GRAM-SCHMIDT

Dada una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un esp. vectorial con producto interno, definimos recursivamente

$$z_1 = v_1, \qquad z_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, z_i\rangle}{\|z_i\|^2} z_i \qquad \forall 1 \le r \le n-1$$

Entonces $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es una base ortogonal del espacio, que además cumple $\langle v_1, v_2, \dots, v_k\rangle = \langle z_1, z_2, \dots, z_k\rangle$ $\forall 1 \le k \le n$.

EJEMPLO: Sea $V = \mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno definido por $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

Hallar una base ortonormal (BON) de V.

Tomamos la base $\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{X}, \underset{v_3}{X^2}\}$.

$z_1 = v_1$ $\quad z_1 = 1$

$$z_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, z_1\rangle}{\|z_1\|^2} z_1 = x - \frac{1/2}{1}\cdot 1$$

$$z_2 = x - 1/2$$

$$z_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, z_1\rangle}{\|z_1\|^2} z_1 - \frac{\langle v_3, z_2\rangle}{\|z_2\|^2} z_2$$

$$= x^2 - \frac{1/3}{1}\cdot 1 - \frac{1/12}{1/12}(x - 1/2)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} - (x - 1/2)$$

$$z_3 = x^2 - x + 1/6$$

$\langle v_2, z_1\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$\|z_1\|^2 = \langle z_1, z_1\rangle = \int_0^1 1\,dx = 1$

$\langle v_3, z_1\rangle = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

$\langle v_3, z_2\rangle = \int_0^1 x^2(x - 1/2)\,dx = 1/12$

$\|z_2\|^2 = \langle z_2, z_2\rangle = \int_0^1 (x - 1/2)^2\,dx = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \{\underset{z_1}{1}, \underset{z_2}{x - 1/2}, \underset{z_3}{x^2 - x + 1/6}\}$ es base ortogonal de V.

$\|z_1\| = 1 \qquad \|z_2\| = \frac{1}{\sqrt{12}} \qquad \|z_3\|^2 = \langle z_3, z_3\rangle = \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2\,dx = \frac{1}{180}$

$\|z_3\| = \frac{1}{\sqrt{180}}$

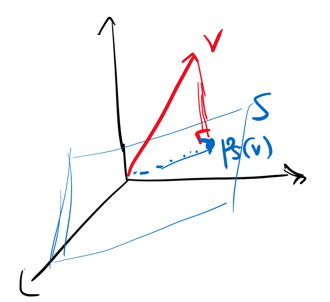
$\Rightarrow \{1, \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}), \sqrt{180}(x^2 - x + 1/6)\}$ es BON de V.

¿Qué tiene de bueno tener una BON?

① **Coordenadas:** si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una BON de V y $v \in V$, entonces $(v)_B = (\langle v, v_1\rangle, \langle v, v_2\rangle, \dots, \langle v, v_n\rangle)$

es decir $\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \cdot v_i}$

② **Proyección ortogonal:** si $S \subseteq V$ es un subespacio y $v \in V$, $\exists!\, s \in S$ tal que $v - s \perp S$. s se llama la proyección ortogonal de v sobre S, se escribe $s = p_S(v)$.



$p_S(v)$ es el vector de S más cercano a v, y por lo tanto $\|v - p_S(v)\| = d(v, S)$.

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es BON de S

$$\Rightarrow \boxed{p_S(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i\rangle \cdot v_i}$$

$$z_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, z_i\rangle}{\|z_i\|^2} z_i$$

$$= v_{r+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \left\langle v_{r+1}, \frac{z_i}{\|z_i\|}\right\rangle \frac{z_i}{\|z_i\|}}_{\text{proyección ortogonal de } v_{r+1} \text{ al subesp } \langle z_1, z_2, \dots, z_r\rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_r\rangle}$$

⊗ **EJERCICIO:** Hallar el polinomio de grado ≤ 2 más cercano a la función $f(x) = e^x$.

(Medimos las distancias de acuerdo al producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.)

Sea $S = \mathbb{R}_2[X] = \langle 1, x, x^2\rangle$.

Queremos el elemento de S más cercano a f, es decir $p_S(f)$. Vimos que $\{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{\sqrt{12}(x - \frac{1}{2})}, \underset{v_3}{\sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})}\}$ es una BON de S.

$$p_S(f) = \langle f, v_1\rangle v_1 + \langle f, v_2\rangle v_2 + \langle f, v_3\rangle v_3$$

$\langle f, v_1\rangle = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1$

$\langle f, v_2\rangle = \sqrt{12}\int_0^1 e^x (x - \frac{1}{2})\,dx =$

$\langle f, v_3\rangle = \sqrt{180}\cdot\int_0^1 e^x (x^2 - x + 1/6)\,dx =$