \to K[X]$, $f(P) = P'$.
    - f es epimorfismo: $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i\right) = Q$.
    - f no es monomorfismo: $f(1) = 0$, pero $1 \neq 0$.
2. $g : K[X] \to K[X]$, $g(P) = X.P$.
    - g es monomorfismo: $g(P) = X.P = 0 \Rightarrow P = 0$.
    - g no es epimorfismo: $1 \notin \mathrm{Im}(f)$.

Composición de transformaciones lineales

Proposición.

Sean $f : V \to W$ y $g : W \to Z$ transformaciones lineales.
Entonces $g \circ f : V \to Z$ es una transformación lineal.

Demostración.

i) Sean $v, v' \in V$.
$g \circ f(v + v') = g\big(f(v + v')\big) = g\big(f(v) + f(v')\big) =$
$g(f(v)) + g(f(v')) = g \circ f(v) + g \circ f(v')$.

ii) Sean $\lambda \in K$ y $v \in V$.
$g \circ f(\lambda \cdot v) = g(f(\lambda \cdot v)) = g(\lambda \cdot f(v)) = \lambda \cdot g(f(v)) =$
$\lambda \cdot (g \circ f(v))$.

Luego, $g \circ f$ es una transformación lineal. $\square$

Inversa de un isomorfismo

Proposición.

Sea $f : V \to W$ un isomorfismo. Entonces $f^{-1} : W \to V$ es una transformación lineal.

Demostración.

i) $w, w' \in W$, f isomorfismo $\Rightarrow \exists$ únicos $v, v' \in V$ tales que $w = f(v)$ y $w' = f(v')$.
$f^{-1}(w + w') = f^{-1}(f(v) + f(v')) = f^{-1}(f(v + v')) =$
$v + v' = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$.

ii) $w \in W$ y $\lambda \in K \Rightarrow \exists$ un único $v \in V$ tal que $w = f(v)$.
$f^{-1}(\lambda \cdot w) = f^{-1}(\lambda \cdot f(v)) = f^{-1}(f(\lambda \cdot v)) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot (f^{-1}(w))$.

Luego, f^{-1} es una transformación lineal. $\square$

Espacios vectoriales de dimensión finita

Teorema.
Sea V un K-e.v. de dimensión n. Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V, la función $f : V \to K^n$, $f(v) = (v)_B$, es un isomorfismo.

Demostración.

- f es una transformación lineal: sean $x, y \in V$.
  $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \Rightarrow x + y = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i$.
  $\Rightarrow f(x+y) = (x+y)_B = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) =$
  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x)_B + (y)_B = f(x) + f(y)$.
  Similarmente, $f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$ $\forall \lambda \in K$, $\forall x \in V$.
- f es monomorfismo:
  $f(x) = 0 \Rightarrow (x)_B = (0, \dots, 0) \Rightarrow x = 0$
- f es epimorfismo:
  $(x_1, \dots, x_n) \in K^n \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$ y $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$.

En consecuencia, f es un isomorfismo. $\square$

Corolario.

Si V es un K-e.v. y B es una base de V, entonces:

i) $\{w_1, \ldots, w_s\}$ l.i. en $V \iff \{(w_1)_B, \ldots, (w_s)_B\}$ l.i. en K^n.

ii) $\{w_1, \ldots, w_r\}$ sistema de generadores de $V \iff$ $\{(w_1)_B, \ldots, (w_r)_B\}$ sistema de generadores de K^n.

iii) $\{w_1, \ldots, w_n\}$ base de $V \iff \{(w_1)_B, \ldots, (w_n)_B\}$ base de K^n.

Ejemplo.

$V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{X^2, X, 1\}$.

$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, definida para $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$ como $f(P) = (a_2, a_1, a_0)$ es un isomorfismo.

$\{X^2 - X + 1,\ X^2 - 3X + 5,\ 2X^2 + 2X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$ $\iff \{(1, -1, 1),\ (1, -3, 5),\ (2, 2, -3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Proyectores

Definición.

Una t.l. $f : V \to V$ se llama un proyector si $f \circ f = f$.

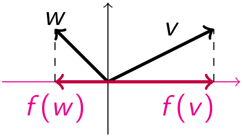
Observación.

f es un proyector $\iff$ $f(x) = x$ para cada $x \in \mathrm{Im}(f)$.

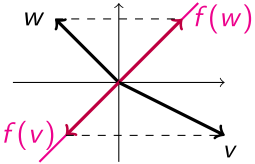
$(\Rightarrow)$ $x \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists v \in V$ tal que $x = f(v)$.
$\Rightarrow f(x) = f(f(v)) = f \circ f(v) = f(v) = x$.

$(\Leftarrow)$ $v \in V \Rightarrow f(v) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow f(f(v)) = f(v)$, es decir,
$f \circ f(v) = f(v)$. $\square$

Ejemplos.



$f(x, y) = (x, 0)$



$f(x, y) = (y, y)$

Proposición.

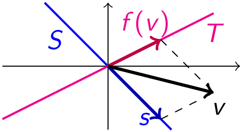
i) Si $f : V \to V$ es un proyector, entonces $\mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = V$.

ii) Si S y T son subespacios de V tales que $S \oplus T = V$, existe un único proyector $f\colon V \to V$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$, $\mathrm{Im}(f) = T$.

Demostración.

i)
- $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$:
  $x \in \mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Rightarrow f(x) = 0$ y $f(x) = x \Rightarrow x = 0$.
- $\mathrm{Nu}(f) + \mathrm{Im}(f) = V$: $\forall x \in V$, $x = (x - f(x)) + f(x)$
  $f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$
  $\Rightarrow x - f(x) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$.

ii) $S \oplus T = V \Rightarrow \forall v \in V\ \exists$ únicos $s \in S$, $t \in T$ con $v = s + t$.



Se define $f(v) = t$ (es t.l.)
f es proyector:
$f \circ f(v) = f(f(v)) = f(t) = f(0 + t) = t = f(v)$.

$\mathrm{Im}(f) = T$ ✓, $\quad S \subset \mathrm{Nu}(f)$ ✓

$v \in \mathrm{Nu}(f)$, $v = s + t \Rightarrow 0 = f(v) = t \Rightarrow v = s \in S$. $\square$