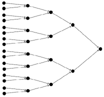
DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

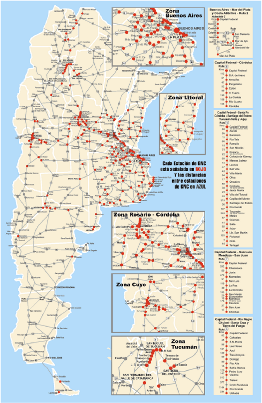
Técnicas de Diseño de Algoritmos (Ex Algoritmos y Estructuras de Datos III)

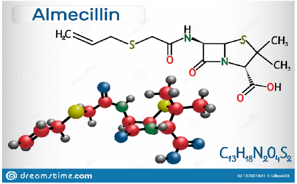
Segundo cuatrimestre 2024

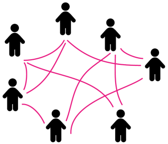
Grafos

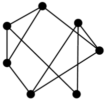
Grafos todos los días











Grafos todos los días

- Modelan relaciones entre *vértices*.

Grafos todos los días

- Modelan relaciones entre *vértices*.

- Proporcionan una forma conveniente y flexible de representar problemas de la vida real que consideran una red como estructura subyacente.

Grafos todos los días

- Modelan relaciones entre *vértices*.
- Proporcionan una forma conveniente y flexible de representar problemas de la vida real que consideran una red como estructura subyacente.
- Esta red puede ser física (como instalaciones eléctricas, red ferroviaria o moléculas orgánicas) o abstracta que modela relaciones menos tangibles (relaciones sociales, en bases de datos o en ecosistemas).

Grafos todos los días

- Modelan relaciones entre *vértices*.
- Proporcionan una forma conveniente y flexible de representar problemas de la vida real que consideran una red como estructura subyacente.
- Esta red puede ser física (como instalaciones eléctricas, red ferroviaria o moléculas orgánicas) o abstracta que modela relaciones menos tangibles (relaciones sociales, en bases de datos o en ecosistemas).
- Estudio desde un punto de vista teórico como estructura abstracta.

Grafos todos los días

- Modelan relaciones entre *vértices*.
- Proporcionan una forma conveniente y flexible de representar problemas de la vida real que consideran una red como estructura subyacente.
- Esta red puede ser física (como instalaciones eléctricas, red ferroviaria o moléculas orgánicas) o abstracta que modela relaciones menos tangibles (relaciones sociales, en bases de datos o en ecosistemas).
- Estudio desde un punto de vista teórico como estructura abstracta.
- Desarrollo de algoritmos sofisticados e interesantes para resolver estas aplicaciones en la práctica.

Aplicaciones

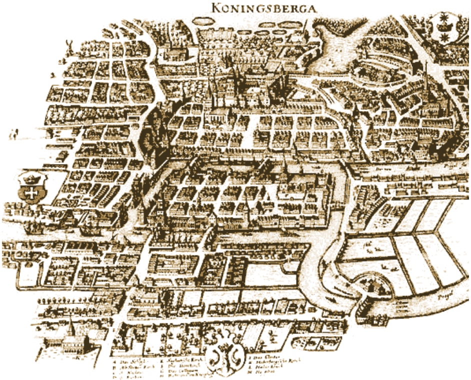
- Ruteo de vehículos.
- Organización del tráfico aéreo y venta de tickets de avión.
- Optimización de redes de distribución de mercadería.
- Planificación de grandes estructuras como redes eléctricas o redes de ferrocarriles.
- En sociología se utilizan, por ejemplo, para medir el prestigio de un actor o para explorar un mecanismo de difusión.
- En biología para estudiar ecosistemas y propiedades de migraciones.
- En los sitios de comercio electrónico para mostrar recomendaciones.
- En economía el Nobel 2012 premió a un trabajo de asignaciones estables sobre grafos utilizados para modelar el rediseño de mercados económicos.

El origen: Los puentes de Königsberg

Leonhard Euler (1707–1783)

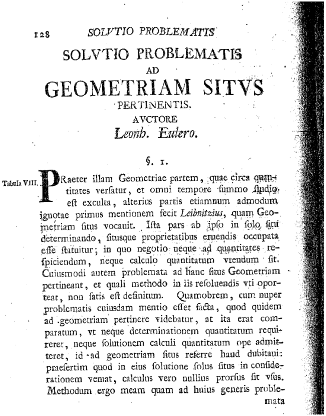
El origen: Los puentes de Königsberg

- La ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado) tenía en el siglo XVIII siete puentes.
- Euler (1736) planteó y resolvió el problema de cruzar por todos ellos exactamente una vez y volver al punto de partida.



El origen: Los puentes de Königsberg

L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Academia de St. Petersburg, 1735 - 1741

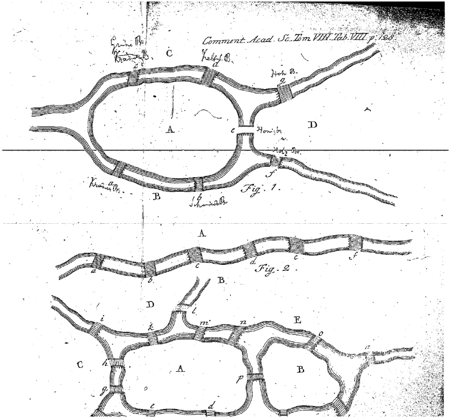


128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. I.

Tabula VIII. Praeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata



El origen: Los puentes de Königsberg

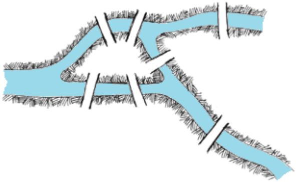
- Euler mostró que el problema *no tiene solución* y dio una condición necesaria para el caso general.

El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema *no tiene solución* y dio una condición necesaria para el caso general.
- Carl Hierholzer mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.

El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema *no tiene solución* y dio una condición necesaria para el caso general.
- Carl Hierholzer mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.



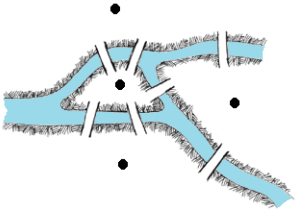
El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema *no tiene solución* y dio una condición necesaria para el caso general.

- Carl Hierholzer mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.

El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema *no tiene solución* y dio una condición necesaria para el caso general.
- Carl Hierholzer mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.



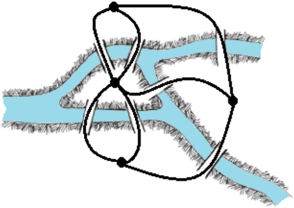
El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema *no tiene solución* y dio una condición necesaria para el caso general.

- Carl Hierholzer mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.

El origen: Los puentes de Königsberg

- Euler mostró que el problema *no tiene solución* y dio una condición necesaria para el caso general.
- Carl Hierholzer mostró en 1871 que esta condición es también suficiente, y formalizó la demostración.



El origen: Los puentes de Königsberg

- Dos de los siete puentes originales fueron destruidos durante el bombardeo de la ciudad en la Segunda Guerra Mundial.
- Más tarde, otros dos fueron demolidos y reemplazados por un ruta.
- Los otros tres puentes permanecen, aunque sólo dos de ellos son de la época de Euler (uno fue reconstruido en 1935).

Segundo acto: El problema del caballo de ajedrez

- En 1771, Alexandre Vandermonde , en *Remarques sur des problémes de situation*, publicado en Académie des Sciences, estudió el *problema del caballo de ajedrez* .

Segundo acto: El problema del caballo de ajedrez

- En 1771, Alexandre Vandermonde , en *Remarques sur des problémes de situation*, publicado en Académie des Sciences, estudió el *problema del caballo de ajedrez*.
- El objetivo es encontrar un camino circular de un caballo de ajedrez (respetando los movimientos permitidos para un caballo en el juego de ajedrez) que visite todas las casillas del tablero pasando *exactamente una vez* por cada una.

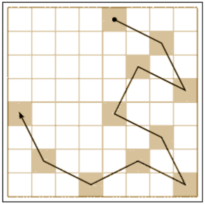
Segundo acto: El problema del caballo de ajedrez

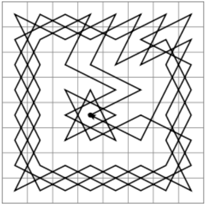
- En 1771, Alexandre Vandermonde , en *Remarques sur des problémes de situation*, publicado en Académie des Sciences, estudió el *problema del caballo de ajedrez*.
- El objetivo es encontrar un camino circular de un caballo de ajedrez (respetando los movimientos permitidos para un caballo en el juego de ajedrez) que visite todas las casillas del tablero pasando *exactamente una vez* por cada una.
- Aunque no encontró solución al problema, este artículo es pionero en el estudio de ideas topológicas.


566 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

REMARQUES SUR LES PROBLÈMES DE SITUATION.

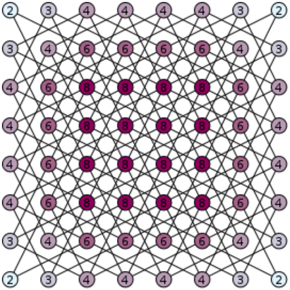
Par M. VANDERMONDE.





Segundo acto: El problema del caballo de ajedrez

- Este problema corresponde, en términos de hoy, a encontrar un *ciclo hamiltoniano* en el siguiente grafo:



- Dos casillas son *vecinas* si desde una se puede ir a la otra por medio de un movimiento de caballo.
- En el gráfico (que es un grafo) se representa mediante una línea entre ellas.
- En cada casilla figura el número de casillas *vecinas* que tiene.

Segundo acto: El problema del caballo de ajedrez

- El primer algoritmo (heurístico!) fue presentado por H. C. Warnsdorff, en *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung* (1823).

Segundo acto: El problema del caballo de ajedrez

- El primer algoritmo (heurístico!) fue presentado por H. C. Warnsdorff, en *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung* (1823).
- En términos modernos, es una heurística golosa que en cada paso mueve al caballo a la casilla vecina todavía sin visitar con menor valor (cantidad de casillas vecinas).

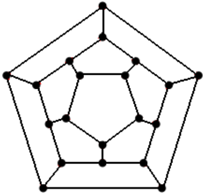
Segundo acto: El problema del caballo de ajedrez

- El primer algoritmo (heurístico!) fue presentado por H. C. Warnsdorff, en *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung* (1823).
- En términos modernos, es una heurística golosa que en cada paso mueve al caballo a la casilla vecina todavía sin visitar con menor valor (cantidad de casillas vecinas).
- Este procedimiento no siempre encuentra un ciclo hamiltoniano aunque éste exista.

Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos

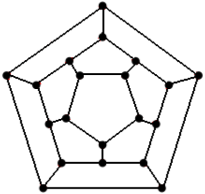
Sir William Hamilton (1805–1865)

Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos



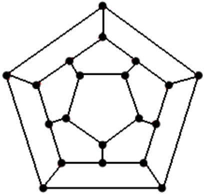
- Hamilton (1857) presentó el *juego icosiano* en una reunión de la Asociación Británica en Dublín.

Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos



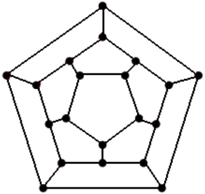
- Hamilton (1857) presentó el *juego icosiano* en una reunión de la Asociación Británica en Dublín.
- El juego planteaba 4 desafíos sobre un *dodecaedro*.

Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos



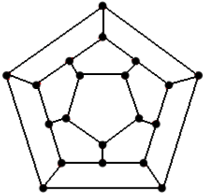
- Hamilton (1857) presentó el *juego icosiano* en una reunión de la Asociación Británica en Dublín.
- El juego planteaba 4 desafíos sobre un *dodecaedro*.
- En el primero, el jugador 1 elegía 5 vértices consecutivos y el jugador 2 debía completar un ciclo que pasara exactamente una vez por cada vértice y retornar al primero.

Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos



- Hamilton (1857) presentó el *juego icosiano* en una reunión de la Asociación Británica en Dublín.
- El juego planteaba 4 desafíos sobre un *dodecaedro*.
- En el primero, el jugador 1 elegía 5 vértices consecutivos y el jugador 2 debía completar un ciclo que pasara exactamente una vez por cada vértice y retornar al primero.
- Siempre es posible encontrar al menos dos ciclos.

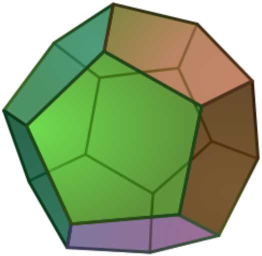
Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos



- Hamilton (1857) presentó el *juego icosiano* en una reunión de la Asociación Británica en Dublín.
- El juego planteaba 4 desafíos sobre un *dodecaedro*.
- En el primero, el jugador 1 elegía 5 vértices consecutivos y el jugador 2 debía completar un ciclo que pasara exactamente una vez por cada vértice y retornar al primero.
- Siempre es posible encontrar al menos dos ciclos.
- Los otros desafíos crecían en dificultad y no siempre tenían solución.

Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos

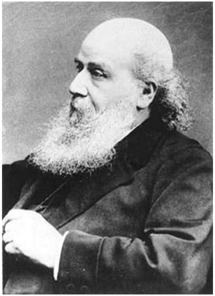
- Había una versión 3D del juego, conocido como *El dodecaedro del viajero*.
- Los vértices representaban veinte lugares importantes: Bruselas, Cantón, Delhi, etc., terminando con Zanzíbar.
- Cada vértice estaba marcado por una clavija, y se podía enrollar un hilo alrededor de estas clavijas para indicar un ciclo.
- El objetivo era realizar un *viaje alrededor del mundo* (que pasara exactamente una vez por cada lugar).



Tercer acto: Más sobre ciclos hamiltonianos

- Tanto Vandermonde como Hamilton plantearon el problema para casos particulares.
- Thomas Kirkman fue el primero en tratar este problema de forma general en 1855.
- Sin embargo, estos ciclos se conocen como ciclos hamiltonianos.

La partida de nacimiento: Sylvester



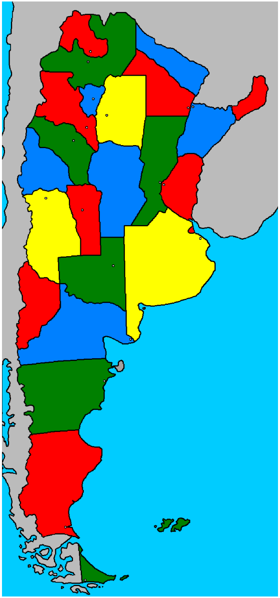
James Sylvester (1814–1897)

- En 1878, James Sylvester publicó el trabajo *Chemistry and Algebra*, sobre análisis algebraico de estructuras moleculares.
- En este artículo se utiliza la palabra *grafo* por primer vez.
- El término se deriva de la notación gráfica en química.

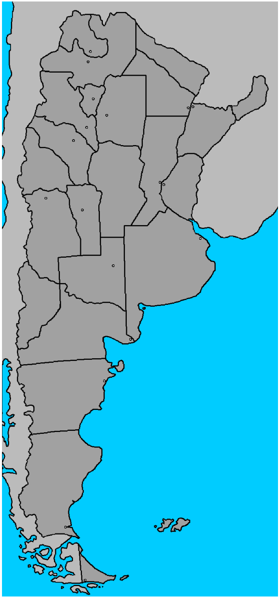
El teorema de los cuatro colores

- Todo mapa puede ser coloreado usando *4 colores*, de modo tal que regiones limítrofes usen colores distintos.

- Dos regiones no se consideran limítrofes si sólo se tocan en un punto.

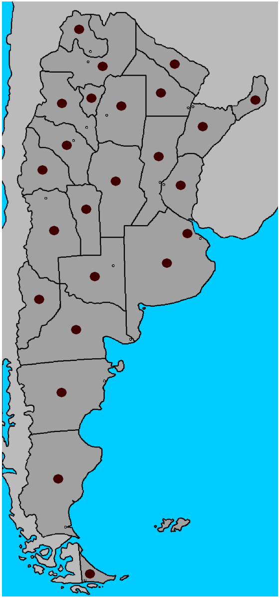


El teorema de los cuatro colores



El teorema de los cuatro colores

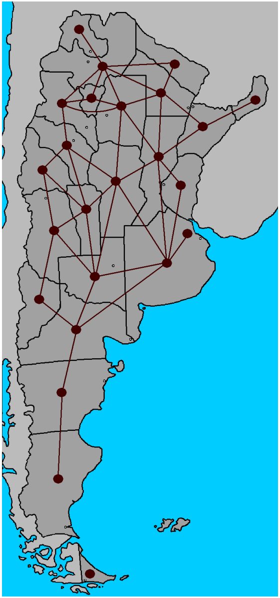
- Representamos cada región por un punto (vértice).



El teorema de los cuatro colores

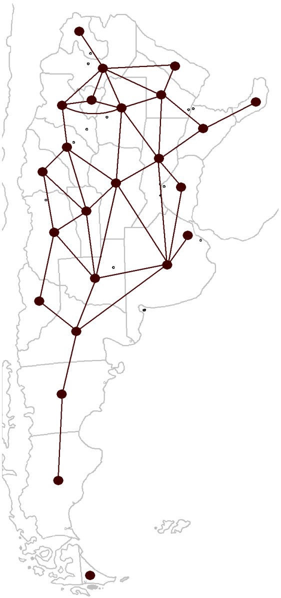
- Representamos cada región por un punto (vértice).

- Unimos dos puntos si las regiones que representan son limítrofes: obtenemos un grafo.



El teorema de los cuatro colores

- Representamos cada región por un punto (vértice).
- Unimos dos puntos si las regiones que representan son limítrofes: obtenemos un grafo.
- Queremos colorear los vértices de este grafo utilizando 4 colores de forma tal que vértices unidos por una línea tengan distinto color.



El teorema de los cuatro colores

- Francis Guthrie, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, notó que a veces necesitaba cuatro colores, y conjeturó que cuatro siempre eran suficientes.

El teorema de los cuatro colores

- Francis Guthrie, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, notó que a veces necesitaba cuatro colores, y conjeturó que cuatro siempre eran suficientes.
- Su hermano, Frederick Guthrie, la comunicó a su profesor Augustus De Morgan.

El teorema de los cuatro colores

- Francis Guthrie, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, notó que a veces necesitaba cuatro colores, y conjeturó que cuatro siempre eran suficientes.
- Su hermano, Frederick Guthrie, la comunicó a su profesor Augustus De Morgan.
- En 1852, De Morgan se la comunicó a Hamilton, quien no mostró interés, con la siguiente nota:

El teorema de los cuatro colores

- Francis Guthrie, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, notó que a veces necesitaba cuatro colores, y conjeturó que cuatro siempre eran suficientes.
- Su hermano, Frederick Guthrie, la comunicó a su profesor Augustus De Morgan.
- En 1852, De Morgan se la comunicó a Hamilton, quien no mostró interés, con la siguiente nota:
  - *A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact –and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured –four colours may be wanted but not more– the following is his case in which four colours are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented.*

El teorema de los cuatro colores

- Francis Guthrie, mientras coloreaba un mapa de Inglaterra, notó que a veces necesitaba cuatro colores, y conjeturó que cuatro siempre eran suficientes.
- Su hermano, Frederick Guthrie, la comunicó a su profesor Augustus De Morgan.
- En 1852, De Morgan se la comunicó a Hamilton, quien no mostró interés, con la siguiente nota:
  - *A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact –and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured –four colours may be wanted but not more– the following is his case in which four colours are wanted. Query cannot a necessity for five or more be invented.*
- La conjetura despertó el interés de De Morgan y la difundió entre otros matemáticos.

El teorema de los cuatro colores

- En 1879, Alfred Kempe dio una demostración, pero Percy Heawood encontró en 1890 un error. Demostró el *teorema de los cinco colores*.

El teorema de los cuatro colores

- En 1879, Alfred Kempe dio una demostración, pero Percy Heawood encontró en 1890 un error. Demostró el *teorema de los cinco colores*.

- En 1969. Oystein Ore y Joel Stemple mostraron que la conjetura es cierta para todos los mapas de *hasta 40 regiones*.

El teorema de los cuatro colores

- En 1879, Alfred Kempe dio una demostración, pero Percy Heawood encontró en 1890 un error. Demostró el *teorema de los cinco colores*.

- En 1969. Oystein Ore y Joel Stemple mostraron que la conjetura es cierta para todos los mapas de *hasta 40 regiones*.

- La primera *demostración* fue dada en 1976, más de 100 años después de su planteo, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken .

El teorema de los cuatro colores

- En 1879, Alfred Kempe dio una demostración, pero Percy Heawood encontró en 1890 un error. Demostró el *teorema de los cinco colores*.

- En 1969. Oystein Ore y Joel Stemple mostraron que la conjetura es cierta para todos los mapas de *hasta 40 regiones*.

- La primera *demostración* fue dada en 1976, más de 100 años después de su planteo, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken .
  - Redujeron todos los contraejemplos posibles a *1936 minimales*.
  - Utilizando un *programa de computadora*, verificaron que todos esos posibles contraejemplos se pueden colorear con cuatro colores.
  - Éste fue el primer teorema importante que se demostró con una gran asistencia informática.

El teorema de los cuatro colores

- En 1879, Alfred Kempe dio una demostración, pero Percy Heawood encontró en 1890 un error. Demostró el *teorema de los cinco colores*.

- En 1969. Oystein Ore y Joel Stemple mostraron que la conjetura es cierta para todos los mapas de *hasta 40 regiones*.

- La primera *demostración* fue dada en 1976, más de 100 años después de su planteo, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken .
  - Redujeron todos los contraejemplos posibles a *1936 minimales*.
  - Utilizando un *programa de computadora*, verificaron que todos esos posibles contraejemplos se pueden colorear con cuatro colores.
  - Éste fue el primer teorema importante que se demostró con una gran asistencia informática.

- En 1996, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas dieron una demostración simplificada con *633 configuraciones minimales*.

El teorema de los cuatro colores

- En 1879, Alfred Kempe dio una demostración, pero Percy Heawood encontró en 1890 un error. Demostró el *teorema de los cinco colores*.

- En 1969. Oystein Ore y Joel Stemple mostraron que la conjetura es cierta para todos los mapas de *hasta 40 regiones*.

- La primera *demostración* fue dada en 1976, más de 100 años después de su planteo, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken .
  - Redujeron todos los contraejemplos posibles a *1936 minimales*.
  - Utilizando un *programa de computadora*, verificaron que todos esos posibles contraejemplos se pueden colorear con cuatro colores.
  - Éste fue el primer teorema importante que se demostró con una gran asistencia informática.

- En 1996, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas dieron una demostración simplificada con *633 configuraciones minimales*.

- En 2005 Georges Gonthier utilizó un programa de demostración de teoremas de propósito general para probar el teorema.

El teorema de los cuatro colores y Möbius

- Durante un tiempo, se creyó que el problema de los cuatro colores había sido propuesto por August Möbius en 1840.

El teorema de los cuatro colores y Möbius

- Durante un tiempo, se creyó que el problema de los cuatro colores había sido propuesto por August Möbius en 1840.

- Sin embargo, el problema no era el mismo. Möbius planteó lo siguiente: Había una vez un rey con cinco hijos. En su testamento escribió que, después de su muerte, los hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de forma tal que cada una limitara con las otros cuatro. Y preguntó si esto era posible.

El teorema de los cuatro colores y Möbius

- Durante un tiempo, se creyó que el problema de los cuatro colores había sido propuesto por August Möbius en 1840.

- Sin embargo, el problema no era el mismo. Möbius planteó lo siguiente: Había una vez un rey con cinco hijos. En su testamento escribió que, después de su muerte, los hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de forma tal que cada una limitara con las otros cuatro. Y preguntó si esto era posible.

- El problema requiere para su solución poder diagramar cinco regiones vecinas en el plano. Ahora se sabe que no es posible cumplir la voluntad del rey.

El teorema de los cuatro colores y Möbius

- Durante un tiempo, se creyó que el problema de los cuatro colores había sido propuesto por August Möbius en 1840.

- Sin embargo, el problema no era el mismo. Möbius planteó lo siguiente: Había una vez un rey con cinco hijos. En su testamento escribió que, después de su muerte, los hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de forma tal que cada una limitara con las otros cuatro. Y preguntó si esto era posible.

- El problema requiere para su solución poder diagramar cinco regiones vecinas en el plano. Ahora se sabe que no es posible cumplir la voluntad del rey.

- Ambos problemas están relacionados:
    - Si las cinco regiones del problema de Möbius pudieran ser diagramadas en un mapa, entonces, seguro que cuatro colores no alcanzarían para pintar ese mapa.
    - Pero que no puedan ser dibujadas estas cinco regiones, no asevera nada sobre el problema de los cuatro colores.

Grafos

- Un *grafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de *puntos* o *nodos* o *vértices* y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V.

Grafos

- Un *grafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de *puntos* o *nodos* o *vértices* y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V.

- Los elementos de X se llaman *aristas* o *ejes*.

Grafos

- Un *grafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de *puntos* o *nodos* o *vértices* y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V.

- Los elementos de X se llaman *aristas* o *ejes*.

- Dados v y $w \in V$, si $e = (v, w) \in X$ se dice que v y w son *adyacentes* y que e es *incidente* a v y w.

Grafos

- Un *grafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de *puntos* o *nodos* o *vértices* y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V.

- Los elementos de X se llaman *aristas* o *ejes*.

- Dados v y $w \in V$, si $e = (v, w) \in X$ se dice que v y w son *adyacentes* y que e es *incidente* a v y w.

- La vecindad de un vértice v, $N(v)$, es el conjunto de los vértices adyacentes a v. Es decir:

$$N(v) = \{w \in V : (v, w) \in X\}.$$

Grafos

- Un *grafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos, donde V es un conjunto de *puntos* o *nodos* o *vértices* y X es un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V.

- Los elementos de X se llaman *aristas* o *ejes*.

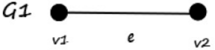
- Dados v y $w \in V$, si $e = (v, w) \in X$ se dice que v y w son *adyacentes* y que e es *incidente* a v y w.

- La vecindad de un vértice v, $N(v)$, es el conjunto de los vértices adyacentes a v. Es decir:

$$N(v) = \{w \in V : (v, w) \in X\}.$$

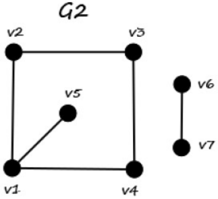
Notación: $n_G = |V|$ y $m_G = |X|$. Cuando esté claro a qué grafo nos referimos, evitaremos el subíndice.

Grafos - Representación gráfica



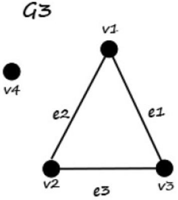
$V_{G1} = \{v1, v2\}$

$X_{G1} = \{e\} = \{(v1, v2)\}$



$V_{G2} = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7\}$

$X_{G2} = \{(v1, v2), (v2, v3), (v3, v4)$
$(v4, v1), (v1, v5), (v6, v7)\}$



$V_{G3} = \{v1, v2, v3, v4\}$

$X_{G3} = \{e1, e2, e3\}$
$e1 = (v1, v3)$
$e2 = (v1, v2)$
$e3 = (v2, v3)$

Multigrafos y pseudografos

En algunas aplicaciones, por ejemplo para modelar más de un vuelo entre dos ciudades, la definición anterior de grafo no es apropiada.

Multigrafos y pseudografos

En algunas aplicaciones, por ejemplo para modelar más de un vuelo entre dos ciudades, la definición anterior de grafo no es apropiada.

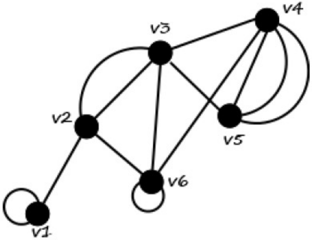
- Un *multigrafo* es un grafo en el que puede haber varias aristas entre el mismo par de vértices distintos.

- Un *pseudografo* es un grafo en el que puede haber varias aristas entre cada par de vértices y también puede haber aristas (*loops*) que unan a un vértice con sí mismo.

En la materia, si no aclaramos lo contrario, cuando nos referimos al término grafo, asumimos que no hay aristas múltiples ni *loops*.

X pasa a ser un multiconjunto de aristas.

Multigrafos y pseudografos



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$X = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_3, v_4), \\ (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_4, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_6, v_6)\}$$

Grafos - Grado

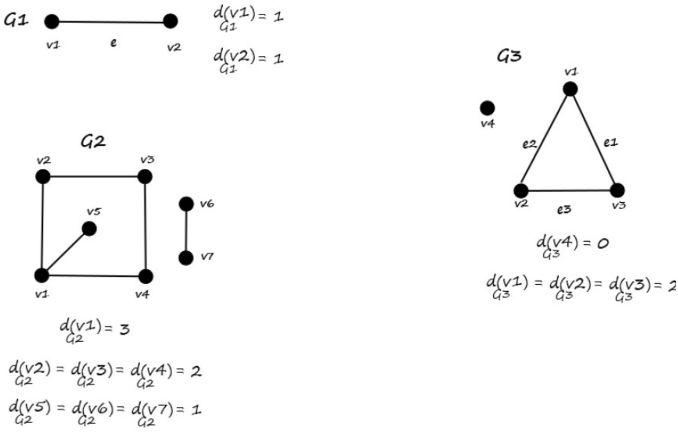
- El *grado* de un vértice v en el grafo G, $d_G(v)$ es la cantidad de aristas incidentes a v en G.

Grafos - Grado

- El *grado* de un vértice v en el grafo G, $d_G(v)$ es la cantidad de aristas incidentes a v en G.
- Llamaremos $\Delta(G)$ al máximo grado de los vértices de G, $\delta(G)$ al mínimo.

Grafos - Grado

- El *grado* de un vértice v en el grafo G, $d_G(v)$ es la cantidad de aristas incidentes a v en G.
- Llamaremos $\Delta(G)$ al máximo grado de los vértices de G, $\delta(G)$ al mínimo.



Grafos - Grado

Teorema:

La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual a 2 veces el número de aristas, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Grafos - Grado

Teorema:

La suma de los grados de los vértices de un grafo es igual a 2 veces el número de aristas, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Corolario: Para todo grafo, la cantidad de vértices que tienen

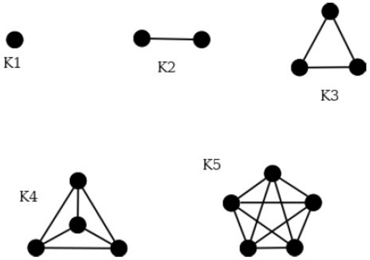
grado impar es par.

Grafos - Completo

- Un grafo se dice *completo* si todos los vértices son adyacentes entre sí.
- Notación: K_n es el grafo completo de n vértices.

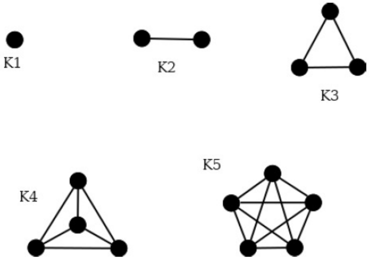
Grafos - Completo

- Un grafo se dice *completo* si todos los vértices son adyacentes entre sí.
- Notación: K_n es el grafo completo de n vértices.



Grafos - Completo

- Un grafo se dice *completo* si todos los vértices son adyacentes entre sí.
- Notación: K_n es el grafo completo de n vértices.



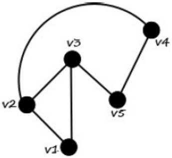
¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de n vértices?

Grafos - Complemento

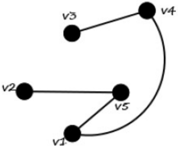
- Dado un grafo $G = (V, X)$, su grafo *complemento*, que notaremos $\bar{G} = (V, \bar{X})$, tiene el mismo conjunto de vértices y un par de vértices son adyacente en $\bar{G}$ si, y solo si, no son adyacentes en G. También puede ser notado como G^c.

Grafos - Complemento

- Dado un grafo $G = (V, X)$, su grafo *complemento*, que notaremos $\bar{G} = (V, \bar{X})$, tiene el mismo conjunto de vértices y un par de vértices son adyacente en $\bar{G}$ si, y solo si, no son adyacentes en G. También puede ser notado como G^c.



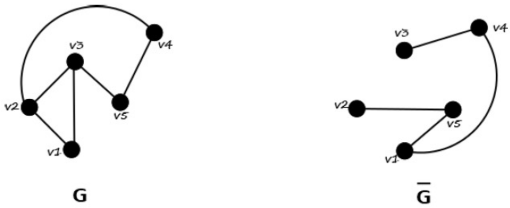
G



$\bar{\mathbf{G}}$

Grafos - Complemento

- Dado un grafo $G = (V, X)$, su grafo *complemento*, que notaremos $\bar{G} = (V, \bar{X})$, tiene el mismo conjunto de vértices y un par de vértices son adyacente en $\bar{G}$ si, y solo si, no son adyacentes en G. También puede ser notado como G^c.



Si G tiene n vértices y m aristas, ¿Cuántas aristas tiene $\bar{G}$?

Grafo - Recorridos, caminos, circuitos y ciclos

- Un *recorrido* en un grafo es una secuencia alternada de vértices y aristas $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ tal que un extremo de la arista e_i es v_{i-1} y el otro es v_i para $i = 1, \ldots, k$. Decimos que P es un recorrido entre v_0 y v_k.

Grafo - Recorridos, caminos, circuitos y ciclos

- Un *recorrido* en un grafo es una secuencia alternada de vértices y aristas $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ tal que un extremo de la arista e_i es v_{i-1} y el otro es v_i para $i = 1, \dots, k$. Decimos que P es un recorrido entre v_0 y v_k.

- En los grafos (no multi ni pseudo) un recorrido queda definido por la secuencia de vértices: $P = v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k$.

Grafo - Recorridos, caminos, circuitos y ciclos

- Un *recorrido* en un grafo es una secuencia alternada de vértices y aristas $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ tal que un extremo de la arista e_i es v_{i-1} y el otro es v_i para $i = 1, \dots, k$. Decimos que P es un recorrido entre v_0 y v_k.

- En los grafos (no multi ni pseudo) un recorrido queda definido por la secuencia de vértices: $P = v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k$.

- Un *camino* es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Grafo - Recorridos, caminos, circuitos y ciclos

- Un *recorrido* en un grafo es una secuencia alternada de vértices y aristas $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ tal que un extremo de la arista e_i es v_{i-1} y el otro es v_i para $i = 1, \dots, k$. Decimos que P es un recorrido entre v_0 y v_k.

- En los grafos (no multi ni pseudo) un recorrido queda definido por la secuencia de vértices: $P = v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k$.

- Un *camino* es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

- Una *sección* de un camino $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ es un subsecuencia $v_i e_{i+1} v_{i+1} e_{i+2} \dots v_{j-1} e_j v_j$ de términos consecutivos de P, y lo notamos como $P_{v_i v_j}$.

Grafo - Recorridos, caminos, circuitos y ciclos

- Un *recorrido* en un grafo es una secuencia alternada de vértices y aristas $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ tal que un extremo de la arista e_i es v_{i-1} y el otro es v_i para $i = 1, \dots, k$. Decimos que P es un recorrido entre v_0 y v_k.

- En los grafos (no multi ni pseudo) un recorrido queda definido por la secuencia de vértices: $P = v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k$.

- Un *camino* es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

- Una *sección* de un camino $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ es un subsecuencia $v_i e_{i+1} v_{i+1} e_{i+2} \dots v_{j-1} e_j v_j$ de términos consecutivos de P, y lo notamos como $P_{v_i v_j}$.

- Un *circuito* es un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice.

Grafo - Recorridos, caminos, circuitos y ciclos

- Un *recorrido* en un grafo es una secuencia alternada de vértices y aristas $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ tal que un extremo de la arista e_i es v_{i-1} y el otro es v_i para $i = 1, \dots, k$. Decimos que P es un recorrido entre v_0 y v_k.

- En los grafos (no multi ni pseudo) un recorrido queda definido por la secuencia de vértices: $P = v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k$.

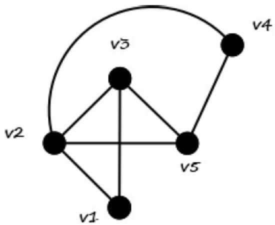
- Un *camino* es un recorrido que no pasa dos veces por el mismo vértice.

- Una *sección* de un camino $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ es un subsecuencia $v_i e_{i+1} v_{i+1} e_{i+2} \dots v_{j-1} e_j v_j$ de términos consecutivos de P, y lo notamos como $P_{v_i v_j}$.

- Un *circuito* es un recorrido que empieza y termina en el mismo vértice.

- Un *ciclo o circuito simple* es un circuito de 3 o más vértices que no pasa dos veces por el mismo vértice.

Grafo - Recorridos, caminos, circuitos y ciclos



$$P_1 = v_2 v_3 v_1 v_2 v_4$$

es recorrido pero no camino

$$P_2 = v_1 v_2 v_5 v_4$$

es camino

$$C_1 = v_1 v_3 v_2 v_4 v_5 v_2 v_1$$

es circuito, pero no ciclo

$$C_2 = v_2 v_3 v_5 v_4 v_2$$

es ciclo

Grafos - Distancia

- Dado un recorrido P, su *longitud*, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.

Grafos - Distancia

- Dado un recorrido P, su *longitud*, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.
- La *distancia* entre dos vértices v y w, $d(v, w)$, se define como la longitud del recorrido más corto entre v y w.

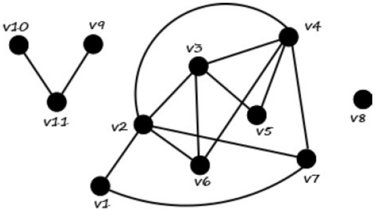
Grafos - Distancia

- Dado un recorrido P, su *longitud*, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.
- La *distancia* entre dos vértices v y w, $d(v, w)$, se define como la longitud del recorrido más corto entre v y w.
- Si no existe recorrido entre v y w se dice que $d(v, w) = \infty$.

Grafos - Distancia

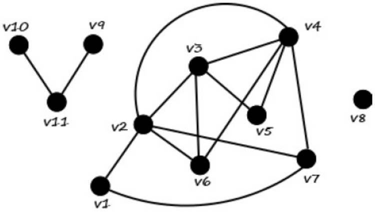
- Dado un recorrido P, su *longitud*, $l(P)$ es la cantidad de aristas que tiene.
- La *distancia* entre dos vértices v y w, $d(v, w)$, se define como la longitud del recorrido más corto entre v y w.
- Si no existe recorrido entre v y w se dice que $d(v, w) = \infty$.
- Para todo vértice v, $d(v, v) = 0$.

Grafos - Distancia



$$d(v_1, v_2) = 1$$
$$d(v_1, v_3) = 2$$
$$d(v_1, v_5) = 3$$
$$d(v_3, v_7) = 2$$
$$d(v_3, v_9) = \infty$$
$$d(v_7, v_7) = 0$$
$$d(v_1, v_8) = \infty$$
$$d(v_{10}, v_9) = 2$$

Grafos - Distancia



$$d(v_1, v_2) = 1$$
$$d(v_1, v_3) = 2$$
$$d(v_1, v_5) = 3$$
$$d(v_3, v_7) = 2$$
$$d(v_3, v_9) = \infty$$
$$d(v_7, v_7) = 0$$
$$d(v_1, v_8) = \infty$$
$$d(v_{10}, v_9) = 2$$

Proposición: Si un recorrido P entre v y w tiene longitud $d(v, w)$, P debe ser un camino.

Grafos - Distancia

Proposición:

La función de distancia cumple las siguientes propiedades para todo u, v, w pertenecientes a V:

- $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Grafos - Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V_G, X_G)$, un *subgrafo* de G es un grafo $H = (V_H, X_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$ y $X_H \subseteq X_G \cap (V_H \times V_H)$. Lo notamos como $H \subseteq G$.

Grafos - Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V_G, X_G)$, un *subgrafo* de G es un grafo $H = (V_H, X_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$ y $X_H \subseteq X_G \cap (V_H \times V_H)$. Lo notamos como $H \subseteq G$.

- Si $H \subseteq G$ y $H \neq G$, entonces H es subgrafo propio de G, $H \subset G$.

Grafos - Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V_G, X_G)$, un *subgrafo* de G es un grafo $H = (V_H, X_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$ y $X_H \subseteq X_G \cap (V_H \times V_H)$. Lo notamos como $H \subseteq G$.

- Si $H \subseteq G$ y $H \neq G$, entonces H es subgrafo propio de G, $H \subset G$.

- H es un subgrafo generador de G si $H \subseteq G$ y $V_G = V_H$.

Grafos - Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V_G, X_G)$, un *subgrafo* de G es un grafo $H = (V_H, X_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$ y $X_H \subseteq X_G \cap (V_H \times V_H)$. Lo notamos como $H \subseteq G$.

- Si $H \subseteq G$ y $H \neq G$, entonces H es subgrafo propio de G, $H \subset G$.

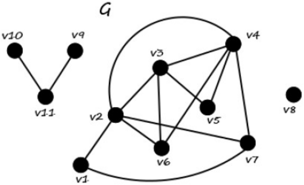
- H es un subgrafo generador de G si $H \subseteq G$ y $V_G = V_H$.

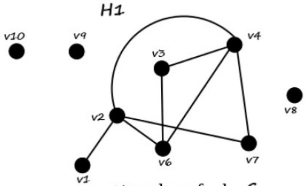
- Un subgrafo $H = (V_H, X_H)$ de $G = (V_G, X_G)$, es un *subgrafo inducido* si todo par u, $v \in V_H$ con $(u, v) \in X_G$ entonces también $(u, v) \in X_H$.

Grafos - Subgrafos

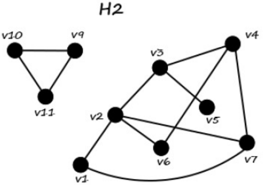
- Dado un grafo $G = (V_G, X_G)$, un *subgrafo* de G es un grafo $H = (V_H, X_H)$ tal que $V_H \subseteq V_G$ y $X_H \subseteq X_G \cap (V_H \times V_H)$. Lo notamos como $H \subseteq G$.
- Si $H \subseteq G$ y $H \neq G$, entonces H es subgrafo propio de G, $H \subset G$.
- H es un subgrafo generador de G si $H \subseteq G$ y $V_G = V_H$.
- Un subgrafo $H = (V_H, X_H)$ de $G = (V_G, X_G)$, es un *subgrafo inducido* si todo par u, $v \in V_H$ con $(u, v) \in X_G$ entonces también $(u, v) \in X_H$.
- Un subgrafo inducido de $G = (V_G, X_G)$ por un conjunto de vértices $V' \subseteq V_G$, se denota como $G_{[V']}$.

Grafos - Subgrafos

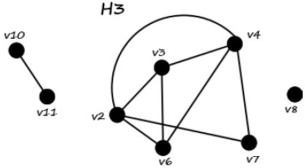




H1 subgrafo de G
no inducido



H2 no es subgrafo de G



H3 subgrafo inducido de G
por {v2,v3,v4,v6,v7,v8,v10,v11}

Grafos - Conexo

- Un grafo se dice *conexo* si existe camino entre todo par de vértices.

Grafos - Conexo

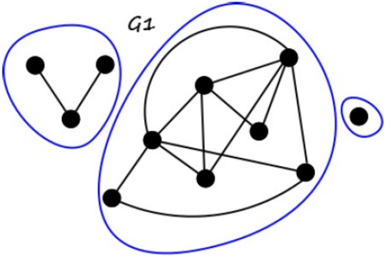
- Un grafo se dice *conexo* si existe camino entre todo par de vértices.

- Una *componente conexa* de un grafo G es un subgrafo conexo maximal de G.

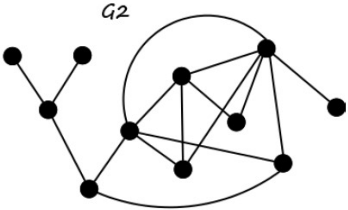
Grafos - Conexo

- Un grafo se dice *conexo* si existe camino entre todo par de vértices.

- Una *componente conexa* de un grafo G es un subgrafo conexo maximal de G.



Grafo no conexo
con 3 componentes conexas



Grafo conexo

Grafos bipartitos

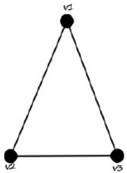
- Un grafo $G = (V, X)$ se dice *bipartito* si existen dos subconjuntos V_1, V_2 del conjunto de vértices V tal que:

$$V = V_1 \cup V_2, \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

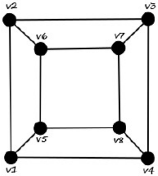
  y tal que todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2.

- Un grafo bipartito con subconjuntos V_1, V_2, es *bipartito completo* si todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2.

Grafos bipartitos

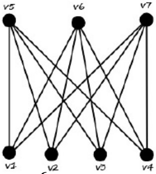


No bipartito

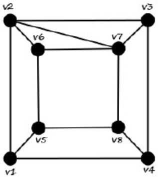


$V_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$
$V_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$

Es bipartito completo
$K_{4,3}$

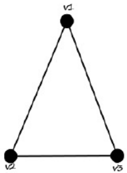


$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$V_2 = \{v_5, v_6, v_7\}$

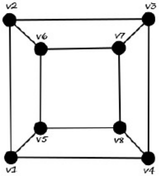


No bipartito

Grafos bipartitos

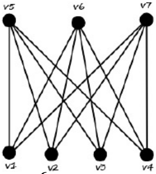


No bipartito

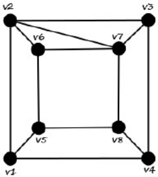


$V_1 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$
$V_2 = \{v_2, v_4, v_5, v_7\}$

Es bipartito completo
$K_{4,3}$



$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$V_2 = \{v_5, v_6, v_7\}$



No bipartito

Teorema:

Un grafo G es bipartito si, y sólo si, no tiene ciclos de longitud impar.

Isomorfismo de grafos

- Dados dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ se dicen *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \to V'$ tal que para todo v, $w \in V$:

$$(v, w) \in X \iff (f(v), f(w)) \in X'.$$

Isomorfismo de grafos

- Dados dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ se dicen *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \to V'$ tal que para todo v, $w \in V$:

$$(v, w) \in X \Longleftrightarrow (f(v), f(w)) \in X'.$$

- La función f es llamada función de isomorfismo.

Isomorfismo de grafos

- Dados dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ se dicen *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \to V'$ tal que para todo v, $w \in V$:

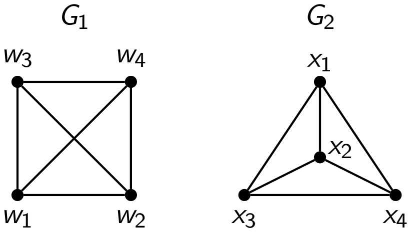
$$(v, w) \in X \Longleftrightarrow (f(v), f(w)) \in X'.$$

- La función f es llamada función de isomorfismo.

- Cuando G y G' son isomorfos lo notaremos como $G \approxeq G'$ o, simplemente (por abuso de notación) $G = G'$.

Isomorfismo de grafos

Dados $G_1 = (V_1, X_1)$ y $G_2 = (V_2, X_2)$:



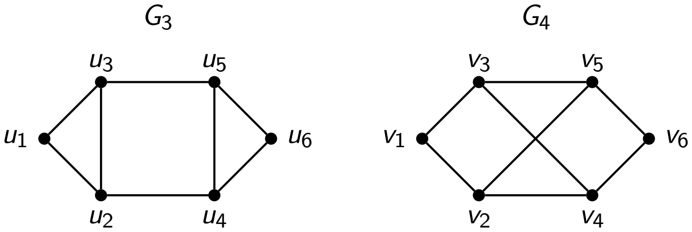
Si definimos $f : V_1 \to V_2$ como

$$f(w_1) = x_1 \qquad f(w_2) = x_2 \qquad f(w_3) = x_3 \qquad f(w_4) = x_4$$

podemos ver que f respeta las adyacencias y, por lo tanto, G_1 y G_2 son isomorfos.

Isomorfismo de grafos

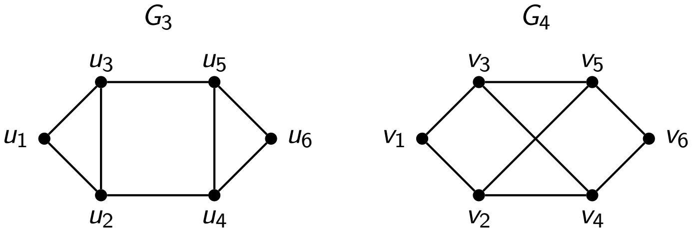
Para $G_3 = (V_3, X_3)$ y $G_4 = (V_4, X_4)$:



- No existe función biyectiva $f : V_3 \to V_4$ que respete las adyacencias.

Isomorfismo de grafos

Para $G_3 = (V_3, X_3)$ y $G_4 = (V_4, X_4)$:



- No existe función biyectiva $f : V_3 \to V_4$ que respete las adyacencias.
- Esto muestra que G_3 y G_4 no son isomorfos.

Isomorfismo de grafos

Proposición:

Si dos grafos $G = (V, X)$ y $G' = (V', X')$ son isomorfos, entonces

- tienen el mismo número de vértices,
- tienen el mismo número de aristas,
- para todo k, $0 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de vértices de grado k,
- tienen el mismo número de componentes conexas,
- para todo k, $1 \leq k \leq n - 1$, tienen el mismo número de caminos de longitud k.

Isomorfismo de grafos

- La recíproca de esta preposición es falsa.
- Hay grafos que cumplen todos los puntos y, sin embargo, no son isomorfos.
- Esta preposición da codiciones necesarias para que dos grafos sean isomorfos, pero no suficientes.
- No se conocen condiciones suficientes fáciles de chequear (algoritmo polinomial) que aseguren que dos grafos son isomorfos.

Representación de grafos en la computadora

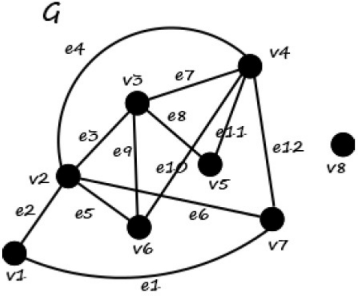
- Para desarrollar algoritmos sobre grafos, debemos representarlos en la computadora.
- Matrices
  - a no ser que el grafo sea muy denso como hay muchas entradas en 0 desperdiciaríamos espacio.
  - Sin embargo, la respresentación de grafos mediante matrices es útil conceptual y teóricamente. Veremos dos posibilidades.
- Listas - Estructuras más eficientes en espacio

Representación de grafos - Matriz de adyacencia

$A \in \{0,1\}^{n \times n}$, donde los elementos a_{ij} de A se definen como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene una arista entre los vértices } v_i \text{ y } v_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Representación de grafos - Matriz de adyacencia



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Representación de grafos - Matriz de adyacencia

Proposición:

Si A es la matriz de adyacencia del grafo G, entonces:

- La suma de los elementos de la columna i de A (o fila i, dado que A es simétrica) es igual a $d(v_i)$.
- Los elementos de la diagonal de A^2 indican los grados de los vértices: $a_{ii}^2 = d(v_i)$.

Digrafos

- Un *digrafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X donde V es el conjunto de puntos, nodos o vértices y X es un subconjunto del conjunto de los pares *ordenados* de elementos distintos de V. A los elementos de X los llamaremos *arcos*.

Digrafos

- Un *digrafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X donde V es el conjunto de puntos, nodos o vértices y X es un subconjunto del conjunto de los pares *ordenados* de elementos distintos de V. A los elementos de X los llamaremos *arcos*.
- Dado un arco $e = (u, w)$ llamaremos al primer elemento, u, *cola* de e y al segundo elemento, w, *cabeza* de e.

Digrafos

- Un *digrafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X donde V es el conjunto de puntos, nodos o vértices y X es un subconjunto del conjunto de los pares *ordenados* de elementos distintos de V. A los elementos de X los llamaremos *arcos*.
- Dado un arco $e = (u, w)$ llamaremos al primer elemento, u, *cola* de e y al segundo elemento, w, *cabeza* de e.
- El *grado de entrada* $d_{in}(v)$ de un vértice v de un digrafo es la cantidad de arcos que *llegan* a v. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como cabeza.

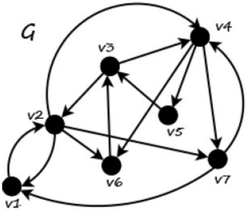
Digrafos

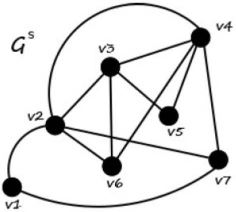
- Un *digrafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X donde V es el conjunto de puntos, nodos o vértices y X es un subconjunto del conjunto de los pares *ordenados* de elementos distintos de V. A los elementos de X los llamaremos *arcos*.
- Dado un arco $e = (u, w)$ llamaremos al primer elemento, u, *cola* de e y al segundo elemento, w, *cabeza* de e.
- El *grado de entrada* $d_{in}(v)$ de un vértice v de un digrafo es la cantidad de arcos que *llegan* a v. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como cabeza.
- El *grado de salida* $d_{out}(v)$ de un vértice v de un digrafo es la cantidad de arcos que *salen* de v. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como cola.

Digrafos

- Un *digrafo* $G = (V, X)$ es un par de conjuntos V y X donde V es el conjunto de puntos, nodos o vértices y X es un subconjunto del conjunto de los pares *ordenados* de elementos distintos de V. A los elementos de X los llamaremos *arcos*.
- Dado un arco $e = (u, w)$ llamaremos al primer elemento, u, *cola* de e y al segundo elemento, w, *cabeza* de e.
- El *grado de entrada* $d_{in}(v)$ de un vértice v de un digrafo es la cantidad de arcos que *llegan* a v. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como cabeza.
- El *grado de salida* $d_{out}(v)$ de un vértice v de un digrafo es la cantidad de arcos que *salen* de v. Es decir, la cantidad de arcos que tienen a v como cola.
- El *grafo subyacente* de un digrafo G es el grafo G^s que resulta de remover las direcciones de sus arcos (si para un par de vértices hay arcos en ambas direcciones, sólo se coloca una arista entre ellos).

Digrafos





Digrafos

La matriz de adyacencia de un digrafo G, $A \in \{0,1\}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$ se define como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene un arco de } v_i \text{ a } v_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Digrafos

La matriz de adyacencia de un digrafo G, $A \in \{0,1\}^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$ se define como:

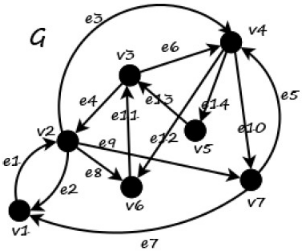
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ tiene un arco de } v_i \text{ a } v_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Proposición:

Si A es la matriz de adyacencia del digrafo G, entonces:

- La suma de los elementos de la fila i de A es igual a $d_{OUT}(v_i)$.
- La suma de los elementos de la columna i de A es igual a $d_{IN}(v_i)$.

Digrafos



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Digrafos

- Un *recorrido/camino orientado* en un grafo dirigido es una sucesión de arcos $e_1 e_2 \dots e_k$ tal que el primer elemento del arco e_i coincide con el segundo de e_{i-1} y el segundo elemento de e_i con el primero de e_{i+1} $i = 2, \dots, k-1$.

Digrafos

- Un *recorrido/camino orientado* en un grafo dirigido es una sucesión de arcos $e_1 e_2 \dots e_k$ tal que el primer elemento del arco e_i coincide con el segundo de e_{i-1} y el segundo elemento de e_i con el primero de e_{i+1} $i = 2, \dots, k-1$.

- Un *circuito/ciclo orientado* en un grafo dirigido es un recorrido/camino orientado que comienza y termina en el mismo vértice.

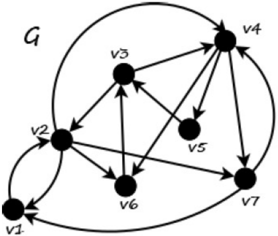
Digrafos

- Un *recorrido/camino orientado* en un grafo dirigido es una sucesión de arcos $e_1 e_2 \dots e_k$ tal que el primer elemento del arco e_i coincide con el segundo de e_{i-1} y el segundo elemento de e_i con el primero de e_{i+1} $i = 2, \dots, k-1$.

- Un *circuito/ciclo orientado* en un grafo dirigido es un recorrido/camino orientado que comienza y termina en el mismo vértice.

- Un digrafo se dice *fuertemente conexo* si para todo par de vértices u, v existen caminos orientados de u a v y de v a u.

Digrafos



Es fuertemente conexo

$P_1 = v_1 v_2 v_4 v_5 v_3$ es camino orientado

$P_2 = v_2 v_3 v_4$ NO es camino orientado

$C_1 = v_1 v_2 v_4 v_7 v_1$ es ciclo orientado

$C_2 = v_2 v_1 v_7 v_2$ NO es ciclo orientado