FORMAS BILINEALES

Sea V un K-espacio vectorial, una forma bilineal en V es una función $\Phi: V\times V \to K$ que es lineal en cada coordenada, es decir:

$\Phi(v_1+v_2, w) = \Phi(v_1,w)+\Phi(v_2,w)$ | $\Phi(v, w_1+w_2) = \Phi(v,w_1)+\Phi(v,w_2)$

$\Phi(\lambda v, w) = \lambda\Phi(v,w)$ | $\Phi(v, \lambda w) = \lambda \Phi(v,w)$

Si además $\Phi(v,w)=\Phi(w,v)$ $\forall v,w\in V$ es una forma bilineal simétrica.

⊗ EJEMPLO: si $K=\mathbb{R}$, un prod interno es una FBS.

- Matriz en una base
- Diagonalización

Sea $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ base de V y sea Φ una forma bilineal en V. La matriz de Φ en base B se define

$$(|\Phi|_B)_{ij} := \Phi(v_i,v_j)$$

Vale:

$$\Phi(v,w) = \underset{\text{vector fila}}{(v)_B} \cdot |\Phi|_B \cdot \underset{\text{vector columna}}{(w)_B^t} \qquad \forall v,w\in V$$

Si B' es otra base de V, entonces

$$|\Phi|_{B'} = C(B',B)^t \cdot |\Phi|_B \cdot C(B',B)$$

OJO! traspuesta, no inversa

¿Existirá alguna base B tal que $|\Phi|_B$ es diagonal?

[Sí, si Φ es FB simétrica y $2\neq 0$ en K]

Para $K=\mathbb{R}$, esto no es novedad:

$C^t\cdot \underset{\text{matriz simétrica}}{|\Phi|_E}\cdot C$ = diagonal

Sabíamos que en $\mathbb{R}$ las matrices simétricas siempre se pueden diagonalizar en una base orthonormal de autovectores.

$$\underbrace{C(B,E)^{-1}}_{=C(B,E)^t}\cdot M\cdot \underbrace{C(B,E)}_{\text{matriz ortogonal}} = D$$

⊗ EJEMPLO: Sea Φ la forma bilineal de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(x,y) = -x_1y_1 + x_1y_3 + 3x_2y_2 + x_3y_1 - x_3y_3$$

Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|\Phi|_B$ sea diagonal.

$$|\Phi|_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovectores:
$\langle(0\ 1\ 0)\rangle$ autoval 3
$\langle(1\ 0\ -1)\rangle$ autoval -2
$\langle(1\ 0\ 1)\rangle$ autoval 0

Tomo $B = \{(0,1,0); (\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}); (\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})\}$

Tenemos que $C := C(B,E) = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \end{pmatrix}$ es ortogonal $\Downarrow$ $C^{-1}=C^t$

$$\underbrace{C^{-1}}_{\text{"}C^t\text{"}}\cdot|\Phi|_E\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |\Phi|_B$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{v_1=(1,0,0)}$

$$|\Phi|_B = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$\Phi(v_1,w) = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot w^t$

$(-1\ 0\ 1)\cdot w^t$

$\Phi(v_1,v_2)=\Phi(v_1,v_3)=0$

$S_1 = \langle(-1\ 0\ 1)\rangle^\perp$

queremos que $\langle v_2,v_3\rangle = S_1$

$\boxed{v_2=(1,1,1)}$

$(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = (0\ 3\ 0)$

$S_2 = \langle(0\ 3\ 0)\rangle^\perp$

necesariamente $v_3\in S_1\cap S_2$

tomo $\boxed{v_3=(1\ 0\ 1)}$

$B = \{(1,0,0),(1\ 1\ 1),(1\ 0\ 1)\}$

$$C = C(B,E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Phi|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no son los autovalores!

$B = \{(1,0,0),(1\ 1\ 1),(1\ 0\ 1)\}$

$$C = C(B,E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Phi|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no son los autovalores!

$\tilde{B} = \{v_1, \frac{v_2}{\sqrt3}, v_3\}$

$\Phi(\frac{v_2}{\sqrt3},\frac{v_2}{\sqrt3}) = \left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2\Phi(v_2,v_2)$

$= 1$

La cantidad de elementos positivos, negativos y 0 que hay en la diagonal está determinada por Φ (no depende de la base B elegida al diagonalizar).