Álgebra Lineal - Clase 17

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Repaso de la construcción de la forma de Jordan.
- Unicidad y semejanza de matrices.
- Aplicación: potencias de matrices.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 7.

Forma de Jordan (repaso)

Para $\lambda \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, llamamos bloque de Jordan de autovalor λ y tamaño $n \times n$ a la matriz $J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$.

Una forma de Jordan es una matriz $J \in K^{n\times n}$ de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$ donde, $\forall 1 \leq i \leq s$, $J(\lambda_i)$ es de la forma

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^{(i)}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_i, n_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix}$$

con $n_1^{(i)} \geq \cdots \geq n_{r_i}^{(i)}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Teorema.

Sean V un K-e.v. de dimensión n y $f : V \to V$ una t.l. tal que m_f se factoriza linealmente sobre K. Entonces existe una única forma de Jordan $J \in K^{n\times n}$ (salvo por el orden de los autovalores) tal que para alguna base B de V, $|f|_B = J$.

Una forma de construirla:

$$m_f = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{k_i} \text{ con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathrm{Nu}((f-\lambda_i.\, id_V)^{k_i}).$$

Para $i = 1, \dots, s$:

- Considerar la restricción f_i de f a $S_i = \mathrm{Nu}((f-\lambda_i.\, id_V)^{k_i})$.
- $f_{\lambda_i} = f_i - \lambda_i\, id_{S_i} : S_i \to S_i$ es nilpotente de índice k_i.
- Hallar una base de Jordan B_i para f_{λ_i} y su forma de Jordan (caso nilpotente) $\Rightarrow |f_i|_{B_i} = |f_{\lambda_i}|_{B_i} + \lambda_i I$.

$B = B_1 \cup \cdots \cup B_s$ es una base de Jordan para f y

$$|f|_B = \begin{pmatrix} |f_1|_{B_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |f_2|_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & |f_s|_{B_s} \end{pmatrix} \text{ es la forma de Jordan de } f.$$

Demostración de la unicidad.

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V tal que $|f|_B$ es una forma de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

donde $\forall 1 \leq i \leq s$, $J_i(\lambda_i) \in K^{d_i \times d_i}$ está formada por todos los bloques de Jordan de autovalor λ_i de J y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

$\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_J = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{d_i} \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_s$ son los autovalores de f y, $\forall 1 \leq i \leq s$, $d_i = \text{mult}(\lambda_i, \mathcal{X}_f)$.

Para cada $1 \leq i \leq s$, $m_{J_i(\lambda_i)} = (X - \lambda_i)^{k_i}$ para algún $1 \leq k_i \leq d_i$

$\Rightarrow m_f = m_J = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{k_i}$ y $\forall 1 \leq i \leq s$, $k_i = \text{mult}(\lambda_i, m_f)$.

Sea λ autovalor de f, $k = \text{mult}(\lambda, m_f)$ y $d = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$.
Supongamos $\lambda = \lambda_1$.

$$(J - \lambda I_n)^k = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2 - \lambda) & & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_s(\lambda_s - \lambda) \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2 - \lambda)^k & & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_s(\lambda_s - \lambda)^k \end{pmatrix}$$

$J_i(\lambda_i - \lambda)^k$ inversible $\forall i \geq 2 \Rightarrow \text{Nu}((J - \lambda I_n)^k) = < e_1, \dots, e_d >$.
Si $J = |f|_B$ con $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V
$\Rightarrow S_\lambda = < v_1, \dots, v_d > = \text{Nu}((f - \lambda\, id_V)^k)$.

$f_\lambda = (f - \lambda\, id_V)_{|_{S_\lambda}} : S_\lambda \to S_\lambda$ es nilpotente $\Rightarrow$ tiene una única forma de Jordan nilpotente asociada.
$B_\lambda = \{v_1, \dots, v_d\}$ base de S_λ y $|f_\lambda|_{B_\lambda} = \left| f_{|_{S_\lambda}} \right|_{B_\lambda} - \lambda . I_d = J_1(0)$ es una forma de Jordan nilpotente.
$\Rightarrow J_1(0)$ es la forma de Jordan de $f_\lambda : S_\lambda \to S_\lambda$.
$\Rightarrow J_1(\lambda) = J_1(0) + \lambda . I_d$ está unívocamente determinada por f.

Lo mismo ocurre para cada autovalor de f. $\square$

Ejemplo.

Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz tal que $\mathrm{rg}(A+I)=4$, $\mathrm{rg}(A-2I)=4$, $\mathrm{rg}((A-2I)^2)=3$, $\mathrm{rg}((A-2I)^3)=2$ y $\mathrm{rg}((A-2I)^4)=2$. Determinar, si es posible, la forma de Jordan de A.

- $\mathrm{rg}(A-2I)=4<6 \Rightarrow 2$ es autovalor de A.
- $\mathrm{rg}((A-2I)^4)=\mathrm{rg}((A-2I)^3)<\mathrm{rg}((A-2I)^2)$
  $\Rightarrow \mathrm{mult}(2,m_A)=3$.
- $S_2=\mathrm{Nu}((A-2I)^3)$ tiene dimensión $6-\mathrm{rg}((A-2I)^3)=4$
  $\Rightarrow \mathrm{mult}(2,\mathcal{X}_A)=4$.
- $\mathrm{rg}(A+I)=4<6 \Rightarrow -1$ es autovalor de A.
- Si $k=\mathrm{mult}(-1,m_A)$, $S_{-1}=\mathrm{Nu}((A+I)^k)$ tiene dimensión
  $6-\mathrm{rg}((A+I)^k)\geq 6-\mathrm{rg}(A+I)=2 \Rightarrow \mathrm{mult}(-1,\mathcal{X}_A)\geq 2$
- $6=\mathrm{gr}(\mathcal{X}_A)\geq \mathrm{mult}(2,\mathcal{X}_A)+\mathrm{mult}(-1,\mathcal{X}_A)\geq 4+2=6$
  $\Rightarrow \mathrm{mult}(-1,\mathcal{X}_A)=2$ y $\mathcal{X}_A=(X-2)^4(X+1)^2$
- $\dim(S_{-1})=2=6-\mathrm{rg}(A+I)=\dim(\mathrm{Nu}(A+I)) \Rightarrow$
  $S_{-1}=\mathrm{Nu}(A+I)\Rightarrow k=1$
- $m_A=(X-2)^3(X+1)^1$

$A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$, $\mathcal{X}_A = (X-2)^4(X+1)^2$,

$$J_A = \begin{pmatrix} J(2) & 0 \\ 0 & J(-1) \end{pmatrix} \quad \text{con } J(2) \in \mathbb{C}^{4\times 4} \text{ y } J(-1) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

$m_A = (X-2)^3(X+1)$.

- el bloque más grande de $J(2)$ es de $3\times 3 \Rightarrow J(2) = \left(\begin{smallmatrix} 2&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ 0&1&2&0\\ 0&0&0&2 \end{smallmatrix}\right)$
- el bloque más grande de $J(-1)$ es de 1×1
  $\Rightarrow J(-1) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$

$$J_A = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$$

(Verificar que se cumplen todas las condiciones.)

Semejanza de matrices

Teorema.
Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Existe una única forma de Jordan $J_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (salvo por el orden de los autovalores) tal que $A \sim J_A$.

Consecuencia: si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces
$A \sim B \iff J_A = J_B$ (salvo el orden de los bloques).

Ejemplo.
Sean $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Probar que
$A \sim B \iff \mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$.
¿Vale el mismo resultado para matrices en $\mathbb{C}^{4\times 4}$?

($\Rightarrow$) ya lo sabemos
($\Leftarrow$) Basta ver que la forma de Jordan de una matriz en $\mathbb{C}^{3\times 3}$ queda unívocamente determinada por su polinomio característico y su polinomio minimal.

Sea $J \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ una forma de Jordan.
Entonces $\mathcal{X}_J$ es de alguna de las siguientes formas:

(i) $\mathcal{X}_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.
(ii) $\mathcal{X}_J = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
(iii) $\mathcal{X}_J = (X-\lambda)^3$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Veamos que en cada caso hay una única forma de Jordan J para cada posible polinomio minimal m_J.

(i) $m_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) \Rightarrow J$ diagonalizable
$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, salvo el orden de los autovalores.

(ii) $m_J \mid \mathcal{X}_J = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$
$\Rightarrow m_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ o $m_J = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$

- $m_J = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) \Rightarrow J$ es diagonalizable
  $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, salvo el orden de los autovalores.
- $m_J = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2) \Rightarrow J$ tiene un bloque de 2×2 con autovalor λ_1 y uno de 1×1 con autovalor λ_2.
  $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, salvo el orden de los autovalores.

(iii) $m_J \mid \mathcal{X}_J = (X-\lambda)^3 \Rightarrow m_J = (X-\lambda)^k$ con $k = 1, 2$ o 3.

- $m_J = X - \lambda \Rightarrow J$ diagonalizable $\Rightarrow J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.
- $m_J = (X-\lambda)^2 \Rightarrow$ el bloque más grande de J es de 2×2 $\Rightarrow J$ sólo puede tener un bloque de 2×2 y uno de $1 \times 1 \Rightarrow$ $J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.
- $m_J = (X-\lambda)^3 \Rightarrow J$ tiene un bloque de 3×3 $\Rightarrow J = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$.

No vale en $\mathbb{C}^{4\times 4}$. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verifican $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = X^4$ y $m_A = m_B = X^2$, pero $A \not\sim B$, porque son dos formas de Jordan distintas.

Cálculo de potencias de matrices

Observación.

$A \sim M \Rightarrow$ existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.\, M.\, C^{-1}$.

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = C.\, M^k.\, C^{-1}$.

Para calcular potencias de A, buscamos M tal que $A \sim M$ y cuyas potencias sean "fáciles" de calcular.

Si $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_r \end{pmatrix}$ con $M_i \in K^{n_i \times n_i}, 1 \leq i \leq r$

$\Rightarrow$ para todo $k \in \mathbb{N}$, vale $M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_r^k \end{pmatrix}$.

Cuando m_A se factoriza linealmente en $K[X]$, podemos hallar la forma de Jordan de A que tiene esta estructura.

En este caso, basta saber calcular potencias de bloques de Jordan $J(\lambda, m)$ con $\lambda \in K$, $m \in \mathbb{N}$.

Recordar: $J(0,m)^k = \begin{pmatrix} 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \\ I_{m-k} & 0_{(m-k)\times k} \end{pmatrix}$.

$$J(\lambda,m)^k = (\lambda I_m + J(0,m))^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\lambda I_m)^{k-i} J(0,m)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} 0_{i\times(m-i)} & 0_{i\times i} \\ I_{m-i} & 0_{(m-i)\times i} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} 0_{i\times(m-i)} & 0_{i\times i} \\ \binom{k}{i}\lambda^{k-i}.\, I_{m-i} & 0_{(m-i)\times i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & \ddots & & \vdots \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{k}{m-1}\lambda^{k-(m-1)} & \dots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular A^n.

Clase pasada:

$B = \{(0,0,0,1),(2,2,2,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ es una base de Jordan para A y la forma de Jordan de A es

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $C = C(B,E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vale $A = C.\, J_A.\, C^{-1}$.

$\Rightarrow A^n = C.\, J_A^n.\, C^{-1}$

$$J_A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & 0 \\ \binom{n}{1} 1^{n-1} & 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}}_{J_A^n} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2n \\ 1 + (-1)^{n+1} & (-1)^n & 0 & 2n \\ 1 + (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$