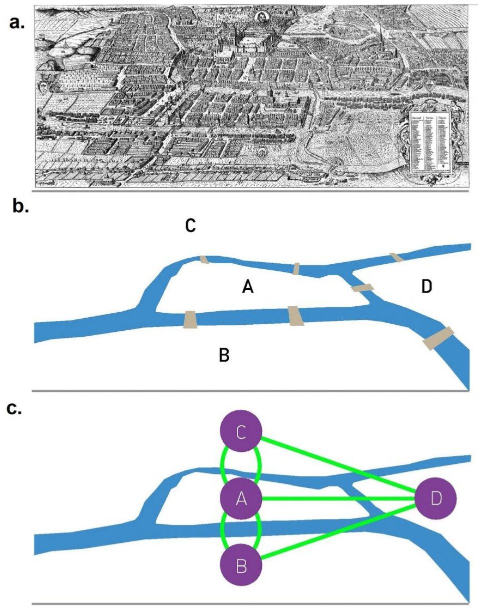
TDA > Clase 5 > Intro a Grafos

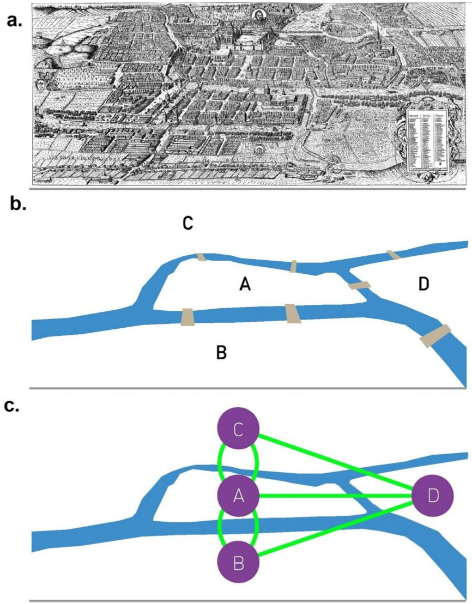
¿Qué es un grafo?

- Modelan relaciones entre vértices (individuos, estados, …) generando una red.
- Generan una estructura flexible e intuitiva de representar una gran variedad de problemas.
- Las redes resultantes pueden ser físicas o abstractas.
- Desarrollo de algoritmos.
- Estudio como estructura abstracta desde el punto de vista teórico.



Teoría de Grafos: Euler y los puentes de königsberg

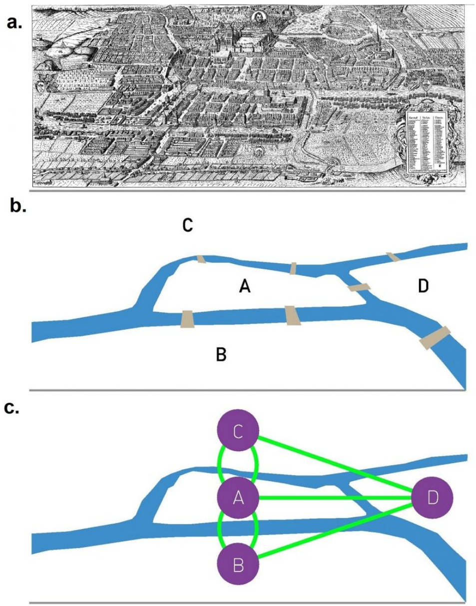
Leonard Euler
(1735/1736)



1700 1800 1900 2000

Un poco de historia: Euler y los puentes de königsberg

Leonard Euler
(1735/1736)



Carl Hierholzer
(1871)

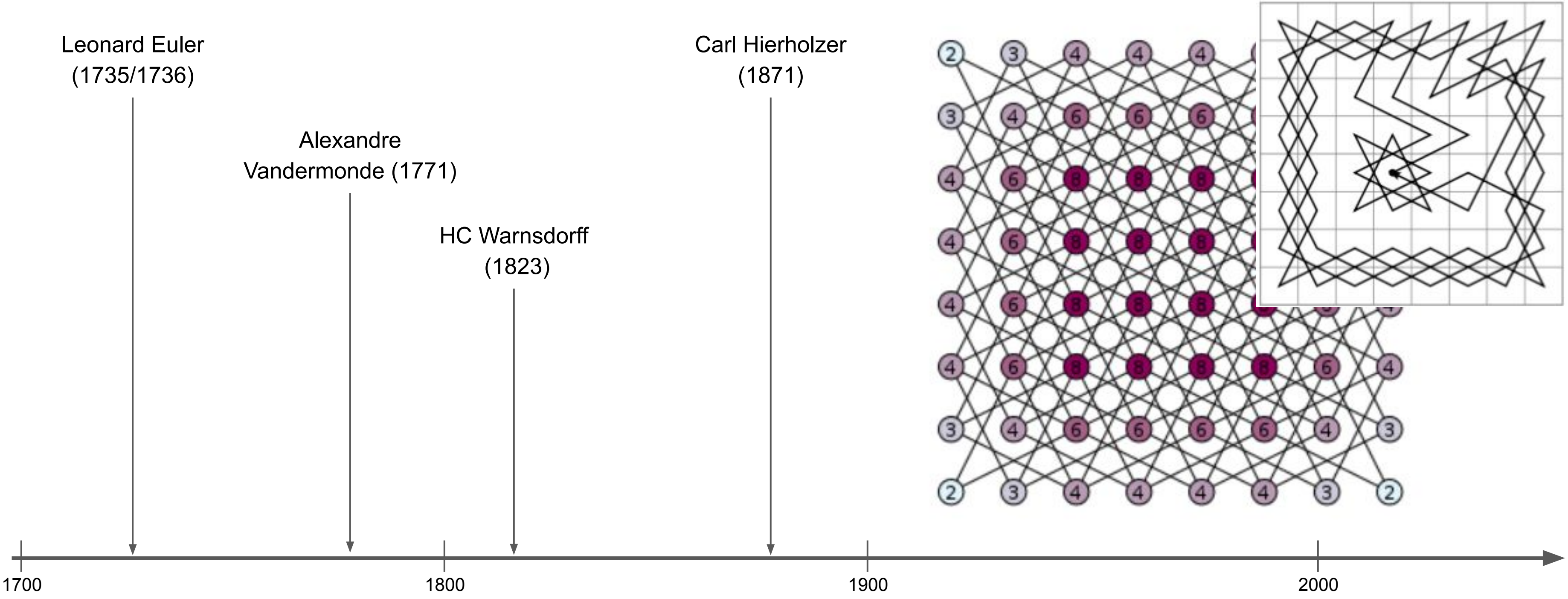
1700 1800 1900 2000

Circuito euleriano: circuito que pasa exactamente una vez por cada arista.

Un poco de historia: El caballo de ajedrez

Circuito hamiltoniano: circuito que pasa exactamente una vez por cada vértice.

Un poco de historia: Euler y los puentes de königsberg



Circuito hamiltoniano: circuito que pasa exactamente una vez por cada vértice.

Un poco de historia: Euler y los puentes de königsberg

Leonard Euler (1735/1736)

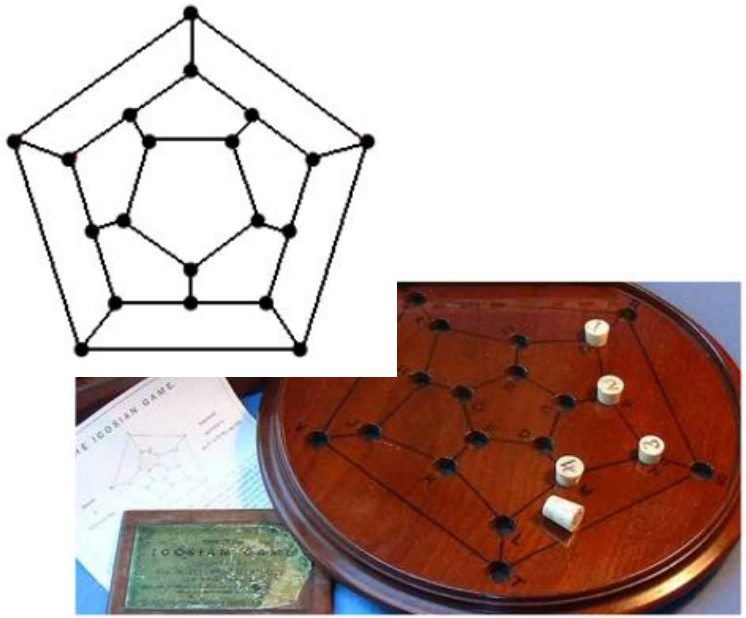
Alexandre Vandermonde (1771)

HC Warnsdorff (1823)

William Hamilton (1857)

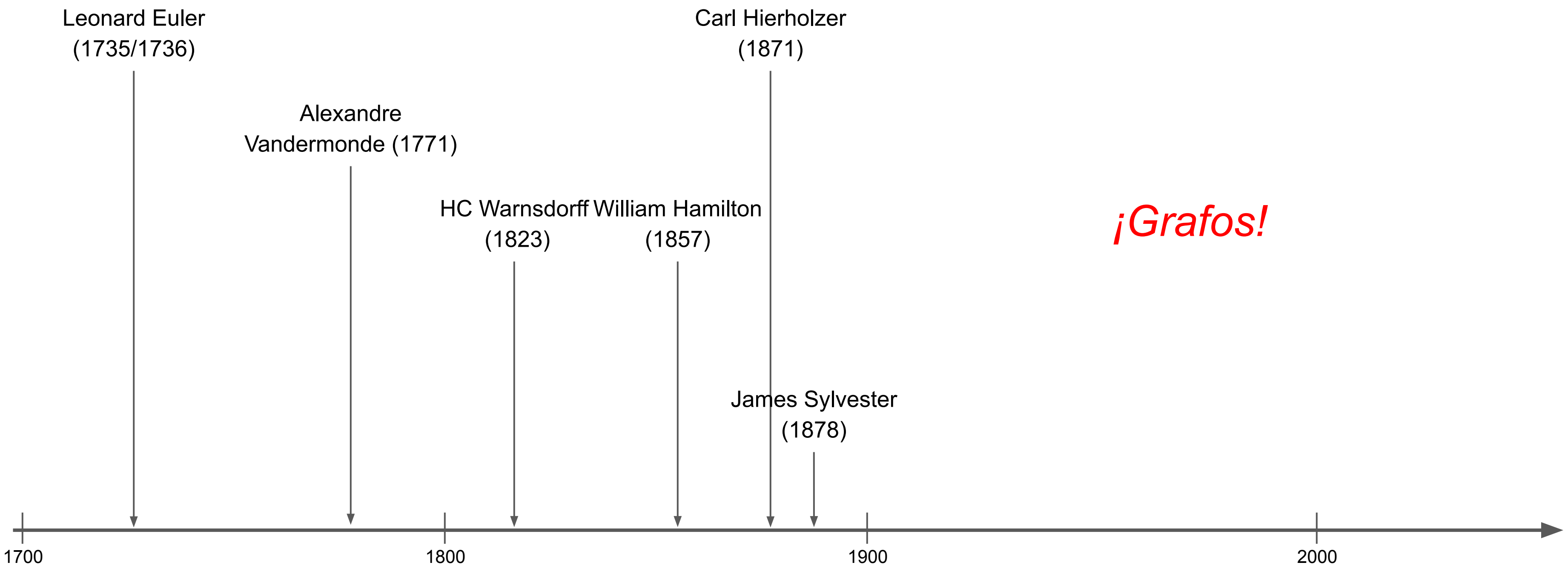
Carl Hierholzer (1871)

1700 — 1800 — 1900 — 2000



Circuito hamiltoniano: circuito que pasa exactamente una vez por cada vértice.

Un poco de historia: Euler y los puentes de königsberg



Un poco de historia: Euler y los puentes de königsberg

Leonard Euler (1735/1736)

Alexandre Vandermonde (1771)

HC Warnsdorff (1823)

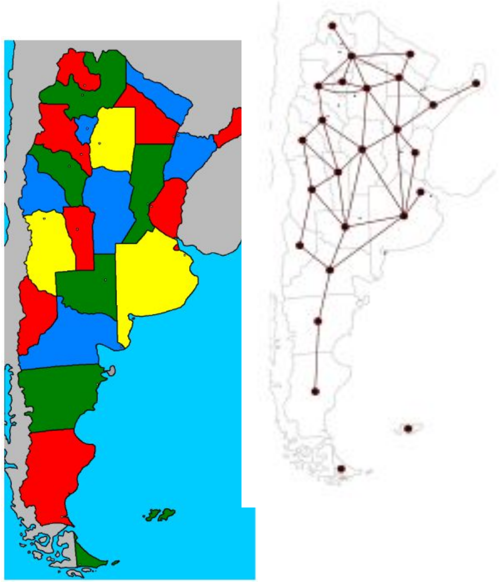
Augustus De Morgan (1852)

William Hamilton (1857)

Carl Hierholzer (1871)

James Sylvester (1878)

1700 1800 1900 2000



Un poco de historia: Euler y los puentes de königsberg

Leonard Euler (1735/1736)

Alexandre Vandermonde (1771)

HC Warnsdorff (1823)

Augustus De Morgan (1852)

Thomas Kirkman (1855)

William Hamilton (1857)

Carl Hierholzer (1871)

James Sylvester (1878)

Oystein Ore y Joel Stemple (1969)

Kenneth Appel y Wolfgang Haken (1976)

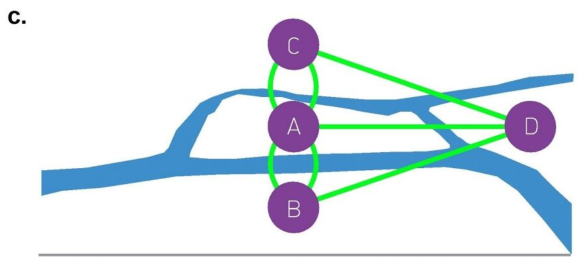
Robertson, Sanders, Seymour y Thomas (1996)

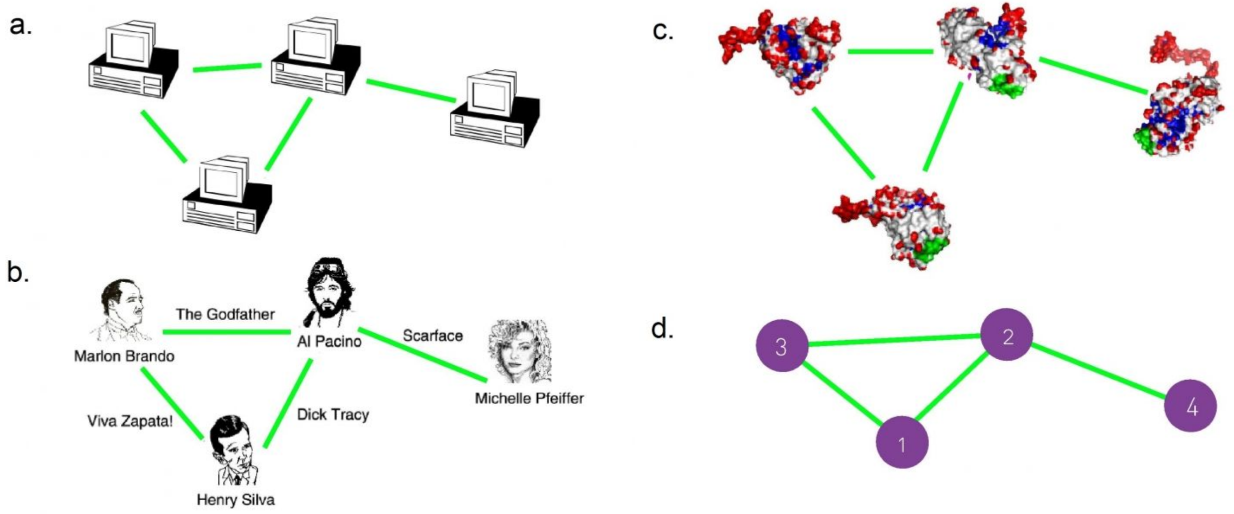
Georges Gonthier (2005)

1700 1800 1900 2000

Se demostró con asistencia informática (para calcular contraejemplos)

Teoría de Grafos / Ciencia de redes

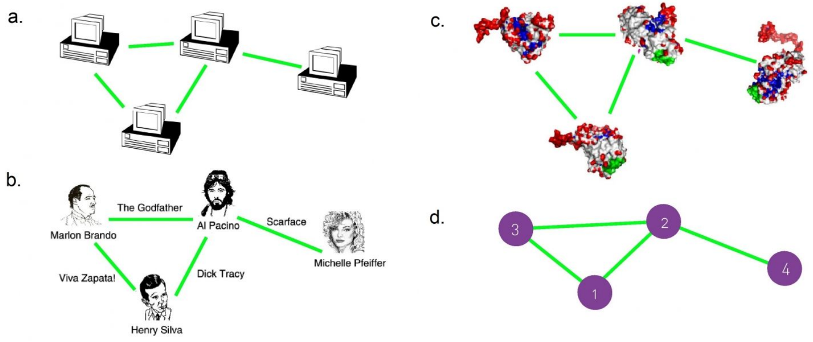


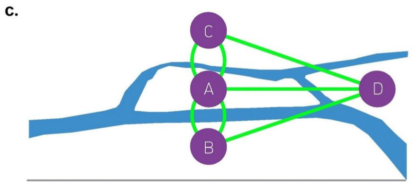


Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press. http://networksciencebook.com/

Teoría de Grafos / Ciencia de redes

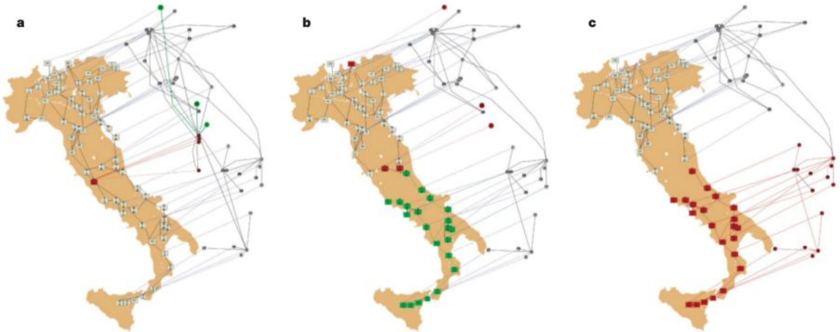
- **Tráfico**: Ruteo de vehículos. Organización del tráfico aéreo y venta de tickets de avión. Optimización de redes de distribución de mercadería.
- Planificación de grandes estructuras como **redes** eléctricas, internet o redes de información, o redes de ferrocarriles.
- En **sociología** se estudia la organización de vínculos y comunidades, tanto en redes sociales como de telecomunicaciones o mucho antes redes interpersonales. El trabajo más citado en sociología es de redes (Granovetter, 1973).
- En **biología**: ecosistemas, propiedades de migraciones, redes de transducción de señales, de síntesis, etc.
- En **neurociencia**: conectividad entre neuronas o regiones del cerebro.
- En **química**: estados moleculares, etc.
- En los sitios de **comercio electrónico** para mostrar recomendaciones.
- En **economía** el Nobel 2012 premió a un trabajo de asignaciones estables sobre grafos utilizados para modelar el rediseño de mercados económicos.
- En **computación** análisis de programas/algoritmos, soporte de algoritmos.
- Organización de tareas, partidos, etc.

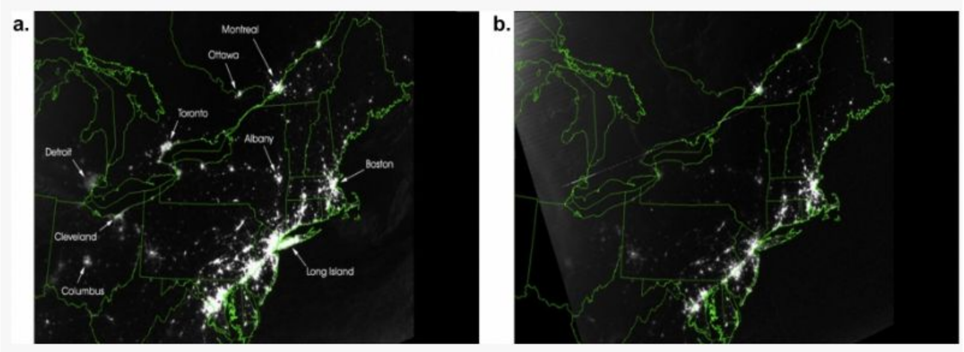




Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press. http://networksciencebook.com/

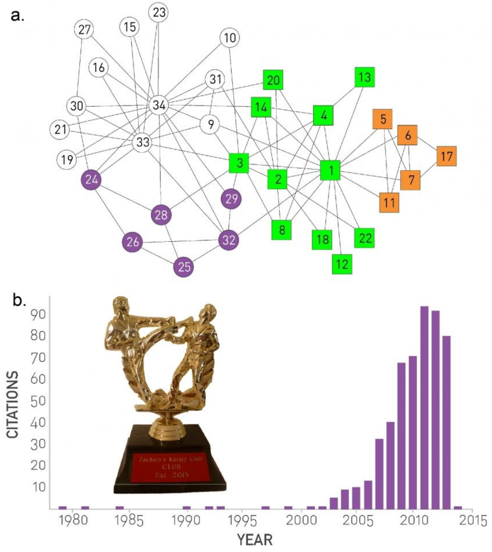
Teoría de Grafos / Ciencia de redes



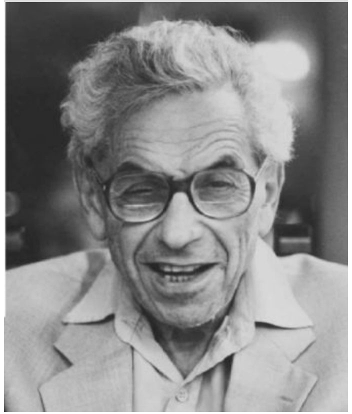


Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press. http://networksciencebook.com/

Teoría de Grafos / Ciencia de redes



Zachary's karate club

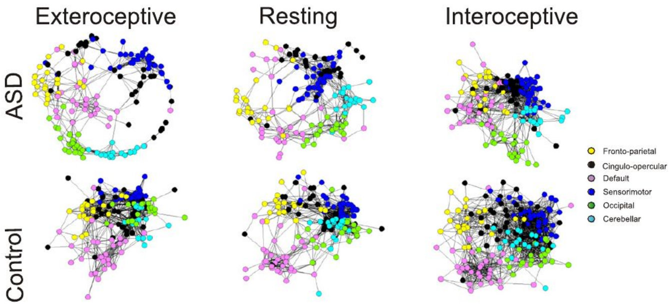


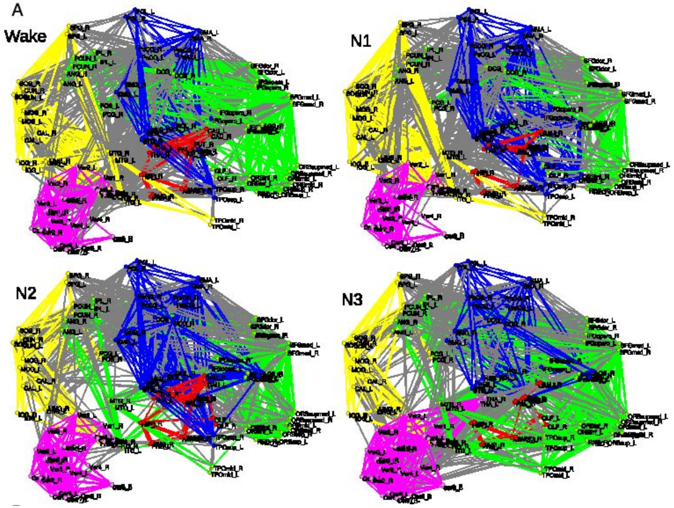
Pal Erdös

Stanley Milgram

Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press. http://networksciencebook.com/

Teoría de Grafos / Ciencia de redes





Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press. http://networksciencebook.com/

Algunas definiciones básicas

Definición 1: Grafo:

G = (V, E)

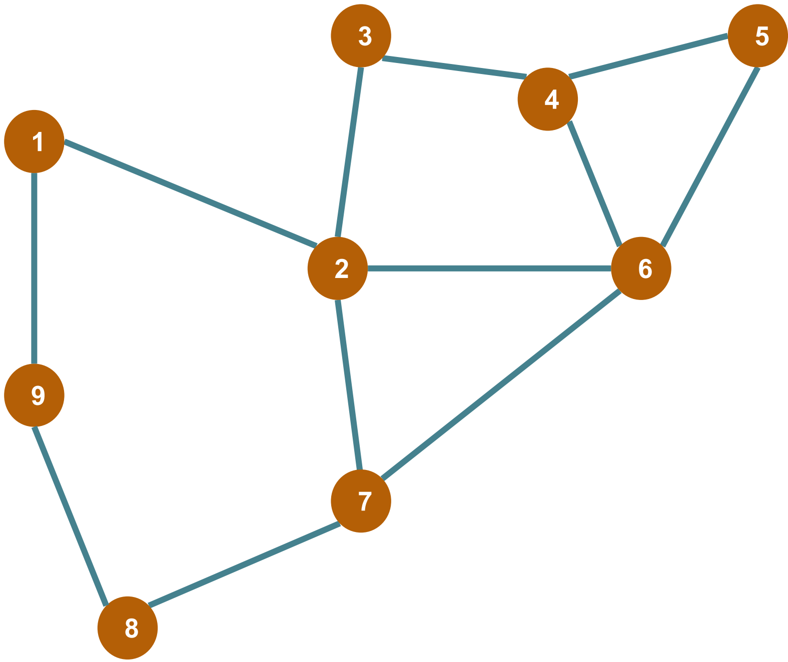
donde,

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} : NODOS, VÉRTICES

E = {(1,2), (1,9), (2,3), (2,6), (2,7), (3,4), (4,5), (4,6), (5,6), (6,7), (7,8), (8,9)} : ARISTAS, EJES, LINKS

n = |V| : CANTIDAD DE VÉRTICES

m = |E| : CANTIDAD DE ARISTAS



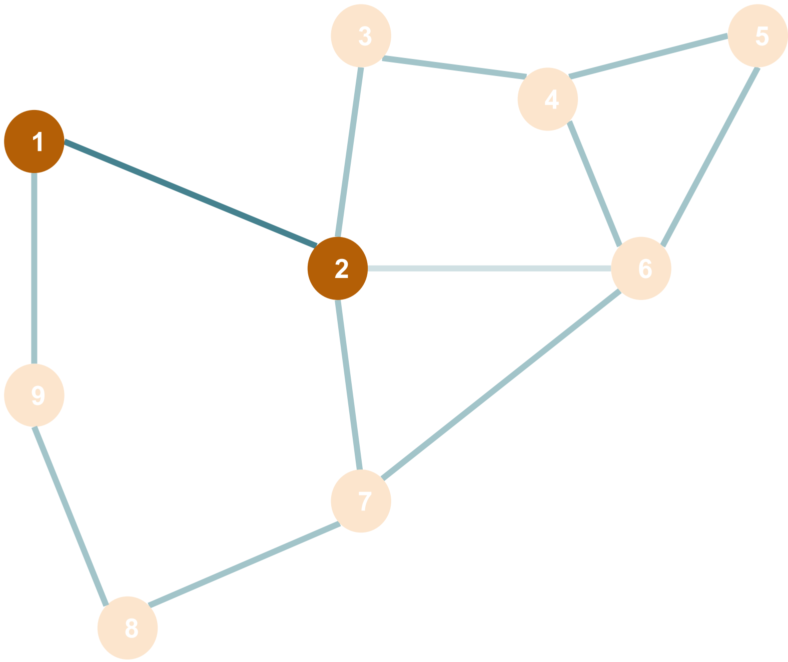
Algunas definiciones básicas

Definición 2: Vecinos o nodos adyacentes:

$u \in V$ y $v \in V$, si $e = (u,v) \in E$ entonces,

- u y v son **adyacentes**
- e es **incidente** a u y v
- el conjunto $N(v)$ es la **vecindad** de v

$$N(v) = \{u \in V : (v,u) \in E\}$$



Algunas definiciones básicas

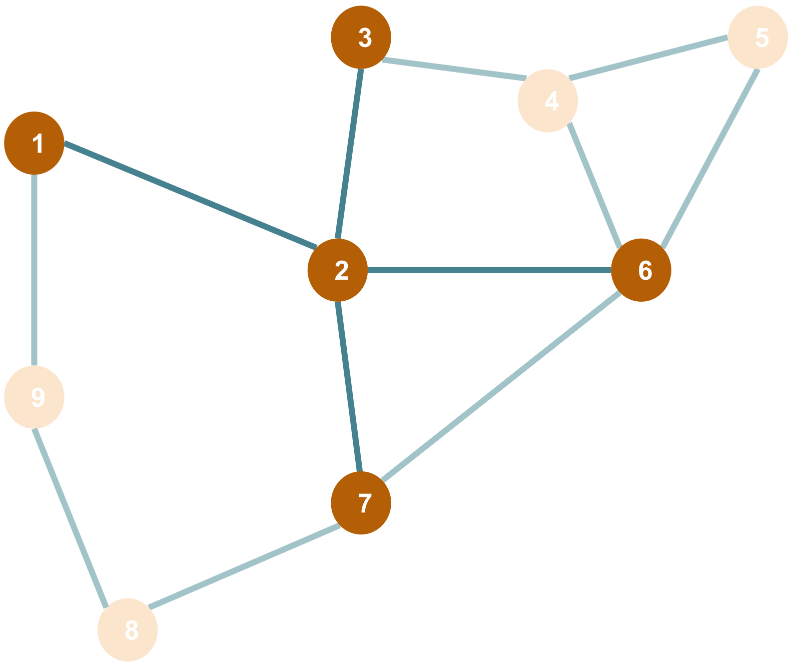
Definición 2: Vecinos o nodos adyacentes:

$u \in V$ y $v \in V$, si $e = (u,v) \in E$ entonces,

- u y v son **adyacentes**
- e es **incidente** a u y a v
- el conjunto $N(v)$ es la **vecindad** de v

$$N(v) = \{u \in V : (v,u) \in E\}$$

$$N(2) = \{1, 3, 6, 7\}$$



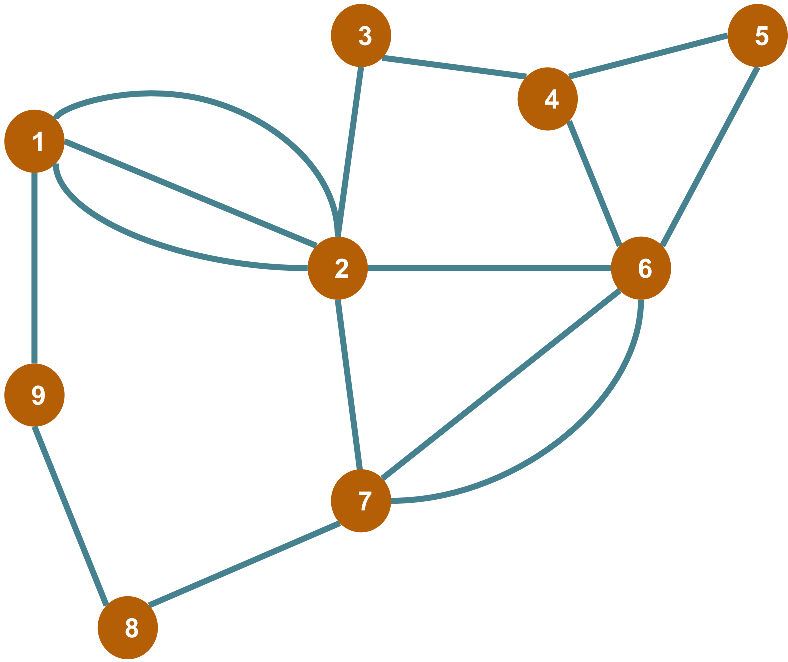
Algunas definiciones básicas

Definición 3: Tipos de grafos: Multigrafo

Puede tener varias aristas entre dos vértices

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

E = {(1,2), **(1,2), (1,2),** (1,9), (2,3), (2,6), (2,7), (3,4), (4,5), (4,6), (5,6), (6,7), **(6,7),** (7,8), (8,9)}



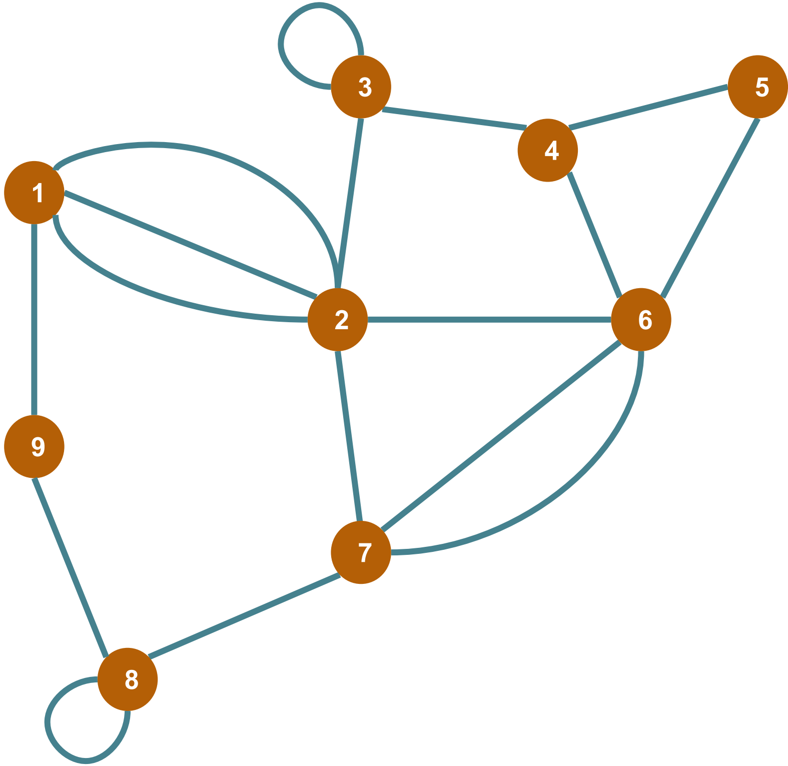
Algunas definiciones básicas

Definición 3: Tipos de grafos: Pseudografo

Puede tener varias aristas entre dos vértices y también aristas con el mismo nodos (**loops**)

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

E = {(1,2), (1,2), (1,2), (1,9), (2,3), **(3,3),** (2,6), (2,7), (3,4), (4,5), (4,6), (5,6), (6,7), (6,7), (7,8), **(8,8),** (8,9)}



Algunas definiciones básicas

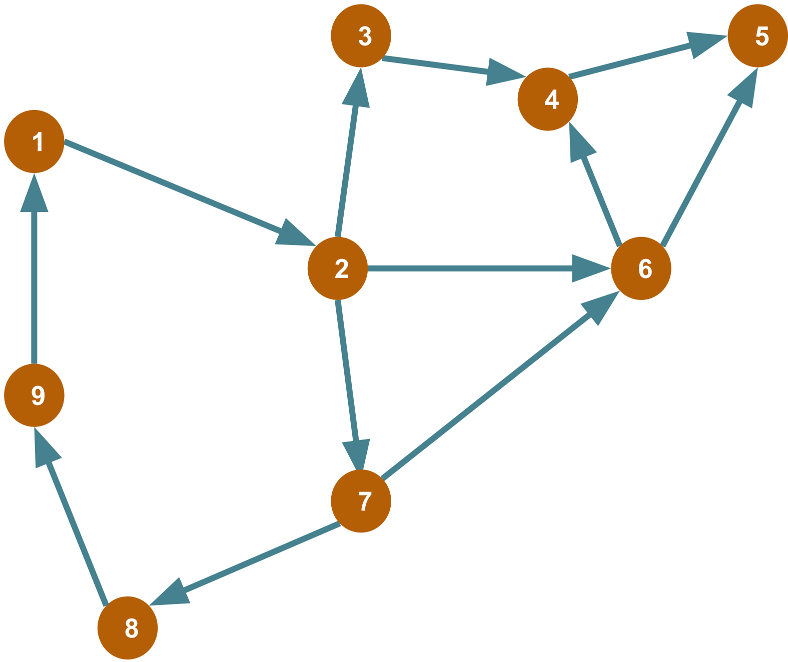
Definición 3: Tipos de grafos: Digrafo o Grafo dirigido

G = (V, E)

donde,

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

E = {(1,2), (2,3), (2,6), (2,7), (3,4), (4,5), **(6,4)**, **(6,5)**, **(7,6)**, (7,8), (8,9), **(9,1)**}



Algunas definiciones básicas

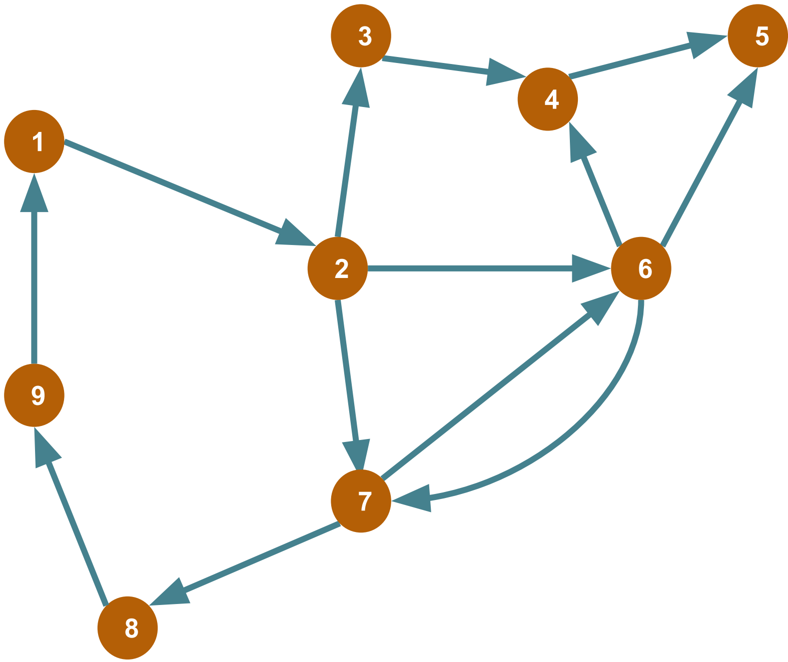
Definición 3: Tipos de grafos: Digrafo o Grafo dirigido

G = (V, E)

donde,

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

E = {(1,2), (2,3), (2,6), (2,7), (3,4), (4,5), (6,4), (6,5), **(6,7)**, (7,6), (7,8), (8,9), (9,1)}

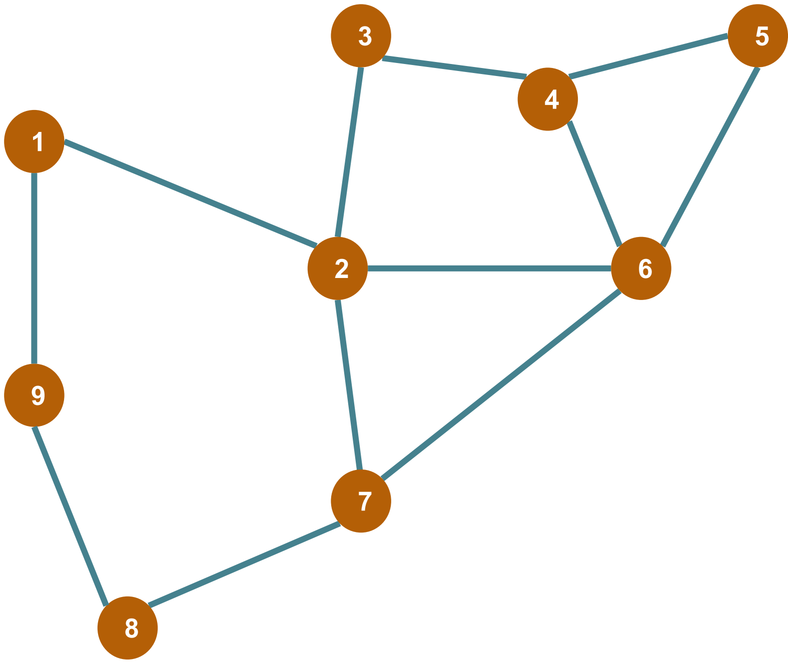


Algunas definiciones básicas

Definición 4: Grado:

El grado de un vértice *v* en el grafo *G*, *d(v)* es la cantidad de aristas incidentes a *v* en *G*.

$\delta(G)$ es el grado mínimo en *G* y $\Delta(G)$ es el grado máximo en *G*.



Algunas definiciones básicas

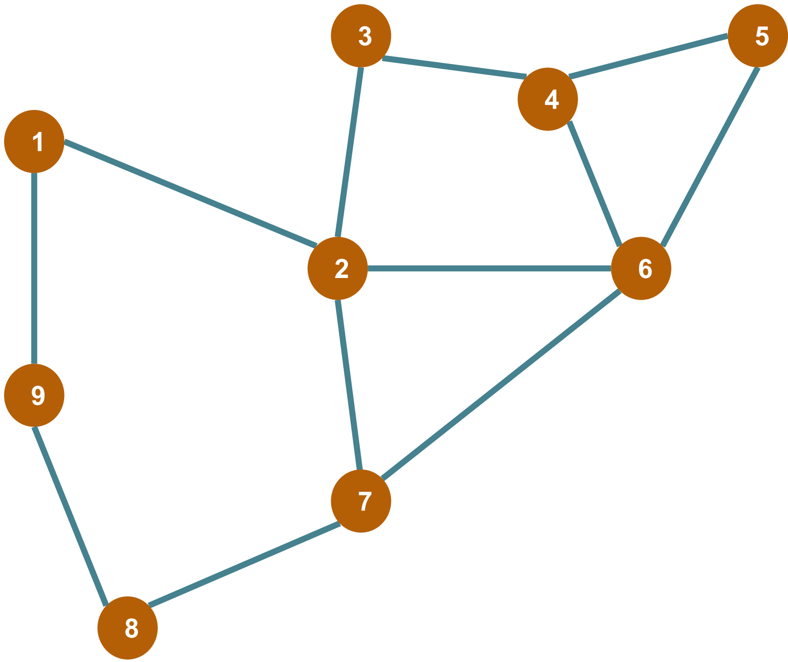
Definición 4: Grado:

El grado de un vértice v en el grafo G, $d(v)$ es la cantidad de aristas incidentes a v en G.

$\delta(G)$ es el grado mínimo en G y $\Delta(G)$ es el grado máximo en G.

$d(1) = 2$, $d(2) = 4$, $d(3) = 2$, $d(4) = 3$, $d(5) = 2$, $d(6) = 4$, $d(7) = 3$, $d(8) = 2$, $d(9) = 2$

$\delta(G) = 2$ y $\Delta(G) = 4$



Algunas definiciones básicas

Definición 4: Grado:

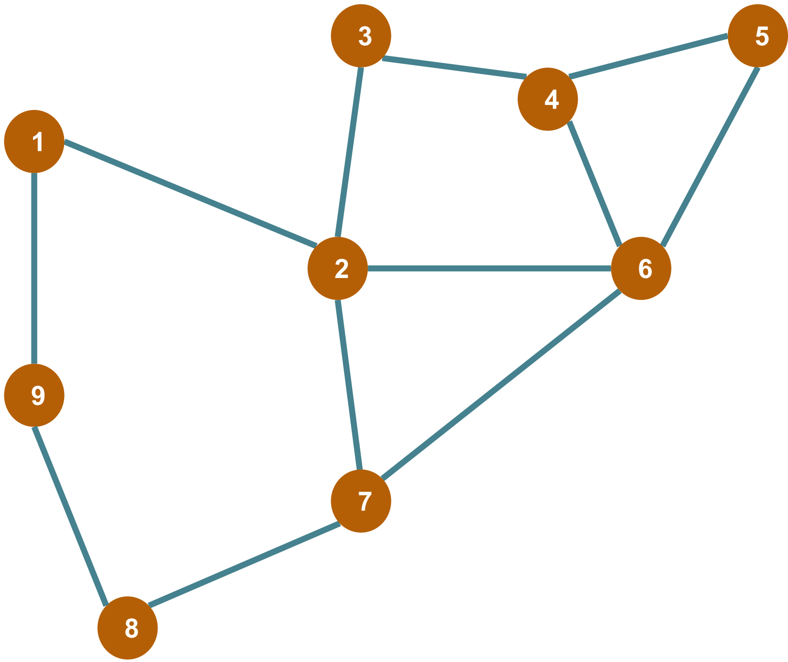
El grado de un vértice v en el grafo G, $d(v)$ es la cantidad de aristas incidentes a v en G.

$\delta(G)$ es el grado mínimo en G y $\Delta(G)$ es el grado máximo en G.

Nota: En un multigrafo, cada arista suma 1.

Nota: En un pseudografo, cada loop suma 2.

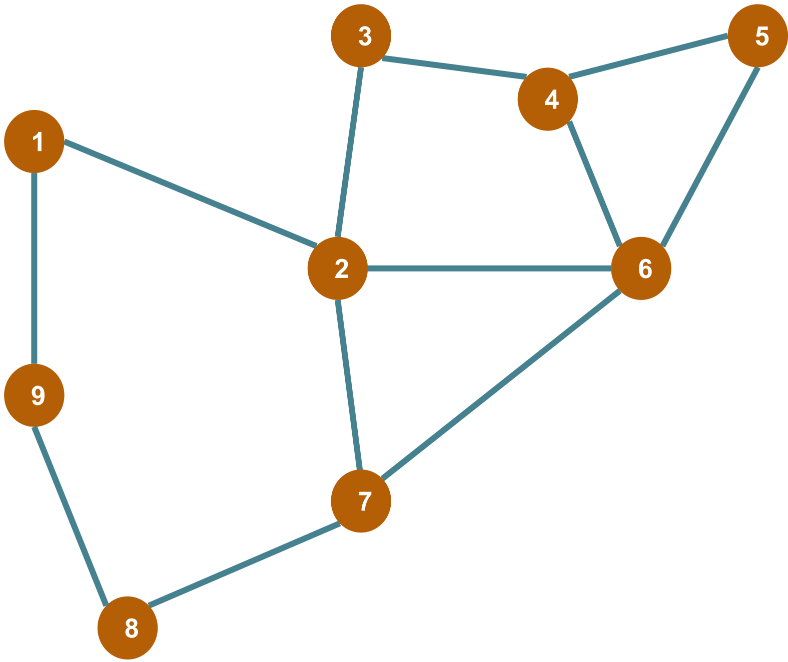
Nota: En un digrafo, contamos por separado grados de entrada y de salida.



Algunas definiciones básicas

Teorema 1: Dado un grafo G = (V, E), la **suma de los grados** de sus vértices es igual a 2 veces el número de aristas. Es decir,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$



Algunas definiciones básicas

Teorema 1: Dado un grafo G = (V, E), la **suma de los grados** de sus vértices es igual a 2 veces el número de aristas. Es decir,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Demostración (Por inducción en *m*)**:**

NOTA: Demostración por inducción:

- Definir **caso base**
- Definir **hipótesis inductiva**
- **Paso inductivo**
- …

En grafos, muchas veces vamos a hacer inducción sobre los vértices (*n*) o las aristas (*m*). Y el caso base va a ser ***n=1, m=0*** o ***n=2, m=1***

Algunas definiciones básicas

Teorema 1: Dado un grafo G = (V, E), la **suma de los grados** de sus vértices es igual a 2 veces el número de aristas. Es decir,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Demostración (Por inducción en *m*)**:**

Caso base: Vamos a tomar n=2, m=1. El grafo tiene una sola arista *e=(u,v)* ⇒ *d(u)=1*, *d(v)=1*. Por lo tanto,

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(v) + d(u) = 2 = 2m$$

NOTA: Demostración por inducción:

- Definir **caso base**
- Definir **hipótesis inductiva**
- **Paso inductivo**
- …

En grafos, muchas veces vamos a hacer inducción sobre los vértices (*n*) o las aristas (*m*). Y el caso base va a ser ***n=1, m=0*** o ***n=2, m=1***

Algunas definiciones básicas

Teorema 1: Dado un grafo G = (V, E), la **suma de los grados** de sus vértices es igual a 2 veces el número de aristas. Es decir,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Demostración (Por inducción en *m*)**:**

Caso base: Vamos a tomar n=2, m=1. El grafo tiene una sola arista $e=(u,v) \Rightarrow d(u)=1$, $d(v)=1$. Por lo tanto,

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(v) + d(u) = 2 = 2m$$

Hipótesis inductiva: en todo grafo $G'=(V',E')$ con $m'<m$ se cumple,

$$\sum_{v \in V'} d_{G'}(v) = 2m'$$

Notación: $d_{G'}(v)$ indica que los grados están calculados en el grafo G', distinto a $d_G(v)$ o $d(v)$ en donde los grados se calculan en el grafo G.

NOTA: Demostración por inducción:

- Definir **caso base**
- Definir **hipótesis inductiva**
- **Paso inductivo**
- …

En grafos, muchas veces vamos a hacer inducción sobre los vértices (*n*) o las aristas (*m*). Y el caso base va a ser ***n=1, m=0*** o ***n=2, m=1***

Algunas definiciones básicas

Teorema 1: Dado un grafo $G = (V, E)$, la **suma de los grados** de sus vértices es igual a 2 veces el número de aristas. Es decir,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Demostración (Por inducción en m)**:**

Caso base: Vamos a tomar n=2, m=1. El grafo tiene una sola arista $e=(u,v) \Rightarrow d(u)=1$, $d(v)=1$. Por lo tanto,

$$\sum_{v \in V} d(v) = d(v) + d(u) = 2 = 2m$$

Hipótesis inductiva: en todo grafo $G'=(V',E')$ con $m'<m$ se cumple,

$$\sum_{v \in V'} d_{G'}(v) = 2m'$$

Notación: $d_{G'}(v)$ indica que los grados están calculados en el grafo G', distinto a $d_G(v)$ o $d(v)$ en donde los grados se calculan en el grafo G.

Ahora, tomamos una arista cualquiera $e=(u,v)$ y se la quitamos a G. El grafo que queda es $G'=(V,E')$ con $E'=E-\{e\}$

$\Rightarrow m' = m-1 < m$ y se cumple la hipótesis inductiva,

$$\sum_{v \in V'} d_{G'}(v) = 2m' = 2(m-1)$$

Además, $d_G(u)=d_{G'}(u)+1$ y $d_G(v)=d_{G'}(v)+1$ porque u y v en G' tienen una arista incidente menos cada uno.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V'} d_{G'}(v) + 2 = 2(m-1) + 2 = 2m$$

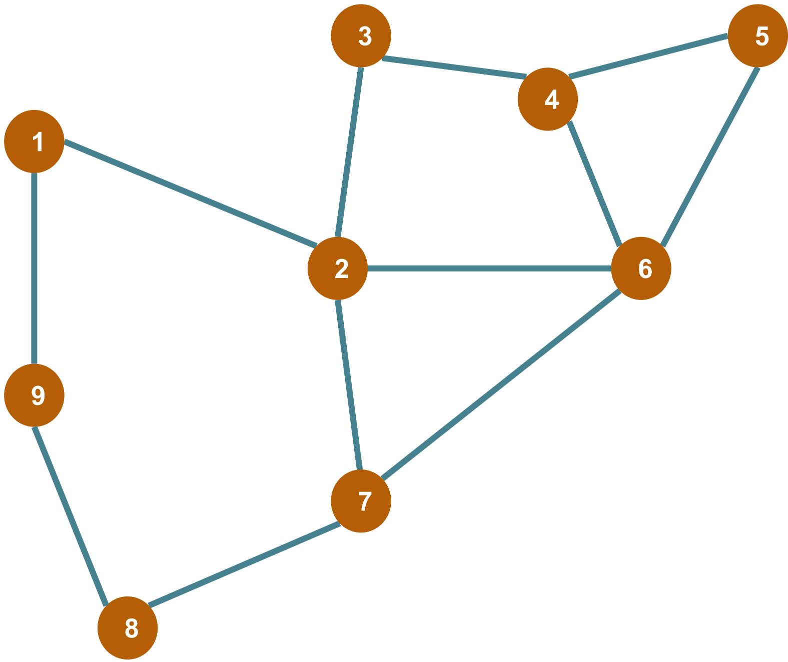
$\square$

Algunas definiciones básicas

Teorema 1: Dado un grafo G = (V, E), la **suma de los grados** de sus vértices es igual a 2 veces el número de aristas. Es decir,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Corolario: Para todo grafo la cantidad de vértices con grado impar es par.



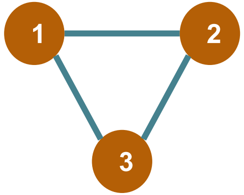
Algunas definiciones básicas

Definición 5: Grafo completo: Todos sus vértices son adyacentes entre sí, o tiene todas las aristas posibles. Se nota K_n

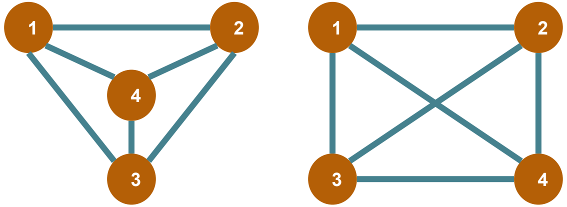
K_1

K_2

K_3



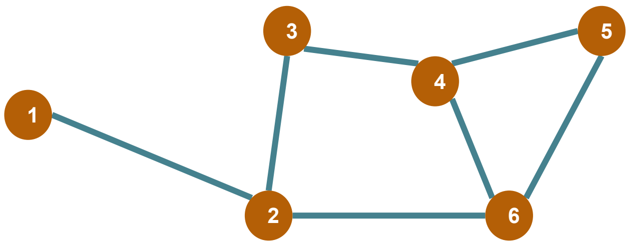
K_4



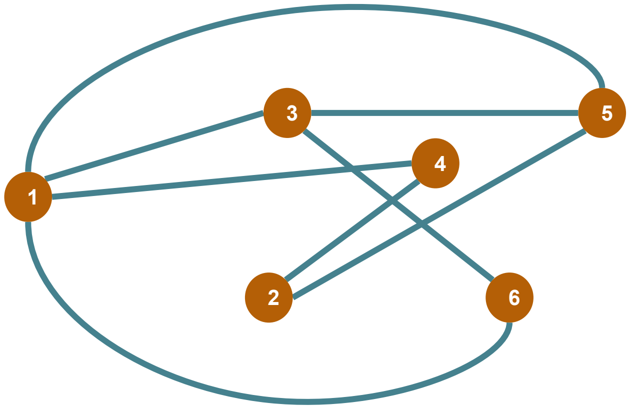
Algunas definiciones básicas

Definición 6: Grafo complemento: Tiene el mismo conjunto de vértices, pero si dos vértices son adyacentes en G si y sólo si no lo son en G^C. O, visto de otra forma, G^C tiene todas las aristas que no estaban en G.

$G = (V, E)$



$\bar{G} = (V, \bar{E}) = G^C$



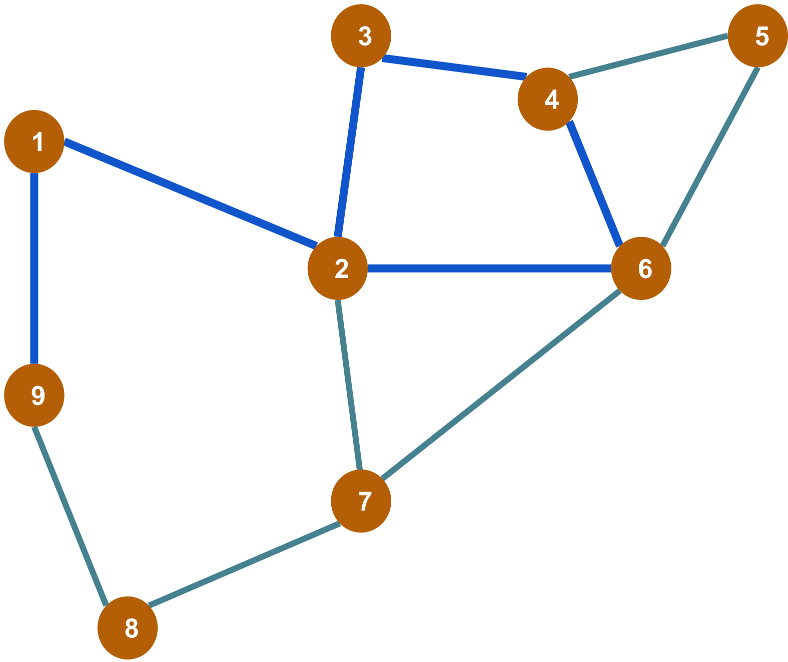
O, visto de otra forma, G^C tiene todas las aristas que no estaban en G. $\Rightarrow$ $m_{\bar{G}} = \frac{n(n-1)}{2} - m$

Algunas definiciones básicas

Definición 7:

Un **recorrido** es una sucesión de vértices y aristas de un grafo, tal que e_i sea incidente a v_{i-1} y v_i para todo $i=1...k$: $P = v_0 e_1 v_1 e_2 ... e_k v_k$

$P = 1 \rightarrow (1,2) \rightarrow 2 \rightarrow (2,3) \rightarrow 3 \rightarrow (3,4) \rightarrow 4 \rightarrow (4,6) \rightarrow 6 \rightarrow (2,6) \rightarrow 2 \rightarrow (1,2) \rightarrow 1 \rightarrow (1,9) \rightarrow 9$



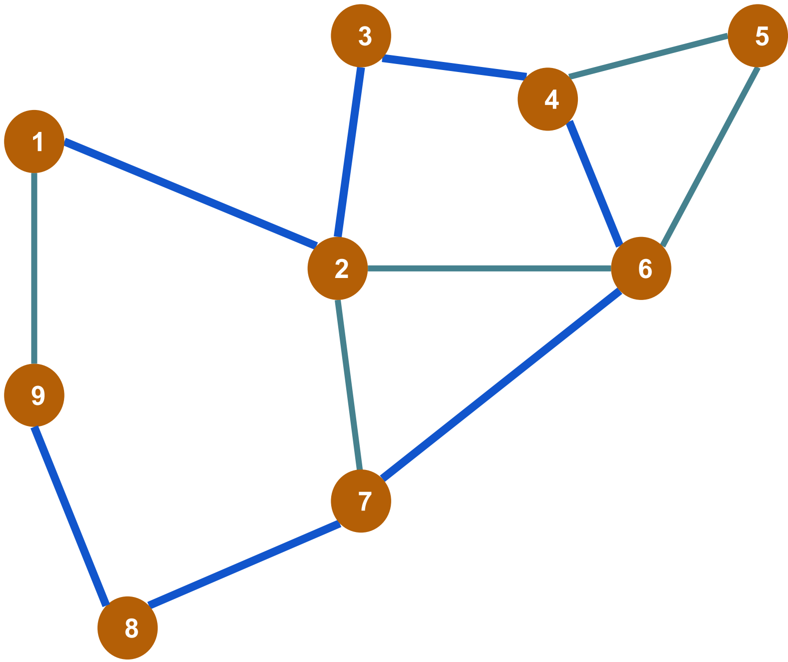
Algunas definiciones básicas

Definición 7:

Un **recorrido** es una sucesión de vértices y aristas de un grafo, tal que e_i sea incidente a v_{i-1} y v_i para todo $i=1 \ldots k$: $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$

Un **camino** es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

$P = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$



Algunas definiciones básicas

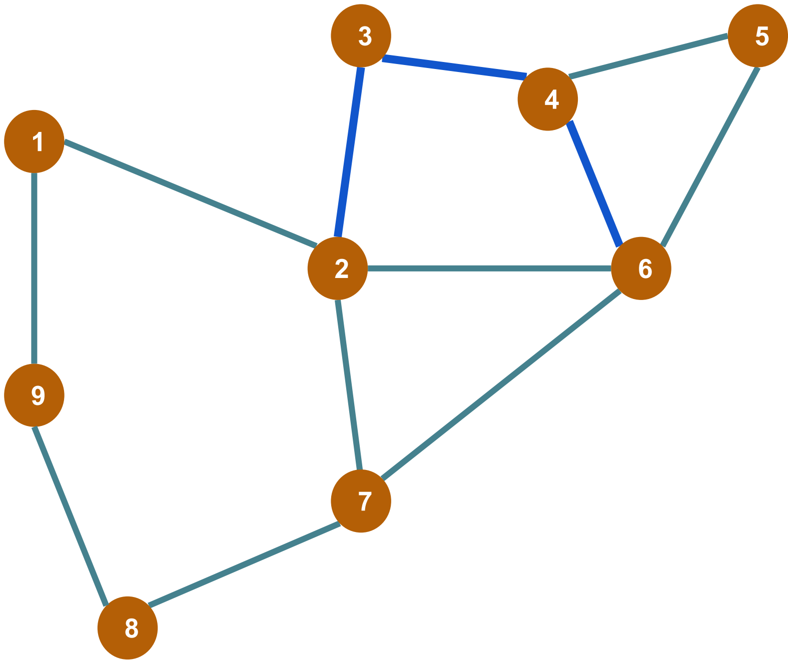
Definición 7:

Un **recorrido** es una sucesión de vértices y aristas de un grafo, tal que e_i sea incidente a v_{i-1} y v_i para todo $i=1...k$: $P = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$

Un **camino** es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Una **sección** es un tramo del recorrido P, se nota $P_{v_iv_j}$.

$P_{2,6} = 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$



Algunas definiciones básicas

Definición 7:

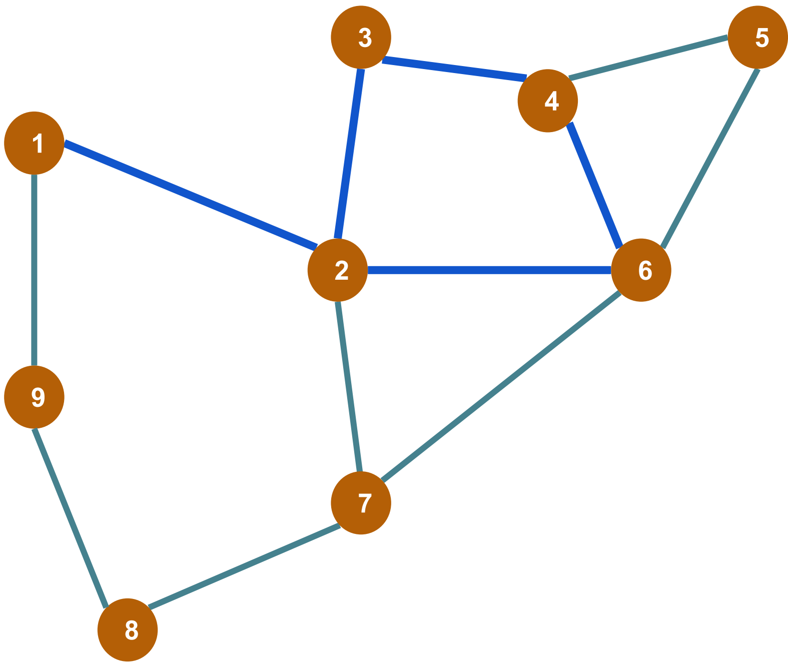
Un **recorrido** es una sucesión de vértices y aristas de un grafo, tal que e_i sea incidente a v_{i-1} y v_i para todo $i=1...k$: $P = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$

Un **camino** es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Una **sección** es un tramo del recorrido P, se nota $P_{v_iv_j}$.

Un **circuito** es un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice.

$P_{1,1} = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 1$



Algunas definiciones básicas

Definición 7:

Un **recorrido** es una sucesión de vértices y aristas de un grafo, tal que e_i sea incidente a v_{i-1} y v_i para todo $i=1...k$: $P = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$

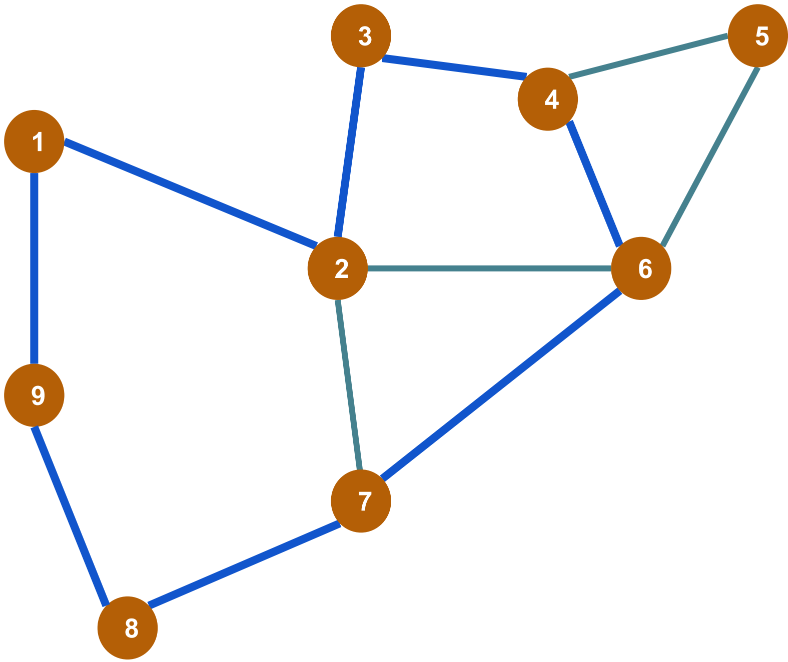
Un **camino** es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Una **sección** es un tramo del recorrido P, se nota $P_{v_iv_j}$.

Un **circuito** es un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice.

Un **ciclo** o **circuito simple** es un circuito (de tres o más vértices) que no repite vértices.

$P_{1,1} = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 1$



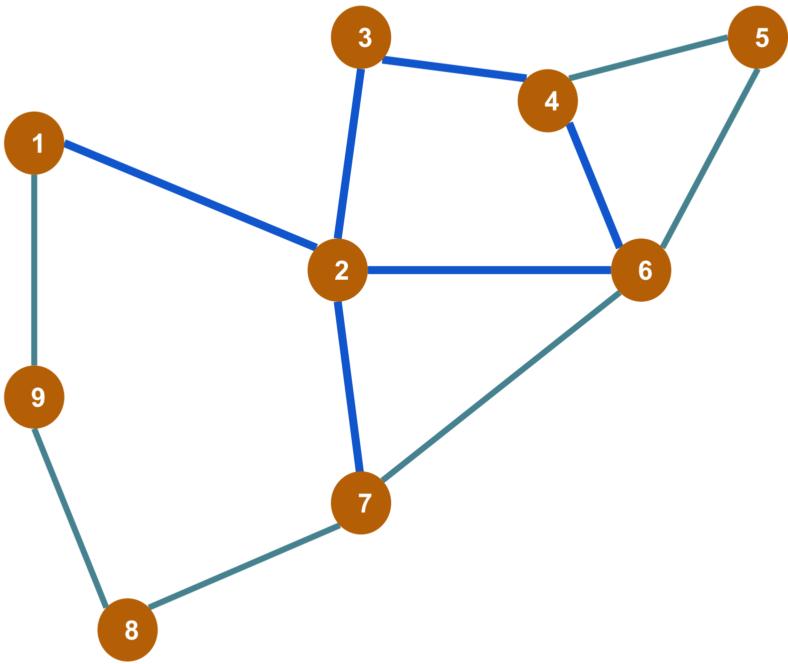
Algunas definiciones básicas

Definición 8:

Dado un recorrido P, su **longitud**, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene,

$P = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 7$

$l(P) = 6$



Algunas definiciones básicas

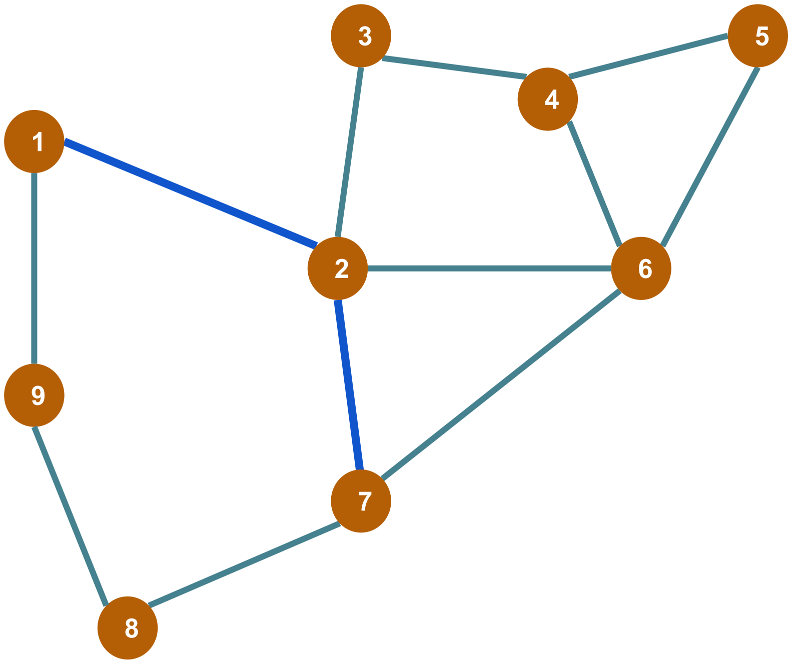
Definición 8:

Dado un recorrido P, su **longitud**, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.

La **distancia** entre dos vértices u y v se define como la longitud del recorrido (camino) más corto entre u y v, $d(u,v)$.

$P = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 7$

$d(1,7) = 2$



Algunas definiciones básicas

Definición 8:

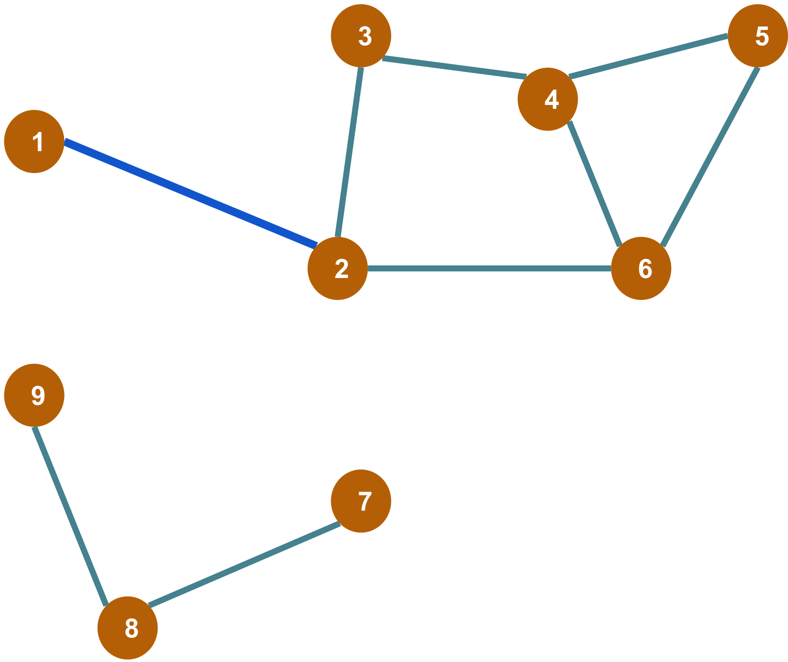
Dado un recorrido P, su **longitud**, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.

La **distancia** entre dos vértices u y v se define como la longitud del recorrido (camino) más corto entre u y v, $d(u,v)$.

Si no existe recorrido entre u y v se define la distancia como infinito, $d(u,v) = \infty$.

$d(1,2) = 1$, $d(1,3) = 2$, $d(1,4) = 3$, $d(1,5) = 4$,

$d(1,6) = 2$, $d(1,7) = \infty$, $d(1,8) = \infty$, $d(1,9) = \infty$,



Algunas definiciones básicas

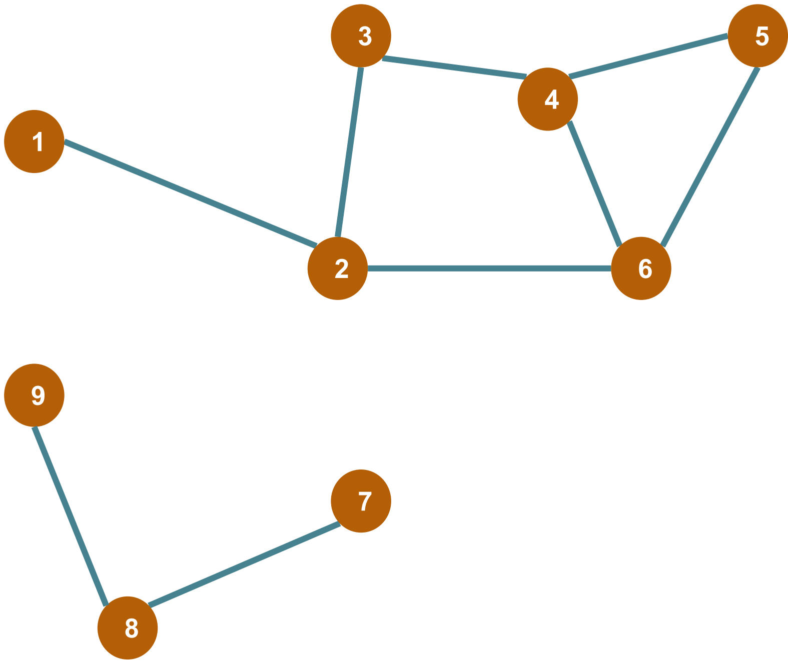
Definición 8:

Dado un recorrido P, su **longitud**, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.

La **distancia** entre dos vértices u y v se define como la longitud del recorrido (camino) más corto entre u y v, $d(u,v)$.

Si no existe recorrido entre u y v se define la distancia como infinito, $d(u,v) = \infty$.

La distancia de vértice consigo mismo es 0, $d(u,u) = 0$.



Algunas definiciones básicas

Proposición 1: Si un recorrido P entre u y v tiene longitud $d(u,v)$ entonces P es un camino.

Demostración (absurdo)**:**

Supongamos que P no es un camino (hipótesis absurdo),

es decir que existe un vértice z que se repite en P $\Rightarrow$

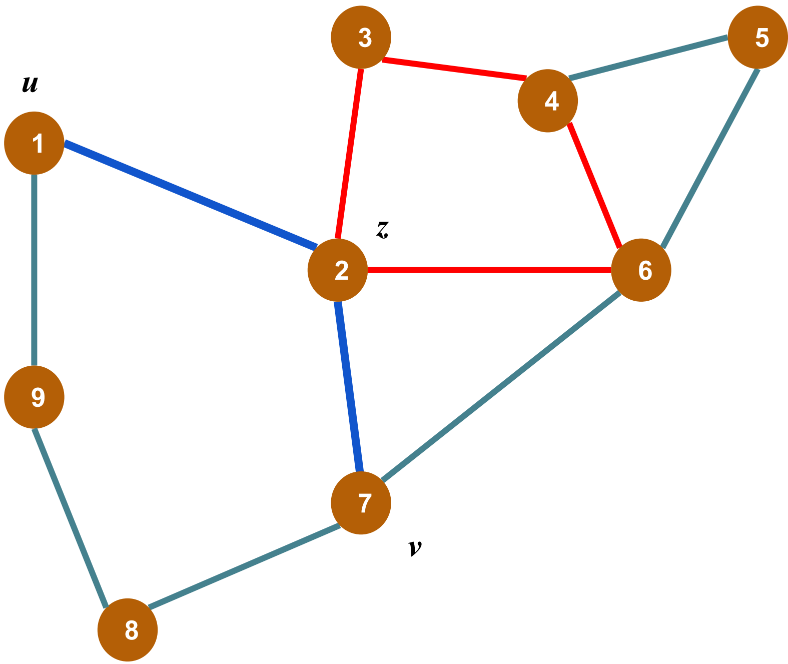
$P = u \to \ldots \to z \to \ldots \to z \to \ldots \to v \Rightarrow$

si armo un nuevo recorrido Q uniendo las secciones Puz y Pzv

tengo $l(Q) = l(Puz)+l(Pzv)$ y $l(P) = l(Puz)+l(Pzz)+l(Pzv) \Rightarrow$

$l(Q) < l(P) = d(u,v)$

¡Absurdo! Porque por definición de distancia $d(u,v)$ es la longitud del camino más corto.

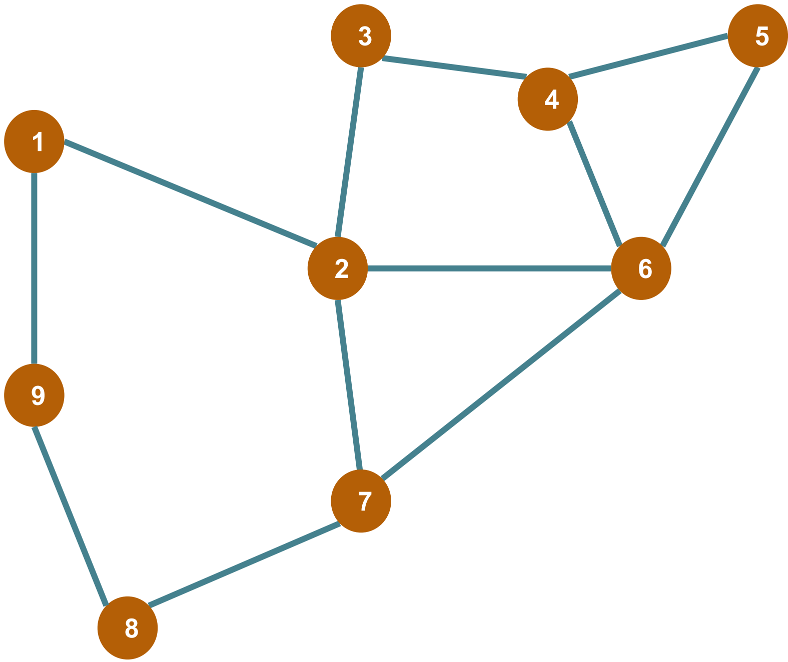


Algunas definiciones básicas

Proposición 2: Para todo $u, v, z \in V$, la función de distancia cumple.

- $d(u,v) \geq 0$, $d(u,v) = 0$ sii $u = v$
- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,v) \leq d(u,z) + d(z,v)$

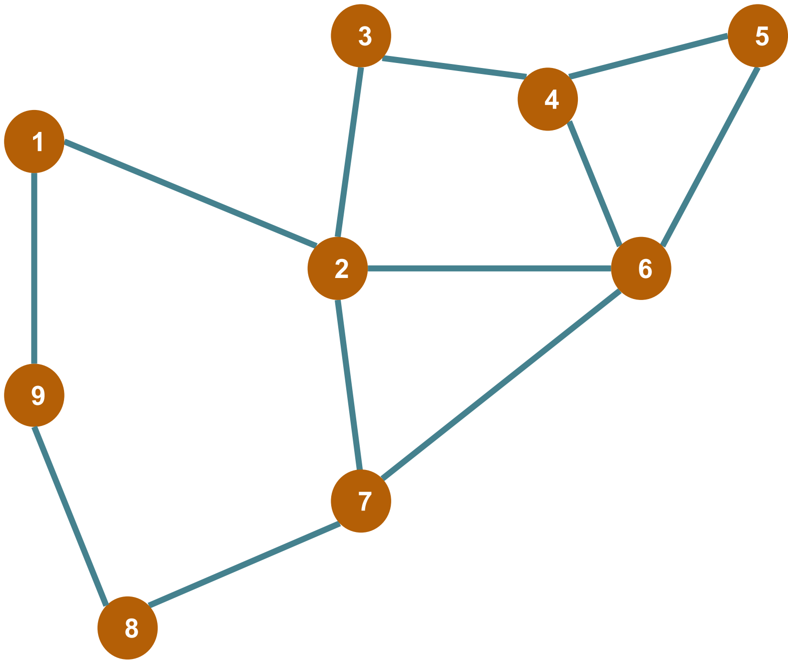
Demostración: … se las dejo de ejercicio.



Algunas definiciones básicas

Definición 9: Subgrafos:

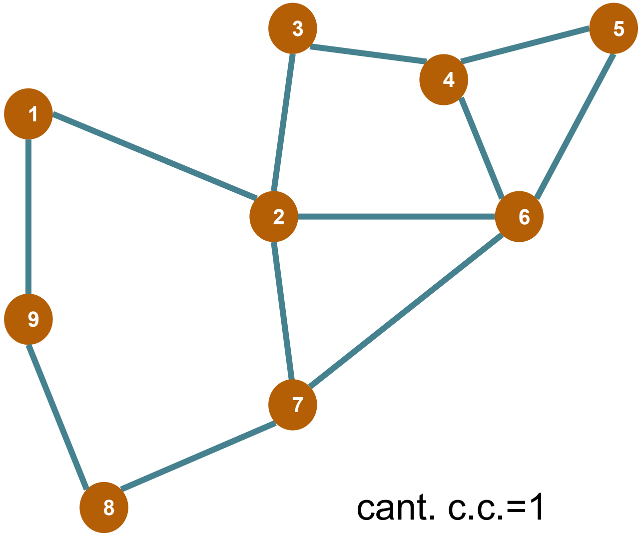
- Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$, un **subgrafo** de es un grafo $H = (V_H, E_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G \cap (V_H x V_H) \Rightarrow H \subseteq G$
- Si $H \subseteq G$ y $H \neq G \Rightarrow H$ es un **subgrafo propio** de G
- Si $H \subseteq G$ y $V_H = V_G \Rightarrow H$ es un **subgrafo generador** de G
- Si $H \subseteq G$ y para todo $u, v \in V_H$ con $e=(u, v) \in E_G$ *entonces también vale* $e=(u, v) \in E_H$ *(tiene todas las aristas que conectan los vértices de H y están en G)* $\Rightarrow H$ es un **subgrafo inducido** de G. H se lo nota $V_{[G]}$.



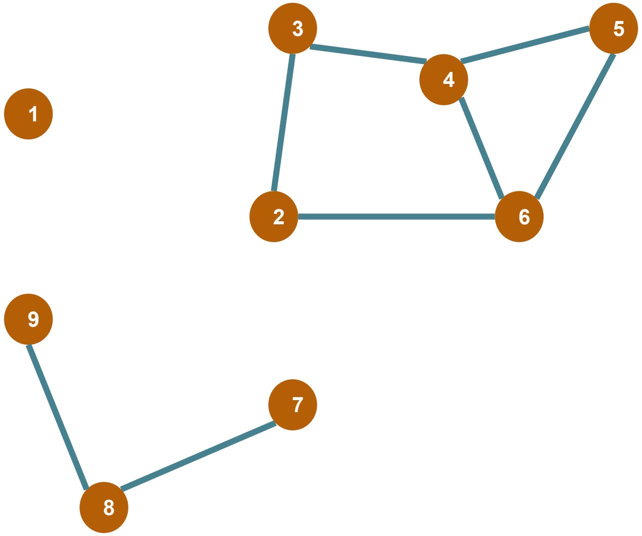
Algunas definiciones básicas

Definición 10: Grafos conexos:

- Un grafo es **conexo** si existe un camino entre todo par de vértices.
- Una **componente conexa** es un subgrafo conexo maximal (no está incluído estrictamente en otro grafo).



cant. c.c.=1

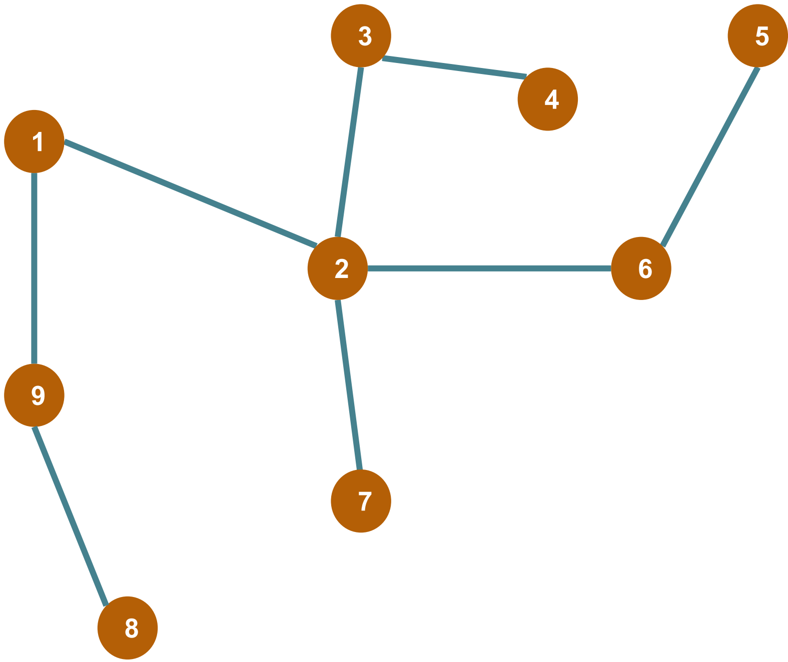


cant. c.c.=3

Algunas definiciones básicas

Definición 11: Más tipos de grafos: Árboles

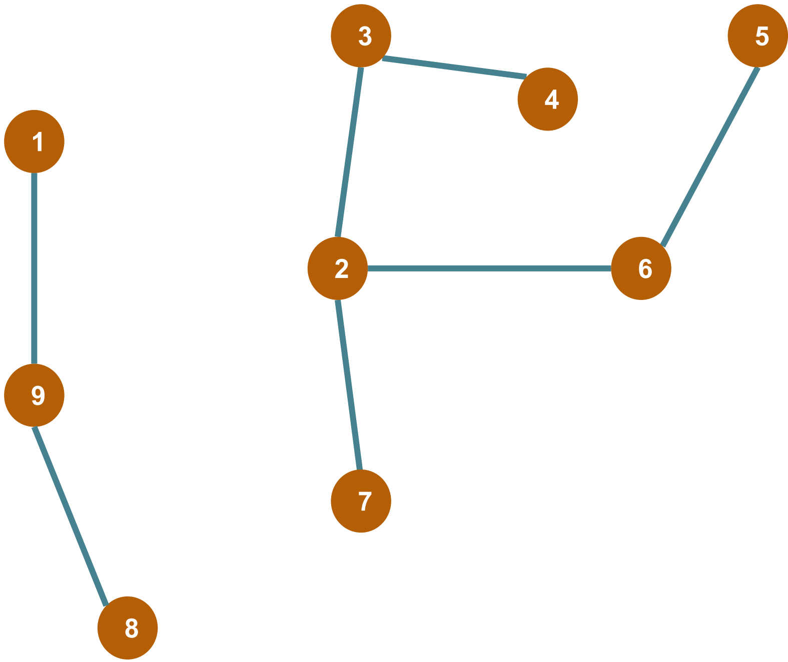
1. Grafo conectado y acíclico.
2. Si saco cualquier arista se desconecta.
3. Si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.



Algunas definiciones básicas

Definición 11: Más tipos de grafos: Árboles

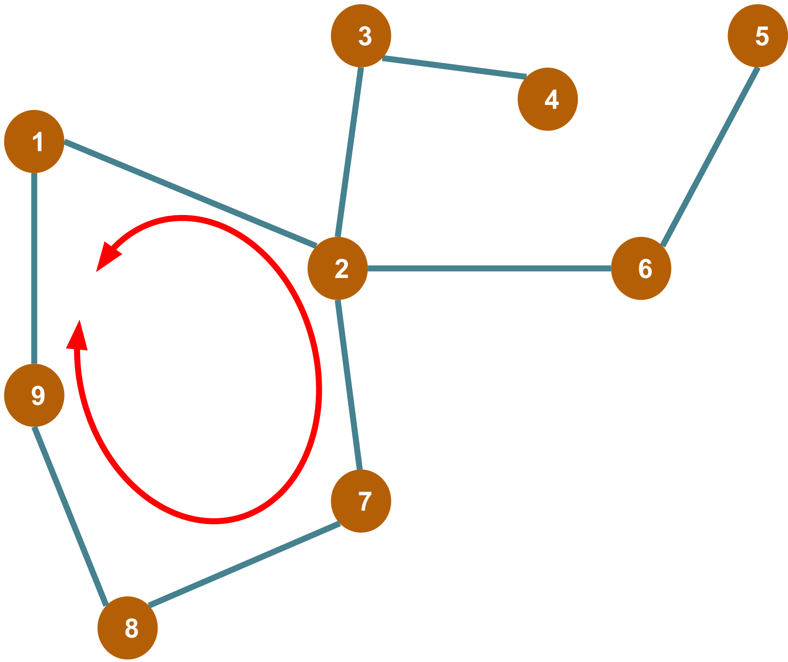
1. Grafo conectado y acíclico.
2. **Si saco cualquier arista se desconecta.**
3. Si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.



Algunas definiciones básicas

Definición 11: Más tipos de grafos: Árboles

1. Grafo conectado y acíclico.
2. Si saco cualquier arista se desconecta.
3. **Si agrego una arista cualquiera se forma un ciclo.**



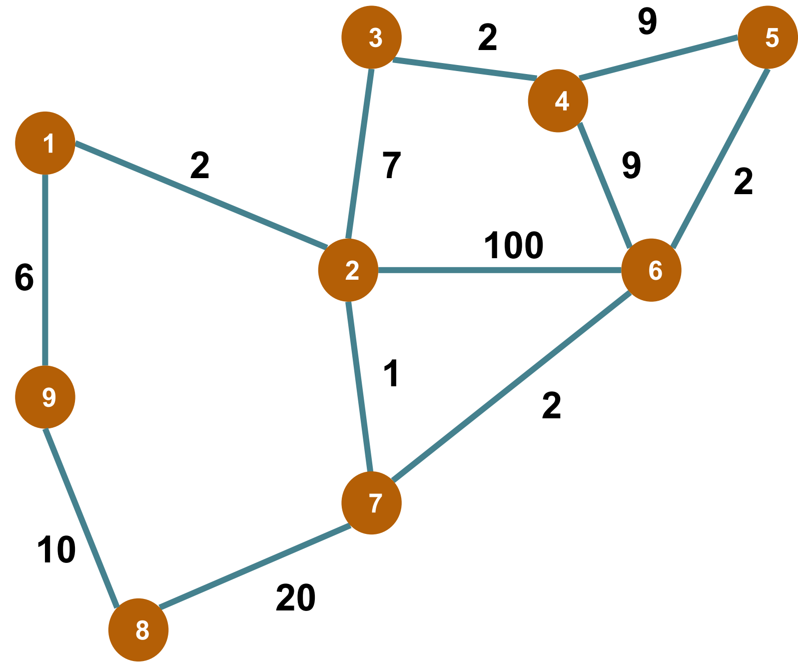
Algunas definiciones básicas

Definición 11: Más tipos de grafos: Grafo pesado

$G = (V, E, w)$ con $w = w(u,v)$

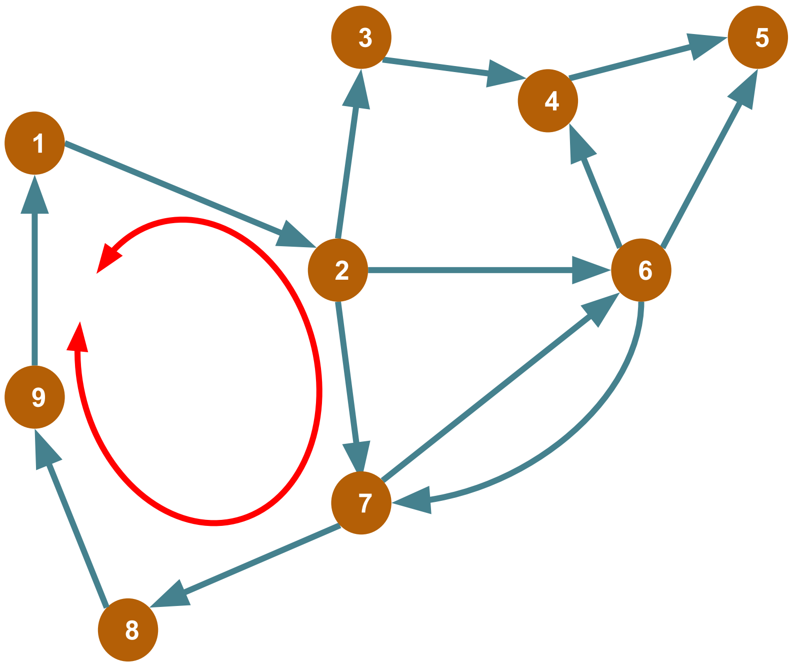
V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

E = {(1,2,2), (1,9,6), (2,3,7), (2,6,100), (2,7,1), (3,4,2), (4,5,9), (4,6,9), (5,6,2), (6,7,2), (7,8,20), (8,9,10)}

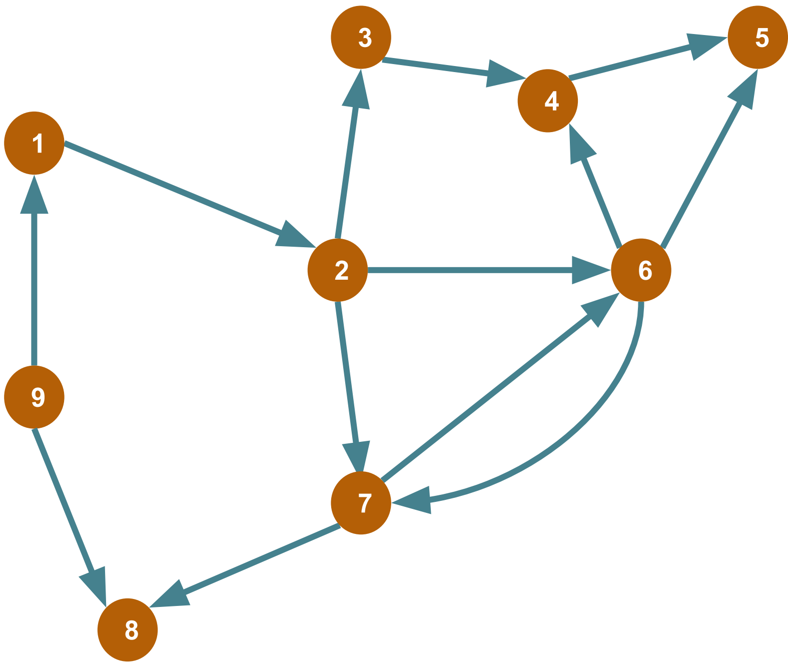


Algunas definiciones básicas

Definición 11: Más tipos de grafos: Digrafo o Grafo dirigido



Definición 11: Más tipos de grafos: Grafo aciclíco dirigido (DAG)

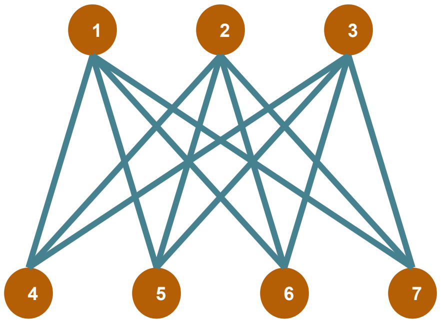


Grafos bipartitos

Definición 12:

- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si existen dos subconjuntos V_1 y V_2 de V tal que
  - $V = V_1 \cup V_2$
  - $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.
  - Para todo $e=(u,v) \in E$, $u \in V_1$ y $v \in V_2$

- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito completo** con particiones V_1 y V_2, si además todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2.

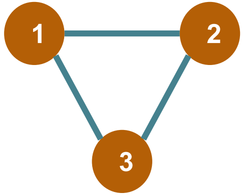


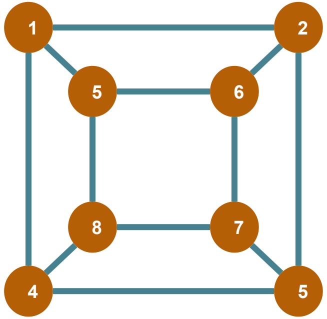
Grafos bipartitos

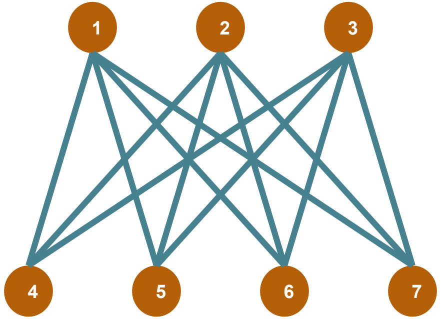
Definición 12:

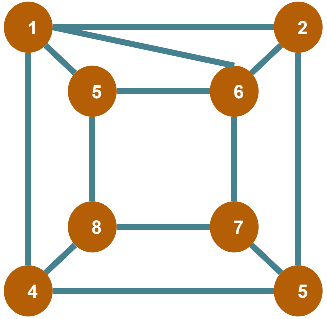
- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si existen dos subconjuntos V_1 y V_2 de V tal que
  - $V=V_1 \cup V_2$
  - $V_1 \cap V_2=\varnothing$.
  - Para todo $e=(u,v) \in E$, $u \in V_1$ y $v \in V_2$

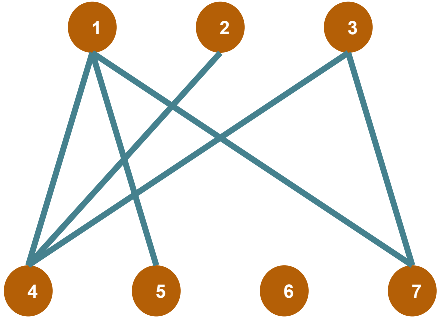
- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito completo** con particiones V_1 y V_2, si además todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2.









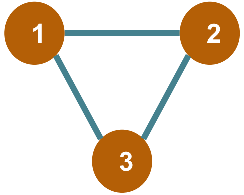


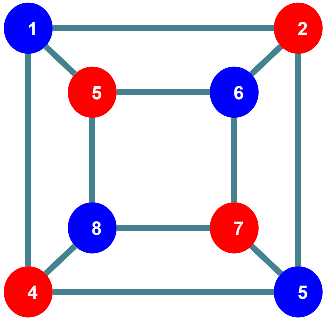
Grafos bipartitos

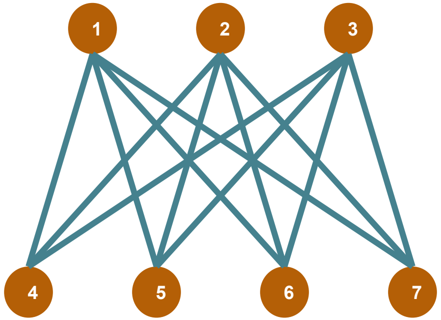
Definición 12:

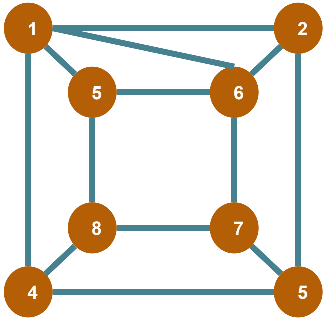
- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si existen dos subconjuntos V_1 y V_2 de V tal que
  - $V = V_1 \cup V_2$
  - $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.
  - Para todo $e=(u,v) \in E$, $u \in V_1$ y $v \in V_2$

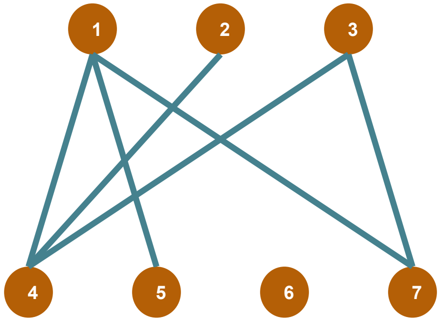
- Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito completo** con particiones V_1 y V_2, si además todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2.











Grafos bipartitos

Teorema 2: Un grafo es bipartito, $V=(V_1,V_2)$ ⇔ no tiene ciclos de longitud impar.

Grafos bipartitos

Teorema 2: Un grafo es bipartito, $V=(V_1,V_2)$ $\Leftrightarrow$ no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración:

Como

- Un grafo es bipartito $\Leftrightarrow$ todas sus c.c. lo son
- Un grafo es no tiene ciclos impares $\Leftrightarrow$ cada una de sus c.c. no tienen ciclos impares

<u>Alcanza demostrarlo para G conexo.</u>

Grafos bipartitos

Teorema 2: Un grafo es bipartito, $V=(V_1,V_2) \Leftrightarrow$ no tiene ciclos de longitud impar. Asumo G conexo.

Demostración ($\Rightarrow$)**:**

Si G no tiene ciclos $\Rightarrow$ Si G no tiene ciclos de longitud impar ❑

Si G tiene al menos un ciclo, $C = v_1, v_2 \ldots v_k v_1$.

Supongo $v_1 \in V_1$. Como $(v_1,v_2) \in E$ (y G es bipartito, Hip.)

$\Rightarrow v_2 \in V_2 \ldots \Rightarrow v_{2i-1} \in V_1$, $v_{2i} \in V_2$

Como $v_1 \in V_1 \Rightarrow v_k \in V_2 \Rightarrow k = 2i$ para algún i

$\Rightarrow l(C) = k$ es par ❑

Grafos bipartitos

Teorema 2: Un grafo es bipartito, $V=(V_1,V_2) \Leftrightarrow$ no tiene ciclos de longitud impar. Asumo G conexo.

Demostración ($\Leftarrow$)**:**

Sea *u* cualquier vértice de V. Construyo la bipartición:

$V_1 = \{u\} \cup \{v \in V: d(u,v) \text{ es par}\}$, $V_2 = \{v \in V: d(u,v) \text{ es impar}\}$

$V = (V_1, V_2)$ es una partición por como es G es conexo no hay nodos de $d(u,v)=\infty$ *y tampoco quedan nodos afuera*,

Ahora, q.v.q. es una <u>bipartición</u>, es decir que no hay aristas de V_1 a V_1 y de V_2 a V_2.

Supongamos que NO es una <u>bipartición</u> $\Rightarrow \exists\, v,z \in V_1$ tq $(v,z) \in E$

Si $v=u \Rightarrow d(u,z) = 1$ pero no puede ser porque $d(u,z)$ *es par por* $\in V_1$. Lo mismo para $z=u \Rightarrow u \neq v,z$

Grafos bipartitos

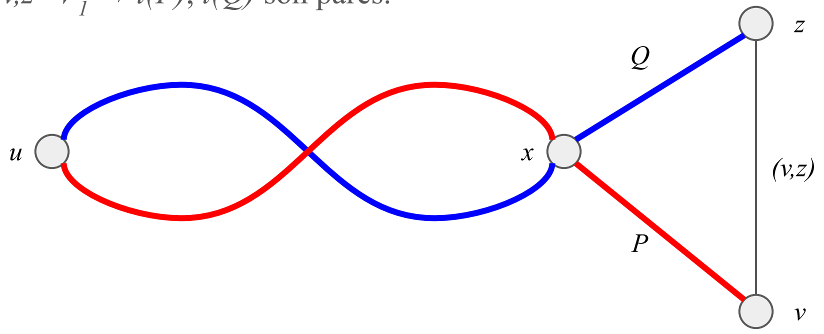
Teorema 2: Un grafo es bipartito, $V=(V_1,V_2) \Leftrightarrow$ no tiene ciclos de longitud impar. Asumo G conexo.

Demostración ($\Leftarrow$)**:**

$V_1 = \{u\} \cup \{v\in V: d(u,v) \text{ es par}\}$, $V_2 = \{v\in V: d(u,v) \text{ es impar}\}$ es una bipartición

Supongamos que NO es una bipartición $\Rightarrow \exists\, v,z \in V_1$ tq $(v,z)\in E$

Sea P un camino mínimo entre u y v, y Q uno entre u y z. Como $v,z\in V_1 \Rightarrow l(P), l(Q)$ son pares.



Grafos bipartitos

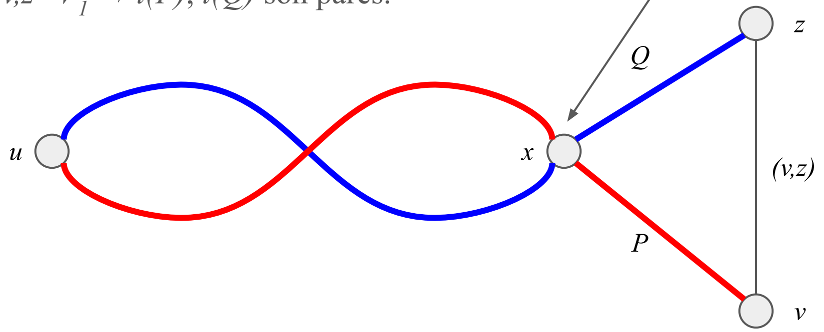
Teorema 2: Un grafo es bipartito, $V=(V_1,V_2)$ $\Leftrightarrow$ no tiene ciclos de longitud impar. Asumo G conexo.

Demostración ($\Leftarrow$):

$V_1 = \{u\} \cup \{v \in V: d(u,v) \text{ es par}\}$, $V_2 = \{v \in V: d(u,v) \text{ es impar}\}$ es una <u>bipartición</u>

Supongamos que NO es una <u>bipartición</u> $\Rightarrow$ $\exists\, v,z \in V_1$ tq $(v,z) \in E$

Sea P un camino mínimo entre u y v, y Q uno entre u y z. Como $v,z \in V_1 \Rightarrow l(P), l(Q)$ son pares.



Sea x el último punto en común entre P y Q. $\Rightarrow$

$d(u,x) = l(P_{ux}) = l(Q_{ux})$ si no no serían caminos míninos (Ojo, no es necesario que $P_{ux} = Q_{ux}$) $\Rightarrow$

$l(P_{xv})$ y $l(Q_{xz})$ tienen igual paridad $\Rightarrow$

$l(\, P_{xv} \text{ -- } (v,z) \text{ -- } Q_{xz})$ es impar **¡Absurdo!**

La contradicción se genera por suponer que $\exists\, v,z \in V_1$ tq $(v,z) \in E$, es decir, que NO es una <u>bipartición</u>.

$\square$

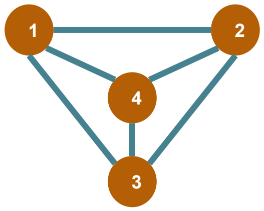
Isomorfismo de grafos

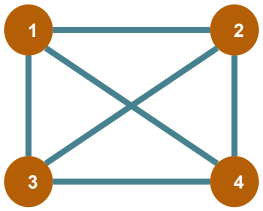
Definición 13: Isomorfos

Dados $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son **isomorfos** si existe una función biyectiva $f\colon V \rightarrow V$ tq para todo $u,v \in V$:

$$(u,v) \in E \Leftrightarrow (f(u),f(v)) \in E'$$

f : función de isomorfismo, $G = G'$ (abuso de notación)



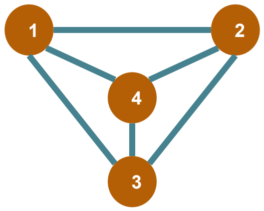


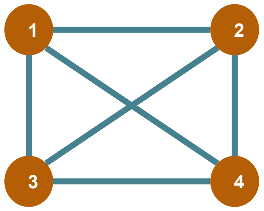
Isomorfismo de grafos

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos *G=(V,E)* y *G'=(V',E')* son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices
2. tienen el mismo número de aristas
3. para todo *k*, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado *k* (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo *k*, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud *k*.





Isomorfismo de grafos

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices
2. tienen el mismo número de aristas
3. para todo k, $1 \le k \le n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado k (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo k, $1 \le k \le n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.

Demostración: ***f*** **función de isomorfismo**,

1. por definición de f: $|V| = |V'|$

Isomorfismo de grafos

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices ❑
2. tienen el mismo número de aristas
3. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado k (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.

Demostración: ***f*** **función de isomorfismo**,

1. por definición de f: $|V| = |V'|$

Isomorfismo de grafos

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices ❑
2. tienen el mismo número de aristas
3. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado k (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.

Demostración: *f* **función de isomorfismo**,

2. definimos $h: E \rightarrow E'$ tq $h((u,v)) = (f(u),f(v))$ *q.v.q. está bien definida y que es biyectiva*

- $(u,v) \in E$ y $(f(u),f(v)) \in E'$ por definición de isomorfismo, y es único porque f es función.
- h es inyectiva :

$h((u_1,v_1)) = h((u_2,v_2)) \Rightarrow (f(u_1),f(v_1)) = (f(u_2),f(v_2)) \Rightarrow$

$f(u_1) = f(u_2)$ y $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow$ (f inyectiva) $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2 \Rightarrow$

$(u_1,v_1) = (u_2,v_2)$

Isomorfismo de grafos

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos *G=(V,E)* y *G'=(V',E')* son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices ❑
2. tienen el mismo número de aristas
3. para todo *k*, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado *k* (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo *k*, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud *k*.

Demostración: *f* **función de isomorfismo**,

2. definimos $h: E \to E'$ tq $h((u,v)) = (f(u),f(v))$ *q.v.q. está bien definida y que es biyectiva*

- $(u,v) \in E$ y $(f(u),f(v)) \in E'$ por definición de isomorfismo, y es único porque *f* es función.
- h es inyectiva
- h es sobreyectiva

$\Rightarrow$ h es biyectiva $\Rightarrow |E| = |E'|$

Isomorfismo de grafos

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos *G=(V,E)* y *G'=(V',E')* son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices ❑
2. tienen el mismo número de aristas ❑
3. para todo *k*, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado *k* (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo *k*, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud *k*.

Demostración: ***f*** **función de isomorfismo**,

2. definimos $h: E \rightarrow E'$ tq $h((u,v)) = (f(u),f(v))$ *q.v.q. está bien definida y que es biyectiva*

- $(u,v) \in E$ y $(f(u),f(v)) \in E'$ por definición de isomorfismo, y es único porque *f* es función.
- h es inyectiva
- h es sobreyectiva

⇒ h es biyectiva ⇒ |E| = |E'|

Isomorfismo de grafos

Proposición 3: Isomorfos

Si dos grafos $G=(V,E)$ y $G'=(V',E')$ son **isomorfos**, entonces,

1. tienen el mismo número de vértices ❑
2. tienen el mismo número de aristas ❑
3. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de vértices de grado k (la misma distribución de grado)
4. tienen el mismo número de c.c.
5. para todo k, $1 \leq k \leq n-1$, tienen el mismo número de caminos simples de longitud k.

Demostración: ***f*** **función de isomorfismo**,

3. … ejercicio.

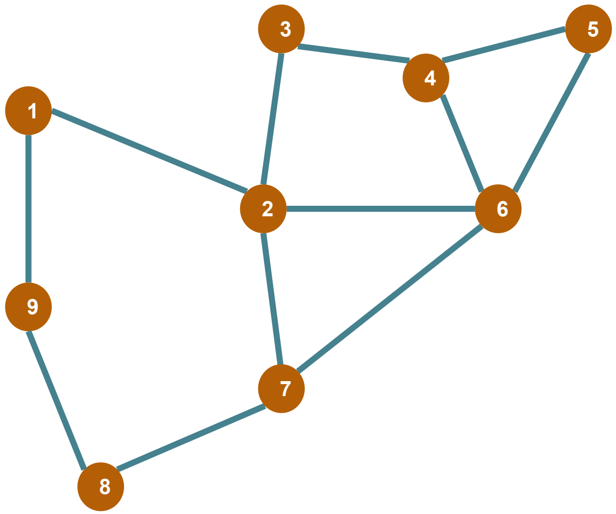
Representación de grafos

Matriz de adyacencia (a_{ij})

$A \in \{0,1\}^{n \times n}$

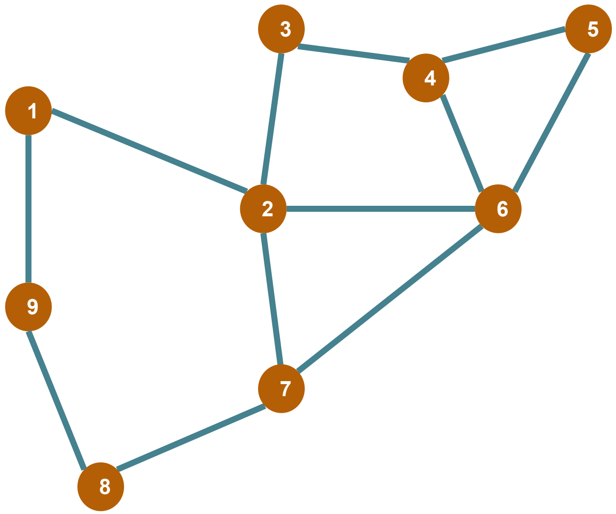
$A = \{a_{ij}\}$ *con*

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ si } \exists\ (u_i, u_j) \in E \\ a_{ij} = 0 \text{ si no} \end{cases}$$



Representación de grafos

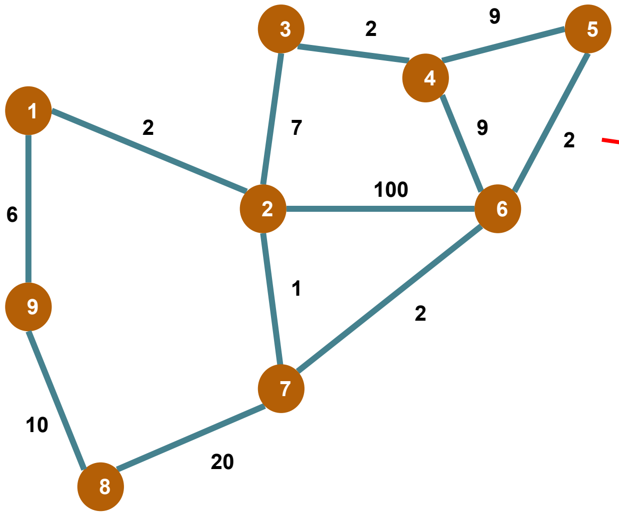
Matriz de adyacencia (a_{ij})



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	0	1	1	0	1	0	0
7	0	1	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	1
9	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Representación de grafos

Matriz de adyacencia (a_{ij})



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	0	1	1	0	1	0	0
7	0	1	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	1
9	1	0	0	0	0	0	0	1	0

En un **grafo ponderado** los 0 y 1 cambian por números que representan un peso.

Representación de grafos

Proposición 4:

Si A es la matriz de adyacencia del grafo G, entonces

1. la suma de los elementos de la fila *i* (o columna *j*) es igual a $d(u_i)$
2. los elementos de la diagonal de A^2 indican los grados de los vértices $a^2_{ii} = d(u_i)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	**2**
2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	**4**
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	**2**
4	0	0	1	0	1	1	0	0	0	**3**
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	**2**
6	0	1	0	1	1	0	1	0	0	**4**
7	0	1	0	0	0	1	0	1	0	**3**
8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	**2**
9	1	0	0	0	0	0	0	1	0	**2**
	2	**4**	**2**	**3**	**2**	**4**	**3**	**2**	**2**	

Isomorfismo de grafos

Proposición 4:

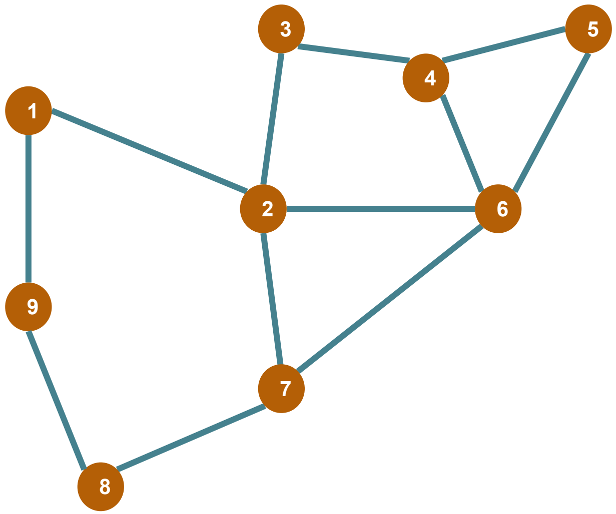
Si A es la matriz de adyacencia del grafo G, entonces

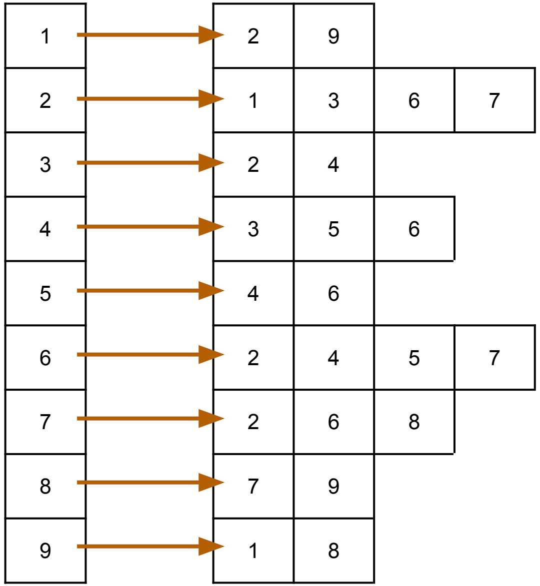
1. la suma de los elementos de la fila *i* (o columna *j*) es igual a $d(u_i)$
2. los elementos de la diagonal de A2 indican los grados de los vértices $a^2_{ii} = d(u_i)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**2**	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	**4**	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	**2**	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	**3**	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	**2**	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	**4**	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	**3**	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	**2**	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	**2**

Representación de grafos

Listas de adyacencia (A)



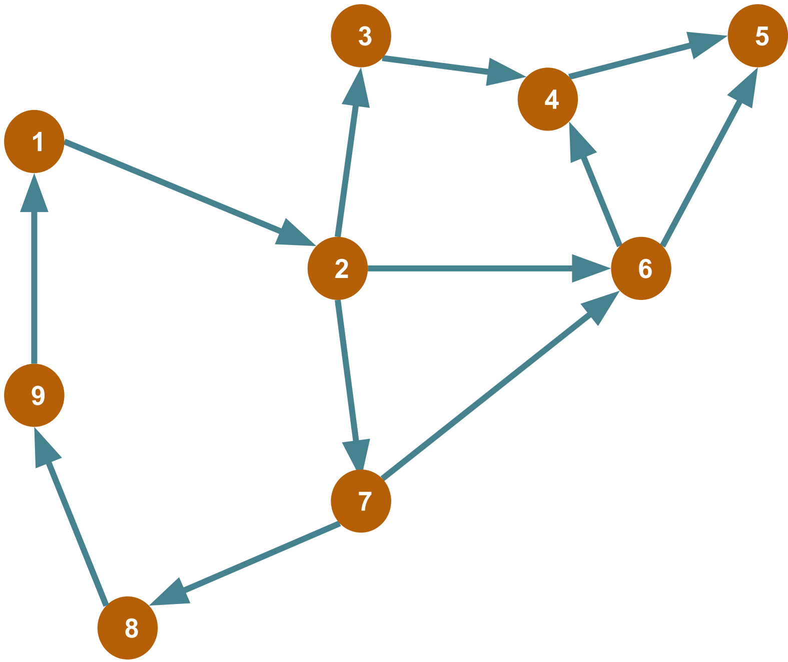


Representación más adecuada para grafos ralos (la mayoría) y más eficiente para la mayoría de los algoritmos que vamos a ver en las siguientes clases.

Digrafos

Definición 14: Digrafo o Grafo dirigido

- *G = (V, E)* donde *E* es un conjunto de pares ordenados.
- *e=(u,v)* también se llama arco con *u*: cola de *e* y *v*: cabeza de *e*.
- ahora tiene grado de entrada (d_{in}) y grado de salida (d_{out}).
- el grafo subyacente (G^s) es el que resulta de remover las direcciones
- la matriz de adyacencia de un digrafo NO es simétrica.



V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

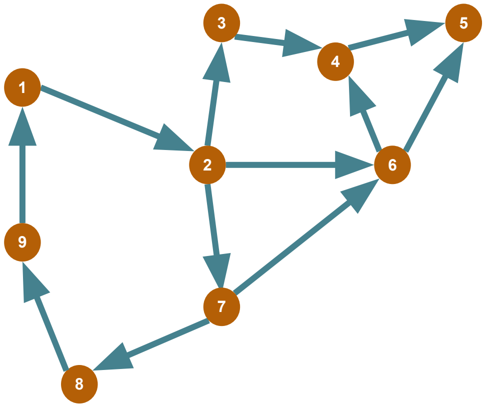
E = {(1,2), (2,3), (2,6), (2,7), (3,4), (4,5), **(6,4)**, **(6,5)**, **(7,6)**, (7,8), (8,9), **(9,1)**}

Digrafos

Proposición 5

Si A es la matriz de adyacencia del digrafo G, entonces

1. la suma de los elementos de la fila *i* es igual a $d_{OUT}(u_i)$
2. la suma de los elementos de la columna *j* es igual a $d_{IN}(u_j)$

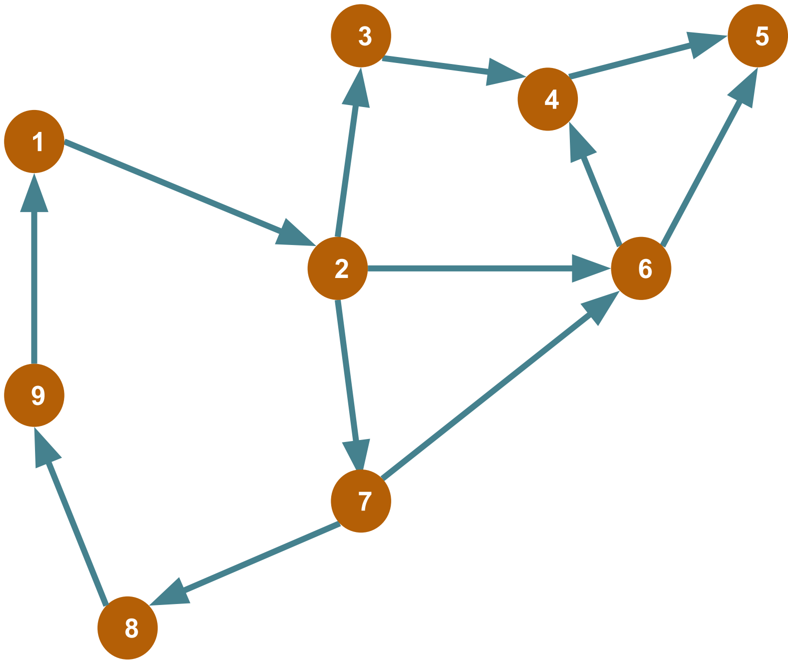


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	**1**
2	0	0	1	0	0	1	1	0	0	**3**
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	**1**
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	**1**
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
6	0	0	0	1	1	0	0	0	0	**2**
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	**2**
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	**1**
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
	1	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	

Digrafos

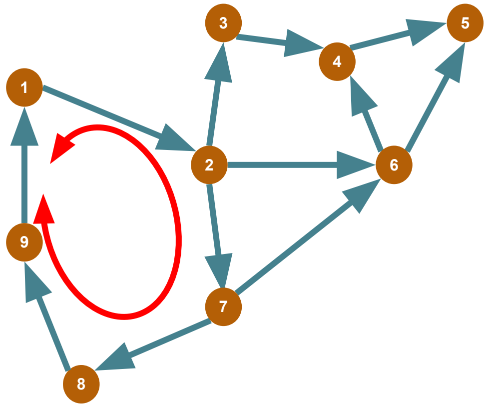
Definición 15: Digrafo o Grafo dirigido

- recorrido/camino/ciclo/circuito orientado se recorre (si es posible) en un único sentido.
- un grafo es **fuertemente conexo** si existe un camino orientado entre todo par de vértices.

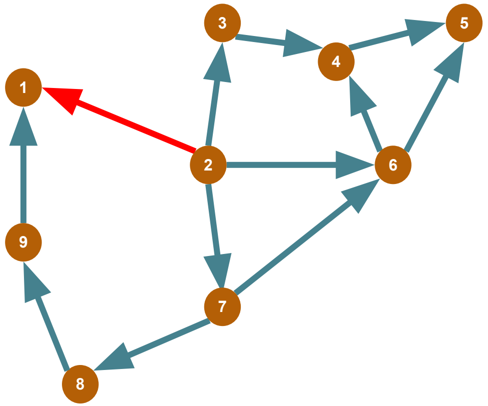


Digrafos

Definición 16: Grafo dirigido con ciclos



Definición 17: Grafo dirigido acíclico (directed acyclic graph, DAG)



Próxima clase: Conexidad y recorrido de grafos y digrafos

➔ Algoritmos Deep First Search (DFS) recursivo.
➔ Algoritmos Breadth First Search (BFS) y DFS iterativos.
➔ Propiedades de aristas no seleccionadas por DFS sobre grafos dirigidos y no dirigidos. Momentos de marca de vértices en DFS.
➔ Propiedad de longitud de los caminos en BFS.
➔ Concepto de componente fuertemente conexa y Algoritmo de Kosaraju.