Versión 1.1: Se agregó una opción correcta a la pregunta 4.

Técnicas de Diseño de Algoritmos
Primer Cuatrimestre 2024
2do Recuperatorio (T. Mañana)

Nombre y Apellido	L.U.	N°Orden
....	....	....

*Duración: **3 horas**. Este examen es a **libro cerrado**. Todas las preguntas tienen $k > 1$ opciones correctas. Las respuestas donde se marquen exactamente esas k dan 2 puntos, aquellas donde se marquen al menos $\lceil k/2 \rceil$ correctas y más correctas que incorrectas dan 1 punto, las que tengan menos de $\lceil k/2 \rceil$ correctas o igual o más incorrectas que correctas dan 0, y si todas las marcadas son incorrectas dan $-0{,}5$ puntos. Para aprobar el parcial se deben sumar $p \geq 10$ puntos y la nota será $p/2$.*

Pregunta 1 Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ una función de peso de G, $v \in V$ y $e \in E$. ¿Cuáles de estas afirmaciones son verdaderas? (Nota: AGM="árbol generador mínimo")

1 [X] Si todas las aristas de G tienen peso distinto, entonces el AGM de G es único.
2 [X] Si e es puente, entonces pertenece a todo árbol generador de G.
3 [X] Si e pertenece a todo árbol generador de G, entonces es puente.
4 [ ] Para todo AGM T de G, el único camino en T que conecta a v con cualquier vértice w cumple que es un camino que maximiza el peso de la arista de mínimo peso entre todos los caminos de v a w en G.
5 [ ] Si $\phi(e) \leq \phi(e')$ para toda arista e' de G, entonces e pertenece a todo AGM de G.
6 [X] Si $\phi(e) \leq \phi(e')$ para toda arista e' de G, entonces e pertenece a algún AGM de G.
7 [X] Para todo AGM T de G, el único camino en T que conecta a v con cualquier vértice w cumple que es un camino que minimiza el peso de la arista de máximo peso entre todos los caminos de v a w en G.
8 [ ] Si los pesos de todas las aristas son positivos, siempre existe un árbol de caminos mínimos desde v que es a su vez un AGM de G.

Pregunta 2 Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices y una función de peso $\phi\colon E \to \mathbb{N}$. Considere, para los siguientes escenarios, cuál(es) algoritmos de AGM es posible aplicar (con mínima modificación), y, cuando corresponda, qué implmentaciones son posibles para minimizar la complejidad temporal.

- Dado $M \in \mathbb{N}$, queremos un bosque generador de T de G tal que $\sum_{e \in E(T)} \phi(e) \leq M$ con máxima cantidad de aristas.

1 [X] Kruskal
2 [ ] Prim

- Queremos obtener el árbol generador máximo de G.

3 [X] Kruskal
4 [X] Prim

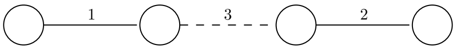
- Queremos el AGM de G, sabemos las aristas de G son tales que hay una arista entre los vértices $i, j \in V$ si y solo si $j = i + 1$ o $i + j$ es par.

5 [X] Prim en $O(n^2)$
6 [X] Kruskal en $O(n^2)$
7 [ ] Kruskal en $O(m \log n)$
8 [ ] Prim en $O(m \log n)$

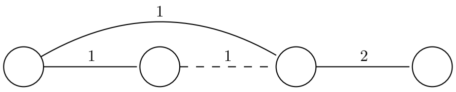
- Queremos el AGM de G, sabemos que las aristas de G son tales que hay una arista entre los vértices $i, j \in V$ si y solo si $j = i + 1$ o $i + j = n$.

9 [ ] Prim en $O(n^2)$
10 [ ] Kruskal en $O(n^2)$
11 [X] Kruskal en $O(m \log n)$
12 [X] Prim en $O(m \log n)$

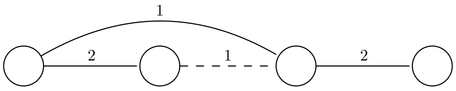
Pregunta 3 A continuación se muestran algunos grafos, marcando algunas de las aristas con líneas punteadas y el resto con líneas sólidas. Responder, para cada caso, cuál algoritmo de árbol generador mínimo visto en clase es posible que se esté ejecutando, sabiendo que, por ahora, seleccionó a las aristas sólidas.

1. 

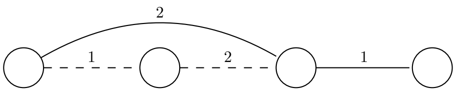
1 [ ] Prim 2 [X] Kruskal 3 [ ] Ninguno

2. 

4 [X] Prim 5 [X] Kruskal 6 [ ] Ninguno

3. 

7 [ ] Prim 8 [ ] Kruskal 9 [X] Ninguno

4. 

10 [X] Prim 11 [ ] Kruskal 12 [ ] Ninguno

Pregunta 4 Sea $D = (V, E)$ un digrafo con $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \geq 10$, y $|E| = m$, en el que toda arista $v_i \to v_j$ de E cumple que $i < j$. Supongamos que, además, tenemos una función de peso $\phi \colon E \to \mathbb{Z}$ tal que $\phi(e) > 0$ para toda arista $e \in E$. ¿Cuál entre las siguientes es la complejidad temporal más ajustada para el mejor algoritmo que conocemos que encuentra los pesos de los caminos mínimos desde v_3 a todos los otros vértices en D?

1 [X] $O(n + m)$ 3 [ ] $O(n^3)$ 5 [ ] $O(nm)$
2 [ ] $O(n^2)$ 4 [ ] $O(n + m \log n)$ 6 [ ] $O(n!n)$

Supongamos que ya corrimos este algoritmo en D; ahora construimos D' agregando a D una arista $e = v_4 \to v_7$ y definimos $\phi(e) = -3$. Nuevamente queremos conseguir los pesos de los caminos mínimos desde v_3 a todos los otros vértices. Para $v_i, v_j \in V$, llamamos $d(v_i, v_j)$ a la distancia, es decir, el peso del camino mínimo, desde v_i hasta v_j en D, mientras que $d'(v_i, v_j)$ es la distancia desde v_i hasta v_j en D'. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

7 [ ] Solo es posible que $d'(v_3, v_i) \neq d(v_3, v_i)$ si $i \in \{4, \ldots, 7\}$.
8 [ ] $d'(v_3, v_i) \neq d(v_3, v_i)$ para todo vértice v_i con $i \geq 7$.
9 [X] $d'(v_3, v_i) = d(v_3, v_i)$ para todo vértice v_i con $i < 7$.
10 [ ] En D' cambian los pesos de todos los caminos mínimos respecto de D, y como el peso de la nueva arista es negativo, la complejidad para calcularlos será asintóticamente mayor.
11 [ ] Para determinar qué caminos mínimos cambian es necesario recorrer el grafo con DFS para chequear que e no forme un ciclo con el resto de las aristas de D.

Partiendo del digrafo D original, supongamos ahora que D' se define agregando la arista $e = v_8 \to v_6$ con $\phi(e) = 2$. Seguimos buscando obtener los pesos de los caminos mínimos desde v_3 a todos los otros vértices. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

12 [X] Es imposible que la incorporación de e genere un ciclo negativo alcanzable desde v_3.

13 [X] Es posible que D' no tenga ciclos.

14 [ ] Como $\phi(e) > 0$, $d'(v_i, v_j) = d(v_i, v_j)$ si $i \geq 6$ y $j > i$.

15 [ ] $d'(v_3, v_i) = d(v_3, v_8) + 2 + d(v_6, v_i)$ para todo v_i.

16 [ ] Para calcular los caminos mínimos desde v_3 en D' es necesario aplicar un algoritmo de mayor complejidad temporal a la indicada en la primera pregunta.

Pregunta 5 Manu tiene un digrafo conexo $G = (V, E)$ con una función de peso $\phi\colon E \to \mathbb{Z}$. Dados dos vértices $v, w \in V$, Manu quiere encontrar la distancia (es decir, el peso del camino mínimo) de v a w. Con este objetivo, inicialmente hizo un análisis de G, y descubrió que tiene una estructura particular:

- El conjunto V se puede particionar en tres subconjuntos V_1, V_2 y V_3, de tal forma que hay una arista $t_1 \to s_2 \in E$ donde $t_1 \in V_1$ y $s_2 \in V_2$, y una arista $t_2 \to s_3 \in E$ tal que $t_2 \to s_3 \in E$, $t_2 \in V_2$ y $s_3 \in V_3$, y para $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ no hay otra arista en E que sea de un vértice de V_i a uno de V_j.
- El vértice v pertenece a V_1 y el vértice w pertenece a V_3.
- Para todo par de vértices $x, y \in V_3$ vale que $x \to y \in E \Rightarrow \phi(x \to y) \geq 0$.
- No hay ciclos de peso negativo en V_2.
- No hay ciclos en V_1.

Si llamamos n_i y m_i a la cantidad de nodos y de aristas de la componente V_i, para $i \in \{1, 2, 3\}$. ¿Cuál es la complejidad más ajustada en la que Manu puede resolver el problema de encontrar el camino mínimo de v a w, usando los algoritmos vistos en la materia?

1 [X] $O(n_1 + m_1 + n_2 m_2 + m_3 \log n_3)$.

2 [ ] $O(n_1 + m_1 + n_2 + m_2 + m_3 \log n_3)$.

3 [ ] $O(n_1 m_1 + n_2 m_2 + m_3 \log m_3)$.

4 [ ] $O(n_1 \log m_1 + n_2 + m_2 + n_3 m_3)$.

Supongamos que ahora Manu descubrió que tiene la posibilidad de cambiar G por otro grafo G' en el que se reemplaza al conjunto V_2 y todas sus aristas por una arista $e = (z_1, z_3)$ con $z_1 \in V_1$ y $z_3 \in V_3$ fijos. El objetivo de Manu es quedarse con aquel entre G y G' que minimice la distancia de v a w, y cuenta con la información que consiguió de la ejecución del algoritmo anterior: Manu ya conoce $d(v, x_1)$ para todo $x_1 \in V_1$, $d(s_2, x_2)$ para todo $x_2 \in V_2$, y $d(s_3, x_3)$ para todo $x_3 \in V_3$. ¿Cómo puede Manu determinar en la mínima complejidad temporal si la distancia entre v y w es menor en G o en G'?

5 [X] Para calcular la distancia de v a w usando e puede usar $d(v, z_1)$ que ya la tiene calculada y $\phi(e)$, pero debe calcular $d(z_3, t)$ ejecutando Dijkstra desde z_3.

6 [ ] Usando $d(s_2, t_2)$, que es un valor conocido, basta con chequear si $\phi(e) < \phi(t_1, s_2) + d(s_2, t_2) + \phi(t_2, s_3)$. En caso afirmativo, la menor de las distancias de v a w se da en G'.

7 [ ] Puede calcular la distancia de v a w usando $d(v, z_1)$, $\phi(e)$ y $d(z_3, w)$, puede obtener los tres valores en $O(1)$ con la información que ya conoce.

8 [ ] Puede reemplazar V_2 por e y ejecutar Dijkstra desde v. Comparar la distancia entre v y w obtenida contra la distancia en G. Si le da menor, entonces la menor de las distancias está en G'.

9 [ ] Agregar e a G y correr Bellman-Ford desde v en el nuevo grafo. Obtener el camino mínimo C de v a w. Si C pasa por vértices de V_2 entonces la menor de las distancias está en G, si pasa por e entonces la menor de las distancias está en G'.

Pregunta 6

La empresa de e-commerce y logística MerladoCibre se dispone a automatizar el proceso de entregas para aumentar su eficiencia y decidió comprar un camión autónomo de último modelo, que usará para enviar productos desde su depósito central d a alguna dirección indicada z. Este camión fue desarrollado en el exterior, y al probarlo se descubrió que tenía dificultades para transitar calles empedradas. Por esto, MerladoCibre compró cubiertas especiales para el camión, las cuales pueden colocarse para lograr que el mismo sea capaz de andar por cualquier calle sin problemas. El inconveniente es que, al usarlas, el camión va a la mitad de velocidad, y por lo tanto no parecería ser idóneo llevarlas puestas todo el tiempo. MerladoCibre posee una descripción de la ciudad en forma de un digrafo $G = (V, E)$, donde V denota el conjunto de esquinas de la ciudad y E el conjunto de calles (las cuales tienen dirección, dado que no toda calle es doble mano). También conoce un subconjunto $V_r \subseteq V$ de esquinas donde el camión podría cambiar las cubiertas, y el subconjunto $E_m \subseteq E$ de calles por las cuales el camión no puede pasar empleando las cubiertas normales. Aparte, conoce para cada calle $e \in E$ y el tiempo $t(e)$ que tarda el camión en recorrerla usando las cubiertas normales. Se sabe que en cambiar cubiertas se tarda un tiempo fijo $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que las esquinas de d y z están representadas en el grafo G, deseamos conocer cuál es el menor tiempo que puede tomar hacer un envío desde d a z, teniendo en cuenta que el camión puede cambiar de cubiertas cuántas veces hagan falta en las esquinas del conjunto V_r y que el camión solo puede andar por los calles del conjunto E_m si tiene puestas las cubiertas especiales (y en cuyo caso, cada calle la recorre en el doble de tiempo). Inicialmente el camión tiene puestas las cubiertas estándar. ¿Cuál(es) de estas estrategias de modelado permite(n) llegar a la respuesta correcta?

1 ☐ Construir un grafo G' que contiene todos los vértices de G. Además, por cada arista $e = v \to w$ de G con $v \in V_r$, agregar a G' dos vértices vw_x y vw_e, aristas $v \to vw_x$ y $v \to vw_e$ con peso 0 y k respectivamente, y aristas $vw_x \to w$ y $vw_e \to w$ con pesos $t(e)$ y $2t(e)$ respectivamente. Calcular el camino mínimo desde d hasta z en G'.

2 ☒ Construir un grafo G' que por cada vértice v de G tenga dos vértices v_x y v_e, que representen estar en la esquina con la cubierta estándar o la cubierta especial, respectivamente. Agregar las aristas $v_x \to v_e$ y $v_e \to v_x$ con peso k, para cada $v \in V_r$. Por cada arista $e = v \to w$ de $E \setminus E_m$, agregar la arista $v_x \to w_x$ a G' (con peso $t(e)$), y por cada arista $e = v \to w$ de E, agregar las aristas $v_e \to w_e$ (con peso $2t(e)$). Calcular el mínimo entre los caminos mínimos de d_x hasta z_x y z_e.

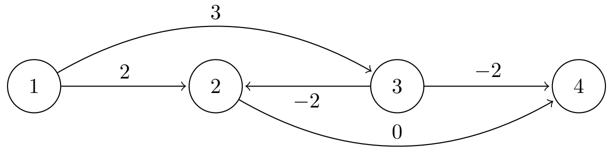
3 ☐ Buscar el camino mínimo de d a z ignorando la información de las calles empedradas. Una vez obtenido el camino mínimo C, guardar el tiempo que demora en una variable p. Por cada arista e del camino perteneciente a E_m, buscar primer vértice v_a de V_r que aparezca antes que e en el camino, y el primer vértice v_b de V_r que aparezca después de e. Sumar a p el valor $2k$ más el peso de todas las aristas de C entre v_a y v_b. El valor final de p corresponde al tiempo buscado.

4 ☐ Construir un grafo G' agregando a G dos vértices c_e, c_x que representen el cambio a la cubierta especial y la vuelta a las cubiertas estándar, se agregan aristas $v \to c_e$ y $v \to c_x$ con peso k para cada $v \in V_r$, y por cada arista $e = v \to w$ de E_m, agregar una arista $c_e \to w$ con el peso doble al peso $v \to w$. Calcular el camino mínimo desde d hasta z en G'.

¿Cuál es la complejidad más ajustada de aplicar la estrategia correcta?

5 ☒ $O(m \log n)$ 6 ☐ $O(m^2 \log n)$ 7 ☐ $O(mn)$ 8 ☐ $O(n^2 \log n)$

Pregunta 7 Consideremos el siguiente digrafo pesado D:



Si ejecutásemos Dijkstra desde el vértice 1: ¿para cuál(es) vértice(s) el valor de la salida de Dijkstra corresponde efectivamente con la distancia?

1 ☒ 1 2 ☐ 2 3 ☒ 3 4 ☐ 4

Si ejecutásemos Floyd-Warshall sobre D. ¿Cuál es la mínima iteración tras la cual $M_{1,4}$ tendrá el valor correspondiente a la distancia mínima desde 1 hasta 4? (Recordar que al comienzo de la iteración 1 la matriz M es la matriz donde $M_{i,j}$ es: el peso de la arista $i \to j$ si existe, ∞ si no existe, y 0 si $i = j$)

5 ☐ 2 6 ☐ 1 7 ☒ 3 8 ☐ Nunca tendrá ese valor.

Pregunta 8

Los países A y B limitan por medio de una cordillera montañosa. A lo largo del tiempo se fueron construyendo m caminos bidireccionales que unen distintas ciudades de ambos países, pero estos suelen ser peligrosos debido a las bajas temperaturas en la altura que hacen que muchas veces la carretera esté resbalosa. Recientemente se desarrolló una nueva tecnología que se puede aplicar sobre el pavimento para evitar este problema, para el interés de los gobiernos de A y B. La idea es utilizar esta tecnología en los m caminos, pero debido a que aún es muy costosa, el proyecto es por lo menos ponerla en suficientes caminos como para que desde toda ciudad con caminos limítrofes, al menos uno de ellos tenga este recubrimiento. Conociendo las ciudades de A y de B que se conectan con algún cruce y cuáles son todos los caminos que las conectan, queremos conocer cuál es la mínima cantidad de caminos que hay que modernizar para que se cumpla el objetivo buscado. Los equipos científicos de A y B conocen que la respuesta a esta pregunta puede obtenerse a partir de la solución de un problema de flujo: saben que deben armar una red con las a ciudades de A y las b ciudades de B (consideramos solo ciudades de las que sale al menos un camino limítrofe) de forma que un vértice fuente s está conectado a las ciudades de A con aristas de capacidad 1, las ciudades de B están conectadas a un sumidero t con aristas de capacidad 1, y entre todo par de ciudades v_A, v_B entre las que existe un camino limítrofe se pone una arista $v_A \to v_B$ de capacidad ∞. A esta red se le debe calcular el flujo máximo de s a t pero, ¿Cómo se relaciona el valor obtenido con el buscado?

1 ☐ Una vez calculado el flujo, obtener la red residual R. Contar la cantidad de vértices que representan ciudades de A que no son alcanzables desde s en R y sumarle la cantidad de ciudades de B que son alcanzables desde s en R. Este es el valor buscado.

2 ☐ La cantidad de vértices de $A \cup B$ por los que **no** pasa flujo es el valor buscado.

3 ☒ Tomar el valor del flujo y sumarle 1 por cada vértice de $A \cup B$ por el que no pase flujo. Ese es el valor buscado.

4 ☐ El valor del flujo es exactamente el buscado.

Si consideramos $c = a + b$, ¿Cuál es la complejidad temporal más ajustada para calcular el flujo descrito? Para computar el flujo máximo se usa el algoritmo de Edmons-Karp.

5 ☐ $O(cm)$ 6 ☒ $O(\text{mín}\{a, b\}m)$ 7 ☐ $O(cm^2)$ 8 ☐ $O(c^2m)$

Pregunta 9 Consideremos un grafo no dirigido $G = (V, E)$, e imaginemos que lo modelamos con una red de flujo N que posee los mismos vértices que G pero en la que, para cada par de vértices v, w que son vecinos en G, hay dos aristas ($v \to w$ y $w \to v$) con capacidad 1 cada una. Por último, supongamos que, para dos vértices $s, t \in V(N)$, computamos un flujo máximo desde s a t, y este flujo resulta tener valor 1. ¿Cuáles de los siguientes hechos podemos afirmar con seguridad?

1 ☐ No hay ningún ciclo en G que contenga alguna arista por la que pasa flujo.
2 ☐ Hay un único camino simple en G de s a t.
3 ☒ No hay dos caminos en G que vayan de s a t y sean disjuntos en vértices intermedios.
4 ☒ G tiene al menos un puente.
5 ☐ G no tiene ciclos.

Pregunta 10 Dado que el recuperatorio de TDA se toma al mismo tiempo para ambos turnos, lxs docentes de la materia, dejando de lado nuestras diferencias, decidimos colaborar en el armado del examen compartiendo ejercicios. Un acto que podría cimentar una paz duradera entre las comisiones. Proponemos ejercicios y los clasificamos según tema (AGM, camino mínimo, ...) y según tipo (teórico, complejidades, modelado, ...), cada ejercicio tiene exactamente un tema y un tipo. Para cada tipo i de ejercicios, se quiere incluir a lo sumo a_i ejercicios del mismo. Análogamente, se pueden incluir a lo sumo b_j del tema j.

¿Cuál(es) de los siguientes modelados cumple(n) que el valor del flujo máximo equivale a la máxima cantidad de ejercicios que puede incluir el examen?

1 ☒ Un nodo por tipo, un nodo por tema, dos nodos s y t. Aristas de s a cada tema j con capacidad b_j. Aristas de cada tipo i a t con capacidad a_i. Para cada par i, j ponemos una arista del tema j al tipo i con tanta capacidad como ejercicios haya de ese tipo y ese tema. Se calcula flujo máximo de s a t.

2 ☐ Un nodo por ejercicio, más dos nodos s y t. De s a cada ejercicio sacamos un eje con capacidad a_i, donde i es el tipo de este ejercicio. De cada ejercicio a t sacamos una arista con capacidad b_j, donde j es su tema. Se calcula flujo máximo de s a t.

3 ☒ Un nodo por tipo, un nodo por tema y un nodo por ejercicio, más dos nodos s y t. Ponemos ejes de s a cada tipo i con capacidad a_i. Ejes de cada tema j a t con capacidad b_j. Para cada ejercicio, ponemos una arista de su tipo i a él, y otro desde él hasta su tema j, ambos con capacidad 1. Se calcula flujo máximo de s a t.

4 ☒ Un nodo por tipo, un nodo por tema, dos nodos s y t. Aristas de s a cada tipo i con capacidad a_i. Aristas de cada tema j a t con capacidad b_j. Para cada par i, j ponemos una arista del tipo i al tema j con tanta capacidad como ejercicios haya de ese tipo y ese tema. Se calcula flujo máximo de s a t.

¿Cuáles de las siguientes cotas temporales son cumplidas por al menos uno de los modelados correctos, si ejecutamos Edmons-Karp para computar el flujo máximo? No importa si la cota es ajustada o no. Notación: n_1 es la cantidad de tipos, n_2 la cantidad de temas y m la cantidad de ejercicios candidatos.

5 ☒ $O((n_1 + n_2 + m)^3)$
6 ☒ $O((\sum_j b_j) * n_1 * n_2)$
7 ☒ $O((\sum_i a_i) * (m + n_1 + n_2))$
8 ☒ $O(m * (m + n_1 + n_2))$