Álgebra Lineal - Clase 22

Gabriela Jeronimo

FCEN-UBA

Segundo cuatrimestre 2020

Esquema de la clase

- Transformaciones lineales ortogonales (repaso).
- Clasificación de transformaciones ortogonales.

Bibliografía recomendada.

G. Jeronimo, J. Sabia, S. Tesauri. *Algebra Lineal*. Cursos de Grado. Fascículo 2. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2008.

Capítulo 8 (Sección 8.3).

Transformaciones ortogonales en espacios euclídeos

Sean $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita.

Recordar:
Una t.l. $f : V \to V$ es ortogonal si cumple alguna de las condiciones siguientes (y, como consecuencia, todas):

- $f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$.
- $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V$.
- $\|f(v)\| = \|v\| \ \forall v \in V$.
- $\exists B$ base ortonormal de V tal que $f(B)$ es una base ortonormal de V.
- $\forall B$ base ortonormal de V, $f(B)$ es una base ortonormal de V.
- $\forall B$ base ortonormal de V, $|f|_B$ es ortogonal.

Propiedades.
Si $f : V \to V$ es una t.l. ortogonal, entonces:

- $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de $f \Rightarrow \lambda = \pm 1$
- $S \subseteq V$ subespacio f-invariante $\Rightarrow S^\perp$ es f-invariante.

Clasificación de t.l. ortogonales en dimensión 2

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una t.l. ortogonal, entonces f es una rotación (si $\det(f) = 1$) o f es una simetría (si $\det(f) = -1$).

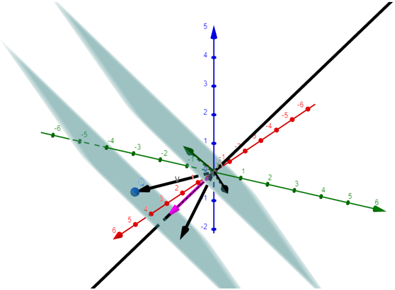
Clasificación de t.l. ortogonales en e.v. de dimensión 3

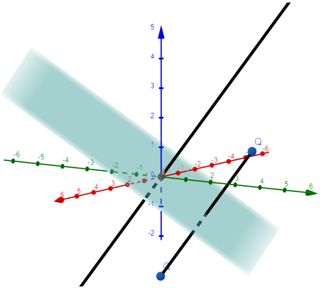
Definición.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una t.l. ortogonal.

(1) Se dice que f es una rotación si $\det(f) = 1$.

(2) Sea $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespacio de dimensión 2. Se dice que f es una simetría respecto de H si $f_{|_H} = id_H$ y $f_{|_{H^\perp}} = -id_{H^\perp}$.





Observación.

En $\mathbb{R}^3$ hay t.l. ortogonales que no son rotaciones ni simetrías.
Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (-x, -z, y)$.

$$|f|_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- E base ortonormal y $|f|_E \cdot |f|_E^t = I \Rightarrow f$ es ortogonal
- $\det(f) = -1 \Rightarrow f$ no es rotación
- $\mathcal{X}_f = (X+1)(X^2+1) \Rightarrow \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = v\} = \{0\}$
  $\Rightarrow f$ no es simetría.

En lo que sigue, $(V, \langle , \rangle)$ es un espacio euclídeo de dimensión 3.

Lema.
Sea $f : V \to V$, $\dim(V) = 3$, una t.l. ortogonal. Entonces $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ es autovalor de f.

Demostración.
$\mathcal{X}_f \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio de grado 3 $\Rightarrow$ $\mathcal{X}_f$ tiene una raíz $\lambda \in \mathbb{R}$
λ autovalor de f t.l. ortogonal $\Rightarrow |\lambda| = 1$
$\lambda = 1$ o $\lambda = -1$ autovalor de f. $\square$

¿Cómo son todas las transformaciones ortogonales en V?

Sea $f : V \to V$ una t.l. ortogonal.
Sea $v_1 \in V$ autovector de f de autovalor $\lambda = 1$ con $\|v_1\| = 1$, o bien de autovalor $\lambda = -1$ si $\lambda = 1$ no es autovalor.

$S = < v_1 >$ es f-invariante $\Rightarrow S^\perp$ es f-invariante.

Consideremos $S^\perp$ con el p.i. inducido por el de V.
$f_{|_{S^\perp}} : S^\perp \to S^\perp$ es una t.l. ortogonal, $\dim(S^\perp) = 2$.

$\exists B_1 = \{v_2, v_3\}$ base ortonormal de $S^\perp$ tal que vale:

(1) $|f|_{S^\perp}|_{B_1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, \pi]$, o bien

(2) $|f|_{S^\perp}|_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow B = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de V y vale:

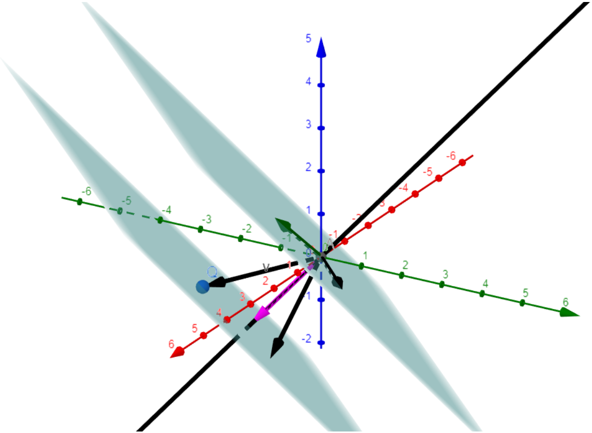
(1) $|f|_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, \pi]$, o bien

(2) $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 1$ es autovalor de f:

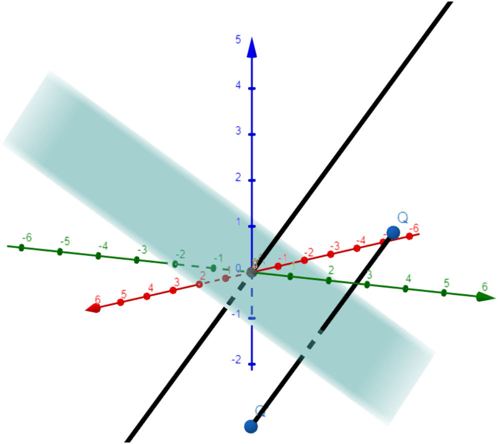
(1) $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, \pi]$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una rotación de eje $< v_1 >$ y ángulo θ.



$$(2)\quad |f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f(v_1) & = & v_1 \\ f(v_2) & = & v_2 \\ f(v_3) & = & -v_3 \end{array} \right.$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una simetría respecto de $H = < v_1, v_2 >$.



Si $\lambda = 1$ no es autovalor de f ($\Rightarrow \lambda = -1$ es autovalor):

(3) $$|f|_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in [0, \pi]$$

$$|f|_B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{simetría}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotación}}.$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es composición de rotación de eje $< v_1 >$ y ángulo θ y simetría respecto de $< v_2, v_3 >$.

Proposición.

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal ortogonal, entonces f es una rotación o una simetría o una composición de una simetría y una rotación.

Ejemplo.

Definir una rotación $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,0) = (0,1,1)$ y tal que el eje de la rotación sea ortogonal a $(1,1,0)$ y a $(0,1,1)$.

$H = <(1,1,0),(0,1,1)> \Rightarrow H^\perp = <(1,-1,1)>$.
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rotación de eje $H^\perp \Rightarrow f_{|_{H^\perp}} = id_{H^\perp}$.
Construimos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $H^\perp$ y una base de H:

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

Definimos:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ para que el eje sea } H^\perp, \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ para que } f(1,1,0) = (0,1,1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ f\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) &= ??? \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & \frac{1}{2} & * \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

completamos para tenga la estructura de una rotación.
Es decir, definimos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ &= \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

Resumiendo, definimos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ f\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) &= \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \end{cases}$$

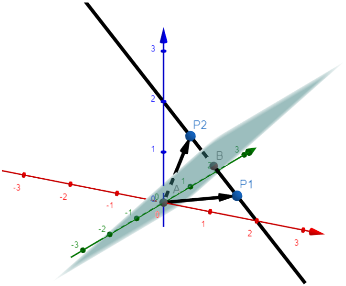
f es una rotación de eje $< (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) >$ y ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Ejemplo.

Definir una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,1,0) = (0,1,1)$.

f simetría, $f(1,1,0) = (0,1,1) \Rightarrow f(0,1,1) = (1,1,0)$

$$\begin{aligned} f(1,1,0) - f(0,1,1) &= (0,1,1) - (1,1,0) \\ f(1,0,-1) &= (-1,0,1) \end{aligned}$$



f simetría respecto de $H = <(1,0,-1)>^{\perp} = <(1,0,1),(0,1,0)>$

$$\left\{ \begin{aligned} f(1,0,1) &= (1,0,1) \\ f(0,1,0) &= (0,1,0) \\ f(1,0,-1) &= (-1,0,1) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= f\left(\tfrac{1}{2}(1,0,1) + (0,1,0) + \tfrac{1}{2}(1,0,-1)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(1,0,1) + (0,1,0) + \tfrac{1}{2}(-1,0,1) = (0,1,1) \checkmark \end{aligned}$$

Clasificación general de transformaciones lineales ortogonales

Teorema.
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión finita. Si $f : V \to V$ es una t.l. ortogonal, existe una base ortonormal B de V tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} I_{n_1} & & & & & & \\ & -I_{n_2} & & & & & \\ & & \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & & & \\ & & \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\theta_r & -\operatorname{sen}\theta_r \\ & & & & & \operatorname{sen}\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ y $\theta_i \in (0, \pi)$ $\forall 1 \leq i \leq r$ (donde los coeficientes de la matriz cuyos valores no están indicados son cero).

Demostración.

Por inducción en $n = \dim V$. Para $n = 2$ ✓.

Sea $n > 2$ y supongamos que el resultado vale para toda t.l. ortogonal definida en un e.v. de dimensión menor que n.

f ortogonal $\Rightarrow$ los posibles autovalores de f son 1 y -1.

Si $\lambda = 1$ es autovalor de f:

- $v_1 \in V$ autovector de f de autovalor 1 tal que $\|v_1\| = 1$

  $S = < v_1 >$ subespacio f-invariante de V

  $\Rightarrow S^\perp$ es f-invariante.

- $f_1 = f_{|_{S^\perp}} : S^\perp \to S^\perp$ t.l. ortogonal en el espacio euclídeo $S^\perp$ de dimensión $n-1$ (con el p.i. interno inducido por el de V).

  Por HI, existe B_1 base ortonormal de $S^\perp$ tal que $|f_1|_{B_1}$ es de la forma del enunciado.

- $B = \{v_1\} \cup B_1$ base ortonormal de V y

  $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times(n-1)} \\ 0_{(n-1)\times 1} & |f_1|_{B_1} \end{pmatrix}$ es de la forma del enunciado.

Si $\lambda = 1$ no es autovalor de f, pero $\lambda = -1$ sí, la demostración es similar al caso anterior.
Existe una base ortonormal B de V tal que $|f|_B$ es de la forma del enunciado con $n_1 = 0$ (es decir, sin unos en la diagonal).

Si f no tiene autovalores reales:
$m_f = P_1.P_2 \dots P_r$, con $P_i \in \mathbb{R}[X]$ irreducible de grado 2 $\forall i$.

Sea $Q = P_2 \dots P_r \in \mathbb{R}[X]$.
$Q \mid m_f$ y $Q \neq m_f \Rightarrow \exists w \in V$ tal que $Q(f)(w) \neq 0$.
Sea $v = Q(f)(w)$ y sea $S = < v, f(v) >$.

- v no es autovector de f (no tiene autovalores) $\Rightarrow \dim(S) = 2$.
- S es f-invariante, porque
  $P_1(f)(v) = P_1(f)(Q(f)(w)) = P_1(f) \circ Q(f)(w) =$
  $P_1(f) \circ P_2(f) \circ \cdots \circ P_r(f)(w) = m_f(f)(w) = 0$ y $\mathrm{gr}(P_1) = 2$.

$f_1 = f_{|_S} : S \to S$ t.l. ortogonal sin autovalores reales en un espacio euclídeo de dimensión 2 $\Rightarrow \exists B_S$ base ortonormal de S tal que
$|f_1|_{B_S} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$ con $\theta_1 \in (0, \pi)$.

S es f-invariante y f ortogonal $\Rightarrow$ $S^\perp$ es f-invariante.
$f_2 = f_{|_{S^\perp}} : S^\perp \to S^\perp$ es una t.l. ortogonal y $\dim(S^\perp) = n-2$.
Por HI, $\exists B_{S^\perp}$ base ortonormal de $S^\perp$ tal que $|f_2|_{B_{S^\perp}}$ tiene la forma del enunciado.
f no tiene autovalores reales $\Rightarrow$ f_2 tampoco
$\Rightarrow$ en $|f_2|_{B_{S^\perp}}$ no aparecen 1 ni -1 en la diagonal,

$$|f_2|_{B_{S^\perp}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & & & \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\theta_r & -\operatorname{sen}\theta_r \\ & & & \operatorname{sen}\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

con $\theta_i \in (0,\pi)$ $\forall 2 \le i \le r$.
$\Rightarrow$ $B = B_S \cup B_{S^\perp}$ es una base ortonormal de V tal que
$|f|_B = \begin{pmatrix} |f_1|_{B_S} & 0 \\ 0 & |f_2|_{B_{S^\perp}} \end{pmatrix}$ tiene la forma del enunciado
(con $n_1 = n_2 = 0$). $\square$