Propiedades y Modelado de Flujo

Alfredo Umfurer y Ezequiel Companeetz

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

24 de junio de 2024

Índice

Red (definición)

¿Qué es una red?

- Un digrafo $D = (V, E)$ con:

Red (definición)

¿Qué es una red?

- Un digrafo $D = (V, E)$ con:
    1. Dos vértices distinguidos: s (fuente) y t (sumidero)

Red (definición)

¿Qué es una red?

- Un digrafo $D = (V, E)$ con:
  1. Dos vértices distinguidos: s (fuente) y t (sumidero)
  2. Una función de capacidad $c : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Flujo (definición)

¿Qué es un flujo (válido)?

- Una función $f : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple:

Flujo (definición)

¿Qué es un flujo (válido)?

- Una función $f : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple:
  1. Restricciones de capacidad:
     $f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E(D)$

Flujo (definición)

¿Qué es un flujo (válido)?

- Una función $f : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple:
  1. Restricciones de capacidad:
     $f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E(D)$
  2. Restricciones de conservación de flujo:
     $$\sum_{w \in N^-(v)} f(w \to v) = \sum_{w \in N^+(v)} f(v \to w) \quad \forall v \in V(D) - \{s, t\}$$
     // El flujo que entra a v suma lo mismo que el que sale

Flujo (definición)

¿Qué es un flujo (válido)?

- Una función $f : E(D) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple:
  1. Restricciones de capacidad:
     $f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E(D)$
  2. Restricciones de conservación de flujo:
     $$\sum_{w \in N^-(v)} f(w \to v) = \sum_{w \in N^+(v)} f(v \to w) \quad \forall v \in V(D) - \{s, t\}$$
     // El flujo que entra a v suma lo mismo que el que sale

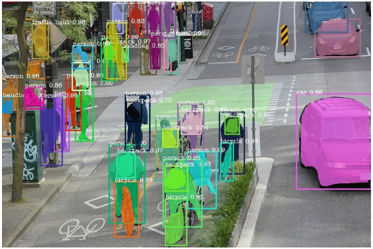
El **valor del flujo** es:

$$\sum_{v \in N^+(s)} f(s \to v) \; - \sum_{v \in N^-(s)} f(v \to s) =$$

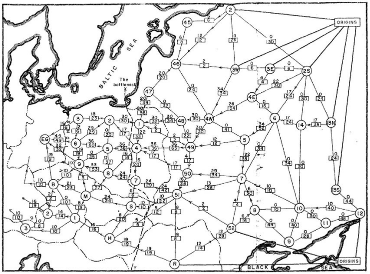
$$\sum_{v \in N^-(t)} f(v \to t) \; - \sum_{v \in N^+(t)} f(t \to v) = v(F)$$

Aplicaciones de Flujo

Segmentación de imágenes

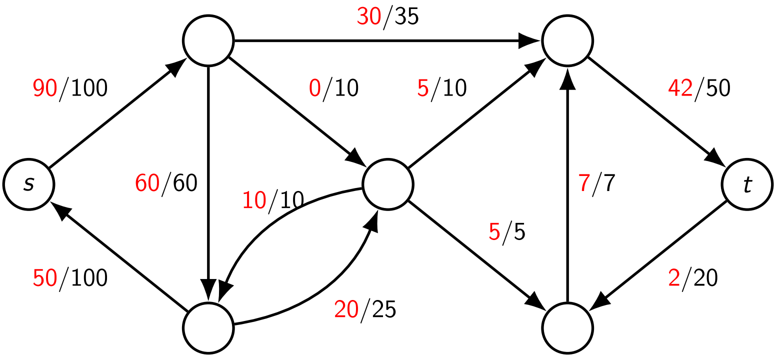


Redes de transporte



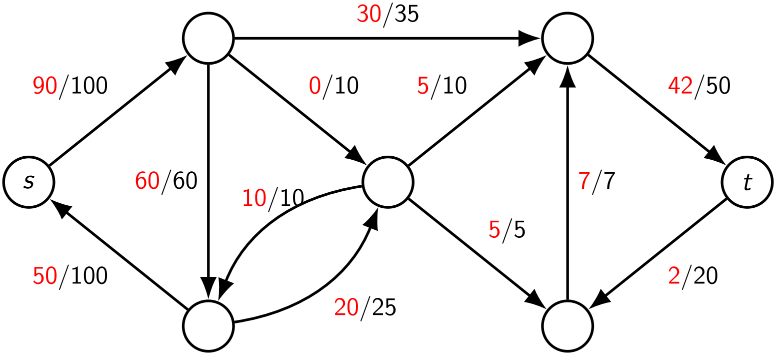
Flujo (ejemplo)

- ¿Es el siguiente flujo válido?



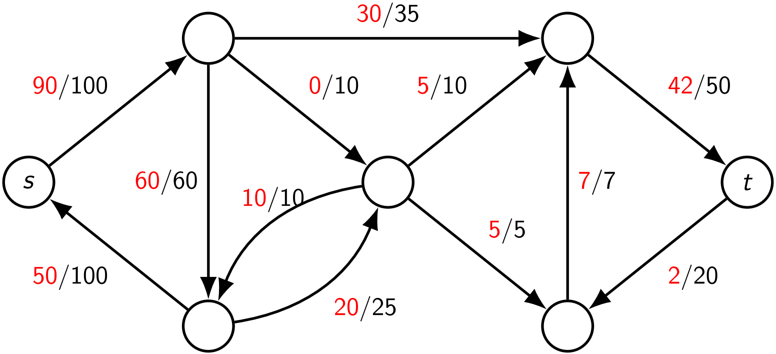
Flujo (ejemplo)

- ¿Es el siguiente flujo válido?
  1. ¿Cumple las restricciones de capacidad?



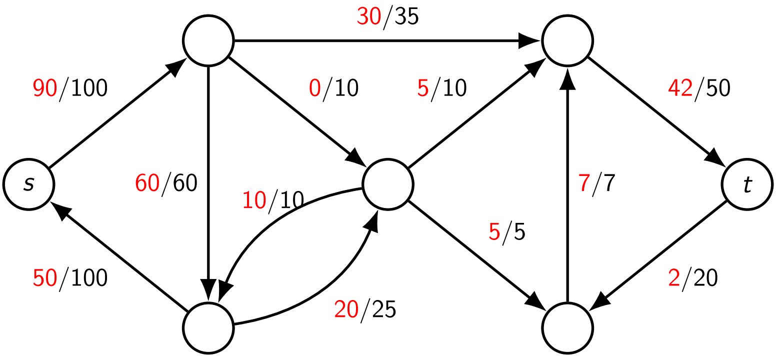
Flujo (ejemplo)

- ¿Es el siguiente flujo válido?
  1. ¿Cumple las restricciones de capacidad? Si!



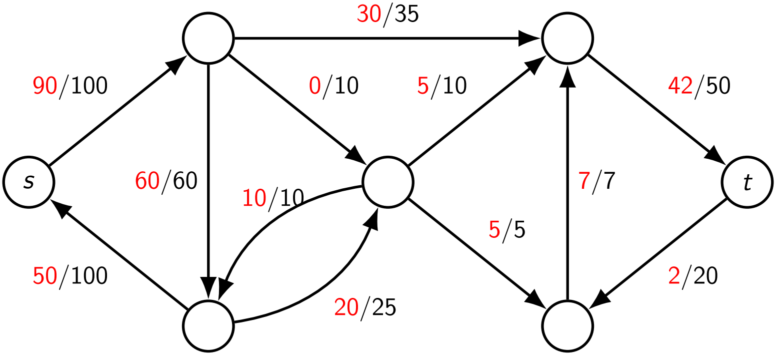
Flujo (ejemplo)

- ¿Es el siguiente flujo válido?
  1. ¿Cumple las restricciones de capacidad? Si!
  2. ¿Cumple las restricciones de conservación de flujo?



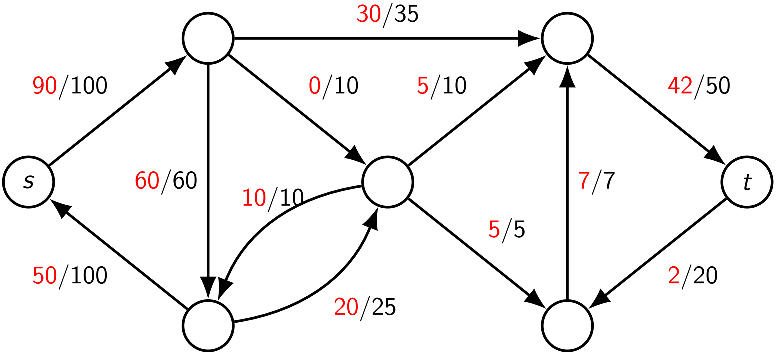
Flujo (ejemplo)

- ¿Es el siguiente flujo válido?
  1. ¿Cumple las restricciones de capacidad? Si!
  2. ¿Cumple las restricciones de conservación de flujo? Si!



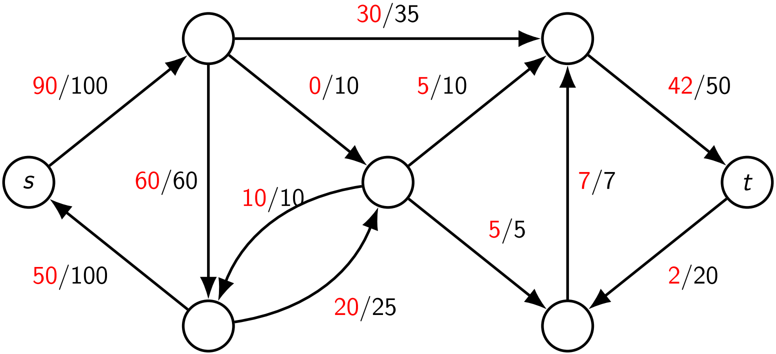
Flujo (ejemplo)

- ¿Cual es su valor de flujo?



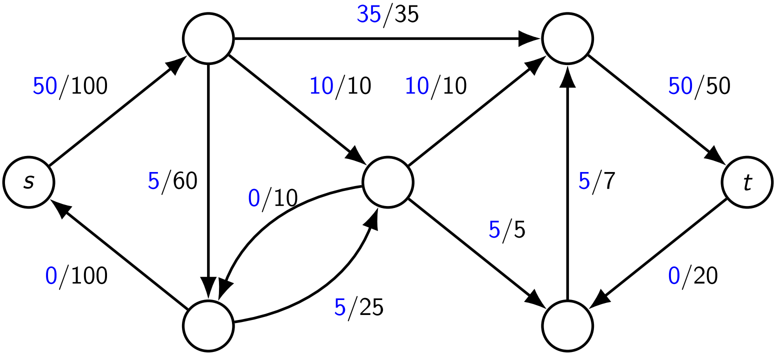
Flujo (ejemplo)

- ¿Cual es su valor de flujo? 40.
- ¿Hay otro más grande?



Flujo (ejemplo)

- ¿Cual es su valor de flujo? 40.
- ¿Hay otro más grande? Si, este:



Flujo (observaciones)

Problema de flujo máximo

El problema de flujo máximo consiste en, dada una red D, encontrar la función de flujo válido f que maximice $v(f)$.

Flujo (observaciones)

Problema de flujo máximo

El problema de flujo máximo consiste en, dada una red D, encontrar la función de flujo válido f que maximice $v(f)$.

Propiedad

Para todo flujo válido f existe otro flujo válido f' de valor $v(f') = v(f)$ tal que:

$$\sum_{v \in N^-(s)} f'(v \to s) = \sum_{v \in N^+(t)} f'(t \to v) = 0$$

// No entra flujo en s y no sale flujo de t

$\Rightarrow$ podemos eliminar las aristas desde t y hacia s

Corte (definiciones)

Corte

Un corte (s-t) es un conjunto S de vértices de D que contiene a s pero no a t.

Corte (definiciones)

Corte

Un corte (s-t) es un conjunto S de vértices de D que contiene a s pero no a t.

Capacidad

La capacidad de un corte S se define como la suma de las capacidades de los arcos que van de S a $V - S$.

Corte (definiciones)

Corte

Un corte (s-t) es un conjunto S de vértices de D que contiene a s pero no a t.

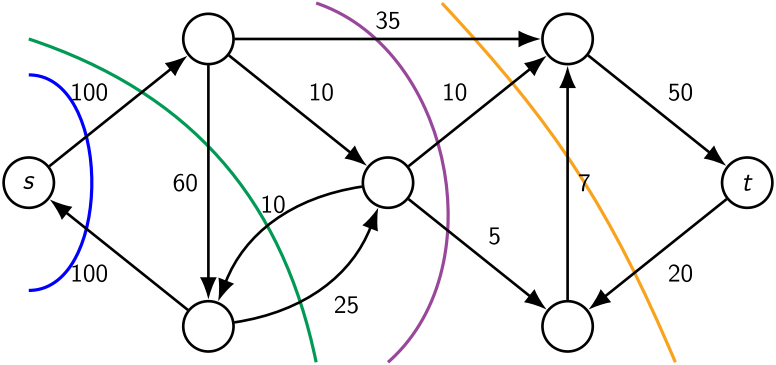
Capacidad

La capacidad de un corte S se define como la suma de las capacidades de los arcos que van de S a $V - S$.

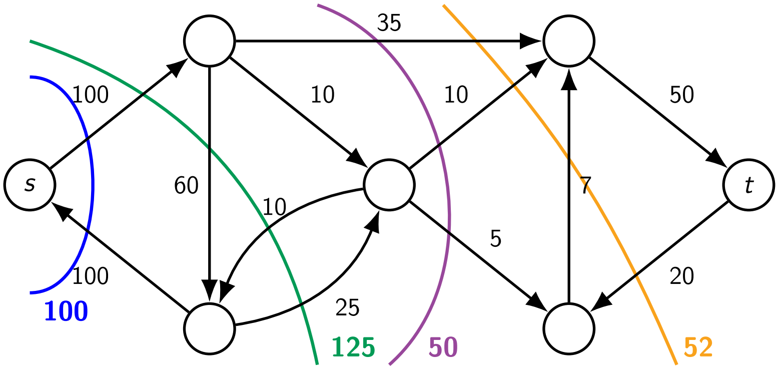
Problema de corte mínimo

El problema de corte mínimo consiste en, dada una red D, encontrar el corte S que minimice $c(S)$.

Ejemplo



Ejemplo



Dualidad flujo máximo-corte mínimo

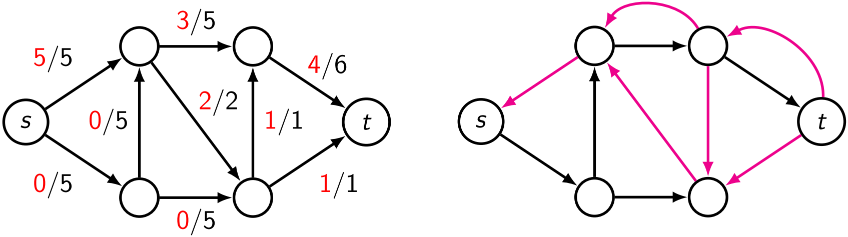
- **Débil:** Si f es un flujo y S un corte $\Rightarrow v(f) \leq c(S)$
- **Fuerte:** f es máximo y S mínimo $\Leftrightarrow v(f) = c(S)$

Red Residual

Definición

Dada una red $D = (V, E)$ con función de capacidad c y un flujo f, definimos la red residual $R = (V, E_R)$ donde:

- $(v \to w) \in E_R$ si $f(v \to w) < c(v \to w)$
- $(w \to v) \in E_R$ si $f(v \to w) > 0$

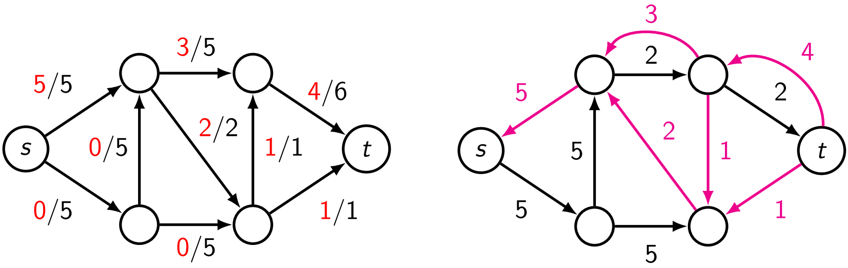


Red Residual

Función de costos

Dada una red, $D = (V, E)$ residual $R = (V, E_R)$, un flujo f y una función de capacidad c. La función de peso p para cada arista es:

$$p(e = (v, w)) = \begin{cases} c(e) - f(e) & si\ (v \to w) \in E \\ f(e) & si\ (w \to v) \in E \end{cases}$$

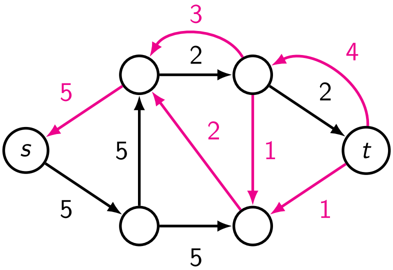


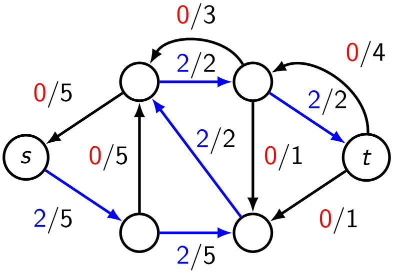
Camino de Aumento

Definición

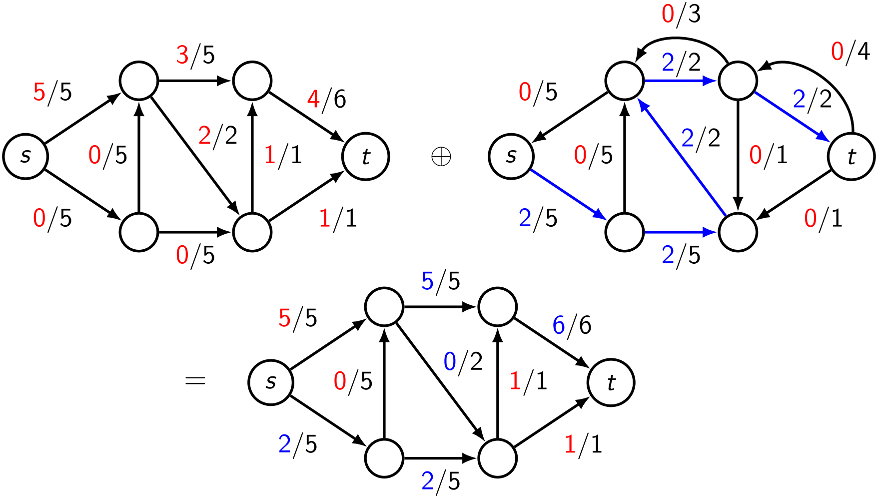
Dada una red residual $R = (V, E_R)$, cualquier camino P de s a t es un camino de aumento. El flujo asociado al camino es:

$$f^P(e) = \begin{cases} min\{p(e) \mid e \in P\} & si \;\; e \in P \\ 0 & cc \end{cases}$$





Sumando el Camino de Aumento al Flujo



Ford y Fulkerson

Algoritmo

- Más que un algoritmo es un "método" greedy, ya que no especifican cómo buscar los caminos de aumento.
- Además de la red, toma como entrada un flujo inicial ($f = 0$ sirve).
- Mientras exista un camino de aumento P para f, sumarle su flujo asociado al flujo actual ($f = f \oplus f^P$).

Ford y Fulkerson

Algoritmo

- Más que un algoritmo es un "método" greedy, ya que no especifican cómo buscar los caminos de aumento.
- Además de la red, toma como entrada un flujo inicial ($f = 0$ sirve).
- Mientras exista un camino de aumento P para f, sumarle su flujo asociado al flujo actual ($f = f \oplus f^P$).

Complejidad

El algoritmo encuentra un flujo máximo en $O(Fm)$ donde $F =$ valor del flujo máximo (buscar un camino de aumento es $O(m)$ y en cada paso el flujo aumentará al menos en 1 unidad).

Edmonds-Karp

Algoritmo

- Una posible implementación del método de Ford y Fulkerson.
- Consiste en usar BFS para buscar caminos de aumento.

Edmonds-Karp

Algoritmo

- Una posible implementación del método de Ford y Fulkerson.
- Consiste en usar BFS para buscar caminos de aumento.

Complejidad

- El algoritmo nos permite acotar la complejidad independientemente del flujo máximo. Nos asegura que encuentra un flujo máximo en $O(nm^2)$.

Complejidad de EK

Disclaimer

Esta es una idea de la demostración, no es equivalente a la misma.

- Queremos encontrar una cota para la cantidad de iteraciones.
- Una arista es *crítica* en un camino de aumento si su capacidad equivale a la capacidad del camino. Por lo que al utilizar ese camino vamos a saturar la misma.
- En base a cómo definimos previamente a la red residual, esta arista va a desaparecer de nuestra nueva red.
- Luego el argumento para acotar la cantidad de iteraciones por $O(nm)$ es probar que una arista puede ser *crítica* $n/2$ veces cómo mucho.
- Para hacer esto uno debe usar (y probar) que la distancia en aristas entre s y cualquier vértice v de G aumenta monótonamente en cada iteración.

Complejidad de EK

- A partir de eso uno puede mostrar que en cada iteración de *EK* la distancia en aristas entre los vértices de la arista $e = (u, v)$ hacia el sumidero aumenta en por lo menos 2.
- Con esta información uno puede mostrar que esa arista e puede ser *crítica* por lo menos $n/2$ veces.
- Puesto que si esto ocurre más de $n/2$ veces, entonces la distancia en aristas va a ser mayor a n, pues va a aumentando de a por lo menos 2, lo cual es imposible.
- Así se llega a que cada arista puede ser *crítica* $n/2$ veces y sabemos que hay m aristas, por lo que la cantidad de iteraciones está acotada por $O(nm)$.
- Luego cada iteración va a tardar $O(m)$, por lo que la complejidad total es $O(nm^2)$
- Si quieren ver la demostración completa está en el Cormen.

¿Cómo estimar la complejidad?

- Si usamos Edmonds-Karp, sabemos que nuestro algoritmo es $O(nm^2)$
- $O(Fm)$ puede darnos una mejor cota si F es menor a $O(nm)$
- Por lo que EK realmente corre en $O(\min(nm^2, Fm))$
- Recordar que F es menor a la capacidad cualquier corte.
- Muchas veces sabemos de antemano el valor máximo del flujo (problemas de asignación).

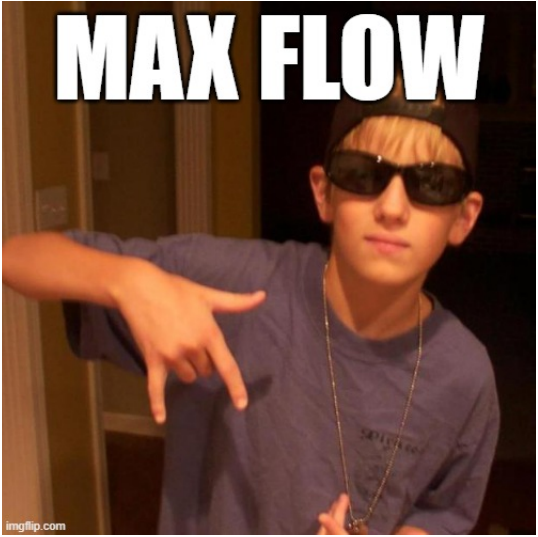
Kahoot Time

Ahora vamos a repasar algunas propiedades útiles de *flujo* y de los algoritmos que utilizamos para obtenerlo.
Para eso van a tener que entrar a https://kahoot.it/ e ingresar el código escrito en el pizarrón.

Evitando la rutina

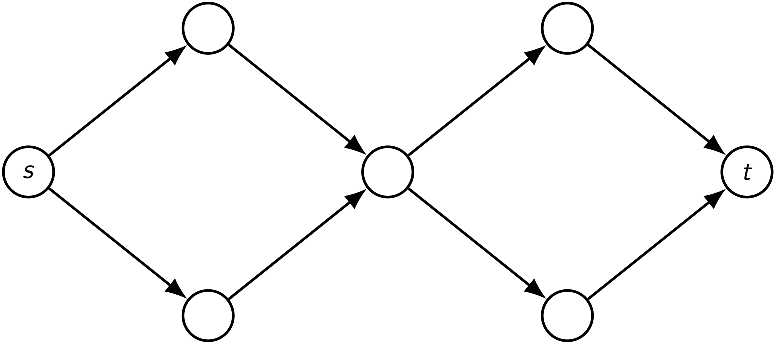
Todos los sábados, Santi viaja desde su casa a la casa de su gran amigo Eric. Una peculiaridad de Santi es que odia las rutinas, tan solo el pensamiento de pasar dos sábados distintos por una misma calle le produce escalofríos. Por suerte, Santi tiene amigos que están cursando Algo 3, así que en la clase práctica de flujo, luego del repaso, le podrá pedir ayuda a sus amigos para calcular la cantidad máxima de sábados que podrá ir a la casa de Eric sin repetir ninguna calle. ¿Que podemos utilizar para resolver este problema?

Estrategia para encarar el problema



Ejemplo

Digrafo resultante del mapa:



Analizando el problema

- ¿Con qué se les ocurre que podemos modelar este problema?

Analizando el problema

- ¿Con qué se les ocurre que podemos modelar este problema? ¡Exacto! Con *flujo*.
- Ahora la pregunta cambia. ¿Cuál va a ser nuestro modelo y que representa el mismo?

Analizando el problema

- ¿Con qué se les ocurre que podemos modelar este problema? ¡Exacto! Con *flujo*.
- Ahora la pregunta cambia. ¿Cuál va a ser nuestro modelo y que representa el mismo?
- Inicialmente, tenemos el digrafo $D = (V, E)$ con los datos originales. Luego para nuestra red N hay que definir E_N , V_N, c (función de capacidad) y f (función de flujo).
- ¿Quiénes van a ser E_N y V_N?

Analizando el problema

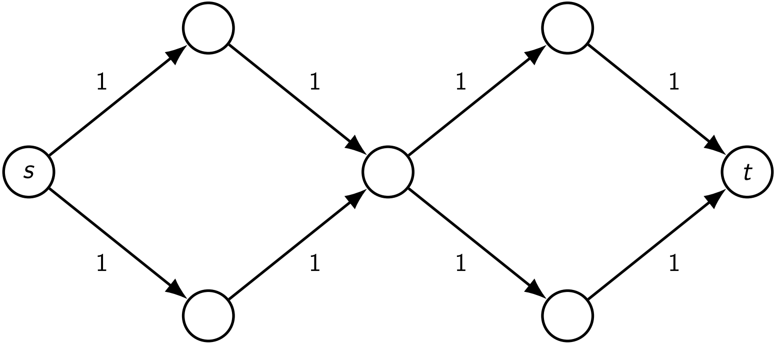
- ¿Con qué se les ocurre que podemos modelar este problema? ¡Exacto! Con *flujo*.
- Ahora la pregunta cambia. ¿Cuál va a ser nuestro modelo y que representa el mismo?
- Inicialmente, tenemos el digrafo $D = (V, E)$ con los datos originales. Luego para nuestra red N hay que definir E_N , V_N, c (función de capacidad) y f (función de flujo).
- ¿Quiénes van a ser E_N y V_N? Para este problema $V = V_N$ y $E = E_N$.
- ¿Qué va a representar una *unidad de flujo*? ¿Y la restricción de *capacidad*?

Analizando el problema

- ¿Con qué se les ocurre que podemos modelar este problema? ¡Exacto! Con *flujo*.
- Ahora la pregunta cambia. ¿Cuál va a ser nuestro modelo y que representa el mismo?
- Inicialmente, tenemos el digrafo $D = (V, E)$ con los datos originales. Luego para nuestra red N hay que definir E_N , V_N, c (función de capacidad) y f (función de flujo).
- ¿Quiénes van a ser E_N y V_N? Para este problema $V = V_N$ y $E = E_N$.
- ¿Qué va a representar una *unidad de flujo*? ¿Y la restricción de *capacidad*? En este problema cada *unidad de flujo* representa un *camino*. Luego, como queremos pasar solo **una vez** por cada arista, la *capacidad* de las mismas va a ser 1.

Solución

Así quedaría nuestro modelo:



Intuición de la demostración

- Ya tenemos nuestro modelo, que es nuestra red N. Ahora queremos ver que si F es el valor del flujo máximo en nuestra red y K es la cantidad de caminos disjuntos en aristas de nuestro digrafo original D, entonces, $F = K$. ¿Qué se les ocurre que podemos intentar para demostrar esta igualdad?

Intuición de la demostración

- Ya tenemos nuestro modelo, que es nuestra red N. Ahora queremos ver que si F es el valor del flujo máximo en nuestra red y K es la cantidad de caminos disjuntos en aristas de nuestro digrafo original D, entonces, $F = K$. ¿Qué se les ocurre que podemos intentar para demostrar esta igualdad?
- Existe un flujo válido en N de valor $F \longleftrightarrow$ Existen F caminos disjuntos en aristas en D.
- Si probamos esta doble implicación entonces va a quedar probado que $F = K$, para lograr esto tenemos que probar ambos lados de la implicancia.

Demostrando la vuelta - I

- Primero vamos a probar la vuelta: Existen F caminos disjuntos en aristas en D. $\longrightarrow$ Existe un flujo válido f en N de valor F
- Sean $c_1, \ldots, c_F$ los caminos disjuntos en aristas dé D. ¿Cómo podemos definir una función de flujo a partir de esto?

Demostrando la vuelta - I

- Primero vamos a probar la vuelta: Existen F caminos disjuntos en aristas en D. $\longrightarrow$ Existe un flujo válido f en N de valor F
- Sean $c_1, \ldots, c_F$ los caminos disjuntos en aristas dé D. ¿Cómo podemos definir una función de flujo a partir de esto?

Función de flujo

$$f(e) = \begin{cases} 1 & si \;\; e \in c_i \;\; 1 \leq i \leq F \\ 0 & cc \end{cases}$$

Ahora queremos ver que f es un flujo válido, para esto tiene que cumplir las 2 propiedades de un flujo. Además, f debe ser un flujo de valor F.

Demostrando la vuelta - II

1. Restricciones de capacidad:
   $f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E(D) \rightarrow$ Esto se cumple ya que $f_e \leq 1 = c_e$

Demostrando la vuelta - II

1. Restricciones de capacidad:
   $f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E(D) \rightarrow$ Esto se cumple ya que $f_e \leq 1 = c_e$
2. Restricciones de conservación de flujo:
   $$\sum_{w \in N^-(v)} f(w \Rightarrow v) = \#\{i \mid v \in c_i\} = \sum_{w \in N^+(v)} f(v \rightarrow w)$$
   $\forall v \in V(D) - \{s, t\} \Rightarrow$ Esto se cumple, ya que la cantidad de aristas que entran y salen es igual a la cantidad de caminos disjuntos a los cuales pertenece v.

Demostrando la vuelta - II

1. Restricciones de capacidad:
   $f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E(D) \rightarrow$ Esto se cumple ya que $f_e \leq 1 = c_e$
2. Restricciones de conservación de flujo:
   $$\sum_{w \in N^-(v)} f(w \Rightarrow v) = \#\{i \mid v \in c_i\} = \sum_{w \in N^+(v)} f(v \rightarrow w)$$
   $\forall v \in V(D) - \{s, t\} \Rightarrow$ Esto se cumple, ya que la cantidad de aristas que entran y salen es igual a la cantidad de caminos disjuntos a los cuales pertenece v.
3. f es un flujo de valor F:
   Finalmente, $\sum_{w \in N^+(s)} f(w) = \#\{i \mid s \in c_i\} = F \Rightarrow$ Esto se cumple, puesto que s pertenece a todos los caminos disjuntos en aristas entre s y t.

Demostrando la ida - I

- Ahora vamos a probar la ida: Existe un flujo válido f en N de valor F $\longrightarrow$ Existen F caminos disjuntos en aristas en D.
- Sea f un flujo de valor F sobre la red N. ¿Cómo podemos obtener los caminos disjuntos en aristas a partir del mismo?

Demostrando la ida - I

- Ahora vamos a probar la ida: Existe un flujo válido f en N de valor F $\longrightarrow$ Existen F caminos disjuntos en aristas en D.
- Sea f un flujo de valor F sobre la red N. ¿Cómo podemos obtener los caminos disjuntos en aristas a partir del mismo?

Intuición de la demostración

La idea es ir construyendo los caminos disjuntos en aristas a partir del flujo f, todo esto a través de una demostración inductiva.

Demostrando la ida - II

1. f es un flujo de valor F, sé que s y t están conectados por las aristas e con $f(e) = 1$, así que usando estas aristas tengo un *flujo que define un camino de s a t = p*. ¿Qué puedo hacer con este camino?

Demostrando la ida - II

1. f es un flujo de valor F, sé que s y t están conectados por las aristas e con $f(e) = 1$, así que usando estas aristas tengo un *flujo que define un camino de* s *a* $t = p$. ¿Qué puedo hacer con este camino?
2. Si luego **quito** estas aristas del flujo f, cómo $f(e) = 1$, entonces el valor del flujo $f' = f - p$ es igual a $F - 1$. f' sigue siendo un **flujo válido** y su valor es $F - 1$.

Demostrando la ida - II

1. f es un flujo de valor F, sé que s y t están conectados por las aristas e con $f(e) = 1$, así que usando estas aristas tengo un *flujo que define un camino de s a t = p*. ¿Qué puedo hacer con este camino?
2. Si luego **quito** estas aristas del flujo f, cómo $f(e) = 1$, entonces el valor del flujo $f' = f - p$ es igual a $F - 1$. f' sigue siendo un **flujo válido** y su valor es $F - 1$.
3. Luego, si vuelvo a repetir este proceso sobre f' el nuevo camino que obtendría, p' no compartiría ninguna arista con p puesto que $c(e) = 1$. Así que si repito este proceso F veces voy a lograr obtener F **caminos disjuntos en aristas**. Así es cómo a partir del flujo F puedo obtener F caminos disjuntos de D.

Así probamos la doble implicancia, por lo que queda demostrado que $F = K$ y que nuestro modelo representa correctamente el problema que queríamos resolver.

Demostrando la ida - Aclaración

- Para la demostración anterior asumimos que si hay un flujo de valor F (entero) entonces existe un flujo f tal que $\forall e \in E, f(e)$ es entero.
- Este teorema lo vieron en la teórica y, por lo tanto, lo podemos usar para demostrar el ejercicio.
- Recuerden que pueden utilizar teoremas y propiedades vistas en la teórica/práctica para resolver los ejercicios. Si dudan si pueden usarlo, pues trivializa el ejercicio, no duden en consultarlo.

Solución

- Ya probamos que nuestro modelo es correcto. Por lo tanto, para encontrar la solución a nuestro problema alcanza con calcular el flujo máximo.
- Luego si utilizamos el algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo. ¿Cuál es la complejidad de encontrar este flujo?

Solución

- Ya probamos que nuestro modelo es correcto. Por lo tanto, para encontrar la solución a nuestro problema alcanza con calcular el flujo máximo.
- Luego si utilizamos el algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo. ¿Cuál es la complejidad de encontrar este flujo?
- En este caso no es $\mathcal{O}(n * m^2)$. ¿Por qué? Porque la complejidad está dada por $min(\mathcal{O}(n * m^2), \mathcal{O}(F * m))$. Y en este caso $F \leq n$, puesto que la cantidad de caminos disjuntos en aristas no puede ser mayor a n.
- Por lo tanto, la complejidad de EK es $\mathcal{O}(n * m)$ en este caso.

Solución

- ¿Cómo quedaría el algoritmo completo?

Solución

- ¿Cómo quedaría el algoritmo completo?
  - Primero armamos nuestra red N a partir del digrafo. $O(n + m)$.
  - Calculamos el flujo máximo sobre N utilizando EK. $O(n * m)$.
  - Devolvemos el valor del flujo máximo para que Santi sepa la cantidad de sábados que podrá ir a la casa de Eric sin repetir ninguna calle $O(1)$.
- ¿Cómo harían para obtener los caminos disjuntos? ¿Cómo harían si ahora se puede repetir cada calle una cantidad $r(e)$ de veces?

Sasha le ayudante

Sasha estaba preparando el segundo parcial de Algo III y para practicar se puso a inventar ejercicios(va a ser ayudante claramente).

Ejercicio de Sasha

Sea S el conjunto de números reales no negativos de la forma $a\pi + b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Sea $G = (V, E)$ una red de flujo, demostrar que si para todo arco su capacidad pertenece a S entonces:

1. Para todo corte su capacidad pertenece a S
2. Para todo flujo máximo su valor pertenece a S
3. Existe un flujo máximo que asigna a cada arco un valor que pertenece a S.

¿Qué propiedad tiene que cumplir S para que se cumplan estas propiedades?
¿Valen las recíprocas? En caso afirmativo, demostrar; en caso negativo, dar un contraejemplo y justificar.

Inciso 1

Recordemos la definición de corte. Un corte RT de una red $G = (V, E)$ son dos conjuntos de vértices R y T tal que $R \cap T = \emptyset$ y $R \cup T = V$. Además, la capacidad de un corte está dada por:

$$c(RT) = \sum_{\substack{(u,v) \\ u \in R, v \in T}} c(u, v)$$

¿Cómo podemos usar esto para probar el primer inciso?

Inciso 1

Recordemos la definición de corte. Un corte RT de una red $G = (V, E)$ son dos conjuntos de vértices R y T tal que $R \cap T = \emptyset$ y $R \cup T = V$. Además, la capacidad de un corte está dada por:

$$c(RT) = \sum_{\substack{(u,v) \\ u \in R, v \in T}} c(u, v)$$

¿Cómo podemos usar esto para probar el primer inciso?
Por otro lado, por como está definida G, sabemos que cada arco e_i tiene capacidad $a_i\pi + b_i$ para algún $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, entonces

$$c(RT) = \sum_{\substack{e_i=(u,v) \\ u \in R, v \in T}} c(e_i) = \sum_{\substack{e_i=(u,v) \\ u \in R, v \in T}} a_i\pi + b_i = \left(\sum_{\substack{e_i=(u,v) \\ u \in R, v \in T}} a_i\right)\pi + \sum_{\substack{(u,v) \\ u \in R, v \in T}} b_i$$

¿Esto alcanza para probar que $c(RT) \in S$?

Inciso 2

- ¿Se les ocurre alguna propiedad que hayamos visto que nos permita usar el primer inciso?

Inciso 2

- ¿Se les ocurre alguna propiedad que hayamos visto que nos permita usar el primer inciso?
- ¡Exacto! Sabemos que el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.
- Por el inciso anterior sabemos que la capacidad de todos los cortes pertenecen a S, por lo que el valor del flujo máximo también pertenece a S.

Inciso 3

- ¿Qué podemos usar para probar esto?

Inciso 3

- ¿Qué podemos usar para probar esto?
- La idea va a ser inducción en cada iteración del algoritmo de EK. Vamos a utilizar EK, puesto que este siempre termina aún para valores irracionales en las capacidades, a diferencia de FF ¿Por qué sucede esto?

Edmonds-Karp

- P camino de aumento entre s y t en R (red residual)
- f^P flujo asociado al camino de aumento (definido al principio)

Pseudocódigo EK

1. Inicializar el flujo tal que $\forall e \in E, f_{EK}(e) = 0$
2. Mientras exista un P
   1. Buscar P con BFS
   2. $f_{EK} = f_{EK} \oplus f^P$.
   3. Actualizar R en base a f_{EK}.

Demostración

- Queremos probar que el flujo f_{EK} que genera EK asigna a cada eje un valor que pertenece a S. A partir de esto, cómo EK nos devuelve un flujo máximo, entonces existe un flujo máximo que asigna a cada eje un valor que pertenece a S.
- **Caso base:** $F = 0$, así que $\forall e \in E, f_{EK}(e) = 0$. Luego se que $0 \in S$, pues $0 = a\pi + b$, con $a = 0, b = 0$.

Paso inductivo

Hipótesis inductiva: Estamos en la k-ésima iteración de EK y sabemos que cada arco tiene, hasta ahora, una asignación que pertenece a S. Llamemos f_{EK}^{k} a su función de flujo.
Ahora queremos ver que $f_{EK}^{k+1} \in S$, para probar esto, vamos a utilizar la actualización del flujo $f_{EK}^{k+1} = f_{EK}^{k} \oplus f^{P}$.
Tenemos que el flujo asociado al camino de aumento P es:

$$f^{P}(e) = \begin{cases} min\{p(e) \mid e \in P\} & si \ e \in P \\ 0 & cc \end{cases}$$

Por lo que si logramos probar que $f^{P} \in S$, entonces cómo $f_{EK}^{k} \in S$ por HI y S está cerrado por la suma/resta, habremos probado que $f_{EK}^{k+1} \in S$. Y para probar que $f^{P} \in S$, alcanza con mostrar que $p(e) \in S$.

Paso inductivo

Función de costos de la red residual R

$$p(e=(v,w)) = \begin{cases} c(e) - f_{EK}^{k}(e) & si\ (v \to w) \in E(R) \\ f_{EK}^{k}(e) & si\ (w \to v) \in E(R) \end{cases}$$

- Sabemos que $c \in S$, y por HI sabemos que $f_{EK}^{k} \in S$. Por lo que $p \in S$, ya que S está cerrado por la suma/resta.
- De esta forma probamos que $p \in S$, por lo que $f^{P} \in S$ y concluimos con que $f_{EK}^{k+1} \in S$. Así queda probado que el flujo f_{EK} que genera EK asigna a cada eje un valor que pertenece a S.

¿Valen las recíprocas?

¿Valen las recíprocas?

Las recíprocas son todas falsas:

(a) Si la red es C_4 con todas las capacidades 0.5, $d_{in}(s) = d_{out}(t) = 0$ y $d_{out}(s) = d_{in}(t) = 2$, se cumple que todo corte tiene capacidad 1 $\in S$, pero 0.5 $\notin S$ (ya que en tal caso $\pi \notin \mathbb{Q}$).

(b) Si la red es $K_{1,2}$ con $d_{in}(s) = 0$, $d_{out}(s) = 2$, el arco (s, t) con capacidad 1 y otro arco con capacidad 0.5, se cumple que el valor de cualquier flujo máximo es $1 \in S$, pero hay un eje de capacidad 0.5 $\notin S$.

(c) Si la instancia es la misma que en el punto anterior, se cumple que existe un flujo máximo que asigna 1 al arco (s, t), y 0 al otro arco, ambos valores en S, pero hay un eje de capacidad 0.5 $\notin S$.

Contraejemplos

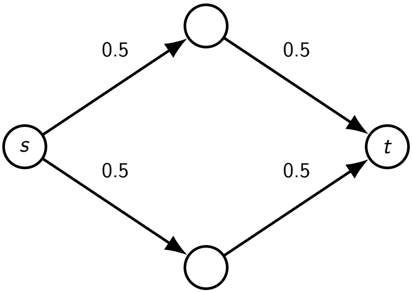


Figura: C_4 network

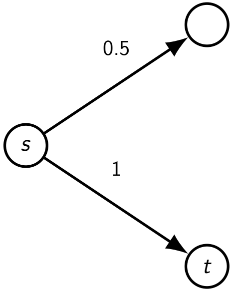


Figura: $K_{1,2}$ network

¿Nos tomamos un break?

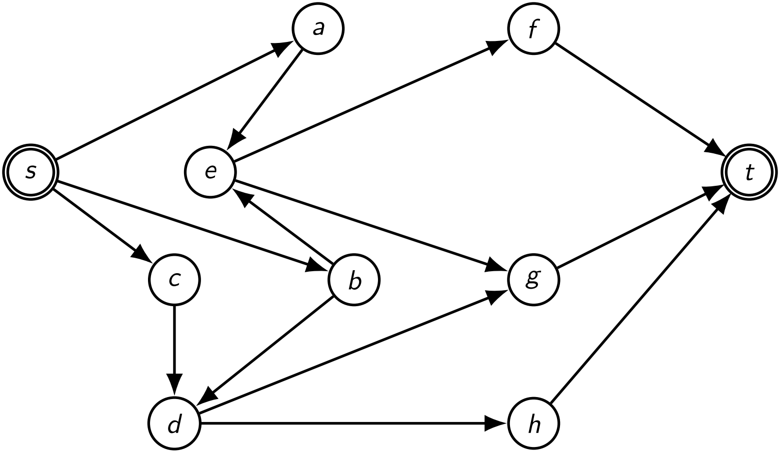
Abrumado por la fama

Al implementar su nueva técnica de caminos disjuntos en sus viajes, Santi se volvió el computólogo más pegado del país, hasta tiene una serie en Flow. Ahora Aye, recién promocionada a Directora de Prensa de Infobae, quiere conseguir una nota lo antes posible. Para ello se dispone a desplegar un ejercito de paparazzi que, escondidos en las intersecciones de las calles, planean interceptarlo con sus flashes cuando va a casa de Eric. A Aye no le gusta gastar más plata de la necesaria, así que quiere saber cual es la menor cantidad de paparazzi que necesita contratar. ¿Le damos una mano?

Aclaración: Eric y Santi se enojan mucho si ponemos paparazzi en sus casas y además sabemos que no son vecinos.

Ejemplo

Digrafo resultante del mapa:



Analizando el problema

- **¿Cómo podemos saber si vamos a interceptar a Santi?**

Analizando el problema

- **¿Cómo podemos saber si vamos a interceptar a Santi?** Si quitamos los vértices donde pusimos los paparazzi, Santi no tendría que ser capaz de llegar a la casa de Eric.
- **¿Vimos en clase algún problema parecido?**

Analizando el problema

- **¿Cómo podemos saber si vamos a interceptar a Santi?** Si quitamos los vértices donde pusimos los paparazzi, Santi no tendría que ser capaz de llegar a la casa de Eric.
- **¿Vimos en clase algún problema parecido?** Exacto! Se parece al problema de *Corte Mínimo*

Mini-Repaso

Corte

Un *corte* en la red $G = (V, E)$ es un subconjunto $S \subseteq V \setminus \{t\}$ tal que $s \in S$.

Capacidad de un corte

Dado un corte S de $G = (V, E)$, se define su capacidad como:

$$u(S) = \sum_{ij \in ST} u_{ij}$$

Donde $ST = \{ij \in E : i \in S \wedge j \in V \setminus S\}$

Teorema (Max Flow = Min Cut)

El valor del corte de capacidad mínima es igual al flujo máximo.

Analizando el problema

1. Pero, la capacidad del corte habla de aristas (calles en nuestro modelo anterior) y a nosotros nos interesan los las esquinas (vértices). Quisiéramos poder definir una capacidad para cada vértice ...

Analizando el problema

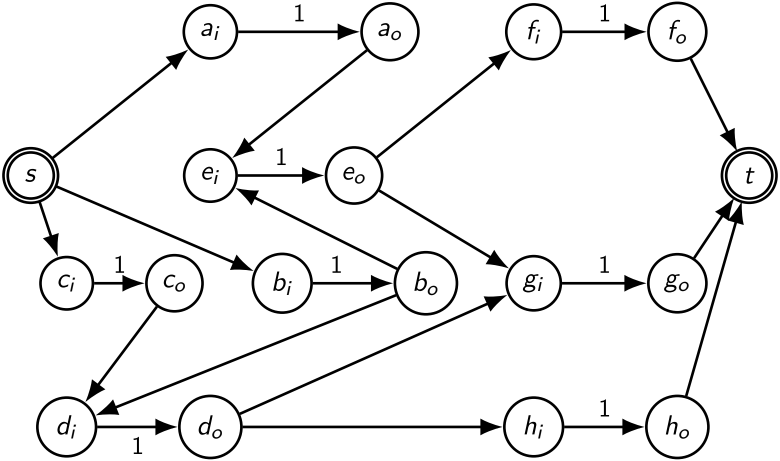
1. Pero, la capacidad del corte habla de aristas (calles en nuestro modelo anterior) y a nosotros nos interesan los las esquinas (vértices). Quisiéramos poder definir una capacidad para cada vértice ... Podemos dividir los vértices en dos (v_{in}, v_{out}) y unirlos con una arista.
2. ¿Y como nos aseguramos que el corte pase solo por esas aristas y no por las que representar calles?

Analizando el problema

1. Pero, la capacidad del corte habla de aristas (calles en nuestro modelo anterior) y a nosotros nos interesan los las esquinas (vértices). Quisiéramos poder definir una capacidad para cada vértice ... Podemos dividir los vértices en dos (v_{in}, v_{out}) y unirlos con una arista.
2. ¿Y como nos aseguramos que el corte pase solo por esas aristas y no por las que representar calles? Podemos asignar capacidad 1 a los aristas de las esquinas e ∞ a las aristas de las calles.
3. Podemos decirle a Aye que ponga a sus paparazzi en las esquinas correspondientes a las aristas del corte mínimo.

Solución

Así quedaría nuestro modelo (las aristas sin labels tienen capacidad ∞):



Justificación

Esto no va a ser una demostración tan formal cómo la anterior, sino que vamos a justificar porque nuestro modelo es correcto. El nivel de formalidad que el ejercicio requiere va a depender de la consigna.

- Primero veamos que el mínimo corte no es ∞:

Justificación

Esto no va a ser una demostración tan formal cómo la anterior, sino que vamos a justificar porque nuestro modelo es correcto. El nivel de formalidad que el ejercicio requiere va a depender de la consigna.

- Primero veamos que el mínimo corte no es ∞: Si tomo $S = N[s]$, tengo un corte de capacidad $deg(s)$, luego el corte mínimo debe ser menor o igual a este.
- Por lo anterior, el corte mínimo solo usa aristas correspondientes a esquinas.
- Aye consigue la portada de Infobae, ya que si Santi puede ir a lo de Eric esquivando los flashes, entonces los paparazzi no estaban en un corte.
- Aye no puede usar menos personal, ya que si no tendría un corte de menor valor en este grafo

Solución

- Ya justificamos que nuestro modelo es correcto. Por lo tanto, para encontrar la solución a nuestro problema alcanza con calcular el flujo máximo.
- Luego, utilizamos el algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo (y por lo tanto, el corte mínimo).
- ¿Cómo le decimos a Aye donde poner a los paparazzi?

Solución

- Ya justificamos que nuestro modelo es correcto. Por lo tanto, para encontrar la solución a nuestro problema alcanza con calcular el flujo máximo.
- Luego, utilizamos el algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo (y por lo tanto, el corte mínimo).
- ¿Cómo le decimos a Aye donde poner a los paparazzi?
  Podemos correr DFS desde s, recorriendo las aristas que no están saturadas. La componente conexa serán los vértices del corte, y las aristas saturadas que salgan de estos vértices hacia vértices afuera de la misma serán las aristas de las esquinas donde irían los paparazzi.

Complejidad

- Si utilizamos el algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo (y por lo tanto, el corte mínimo). ¿Cuál es la complejidad de encontrar este flujo?

Complejidad

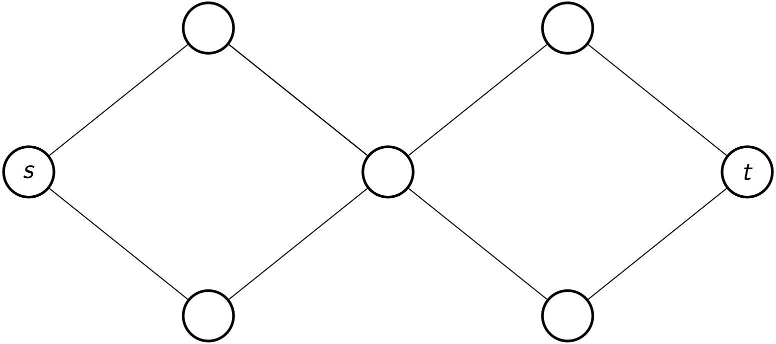
- Si utilizamos el algoritmo de Edmonds y Karp para encontrar el flujo máximo (y por lo tanto, el corte mínimo). ¿Cuál es la complejidad de encontrar este flujo?
- Nuevamente la cota de FF ($\mathcal{O}(|E|F)$) es las más ajustada, (ya que $F \leq deg(s) < n < nm$)
Luego, $\mathcal{O}(|E|F) \subseteq \mathcal{O}((m+n-2) \times n) = \mathcal{O}(n \times (n+m))$.
- Correr el DFS es $\mathcal{O}(|E|+|V|) = \mathcal{O}(2n-2+m+n-2)) = \mathcal{O}(m+n)$.
- Complejidad total: $\mathcal{O}(n \times (n+m))$

Cambio de rumbo

Luego de las elecciones cambiaron las calles de la ciudad. El ministerio de transporte decidió que todas las calles sean bidireccionales. Además ahora sin las propagandas de campaña, Santi ya soporta repetir una cantidad C de veces cada calle. Ahora su algoritmo ya no funciona, pero por suerte conoce a Sasha, une estudiante de intercambio ruso, quien encontró una forma de resolver el problema de todas. ¿Qué solución propuso Sasha?

Ejemplo

Grafo resultante del mapa:



Solución

- La idea sería crear un digrafo $D = (V, E_D)$ a partir del grafo original G. Con los mismos vértices que G y que por cada arista $(v, w) \in E_G$ existan dos aristas (v, w) y $(w, v) \in E_D$.
- Para mostrar que esto es correcto hace falta mostrar qué ocurre en los casos en los cuales encontramos que se están utilizando (v, w) y (w, v) en los caminos encontrados, lo cual sería inválido. ¿En qué casos se les ocurre que sucede esto y cómo lo podemos solucionar?

Justificación

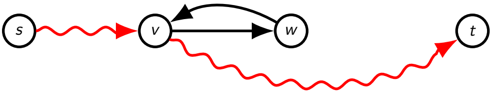
1. Veamos que si tenemos un flujo donde tenemos flujo en las aristas $f(u \to v) > 0$ y $f(v \to u) > 0$, también existe uno donde solo haya en una dirección
2. Para ello basta con restar a ambos $\min(f(u \to v), f(v \to u))$ de los dos
3. Supongamos sin perdida de generalidad que $f(u \to v) > f(v \to u)$

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in N^+(u)} f_{uw} &- \sum_{w \in N^-(u)} f_{wu} = \\
f_{uv} + \sum_{w \in N^+(u) \setminus v} f_{uw} &- \sum_{w \in N^-(u) \setminus v} f_{wu} - f_{vu} = \\
(f_{uv} - f_{uv}) + \sum_{w \in N^+(u) \setminus v} f_{wu} &- \sum_{w \in N^-(u) \setminus v} f_{wu} =
\end{aligned}$$

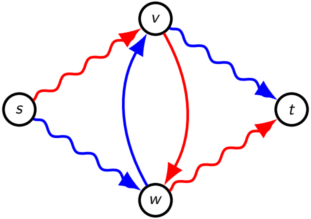
Luego la diferencia entre el flujo que entra y sale permanece contante con este cambio. De manera análoga se demuestra lo mismo para v.

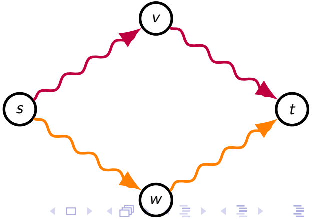
Justificación - Alternativa

1. Demostrar que cualquier camino P que use (v, w) y (w, v) se puede reemplazar por un camino que no use ninguna de las dos aristas. Esto lo podemos ver, ya que se genera un *ciclo*, así que podemos descartar ambas aristas del camino.



2. La otra opción es que un camino P_1 use (v, w) y otro P_2 use (w, v), pero sí esto ocurre podemos conseguir dos caminos alternativos, P'_1 y P'_2, que no usen a ninguna de las aristas.





Solución

- Por lo que nuestra forma de modelar un grafo cómo un dígrafo reemplazando las aristas por 2 arcos es correcta.
- Luego, sobre ese dígrafo generado podemos aplicar los algoritmos de los ejercicios anteriores.
- Cancelar los flujos que van en diferente dirección.
- La complejidad va a depender del flujo máximo, y este mismo va a depender de C. Luego nos vas a quedar que la complejidad de EK va a ser $\mathcal{O}(\min(nm^2, nmC)) = \mathcal{O}(nm \times \min(m, C))$.

Tips/Conclusiones

- Revisen bien la complejidad, no utilicen siempre $\mathcal{O}(nm^2)$. Tengan en cuenta el valor del flujo máximo y apliquen el mínimo.
- Justifiquen bien que el modelo es correcto y si el ejercicio lo pide demostrarlo. Pueden explicar que significa una unidad de flujo, las capacidades y las aristas.
- La red no siempre tiene las mismas aristas y vértices que el grafo original, estén atentos si tienen que agregarlos ustedes.
- Es clave mostrar cómo se pasa del grafo original a la red. Siempre está bueno hacer un dibujo para ver cómo queda el modelo.