DIAGONALIZACIÓN I

RECORDAR: DADA $A \in K^{m \times m}$ SU POLINOMIO CARACTERÍSTICO ES

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_m - A) \in K[\lambda]$$ → GRADO m, MÓNICO

LOS AUTOVALORES DE A SON LAS RAÍCES DE χ_A

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$$

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} \lambda-5 & 6 & 6 \\ 1 & \lambda-4 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda+4 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-5)\det\begin{pmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 6 & \lambda+4 \end{pmatrix} - 6\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & \lambda+4 \end{pmatrix} + 6\det\begin{pmatrix} 1 & \lambda-4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

¿AUTOVALORES (= RAÍCES)? ⇝ ÁLGEBRA I

POR EJ, SI $K = \mathbb{Q}$:

λ AVAL $\Rightarrow \lambda \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$;

EVALUANDO: $\chi_A(1) = \chi_A(2) = 0$; DIVIDO:

(VALE EN TODO K...)

$$\chi_A = (X-1)(X-2)\overbrace{(X-2)}^{\text{COCIENTE}} = (X-1)^1(X-2)^2$$

$\rightsquigarrow$ $\lambda = 1$ ES AVAL SIMPLE,
$\lambda = 2$ ES AVAL DOBLE.

RECORDAR: SI λ ES AVAL DE A EL AUTOESPACIO ASOCIADO ES

$$E_\lambda = Nu(\underbrace{\lambda I - A}_{\text{SINGULAR}}) = \{v \in K^m : Av = \lambda v\} \neq \{0\}$$

$\hookrightarrow$ v ES AVEC DE AVAL λ

PROP: $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \text{mult}(\lambda, \chi_A)$

$\dim(E_\lambda) = m - rg(\lambda I - A)$

EJEMPLO (CONT):

- $E_1 = Nu(I-A) = Nu\begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{CUENTA}}{=} \langle(3,-1,3)\rangle$ $\quad$ dim = 1

- $E_2 = Nu(2I-A) = Nu\begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

$$\overset{\text{CUENTA}}{=} \langle (2,1,0), (0,1,-1) \rangle$$

RECORDAR: A ES DIAGONALIZABLE SI $\exists$ BASE DE K^m FORMADA POR AVECS DE A;

EN TAL CASO, SI $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Y $Av_i = \lambda_i v_i$, PONIENDO

$$C = \left(v_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, v_n \right) \in GL_n(K) \quad \text{SE TIENE}$$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \longleftrightarrow \left(Av_1 \middle| \cdots \middle| Av_n \right) = \left(\lambda_1 v_1 \middle| \cdots \middle| \lambda_n v_n \right)$$

EJEMPLO (CONT): $B = \{ \underbrace{(3,-1,3)}_{\lambda=1}, \underbrace{(2,1,0), (0,1,-1)}_{\lambda=2} \}$

ES BASE DE AVEC DE A;

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2$$

- SI $K = \mathbb{Q}$ NO TIENE AVALS $\rightsquigarrow$ NO ES DIAG'BLE
- SI $K = \mathbb{R}$, $\chi_A = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$;

$$E_{\sqrt{2}} = Nu \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \langle (\sqrt{2}, 1) \rangle$$

$$E_{-\sqrt{2}} = Nu\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -2 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \langle(-\sqrt{2},1)\rangle$$

$\rightsquigarrow$ $B = \{(\sqrt{2},1), (-\sqrt{2},1)\}$ ES BASE DE AVEC. //

2) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\chi_A = (\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1;$$

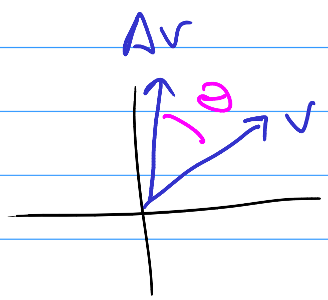
$$\Delta(\chi_A) = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) < 0,$$

DISCRIMINANTE

SALVO SI $\theta \in \pi\mathbb{Z}$;

- SI $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, A NO ES DIAG'BLE EN $\mathbb{R}$
- SI $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ DIAG'BLE
- SI $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ DIAG'BLE

GEOMÉTRICAMENTE:



//

3) $A = \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}} I + T$, CON T ESTRICT. TRIANGULAR SUPERIOR,

¿ES DIAGONALIZABLE? $\searrow$ $T_{ij} = 0$ SI $i \leq j$

$$A = \begin{pmatrix} a & & & \\ T_{21} & a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{m1} & & T_{m(m-1)} & a \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \chi_A = (\lambda - a)^m$;

$E_a = Nu(aI - A) = Nu(-T)$

$\therefore$ A DIAG'BLE

$\iff \exists B$ BASE DE K^m FORMADA POR VECTORES DE E_a

$\iff E_a = K^m \iff T = 0$

$\Leftarrow)$ $T = 0 \Rightarrow A = aI$, DIAG'BLE

$\Rightarrow)$ A DIAG'BLE, a ÚNICO AVAL $\Rightarrow$

$C^{-1}AC = aI \Rightarrow$

$A = C(aI)C^{-1} = aI \Rightarrow T = 0$ //

4) SEA $A \in K^{m\times m}$ CON AVALS $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ DISTINTOS 2 A 2 (DIAG'BLE). SEA $B \in K^{m\times m}$ TAL QUE $AB = BA$. PROBAR QUE B ES DIAG'BLE.

PARA $i = 1, \dots, m$: $E_{\lambda_i, A} = \langle \overbrace{v_i}^{\neq 0} \rangle$

(PUES: $1 \leq \dim E_{\lambda_i, A} \leq mult(\lambda_i, \chi_A) = 1$)

$$Av_i = \lambda_i v_i \implies A(Bv_i) = BAv_i = \lambda_i (Bv_i)$$

$$\implies Bv_i \in E_{\lambda_i, A} = \langle v_i \rangle$$

$$\implies (\exists \mu_i) \quad Bv_i = \mu_i v_i$$

$\therefore$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ES BASE DE AVEC DE B (DE AVAL'S $\mu_1, \dots, \mu_n$) //

ILUSTRACIÓN: DADOS $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots \mu_n$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

SON DIAG'BLES Y CONMUTAN:

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} = BA$$

//

OBS: NO ES CIERTO SI LOS AVAL DE A NO SON DISTINTOS 2 A 2.

POR EJ, $A = aI$, $B = A + T$ CON T ESTRICT TRIANG. SUPERIOR, $T \neq 0$.

A ES DIAG'BLE, B NO, Y $AB = a(aI + T) = BA$.

//