Árboles Generadores Mínimos

Técnicas de Diseño de Algoritmos (Ex Algoritmos y Estructuras de Datos III)

Primer cuatrimestre 2024

Repaso: Árboles generadores

Definición:

- Un **árbol generador** (AG) de un grafo G es un subgrafo generador (que tiene el mismo conjunto de vértices) de G que es árbol.

Teorema:

- Todo grafo conexo tiene (al menos) un árbol generador.
- G conexo. G tiene un único árbol generador $\iff$ G es árbol.
- Sea $T = (V, X_T)$ un AG de $G = (V, X)$ y $e \in X \setminus X_T$. Entonces $T' = T + e - f = (V, X_T \cup \{e\} \setminus \{f\})$, con f una arista del único circuito de $T + e$, T' es árbol generador de G.

Árbol generador mínimo

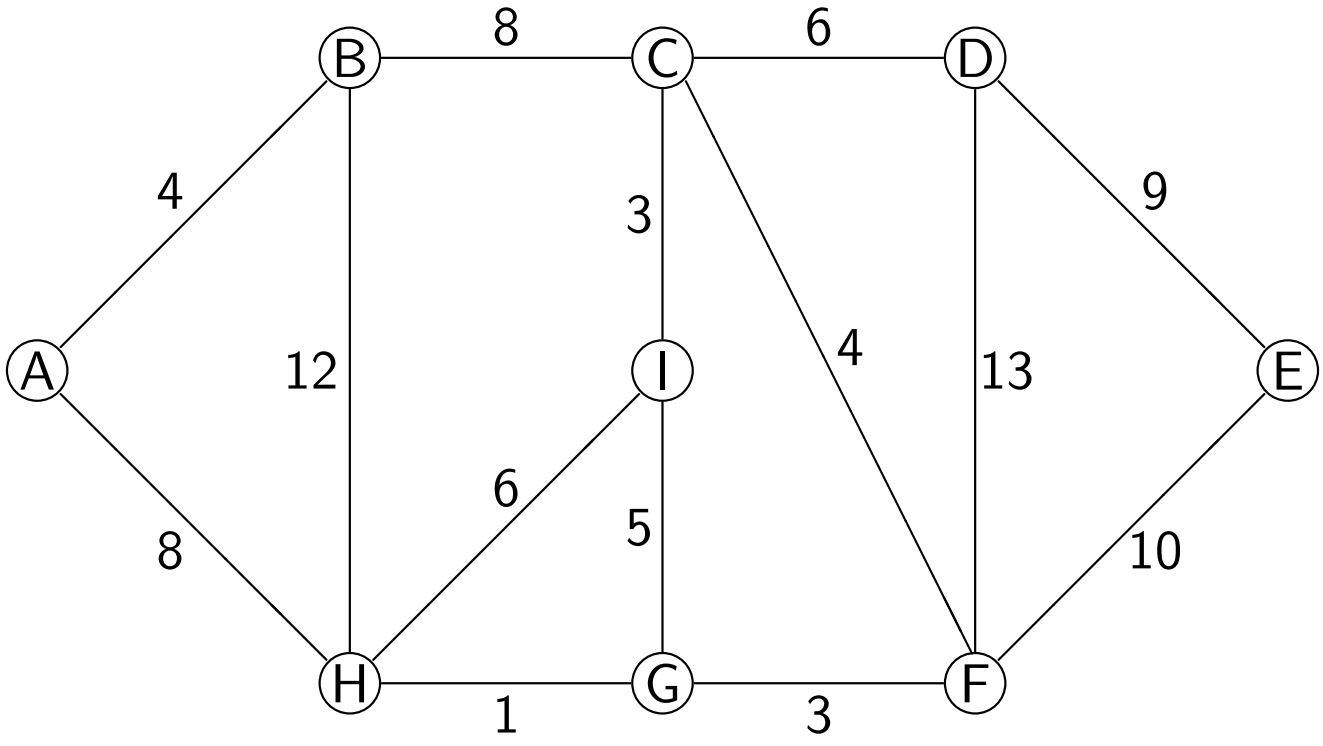
Definiciones:

- Sea $T = (V, X)$ un árbol y $l : X \to R$ una función que asigna longitudes (o pesos) a las aristas de T. Se define la **longitud** de T como $l(T) = \sum_{e \in T} l(e)$.

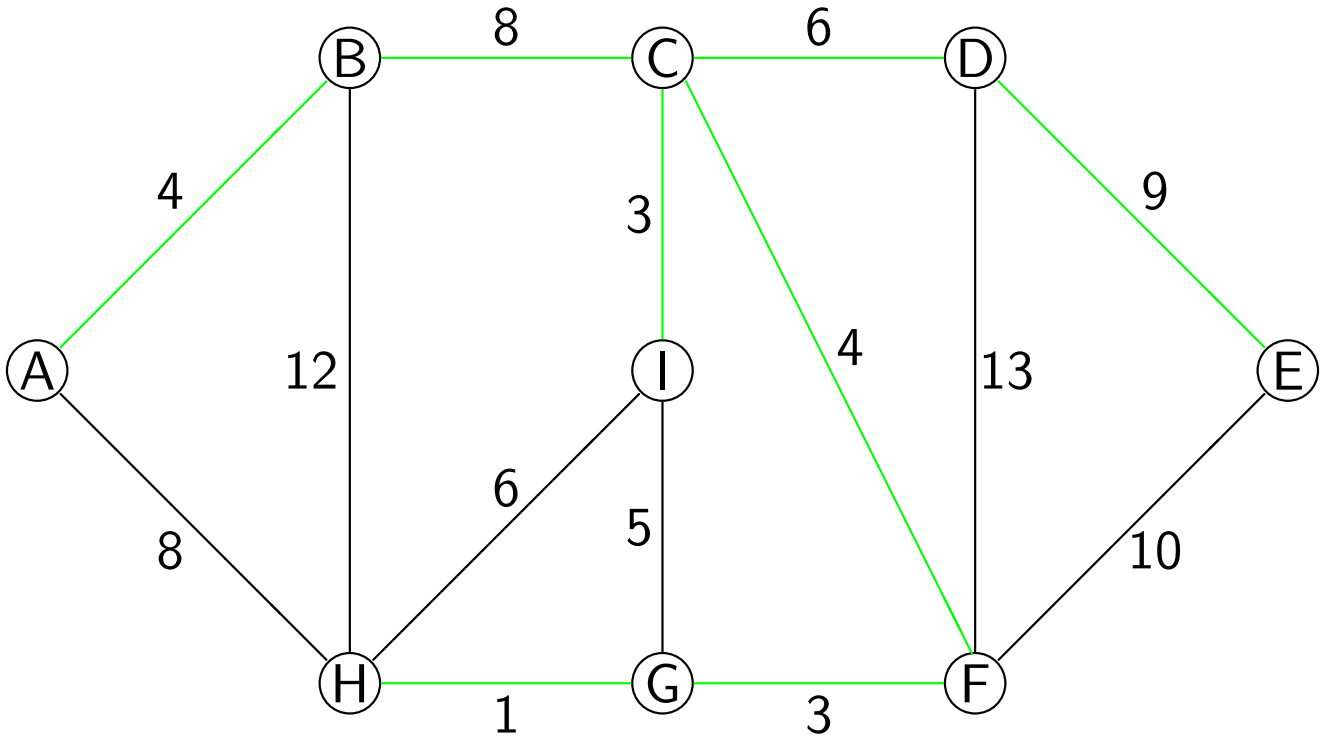
- Dado un grafo conexo $G = (V, X)$ con una función l que asigna longitudes (o pesos) a sus aristas, un **árbol generador mínimo** de G, T, es un árbol generador de G de mínima longitud, es decir

$$l(T) \leq l(T') \; \forall T' \text{ árbol generador de } G.$$

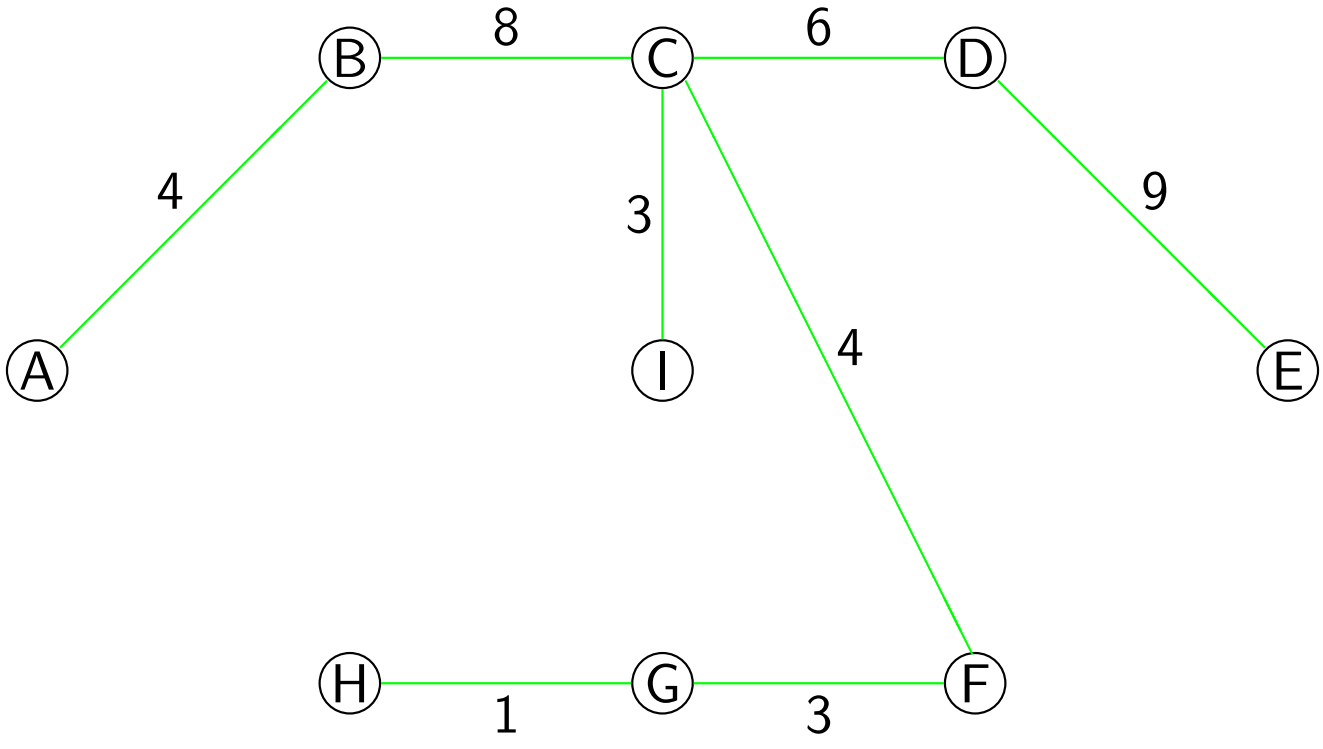
Ejemplo de AGM



Ejemplo de AGM



Ejemplo de AGM



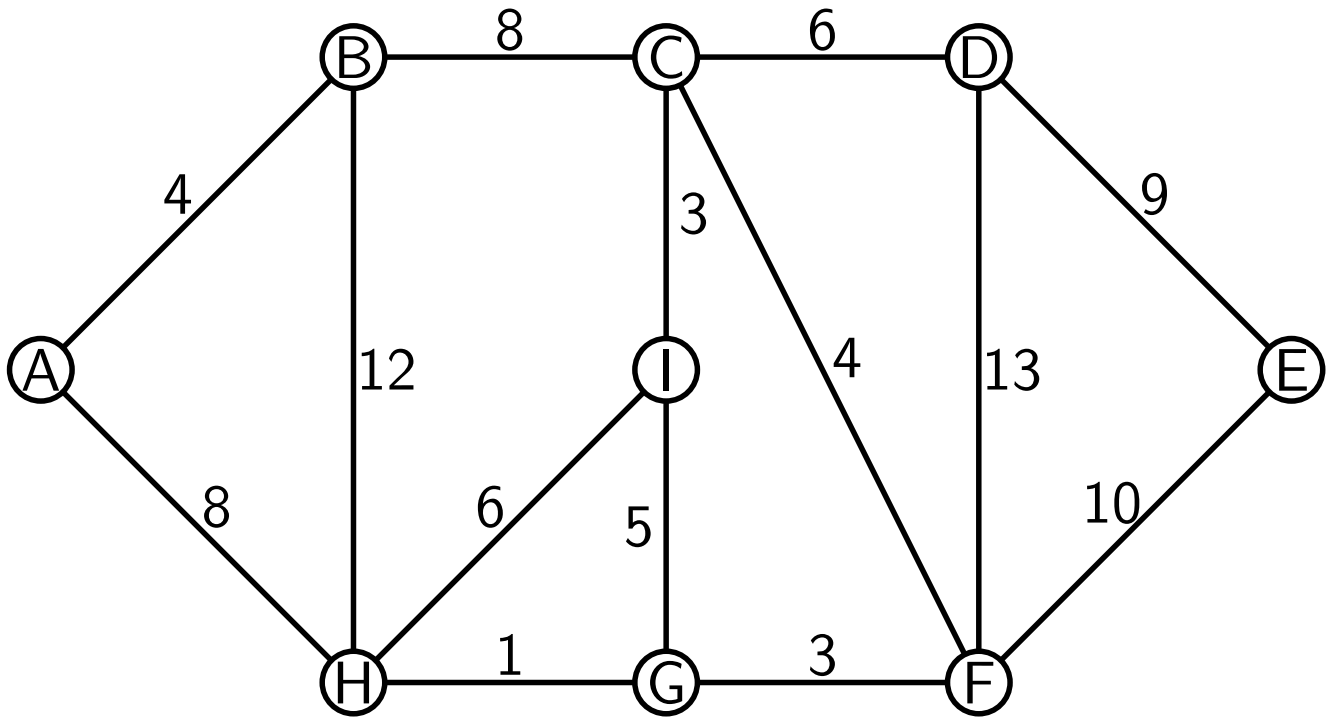
Algoritmo de *Prim*

Entrada: $G = (V, X)$ grafo conexo con una función $l : X \to R$.

V_T := $\{u\}$ (u cualquier nodo de G)
X_T := $\emptyset$
i := 1
mientras $i \leq n - 1$ **hacer**
    elegir $e = (u, v) \in X$ tal que $l(e)$ sea mínima
      entre las aristas que tienen un extremo
      $u \in V_T$ y el otro $v \in V \setminus V_T$
    X_T := $X_T \cup \{e\}$
    V_T := $V_T \cup \{v\}$
    i := $i + 1$
retornar $T = (V_T, X_T)$

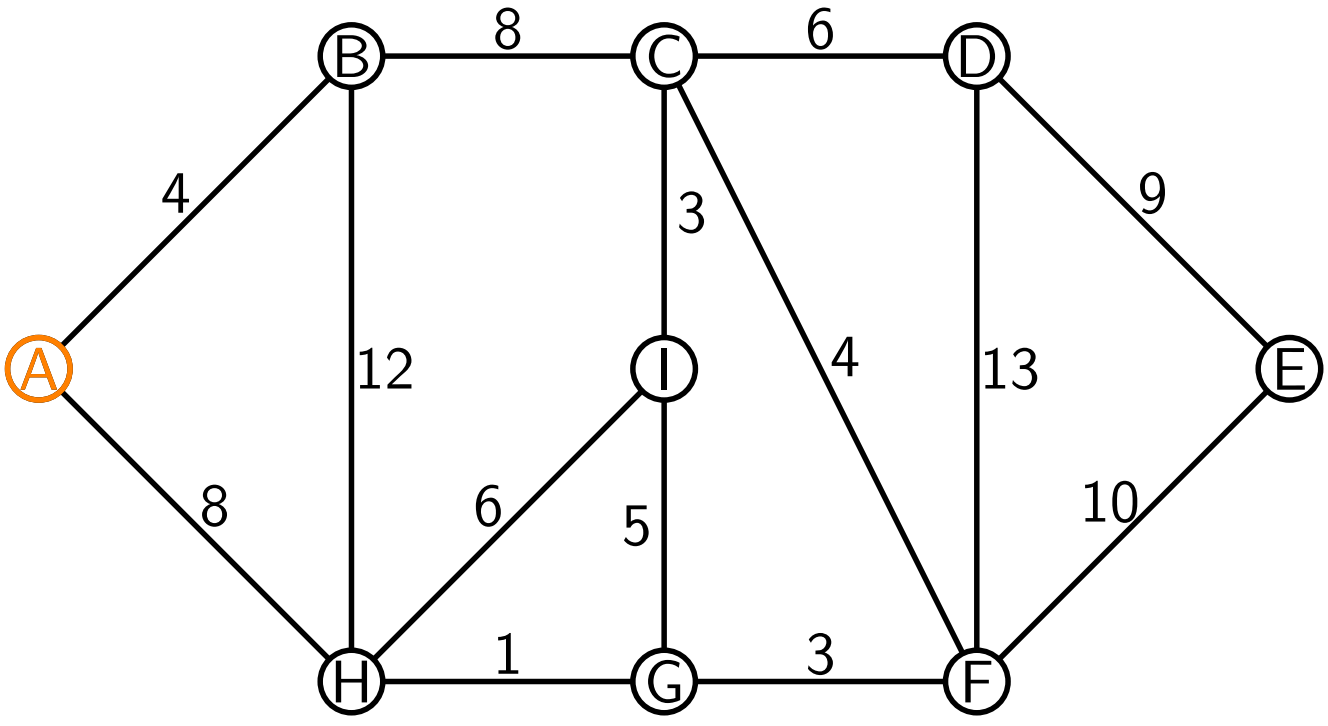
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



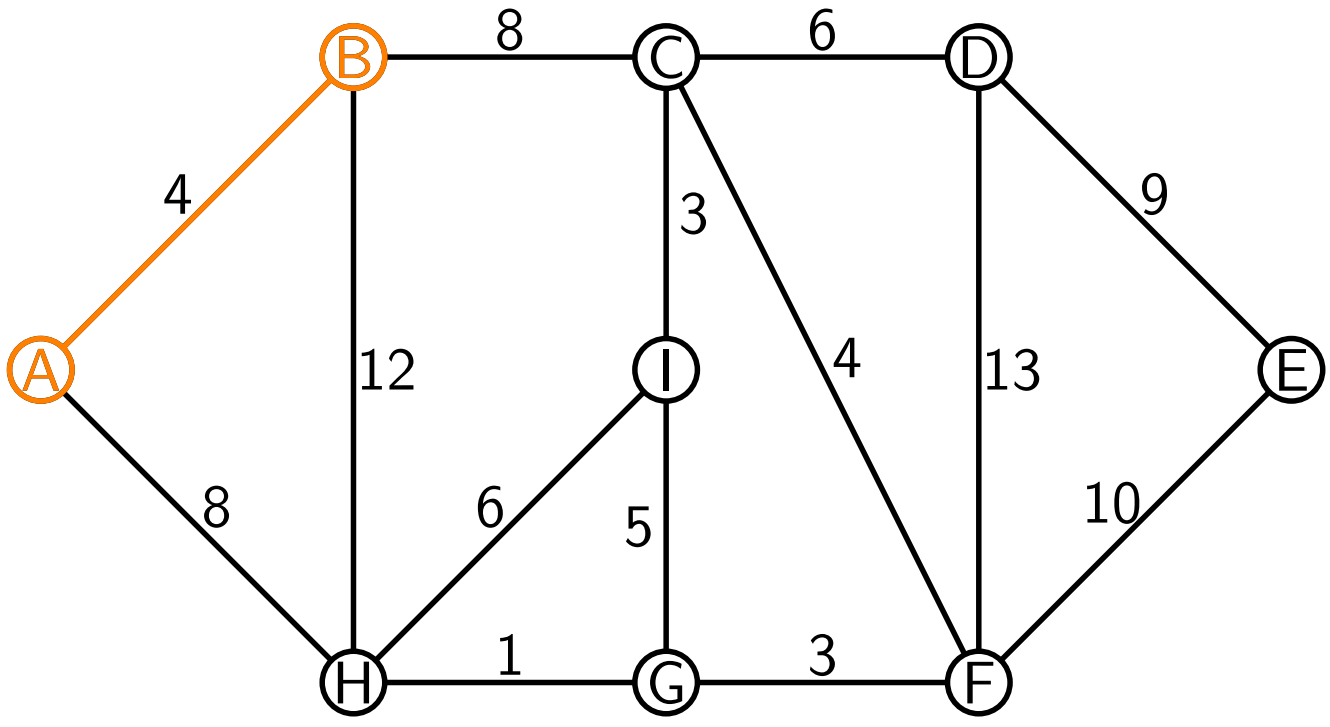
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



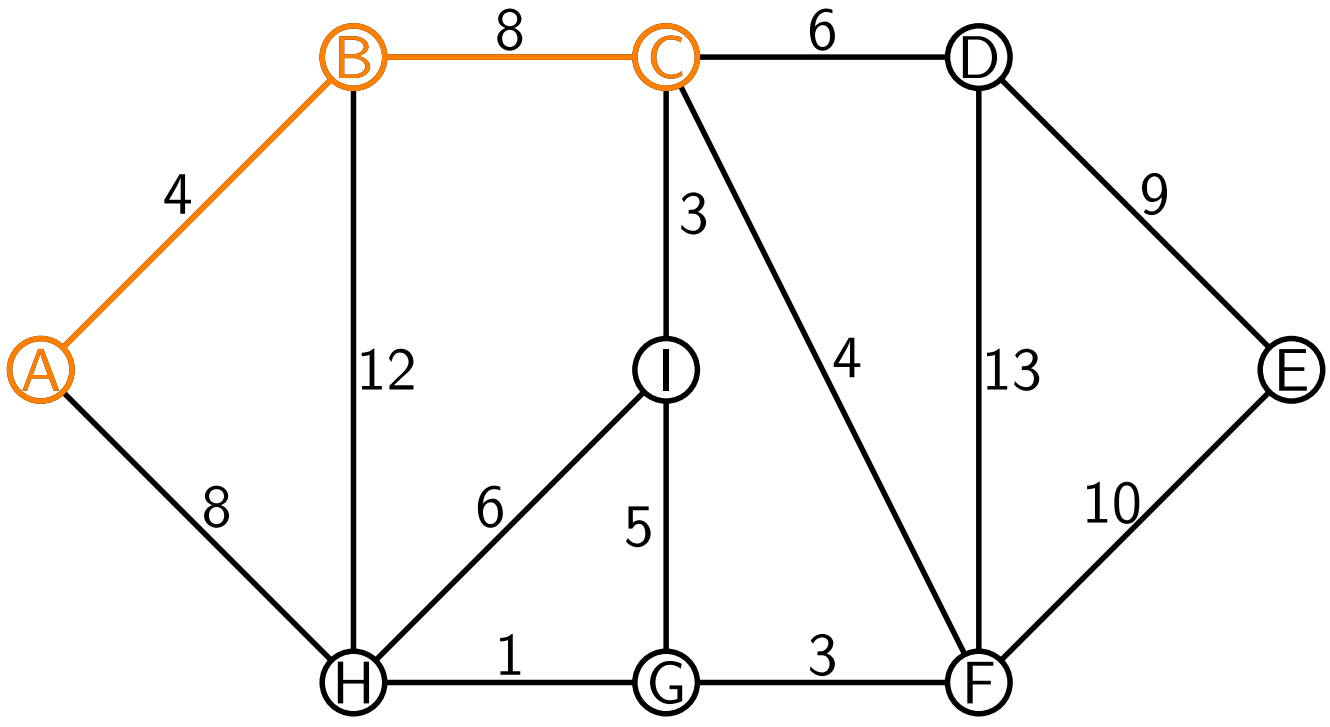
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



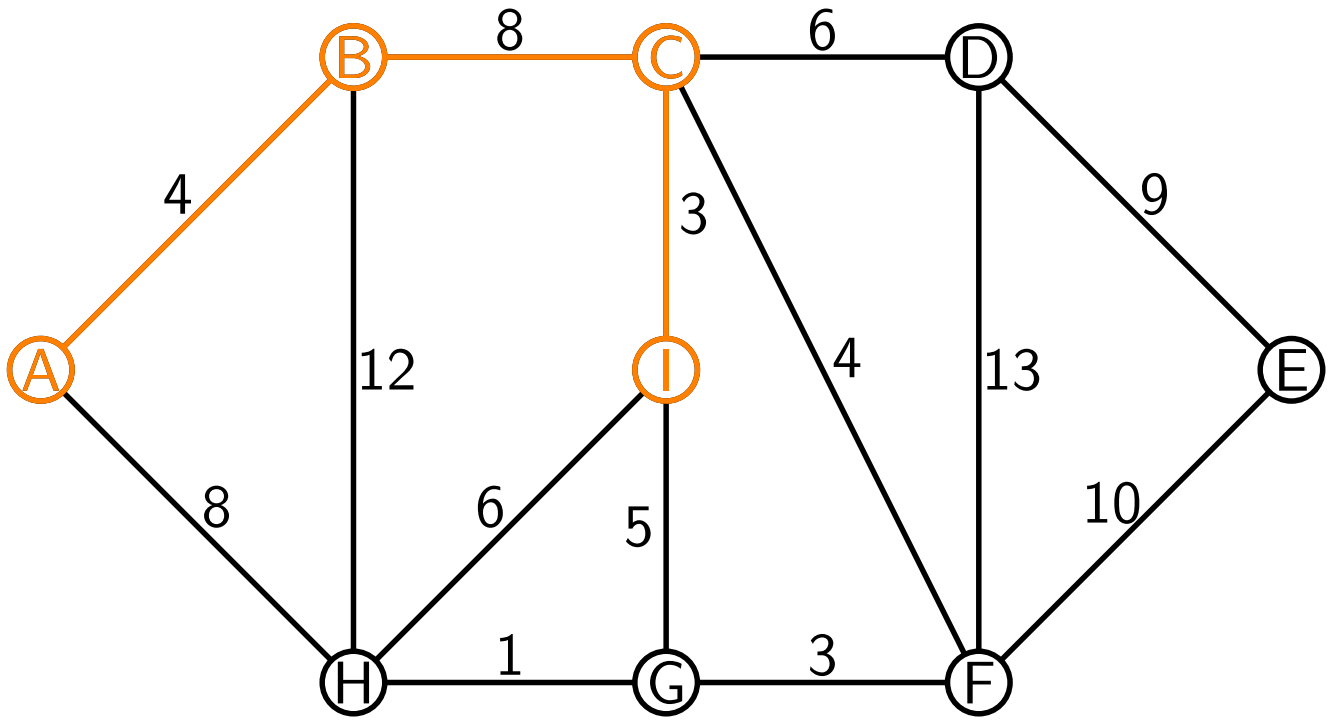
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



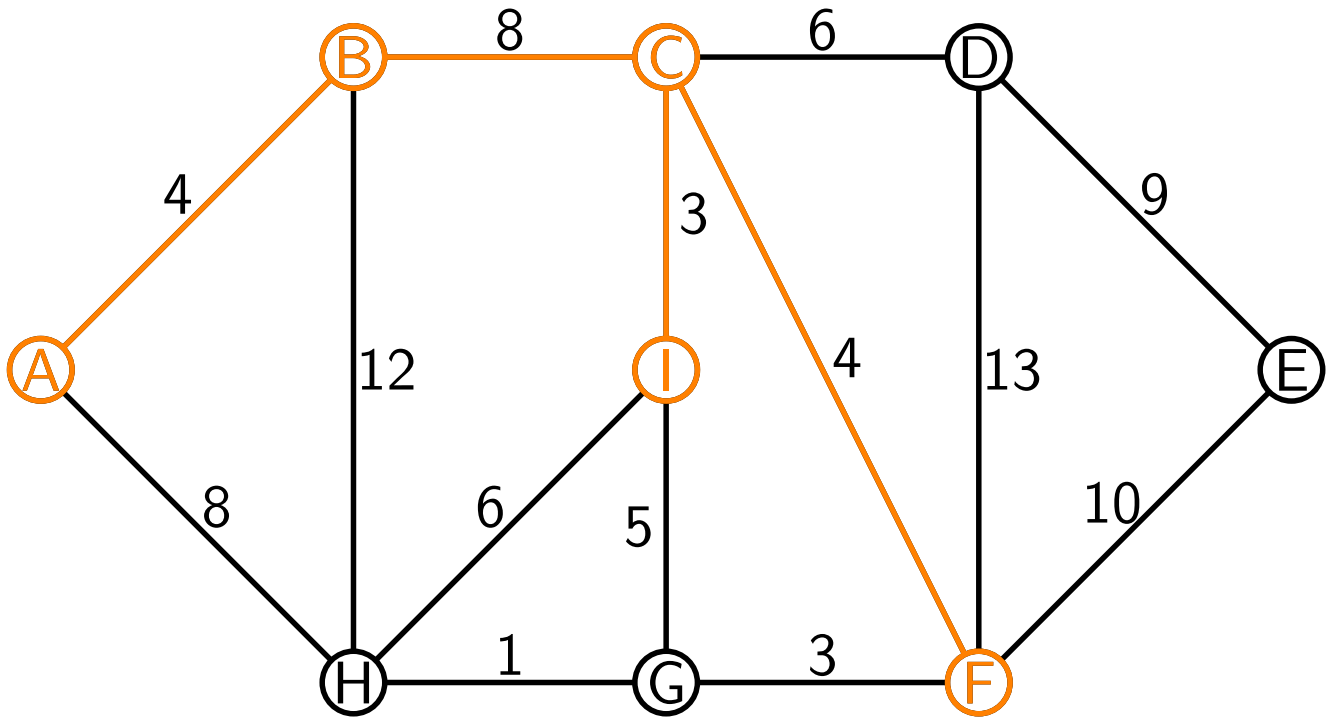
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



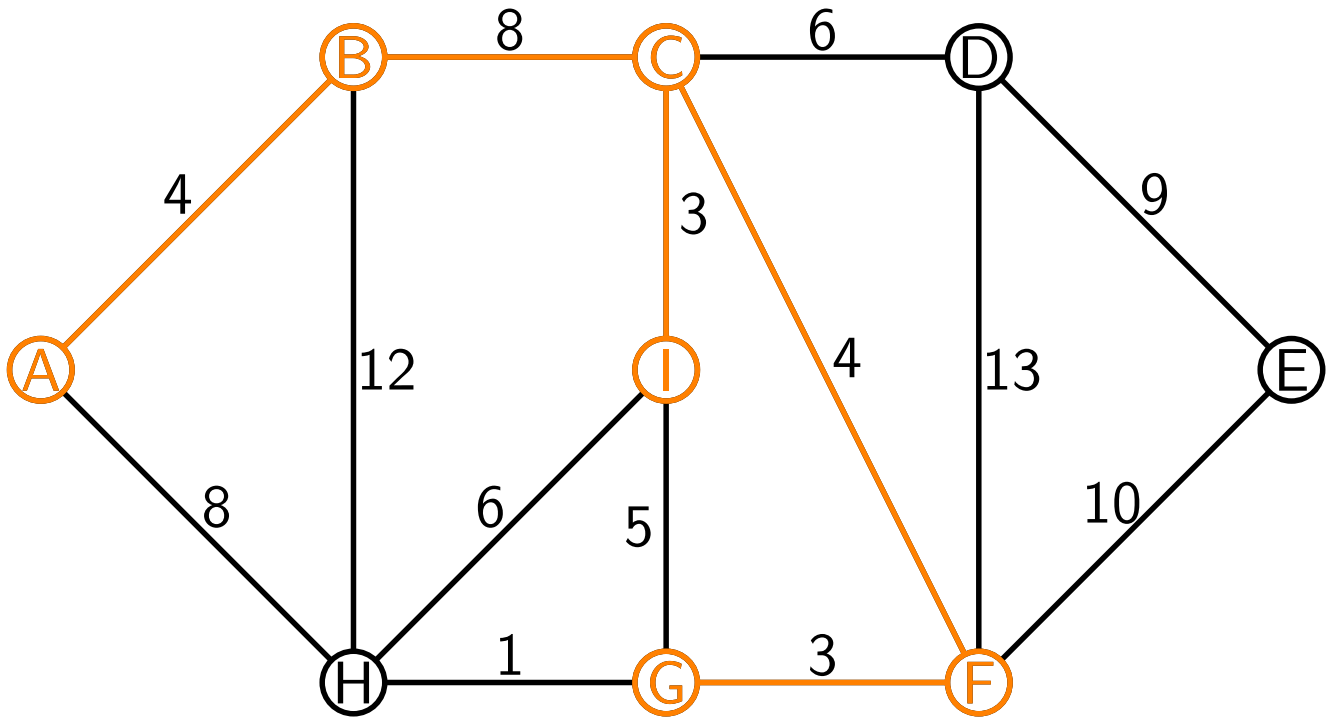
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



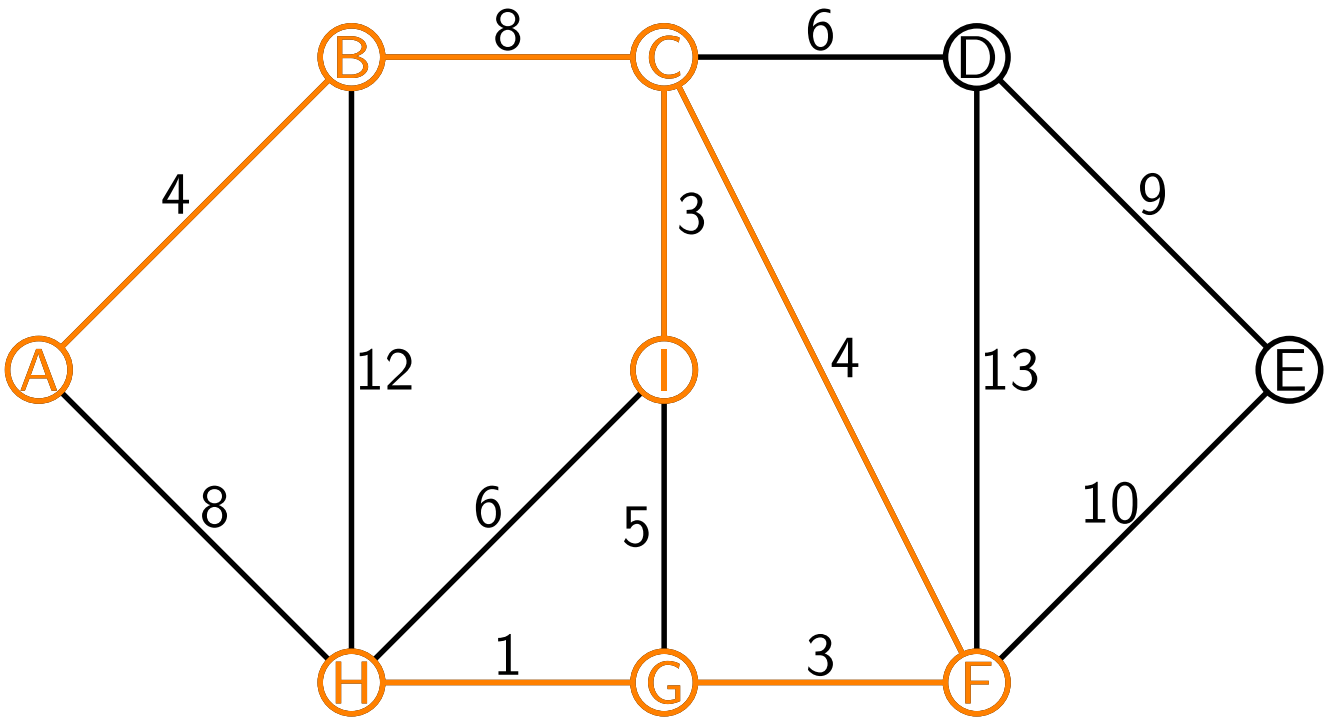
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



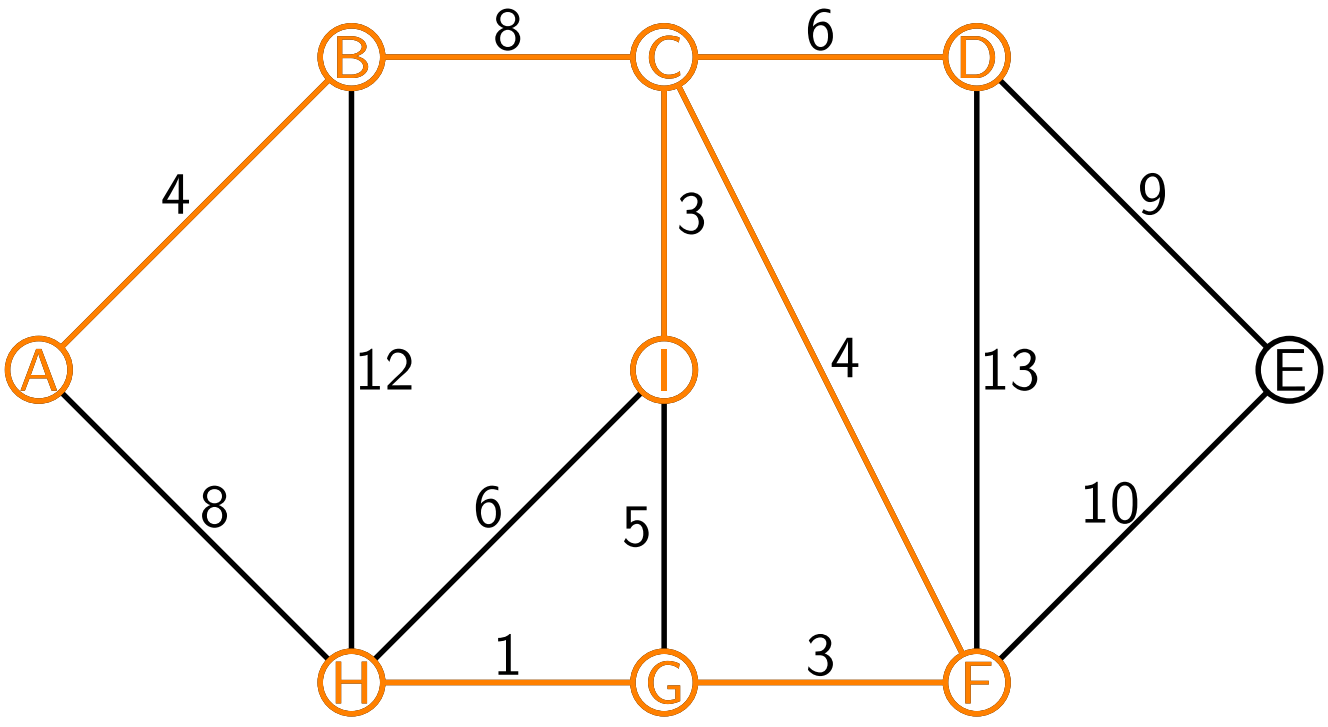
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



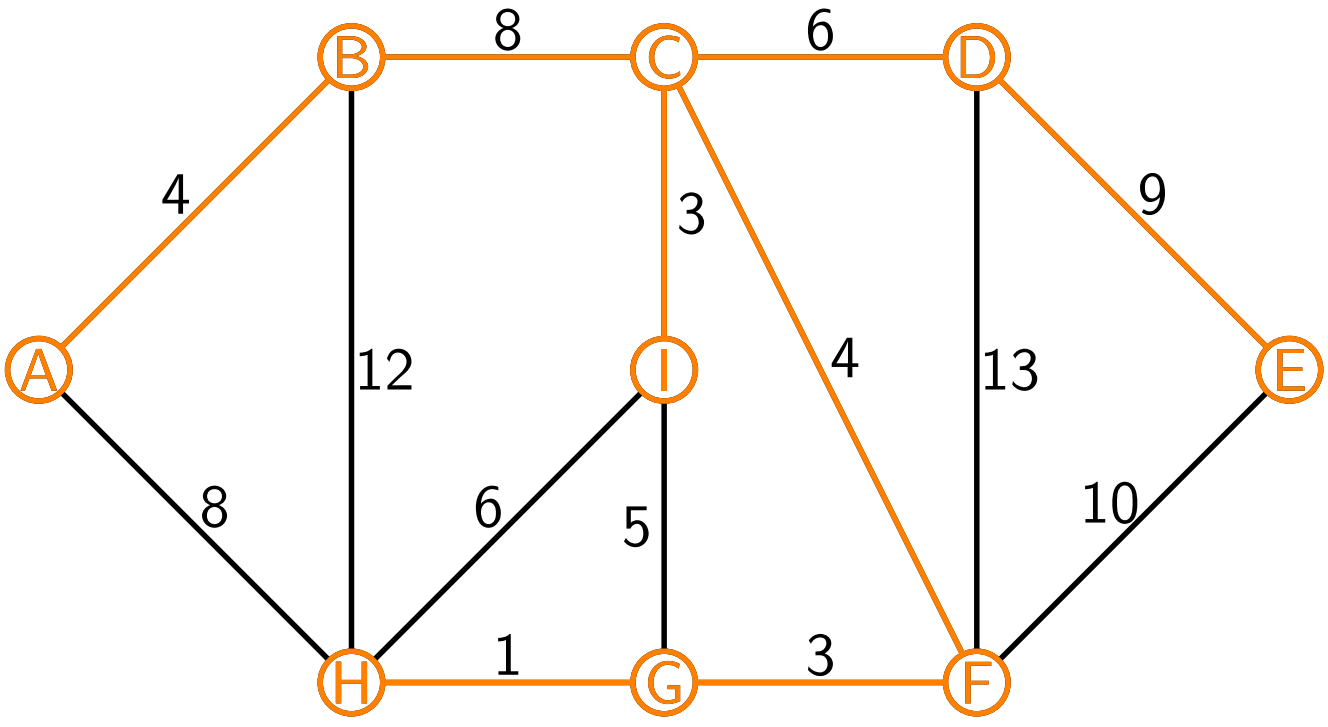
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Prim*

Iteración k: Subgrafo de un AGM conexo con k aristas



Algoritmo de *Prim*

Lema:

Sea $T = (V, X_T)$ un árbol generador de $G = (V, X)$. Si $e \in X$ y $e \notin X_T$ y $f \in X_T$ una arista del ciclo de $T + e$. Entonces $T' = (V, X_T \cup \{e\} \setminus \{f\})$ es árbol generador de G.

Proposición:

Sea G un grafo conexo. Sea $T_k = (V_{T_k}, X_{T_k})$ el árbol que el algoritmo de *Prim* determina en la iteración k, para $0 \leq k \leq n-1$. T_k es un subárbol de un árbol generador mínimo de G.

Teorema:

El algoritmo de *Prim* es correcto, es decir dado un grafo G conexo determina un árbol generador mínimo de G.

El algoritmo *Prim* es un algoritmo goloso.

Prueba del lema

Claramente, T tiene exactamente $|V| - 1$ aristas porque es árbol y T' tiene la misma cantidad de aristas que T ya que las aristas de T' son las mismas de T salvo f (arista de T) que fue sustituida por e (no es arista de T).

T' no tiene ciclos porque T no los tiene, con el agregado de la arista e se forma un único ciclo en $T + e$ y luego se quita una arista f de dicho ciclo. Consecuentemente, en T' ya no queda ningún ciclo.

T' tiene exactamente $|V| - 1$ aristas y no tiene ciclos entonces T' es árbol. Como T tiene todos los vértices de G, T' es AG de G.

Prueba de la proposición

Sea e_i la arista elegida en la iteración i-ésima de la ejecución del algoritmo de *Prim* para $1 \leq i \leq n-1$.

Probaremos por inducción en k que T_k es un subárbol de un generador mínimo de G.

- Caso base, $k = 0$. Claramente, T_0 (árbol de un solo nodo) es un subárbol de cualquer árbol generador de G y particularmente de cualquier AGM T de G ya que todo subgrafo generador de G debe tener a todos los nodos de G.

Prueba de la proposición: continuación

- Es cierta la proposición para T_{k-1}, queremos ver que también es cierta para T_k. Supongamos que no, entonces existe un AGM T tal que T_{k-1} es un subárbol suyo y T_k no lo es. Por lo tanto, $e_1, \cdots, e_{k-1}$ son aristas de T y $e_k = (a, b)$ no es arista de T. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \in V_{T_{k-1}}$ y $b \notin V_{T_{k-1}}$. Sea P_{ab} el camino de T que une a con b y $C = P_{ab} \cup \{e_k\}$ sería el único ciclo de $T + e_k$. Existe una arista $f = (c, d) \in P_{ab}$ tal que $c \in V_{T_{k-1}}$ y $d \notin V_{T_{k-1}}$ ya que el camino P_{ab} comienza en a (un nodo de $V_{T_{k-1}}$) y termina en b (un nodo que no está en $V_{T_{k-1}}$). Claramente, $l(f) \geq l(e_k)$ ya que ambas aristas estaban disponibles para competir en la iteración k de la ejecución del algoritmo y e_k fue la arista elegida de esa iteración. Es más, $l(f) = l(e_k)$, porque si $l(f) > l(e_k)$ entonces $l(T) > l(T' = T \cup \{e_k\} \setminus \{f\})$ y T no sería mínimo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $T' = T \cup \{e_k\} \setminus \{f\}$ es un AGM que tiene a T_k como subárbol.

Complejidad del Algoritmo de *Prim*

- $O(n^2)$, implementación estándar.
- $O((m+n)\ log\ n)$, usando heap binario.
- $O(m+n\ log\ n)$, usando heap fibonacci.

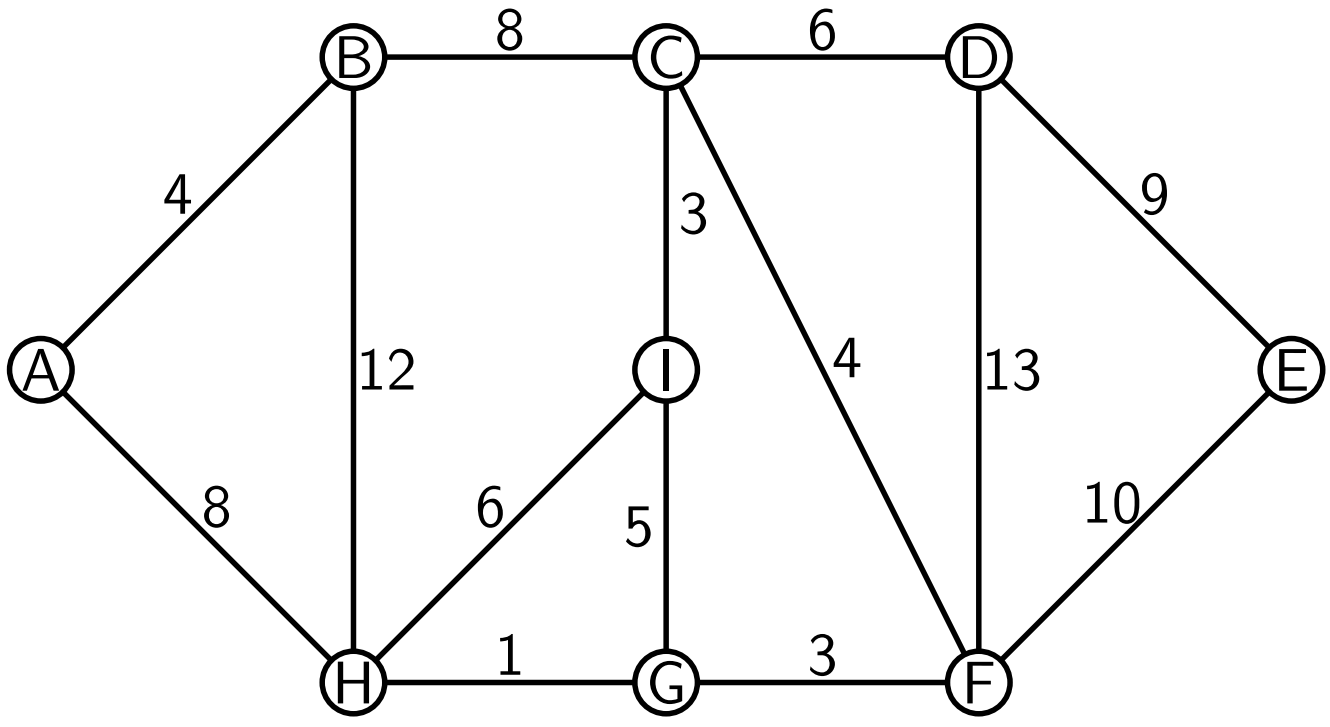
Algoritmo de *Kruskal*

Entrada: $G = (V, X)$ grafo conexo con una función $l : X \to R$.

X_T := $\emptyset$
i := 1
mientras $i \leq n - 1$ **hacer**
    elegir $e \in X$ tal que $l(e)$ sea mínima entre las aristas que no forman circuito con las aristas que ya están en X_T
    X_T := $X_T \cup \{e\}$
    i := $i + 1$
retornar $T = (V, X_T)$

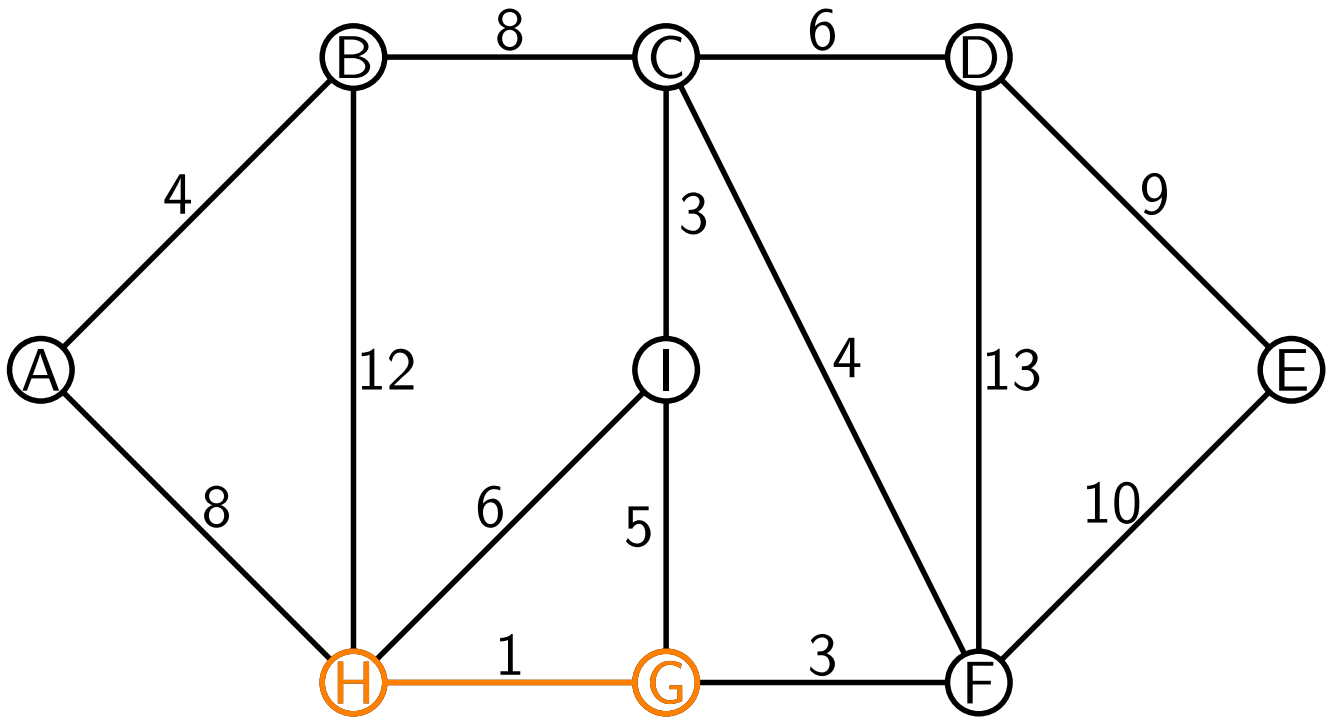
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



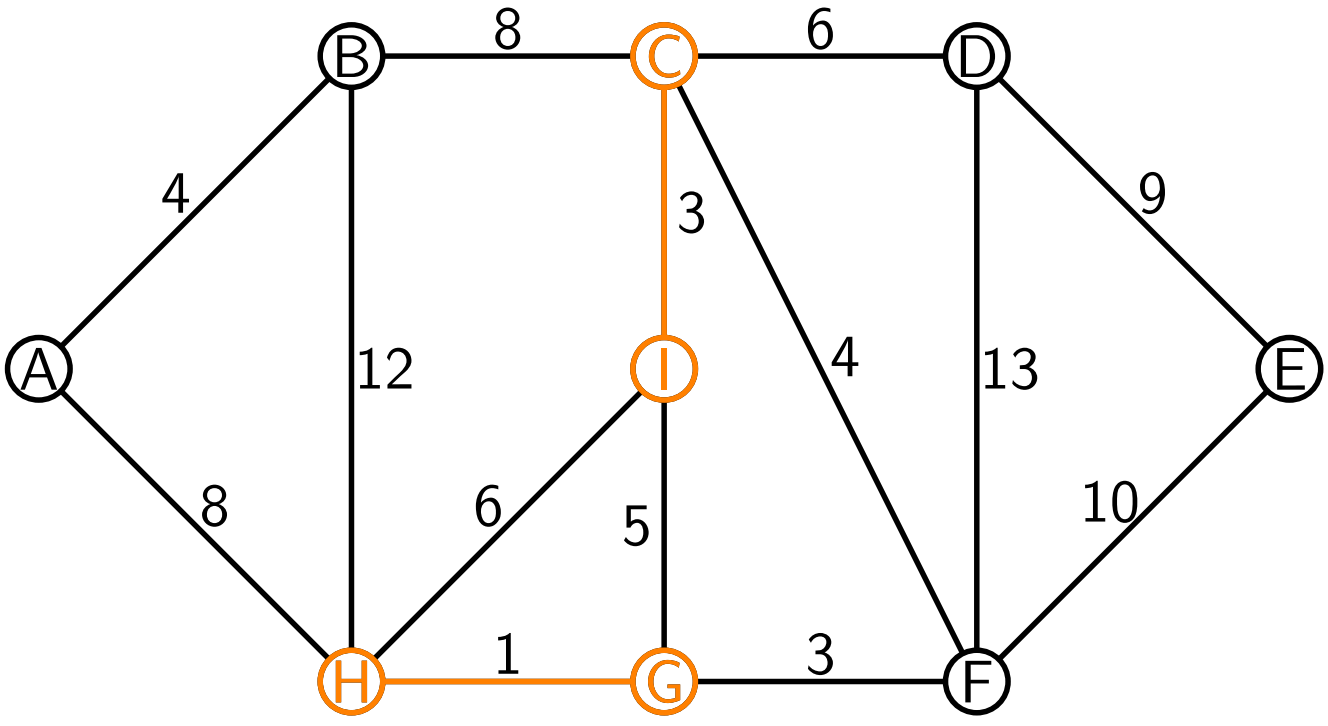
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



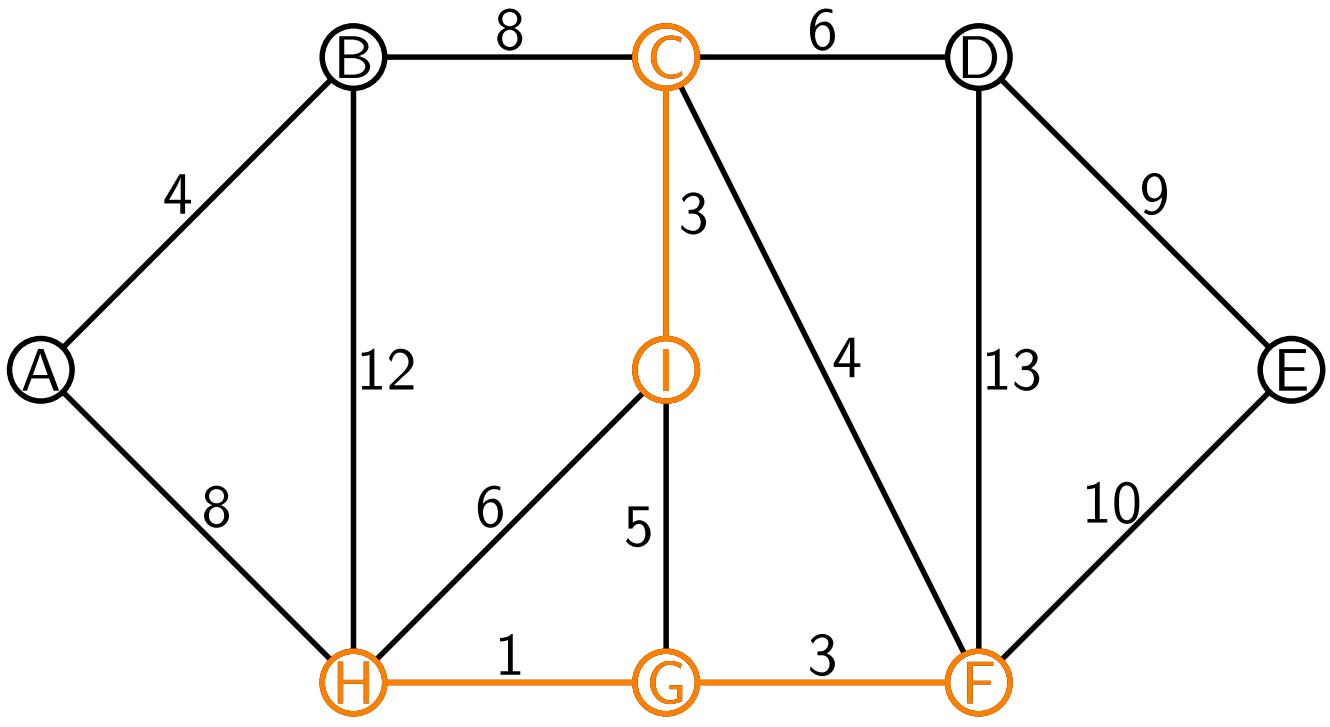
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



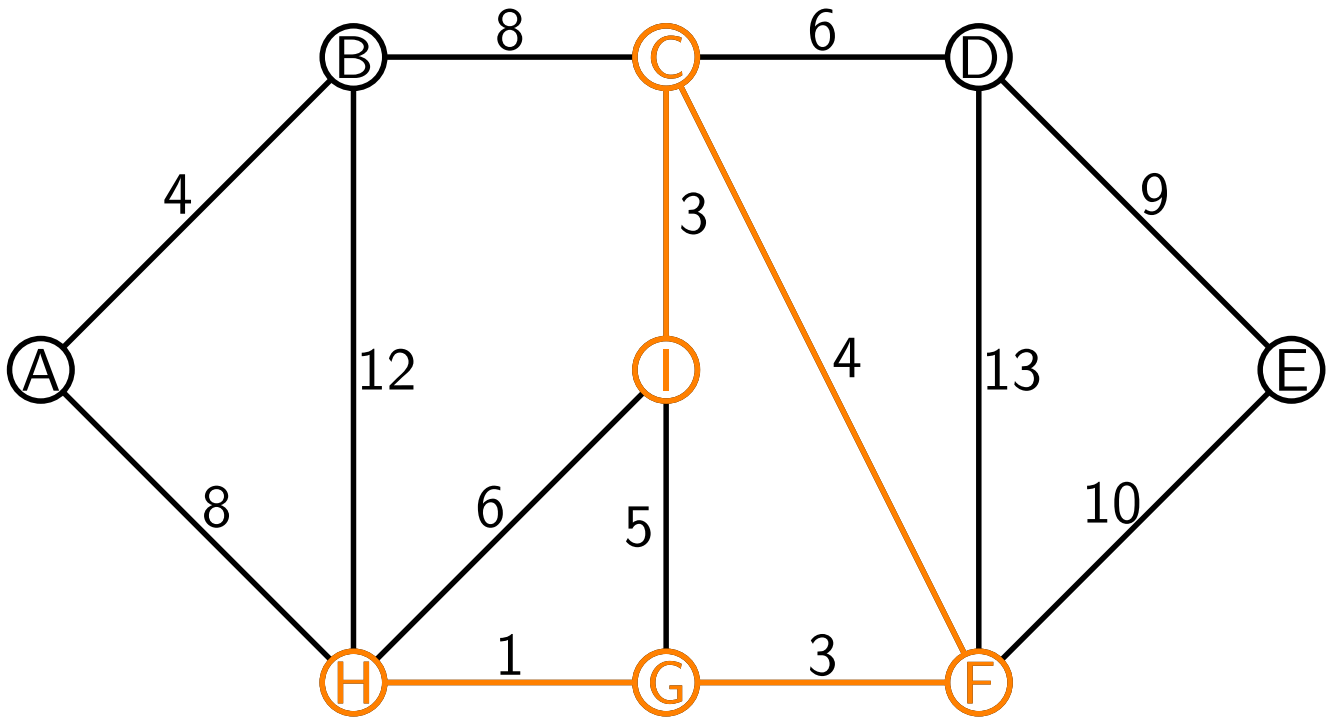
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



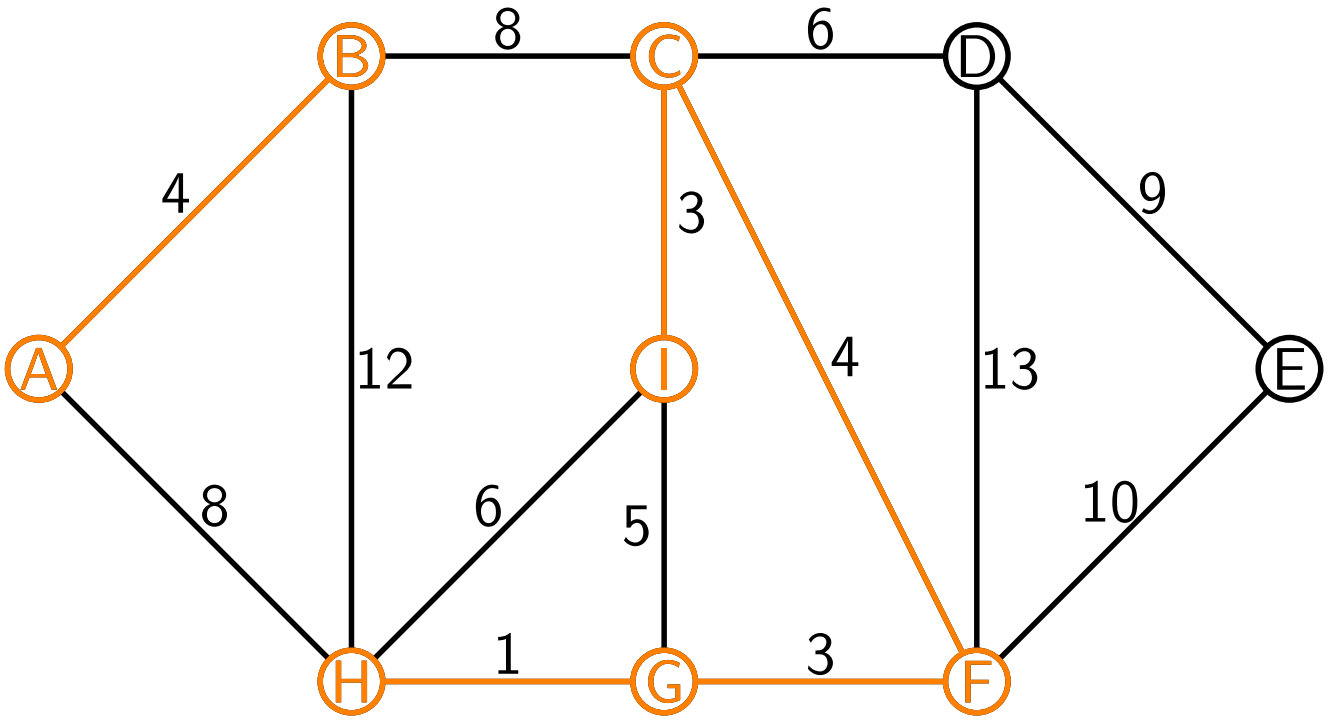
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



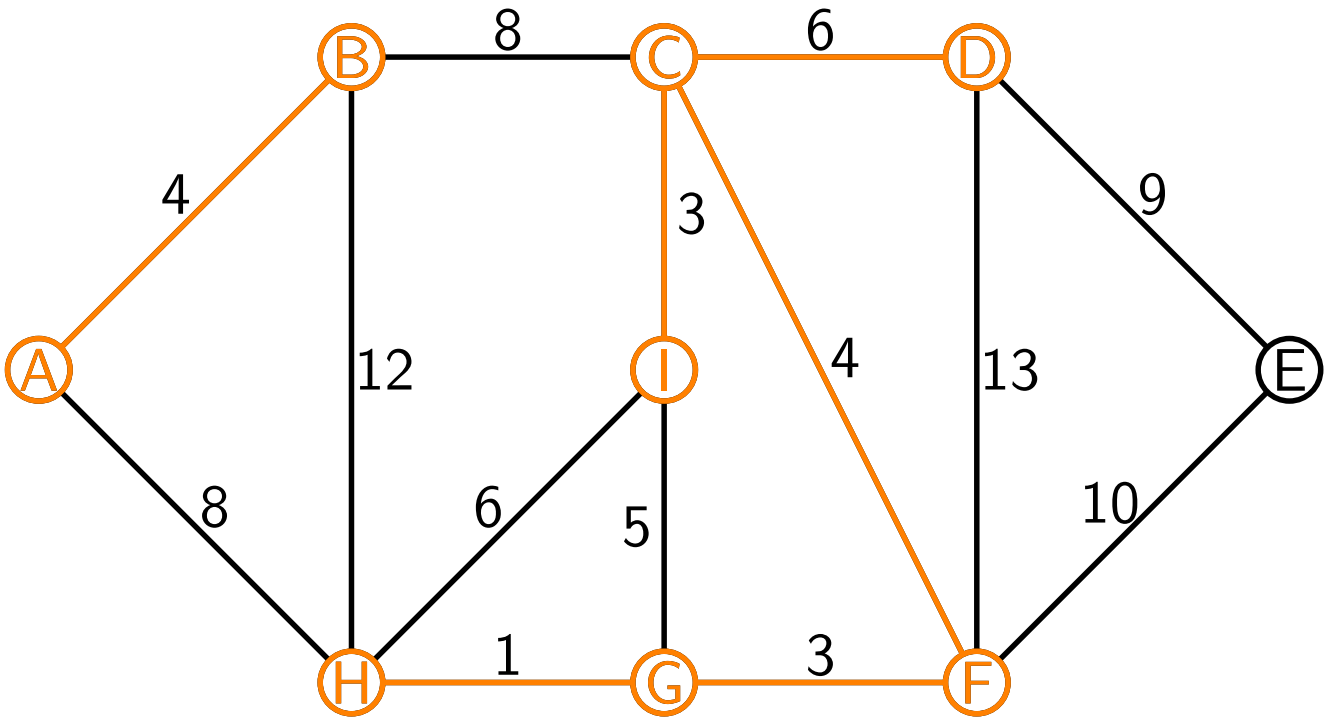
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



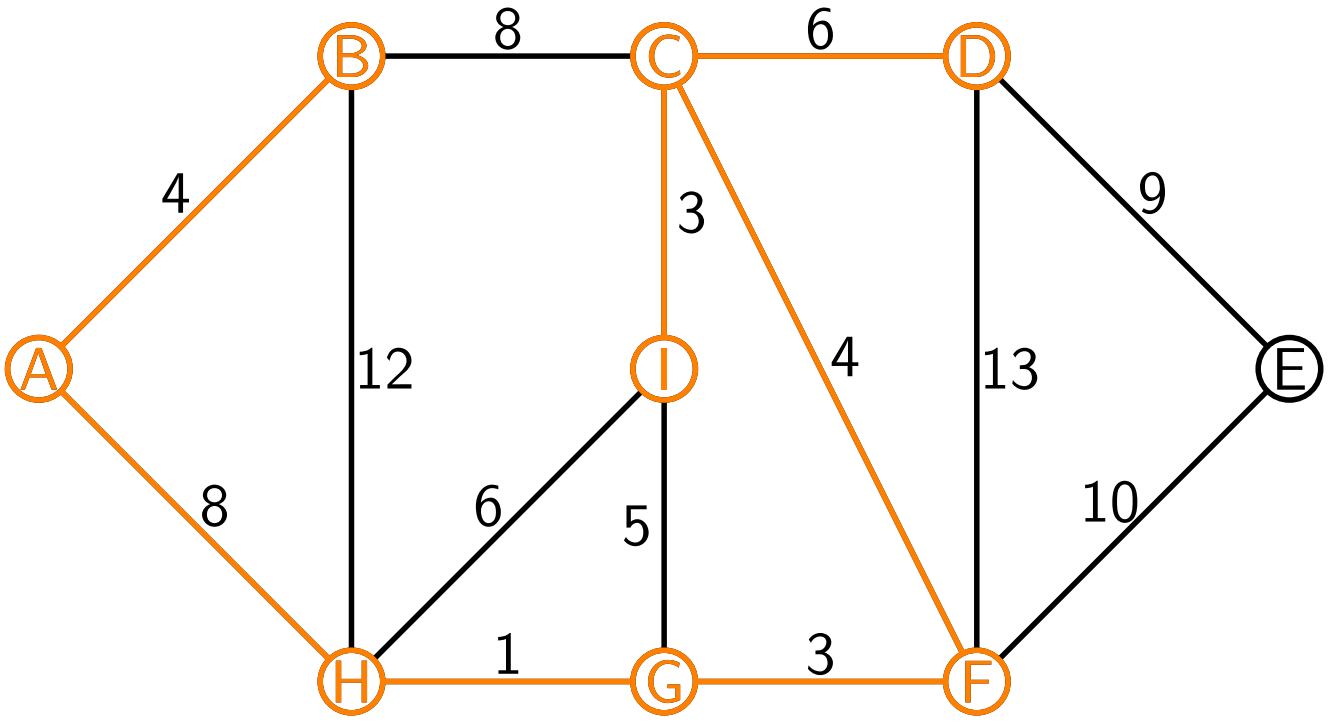
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



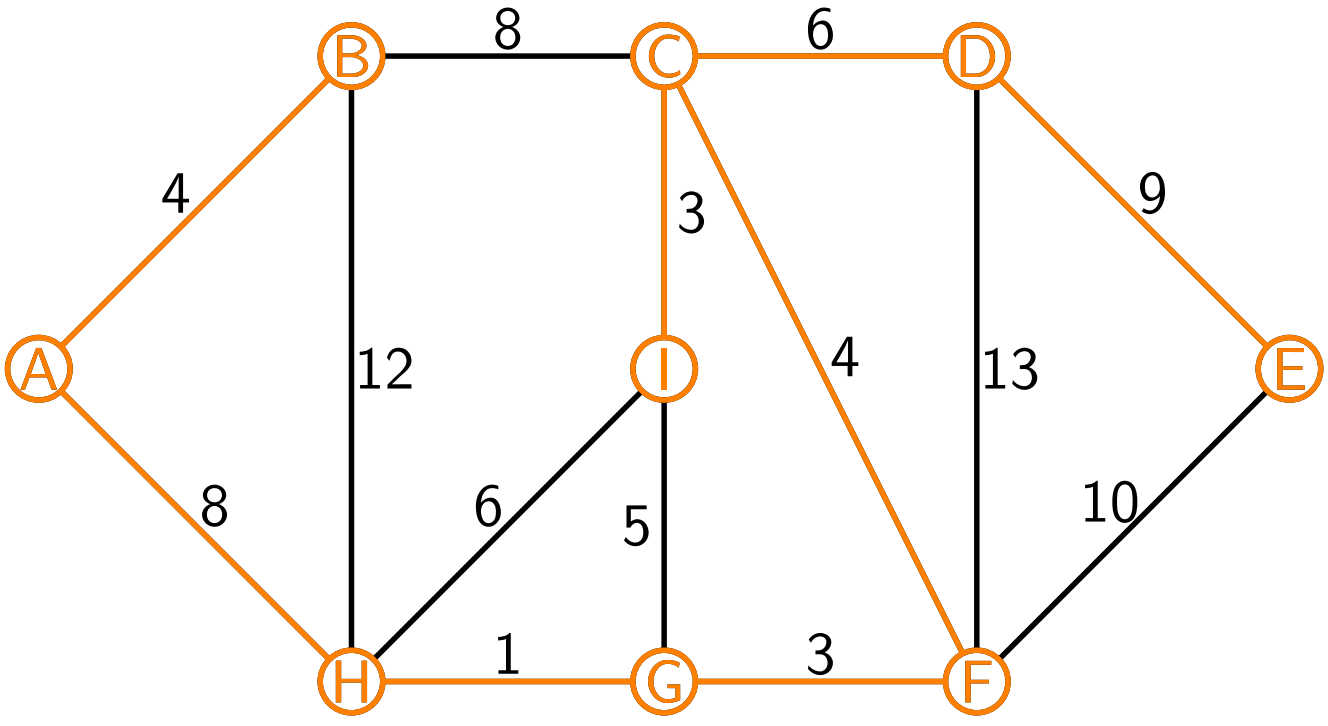
Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



Ejemplo de AGM - Algoritmo de *Kruskal*

Iteración k: Subgrafo de un AGM con k aristas sin ciclos



Algoritmo de *Kruskal*

Proposición:

Sea G un grafo conexo. Sea $B_k = (V, X_{T_k})$ el bosque que el algoritmo de *Kruskal* genera en algún momento con exactamente k aristas, $0 \leq k \leq n-1$. B_k es un subgrafo generador sin ciclos de un árbol generador mínimo de G.

Teorema:

El algoritmo de *Kruskal* es correcto, es decir dado un grafo G conexo determina un árbol generador mínimo de G.

El algoritmo *Kruskal* es un algoritmo goloso.

Prueba de la proposición

Sean $e_1, \cdots, e_m$ las aristas ordenadas de menor a mayor de acuerdo a la función l ($l(e_1) \leq \cdots \leq l(e_m)$) y $e'_1 = e_{j_1}, \cdots, e'_{n-1} = e_{j_{n-1}}$, las $n-1$ aristas agregadas durante la ejecución del algoritmo de *Kruskal* siguiendo este orden de aristas, es decir que $1 = j_1 < \cdots < j_{n-1}$. Claramente, por la forma de elegir las aristas del algoritmo, $B_k = (V, X_{T_k} = \{e'_1, \cdots, e'_k\})$ no contiene ciclos . A continuación, vamos a probar por inducción en k que B_k es subgrafo generador de algún AGM T.

- Caso base, $k = 0$. Claramente, B_0 es un subgrafo generador sin aristas y sin ciclos de cualquer árbol generador y particularmente de cualquier AGM T.

Prueba de la proposición: continuación

- Es cierta la proposición para B_{k-1}, queremos ver que también es cierta para B_k. Supongamos que no, entonces existe un AGM T tal que B_{k-1} es un subgrafo generador suyo y B_k no lo es. Por lo tanto, $e'_1 = e_{j_1}, \cdots, e'_{k-1} = e_{j_{k-1}}$ son aristas de T y $e'_k = e_{j_k} = (a, b)$ no es arista de T. Sea P_{ab} el camino de T que une a con b y $C = P_{ab} \cup \{e'_k\}$ sería el único ciclo de $T + e'_k$. Cualquier arista $e_p \in P_{ab}$, $l(e_p) \leq l(e'_k)$, caso contrario $l(T' = T \cup \{e'_k\} \setminus \{e_p\}) < l(T)$ y como T' es AG entonces T no sería mínimo, contradicción. Hay una arista $e_p \in P_{ab}$ tal que e_p no está en B_k sino C es un ciclo de B_k y sería otra contradicción. Si $p < j_k$, e_p formaba un ciclo con las aristas de B_{k-1} ya que fue descartada por el algoritmo y ese ciclo estaría en T y es contradicción. Por lo tanto, $p > j_k$ y $l(e_p) \geq l(e'_k)$. Consecuentemente, $l(e_p) = l(e'_k)$ y $T' = T \cup \{e'_k\} \setminus \{e_p\}$ es un AGM que tiene a B_k como subgrafo generador.

Complejidad del Algoritmo de *Kruskal*

- $O(m * n)$, implementación trivial.
- $O(m\ log\ n + m\ log\ n)$, union and find (por rango).
- $O(m\ log\ n + m * \alpha(n))$, union and find (por rango + compresión de camino).