Álgebra Lineal - Clase 10

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Funciones multilineales alternadas. Determinantes.
- Desarrollo por filas o columnas.
- Propiedades del determinante.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 5 (Secciones 5.1 y 5.2).

Funciones multilineales alternadas

Dada una matriz $A \in K^{n\times n}$ cuyas columnas son $A_1, \dots, A_n$ escribiremos $A = (\, A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_n\,)$.

Definición.
Una función $f : K^{n\times n} \to K$ se dice multilineal alternada (por columnas) si para cada $1 \le i \le n$:

i) $f(A_1 \mid \cdots \mid A_i + A'_i \mid \cdots \mid A_n) =$
$= f(A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_n) + f(A_1 \mid \cdots \mid A'_i \mid \cdots \mid A_n)$.

ii) $f(\, A_1 \mid \cdots \mid \lambda.A_i \mid \cdots \mid A_n\,) = \lambda \cdot f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_n\,)$ $\forall \lambda \in K$.

iii) $f(\, A_1 \mid \cdots \mid \underbrace{A_i}_{col.\, i} \mid \cdots \mid \underbrace{A_i}_{col.\, j} \mid \cdots \mid A_n\,) = 0 \ \forall j \neq i,\ 1 \le j \le n.$

Ejemplos.

1. $f : K^{1\times 1} \to K$ es multilineal alternada si y sólo si f es lineal.
2. $f : K^{2\times 2} \to K$, $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ es multilineal alternada:

   i) $f \begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} = (a+a')d - b(c+c') = ad - bc + a'd - bc' =$
   $$= f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}.$$
   Análogamente para la segunda columna.

   ii) $f \begin{pmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{pmatrix} = \lambda ad - b\lambda c = \lambda(ad - bc) = \lambda \cdot f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\forall \lambda \in K$, y lo mismo vale para la segunda columna.

   iii) $f \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0.$

Propiedades. Sea $f : K^{n\times n} \to K$ multilineal alternada. Entonces:

1. $f(\, A_1 \mid \cdots \mid \underbrace{\mathbb{O}}_{col.\, i} \mid \cdots \mid A_n \,) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n.$

   Dem.:

   $$f(A_1 \mid \cdots \mid \mathbb{O} \mid \cdots \mid A_n) = f(A_1 \mid \cdots \mid 0.\, \mathbb{O} \mid \cdots \mid A_n) =$$
   $$= 0 \cdot f(A_1 \mid \cdots \mid \mathbb{O} \mid \cdots \mid A_n) = 0.$$

2. $f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,) =$
   $= -f(\, A_1 \mid \cdots \mid \underbrace{A_j}_{col.\, i} \mid \cdots \mid \underbrace{A_i}_{col.\, j} \mid \cdots \mid A_n \,).$

   Dem.:

   $$0 = f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i + A_j \mid \cdots \mid A_i + A_j \mid \cdots \mid A_n \,) =$$
   $$= f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_i + A_j \mid \cdots \mid A_n \,) + $$
   $$+ f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_i + A_j \mid \cdots \mid A_n \,)$$
   $$= f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_n \,) + f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,) +$$
   $$+ f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_n \,) + f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,)$$
   $$= f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,) + f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_n \,)$$

3. $f(\, A_1 \mid \cdots \mid \underbrace{A_i + \alpha A_j}_{col.\, i} \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,) =$

$$= f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,).$$

Dem.:

$f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i + \alpha A_j \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,) =$

$= f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,) + \alpha f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,)$

$= f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_j \mid \cdots \mid A_n \,)$

4. Si $A_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j A_j$, entonces $f(\, A_1 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_n \,) = 0.$

Dem.:

$$f(\, A_1 \mid \cdots \mid \overbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j A_j}^{col.\, i} \mid \cdots \mid A_n \,) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j f(\, A_1 \mid \cdots \mid \underbrace{A_j}_{col.\, i} \mid \cdots \mid A_n \,) = 0.$$

Ejemplo.

Funciones multilineales alternadas $f : K^{2\times 2} \to K$.

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= 0 + f\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + 0 \\
&= ad.\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + cb.\, f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (ad - cb).\, f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Y una función de este tipo es multilineal alternada.

$\Rightarrow$ Todas las funciones multilineales alternadas $f : K^{2\times 2} \to K$ son de la forma $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\,(ad - bc)$ con $\alpha \in K$.

Teorema.
Sea $\alpha \in K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única función multilineal alternada $f : K^{n\times n} \to K$ tal que $f(I_n) = \alpha$.

Definición.
La única función multilineal alternada $f : K^{n\times n} \to K$ tal que $f(I_n) = 1$ se llama el determinante de orden n.

Demostración del Teorema.
Ver apunte Algebra Lineal.
Para $n = 1$, $f : K^{1\times 1} \to K$, $f(x) = \alpha . x$.
Para $n = 2$, $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\,(ad - bc)$.
Inductivamente: a partir de $g : K^{n\times n} \to K$ multilineal alternada tal que $g(I_n) = \alpha$, se define $f : K^{(n+1)\times(n+1)} \to K$ multilineal alternada tal que $f(I_{n+1}) = \alpha$.

Dada $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$, notamos $A(i|j) \in K^{n\times n}$ a la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j de A.
$f : K^{(n+1)\times(n+1)} \to K$, definida por

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1j}.\, g(A(1|j)) \qquad \text{si } A = (a_{k\ell})_{1\le k,\ell \le n+1},$$

resulta multilineal alternada y $f(I_{n+1}) = g(I_n) = \alpha$.

Observación.
De la demostración del Teorema se deduce que, para $A \in K^{n\times n}$,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1|j)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)).$$

(desarrollo del determinante por la primera fila y por la primera columna de A).

Determinante de la transpuesta de una matriz

Proposición.

Sea $A \in K^{n\times n}$. Entonces $\det(A) = \det(A^t)$.

Demostración.

Para $n = 1$ ✓

Supongamos que vale en $K^{n\times n}$ y sea $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1)\times(n+1)}$.

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{1+i} (A^t)_{1i} \det(A^t(1|i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)^t) \\
&\overset{HI}{=} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)) = \det(A). \qquad \square
\end{aligned}$$

Desarrollo del determinante por filas y columnas

Proposición.

Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \quad \forall 1 \leq j \leq n \\
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \quad \forall 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Demostración.

Se puede ubicar la j-ésima columna de A en el lugar de la primera, sin modificar el orden de las restantes, por medio de $j-1$ intercambios de columnas. Entonces:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{j-1} \det(\, A_j \mid A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_{j-1} \mid A_{j+1} \mid \cdots \mid A_n \,) \\
&= (-1)^{j-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{ij} \det(A(i|j)) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)).
\end{aligned}$$

Usando que $\det(A) = \det(A^t)$, se obtiene el desarrollo por filas.

Ejemplo.

Calcular $\det(A)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^2 . 2. \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \\
&\qquad + (-1)^5 . 1. \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2.(-1)^{2+2}.(-1). \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (-1)^{2+1}.1. \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-2)(1.0 - 1.1) - (-1)(1.1 - 0.1) = 2 + 1 = 3.
\end{aligned}$$

Determinantes y matrices triangulares

Lema.

$A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ es una matriz triangular (superior o inferior),

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Demostración.

Por inducción en n: para $n = 1$ ✓

Si $A = (a_{ij}) \in K^{(n+1)\times(n+1)}$ es triangular superior, $a_{i1} = 0 \; \forall i \geq 2$.

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1)) = a_{11} \det(A(1|1))$$

$$A(1|1) \in K^{n\times n} \text{ triangular} \overset{HI}{\Rightarrow} \det(A(1|1)) = \prod_{j=1}^{n} (A(1|1))_{jj} = \prod_{i=2}^{n+1} a_{ii}.$$

$$\Rightarrow \det(A) = a_{11} \det(A(1|1)) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii} \qquad \square$$

Podemos calcular el determinante de una matriz triangulándola, teniendo en cuenta que:

- $$\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$ "*Intercambiar dos filas*"
- $$\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \lambda F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$ "*Multiplicar una fila por una constante no nula*"
- $$\det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i+\lambda F_j \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$ "*Sumarle a una fila un múltiplo de otra*"

Ejemplo.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 \leftrightarrow F_1}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{F_3-2F_1}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_4-F_2}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\frac{1}{2}F_3}{=} -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_4-F_3}{=} -2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (-2)\cdot(-\tfrac{3}{2}) = 3$$

Determinante del producto de matrices

Lema

Sea $f : K^{n\times n} \to K$ multilineal alternada tal que $f(I_n) = \alpha$.
Entonces $f = \alpha.\det$.

Demostración

- $\alpha.\det : K^{n\times n} \to K$ es multilineal alternada por serlo det.
- $(\alpha.\det)(I_n) = \alpha \det(I_n) = \alpha$.

Unicidad de funciones multilineales alternadas $\Rightarrow f = \alpha.\det$. $\square$

Proposición.

Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Entonces $\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Demostración.

Sea $f : K^{n\times n} \to K$, $f(X) = \det(A.X)$. Veremos que $\forall X \in K^{n\times n}$, $f(X) = \underbrace{\det(A)}_{\alpha\in K} \cdot \det(X)$. Por el lema, basta ver que:

- f es multilineal alternada,
- $f(I_n) = \det(A)$ ✓

$f : K^{n\times n} \to K$, $f(X) = \det(A.X)$ es multilineal alternada:
Para $1 \leq i \leq n$,

i) $f(\, X_1 \mid \cdots \mid X_i + X_i' \mid \cdots \mid X_n \,) =$
$= \det \left(A.\,(\, X_1 \mid \cdots \mid X_i + X_i' \mid \cdots \mid X_n \,)\right)$
$= \det(\, AX_1 \mid \cdots \mid AX_i + AX_i' \mid \cdots \mid AX_n \,)$
$= \det(AX_1|\ldots|AX_i|\ldots|AX_n) + \det(AX_1|\ldots|AX_i'|\ldots|AX_n)$
$= f(\, X_1 \mid \cdots \mid X_i \mid \cdots \mid X_n \,) + f(\, X_1 \mid \cdots \mid X_i' \mid \cdots \mid X_n \,)$.

ii) Para $\lambda \in K$,
$f(X_1|\ldots|\lambda X_i|\ldots|X_n) = \det\left(A.(\, X_1|\ldots|\lambda X_i|\ldots|X_n)\right)$
$= \det\left(\, AX_1 \mid \cdots \mid \lambda.AX_i \mid \cdots \mid AX_n \,\right) =$
$= \lambda \det\left(AX_1|\ldots|AX_i|\ldots|AX_n\right) = \lambda\, f(X_1|\ldots|X_i|\ldots|X_n)$.

iii) $f(X_1 \mid \cdots \mid X_i \mid \cdots \mid X_i \mid \cdots \mid X_n) =$
$= \det\left(A.(X_1 \mid \cdots \mid X_i \mid \cdots \mid X_i \mid \cdots \mid X_n)\right)$
$= \det\left(\, AX_1 \mid \cdots \mid AX_i \mid \cdots \mid AX_i \mid \cdots \mid AX_n \,\right) = 0$.

$\Rightarrow \det(A.B) = f(B) = \det(A) \cdot \det(B)$. $\square$

Ejemplo.

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 2$ y sea $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcular $\det(\frac{1}{2}(AB + A))$.

$\det(\frac{1}{2}(AB + A)) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det(AB + A) = \frac{1}{8}\det(A(B + I)) =$
$= \frac{1}{8}\det(A)\det(B + I)$

$\det(B + I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}.1\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$
$= (-1)\cdot(2.3 - 1.4) = -2$

$\Rightarrow \det(\frac{1}{2}(AB + A)) = \frac{1}{8}\det(A)\det(B + I) = \frac{1}{8}\cdot 2\cdot(-2) = -\frac{1}{2}.$