1	2	3	4

Calificación

ÁLGEBRA LINEAL

Segundo parcial — 12 de diciembre de 2020

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Probar que existe $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $B^2 = A$ y m_B tiene grado 4.

(b) Probar que existe $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $C^2 = A$.

Nota: no hace falta calcular explícitamente las matrices B y C.

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ una matriz *no diagonalizable* tal que

$$A^4 + 3A^3 - 4A = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{rg}(A) < 4.$$

(a) Probar que si $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ es una matriz que cumple las mismas tres condiciones y además $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, entonces A y B son semejantes.

(b) Mostrar que la afirmación de (a) es falsa sin la hipótesis de "no diagonalizable".

3. Sea Φ un producto interno en $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$[\Phi]_E = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & b & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar los valores de a y b sabiendo que

$$\|(1,1,0)\| = \sqrt{13} \quad \text{y} \quad (1,0,0) \perp (1,0,-2).$$

(b) Para este producto interno, hallar una base ortonormal de $\langle (1,0,0) \rangle^{\perp}$.

4. Sea $L \subseteq \mathbb{R}^2$ la recta de ecuación $x + y = \sqrt{2}$, y sea $P = (0, 1/3)$.
Hallar una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $d(P, f(L)) = 2/3$.
¿Es f única?

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y escriba con claridad