TRANSFORMACIONES LINEALES II

MENÚ:
- MATRIZ DE UNA TL
- RANGO
- PROYECTORES

RECORDAR: SI $f: V \to W$ TL Y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$, $B'=\{w_1,\dots,w_m\}$ SON BASES DE V Y W, ENTONCES

- $$[f]_{BB'} = \left(\overbrace{(f(v_1))_{B'}}^{z_1} \Big| \cdots \Big| \overbrace{(f(v_n))_{B'}}^{z_n} \right)$$
- $$[f]_{BB'}\,(v)_B^t = (f(v))_{B'}^t \quad \forall v \in V$$
- EL ISO $[\ ]_{B'}: W \to K^m$ SE RESTRINGE A UN ISO ENTRE $\operatorname{Im} f$ Y $\langle z_1,\dots,z_n\rangle$

  ($w \in \operatorname{Im} f$ SII $(w)_{B'}$ ES MÚLTIPLO DE $[f]_{BB'}$)
- EL ISO $[\ ]_B: V \to K^n$ SE RESTRINGE A UN ISO ENTRE $\ker f$ Y $\ker([f]_{BB'})$

  ($f(v)=0$ SII $[f]_{BB'} \cdot (v)_B^t = 0$)

EJERCICIOS

1) CONSIDEREMOS LAS BASES DE $\mathbb{Q}_2[X]$

$$B=\{x^2+x,\ x,\ x^2+x+1\},\quad B'=\{x^2,\ 1,\ x\}.$$

SEA $f: \mathbb{Q}_2[X] \to \mathbb{Q}_2[X]$ LA TL DADA POR

$$[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ a & 1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

HALLAR TODOS LOS $a, b \in \mathbb{Q}$ TALES QUE

- $\dim(\ker f) = 1$
- $(b+1)X + b \in \operatorname{Im} f$

$\dim(\ker f) = 1$ SII $\underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{\operatorname{rg} f} = 2$

SII $\underbrace{\operatorname{rg}([f]_{BB'})}_{\text{DIM DEL ESPACIO GEN POR LAS COLUMNAS}} = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2a-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2a-2 \\ 0 & a-2 & 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2a-2 \\ 0 & 0 & \underbrace{(1-a)(2a-3)}_{\text{CUENTA}} \end{pmatrix}$$

ASÍ, $\operatorname{rg} f = 2$ SII $a=1$ Ó $a = 3/2$;

AHORA, $(b+1)X + b \in \operatorname{Im} f$ SII

$$\underbrace{[(b+1)X+b]_{B'}}_{=(0,\, b,\, b+1)} \in \langle (1,2,a), (1,a,1), \cancel{(0,1,2a-2)} \rangle$$

SII ES CD EL SISTEMA

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & b \\ a & 1 & b+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & b \\ 0 & 1-a & b+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2b+1 \\ 0 & 1-a & b+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1+(1-a)(2b+1) \end{array}\right)$$

- SI $a=1$, ES CD SII $b=-1$
- SI $a=3/2$, ES CD SII $\underbrace{b+1-1/2(2b+1)=0}_{\nexists \text{ TAL } b}$

YAPA: CALCULEMOS $\ker f$ PARA $a=1$, $b=-1$

$v\in\ker f$ SII $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot[v]_B^t=0$ (ie., $[v]_B\in\ker[f]_{BB'}$)

$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; $x_2=x_3$, $x_1=-2x_3$

ASÍ $v\in\ker f$ SII $[v]_B\in\langle(-2,1,1)\rangle$ SII

$v\in\langle-2(x^2+x)+1\cdot x+1\cdot(x^2+x+1)\rangle=\langle -x^2+1\rangle$

2) SEA $A\in K^{n\times n}$. PROBAR QUE SON EQUIVALENTES

i. $\exists\, B\in GL_n(K)\,/\,A^2=BA$
ii. $rg\, A^2=rg\, A$
iii. $Im\, A\cap\ker A=\{0\}$
iv. $\exists\, P\in GL_n(K)$ Y $Q\in GL_r(K)$ TALES QUE

$$A=P\left(\begin{array}{c|c}Q&0\\\hline 0&0\end{array}\right)P^{-1}$$

i ⇒ ii) B INV $\Rightarrow$ $f_B: K^n\to K^n$, $v\mapsto Bv$ ES ISO ;

MÁS AÚN, $E_C(BA)=f_B(E_C(A))$

↳ ESPACIO GEN POR LAS COLUMNAS DE LA MATRIZ

ASÍ, $rg(\overbrace{BA}^{=A^2}) = \dim(f_B\, E_C(A)) \overset{f_B \text{ ISO}}{=} \dim(E_C(A)) = rg(A)$

ii $\Rightarrow$ iii) SEA $w \in \operatorname{Im} A \cap \ker A$. ASÍ $(\exists v)$ $w = f_A(v)$, Y ADEMÁS $f_A(w) = f_A(f_A(v)) = 0$

$\rightsquigarrow$ BASTA VER QUE $v \in \ker f_A$; COMO $v \in \ker(\underbrace{f_A^2}_{= f_{A^2}})$, BASTA VER QUE $\ker(f_{A^2}) = \ker(f_A)$.

COMO $Av = 0 \Rightarrow A^2 v = 0$, TENEMOS QUE $\ker(f_A) \subseteq \ker(f_{A^2})$

$\rightsquigarrow$ BVQ $\dim(\ker f_A)) = \dim(\ker(f_{A^2}))$, LO CUAL SE SIGUE DE QUE $rg(A^2) = rg(A)$ (TEO. DIM.)

iii $\Rightarrow$ iv) POR EL TEO DE LA DIM, TENEMOS QUE SI B ES BASE DE $\operatorname{Im} A$ Y B' ES BASE DE $\ker A$, ENTONCES $B'' = B \cup B'$ ES BASE DE K^n.

AFIRMO:

$$\underbrace{[f_A]_{B''}}_{= P^{-1} A \cdot P,} = \begin{pmatrix} \overbrace{[f_A]_B}^{=Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CON $P = C(B'', E)$

$(f_A(v))_{B''} = (*, \dots, *, 0, \dots, 0)$

$f_A(v) = 0 \;\; \forall v \in B'$

MÁS AÚN, $[f_A]_B$ ES LA MATRIZ EN BASE B DE LA RESTRICCIÓN

$$\underbrace{f_A|_{\operatorname{Im} A} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} A}_{\text{ISO, PUES TIENE NÚCLEO NULO}}$$

iv $\Rightarrow$ i) $A = P \left(\begin{array}{c|c} \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1}$

$$\Rightarrow A^2 = P \left(\begin{array}{c|c} \varphi^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1} = B \, P \left(\begin{array}{c|c} \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1},$$

SI PONEMOS

$$B = P \left(\begin{array}{c|c} \varphi & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) P^{-1} \in GL_m(K)$$

3) SEA $f : V \to V$. PROBAR QUE f ES UN PROYECTOR (i.e, $f^2 = f$) SII

$$(*) \quad rg(f) + rg(1_V - f) = \dim V$$

PARA $v \in V$ TENEMOS QUE $v = f(v) + (v - f(v))$;

i.e.: $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im}(1_V - f)$

ASÍ, $(*) \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}(1_V - f) = \{0\}$;

- PROY $\Rightarrow (*)$:

$$w = f(v) = u - f(u) \Rightarrow w = f(u) - f^2(u) = 0$$

- $(*) \Rightarrow$ PROY:

$$f(v) - f^2(v) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im}(1_V - f) = \{0\}$$