Recorrido Mínimo Uno a Todos

Técnicas de Diseño de Algoritmos

FCEyN UBA

Mayo 2024

Recorrido mínimo

Problema

Sea $G = (V, E)$ un (di)grafo con una función de costo para las aristas $c\colon E \to \mathbb{R}$, y v un vértice de G. Para todo $w \in V$, encontrar la mínima suma del costo de las aristas de un recorrido desde v a w.

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos:

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos:

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos: **Dijkstra** $\mathcal{O}(|V| + |E| log(|V|))$ o $(|V|^2)$

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos: **Dijkstra** $\mathcal{O}(|V| + |E| log(|V|))$ o $(|V|^2)$
- *Puede* tener ciclos negativos:

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos: **Dijkstra** $\mathcal{O}(|V| + |E| log(|V|))$ o $(|V|^2)$
- *Puede* tener ciclos negativos: **Bellman-Ford** $\mathcal{O}(|V| * |E|)$

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos: **Dijkstra** $\mathcal{O}(|V| + |E| log(|V|))$ o $(|V|^2)$
- *Puede* tener ciclos negativos: **Bellman-Ford** $\mathcal{O}(|V| * |E|)$

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos: **Dijkstra** $\mathcal{O}(|V| + |E| log(|V|))$ o $(|V|^2)$
- *Puede* tener ciclos negativos: **Bellman-Ford** $\mathcal{O}(|V| * |E|)$

Todos a todos

- NO tiene ciclos:

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos: **Dijkstra** $\mathcal{O}(|V| + |E| log(|V|))$ o $(|V|^2)$
- *Puede* tener ciclos negativos: **Bellman-Ford** $\mathcal{O}(|V| * |E|)$

Todos a todos

- NO tiene ciclos: **DAGs** $\mathcal{O}(|V|^2)$

Algoritmos para Recorrido Mínimo

Uno a todos

- Si no tiene pesos: **BFS** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Tiene pesos solo positivos: **Dijkstra** $\mathcal{O}(|V| + |E|log(|V|))$ o $(|V|^2)$
- *Puede* tener ciclos negativos: **Bellman-Ford** $\mathcal{O}(|V| * |E|)$

Todos a todos

- NO tiene ciclos: **DAGs** $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Caso general: **Floyd-Warshall** $\mathcal{O}(|V|^3)$

Joaquín y los Monstruos

Problema

Joaquín estaba aburrido en la clase de TDA, así que se puso a programar un juego. Quiere hacer que el jugador pase por distintos mundos pasando por portales unidireccionales, matando los monstruos de los mundos por los que pasa. Cada portal i por el que logra pasar le da $p_i \in \mathbb{R}$ puntos. El objetivo del juego es llegar desde el mundo m_1 hasta el mundo m_n con la mayor cantidad de puntos posible.

A Joaco le preocupa que el juego esté balanceado, así que quiere saber cuál es la máxima cantidad de puntos que puede generar un jugador dada la cantidad de mundos, los portales que hay, y cuántos puntos da cada portal. Además, quiere saber cuál es la mínima cantidad de portales que podría estar tomando el jugador que hiciese la máxima cantidad de puntos posible.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Empecemos con el modelado:

- Tenemos mundos que se conectan entre otros a través de portales, donde cada portal tiene un puntaje asignado ¿Cómo podemos modelar el problema?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Empecemos con el modelado:

- Tenemos mundos que se conectan entre otros a través de portales, donde cada portal tiene un puntaje asignado ¿Cómo podemos modelar el problema?
- Armamos un digrafo G donde los nodos son los mundos, los ejes dirigidos los portales que llevan de un mundo a otro, y los pesos de las aristas son el puntaje del portal.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Algunas consideraciones:

- ¿Qué sería una partida desde el punto de vista del grafo?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Algunas consideraciones:

- ¿Qué sería una partida desde el punto de vista del grafo? **Un recorrido R que empieza desde el nodo m_1 y termina en el m_n.**

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Algunas consideraciones:

- ¿Qué sería una partida desde el punto de vista del grafo? **Un recorrido R que empieza desde el nodo m_1 y termina en el m_n.**
- Para el resto del problema asumamos que no hay ejes salientes de m_n (¿Por qué es esto válido?).

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Algunas consideraciones:

- ¿Qué sería una partida desde el punto de vista del grafo? **Un recorrido R que empieza desde el nodo m_1 y termina en el m_n.**
- Para el resto del problema asumamos que no hay ejes salientes de m_n (¿Por qué es esto válido?).
- ¿Hay alguna cota para el máximo puntaje?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Algunas consideraciones:

- ¿Qué sería una partida desde el punto de vista del grafo? **Un recorrido R que empieza desde el nodo m_1 y termina en el m_n.**
- Para el resto del problema asumamos que no hay ejes salientes de m_n (¿Por qué es esto válido?).
- ¿Hay alguna cota para el máximo puntaje? **Depende de si existe un ciclo C de longitud positiva alcanzable por m_1 y que luego alcanza m_n.**

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Algunas consideraciones:

- ¿Qué sería una partida desde el punto de vista del grafo? **Un recorrido R que empieza desde el nodo m_1 y termina en el m_n.**
- Para el resto del problema asumamos que no hay ejes salientes de m_n (¿Por qué es esto válido?).
- ¿Hay alguna cota para el máximo puntaje? **Depende de si existe un ciclo C de longitud positiva alcanzable por m_1 y que luego alcanza m_n.** Lo tenemos que demostrar.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- ¿Cómo podemos hacer ahora para resolver un problema de recorrido máximo?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- ¿Cómo podemos hacer ahora para resolver un problema de recorrido máximo?
- ¡Si multiplicamos todos los pesos por -1 lo convertimos en un problema de recorrido mínimo!

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- ¿Cómo podemos hacer ahora para resolver un problema de recorrido máximo?
- ¡Si multiplicamos todos los pesos por -1 lo convertimos en un problema de recorrido mínimo!
- Además los "ciclos positivos" pasan a ser ciclos negativos.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- ¿Cómo podemos hacer ahora para resolver un problema de recorrido máximo?
- ¡Si multiplicamos todos los pesos por -1 lo convertimos en un problema de recorrido mínimo!
- Además los "ciclos positivos" pasan a ser ciclos negativos.
- ¿Esto ya se parece más a un problema que podemos resolver, no?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- No del todo, porque a nosotros solo nos importan los ciclos negativos que están en medio de un recorrido de m_1 a m_n, y no sabemos cómo detectar solamente estos casos.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- No del todo, porque a nosotros solo nos importan los ciclos negativos que están en medio de un recorrido de m_1 a m_n, y no sabemos cómo detectar solamente estos casos.
- ¿Cómo lo podemos solucionar?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- No del todo, porque a nosotros solo nos importan los ciclos negativos que están en medio de un recorrido de m_1 a m_n, y no sabemos cómo detectar solamente estos casos.
- ¿Cómo lo podemos solucionar?
- Necesitamos olvidarnos la parte de que nos ciclos "alcancen a m_n", para ello lo que podemos hacer es borrar todos los nodos que no alcazan a m_n y ya. (¿Por qué?)

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

- No del todo, porque a nosotros solo nos importan los ciclos negativos que están en medio de un recorrido de m_1 a m_n, y no sabemos cómo detectar solamente estos casos.
- ¿Cómo lo podemos solucionar?
- Necesitamos olvidarnos la parte de que nos ciclos “alcancen a m_n”, para ello lo que podemos hacer es borrar todos los nodos que no alcazan a m_n y ya. (¿Por qué?)
- Para ello alcanza con correr DFS desde m_n en G^t para ver que nodos no son alcanzables y eliminarlos.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Puntaje Máximo

Ahora sí, definamos cómo quedaría el algoritmo:

1. Armamos el modelo.
2. Multiplicamos los pesos de las aristas por -1.
3. Eliminamos todos los nodos que no llegan a m_n mediante DFS.
4. Ejecutamos Bellman-Ford desde m_1, y devolvemos infinito si encuentra un ciclo, y sino el opuesto del valor del recorrido mínimo entre m_1 y m_n.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

- Para empezar, notemos que si el puntaje máximo no fuera acotado, no tendría sentido buscar el recorrido más corto que lo alcance.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

- Para empezar, notemos que si el puntaje máximo no fuera acotado, no tendría sentido buscar el recorrido más corto que lo alcance.
- ¿Cómo podemos hacer para decidir cuán largo es el recorrido mínimo más corto?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

- Para empezar, notemos que si el puntaje máximo no fuera acotado, no tendría sentido buscar el recorrido más corto que lo alcance.
- ¿Cómo podemos hacer para decidir cuán largo es el recorrido mínimo más corto?
- Si todas las aristas del grafo pertenecieran a un recorrido mínimo sería un problema más fácil, ¿no?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

- Para empezar, notemos que si el puntaje máximo no fuera acotado, no tendría sentido buscar el recorrido más corto que lo alcance.
- ¿Cómo podemos hacer para decidir cuán largo es el recorrido mínimo más corto?
- Si todas las aristas del grafo pertenecieran a un recorrido mínimo sería un problema más fácil, ¿no?
- Esto no lo podemos garantizar, pero tal vez podamos construirnos un nuevo grafo a partir del original que solo contenga las aristas que pertenezcan a algún recorrido mínimo. ¿Cómo?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

Construyámonos el "DAG de recorridos mínimos" de m_1 a m_n en G. Esto es un digrafo acíclico que contiene todas las aristas pertenecientes a un recorrido mínimo entre dichos nodos del grafo. ¿Cómo se construye esto?

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

Construyámonos el "DAG de recorridos mínimos" de m_1 a m_n en G. Esto es un digrafo acíclico que contiene todas las aristas pertenecientes a un recorrido mínimo entre dichos nodos del grafo. ¿Cómo se construye esto?

- Corremos algún algoritmo de recorrido mínimo desde m_1 y guardamos el resultado en un vector "DistanciaDesdem_1"

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

Construyámonos el "DAG de recorridos mínimos" de m_1 a m_n en G. Esto es un digrafo acíclico que contiene todas las aristas pertenecientes a un recorrido mínimo entre dichos nodos del grafo. ¿Cómo se construye esto?

- Corremos algún algoritmo de recorrido mínimo desde m_1 y guardamos el resultado en un vector "DistanciaDesdem_1"
- Lo corremos una segunda vez pero desde m_n en G^t y guardamos el resultado en un vector "DistanciaHastam_n"

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

Construyámonos el "DAG de recorridos mínimos" de m_1 a m_n en G. Esto es un digrafo acíclico que contiene todas las aristas pertenecientes a un recorrido mínimo entre dichos nodos del grafo. ¿Cómo se construye esto?

- Corremos algún algoritmo de recorrido mínimo desde m_1 y guardamos el resultado en un vector "DistanciaDesdem_1"
- Lo corremos una segunda vez pero desde m_n en G^t y guardamos el resultado en un vector "DistanciaHastam_n"
- Para cada arista $(u, v) \in G$, si cumple:

$$\text{DistanciaDesde}m_1[u] + \text{peso}(u, v) + \text{DistanciaHacia}m_n[v] = \text{DistanciaDesde}m_1[m_n],$$

  la agrego al DAG de recorridos mínimos.

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

Finalmente el algoritmo quedaría:

- Construimos el DAG de recorridos mínimos de m_1 a m_n en G
- Corremos BFS en el DAG desde m_1, y la altura de m_n va a ser el largo del recorrido mínimo más corto

Joaquín y los Monstruos - Resolución Recorrido Más Corto

Finalmente el algoritmo quedaría:

- Construimos el DAG de recorridos mínimos de m_1 a m_n en G
- Corremos BFS en el DAG desde m_1, y la altura de m_n va a ser el largo del recorrido mínimo más corto

Solo quedaría demostrar que este algoritmo es correcto.

Notas

- El objetivo de los problemas es **abstraer una propiedad y traducirla a grafos** para resolverlos.
- Luego armamos un algoritmo que resuelva el problema. Para esto podemos usar **algoritmos ya conocidos**, calculando bien la complejidad en función del tamaño del modelo.
  - ! Nuestro algoritmo debe ser probado correcto, es decir, debemos ver que efectivamente resuelve el problema.
  - ! Por eso está bueno **evitar modificar los algoritmos que sabemos que funcionan**. De lo contrario deberíamos volver a demostrar su correctitud para garantizar que sigan haciendo lo que nos prometen.