# VARIEDADES LINEALES II

## PROBLEMA

Sean $\Pi_1, \Pi_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ los planos dados por

$$\Pi_1 : x + 2y + 2z = k, \qquad \Pi_2 : \langle (1,0,1), (0,-2,-1) \rangle + (1,0,0).$$

Determinar un valor de $k$ para el cual exista una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$, y hallar una base ortonormal $B$ de $\mathbb{R}^3$ y $\theta \in [0, \pi]$ tales que

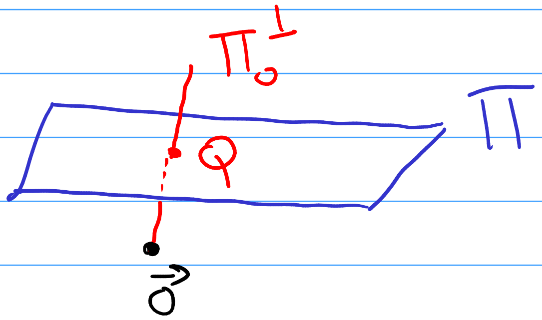
$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

OBS: SUP QUE TAL ROTACIÓN $f$ EXISTE. ENTONCES

$$d(0,\Pi_2) = \inf\{ \overbrace{\|y\|}^{=d(0,y)} : y \in \Pi_2 \}$$

$$= \inf\{ \underbrace{\|f(x)\|}_{=\|x\| = d(0,x)} : x \in \Pi_1 \} = d(0,\Pi_1).$$

CALCULAMOS $d(0,\Pi)$:




VIMOS: $d(0,\Pi) = \|Q\|$, CON $\Pi \cap \Pi_0^\perp = \{Q\}$

MÁS AÚN, $\Pi_0^{\perp} = \langle N_\Pi \rangle$, CON $N_\Pi$ NORMAL DE $\Pi$.
ASÍ,

- $\Pi_1 : \; x+2y+2z = k$. LUEGO $N_{\Pi_1} = (1,2,2)$;

  $\lambda(1,2,2) \in \Pi_1$ SII $\lambda + 4\lambda + 4\lambda = k$ SII $9\lambda = k$,

  POR LO QUE $Q_1 = k/9\,(1,2,2)$

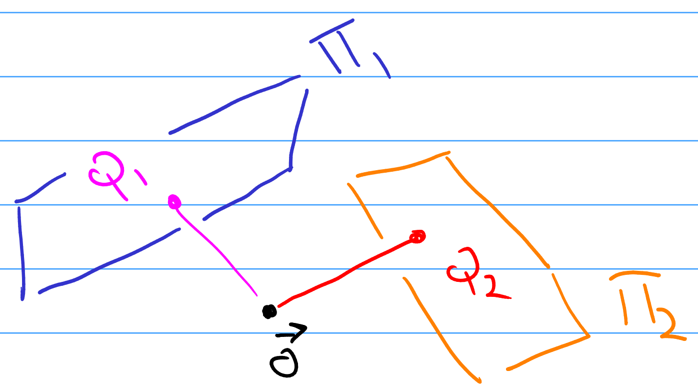
  $\rightsquigarrow d(0,\Pi_1) = \|Q_1\| = |k/9| \cdot \sqrt{9} = |k|/3$

- $\Pi_2 = \langle (1,0,1), (0,-2,-1) \rangle + (1,0,0)$, O BIEN

  $\Pi_2 : \; 2x + y - 2z = 2.$

  $\rightsquigarrow Q_2 = 2/9\,(2,1,-2)$, $\quad d(0,\Pi_2) = 2/3$

$\therefore \; k = \pm 2$. TOMEMOS $k = 2$




AFIRMO: SI $f \in O(\mathbb{R}^3)$ Y $f(Q_1) = Q_2$,
ENTONCES $f(\Pi_1) = \Pi_2$

DEM: $\Pi_i = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - \overset{\text{PUNTO DE PASO}}{Q_i}, \overset{\text{NORMAL}}{Q_i} \rangle = 0\}$.

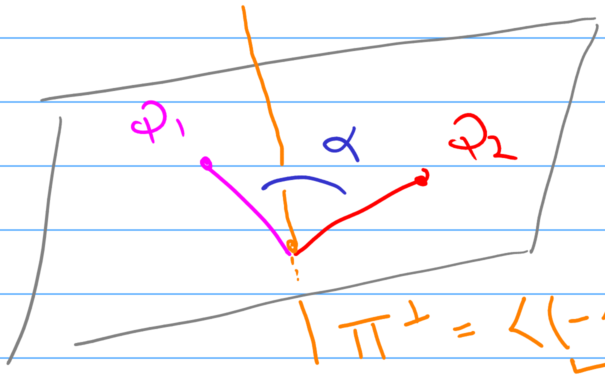
LUEGO, $X \in \Pi_1$ SII

$$0 = \langle X - Q_1, Q_1 \rangle \overset{f \in O(\mathbb{R}^3)}{=} \langle f(X - Q_1), f(Q_1) \rangle$$

$$= \langle f(X) - Q_2, Q_2 \rangle$$

SII $f(X) \in \Pi_2$ $\square$

$\rightsquigarrow$ BASTA CON DAR UNA ROTACIÓN $f$ TAL QUE $f(Q_1) = Q_2$.




$\Pi = \langle Q_1, Q_2 \rangle$

$\Pi^\perp = \langle \underbrace{(-4, 4, -3)}_{N} \rangle$

$$\cos\alpha = \frac{\langle Q_1, Q_2 \rangle}{\|Q_1\| \, \|Q_2\|} = \frac{\langle \cancel{2}/9(1,2,2), \cancel{2}/9(2,1,-2) \rangle}{\cancel{2}/3 \cdot \cancel{2}/3}$$

$$= 1/9 \langle (1,2,2), (2,1,-2) \rangle = 0$$

$\rightsquigarrow \alpha = \pi/2$ ; EN PART,

$B = \{ N/\|N\|, Q_1/\|Q_1\|, Q_2/\|Q_2\| \}$ ES UNA BON

DEFINO:

$$|f|_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ 0 & \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ES ROTACIÓN (1 ES AVAL, $-1$ NO)
- $f(Q_1) = Q_2$

PROBLEMA

Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta dada por

$$L = \langle(-1, 2, 1)\rangle + (0, 1, 0).$$

Hallar *todas* las simetrías $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tales que la recta $s(L)$ es paralela a $L$ y el subespacio $S = \langle(-1, 2, 1), (0, 1, 0)\rangle$ es $s$-invariante.

- $L = \langle v \rangle + P \Rightarrow s(L) = \langle s(v) \rangle + s(P)$;

LUEGO $s(L) /\!/ L$ SII $(\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times)\ s(v) = \lambda v$;

NOTAR QUE $\|s(v)\| = \|v\| \Rightarrow \lambda \in \{\pm 1\}$.

- $S$ ES $s$-INV SII $s(S) = S$ SII $s(S^\perp) = S^\perp$;

$\hookrightarrow s(S)^\perp = s(S^\perp)$

DADO QUE $S = \langle(-1,2,1), (0,1,0)\rangle$

TENEMOS QUE $S^\perp = \langle \underbrace{(1,0,1)}_{w} \rangle$

$\rightsquigarrow s(S) = S$ SII $s(w) = \pm w$

- BUSCAMOS TODAS LAS SIMETRÍAS $S$ /

$$S(v) \in \{\pm v\}, \quad S(w) \in \{\pm w\},$$

SIENDO $v = (-1,2,1)$, $w = (1,0,1)$ → NOTAR: $\langle v,w \rangle = 0$

- $S(v) = -v$, $S(w) = w$:

HAY UNA SOLA, LA SIMETRÍA CON RESP A $v$
(CUMPLE $S(w) = w$ PUES $\langle v,w \rangle = 0$)

- $S(v) = v$, $S(w) = -w$:

HAY UNA SOLA, LA SIMETRÍA CON RESP A $w$
(CUMPLE $S(v) = v$ PUES $\langle v,w \rangle = 0$)

- $S(v) = v$, $S(w) = w$:

HAY UNA SOLA, LA SIMETRÍA CON RESP A $\langle v,w \rangle$

- $S(v) = -v$, $S(w) = -w$:

NO HAY: $mult(-1, \chi_S) = 1 \quad \forall S$ SIMETRÍA