Introducción a Teoría de Grafos

Ayelén Dinkel - Fernando Nicolás Frassia Ferrari

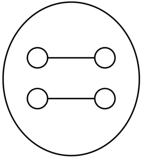
2do Cuatrimestre 2024, TN

👀 La propiedad parece verdadera o falsa?

Ejercicio

Demostrar o dar un contraejemplo: Si todos los vértices tienen grado mayor a cero, el grafo es conexo.

Recordemos: grafo conexo = existe camino entre todo par de vértices. **Falso**, contraejemplo:



¿Qué hubiera pasado si intentábamos demostrarlo?

🛠 Herramientas para demostrar

Recordemos las herramientas que tenemos para demostrar

- Inducción
- Absurdo
- Construcción

🚶 Caminos

Ejercicio

Sean P y Q dos caminos distintos de un grafo G que unen un vértice v con otro w. Demostrar en forma directa que G tiene un ciclo cuyas aristas pertenecen a P o Q. **Ayuda:** denotar $P = v_0, \ldots, v_p$ y $Q = w_0, \ldots, w_q$ con $v_0 = w_0 = v$ y $v_p = w_q = w$. Definir explícitamente cuáles son los subcaminos de P y Q cuya unión forman un ciclo.

¿Qué tenemos?

🚶 Caminos

- Tenemos P y Q caminos distintos que comienzan en v y terminan en w

$$P = \underset{\overset{\shortparallel}{v}}{v_1}, \ldots, \underset{\overset{\shortparallel}{w}}{v_p} \quad y \quad Q = \underset{\overset{\shortparallel}{v}}{w_1}, \ldots, \underset{\overset{\shortparallel}{w}}{w_q}$$

Como son caminos distintos existe al menos un vertice distinto.

Tomo el menor i tq $v_i \neq w_i$

$\Rightarrow$ lo que decimos es que $v_{i-1} = w_{i-1}$ es decir, los anteriores a i son iguales.

Lo puedo asegurar que pasa esto Porque $v_0 = w_0$ entonces sabemos que al menos esos cumplen.

Caminos

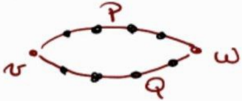
- Por otro lado tomamos el menor j tq

$v_j = w_k$ con $i \le j \le p$
$i \le k \le q$

es decir tomo el primero donde vuelven a ser iguales.

Lo puedo asegurar que pasa esto porque $v_p = w_q = w$

- lo que digo en ambos textos en rojo es que en un caso extremo pasa que P y Q solo comparten los extremos



🚶 Caminos

- Volviendo a lo escrito en negro tenemos $v_{i-1} = w_{i-1}$

$$v_i \neq w_i$$

$$\exists \begin{array}{l} i \le j \le p \\ i \le k \le q \end{array} \text{ tq } v_j = w_k$$

entonces armo el ciclo.

$$v_{i-1} \,;\, v_i \,, \dots ,\, v_j = w_k \,, \dots ,\, w_i \,;\, w_{i-1}$$

🚶 Caminos

→ Ahora nos falta asegurar que es un ciclo

es decir tiene al menos 3 vertices.

$$v_{i-1} ; \underbrace{v_i , \dots , v_j}_{\text{que hay al menos un nodo ACA.}} = \underbrace{w_k , \dots , w_i}_{\text{o ACA}} ; w_{i-1}$$

¿Por qué tengo que asegurar esto?

Porque veamos en donde se mueve i y k

$i \le j \le p$

Puede pasar $i = j$

$$v_{i-1} ; \underbrace{v_i , \dots , v_j}_{\text{entonces no hay nodos ACA.}}$$

$i \le k \le q$

Puede pasar $i = k$

$$\underbrace{w_k , \dots , w_i}_{\text{entonces no hay nadie}} ; w_{i-1}$$

• Si $i = j \wedge i = k$

$v_i = v_j = w_k = w_i$

$\Rightarrow v_i = w_i$ Abs!

Porque tome i tq $v_i \neq w_i$

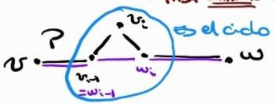
no es un ciclo

🚶 Caminos

• entonces

↳ si $i \neq j$ ✓ listo sé que existe un vértice en P y no Q

✓ PASA mínimo esto



es el ciclo.

→ si $i = j \Rightarrow i \neq k$

✓ PASA mínimo esto

es el ciclo

• Son el ciclo más chico, estoy asegurando que lo mínimo PASA. ie, aseguro que hay un ciclo.

Grados

Para pensar

Sea G_n un grafo *conexo* de n vértices que tiene un único par de vértices de igual grado (notar que $n \geq 2$).
Demostrar que G_n tiene al menos un vértice *universal*, y que si $n \geq 3$ entonces tal vértice es único.

Recordemos: Vértice universal = $d(v) = n - 1$

Grados

• Si $n=2$ el unico grafo conexo es 

Veamos $\left.\begin{array}{l} d(v)=1 \\ d(w)=1 \end{array}\right\}$ tiene un par de vertices con igual grado

tiene al menos un vertice universal, en este caso ambos son universales $1 = d(v) = d(w) = n-1 = 2-1 = 1$.

• Si $n \geq 3$. Sea G_n grafo conexo con solo un par de vertices con igual grado.

qvq → a) tiene al menos un vertice universal

→ b) es unico.

Grados

a) supongo que no tiene vertice universal

es decir $\forall v \in V(G)$ $d(v) \neq n-1$

Como G es conexo sé que $\forall v \in V(G)$ $d(v) \neq 0$

Juntando, nos queda que $\forall v \in V(G)$ $\boxed{1 \leq d(v) \leq n-2}$ (1)

Por otro lado sabemos que G tiene solo dos vertices con igual grado, es decir todos los demas vertices tienen grados distintos.

Grados

→ llamo $v_1, \dots, v_n$ los n vertices del grafo.

supongo spdg que $d(v_n) = d(v_i) = i$ para algun i

entonces nos queda ver que grados tienen

$v_1, \dots, v_{n-1}$ y vimos que tienen que ser todos

distintos. Por (1) sabemos que los grados van entre

1 y $n-2$ entonces

$$\left.\begin{matrix} d(v_1) \\ \vdots \\ d(v_{n-1}) \end{matrix}\right\} \text{necesito } n-1 \text{ grados} \quad y \quad \left.\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n-2 \end{matrix}\right\} \text{tengo } n-2 \text{ posibilidades.}$$

tendria un vertice al que no sé que grado ponerle.

Abs!

Grados

- El absurdo vino de suponer que no existe un vertice universal

quiere decir por lo tanto. → ∴ Probamos que tiene Al menos un vertice universal.

b) Ahora queremos ver que es unico. (repetimos la idea de la demostracion)

⇝ Pueden intentar escribirlo antes de ver la siguiente diapo.

Grados

- Suponemos que no es unico

  $\Rightarrow$ existen 2 vértices universales.

  (Pensar: ¿en este ejercicio pueden existir 3?)

Llamo $v_1, \ldots, v_n$ a los vertices de G

Supongo spdg que $\underbrace{d(v_{n-1}) = d(v_n) = n-1}_{\text{son los 2 vertices universales}}$

(sin perdida de generalidad)

Por Hipotesis del ejercicio solo existen 2 vertices con igual grado entonces tienen que ser los universales que dijimos recien. Entonces todos los demas vertices tienen grado $\neq$

$v_1, \ldots, v_{n-2} \rightsquigarrow (n-2)$ vertices con grado $\neq$

¿que grado puede tener cada uno?

Grados

¿Puede tener grado 1? $\rightsquigarrow$ no! xq v_n y v_{n-1} son vecinos con todos, entonces al menos tienen grado 2.

$\Rightarrow \forall v \in V(G) \setminus \{v_n, v_{n-1}\}$ $\quad \underbrace{2 \le d(v) \le n-2}_{n-3 \text{ posibilidades.}}$

Abs! con $(n-3)$ posibilidades y $(n-2)$ vertices tengo un vertice sin grado.

$\therefore$ el vertice universal es unico! $\blacksquare$

🌡 Grados

📝 Para seguir practicando

Sea H_n un grafo *no conexo* de n vértices que tiene un único par de vértices de igual grado. Demostrar que H_n tiene al menos un vértice *aislado*, y que si $n \geq 3$ entonces tal vértice es único.

↗️ Digrafo

Ejercicio

Demostrar que todo digrafo D satisface:

$$\sum_{v \in V(D)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(D)} d_{out}(v) = |E(D)|$$

↗️ Digrafo

Por inducción en cantidad de aristas ($|E(D)|$):

- Caso base, Si $|E(D)| = 0$ qvq

$$\sum_{v \in V(D)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(D)} d_{out}(v) = |E(D)| = 0$$

Las dos sumas valen 0 porque no hay aristas, todos los nodos tienen grado de entrada 0 y grado de salida 0, entonces vale. ✔️

↗️ Digrafo

- Paso inductivo
  - Cuál es nuestra hipótesis inductiva? que si $|E(D)|$ = n-1 vale

$$\sum_{v \in V(D)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(D)} d_{out}(v) = |E(D)|$$

- qvq vale para $|E(D)|$ = n

↗️ Digrafo

- Llamemos (s, t) a una arista en $E(D)$ y sin pérdida de generalidad nombremos s a su nodo de salida y t a su nodo de entrada. Y, por comodidad de notación, llamemos $D' = (V(D), E(D) \backslash \{(s, t)\})$.
  Obs: $V(D') = V(D)$
- $|E(D)| = |E(D') \cup \{(s, t)\}| = |E(D')| + |(s, t)| = |E(D')| + 1$.

Digrafo

$$\sum_{v\in V(D)} d_{in}(v) = \sum_{v\in V(D)\setminus\{t\}} d_{in}(v) + d_{in}(t_D)$$

$$= \underbrace{\sum_{v\in V(D)\setminus\{t\}} d_{in}(v) + d_{in}(t_{D'})}_{V(D) \text{ con } E(D') := V(D')} + 1$$

notación

$$= \underbrace{\sum_{v\in V(D')} d_{in}(v)}_{n-1} + 1 = n-1+1 = n$$

↗️ Digrafo

$$\sum_{v\in V(D)} d_{out}(v) = \sum_{v\in V(D)\setminus\{s\}} d_{out}(v) + d_{out}(s_D)$$

$$= \underbrace{\sum_{v\in V(D)\setminus\{s\}} d_{out}(v) + d_{out}(s_{D'})}_{V(D)\ \underline{\text{con } E(D')} := V(D')} + 1$$

↳ notación

$$= \underbrace{\sum_{v\in V(D')} d_{out}(v)}_{n-1} + 1 = n-1+1 = n$$

↗️ Digrafo

$$\Rightarrow \sum_{v \in V(D)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(D)} d_{out}(v) = n = |E(D)| \quad \checkmark$$

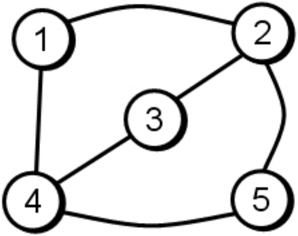
😍 Sale un break?

Figure: A descansar las neuronas

🤔 Representación

Pregunta: Cómo representamos grafos en memoria?

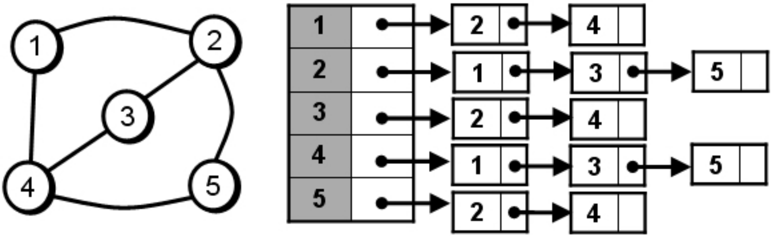
Matriz de adyacencia



M	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

- Complejidad espacial: $\Theta(n^2)$
- Útil para grafos: densos.
- Tip: Como es simétrica se puede guardar la mitad superior para ahorrar espacio.

🧮 Lista de adyacencia



- Complejidad espacial: $\Theta(n + m)$
- Útil para grafos: esparsos (o ralos).

Eligiendo representaciones

Problema

Discutir las ventajas y desventajas en cuanto a la complejidad temporal y espacial de las siguientes implementaciones de un grafo G, de acuerdo a las siguientes operaciones:

- Determinar si dos vértices son adyacentes.
- Recorrer y/o procesar el vecindario N(v) de un vértice.
- Remover un vértice y todas sus aristas.

🔗 Conexo

🔗 Conexo

Sea $G = (V, E)$ un grafo, si G es *conexo* entonces $m \geq n$-1, con m = |E| y n = |V|.

🔗 Demostración

Por inducción global en la cantidad de vértices n:
Sea $G = (V, E)$ un grafo con $n = |V|$ y $m = |E|$.
qvq P(n): Si G es conexo $\implies m \geq n - 1$.

- Caso base: P(0)
  qvq si G es conexo $\implies m \geq n$ - 1
  Veamos, G es conexo trivialmente, entonces tengo que probar el consecuente. Luego, como n = 0 no hay vértices, por ende tampoco hay aristas, entonces m = 0 también. Y como se cumple que 0 $\geq$ 0 - 1, entonces vale P(0). ✔️

🔗 Demostración

- Paso inductivo: qvq P(0) $\wedge$ ... $\wedge$ P(n) $\implies$ P($n+1$)
  Sea G=(V,E) un grafo / |V| = n+1 y |E| = m:
  qvq P($n+1$): Si G es conexo $\implies$ $m \geq n$.
  1. Caso 1, G no es conexo:
     El consecuente de P(n+1) vale por falso antecedente, entonces vale P(n+1). ✔️
  2. Caso 2, G es conexo:
     Sea u un vértice cualquiera de G y sea d su grado. Miro el subgrafo inducido G'=(V $\setminus$ {u}, E') y nombro m' = |E'|
     Ahora, como G era conexo, G' está formado como máximo por d componentes conexas: $\{c_1, ..., c_c\}$ / $c \leq d$.
     Probemos eso:

Demostración

Supongamos que quedan más de *d* componentes conexas. Hay por lo menos una componente conexa que no tiene arista hacia el vértice que sacamos. Llamemos C a esta componente, y *v* al vértice que sacamos. Como G es conexo, los vértices de *C* tienen un camino a v en G. Como ningún vertice de C es adyacente a *v*, el camino debe alcanzar un vecino de *v* antes de alcanzar *v*. Este vecino debe pertenecer a alguna componente conexa de G’. La misma no puede ser C, ya que sino habría un vértice adyacente a *v* en C. Entonces pertenece a otra componente C’, y entonces C tiene un camino a C’ en G que no pasa por *v*. Este camino existe también en G’, y entonces en realidad C y C’ eran la misma componente conexa. Absurdo. Entonces G’ está formado por a lo sumo d componentes conexas.

Demostración

Habiendo probado esto, sigamos adelante.
Primero, observemos que m = m' + d.
Observemos también que m' = |E(c_1)| + ... + |E(c_c)|
Renombro cada |E(c_i)| por m_i: m' = m_1 + ... + m_c
Como cada componente conexa c_i tiene entre 0 y n nodos, podemos usar la hipótesis inductiva en cada una de ellas (por eso la inducción global). Y como además son todas conexas podemos asegurar que $m_i \geq n_i - 1 \; \forall$ i.

$\implies$ m' = m_1 + ... + $m_c \geq n_1 - 1$ + ... + $n_c - 1$
$\implies$ $m' \geq n_1$ + ... + $n_c - c$ (junto los c unos)
$\implies$ $m' \geq n - c$ (porque estoy sumando los vértices de G')
$\implies$ $m' \geq n - c \geq n - d$ (por $d \geq c$)
$\implies$ $m' + d \geq n$ (sumo d a ambos lados)
$\implies$ $m \geq n$ (porque observamos antes que m = m' + d) ✔

Bipartito

Ejercicio

Probar que en un grafo bipartito todo camino de longitud par comienza y termina en nodos de la misma partición.

Recordemos: Grafo Bipartito = sus nodos se pueden separar en dos conjuntos disjuntos, de manera que sus aristas no pueden relacionar nodos de un mismo conjunto.

Bipartito

- Supongo que no vale, es decir: supongo que existe un grafo bipartito G donde no todo camino de longitud par comienza y termina en nodos de la misma partición.
- Entonces existe c camino en G de longitud par que comienza en una partición y termina en otra.
- Es decir, $\exists$ c / c = $< (u_1, u_2), ..., (u_{k-1}, u_k) >$, donde $u_1 \in$ partición $P_1 \wedge u_k \in$ partición $P_2 \wedge P_1 \neq P_2 \wedge |c|$ es par.

Bipartito

- Como las aristas siempre cruzan de una partición a la otra, si recorro c, cada 2 aristas estoy en la misma partición (porque fui y volví).
- Ahora, como $|c|$ es par, $\exists$ t / $|c|$ = 2t
- Entonces, recorrer todo el camino c equivale a esto de ir y volver t veces.
- En particular, en la última arista vuelvo a P_1, entonces $u_k \in P_1$.
- Absurdo, porque dijimos inicialmente que $u_k \in P_2 \wedge P_1 \neq P_2$. El absurdo provino de suponer que este camino existía.

Libre de Triángulos

Problema

Un grafo se dice *libre de triángulos* si no contiene un K_3.
Sea G = (V,E) un grafo libre de triángulos tal que |V| = 2n, demostrar que |E| $\leq n^2$.

🔺 Demostración

Por inducción en el tamaño de n:
Sea $G = (V, E)$ un grafo libre de triángulos con $|V| = 2n$.
qvq P(n) = |E| $\leq n^2$

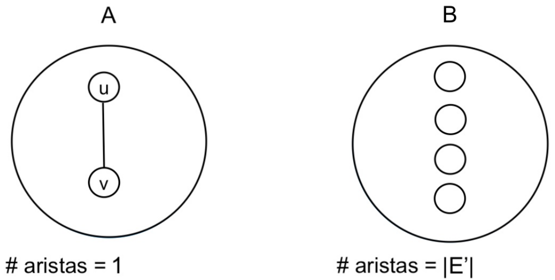
- Caso base: P(0)
  |V| = 0 $\wedge$ |E| = 0 $\implies$ 0 = |E| $\leq n^2$ = 0. ✔️

Demostración

- Paso Inductivo: qvq P(n) $\implies$ P(n+1)
  1. Sea G = (V,E) libre de triángulos tal que |V| = 2(n+1) = 2n+2. qvq |E| $\leq (n+1)^2$.
  2. Como G tiene al menos dos nodos, tomo dos nodos *u* y *v* que sean vecinos (notar que si no existen *u* y *v* vecinos, |E| $\leq (n+1)^2$ vale trivialmente).
  3. Particiono los vértices de G en el conjunto A que sólo contiene a *u* y *v* y el conjunto B que contiene a todos los demás vértices.

Demostración

La partición se ve algo así, A tiene 2 vértices y B tiene 2n vértices. No dibujé las aristas que conectan A y B para que pensemos qué pinta tienen.



Notemos que |E| = 1 + |aristas(A,B)| + |E'|
Cuántas aristas puede haber como máximo entre A y B?

Demostración

- Intuición: puede haber como máximo 2n.
- qvq |aristas(A,B)| $\leq$ 2n.
- Demostrémoslo por absurdo:
- Supongo |aristas(A,B)| > 2n.
- Como en B hay 2n vértices y de B salen más de 2n aristas, entonces de algún vértice w de B salen 2 aristas hacia A. Y como en A sólo existen u y v, entonces w es vecino de u y de v a la vez.
- Pero u y v también son vecinos, entonces eso formaría el triángulo (u,v,w). Y dijimos inicialmente que G es libre de triángulos.
- Absurdo. Entonces |aristas(A,B)| $\leq$ 2n.

Demostración

- Con todo esto en mente podemos decir que:
- |E| = 1 + |aristas(A,B)| + |E'|
- y como |aristas(A,B)| $\leq$ 2n tenemos que:
- |E| $\leq$ 1 + 2n + |E'|
- Ahora, qué podemos decir de |E'|?
- E' son las aristas de B, que tiene 2n nodos, y es libre de triángulos por ser subgrafo de G (que es libre de triángulos). Entonces, por hipótesis inductiva: vale P(n) para B. Entonces |E'| $\leq n^2$.
- Con esto último podemos afirmar que:
- |E| $\leq$ 1 + 2n + n^2 = $(n+1)^2$ ✔️
- Finalmente, como demostramos el caso base y el paso inductivo, por inducción vale la propiedad que queríamos demostrar. ✔️


🙌 ¡Gracias!