Repaso de demostraciones

Brandwein Eric, Ferreyra Tania

Agosto 2024

¿Qué es una demo?

[1] Ejemplo: https://lean-lang.org/

¿Qué es una demo?

Un algoritmo.

[1] Ejemplo: https://lean-lang.org/

¿Qué es una demo?

Un algoritmo.

¿Qué operaciones hace?

[1] Ejemplo: https://lean-lang.org/

¿Qué es una demo?

Un algoritmo.

¿Qué operaciones hace? Combinar definiciones y teoremas para obtener nuevos teoremas.
¡Existen **demostradores automáticos** que leen demostraciones como programas![1]

```
theorem t1 : p → (q → p) :=
    fun hp : p =>
    fun hq : q =>
    show p from hp
```

[1] Ejemplo: https://lean-lang.org/

¿Qué es una demo?

Lemma 2. Restricted Subset Sum *is NP-complete.*

Proof. We present a reduction from a variant of Restricted Exact Cover by 3-Sets where each element appears in exactly three sets. Recall that in Restricted Exact Cover by 3-Sets, the input consists of a set $\mathcal{T}$ consisting of 3-element subsets of $\{1, \dots, 3n\}$ such that each $j \in \{1, \dots, 3n\}$ appears in exactly three sets from $\mathcal{T}$, and the question is whether there exists a subset $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ such that each element from $\{1, \dots, 3n\}$ appears in exactly one set from $\mathcal{T}'$. This variant of Restricted Exact Cover by 3-Sets is well-known to be NP-hard [23].

Our reduction is almost identical the original hardness reduction for Subset Sum by Karp [29], only that we reduce from Restricted Exact Cover by 3-Sets instead of the more general Exact Cover: Let $\mathcal{T}$ be an instance of Restricted Exact Cover by 3-Sets. For each 3-element set $T \in \mathcal{T}$, a number $a_T := \sum_{j \in T} (3n+1)^j$ is added to the Restricted Subset Sum instance. In this way, the constructed instance of Restricted Subset Sum is $\mathcal{A} := \{a_T : T \in \mathcal{T}\}$. Note that $a_T \in \widetilde{\mathcal{A}}_n$ for every $T \in \mathcal{T}$. Further, since each $j \in \{1, \dots, 3n\}$ appears in exactly three sets from $\mathcal{T}$, we have $\sum_{T \in \mathcal{T}} a_T = 3 \sum_{j=1}^{3n} (3n+1)^j = 3B_n$. Below we prove the correctness of this construction.

Suppose there is a solution $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ for the Restricted Exact Cover by 3-Sets instance. Then $|\mathcal{T}'| = n$ and we have $\sum_{T \in \mathcal{T}} a_T = \sum_{\ell=1}^{3n} (3n+1)^\ell = B_n$. Conversely, suppose there is a solution $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$ with $|\mathcal{A}^*| = n$ for the Restricted Subset Sum instance. Let $\mathcal{T}^* := \{T : a_T \in \mathcal{A}^*\}$. Since each term $(3n+1)^j$ appears only $3 < 3n+1$ times, Lemma 1 implies that the only way for some numbers from $\mathcal{A}$ to add up to $B_n = \sum_{j=1}^{3n} (3n+1)^j$ is that each term $(3n+1)^j$ appears in exactly one $a_T \in \mathcal{A}^*$. In other words, for each $j \in \{1, \dots, 3n\}$, there is exactly one $T \in \mathcal{T}^*$ with $j \in T$. $\square$

¿Esto también es una demo?

¿Qué es una demo?

Lemma 2. Restricted Subset Sum *is NP-complete.*

Proof. We present a reduction from a variant of Restricted Exact Cover by 3-Sets where each element appears in exactly three sets. Recall that in Restricted Exact Cover by 3-Sets, the input consists of a set $\mathcal{T}$ consisting of 3-element subsets of $\{1, \ldots, 3n\}$ such that each $j \in \{1, \ldots, 3n\}$ appears in exactly three sets from $\mathcal{T}$, and the question is whether there exists a subset $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ such that each element from $\{1, \ldots, 3n\}$ appears in exactly one set from $\mathcal{T}'$. This variant of Restricted Exact Cover by 3-Sets is well-known to be NP-hard [23].

Our reduction is almost identical the original hardness reduction for Subset Sum by Karp [29], only that we reduce from Restricted Exact Cover by 3-Sets instead of the more general Exact Cover: Let $\mathcal{T}$ be an instance of Restricted Exact Cover by 3-Sets. For each 3-element set $T \in \mathcal{T}$, a number $a_T := \sum_{j \in T} (3n+1)^j$ is added to the Restricted Subset Sum instance. In this way, the constructed instance of Restricted Subset Sum is $\mathcal{A} := \{a_T : T \in \mathcal{T}\}$. Note that $a_T \in \widetilde{\mathcal{A}}_n$ for every $T \in \mathcal{T}$. Further, since each $j \in \{1, \ldots, 3n\}$ appears in exactly three sets from $\mathcal{T}$, we have $\sum_{T \in \mathcal{T}} a_T = 3 \sum_{j=1}^{3n} (3n+1)^j = 3B_n$. Below we prove the correctness of this construction.

Suppose there is a solution $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ for the Restricted Exact Cover by 3-Sets instance. Then $|\mathcal{T}'| = n$ and we have $\sum_{T \in \mathcal{T}} a_T = \sum_{\ell=1}^{3n} (3n+1)^\ell = B_n$. Conversely, suppose there is a solution $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$ with $|\mathcal{A}^*| = n$ for the Restricted Subset Sum instance. Let $\mathcal{T}^* := \{T : a_T \in \mathcal{A}^*\}$. Since each term $(3n+1)^j$ appears only $3 < 3n+1$ times, Lemma 1 implies that the only way for some numbers from $\mathcal{A}$ to add up to $B_n = \sum_{j=1}^{3n} (3n+1)^j$ is that each term $(3n+1)^j$ appears in exactly one $a_T \in \mathcal{A}^*$. In other words, for each $j \in \{1, \ldots, 3n\}$, there is exactly one $T \in \mathcal{T}^*$ with $j \in T$. $\square$

¿Esto también es una demo? **¡Sí!**

¿Qué es una demo?

Lemma 2. Restricted Subset Sum *is NP-complete.*

Proof. We present a reduction from a variant of Restricted Exact Cover by 3-Sets where each element appears in exactly three sets. Recall that in Restricted Exact Cover by 3-Sets, the input consists of a set $\mathcal{T}$ consisting of 3-element subsets of $\{1, \ldots, 3n\}$ such that each $j \in \{1, \ldots, 3n\}$ appears in exactly three sets from $\mathcal{T}$, and the question is whether there exists a subset $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ such that each element from $\{1, \ldots, 3n\}$ appears in exactly one set from $\mathcal{T}'$. This variant of Restricted Exact Cover by 3-Sets is well-known to be NP-hard [23].

Our reduction is almost identical the original hardness reduction for Subset Sum by Karp [29], only that we reduce from Restricted Exact Cover by 3-Sets instead of the more general Exact Cover: Let $\mathcal{T}$ be an instance of Restricted Exact Cover by 3-Sets. For each 3-element set $T \in \mathcal{T}$, a number $a_T := \sum_{j \in T}(3n+1)^j$ is added to the Restricted Subset Sum instance. In this way, the constructed instance of Restricted Subset Sum is $\mathcal{A} := \{a_T : T \in \mathcal{T}\}$. Note that $a_T \in \widetilde{\mathcal{A}}_n$ for every $T \in \mathcal{T}$. Further, since each $j \in \{1, \ldots, 3n\}$ appears in exactly three sets from $\mathcal{T}$, we have $\sum_{T \in \mathcal{T}} a_T = 3\sum_{j=1}^{3n}(3n+1)^j = 3B_n$. Below we prove the correctness of this construction.

Suppose there is a solution $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ for the Restricted Exact Cover by 3-Sets instance. Then $|\mathcal{T}'| = n$ and we have $\sum_{T \in \mathcal{T}} a_T = \sum_{\ell=1}^{3n}(3n+1)^\ell = B_n$. Conversely, suppose there is a solution $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}$ with $|\mathcal{A}^*| = n$ for the Restricted Subset Sum instance. Let $\mathcal{T}^* := \{T : a_T \in \mathcal{A}^*\}$. Since each term $(3n+1)^j$ appears only $3 < 3n+1$ times, Lemma 1 implies that the only way for some numbers from $\mathcal{A}$ to add up to $B_n = \sum_{j=1}^{3n}(3n+1)^j$ is that each term $(3n+1)^j$ appears in exactly one $a_T \in \mathcal{A}^*$. In other words, for each $j \in \{1, \ldots, 3n\}$, there is exactly one $T \in \mathcal{T}^*$ with $j \in T$. $\square$

¿Esto también es una demo? **¡Sí!** ¿Es un algoritmo?

Definiciones

Definición

Forma de introducir notación nueva para algún objeto matemático. Ejemplo: "Un *número racional* es un par de la forma (a, b) donde a y b son números enteros."

Axioma

Afirmación que tomamos como válida sin demostrar. Ejemplo: El axioma de inducción.

Teorema/Lema/Proposición/Corolario/etc.

Afirmaciones demostradas. Ejemplo: $2 + 3 = 5$

Estrategias de demostración

- Directa
- Por Casos
- Contradicción/Absurdo
- Contrarrecíproco
- Construcción
- Inducción
- Contraejemplos
- etc. etc. etc.

Demostración directa

Secuencia de implicaciones bien pava tipo
$A \implies B \implies C \implies \cdots \implies Z$.

Ejemplo: Demostrar que dos cuadrados perfectos consecutivos difieren en un número impar.

Supongamos que a y b son cuadrados perfectos consecutivos, con $a > b$ (el caso $a < b$ es totalmente análogo). Podemos decir que a y b tienen la forma

$$a = (n+1)^2 \ y \ b = n^2,$$

donde n es algún número entero. Entonces

$$a - b = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

$\square$

Un error más común de lo que creen

Ejemplo: Demostrar que todos los conjuntos tienen todos los elementos iguales.

Sean $x_1, \dots, x_n$ los elementos de un conjunto. Si el conjunto tiene todos los elementos iguales, entonces $x_1 = \cdots = x_n$.
Esto quiere decir que para todo par de elementos x_i y x_j del conjunto, tenemos que $x_i = x_j$.
Tomemos dos elementos cualquiera, x_a y x_b. Por lo visto antes tenemos que $x_a = x_b$. Como tomamos dos elementos cualquiera, esto se cumple para cualquier par de elementos del conjunto, y como tomamos cualquier conjunto, esto vale para todos los conjuntos, que es lo que queríamos probar. $\square$

Esta "demostración" es incorrecta, porque estoy asumiendo lo que quiero probar.

Por casos

Tenemos que demostrar $P \implies Q$, así que partimos P en $P_1, \ldots, P_q$ y probamos $P_i \implies Q$ para todo i entre 1 y q.

Ejemplo: Demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $n(n+1)$ es par.

Como $n \in \mathbb{Z}$, podemos dividir los casos posibles en dos: n es par o n es impar.

i) Si n es par, $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, y entonces $n(n+1) = 2k(2k+1)$, que es un número par, ya que $k(2k+1)$ es un número entero.

ii) Si n es impar, $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$, y entonces $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = (2k+1)(k+1)2$ que es un número par, ya que $(2k+1)(k+1)$ es un número entero.

Como se analizaron todos los casos posibles, se demuestra que $n(n+1)$ es par para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Contradicción/Absurdo

Asumimos que lo que queremos demostrar **no** se cumple y llegamos a algo falso.

Ejemplo: Sea n un entero positivo. Demuestre que si n^2 es par, también lo es n.

Supongamos que n es un entero positivo tal que n^2 es par y que n no es par, es decir, $n = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Entonces

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1$$

$k \in \mathbb{Z} \implies (2k^2 + 2) \in \mathbb{Z}$, entonces la expresión hallada para n^2 indica que el número es impar, sin embargo, esto contradice la hipótesis de que n^2 es par. Se concluye entonces que la suposición de que n no era par debe ser falsa, y por lo tanto n debe ser par. $\square$

Contrarrecíproco

La expresión $P \implies Q$ es equivalente a $\neg Q \implies \neg P$, así que podemos probar la segunda para probar la primera.

Ejemplo: Sea n un entero positivo. Demuestre que si n^2 es par, también lo es n.

Para este ejemplo el contrarrecíproco resulta:

Para n un número entero positivo, si n no es par, entonces n^2 no es par.

Entonces, partiendo de la nueva hipótesis:

$$n \text{ es impar } \implies n = 2k + 1, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 2k+1 \implies n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$$

$k \in \mathbb{Z} \implies (2k^2 + 2) \in \mathbb{Z}$, entonces la expresión hallada para n^2 indica que el número es impar. Así, el contrarrecíproco es verdadero, y por lo tanto también lo es la proposición original. $\square$

Contrarrecíproco: qué NO hacer

Acuérdense: El contrarrecíproco de $P \implies Q$ es $\neg Q \implies \neg P$, **no es** $\neg P \implies \neg Q$.

Ejemplo: Demostrar que si un número natural es compuesto, entonces tiene menos de 2 divisores.

Por contrarrecíproco, vamos a demostrar que si un número natural es primo, entonces tiene al menos 2 divisores.
Por definición, un número primo tiene exactamente dos divisores, y por lo tanto tiene al menos 2. $\square$

Esta "demostración" es incorrecta, porque lo que se demostró no es el contrarrecíproco de la proposición original.

Por Construcción

Para el caso particular en que la proposición hable de existencia de un elemento, bastará con mostrar uno.

Ejemplo: Demostrar que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par e impar a la vez.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Para que f sea par, se debe cumplir que:

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mientras que para que f sea impar, se debe cumplir que:

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si forzamos ambas condiciones, obtenemos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con lo cual la función nula es un ejemplo de función par e impar a la vez, y así el enunciado es verdadero.

□

Inducción

Dada una proposición $P(n)$ que depende de una variable $n \in \mathbb{N}$, podemos demostrar que la proposición es válida para todo n si demostramos que:

1. $P(1)$ es verdadera (caso base).
2. $P(i) \implies P(i+1)$ (paso inductivo).

La definición puede extender a demostrar que una proposición $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{Z}/n \geq a$ cambiando el caso base a $P(a)$.

Inducción

Ejemplo: Demostrar que $2^n \leq (n+1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Caso base: Para $n = 1$ nos queda que $2^n = 2$ y $(n+1)! = 2! = 2$, luego $2^n \leq (n+1)!$.

Paso inductivo: Suponemos que la proposición vale hasta n y demostramos que vale para $n+1$. Podemos reacomodar $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ y $(n+2)! = (n+2)(n+1)!$. Por hipótesis inductiva, $2^n \leq (n+1)!$, luego:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot (n+1)!$$

Como $(n+2) \geq 2$,

$$2 \cdot (n+1)! \leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

luego $2^{n+1} \leq (n+2)!$.

$\square$

Inducción: Ejemplos de ERRORES

¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

Se quiere probar que los elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de un conjunto son iguales entre sí.

1. Paso inicial ($n = 1$): El conjunto tiene un sólo elemento x_1 que es igual a si mismo.
2. Paso inductivo: Por hipótesis inductiva, vale que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$. Como también vale la HI para un conjunto de dos elementos, tenemos que $x_{n-1} = x_n$, y por tanto resulta que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n$.

$\square$

Inducción: Ejemplos de ERRORES

¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

Se quiere probar que los elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de un conjunto son iguales entre sí.

1. Paso inicial ($n = 1$): El conjunto tiene un sólo elemento x_1 que es igual a si mismo.
2. Paso inductivo: Por hipótesis inductiva, vale que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$. Como también vale la HI para un conjunto de dos elementos, tenemos que $x_{n-1} = x_n$, y por tanto resulta que $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_n$.

$\square$

Respuesta: Faltó un caso base.

Inducción: Ejemplos de ERRORES

¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

Se quiere probar que $\forall a \neq 0$ vale que $a^n = 1$.

1. Paso inicial ($n = 0$): $a^n = 1 \; \forall a$.
2. Paso inductivo: Supongamos que $a^{n-1} = 1$. Entonces $a^n = (a^{n-1} \times a^{n-1})/a^{n-2} = (1 \times 1)/1 = 1$.

$\square$

Inducción: Ejemplos de ERRORES

¿Cuál es el error en la siguiente demostración?

Se quiere probar que $\forall a \neq 0$ vale que $a^n = 1$.

1. Paso inicial ($n = 0$): $a^n = 1 \ \forall a$.
2. Paso inductivo: Supongamos que $a^{n-1} = 1$. Entonces $a^n = (a^{n-1} \times a^{n-1})/a^{n-2} = (1 \times 1)/1 = 1$.

$\square$

Respuesta: El paso inductivo es incorrecto, porque estoy asumiendo verdadera $P(n-2)$ además de $P(n-1)$.

Aclaración sobre la Doble Implicación

IMPORTANTE: recordar que para demostrar $P \iff Q$ se debe demostrar $P \implies Q$ y $Q \implies P$, sino la demostración es **incorrecta**.

Demostrar la siguiente propiedad de valor absoluto:

$$|r| = a, \;\; a \in \mathbb{R}^+ \iff r = a \vee r = -a$$

$\implies$) Usando la definición de valor absoluto:

$$|r| = \begin{cases} r & \text{si } r \geq 0 \\ -r & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

tendremos dos casos posibles:

i) Si $r \geq 0$, $|r| = r = a$.

ii) Si $r < 0$, $|r| = -r = a$, lo cual implica $r = -a$.

De este modo $r = a$ o $r = -a$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Aclaración sobre la Doble Implicación

IMPORTANTE: recordar que para demostrar $P \iff Q$ se debe demostrar $P \implies Q$ y $Q \implies P$, sino la demostración es **incorrecta**.

Demostrar la siguiente propiedad de valor absoluto:

$$|r| = a,\ a \in \mathbb{R}^+ \iff r = a \vee r = -a$$

$\Longleftarrow$) Nuevamente haremos uso de la definición de valor absoluto. Si $r = a$, entonces $r > 0$, ya que $a > 0$, y luego $|r| = r = a$. Si en cambio $r = -a$, entonces $r < 0$, y luego $|r| = -r = -(-a) = a$. En ambos casos se obtiene $|r| = a$, por lo que se prueba el resultado.
Habiendo probado la implicación en uno y otro sentido, queda demostrada la doble implicación.

$\square$

Contraejemplos

Si sospechamos que una afirmación es falsa, podemos intentar encontrar algún ejemplo que lo demuestre.

Ejemplo: Evaluar la veracidad de la siguiente proposición:

Sean $A, B \in M_{n\times n}$,

$$AB = \mathbf{0}_{n\times n} \implies A = \mathbf{0}_{n\times n} \vee B = \mathbf{0}_{n\times n}.$$

Consideremos el ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este ejemplo demuestra que no es necesario que una de las matrices sea la matriz nula para que el resultado dé la matriz nula, por lo que $AB = \mathbf{0}_{n\times n}$ no me permite determinar los valores de A o B. $\square$

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Dada una matriz simétrica M de $n \times n$ números naturales y un número k, queremos encontrar un subconjunto I de $\{1, \ldots, n\}$ con $|I| = k$ que maximice $\sum_{i,j \in I} M_{ij}$. Proponer una poda por optimalidad y mostrar que es correcta.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Solución sacada de uno de los repositorios de cubawiki:

Poda de Optimalidad: si agregando todos los índices restantes no llego a k, detengo esa rama. Eso quiere decir que siguiendo por esa rama no se llega a tener un conjunto de índices de tamaño k.
Correctitud: Esta poda es correcta porque se basa en una cota superior del valor que podría alcanzar una solución parcial. Si esta cota no es mejor que la mejor solución encontrada hasta el momento, entonces sabemos que no necesitamos seguir explorando esa rama del espacio de soluciones.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Solución sacada de uno de los repositorios de cubawiki:

Poda de Optimalidad: si agregando todos los índices restantes no llego a k, detengo esa rama. Eso quiere decir que siguiendo por esa rama no se llega a tener un conjunto de índices de tamaño k.
Correctitud: Esta poda es correcta porque se basa en una cota superior del valor que podría alcanzar una solución parcial. Si esta cota no es mejor que la mejor solución encontrada hasta el momento, entonces sabemos que no necesitamos seguir explorando esa rama del espacio de soluciones.

¿Es correcta esta solución?

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Intentemos resolverlo nosotros y de forma más estructurada.

Dada una matriz simétrica M de $n \times n$ números naturales y un número k, queremos encontrar un subconjunto I de $\{1, \ldots, n\}$ con $|I| = k$ que maximice $\sum_{i,j \in I} M_{ij}$. Proponer una poda por optimalidad y mostrar que es correcta.

¿Qué sería podar por optimalidad? Dada una solución parcial, nos damos cuenta que es imposible que ésta se extienda a una mejor que la mejor solución hasta ahora.

¿Qué sería "ser mejor" en este contexto? Sería que la sumatoria $\sum_{i,j \in I} M_{ij}$ sea mayor.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Antes de seguir, estamos hablando de dos conceptos importantes: solución parcial y extensión de una solución parcial. Definámoslos para formalizar y no cometer errores:

Definición

I_{it} es una solución parcial hasta la iteración it si $I_{it} \subseteq \{1, \ldots, it\}$.

Definición

I extiende I_{it} si $I_{it} \subseteq I$ y además si $a \in I \setminus I_{it}$ entonces $it < a \leq n$, o lo que es lo mismo, $I \setminus I_{it} \subseteq \{it + 1, \ldots, n\}$.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

- Queremos encontrar una lógica que nos permita decir que una solución parcial I_{it} no puede extenderse a una solución mejor que la mejor hasta ahora.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

- Queremos encontrar una lógica que nos permita decir que una solución parcial I_{it} no puede extenderse a una solución mejor que la mejor hasta ahora.
- Una opción de poda sería la idea de que si al conjunto I_{it} le agrego "todo lo que puedo agregar" y aún así la suma no es mayor a la mejor hasta ahora, entonces no va a extenderse a una mejor solución.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

- Queremos encontrar una lógica que nos permita decir que una solución parcial I_{it} no puede extenderse a una solución mejor que la mejor hasta ahora.
- Una opción de poda sería la idea de que si al conjunto I_{it} le agrego "todo lo que puedo agregar" y aún así la suma no es mayor a la mejor hasta ahora, entonces no va a extenderse a una mejor solución.
- ¿Qué sería "todo lo que puedo agregar"? Serían números en el conjunto $\{it + 1, \ldots, n\}$.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

- Queremos encontrar una lógica que nos permita decir que una solución parcial I_{it} no puede extenderse a una solución mejor que la mejor hasta ahora.
- Una opción de poda sería la idea de que si al conjunto I_{it} le agrego "todo lo que puedo agregar" y aún así la suma no es mayor a la mejor hasta ahora, entonces no va a extenderse a una mejor solución.
- ¿Qué sería "todo lo que puedo agregar"? Serían números en el conjunto $\{it + 1, \ldots, n\}$.
- Esto no toma en cuenta factibilidad de la solución, pero ya tenemos verificaciones de factibilidad (hechas para 3a y 3b), no es necesario que esta poda las tenga en cuenta.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Entonces, la poda a proponer sería: Si la mejor solución hasta ahora es un conjunto I_{mejor} tal que $\sum_{i,j \in I_{mejor}} M_{ij} = q$, y la solución parcial I_{it} cumple que:

$$\sum_{i,j \in I_{it} \cup \{it+1,\dots,n\}} M_{ij} \leq q$$

entonces no existe solución I que extienda a I_{it} tal que $\sum_{i,j \in I} M_{ij} > q$ (es decir, I_{it} no puede extenderse a una solución mejor que I_{mejor}).

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Demostremos ahora que la poda es correcta.
Sea I una solución cualquiera que extiende a I_{it}. El costo de esta función es:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} M_{ij} &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in I_{it}} M_{ij} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in I\setminus I_{it}} M_{ij}\\ &= \sum_{i\in I_{it}}\sum_{j\in I_{it}} M_{ij} + \sum_{i\in I\setminus I_{it}}\sum_{j\in I_{it}} M_{ij}\\ &\quad + \sum_{i\in I_{it}}\sum_{j\in I\setminus I_{it}} M_{ij} + \sum_{i\in I\setminus I_{it}}\sum_{j\in I\setminus I_{it}} M_{ij}\end{aligned}$$

Donde hemos usado que $I = I_{it} \cup (I \setminus I_{it})$ e $I_{it} \cap (I \setminus I_{it}) = \emptyset$ para poder dividir las sumatorias sobre I en una sobre I_{it} más otra sobre $I \setminus I_{it}$, tanto para i como para j.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Como sabemos que $I \setminus I_{it} \subseteq \{it+1, \ldots, n\}$ (por definición de extensión de la solución parcial I_{it}), y además los elementos M_{ij} son todos números naturales, si agregáramos todos los elementos de $\{it+1, \ldots, n\}$ que NO estén en $I \setminus I_{it}$ obtendríamos una suma mayor o igual (porque estamos agregando números positivos), luego para todo j:

$$\sum_{i \in I \setminus I_{it}} M_{ij} \leq \sum_{i \in \{it+1, \ldots, n\}} M_{ij}$$

y para todo i:

$$\sum_{j \in I \setminus I_{it}} M_{ij} \leq \sum_{j \in \{it+1, \ldots, n\}} M_{ij}$$

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} M_{ij} &= \sum_{i\in I_{it}}\sum_{j\in I_{it}} M_{ij} + \sum_{i\in I_{it}}\sum_{j\in I\setminus I_{it}} M_{ij} \\
&\quad + \sum_{i\in I\setminus I_{it}}\sum_{j\in I_{it}} M_{ij} + \sum_{i\in I\setminus I_{it}}\sum_{j\in I\setminus I_{it}} M_{ij} \\
&\leq \sum_{i\in I_{it}}\sum_{j\in I_{it}} M_{ij} + \sum_{i\in I_{it}}\sum_{j\in\{it+1,\ldots,n\}} M_{ij} + \\
&\quad \sum_{i\in\{it+1,\ldots,n\}}\sum_{j\in I_{it}} M_{ij} + \sum_{i\in\{it+1,\ldots,n\}}\sum_{j\in\{it+1,\ldots,n\}} M_{ij} \\
&= \sum_{i,j\in I_{it}\cup\{it+1,\ldots,n\}} M_{ij} \leq q
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad sale por hipótesis.

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Así, hemos llegado a que

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I} M_{ij} \leq \sum_{i,j\in I_{it}\cup\{it+1,\ldots,n\}} M_{ij} \leq q$$

Lo cual coloquialmente significa que cualquier extensión I de la solución I_{it} cumple que $\sum_{i,j\in I} M_{ij} \leq q$, y luego ninguna cumple que $\sum_{i,j\in I} M_{ij} > q$, por lo que ninguna puede ser mejor que la mejor hasta ahora, y así la poda por optimalidad es correcta. $\square$

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Solución sacada de uno de los repositorios de cubawiki:

Poda de Optimalidad: si agregando todos los índices restantes no llego a k, detengo esa rama. Eso quiere decir que siguiendo por esa rama no se llega a tener un conjunto de índices de tamaño k.
Correctitud: Esta poda es correcta porque se basa en una cota superior del valor que podría alcanzar una solución parcial. Si esta cota no es mejor que la mejor solución encontrada hasta el momento, entonces sabemos que no necesitamos seguir explorando esa rama del espacio de soluciones.

¿Es correcta esta solución?

Ejemplo: Ejercicio 3c de la guía

Solución sacada de uno de los repositorios de cubawiki:

Poda de Optimalidad: si agregando todos los índices restantes no llego a k, detengo esa rama. Eso quiere decir que siguiendo por esa rama no se llega a tener un conjunto de índices de tamaño k.
Correctitud: Esta poda es correcta porque se basa en una cota superior del valor que podría alcanzar una solución parcial. Si esta cota no es mejor que la mejor solución encontrada hasta el momento, entonces sabemos que no necesitamos seguir explorando esa rama del espacio de soluciones.

¿Es correcta esta solución? No. ¿Por qué?

León y su brazo robótico

León puso en marcha un brazo robótico para la facu, y lo entrenó para pasar notas automáticamente en el SIU. El proyecto fue tan exitoso que ahora todas las materias le piden que les pase las notas con el brazo. Lamentablemente, el robot no es muy rápido, así que no va a poder pasar las notas de todas las materias. Por suerte, no importa si una materia tiene 10 o 400 alumnos, el tiempo que tarda el robot en pasar todas las notas para una materia es el mismo para todas las materias: 1 hora.
A León lo están apurando, poniéndole una hora límite diferente para cada materia para que pase las notas. Si pasa las notas de una materia después de la hora límite, no cuenta. Les pregunta a ustedes, ¿cuál es la máxima cantidad de notas que puede pasar su robot?

Tips

- Si estás en duda, **explicá de más**.
- Empezá definiendo todo formalmente.
- Cualquier cosa que escribas, pensá: ¿por qué vale esto que dije? Si tu respuesta es “porque obvio” es porque no sabés por qué es.
- ¿Ni idea de cómo seguir? Volvé a las definiciones. ¿Qué resultados (teoremas/propiedades/etc) vimos en teoría sobre los temas que trata el ejercicio?
  - Ejemplo: si quiero demostrar que algo es mínimo, demuestro que cualquier otro es mayor o igual; si quiero demostrar igualdad de conjuntos, demuestro doble contención; etc.

Ejemplo sobre el último tip

$\boxed{\text{Demostrar que } \big((r \wedge r) \wedge r\big) \implies r \text{ es una tautología.}}$

Supongamos que queremos demostrar esto y no se nos cae una idea. ¿Qué podemos hacer?

Ejemplo sobre el último tip

Buscando en la teoría de lógica proposicional podemos encontrar las siguientes reglas de equivalencia de la lógica proposicional:

a) $(False \land p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \lor p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \land p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \lor p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \land p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \lor p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

g) $(p \lor \neg p) \equiv True$ (Inversa de la disyunción)

h) $(p \land \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \land (p \lor q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \lor (p \land q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \land q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p \land \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \land q) \equiv (q \land p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \lor q) \equiv (q \lor p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \land (q \land r)) \equiv ((p \land q) \land r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \lor (q \lor r)) \equiv ((p \lor q) \lor r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \land (q \lor r)) \equiv ((p \land q) \lor (p \land r)$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \lor (q \land r)) \equiv ((p \lor q) \land (p \lor r)$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$ (Implicación Material)

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \land (q \to p))$ (Equivalencia material)

donde p y q son fórmulas proposicionales cualesquiera. Revisándolas una por una, ¿cuáles pueden ser relevantes para nuestro problema?

Ejemplo sobre el último tip

Buscando en la teoría de lógica proposicional podemos encontrar las siguientes reglas de equivalencia de la lógica proposicional:

a) $(False \land p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \lor p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \land p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \lor p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \land p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \lor p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

g) $(p \lor \neg p) \equiv True$ (Inversa de la disyunción)

h) $(p \land \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \land (p \lor q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \lor (p \land q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \land q) \equiv (\neg p \lor \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \lor q) \equiv (\neg p \land \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \land q) \equiv (q \land p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \lor q) \equiv (q \lor p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \land (q \land r)) \equiv ((p \land q) \land r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \lor (q \lor r)) \equiv ((p \lor q) \lor r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \land (q \lor r)) \equiv ((p \land q) \lor (p \land r)$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \lor (q \land r)) \equiv ((p \lor q) \land (p \lor r)$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$ (Implicación Material)

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \land (q \to p))$ (Equivalencia material)

donde *p* y *q* son fórmulas proposicionales cualesquiera. Revisándolas una por una, ¿cuáles pueden ser relevantes para nuestro problema?

Ejemplo sobre el último tip

DISCLAIMER: la siguiente demostración se basa en el siguiente resultado que no será demostrado acá, pero que eventualmente verán en Lógica y Computabilidad:

Sean α y β dos fórmulas proposicionales cualesquiera equivalentes. Si γ es una fórmula proposicional que usa α y reemplazamos cualquier aparición de α en γ por β, la fórmula obtenida es equivalente a γ.

Por ej, si $\alpha \equiv \beta$ y δ son fórmulas proposicionales cualesquiera, $(\alpha \vee \delta) \equiv (\beta \vee \delta)$.

Ejemplo sobre el último tip

Aplicando la Idempotencia de la Conjunción, como $(r \land r) \equiv r$, podemos decir que:

$$\big((r \land r) \land r\big) \implies r$$

$$\equiv$$

$$\big(r \land r\big) \implies r$$

$$\equiv$$

$$r \implies r$$

¿Y ahora?

Ejemplo sobre el último tip

Aplicando la Idempotencia de la Conjunción, como $(r \wedge r) \equiv r$, podemos decir que:

$$\big((r \wedge r) \wedge r\big) \implies r$$

$$\equiv$$

$$\big(r \wedge r\big) \implies r$$

$$\equiv$$

$$r \implies r$$

¿Y ahora?

Ejemplo sobre el último tip

Volviendo a las reglas de equivalencia de la lógica proposicional:

a) $(False \wedge p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \vee p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \wedge p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \vee p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \wedge p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \vee p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

g) $(p \vee \neg p) \equiv True$ (Inversa de la disyunción)

h) $(p \wedge \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ (Implicación Material)

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ (Equivalencia material)

¿Cuál me puede servir?

Ejemplo sobre el último tip

Volviendo a las reglas de equivalencia de la lógica proposicional:

a) $(False \wedge p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \vee p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \wedge p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \vee p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \wedge p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \vee p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

g) $(p \vee \neg p) \equiv True$ (Inversa de la disyunción)

h) $(p \wedge \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $\boxed{(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q) \text{ (Implicación Material)}}$

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ (Equivalencia material)

¿Cuál me puede servir?

Ejemplo sobre el último tip

Aplicando la Implicación Material:

$$\big((r \wedge r) \wedge r\big) \implies r$$

$$\equiv$$

$$r \implies r$$

$$\equiv$$

$$\neg r \vee r$$

Genial. ¿Y ahora?

Ejemplo sobre el último tip

Vuelve el perro arrepentido. ¿Qué me puede servir ahora?

a) $(False \wedge p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \vee p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \wedge p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \vee p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \wedge p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \vee p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

g) $(p \vee \neg p) \equiv True$ (Inversa de la disyunción)

h) $(p \wedge \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$ (Implicación Material)

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \to q) \wedge (q \to p))$ (Equivalencia material)

Ejemplo sobre el último tip

Vuelve el perro arrepentido. ¿Qué me puede servir ahora?

a) $(False \wedge p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \vee p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \wedge p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \vee p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \wedge p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \vee p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

$\boxed{\text{g) } (p \vee \neg p) \equiv True \text{ (Inversa de la disyunción)}}$

h) $(p \wedge \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ (Implicación Material)

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ (Equivalencia material)

Ejemplo sobre el último tip

Vuelve el perro arrepentido. ¿Qué me puede servir ahora?

a) $(False \wedge p) \equiv False$ (Dominación de la conjunción)

b) $(True \vee p) \equiv True$ (Dominación de la disyunción)

c) $(True \wedge p) \equiv p$ (Neutro de la conjunción)

d) $(False \vee p) \equiv p$ (Neutro de la disyunción)

e) $(p \wedge p) \equiv p$ (Idempotencia de la conjunción)

f) $(p \vee p) \equiv p$ (Idempotencia de la disyunción)

g) $(p \vee \neg p) \equiv True$ (Inversa de la disyunción)

h) $(p \wedge \neg p) \equiv False$ (Inversa de conjunción)

i) $\neg\neg p \equiv p$ (Doble negación)

j) $(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$ (Absorción de la conjunción)

k) $(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$ (Absorción de la disyunción)

l) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ (Ley de Morgan para la conjunción)

m) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de Morgan para la disyunción)

n) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ (Conmutabilidad para la conjunción)

ñ) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Conmutabilidad para la disyunción)

o) $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$ (Asociatividad de la conjunción)

p) $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$ (Asociatividad de la disyunción)

q) $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (Distributividad de la conjunción)

r) $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (Distributividad de la disyunción)

s) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$ (Contraposición lógica)

t) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ (Implicación Material)

u) $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ (Equivalencia material)

Ejemplo sobre el último tip

Aplicando la Inversa de la Disyunción y la Conmutatibilidad de la Disyunción:

$$\big((r \wedge r) \wedge r\big) \implies r$$

$$\equiv$$

$$\neg r \vee r$$

$$\equiv$$

$$r \vee \neg r$$

$$\equiv$$

$$\mathit{True}$$

Y luego hemos demostrado que la fórmula $\big((r \wedge r) \wedge r\big) \implies r$ es una tautología. $\square$

Ejercicios

Ejercicio 1

Dada una fórmula matemática bien formada con paréntesis, hacemos lo siguiente: vamos de izquierda a derecha sumando 1 a un contador cuando encontramos un '(', y restamos 1 cuando encontramos un ')'. Asumiendo que el contador empieza en 0, demostrar que el contador nunca toma un valor negativo.

Ejercicio 2

Tenemos una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Comenzamos con un conjunto $Res = A_1$, y para cada conjunto A_i con $2 \leq i \leq n$, seteamos

$$\mathrm{Res} = \mathrm{Res} \cup A_i \setminus (\mathrm{Res} \cap A_i)$$

Demostrar que, al final, un elemento x pertenece a Res si y solo si x pertenece a un número impar de conjuntos de $\mathcal{F}$.