1. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que

   i) $f(1) = 1 + x - x^2$, ii) $x - 2x^2 \in \mathrm{Im}(f)$, iii) $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Im}(f) \cap \{p \in V \mid p(1) = 0\}$.

   a) Hallar bases de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ para cualquier transformación lineal $f : V \to V$ que cumpla las condiciones anteriores.

   b) Si $V = \mathbb{R}_3[x]$, probar que no existe $f : V \to V$ que cumpla simultáneamente i) y iii).

---

2. Sean $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ y $B \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ tales que $\det(A \cdot B) \neq \det(B \cdot A)$. Probar que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 4$.

---

3. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, B una base de V y $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Sean $v \in V$ y $S, T \subset V$ subespacios tales que

$$[v]_B = (2, 2, -2, 1), \quad S^\circ = \langle \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_3 + 2\varphi_4 \rangle \ \text{ y } \ T^\circ = \langle \varphi_1 - 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 8\varphi_4, \varphi_2 - 2\varphi_4 \rangle.$$

   a) Hallar $\dim(S + T)$.

   b) Decidir si $v \in S \cap T$.

---

4. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\det\left(v_1 + v_2 \mid v_1 - 3v_2 \mid 2v_2 - 2v_3\right) = 16.$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(v_1) = (1, 2, 3), \quad f(v_2) = (3, 0, -1) \quad \text{y} \quad f(v_3) = (2, 4, 5).$$

Calcular el determinante de la matriz $[f]_B$.