Flujo II

Ejercicio 1

Sea G una red donde cada arco e tiene asociada una capacidad $c(e) > 0$. Demostrar que el valor de flujo máximo es 0 si y solo si G no tiene caminos desde la fuente al sumidero.

Dem:

$\Rightarrow$) Tenemos un flujo máximo de valor 0, entonces si tomamos algún corte mínimo esto significa que todo arco e que cruza el corte tiene capacidad 0, pero esto es solo posible si no hay ningún arco ya que todos tienen capacidad mayor a 0, entonces no hay un camino de s a t.

$\Leftarrow$) Si corremos EK por hipótesis no tenemos ningún camino posible de $s-t$ y por lo tanto el algoritmo termina con flujo igual a 0.

Ejercicio 2

Según surge indudablemente de un reciente mail anónimo, algunos que no llegan a entregar los ejercicios resueltos piensan sabotear el acceso a Internet del Departamento de Computación (DC). El objetivo de este ejercicio es favorecer la aprobación de los alumnos que tienen el conocimiento suficiente como para llevar a cabo ese plan, y de esa manera evitar que se realice.

La red del DC está formada por s computadoras y está contenida en una red más grande formada por n computadoras ($0 < s < n$). Siendo n el servidor que permite el acceso a Internet. Esta red también tiene m cables que transmite información. Los saboteadores planean cortar cables, no necesariamente dentro de la red del DC, de manera tal que ninguna computadora del DC tenga acceso a Internet. Como cortar cada cable es dificultoso, quieren cortar la mínima cantidad posible.

Solución

En principio uno diría cortar todos los ejes que conectan al servidor, pero podría ser que todas las PCs del DC pasen por un solo nodo y de ahí se abra a un grafo que si se conecta al servidor, por lo que cortaríamos más cables de los necesarios. La idea es usar la dualidad de flujo con los cortes S, T dónde

$$F \leq c(S, T)$$

Hay dos formas de hacer esto. La primera es modelar la red de flujo de la siguiente manera. Le asignamos capacidad uno a todos los arcos que ya existen en nuestro grafo y agregamos un vértice nuevo s (la fuente) que se conecta solo a las PCs del DC con capacidad ∞ [‡]. Vamos a considerar internet la PC número n como el sumidero.

Notar que el flujo máximo $F_{\max}$ esta acotado por n.

Luego corremos FFEK y esto nos da un flujo máximo, que es equivalente al mínimo de la capacidad de los corte sobre la red. Usando que nuestras capacidades son enteras podemos asegurar que existe un flujo que asigna valores enteros a los arcos (¿Por qué?). Luego de este flujo podemos recuperar un corte S, T (¿Cómo?).

Afirmamos que este corte que tenemos separa el DC del resto de internet. Supongamos que no pasa esto, es decir que hay alguna PC del DC en S y otra en T, bueno, pero esto significa que tenemos un arco de s con capacidad infinita cruzando el corte. Pero el flujo máximo estaba acotado por n, osea que esto no puede pasar, de la misma manera podemos argumentar que todo el DC no esta del lado del sumidero. Cortamos internet de las PCs del DC con la cantidad mínima de cortes.

Complejidad de hacer esto:

Como dijimos $F_{\max} \leq n$, tenemos m arcos originales + s arcos que agregamos con la nueva fuente. Vértices tenemos $n + 1$ (agregamos solo la fuente que no estaba).

Entonces la complejidad que nos da FFEK es

$$O(Ef) = O((m + s)n)$$

Versión alternativa:

De vuelta queremos calcular un corte mínimo, esta vez lo que vamos a hacer es "comprimir" el DC en un solo vértice, de esta manera nos aseguramos que cualquier corte de capacidad mínima que encontremos va a cortar internet.

Entonces hacemos eso, ahora desde nuestro nuevo nodo fuente llamado "DC" vamos a salir hacia las otras computadoras con capacidad igual a la cantidad de máquinas del DC que había conectadas antes (¿Cómo podemos hacer el algoritmo para construir esto?). El resto de las capacidades como antes van en 1.

Entonces volvemos a correr FFEK y obtenemos un flujo máximo que es equivalente al corte de capacidad mínima que es lo que buscabamos.

Complejidad de esto:

Ahora perdimos una cantidad considerable de vértices, veamos si cambia la complejidad.

El flujo máximo ahora esta acotado por n, tenemos $n - s$ vértices y tenemos $O(m)$ arcos. Entonces nuestra complejidad es

$$O(mn)$$

[‡] En realidad podríamos tomar capacidad n

Ejercicio 3

1. Una de las aficiones de Carle en su juventud fue la colección de figuritas en el colegio. Junto a sus compañeros compraban paquetes de figuritas de "Italia 90" para conocer a las estrellas del momento. Cada paquete traía cuatro figuritas a priori desconocidas, razón por la cual Carle y sus compañeros tenían figuritas repetidas después de algunas compras. Para completar el álbum más rápidamente, Carle y sus compañeros intercambiaban figuritas a través del protocolo "late-nola". Este protocolo consiste en que cada una de dos personas intercambian una figurita que elles tienen repetida por una que no poseen aún. Siendo tan inteligente, Carle pronto se dio cuenta que le podía convenir intercambiar algunas de sus figuritas por otras que ya tenía, a fin de intercambiar estas últimas. De esta forma, si Carle ya tenía copias de una figurita, igualmente podía conseguir copias adicionales para intercambiar con otros compañeros que no tuvieran la figurita.

   a) Proponer un modelo de flujo máximo para maximizar la cantidad de figuritas no repetidas que Carle puede obtener a través del intercambio con compañeros, teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

   - Carle conoce todas las figuritas repetidas (y la cantidad de repeticiones) de cada compañero.
   - Todos les compañeros intercambian primero con Carle, antes de intercambiar entre elles.
   - Todos les compañeros utilizan el protocolo "late-nola" para intercambiar con Carle, mientras que Carle ya sabe que le podría convenir obtener figuritas que ya tiene.

   b) Dar una interpretación a cada unidad de flujo y cada restricción de capacidad.

   c) Determinar la complejidad de resolver el modelo resultante con el algoritmo de Edmonds y Karp.

Solución:

a)

Armemos la siguiente red: un vértice s fuente, t sumidero, c_F vértices que representan las figuritas y p_m vértices que representan las personas, luego conectamos de la fuente con capacidad de cantidad de repetidas de la figurita k-ésima que tenemos hacia cada c_k, de los c_k conectamos con capacidad 1 hacia cada persona p_i si a esa persona le falta la figurita c_k-ésima y de cada persona p_i conectamos con las repetidas que tiene hacia la correspondiente figurita. Además de cada c_k salimos con capacidad 1 hacia el sumidero si necesitamos esa figurita. La red queda de la siguiente manera.

b)

Veamos que representa cada arco y vértice. c_k representa la figurita k-ésima, un arco de la fuente a c_k indica con su capacidad que tenemos esa cantidad de repetidas, cada p_i representa una de las personas con las que intercambiamos, si conectamos c_k con p_i significa que esa persona quiere la figurita c_k (y solo va a aceptar una). Si hay un arco de p_i a c_k significa que p_i tiene a c_k repetida tantas veces como la capacidad del mismo. Finalmente salimos con capacidad 1 de c_k hacia el sumidero para representar las figuritas que queremos.

c)

Contando los vértices y ejes

$$|V| = F + m + 2$$

y

$$|E| = O(2F + mF) = O(mF)$$

Además sabemos que

$$F_{\max} \leq F$$

dónde F era la cantidad de figuritas distintas que había ya que podemos tomar el corte $S = \{s\}$ y $T = V - \{s\}$ en el que la capacidad es a lo sumo F.

Entonces si corremos FFEK vamos a tener la complejidad

$$O(\min(|E|F, |V||E|^2))$$

y reemplazando

$$O(\min(mF^2, mF(F^2 + 2mF + m^2))$$

$$O(\min(mF^2, mF^3 + 2m^2F^2 + m^3F))$$

Como el término de la mitad del termino de la derecha siempre domina al de la izquierda la parte izquierda siempre va a ser menor, entonces tenemos

$$O(mF^2)$$