FORMA DE JORDAN II

MENÚ:
- MÁS SOBRE EL CASO NILPOTENTE
- EL CASO GENERAL

RECORDAR: $A \in K^{m \times m}$ NILPOTENTE

- $\#$ BLOQUES EN J_A = $\dim(\ker A)$
- SI $m_A = m$, ENTONCES $\forall\, 1 \leq i \leq m$:

PARA $i > m$ NO HAY BLOQUES...

$$\#\text{ BLOQUES EN } J_A \text{ DE TAMAÑO } i = rg(A^{i+1}) - 2\,rg(A^{i}) + rg(A^{i-1})$$

$$\left(\#\text{ BLOQUES EN } J_A \text{ DE TAMAÑO } m = rg(A^{m-1}), \text{ POSITIVO}\right)$$

EJEMPLOS:

1) ¿$\exists\, A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ TAL QUE

$$rg\, A = 10,\quad rg\, A^4 = 3,\quad rg\, A^5 = 0\ ?$$

- $A^5 = 0$, $A^4 \neq 0 \Rightarrow m_A = X^5 \Rightarrow$ HAY AL MENOS UN BLOQUE DE 5×5; MÁS PRECISAMENTE, HAY $3 - 2 \cdot 0 + 0 = 3$ BLOQUES DE 5×5

¡ABS!

- $rg\, A = 10 \Rightarrow$ HAY 5 BLOQUES EN TOTAL

RTA: NO

2) ¿ $\exists A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ TAL QUE

$rg\, A = 11$, $rg\, A^2 = 8$, $rg\, A^3 = 5$, $rg\, A^4 = 2$, $rg\, A^5 = 0$?

\# BLOQUES DE $i \times i$ DEBERÍA SER

- 2, $\quad i = 5$
- $5 - 2 \cdot 2 = 1$, $\quad i = 4$
- $2 - 2 \cdot 5 + 8 = 0$, $\quad i = 3$
- $11 - 2 \cdot 8 + 5 = 0$, $\quad i = 2$
- $15 - 2 \cdot 11 + 8 = 1$, $\quad i = 1$

CANDIDATA: $A = \begin{pmatrix} J_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}$

SIRVE:
- $rg(A^i) = \sum_{j=1}^{4} rg\left((J_{r_j})^i\right)$
- $rg\left(J_r^{\,i}\right) = \begin{cases} r-1-i, & i < r \\ 0, & i \geq r \end{cases}$

CASO GENERAL: $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, CON AVALS $\lambda_1, \dots, \lambda_r$

- $\dim(\ker(A - \lambda_i I)) = \#$ BLOQUES DE AVAL λ_i
- SI $mult(\lambda_i, m_A) = m_i$, ENTONCES HAY AL MENOS UN BLOQUE DE AVAL λ_i Y TAMAÑO m_i

Y NO HAY MÁS GRANDES

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -6 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

CALCULEMOS J_A, Y UNA BASE DE JORDAN

- PRIMERO, m_A. CUENTA: $\chi_A = (X+2)^2(X-4)$

$m_A = ?$ $\longleftrightarrow$ ¿A DIAG'BLE?

$$\lambda = -2: \quad rg(A+2I) = rg\begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\rightsquigarrow$ A NO DIAG'BLE, $m_A = \chi_A$.

- $\lambda = 4$: BLOQUES DE 1×1 $\leftrightsquigarrow$ AVECS

$$E_4 = \ker(A-4I) = \ker\begin{pmatrix} -7 & -7 & -6 \\ 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

- $\lambda = -2$: CONSIDERAMOS LA CADENA

$$\ker(A+2I)^2 \supsetneq \ker(A+2I) \supsetneq \{0\}$$

$$\underset{v}{\Psi} \quad \notin \quad \longmapsto (A+2I)\cdot v = w$$

ASÍ, UNA BASE DE JORDAN ES $\{v, w, (1,-1,0)\}$,

$$y \quad |f_A|_B = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A \end{array}\right) ; \quad \text{RESTA HALLAR } v.$$

- $\ker(A+2I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -7 & -6 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,1) \rangle$
- $\ker\left((A+2I)^2\right) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -36 & -36 \\ 0 & 36 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ↓ CUENTA

$$= \langle (1,-1,1), \underbrace{(1,0,0)}_{= v} \rangle$$

w

Así, $w = (A+2I)v = (-1,1,-1)$

PROBLEMA: SEAN $A, B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ TALES QUE

- $\chi_A = \chi_B = (X-2)^2 (X-3)^3$
- $m_A = m_B$

PROBAR QUE $A \sim B$

IDEA: PROBAR QUE YA QUEDA DETERMINADA POR ESTOS DATOS.

ESCRIBAMOS $m_A = (X-2)^\alpha (X-3)^\beta$, → TAMAÑOS MÁXIMOS DE LOS RESP. BLOQUES

$1 \leq \alpha \leq 2, \quad 1 \leq \beta \leq 3$

- $\alpha = \beta = 1$: A DIAG'BLE, Y POR ENDE

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & & & & 0 \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ 0 & & & & 3 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = 2, \beta = 1$: TENGO, AL MENOS,

UN $\begin{smallmatrix} 2 & \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}$ Y UN 3 ;

COMO $\chi_A = (X-2)^2 (X-3)^3$, DEBE SER

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = 1, \beta = 2$: TENGO, AL MENOS,

UN 2 Y UN $\begin{smallmatrix} 3 & \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}$;

COMO $\chi_A = (X-2)^2 (X-3)^3$, DEBE SER

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = 2, \beta = 2$: $$J_A = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = 1, \beta = 3$:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\alpha = 2, \beta = 3$:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & 1 & 3 & \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

//

PROBLEMA: SEAN $A, B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ TALES QUE

- $\chi_A = \chi_B = (X-2)^2 (X-3)^4$
- $m_A = m_B$

¿ES NECESARIAMENTE $A \sim B$?

RTA: NO; POR EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & 1 & 3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

CUMPLEN $m_A = m_B = (X-2)^2 (X-3)^2$

$\chi_A = \chi_B = (X-2)^2 (X-3)^4$, PERO $A \nsim B$