Camino mínimo en grafos

Técnicas de Diseño de Algoritmos (Ex Algoritmos y Estructuras de Datos III)

Primer cuatrimestre 2024

Camino mínimo en grafos (orientados o no)

Sea $G = (V, X)$ un grafo y $l : X \to R$ una función de longitud/peso para las aristas de G.

Definiciones:

- La **longitud** de un recorrido R entre dos nodos v y u es la suma de las longitudes de las aristas del R:

$$l(R) = \sum_{e \in R} l(e)$$

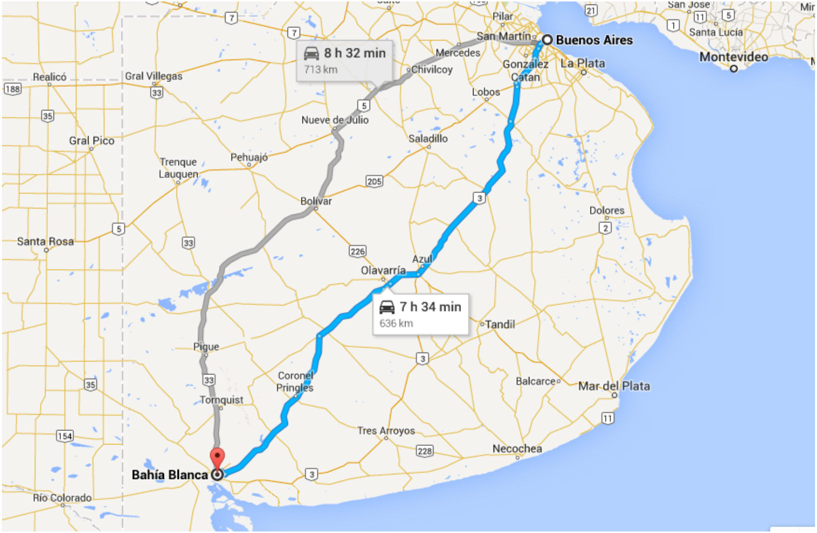
- Un **recorrido mínimo** R^0 entre u y v es un recorrido entre u y v tal que $l(R^0) = \min\{l(R) | R \text{ es un recorrido entre } u \text{ y } v\}$.

- Si un recorrido mínimo entre un par de nodos es un camino entonces se lo llama como **camino mínimo** entre ese par de nodos. La existencia de recorridos mínimos es equivalente a la existencia de caminos mínimos. Puede haber varios caminos mínimos.

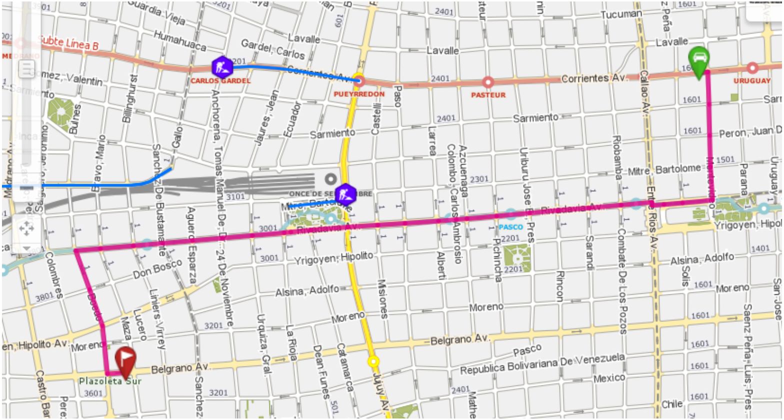
Camino mínimo en grafos (orientados o no)

- La **distancia** entre u y v,$dist(u, v)$, es la longitud de un camino mínimo entre u y v en caso de existir algún camino entre u y v y en caso contrario sería ∞.

Camino mínimo en grafos (orientados o no)



Camino mínimo en grafos (orientados o no)



Camino mínimo en grafos (orientados o no)

Dado un grafo G, se pueden definir tres variantes de problemas sobre caminos mínimos:

Único origen - único destino: Determinar un camino mínimo entre dos vértices específicos, v y u.

Único origen - múltiples destinos: Determinar un camino mínimo desde un vértice específico v al resto de los vértices de G.

Múltiples orígenes - múltiples destinos: Determinar un camino mínimo entre todo par de vértices de G.

Todos estos conceptos se pueden adaptar cuando se trabaja con un grafo orientado.

Camino mínimo en grafos (orientados o no)

- **Aristas con peso negativo:** Si el grafo G no contiene ciclos de peso negativo o contiene alguno pero no es alcanzable desde v, entonces el problema sigue estando bien definido, aunque algunos caminos puedan tener longitud negativa. Sin embargo, si G tiene algún ciclo con peso negativo alcanzable desde v, el concepto de recorrido de peso mínimo deja de estar bien definido.
- **Circuitos:** La existencia de un recorrido que minimiza entre los recorridos sin circuitos. Este problema sí está bien definido para cualquier circunstancia.
- **Propiedad de subestructura óptima de un camino mínimo:** Dado un digrafo $G = (V, X)$ con una función de peso $l : X \to R$, sea $P : v_1 \dots v_k$ un camino mínimo de v_1 a v_k. Entonces $\forall 1 \leq i \leq j \leq k$, $P_{v_i v_j}$ es un camino mínimo desde v_i a v_j. ¿Cómo se puede probar esta propiedad?

Camino mínimo en grafos - Único origen-múltiples destinos

Problema: Dado $G = (V, X)$ un grafo y $l : X \to R$ una función que asigna a cada arco una cierta longitud y $v \in V$ un nodo del grafo, calcular los caminos mínimos de v al resto de los nodos.

Distintas situaciones:

- El grafo puede ser orientado o no.
- Todos los arcos tienen longitud no negativa.
- No hay un circuito orientado de longitud negativa.
- Hay circuitos orientados de longitud negativa.
- Queremos calcular los caminos mínimos entre todos los pares de nodos.

Algoritmo de Dijkstra (1959)

Edsger Dijkstra (1930–2002)

`www.cs.utexas.edu/users/EWD`

Algoritmo de Dijkstra (1959)

Asumimos que las longitudes de las aristas son no negativas. El grafo puede ser orientado o no orientado.

$S := \{v\}$, $\pi(v) := 0$
para todo $u \in V$ **hacer**
    si $(v, u) \in X$ **entonces**
        $\pi(u) := l(v, u)$
    si no
        $\pi(u) := \infty$
    fin si
fin para
mientras $S \neq V$ **hacer**
    `elegir` $w \in V \setminus S$ `tal que` $\pi(w) = \text{mín}_{u \in V \setminus S} \pi(u)$
    $S := S \cup \{w\}$
    para todo $u \in V \setminus S$ **y** $(w, u) \in X$ **hacer**
        si $\pi(u) > \pi(w) + l(w, u)$ **entonces**
            $\pi(u) := \pi(w) + l(w, u)$
        fin si
    fin para
fin mientras
retornar π

Algoritmo de Dijkstra (1959) - Determina camino mínimo

$S := \{v\}$, $\pi(v) := 0$, $pred(v) := 0$
para todo $u \in V$ **hacer**
    si $(v, u) \in X$ **entonces**
        $\pi(u) := l(v, u)$, $pred(u) := v$
    si no
        $\pi(u) := \infty$, $pred(u) := \infty$
    fin si
fin para
mientras $S \neq V$ **hacer**
    `elegir` $w \in V \setminus S$ `tal que` $\pi(w) = \min_{u \in V \setminus S} \pi(u)$
    $S := S \cup w$
    para todo $u \in V \setminus S$ **y** $(w, u) \in X$ **hacer**
        si $\pi(u) > \pi(w) + l(w, u)$ **entonces**
            $\pi(u) := \pi(w) + l(w, u)$
            $pred(u) := w$
        fin si
    fin para
fin mientras
retornar π, $pred$

Algoritmo de Dijkstra (1959) - Determina camino mínimo

$S := \{v\}$, $\pi(v) := 0$, $pred(v) := 0$, $w := v$

para todo $u \in V$ **hacer**

  si $(v, u) \in X$ **entonces**

    $\pi(u) := l(v, u)$, $pred(u) := v$

  si no

    $\pi(u) := \infty$, $pred(u) := \infty$

  fin si

fin para

mientras $S \neq V$ **y** $\pi(w) < \infty$ **hacer**

  `elegir` $w \in V \setminus S$ `tal que` $\pi(w) = \min_{u \in V \setminus S} \pi(u)$

  $S := S \cup w$

  para todo $u \in V \setminus S$ **y** $(w, u) \in X$ **hacer**

    si $\pi(u) > \pi(w) + l(w, u)$ **entonces**

      $\pi(u) := \pi(w) + l(w, u)$

      $pred(u) := w$

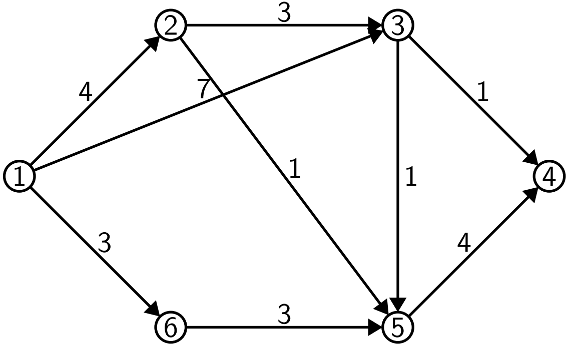
    fin si

  fin para

fin mientras

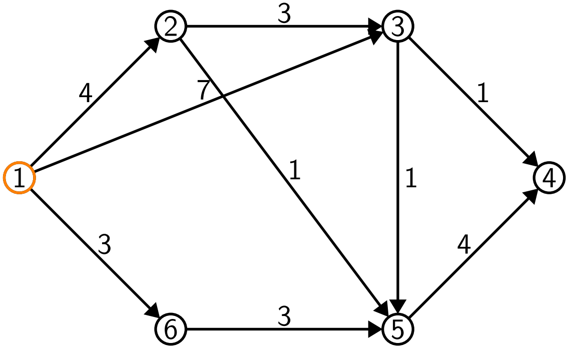
retornar π, $pred$

Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo



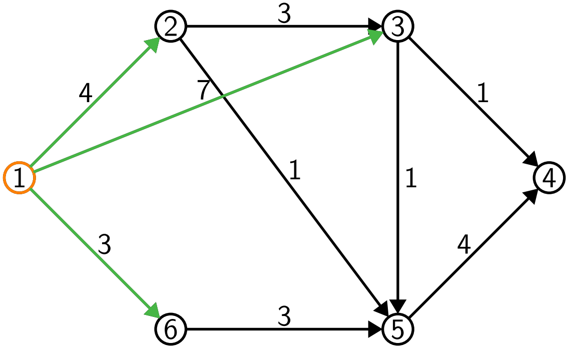
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1\}$ $\pi = (0, ?, ?, ?, ?, ?)$



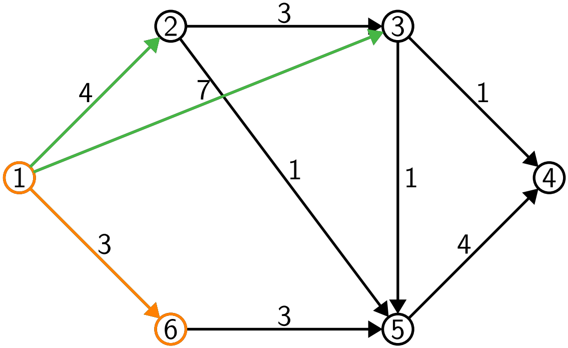
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



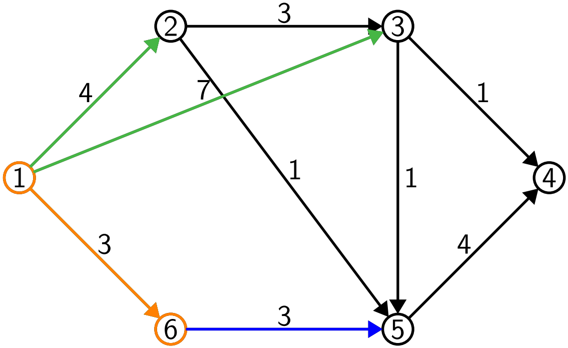
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



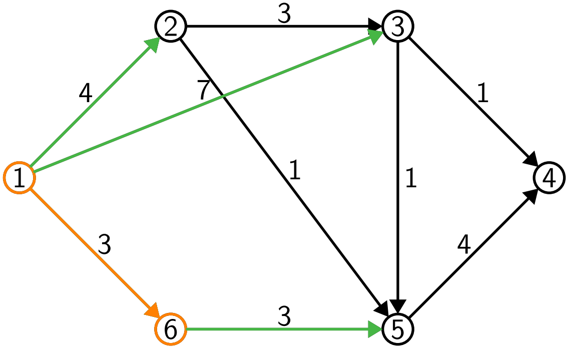
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



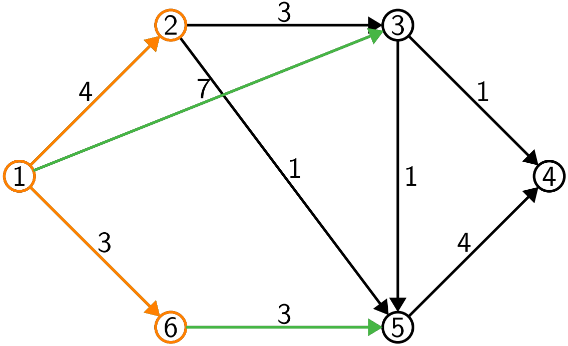
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6\}$ $\qquad$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, 6, 3)$



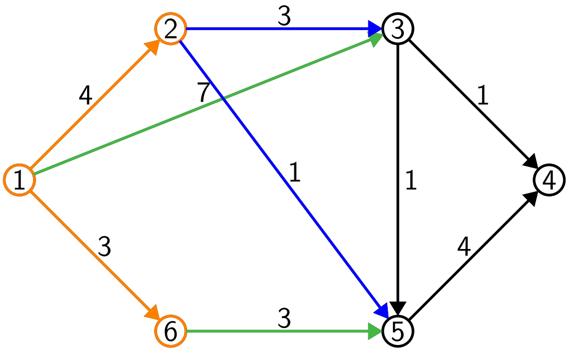
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2\}$ $\qquad\qquad$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, 6, 3)$



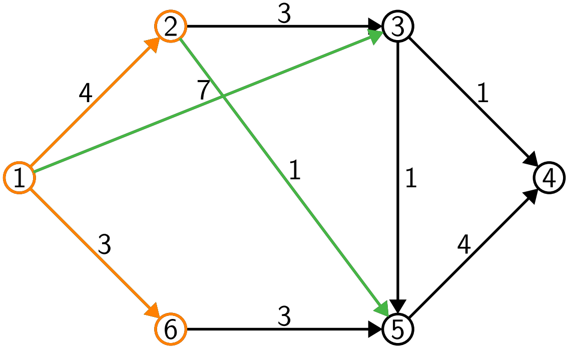
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, 6, 3)$



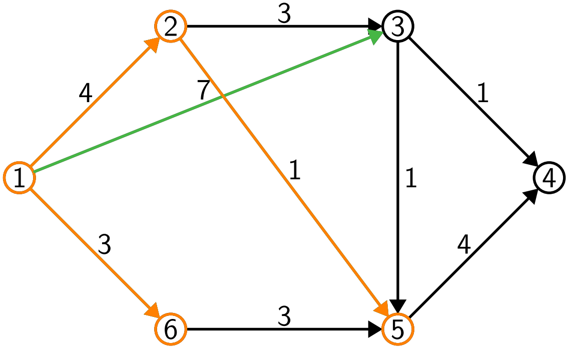
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, 5, 3)$



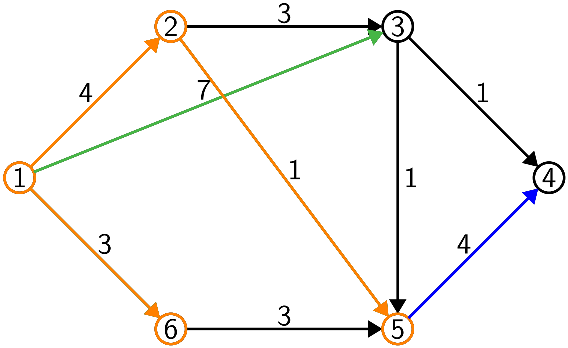
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5\}$ $\qquad\qquad$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, 5, 3)$



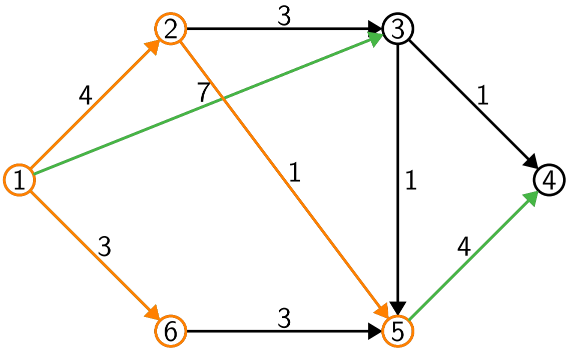
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, 5, 3)$



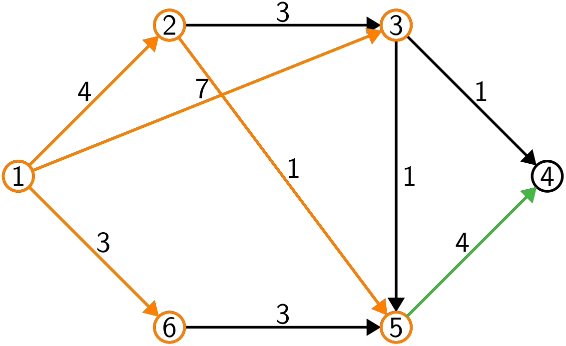
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5\}$ $\pi = (0, 4, 7, 9, 5, 3)$



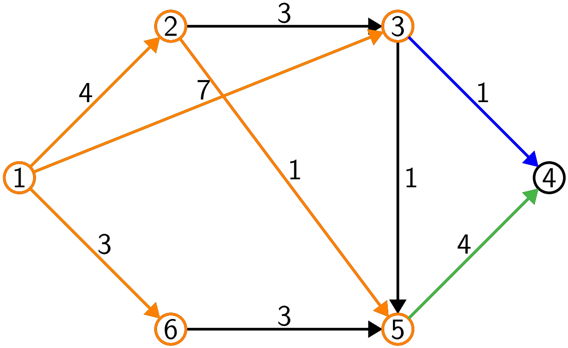
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5, 3\}$ $\qquad \pi = (0, 4, 7, 9, 5, 3)$



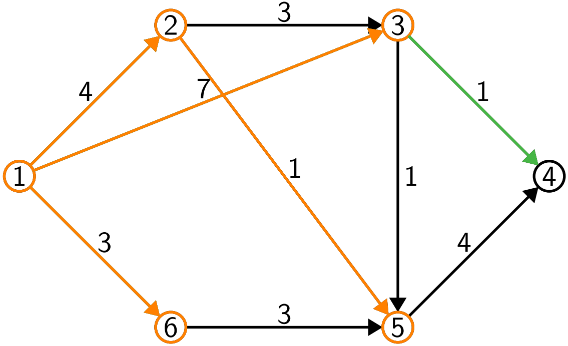
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5, 3\}$ $\qquad$ $\pi = (0, 4, 7, 9, 5, 3)$



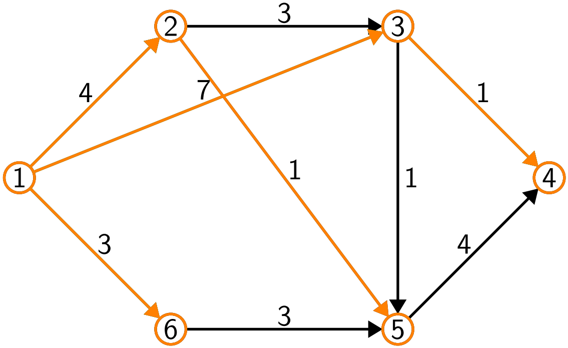
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5, 3\}$ $\qquad$ $\pi = (0, 4, 7, 8, 5, 3)$

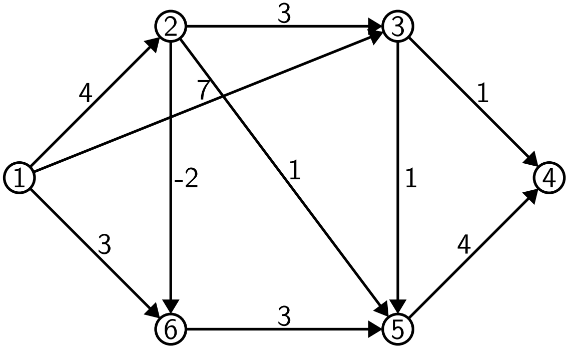


Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6, 2, 5, 3, 4\}$ $\pi = (0, 4, 7, 8, 5, 3)$

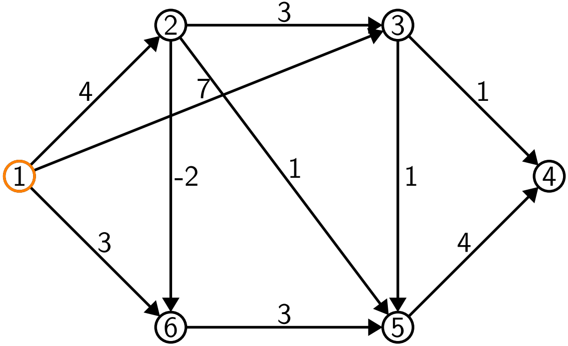


Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo



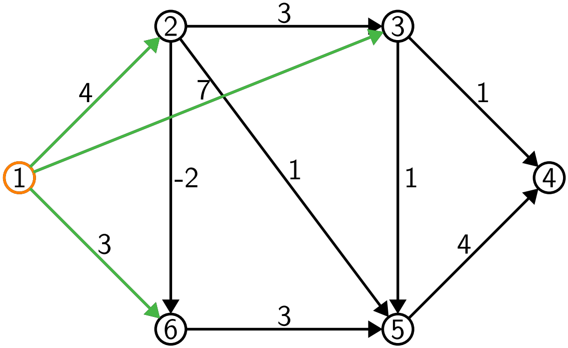
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1\}$ $\pi = (0, ?, ?, ?, ?, ?)$



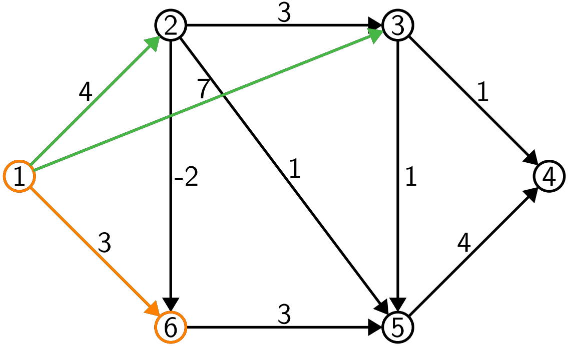
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



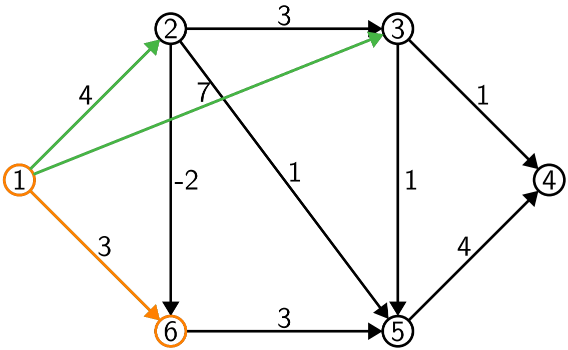
Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



Algoritmo de Dijkstra - Ejemplo

$S = \{1, 6\}$ $\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$



¡Ya no actualizará $\pi(6)$!

Algoritmo de Dijkstra

Lema: Dado un grafo orientado G con pesos no negativos en las aristas, al finalizar la iteración k el algoritmo de Dijkstra determina el camino mínimo entre el nodo v y los nodos de S_k (donde S_k conjunto S al finalizar la iteración k).

Teorema: Dado un grafo orientado G con pesos no negativos en las aristas, el algoritmo de Dijkstra determina el camino mínimo entre el nodo v y el resto de los nodos de G.

Prueba del lema

Llamamos w_k, el vértices agregado a S en la iteración $k \geq 1$, es decir que $S_k = S_{k-1} \cup \{w_k\}$, $v = w_0$ y $S_0 = \{w_0\}$.
En primer lugar, vamos a probar que si $\pi(w_k) = \infty$ entonces $dist(v, w_k) = \infty$. Sea $k' \leq k$, la primera iteración donde el nodo agregado de esa iteración, $w_{k'}$ con $\pi(w_{k'}) = \infty$. Claramente, para cualquier vértice $u \notin S_{k'-1}$ en el momento de ejecutar la iteración k', $\pi(u) = \infty$ ya que $\pi(w_{k'}) = \min_{u \in V \setminus S_{k'-1}} \pi(u) = \infty$. No existe arista que sale de un nodo $w_p \in S_{k'-1}$ con $p \leq k' - 1$ y llega a un nodo $u \notin S_{k'-1}$ pués si existiese (w_p, u),
$\pi(u) \leq \pi(w_p) + l(w_p, u) < \infty$, una vez que termina la iteración p.
Lo cual es una contradicción, ya que no se puede aumentar el valor de $\pi(u)$ a lo largo de la ejecución del algoritmo. Por lo tanto, no hay camino que sale de un nodo de $S_{k'-1}$ y termina en un nodo fuera de $S_{k'-1}$ y particularmente para v y w_k. Consecuentemente, $dist(v, w_k) = \infty$. Este argumento también es el justificativo para interrumpir la ejecución cuando se haya elegido un nodo cuyo valor de π es ∞ para ser agregado a S.

Prueba del lema: Continuación

Probamos ahora por inducción en k si $\pi(w_k) < \infty$ entonces $\pi(w_k) = dist(v, w_k)$.
Caso base con $k = 0$, $\pi(w_0 = v) = 0 < \infty$. Como $dist(v, w_0 = v) = 0$, así que se cumple $\pi(w_0) = dist(v, w_0)$.
Supongamos que vale para cualquier $k' < k$ con $k \geq 1$ que si $\pi(w_{k'}) < \infty$ entonces $\pi(w_{k'}) = dist(v, w_{k'})$. En caso que $\pi(w_k) < \infty$, tomemos C_{v,w_k} un camino mínimo que sale de v y termina en w_k, es decir que $l(C_{v,w_k}) = dist(v, w_k)$. Sabemos que el primer nodo de C_{v,w_k}, $v = w_0 \in S_{k-1}$ y su último nodo, $w_k \notin S_{k-1}$. Sea z, el primer nodo de C_{v,w_k} tal que $z \notin S_{k-1}$ y w_p el nodo anterior de z en C_{v,w_k} con $0 \leq p \leq k-1$ y C_{v,w_p} el subcamino de C_{v,w_k} entre v y w_p y $C_{v,z}$ el subcamino entre v y z.
Claramente, $l(C_{v,z}) = l(C_{v,w_p}) + l(w_p, z)$. Entonces $dist(v, w_k) = l(C_{v,w_k}) \geq l(C_{v,z}) = l(C_{v,w_p}) + l(w_p, z) = dist(v, w_p) + l(w_p, z) = \pi(w_p) + l(w_p, z)$ porque no hay aristas de longitud negativa y por la propiedad de subestructura óptima de un camino mínimo e hipótesis inductiva aplicada para $p < k$.

Prueba del lema: Continuación 2

Es claro que vale $dist(v, w_k) \geq \pi(w_p) + l(w_p, z) \geq \pi(z)$ una vez que termina la iteración p y se mantiene la desigualdad $dist(v, w_k) \geq \pi(z)$ hasta que finaliza la ejecución del algoritmo. En particular, en la iteración k se elijió w_k para agregarlo a S (tanto w_k como z no están en S_{k-1}) lo cual implica que $dist(v, w_k) \geq \pi(z) \geq \pi(w_k)$ en ese momento.
Por otro lado, siempre vale $dist(v, w_k) \leq \pi(w_k)$ ya que $\pi(w_k)$ representa la longitud de un camino que sale de v y termina en w_k y $dist(v, w_k)$ es la longitud de un camino mínimo con estas características. . Entonces $\pi(w_k) = dist(v, w_k)$.

Complejidad del Algoritmo de Dijkstra

- $O(n^2)$, implementación trivial.
- $O((m+n)\ log\ n)$, usando heap binario.
- $O(m+n\ log\ n)$, usando heap fibonacci.

Algoritmo de Ford (1956), más conocido como Bellman-Ford

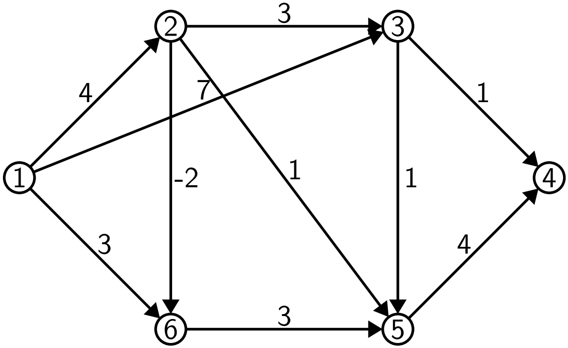
Lester Ford Jr. (1927–2017)

Algoritmo de Ford (1956)

Asumimos que el grafo es orientado y no tiene circuitos de longitud negativa alcanzables desde v.

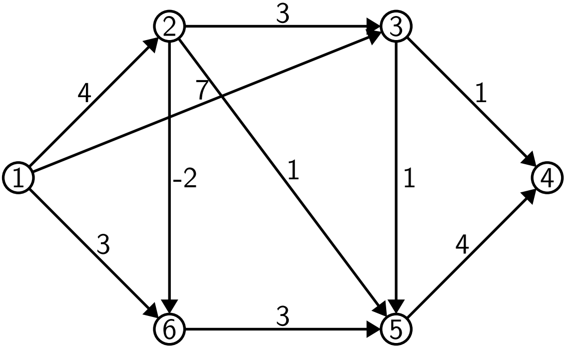
$\pi(v) := 0$
para todo $u \in V \setminus \{v\}$ **hacer**
  $\pi(u) := \infty$
fin para
mientras `hay cambios en` π **hacer**
  $\pi' := \pi$
  para todo $u \in V \setminus \{v\}$ **hacer**
    $\pi(u) := \text{mín}(\pi(u), \text{mín}_{(w,u) \in X} \pi'(w) + l(w,u))$
  fin para
fin mientras
retornar π

Algoritmo de Ford - Ejemplo



Algoritmo de Ford - Ejemplo

$$\pi = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

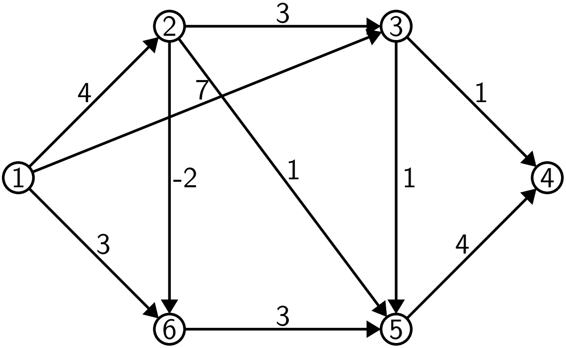


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

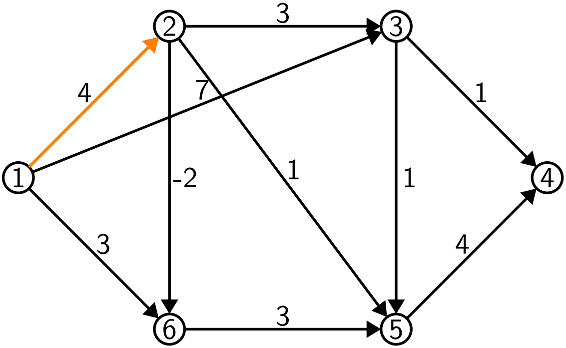


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

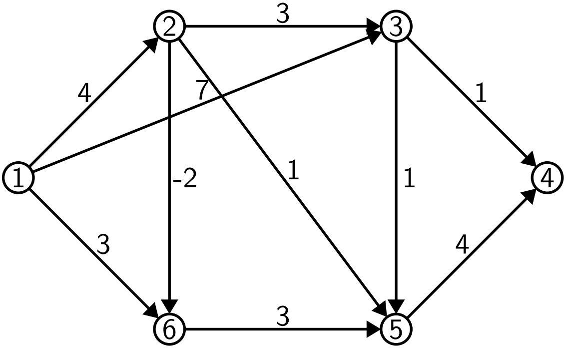


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, 4, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

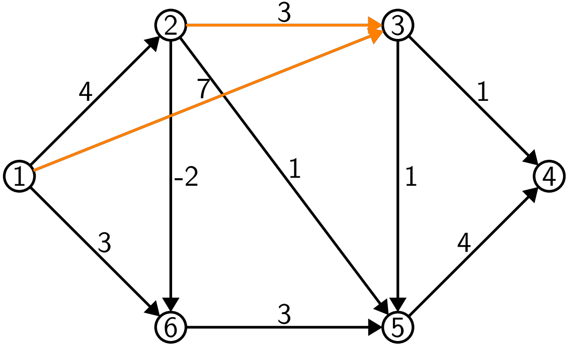


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, 4, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

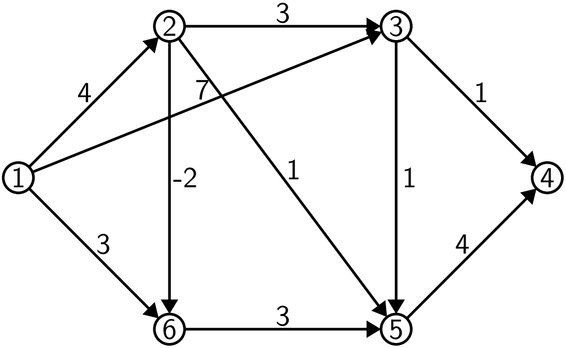


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, \infty)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

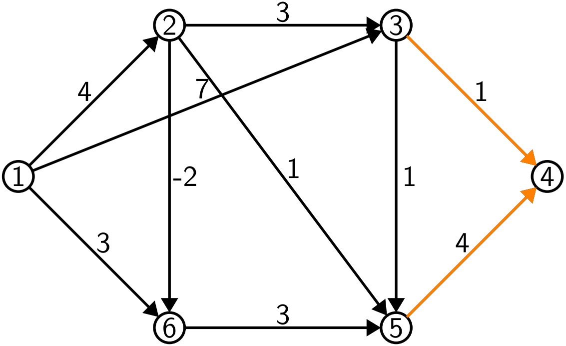


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, \infty)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

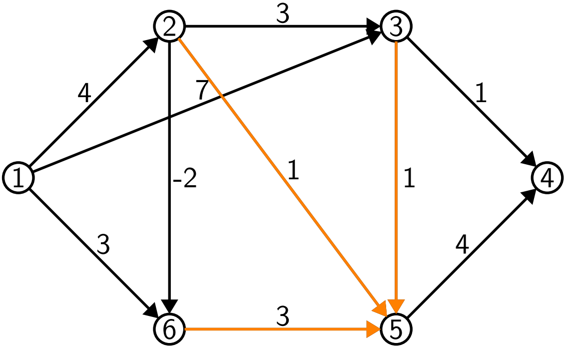


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, \infty)$

$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$

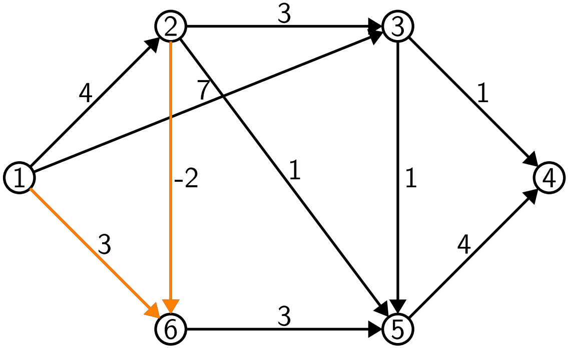


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, \infty)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

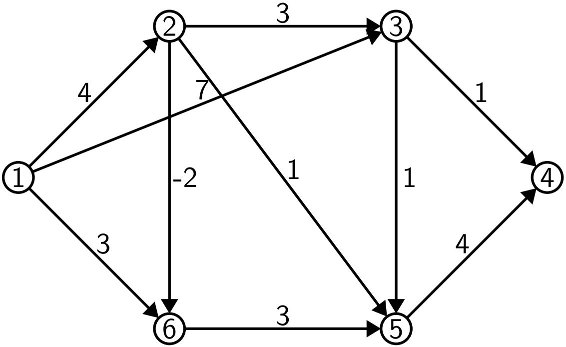


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 1

$$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$

$$\pi' = (0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty)$$

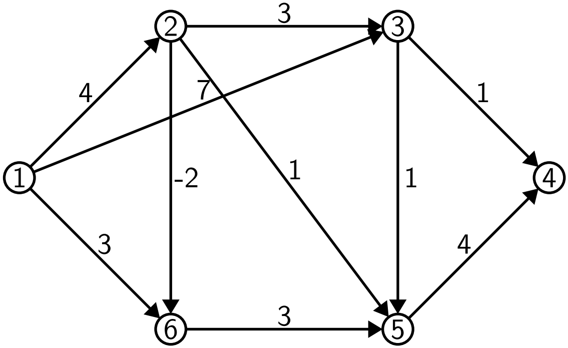


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$

$$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$

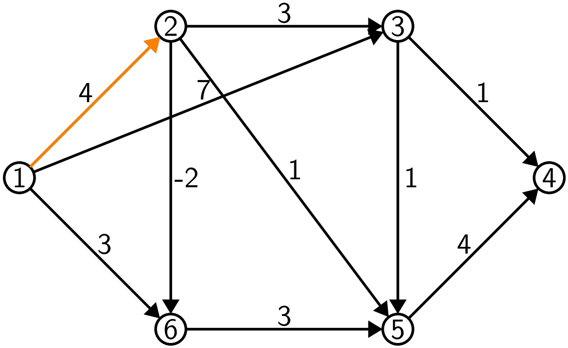


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$

$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$

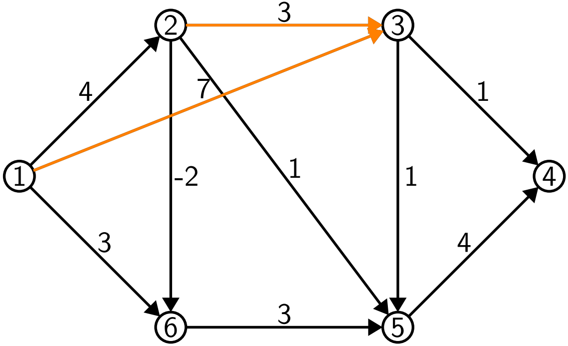


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$

$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$

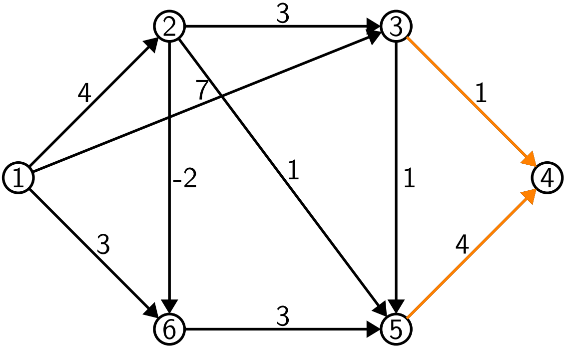


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$$\pi = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$

$$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$

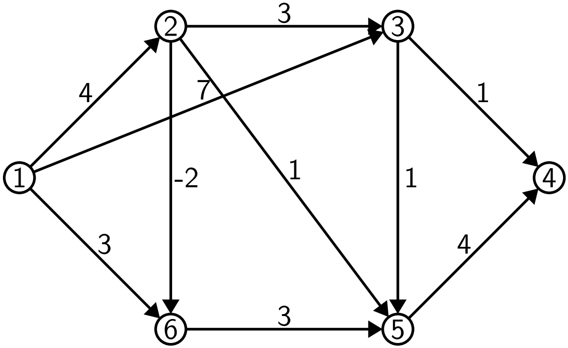


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$$\pi = (0, 4, 7, 8, \infty, 3)$$

$$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$

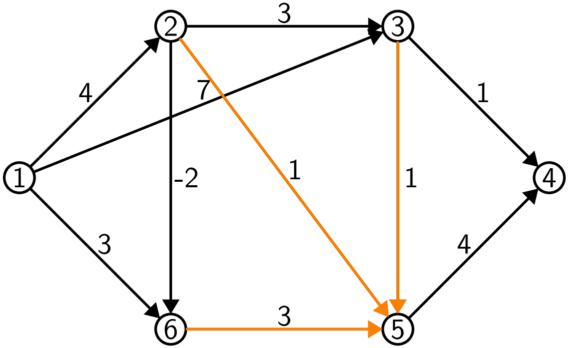


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$\pi = (0, 4, 7, 8, \infty, 3)$

$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$

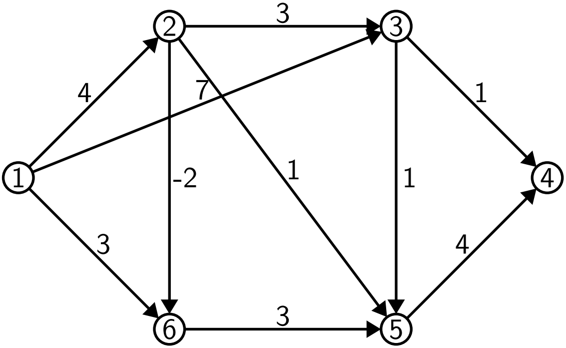


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$$\pi = (0, 4, 7, 8, 5, 3)$$

$$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$

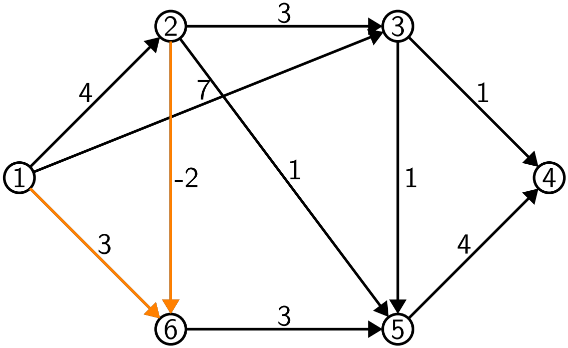


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$\pi = (0, 4, 7, 8, 5, 3)$

$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$

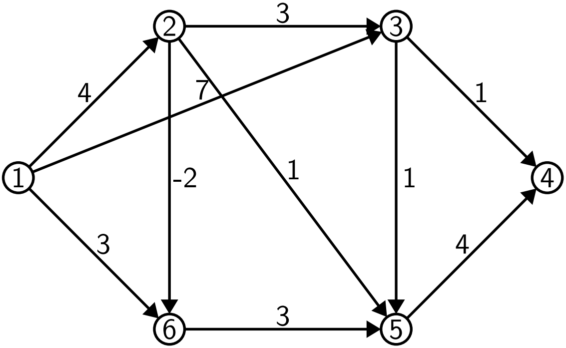


Algoritmo de Ford - Ejemplo

Iteración 2

$$\pi = (0, 4, 7, 8, 5, 2)$$

$$\pi' = (0, 4, 7, \infty, \infty, 3)$$



Algoritmo de Ford (1956)

Lema 1: Dado un grafo orientado G con una función de longitud l para sus aristas y un nodo origen v, en todo momento de la ejecución del algoritmo de **Ford**.

1. Si $\pi(w) < \infty$ para algún nodo w entonces existe un recorrido R que conecta v con w y $\pi(w) = l(R)$.
2. Si existe un camino mínimo entre v y w entonces $\pi(w) \geq dist(v, w)$.

Lema 2: Dado un grafo orientado G con una función de longitud l para sus aristas y un nodo origen v. Si C es un camino entre v y w con k aristas entonces al finalizar la iteración k (Loop de Mientras) del algoritmo de **Ford** (puede ocurrir antes), $\pi(w) \leq l(C)$.

Corolario 1: Dado un grafo orientado G con una función de longitud l para sus aristas y un nodo origen v, al finalizar la iteración k (Loop de Mientras) del algoritmo de **Ford** determina un camino mínimo entre v y w si existe un camino mínimo de v a w con a lo sumo k aristas.

Prueba de Lema 1

Probamos (1) por inducción en k que es el número de iteraciones transcurridas.
Case base con $k = 0$. Únicamente $\pi(v) = 0 < \infty$ y el recorrido vacío que conecta v consigo mismo tiene longitud 0.
Supongamos que vale (1) al terminar la iteración $k - 1$ con $k \geq 1$.
Si $\pi(w) < \infty$ al terminar la iteración k, en el caso que $\pi(w)$ no se había modificado en la iteración k, por HI al finalizar la iteración $k - 1$ existe un recorrido R entre v y w con $l(R) = \pi(w)$. Caso contrario, $\pi(w) = \pi'(x) + l(x, w) < \infty$ para algún nodo x donde $\pi'(x) < \infty$ es el valor de $\pi(x)$ cuando termina la iteración $k - 1$ y por HI, existe un recorrido R' entre v y x tal que $l(R') = \pi'(x)$.
Agregamos la arista (x, w) a R' y obtenemos un recorrido R entre v y w y $l(R) = l(R') + l(x, w) = \pi'(x) + l(x, w) = \pi(w)$.
(2) es una consecuencia de (1) ya que $dist(v, w)$ es la longitud de cualquier camino mínimo si existe al menos uno. Un camino mínimo es un recorrido mínimo.

Prueba de Lema 2

Probamos por inducción en k.
Case base donde $k = 0$. Claramente, el único camino sin aristas (camino vacío) que sale de v es el que conecta v consigo mismo y tiene longitud 0. Como se inicializa $\pi(v) = 0$ antes iterar, se cumple el lema.
Supongamos que vale el lema para caminos de $k - 1$ aristas que salen de v con $k \geq 1$. Ahora consideramos un camino C de k aristas que sale v y llega a w. Sea u el nodo anterior de w en C y C' el subcamino obtenido de C quitando el nodo w y la arista (u, w). C' conecta v con u y tiene $k - 1$ aristas. Por HI, al terminar la iteración $k - 1$, $\pi(u) \leq l(C')$. Al terminar la iteración k, $\pi(w) \leq \pi'(u) + l(u, w) \leq l(C') + l(u, w) = l(C')$ donde $\pi'(u)$ guarda el valor de $\pi(u)$ cuando terminó la iteración anterior.

Algoritmo de Ford (1956)

Teorema: Dado un grafo orientado G sin circuitos de longitud negativa alcanzables desde v, el algoritmo de **Ford** determina un camino mínimo entre el nodo v y cada nodo alcanzable desde v.

Prueba: Sea w alcanzable desde v. Veamos que dado cualquier recorrido R entre v y w, en caso que R contiene un ciclo C y como C es alcanzable desde v, por hipótesis, C no es de longitud negativa y $R \setminus C$ es otro recorrido entre v y w, además $l(R \setminus C) \leq l(R)$. Por lo tanto, basta considerar recorridos entre v y w que son caminos para buscar recorridos/caminos mínimos entre v y w. Como hay una cantidad finita de caminos posibles entre v y w, existe al menos un camino mínimo entre v y w y por Corolario 1, el algoritmo encuentra un camino mínimo entre v y w en las primeras $n-1$ iteraciones ya que cualquier camino tiene a lo sumo $n-1$ aristas.

Algoritmo de Ford (1956)

Corolario 2: Dado un grafo orientado G con una función de longitud l para sus aristas y un nodo origen v, si hubo cambio de π hasta la iteración n inclusive en la ejecución entonces existe un ciclo de longitud negativa alcanzable desde v.

Prueba: Supongamos que no existe un ciclo de longitud negativa alcanzable desde v. De acuerdo a la prueba del último teorema, para cada nodo w alcanzable desde v se puede encontrar un camino mínimo entre v y w en las primeras $n-1$ iteraciones, es decir que $\pi(w) = dist(v, w)$ y no se va modificar más (por Lema 1 parte (2)). Ahora consideramos un nodo w no alcanzable desde v, entonces no existe recorrido entre v y w y por Lema 1 parte (1), $\pi(w) = \infty$ en todo momento. Por lo tanto, en la iteración n no hubo cambio para ningún $\pi(w)$ (esto puede haber ocurrido desde alguna interación anterior). Esto contradice que hubo cambio de π hasta la iteración n inclusive. Por lo cual, existe un ciclo de longitud negativa alcanzable desde v.

Algoritmo de Ford (1956)

Proposición: Dado un grafo orientado G con una función de longitud l para sus aristas y un nodo origen v, si existe un ciclo de longitud negativa alcanzable desde v entonces hay cambio de π en toda iteración de la ejecución del algoritmo de **Ford**.

Prueba: Sea C el ciclo de longitud negativa alcanzable desde v y los nodos de C de acuerdo al orden de la orientación son $w_1, \cdots, w_q$. Entonces cada nodo w_i es alcanzable desde v y por Lema 2, $\pi(w_i)$ pasa del valor ∞ a un valor acotado. Sea k la iteración a partir de la cual $\pi(w) < \infty$ para $1 \leq i \leq q$. Lo cual implica que hubo cambio en π en cada una de las primeras k iteraciones. Supongamos que existe una iteración $k' > k$, en la cual no hubo cambio en π. Implicaría que no hubo cambio para $\pi(w_1), \cdots, \pi(w_q)$. Entonces $\pi(w_1) \leq \pi(w_q) + l(w_q, w_i)$ y $\pi(w_{i+1}) \leq \pi(w_i) + l(w_i, w_{i+1})$ para $1 \leq i \leq q-1$. Si sumamos estas q desigualdades da $\sum_{i=1}^{q} \pi(w_i) \leq l(C) + \sum_{i=1}^{q} \pi(w_i)$. Absurdo porque $l(C) < 0$.

Algoritmo de Ford (1956)

- ¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Ford?
- ¿Qué pasa si aplicamos Ford a un grafo no orientado?
- Mejora del cálculo de π
- ¿Cómo podemos modificar el algoritmo de Ford para detectar si hay circuitos de longitud negativa alcanzables desde v?

Algoritmo de Ford (1956)

Asumimos que el grafo es orientado. Detecta si hay circuitos de longitud negativa alcanzables desde v.

$\pi(v) := 0$, $i := 0$
para todo $u \in V \setminus \{v\}$ **hacer**
    $\pi(u) := \infty$
fin para
mientras `hay cambios en` π **e** $i < n$ **hacer**
    $i := i + 1$
    para todo $u \in V$ **hacer**
        $\pi(u) := \text{mín}(\pi(u), \text{mín}_{(w,u)\in X}\pi(w) + l(w,u))$
    fin para
fin mientras
si `hay cambios en` π **entonces**
    retornar `"Hay circuitos de longitud negativa alcanzable desde` v`."`
si no
    retornar π
fin si

Algoritmo de Ford (1956)

1. ¿Qué modificaciones hay que hacer para que el algoritmo de Ford pueda generar explícitamente y eficientemente los caminos mínimos?

2. Idem al punto anterior pero para que pueda generar explícitamente y eficientemente un ciclo de longitud negativa si hubiera alguno.

Algoritmo de Ford (1956)

1. Mantener un arreglo *pred* como el algoritmo de Dijkstra, se actualiza $pred(u) := w$ cada vez que $\pi(u)$ es mejorado al valor de $\pi(w) + l(w, u)$.

2. Implementar el punto (1) y en caso de detectar un ciclo de longitud negativa. Considerar solamente las aristas $(pred(w), w)$ siempre que $pred(w)$ sea nodo del grafo (hay a lo sumo n aristas). Aplicar DFS a partir de v, en caso de encontrar un back-edge, localizamos un ciclo y necesariamente es de longitud negativa. Si no hay back-edge, significa que DFS devolvió un árbol con raíz v. Entonces tomamos una arista $(pred(w), w)$ fuera de este árbol. Aplicamos DFS a partir de w pero invertiendo las orientaciones de las aristas (en lugar de $(pred(u), u)$ es $(u, pred(u))$). Necesariamente hay un back-edge y localizamos un ciclo (volver a tomar las orientaciones originales y sigue siendo ciclo, este ciclo es de longitud negativa).