Práctica para el segundo parcial

Santiago Cifuentes

Junio 2024

1. Una empresa de comunicaciones mantiene una red donde hay nodos proveedores y nodos cliente. Existen conexiones entre algunos nodos, y cada conexión tiene una capacidad entera asociada que representa su ancho de banda. La empresa representa esta información utilizando un grafo pesado G donde cada nodo del grafo es (sorpresivamente) un nodo de la red, y cada eje se asocia a una conexión, donde el peso del eje representa el ancha de banda de esa conexión. Se define el *ancho de banda proveedor* como el máximo k tal que existe un nodo proveedor en cada componente conexa de G_k, donde G_k es el subgrafo generador de G que se obtiene de eliminar las aristas de peso menor a k.

   a) Dado un grafo $G = (V_{clientes} \cup V_{proveedores}, E)$. Proponer un algoritmo eficiente para determinar el ancho de banda proveedor de un grafo G.

   b) Supongamos que la empresa puede hacer que un único cliente de la red se transforme en nodo proveedor. Dar un algoritmo para encontrar algún cliente que al transformarlo en nodo proveedor, mejore el ancho de banda proveedor de la red. Si no es posible, indicarlo; y si hay más de un cliente que se pueda elegir, devolver a todos ellos.

   Complejidad: la complejidad de ambos algoritmos debe ser $O(\min(m \log(n), n^2))$, donde n es la cantidad de nodos y m la cantidad de ejes de G.

2. A Juli le gusta andar en bicicleta por la ciudad y es su medio preferido de transporte. Hay dos tipos de calles, pavimentadas y empedradas. Cada calle conecta dos puntos de la ciudad y tiene una cierta longitud. Como le gusta andar en bici, Juli prefiere fuertemente no andar por una calle empedrada si existe un camino pavimentado. Además, nunca, jamás, anda por dos calles empedradas de forma consecutiva, ya que tiene que descansar un poco para volver a agarrar la calle empedrada.

   a) Proponer un algoritmo basado en grafos que dada la lista de puntos P de la ciudad, la lista de calles pavimentadas C_P, la lista de calles empedradas C_E y dos puntos A y B determine un camino de A a B que minimice en primer lugar la cantidad de calles empedradas que deben recorrerse, y luego la distancia recorrida, respetando la restricción de no usar dos calles empedradas seguidas[1]. El algoritmo debe ser eficiente.

   b) Justificar la correctitud del algoritmo.

   Complejidad: Misma que el ejercicio anterior.

[1] Recordar que cada calle e tiene una longitud asociada l_e

3. Tuki fue uno de los afortunados en entrar a la casa de GH (Grupo Humano). En este juego cada semana los jugadores votan por la eliminación de otro jugador. Más puntualmente, cada jugador vota a un único jugador y los jugadores con más votos son enviados a un desafío.

   Tuki sabe que esta semana conviene mantener la votación lo más pareja posible, para evitar que surjan grietas en la política de la casa. En la casa hay n jugadores y k grupos, y Tuki conoce el grupo g_i al que pertenece cada jugador i, con $1 \leq g_i \leq k$. Tuki sabe también cuál es el conjunto de jugadores N_i al que está dispuesto a votar el jugador i. Si algún grupo j recibe más votos que el doble de la cantidad de jugadores en el grupo, entonces se va a sentir atacado y sus jugadores van a ser agresivos en las siguientes rondas. Por otro lado, si un jugador individual i recibe más de 3 votos, entonces también se siente atacado y su actuar se vuelve impredecible para la próxima semana.

   Tuki quiere decidir, dados los n jugadores junto a sus conjuntos N_i y la descripción de los k grupos, si es posible que la votación de esta semana logre que ningún grupo ni jugador se sienta atacado

   a) Modelar el problema como un problema de flujo máximo. Justificar su correctitud.

   b) Proponer un algoritmo que resuelva el modelo propuesto.

   c) ¿Qué complejidad tiene el algoritmo propuesto? Expresar la respuesta en función de los parámetros que recibe Tuki.