Flujo Máximo II

~~Camino mínimo~~ II

Técnicas de Diseños de Algoritmos

Alfredo Umfurer

En el capítulo anterior...

- Vimos definición de problemas de flujo máximo y corte mínimo:
  - Tenemos dos vértices especiales (s y t)
  - El flujo de la arista debe ser menor o igual a la capacidad
  - No entra flujo a s, no sale flujo de t
  - En todo vértices distinto de s y t, el flujo que entra es igual al que sale
- Algoritmos y complejidades
- Solución de problemas de caminos disjuntos y de corte

Especulando con el Torneo

Federico, fanático de CAFF, tiene que renovar el plack de Futbol, pero solo está interesado en hacerlo si su equipo aún tiene chances de ganar.

El torneo actual tiene el formato todos contra todos, y en cada partido dan 2 puntos al ganador ó 1 punto a cada uno en caso de empate.

Fede sabe cuales son los partidos que quedan por jugar y además tabla de puntos al día de hoy.

Diseñemos un algoritmo que nos le diga si todavía hay esperanzas de que el CAFF salga campeón

Ideas?

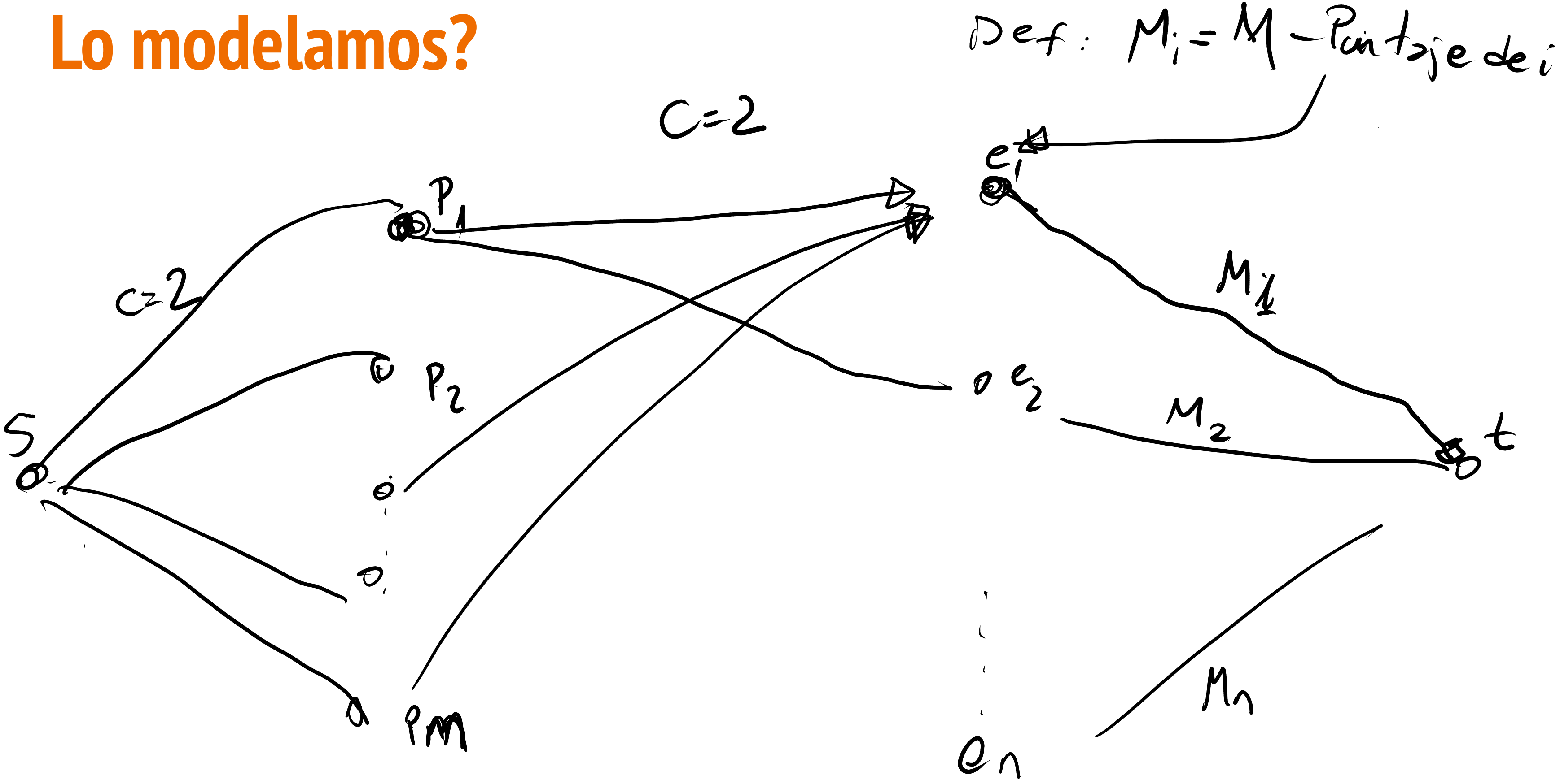
¿Qué es lo que más le conviene a Fede que pase?

FF tiene que ganar todas $\longrightarrow$ puntos $= M$

resto $\leq M$ puntos

¿Qué elementos tenemos presente en el problema?

Lo modelamos?



¿Qué representa cada unidad de flujo?

- $f(s \to p_i)$**:** Si está saturada, indica que la cantidad de puntos que reparte el i-ésimo partido es igual a 2
- $f(p_i \to e_j)$**:** La cantidad de puntos que gana el equipo j en el i-ésimo partido. Cómo $2 = f(s \to p_i) = f(p_i \to e_j) + f(p_i \to e_k)$, o bien uno se lleva **2** o cada uno se lleva **1**.
- $f(e_j \to t) \leq M_j$**:** No queremos que el equipo **j** se lleve más de M_j

¿Cuando existe una solución del problema?

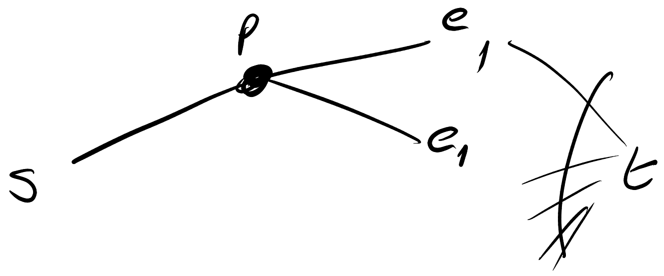
¿Cuando existe una solución del problema?

Cuando se repartieron todos los puntos del partido: todas las aristas $f(s \rightarrow p_i)$ están saturadas, es decir, el flujo máximo es igual al doble de los partidos por jugar

Complejidad?

Cantidad de vértices: $2+P+E$ (P=Cantidad de Partidos, E=Cantidad de Equipos)

Cantidad de aristas: $3P+E$



Cota para el flujo?:

Complejidad?

Cantidad de vértices: $2+P+E$ (P=Cantidad de Partidos, E=Cantidad de Equipos)

Cantidad de aristas: $3P+E$

Cota para el flujo?: Cantidad de puntos por disputar: $2P$

Complejidad?

Cantidad de vértices: $2{+}P{+}E$ (P=Cantidad de Partidos, E=Cantidad de Equipos)

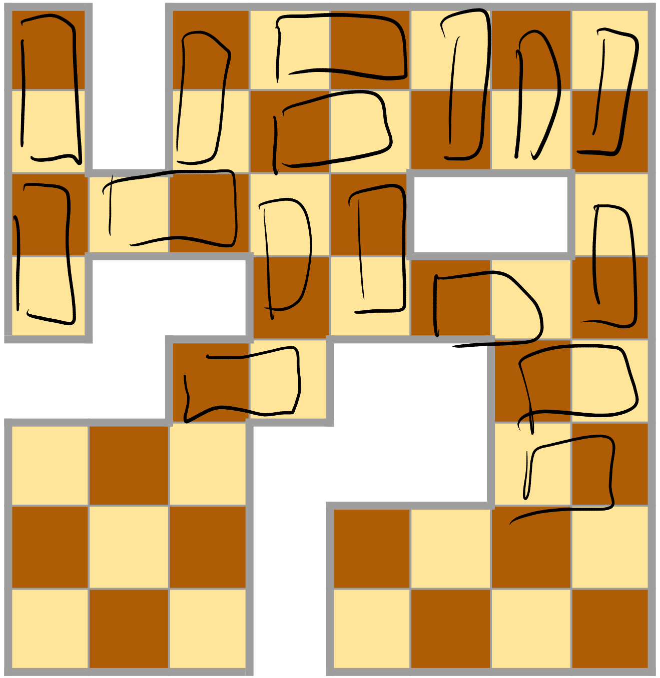
Cantidad de aristas: $3P{+}E$

Cota para el flujo?: Cantidad de puntos por disputar: $2P$

La cota de FF resulta más ajustada: $O((3P{+}E){\times}2P) = O((P{+}E)P)$

Cubriendo el Tablero

Tenemos un tablero de ajedrez al que alguien le ha recortado algunas casillas. Nuestro objetivo es cubrir las casillas restantes usando fichas de dominó, las cuales son capaces de cubrir dos casillas contiguas. Diseñemos un algoritmo que nos diga si podemos hacerlo y como.

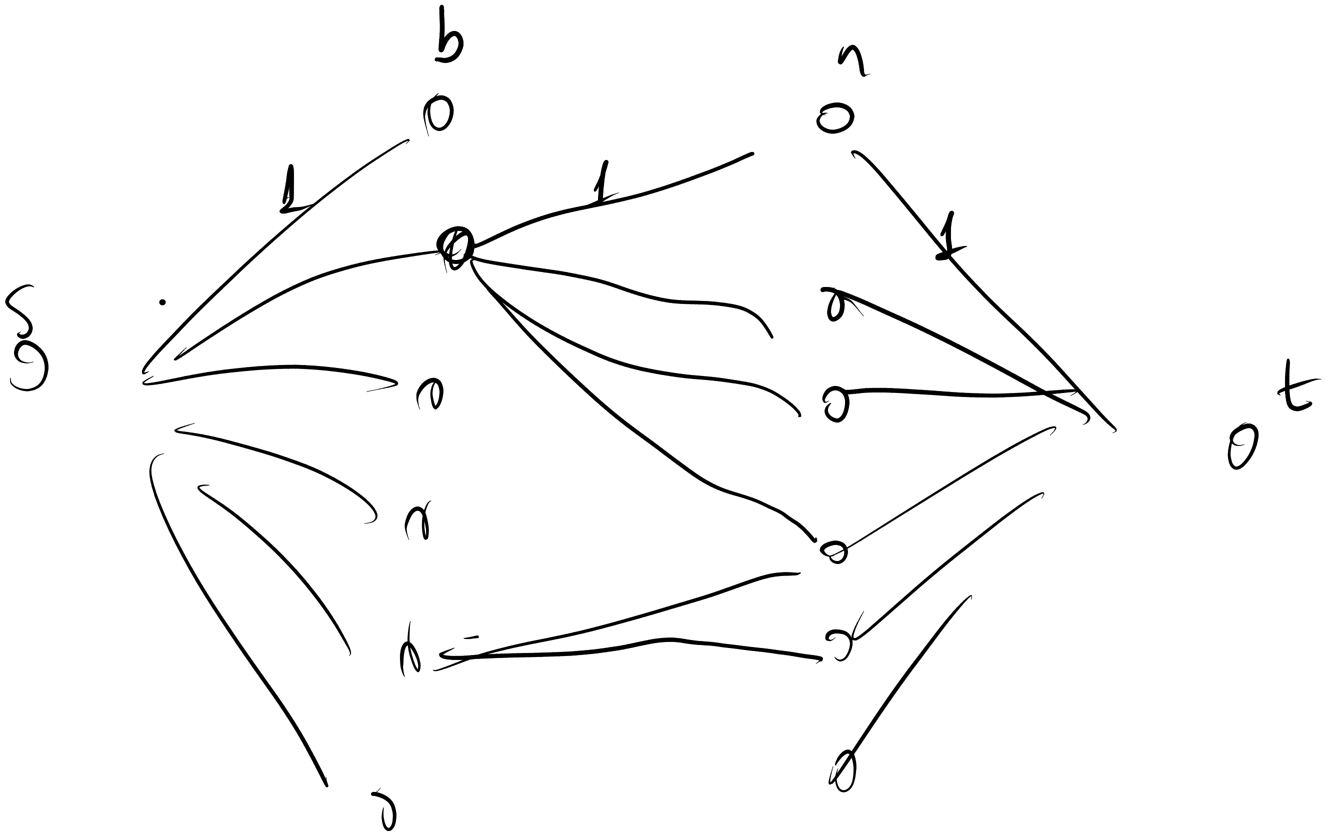


Ideas?

¿Qué entidades tenemos en el problema?

¿Cómo se relacionan entre sí?

Lo modelamos?



¿Que representa cada unidad de flujo?

- $f(s \rightarrow b_i)$ y $f(n_j \rightarrow t)$ representan que hay una dominó sobre la casilla b_i. o la casilla n_j respectivamente. La capacidad será igual a ***1*** ya que necesitamos que cada casilla esté cubierta, y sabremos que podemos cubrir el tablero si todas estas aristas están saturadas.
- $f(b_i \rightarrow n_j)$ tendrá capacidad ***1*** si b_i y n_j son adyacentes. Si el flujo es significa que comparten la ficha de dominó. Estas aristas nos permitirán construir la solución.

Complejidad?

Cantidad de vértices: $c+2$ (c=Cantidad de Casillas)

Cantidad de aristas: $\leq c+4\times(c/2) = 3c$

Cota para el flujo?: Cantidad casillas de un color: c/2

La cota de FF resulta más ajustada: $O(c^2)$

Complejidad?

Cantidad de vértices: $c+2$ (c=Cantidad de Casillas)

Cantidad de aristas: $\leq c+4\times(c/2) = 3c$

Cota para el flujo?: Cantidad casillas de un color: c/2

La cota de FF resulta más ajustada: $O(c^2)$

Torneo Argentino de Programación

- Sábado 24 de Agosto 2024
- Equipos de 3 personas
- 10 ~ 15 problemas de dificultad variada
- Dura 5 hs
- Compitiendo por el honor, y un lugar en las siguiente instancias

Break

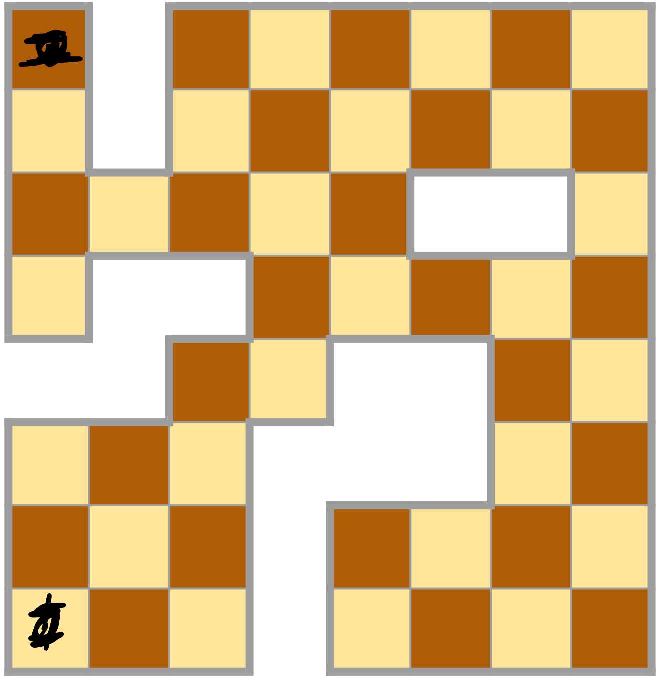
Volvemos en 15’

Torres ♜ ♜ ♜

Otra vez continuamos con nuestro querido tablero.

Ahora queremos poner torres dentro del tablero de manera tal que no se ataquen entre sí (Las torres no pueden saltar los espacios vacíos).

¿Cual es la mayor cantidad de torres que podemos poner? ¿En qué casillas?

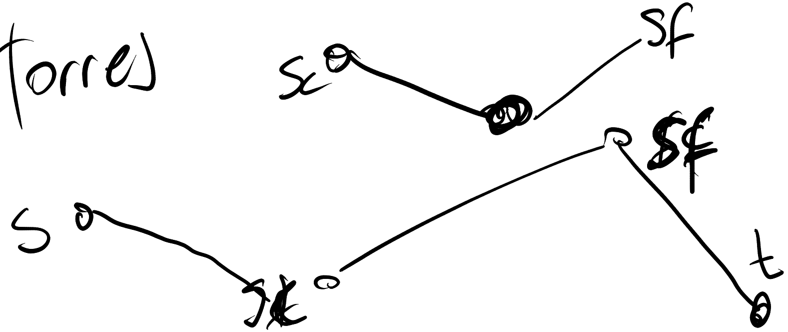


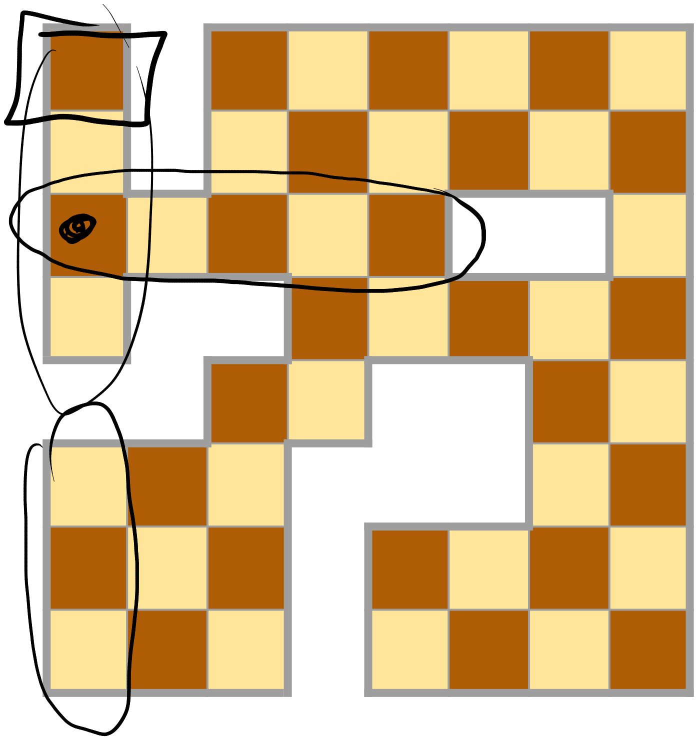
Ideas?

Subfilas / Subcolumnas

1 torre por sf/sc

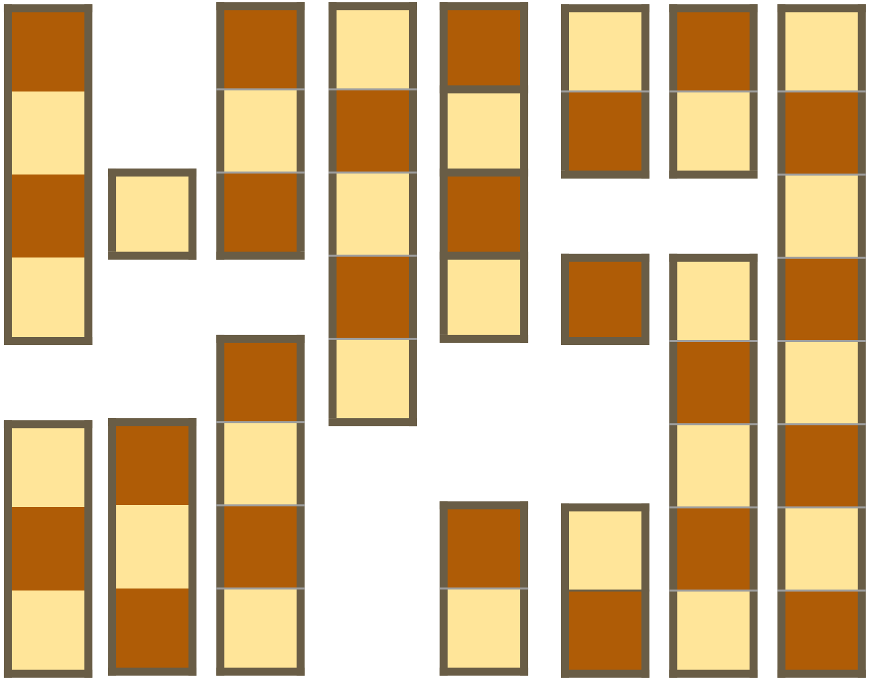
max #torres



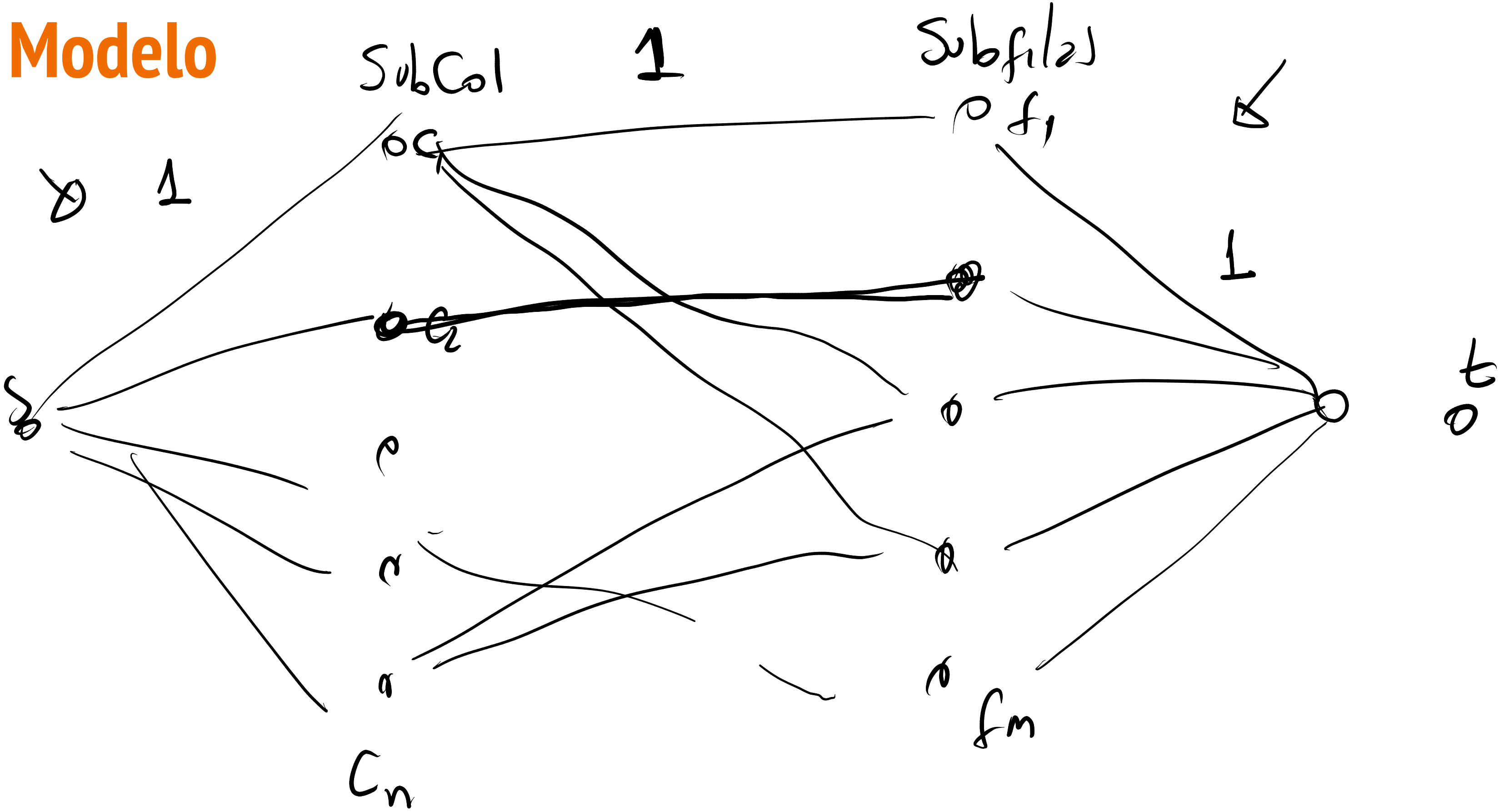


Idea: subcolumnas y subfilas

- En cada subcolumna/subfila puede haber una sola torre
- Una torre está en una subcolumna y en una subfila
- Asignación de subfilas a subcolumnas (la torre de esta fila es la torre de esta subcolumna)



Modelo



Complejidad

Tablero de ***n×n***

- Máxima cantidad de subfilas: $O(n^2)$
- Máxima cantidad de subcolumnas: $O(n^2)$
- Cantidad de vértices en modelo $O(n^2)$
- Cantidad de aristas en modelo $O(n^2)$
- Cota de flujo $O(n^2)$
- Complejidad FF $O(mF) = O(n^4)$

EK $O(|V||E|^2) = O(n^6)$

Elecciones

En las próximas elecciones en Rumestania, la logística para el recuento provisorio de votos en Zrövaliev debe considerar la mala conexión a Internet.

Zrövaliev tiene ***n*** edificios y ***U*** urnas distribuidas en los mismos. Al final del día, los telegramas con el conteo de votos deben llevarse a edificios con buena conexión, ya que los lugares de votación no la tienen.

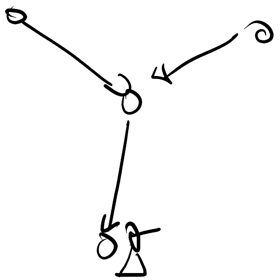
Para esto, se cuenta con personas que se encargaran de acercar los telegramas entre edificaciones en mochilas con capacidad para ***k*** telegramas.

Por cuestiones logísticas, se decidió que para todo par de edificaciones se haga a lo sumo un único viaje, y solo si la distancia entre entre ambos es menor a **d** metros

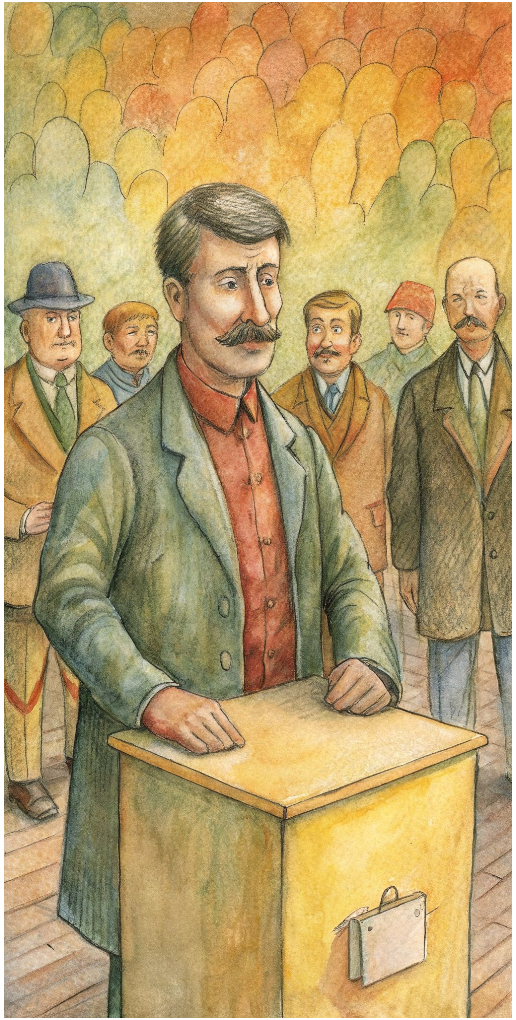
Contamos con la latitud y longitud de cada edificio, cuantas urnas tiene y si tiene buena conexión.

Se quiere saber la máxima cantidad de telegramas que se pueden digitalizar y transferir al centro de cómputos bajo este conjunto de reglas.

Resumen



- ***n*** edificios
- Donde se vota no hay internet
- Se tienen que llevar telegramas a lo edificios con internet
- Por cada edificio sabemos lat, long, urnas y si tiene conexión.
- Podemos llevar ***k*** telegramas de un edificio a otro a distancia **≤*d***
- ¿Cual es la máxima cantidad de telegramas que se pueden transmitir?



Modelo

- [x] Donde se vota no hay internet
- [x] Se tienen que llevar telegramas a lo edificios con internet
- [x] Podemos llevar ***k*** telegramas de un edificio a otro a distancia **≤*d***
- [ ] Los telegramas entre edificios se hacen en un solo viaje

Los telegramas entre edificios se hacen en un solo viaje

Veamos que si tenemos un flujo válido con ciclos, podemos transformarlo en otro sin ciclos (e igual flujo).

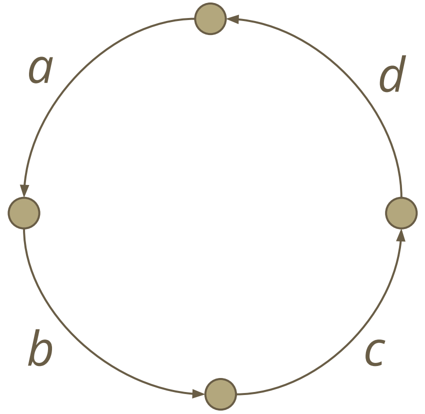
¿Qué significa que haya un ciclo?

Tomo k igual al menor flujo de las aristas del ciclo.

Puedo restarle k a cada una de ellas los flujos de esas y continuar con un flujo válido, ya que quité k al flujo de entrada y k al de salida (manteniendo la diferencia)

Como k es el mínimo, alguna arista tendrá flujo 0. Repito el procedimiento hasta quedarme sin ciclos.

Ahora podemos usar el orden topológico.



Complejidad?

Cantidad de nodos: n

Cantidad de aristas: n a s/t, hasta n^2 entre edificios: $O(n^2)$

Cota para flujo: $min(U, kn^2)$

Cota con FF: $O(min(Un^2, kn^4))$ $= O(n^2 \min(U, kn^2))$

Cota con EK: $O(n^5)$

FIN