Flujo I y II

Eric Brandwein & Leandro Raffo

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

11 de Noviembre de 2024

Idea para hoy

Idea para hoy

- Dar un breve repaso de los algoritmos de flujo.

Idea para hoy

- Dar un breve repaso de los algoritmos de flujo.
- Ver cómo demostrar correctitud en flujo.

Idea para hoy

- Dar un breve repaso de los algoritmos de flujo.
- Ver cómo demostrar correctitud en flujo.
- Resolver varios ejercicios de modelado.

Red

¿Qué es una red?

- Un dígrafo $D = (V, E)$ con:

Red

¿Qué es una red?

- Un dígrafo $D = (V, E)$ con:
  1. Dos vértices distinguidos: s (fuente) y t (sumidero)

Red

¿Qué es una red?

- Un dígrafo $D = (V, E)$ con:
  1. Dos vértices distinguidos: s (fuente) y t (sumidero)
  2. Una función de capacidad $c : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Flujo

¿Qué es un flujo (válido)?

- Dada una red definimos el flujo como una función $f : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface los dos siguientes axiomas:

†El flujo que entra a v suma lo mismo que el que sale.

Flujo

¿Qué es un flujo (válido)?

- Dada una red definimos el flujo como una función $f\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface los dos siguientes axiomas:
  1. Restricción sobre la capacidad:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

† El flujo que entra a v suma lo mismo que el que sale.

Flujo

¿Qué es un flujo (válido)?

- Dada una red definimos el flujo como una función $f\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface los dos siguientes axiomas:
  1. Restricción sobre la capacidad:
  $$0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$$
  2. Conservación de flujo, para todo $v \in V \setminus \{s,t\}$[†]:
  $$\sum_{u \in V} f(u,v) = \sum_{u \in V} f(v,u)$$
- Con esto podemos calcular el flujo total de la red cómo

$$\sum_{u \in V} f(s,v) - \sum_{u \in V} f(u,s) =$$

$$\sum_{u \in V} f(v,t) - \sum_{u \in V} f(t,u)$$

[†] El flujo que entra a v suma lo mismo que el que sale.

Dualidad

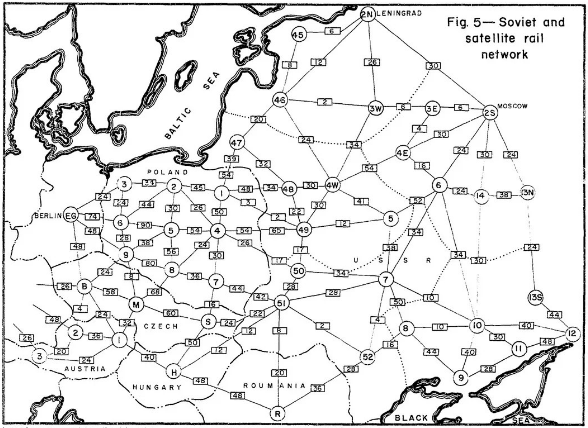
Dual y corte de capacidad mínima

- Dado un problema de flujo máximo se lo puede mirar de otra manera como un problema equivalente llamado **dual**. Este consiste en encontrar un corte de capacidad mínima.
- Un corte $C = (S, T)$ son dos conjuntos de vértices de G tal que $S \cup T = V$, $s \in S$ y $t \in T$. Definimos la capacidad del corte como
$$\sum_{u \in S, v \in T} c(u, v).$$
- Teorema de flujo máximo corte de capacidad mínima: El flujo máximo de la red es equivalente al mínimo de cualquier corte en la red.
- De esto podemos deducir que si f es un flujo en nuestra red y $cap(C)$ la capacidad de un corte cualquiera tenemos
$$f \leq cap(C).$$

"Aplicaciones" ‡

Red soviética.

SECRET



Legend: International boundary ········· Regional boundaries of the USSR (they are included as a matter of general information)

(7) Operating divisions. Those located in Russia are believed to be accurately located. Some Russian divisions (2, 3, 4 and 13) are located in two regions and are so indicated. Divisions shown in the satellites are indicated according to the authors' best judgment, since intelligence reports are unavailable. Train capacities in Russia are for 1000-net-ton trains or their equivalent. Train capacities in Poland are for 666 net tons (or the equivalent). Train capacities in all other satellites are for 400 net tons (or the equivalent) except in East Germany. In East Germany, train capacities are those of entering lines. The numbers shown in boxes are total interdivisional capacities.

SECRET

RM 1573-5

‡Historia de flujo máximo:
https://homepages.cwi.nl/~lex/files/histtrpclean.pdf
https://web.eecs.umich.edu/~pettie/matching/Harris-Ross-fundamentals-of-evaluating-rail-ne
pdf

Miscelánea

Teoremas útiles

- Si la red tiene todas capacidades enteras entonces existe un flujo máximo entero.
- Si G es una red con n vértices, m aristas y F_{max} [¶] es el flujo máximo entonces vale que la complejidad de FFEK está en

$$O(\min\{mF_{\text{max}}, nm^2\})$$

[¶] O una cota.

Ejercicio 1, warmup

Nos dan una lista de personas y sus preferencias para hacer ciertas tareas. Cada persona puede hacer una tarea y además cada tarea solo puede ser hecha por una sola persona. Nos piden calcular la cantidad máxima de tareas que se pueden hacer.

- Modelar el ejercicio como un problema de flujo máximo.
- Mostrar que el modelado es correcto.
- Dar una cota superior de la complejidad.

Tuki en GH

Tuki fue uno de los afortunados en entrar a la casa de GH (Grupo Humano). En este juego cada semana los jugadores votan por la eliminación de otro jugador. Cada jugador vota a un único jugador y los jugadores con más votos son enviados a un desafío.
Tuki sabe que conviene mantener la votación lo más pareja posible, para evitar problemas en la casa. Él sabe que:

- Hay J jugadores y K grupos.
- El jugador i pertenece al grupo g_i.
- El jugador i está dispuesto a votar al conjunto N_i de jugadores.
- Si algún grupo G_i recibe más votos que el doble de la cantidad de jugadores en el grupo, entonces se va a sentir atacado.
- Si un jugador individual i recibe más de 3 votos, entonces también se siente atacado.

Quiere decidir, dados los J jugadores junto a sus conjuntos N_i y la descripción de los K grupos, si es posible que la votación logre que ningún grupo ni jugador se sienta atacado.

Titanic

Después del hundimiento del Titanic mucha gente quedó varada en el agua esperando que los rescaten. Dadas las siguientes restricciones nos piden calcular cuántas personas se pueden salvar. La gente empieza arriba de hielos pequeños y puede hacer lo siguiente:

Titanic

Después del hundimiento del Titanic mucha gente quedó varada en el agua esperando que los rescaten. Dadas las siguientes restricciones nos piden calcular cuántas personas se pueden salvar. La gente empieza arriba de hielos pequeños y puede hacer lo siguiente:

- Quedarse momentáneamente en un pedazo de hielo pequeño con la restricción de que no pueden estar ahí para siempre y una vez que se muevan el hielo se hunde.

Titanic

Después del hundimiento del Titanic mucha gente quedó varada en el agua esperando que los rescaten. Dadas las siguientes restricciones nos piden calcular cuántas personas se pueden salvar. La gente empieza arriba de hielos pequeños y puede hacer lo siguiente:

- Quedarse momentáneamente en un pedazo de hielo pequeño con la restricción de que no pueden estar ahí para siempre y una vez que se muevan el hielo se hunde.
- Intentar ir al agua, lo cual significa una muerte segura por las bajas temperaturas.

Titanic

Después del hundimiento del Titanic mucha gente quedó varada en el agua esperando que los rescaten. Dadas las siguientes restricciones nos piden calcular cuántas personas se pueden salvar. La gente empieza arriba de hielos pequeños y puede hacer lo siguiente:

- Quedarse momentáneamente en un pedazo de hielo pequeño con la restricción de que no pueden estar ahí para siempre y una vez que se muevan el hielo se hunde.
- Intentar ir al agua, lo cual significa una muerte segura por las bajas temperaturas.
- Ir a un iceberg grande. Este no se hunde si la gente pasa por él pero tampoco pueden quedarse mucho tiempo dada las extremas temperaturas.

Titanic

Después del hundimiento del Titanic mucha gente quedó varada en el agua esperando que los rescaten. Dadas las siguientes restricciones nos piden calcular cuántas personas se pueden salvar. La gente empieza arriba de hielos pequeños y puede hacer lo siguiente:

- Quedarse momentáneamente en un pedazo de hielo pequeño con la restricción de que no pueden estar ahí para siempre y una vez que se muevan el hielo se hunde.
- Intentar ir al agua, lo cual significa una muerte segura por las bajas temperaturas.
- Ir a un iceberg grande. Este no se hunde si la gente pasa por él pero tampoco pueden quedarse mucho tiempo dada las extremas temperaturas.
- Ir a un pedazo de madera, al que solo puede subirse una persona y quedarse indefinidamente esperando al rescate.

Titanic II

Además nos dan el mapa del área como una matriz con los tipos de posiciones descritos arriba de la siguiente manera:†

```
*~~#
...@
.~.*
```

donde:

- . es un hielo pequeño.

† https://onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=2375

Titanic II

Además nos dan el mapa del área como una matriz con los tipos de posiciones descritos arriba de la siguiente manera:[†]

```
*~~#
...@
.~.*
```

donde:

- . es un hielo pequeño.
- @ es un iceberg grande.

[†]https://onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=2375

Titanic II

Además nos dan el mapa del área como una matriz con los tipos de posiciones descritos arriba de la siguiente manera:[†]

```
*~~#
...@
.~.*
```

donde:

- . es un hielo pequeño.
- @ es un iceberg grande.
- * es la posición inicial de una persona.

[†]https://onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=2375

Titanic II

Además nos dan el mapa del área como una matriz con los tipos de posiciones descritos arriba de la siguiente manera:[†]

```
*~~#
...@
.~.*
```

donde:

- `.` es un hielo pequeño.
- `@` es un iceberg grande.
- `*` es la posición inicial de una persona.
- `~` es el mar abierto.

[†] https://onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=2375

Titanic II

Además nos dan el mapa del área como una matriz con los tipos de posiciones descritos arriba de la siguiente manera:[†]

```
*~~#
...@
.~.*
```

donde:

- . es un hielo pequeño.
- @ es un iceberg grande.
- * es la posición inicial de una persona.
- ~ es el mar abierto.
- # es un pedazo de madera.

Las personas sólo pueden moverse a las celdas inmediatamente contiguas: arriba, abajo, izquierda, o derecha.

[†] https://onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=2375

Linearidad

Sea $G = (V, E)$ una red con capacidades en los arcos. Sean f_1 y f_2 dos flujos válidos en G. Sea $\alpha \in [0, 1]$. Definimos la función $f : E \to \mathbb{R}$ como

$$f(e) = \alpha f_1(e) + (1 - \alpha) f_2(e)$$

1. Demostrar que f es un flujo válido en G.
2. ¿Es cierto que si f_1 y f_2 son flujos máximos entonces f también lo es? En caso afirmativo demostrar; en caso negativo dar un contraejemplo y justificar.

Médicxs

En un hospital hay K períodos de feriados. Cada período k consiste de $D_j = \{d_{k1} \ldots, d_{kr}\}$ días feriados contiguos. Este hospital tiene N médicxs y cada uno tiene un conjunto S_i de días disponibles para trabajar durante los períodos de feriados. Por ejemplo, una médica puede tener disponible viernes y sábado de Semana Santa y el lunes del feriado de Güemes. Queremos encontrar, si existe, una asignación de médicxs que cumpla:

Médicxs

En un hospital hay K períodos de feriados. Cada período k consiste de $D_j = \{d_{k1} \ldots, d_{kr}\}$ días feriados contiguos. Este hospital tiene N médicxs y cada uno tiene un conjunto S_i de días disponibles para trabajar durante los períodos de feriados. Por ejemplo, una médica puede tener disponible viernes y sábado de Semana Santa y el lunes del feriado de Güemes. Queremos encontrar, si existe, una asignación de médicxs que cumpla:

- Nadie tiene asignado más que C días totales para trabajar en feriados (y sólo dentro de sus días disponibles).

Médicxs

En un hospital hay K períodos de feriados. Cada período k consiste de $D_j = \{d_{k1} \ldots, d_{kr}\}$ días feriados contiguos. Este hospital tiene N médicxs y cada uno tiene un conjunto S_i de días disponibles para trabajar durante los períodos de feriados. Por ejemplo, una médica puede tener disponible viernes y sábado de Semana Santa y el lunes del feriado de Güemes. Queremos encontrar, si existe, una asignación de médicxs que cumpla:

- Nadie tiene asignado más que C días totales para trabajar en feriados (y sólo dentro de sus días disponibles).
- Cada día feriado tiene asignada una única persona que trabaje.

Médicxs

En un hospital hay K períodos de feriados. Cada período k consiste de $D_j = \{d_{k1} \ldots, d_{kr}\}$ días feriados contiguos. Este hospital tiene N médicxs y cada uno tiene un conjunto S_i de días disponibles para trabajar durante los períodos de feriados. Por ejemplo, una médica puede tener disponible viernes y sábado de Semana Santa y el lunes del feriado de Güemes. Queremos encontrar, si existe, una asignación de médicxs que cumpla:

- Nadie tiene asignado más que C días totales para trabajar en feriados (y sólo dentro de sus días disponibles).
- Cada día feriado tiene asignada una única persona que trabaje.
- Unx médicx sólo puede tener, como máximo, un día asignado dentro de cada período D_k. Es decir, quizá tiene disponibles jueves, viernes, sábado y domingo de Semana Santa pero sólo se le puede asignar uno de esos días.

Jupiter Orbiter *

Un satélite necesita mandar datos en megabytes a la Tierra y dispone de N ventanas de tiempo para hacerlo. Capta los datos del espacio a través de R sensores. Cada sensor tiene una cola asignada a la que cargarle datos, donde la cola q puede almacenar hasta c_q megabytes. El sensor r carga a_{rt} datos a su cola en la ventana de tiempo t, que ocurre antes de empezar la ventana de envío hacia la tierra. En cada ventana de tiempo se pueden mandar hasta d_t megabytes entre todas las colas para que finalmente lleguen a la Tierra. Si en una ventana de tiempo t las colas no pudieron mandar todos los datos que contenían, guardan estos datos para intentar mandarlos en la siguiente ventana.

Científicos de la NASA nos piden escribir un programa para maximizar la cantidad de megabytes que pueden ser transferidos desde el satélite a la Tierra en un período determinado.

* https://open.kattis.com/problems/jupiter