Independencia lineal - Bases - Dimensión

(•) Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente (LI) si la única combinación lineal que da 0 es la trivial. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 .$$

(•) Sist. de generadores + LI = base

(•) Todas las bases de un e.v. tienen la misma cantidad de elementos. Esto se llama la dimensión del espacio.

Consideramos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, formado por todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3 y el polinomio nulo.

Sean $p_1 = X^3 - X^2 + 2$, $p_2 = X^3 + k^3X - 1$, $p_3 = X^2 + kX - 3$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ es linealmente independiente. Para alguno de los valores hallados, completar el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ a una base de V.

$$\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\alpha (X^3 - X^2 + 2) + \beta (X^3 + k^3 X - 1) + \gamma (X^2 + kX - 3) = 0$$

$$(\alpha + \beta) X^3 + (-\alpha + \gamma) X^2 + (k^3 \beta + k\gamma) X + (2\alpha - \beta - 3\gamma) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ k^3\beta + k\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$\beta = -\alpha$

$\gamma = \alpha$

$-k^3\alpha + k\alpha = 0 \Longleftrightarrow \boxed{k\alpha \cdot (-k^2 + 1) = 0}$

$-k^2 \neq -1$

$k^2 \neq 1$

$k \neq \pm 1$

$\boxed{2\alpha - (-\alpha) - 3\alpha = 0}$

$2\alpha + \alpha - 3\alpha = 0$

$0 = 0$

Si $k \neq 0$ y $-k^2 + 1 \neq 0$, la única pos. es que $\alpha = 0$ y por lo tanto $\beta = \gamma = 0$

$\rightarrow$ hay sol única $\rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ es LI.

$\boxed{\text{Si } k \neq 0, 1, -1 \rightarrow \{p_1, p_2, p_3\} \text{ es LI.}}$

Si $k = 0, 1$ o -1, α puede tomar cualquier valor. La sol del sistema será $\{(\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \Longrightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ es LD.

Consideramos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, formado por todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3 y el polinomio nulo.

Sean $p_1 = X^3 - X^2 + 2$, $p_2 = X^3 + k^3X - 1$, $p_3 = X^2 + kX - 3$.

Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ es linealmente independiente. Para alguno de los valores hallados, completar el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ a una base de V.

$\{p_1, p_2, p_3\}$ es LI $\Longleftrightarrow k \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

⚠ $V = \{aX^3 + bX^2 + cX + d \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

$= \langle X^3, X^2, X, 1 \rangle$

Además son LI $\Longrightarrow \boxed{\{X^3, X^2, X, 1\}}$ es base de V

$\Longrightarrow \dim V = 4$.

⚠ Sí o sí alguno de estos polinomios tiene que funcionar para completar $\{p_1, p_2, p_3\}$ a una base.

Tomamos $k = 2$:

$p_1 = X^3 - X^2 + 2$

$p_2 = X^3 + 8X - 1$

$p_3 = X^2 + 2X - 3$

propongo $\boxed{p_4 = 1}$, veamos que $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es LI:

$$\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3 + \delta \cdot p_4 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ 8\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 3\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$\beta = -\alpha$

$\gamma = \alpha$

$\underbrace{2\alpha - (-\alpha) - 3\alpha}_{=0} + \delta = 0 \rightarrow \boxed{\delta = 0}$

como $\delta = 0$

$\alpha \cdot p_1 + \beta \cdot p_2 + \gamma \cdot p_3 = 0$. Como ya sabíamos que $\{p_1, p_2, p_3\}$ es LI, resulta que $\boxed{\alpha = \beta = \gamma = 0}$

Conclusión: $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es LI, y, como $\dim V = 4$, forman una BASE.