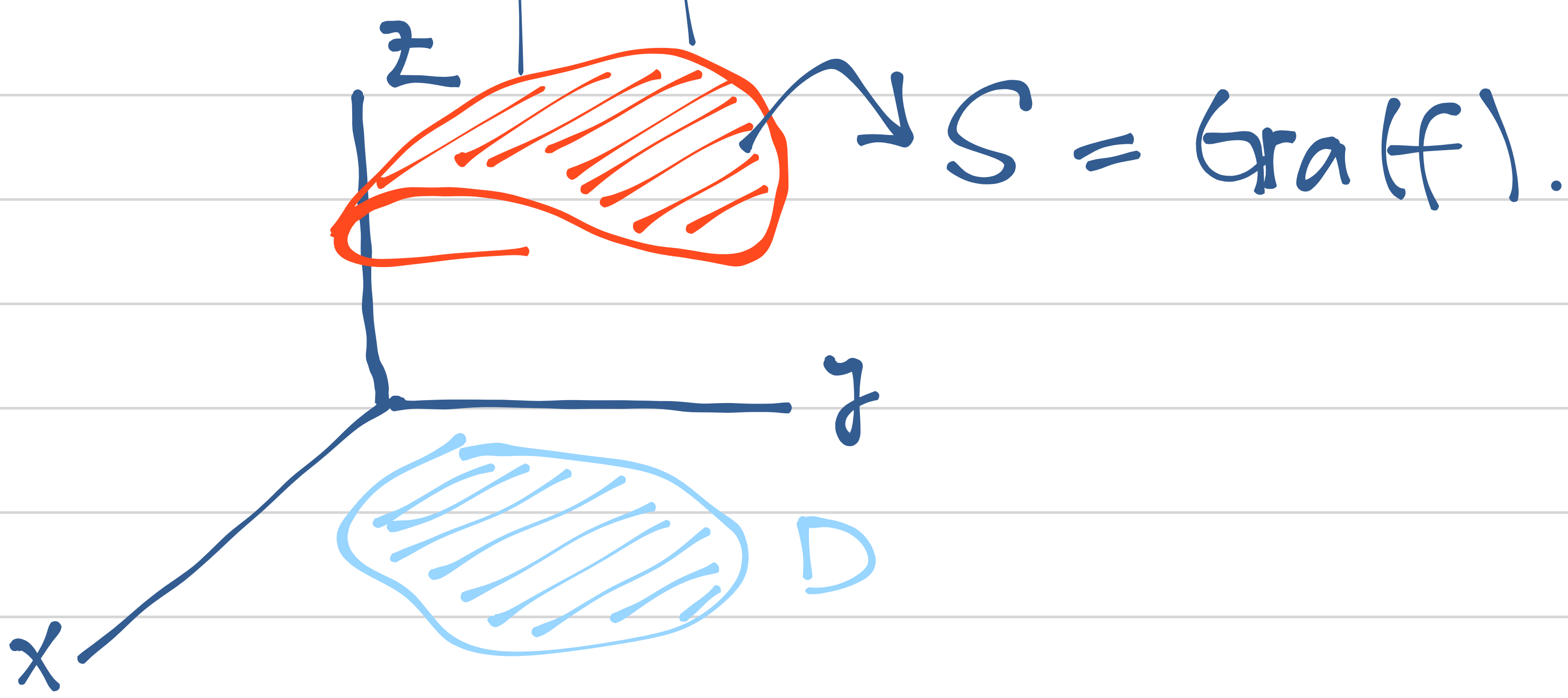
SUPERFICIES

CONCEPTOS BÁSICOS

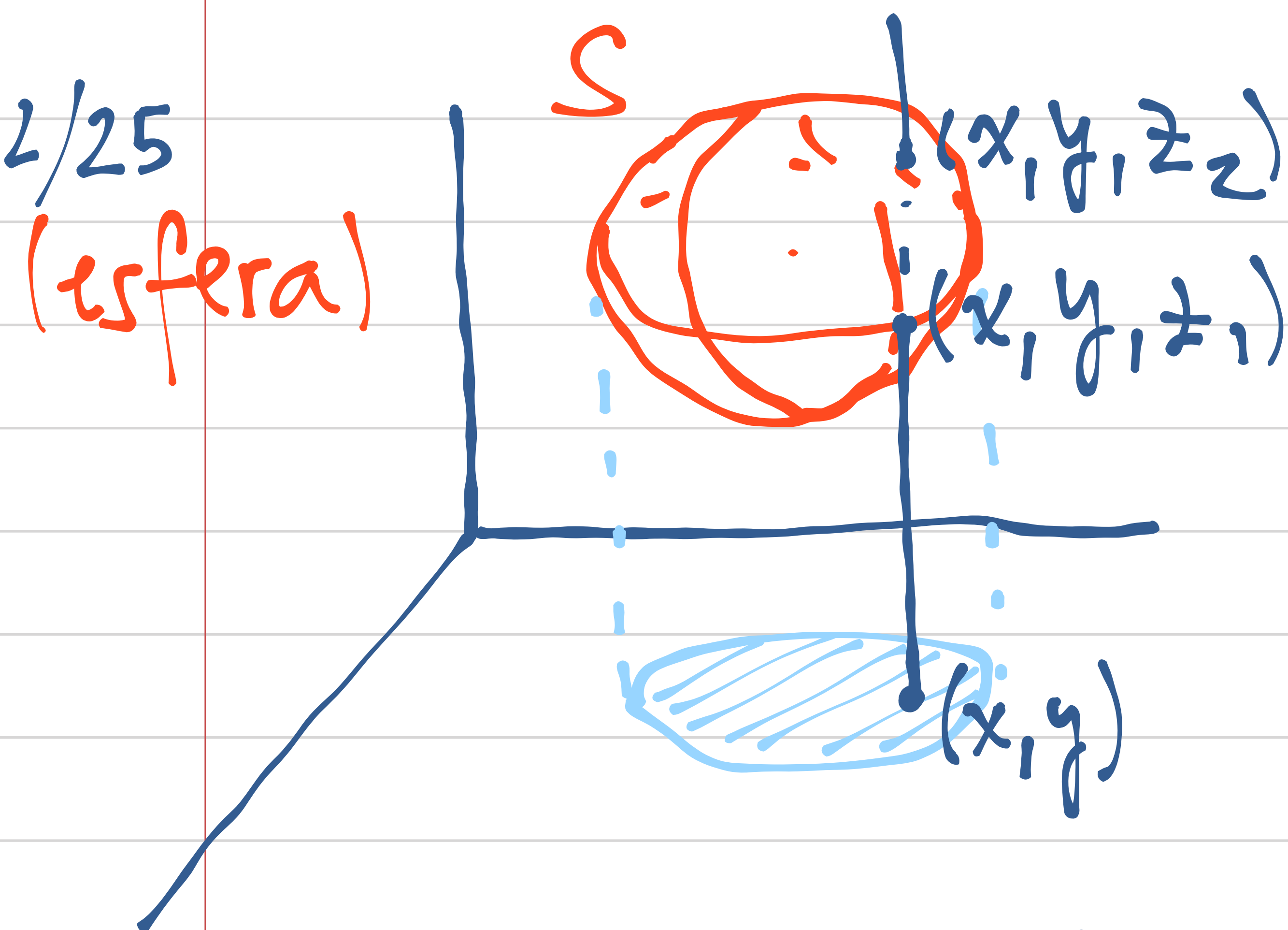
El concepto de "superficie" ya apareció en el contexto de Análisis I/ Mate 1: Dada $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, su gráfico

$$Gra(f) = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$$

es una superficie en $\mathbb{R}^3$.



Intuitivamente, podríamos decir que el conjunto de puntos S graficado a continuación:



es una "superficie". Pero S no es el gráfico de ninguna función continua $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ya que dado (x,y) como en la figura, hay dos puntos distintos en S, (x,y,z_1) y (x,y,z_2), que se "corresponden" con (x,y).

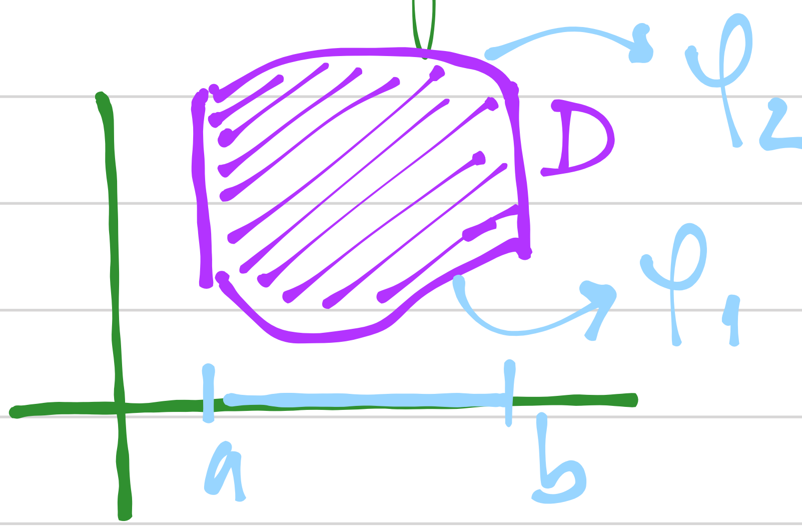
A continuación definimos un concepto de "superficie" más general que el visto en Análisis I / Mate 1 y que nos permite incluir conjuntos de puntos que no se pueden expresar como el gráfico de una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN Decimos que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una "superficie" si existe una función continua $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, denominada "parametrización de S", definida en una región elemental D, tal que $P \in S$ si y sólo si existe $(u, v) \in D$ tal que $P = T(u, v)$.

OBSERVACIÓN. Por lo general, anotaremos:

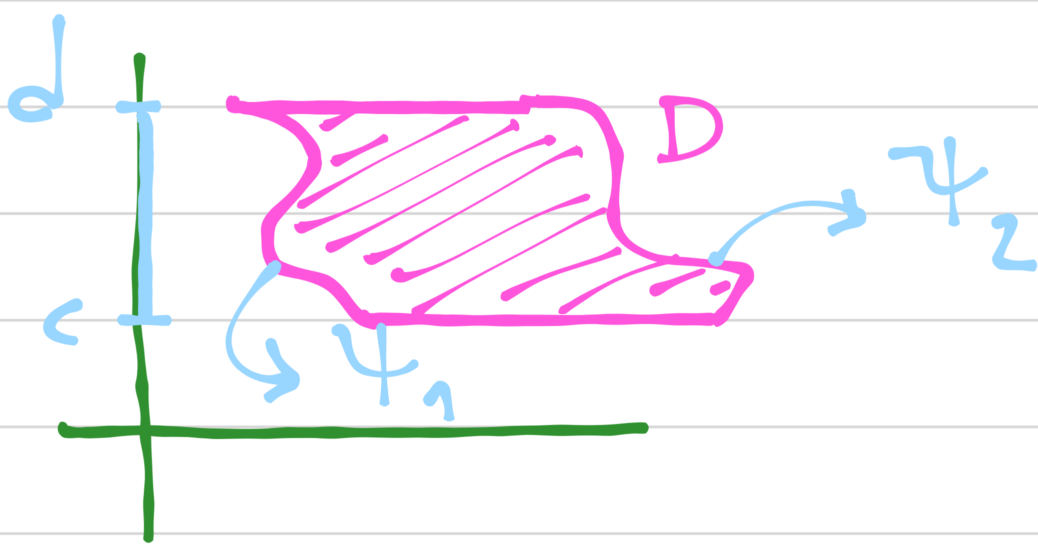
$$T(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big).$$

OBSERVACIÓN Recordar que $D \subset \mathbb{R}^2$ es una "región elemental" si

a) 

(Tipo I)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

b) 

(TIPO II)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ c \leq y \leq d\}$$

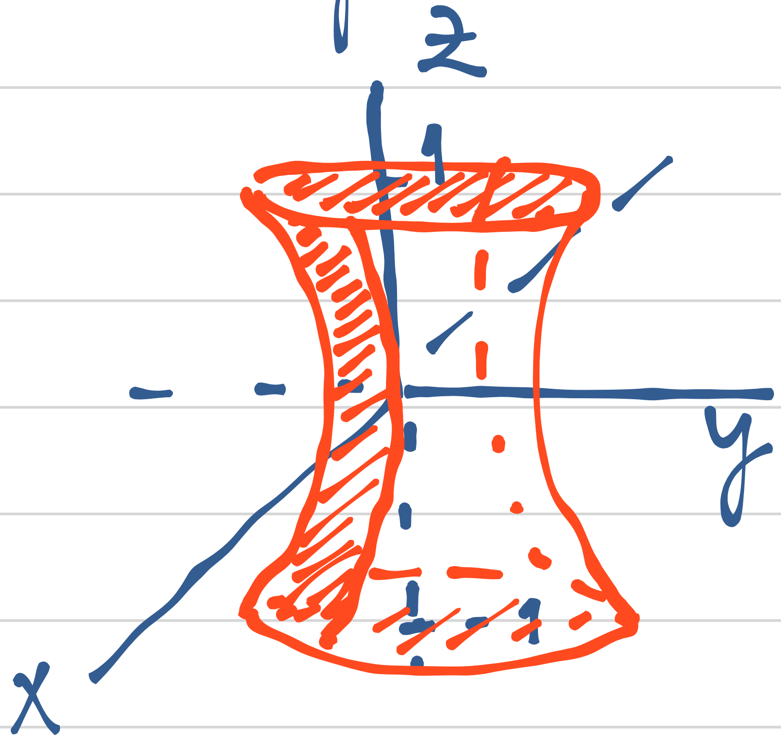
c) D se puede expresar como en a) y como en b) (TIPO III)

EJEMPLOS

a) Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $S = Graf(f)$ es una superficie ya que admite la parametrización $T: D \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(u,v) = (u, v, f(u,v))$.

b) Sea S el hiperboloide de una hoja dado por la ecuación:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{para } |z| \leq 1.$$



Tal como ocurre para la esfera, S no se puede expresar como el gráfico de una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. No obstante es una superficie con parametrización

$T: \overbrace{\boxed{[0,2\pi]\times[-1,1]}}^{D} \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$T(u,v) = \left(\cos(u)\sqrt{1+v^2},\ \text{sen}(u)\sqrt{1+v^2},\ v\right)$$

c) La función $T: [-1/2, 1/2]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(u,v) = \Big(\cos(v)\big(1+\cos(v/2)\big)u,\ \text{sen}(v)\big(1+\cos(v/2)\big)u,\ \text{sen}(v/2)\,u\Big)$$

parametriza una superficie S, conocida como "cinta de Moebius".

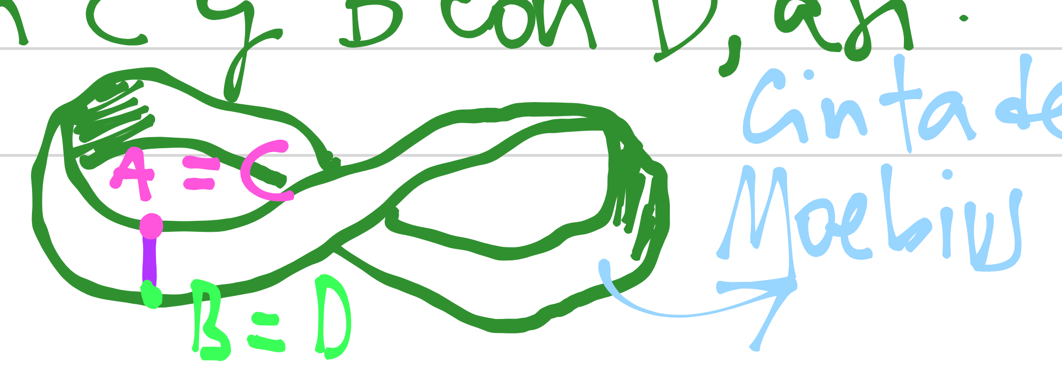
<u>OBSERVACIÓN</u> (Una construcción sencilla para la cinta de Moebius)

<u>Paso 1</u>

Conseguir un rectángulo de papel así:

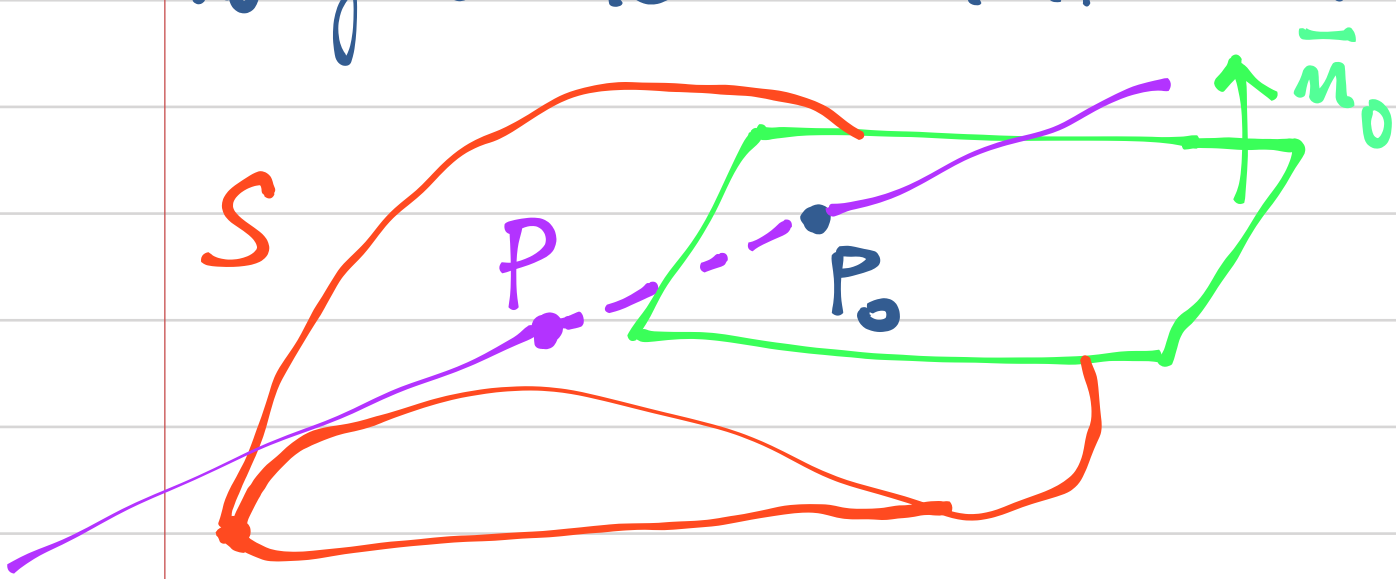
<u>Paso 2</u>

Pegar los bordes violetas haciendo coincidir A con C y B con D, así:



A continuación introducimos la noción de "plano tangente" a una superficie S en un punto $P_0 \in S$.

DEFINICIÓN Sean S una superficie, $P_0 \in S$ y Π_0 un plano que contiene a P_0 y tiene normal unitaria $\vec{n}_0$. Decimos que Π_0 es el 'plano tangente'



a S en P_0 si la recta que determinan $P \in S$ y P_0 (cualquiera sea $P \in S$) tiende a ser perpendicular a $\vec{n}_0$ cuando P tiende a P_0. En otras palabras, si el ángulo entre el vector $P - P_0$ y $\vec{n}_0$, digamos $\alpha(P)$, satisface:

$$\alpha(P) \to \pi/2 \quad \text{si } P \to P_0 \qquad (*)$$

<u>OBSERVACIÓN</u> La condición $(*)$ es equivalente a:

$$\underbrace{\frac{P - P_0}{|P - P_0|} \cdot \vec{n}_0}_{= \cos(\alpha(P))} \to 0 \quad \text{si } P \to P_0 \qquad (**)$$

El siguiente teorema nos da un criterio para saber si existe el plano tangente a una superficie en un punto dado.

<u>TEOREMA</u> Sean S una superficie, $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización

 de S y $P_0 = T(u_0, v_0) \in S$. Si

a) T es inyectiva

b) T es diferenciable en (u_0, v_0)

c) Los vectores $T_u(u_0, v_0)$ y $T_v(u_0, v_0)$ son no nulos y no paralelos,

entonces el plano tangente Π_0 a S en P_0 existe y está determinado por $T_u(u_0, v_0)$ y $T_v(u_0, v_0)$.

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Opcional (ver apunte en página 38).

<u>OBSERVACIÓN</u> En las condiciones del teorema anterior, se puede considerar

$$\vec{n}_0 = \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{|T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)|}.$$

Entonces, si anotamos

$\vec{n}_0 = (a_0, b_0, c_0)$ y $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

la ecuación de Π_0 es:

$$a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + c_0(z - z_0) = 0.$$

Notar que se obtiene la misma ecuación si como vector normal al plano se considera simplemente a $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$.

<u>DEFINICIÓN</u> Decimos que una superficie S es "suave" si:

a) S tiene plano tangente en todos sus puntos.

b) La recta perpendicular al plano tangente en $P \in S$ varía continua mente con P.

A continuación veremos un criterio para determinar si una superficie dada es suave. Comenzamos con una definición.

DEFINICIÓN Sea $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S. Decimos que T es "regular" si:

a) T es inyectiva

b) $T \in C^1(D)$

c) $T_u(u,v) \times T_v(u,v) \neq 0$ para todo $(u,v) \in D$.

Ahora sí, el criterio.

TEOREMA. Si una superficie S

 admite una parametrización regular, entonces es suave.

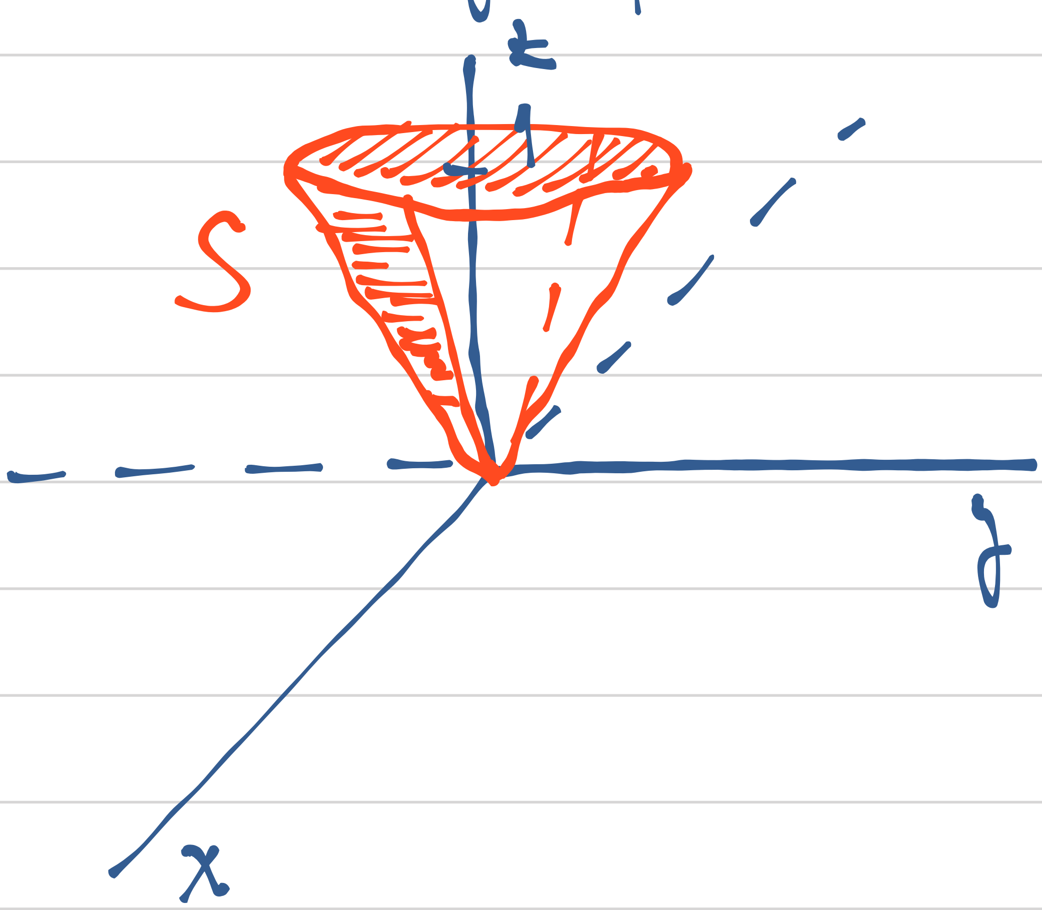
DEMOSTRACIÓN Opcional (ver apunte en página 39).

EJEMPLO Consideramos la superficie S parametrizada por $T : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ con $T(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta), \rho)$. Vamos a ver que T no regular y que S no es suave.

Que T no es regular es consecuencia que T no es inyectiva ya que $T(0,\theta) = (0,0,0)$ para cualquier $\theta \in [0,2\pi]$.

Veamos ahora que S no es suave. Primero observamos que S es un cono de

13/25 ecuación $x^2+y^2=z^2$, con $0\leq z\leq 1$, así que sabemos graficarla:



A partir de observar el gráfico, parece que S no tiene plano tangente en $P_0=(0,0,0)$. Tratemos de demostrarlo:

Supongamos que S tiene plano tangente Π_0 en P_0. Ya vimos que Π_0 tiene como vector normal unitario a

$$\vec{n}_0=\frac{T_\rho(0,\theta)\times T_\theta(0,\theta)}{\|T_\rho(0,\theta)\times T_\theta(0,\theta)\|}$$

siendo θ cualquier valor en $[0,2\pi]$ ya que $T(0,\theta)=(0,0,0)$ para todo $\theta\in[0,2\pi]$.

Ahora calculamos:

$$T_\rho(\rho,\theta)=(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta),1)$$

$$T_\theta(\rho,\theta)=(-\rho\operatorname{sen}(\theta),\rho\cos(\theta),0)$$

Luego,

$$T_\rho(\rho,\theta)\times T_\theta(\rho,\theta)=(-\rho\cos(\theta),-\rho\operatorname{sen}(\theta),1)$$

$$|T_\rho(\rho,\theta)\times T_\theta(\rho,\theta)|=\sqrt{2}$$

Entonces,

$$\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1).$$

Además, como estamos suponiendo que Π_0 es el plano tangente a S en P_0, se verifica que

$$\frac{P-P_0}{|P-P_0|}\cdot\vec{n}_0\to 0 \quad \text{si } P\to P_0,\ P\in S. \qquad (*)$$

 Si $P \in S$ entonces existen $\rho \in [0,1]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$ tales que $P = (\rho\cos(\theta), \rho\,\text{sen}(\theta), \rho)$.

Luego,

$$\frac{P - P_0}{|P - P_0|} = \frac{1}{\rho\sqrt{2}}(\rho\cos(\theta), \rho\,\text{sen}(\theta), \rho)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta), \text{sen}(\theta), 1)$$

Por lo tanto,

$$\frac{P - P_0}{|P - P_0|} \cdot \bar{n}_0 = \frac{1}{2}$$

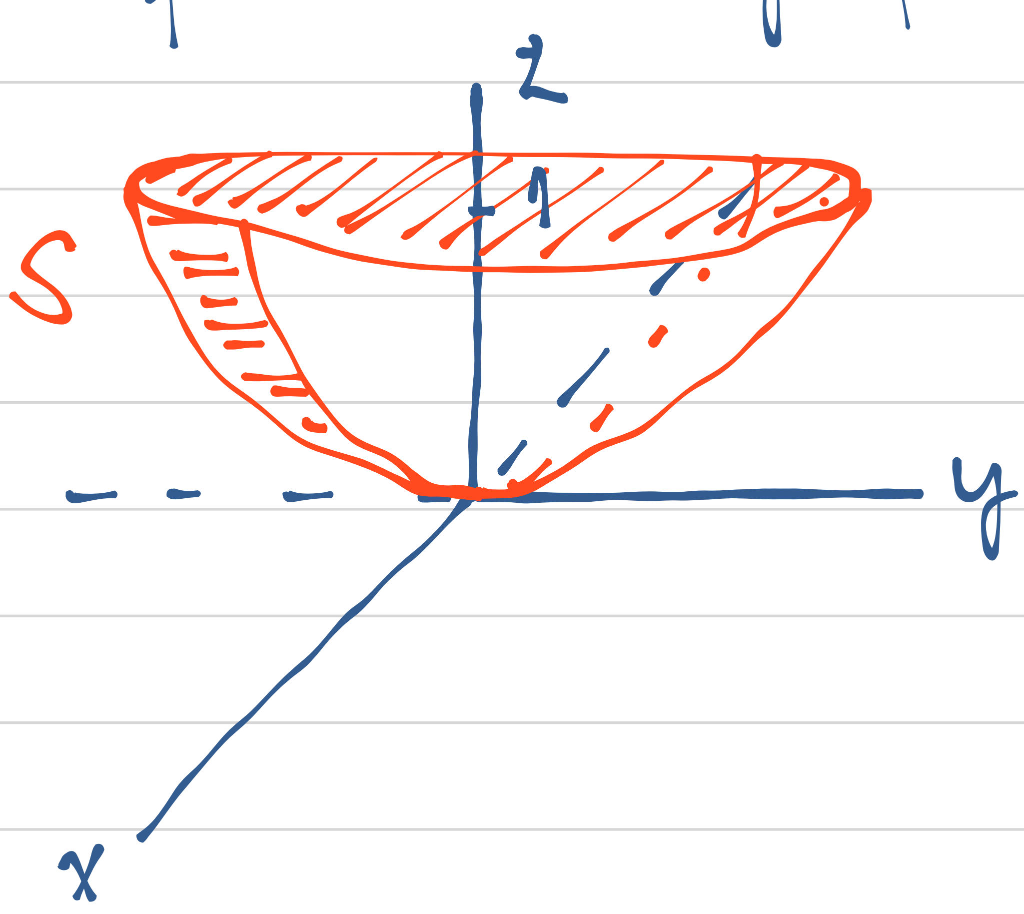
y esto contradice (*). Concluimos entonces que S no tiene plano tangente en $P_0 = (0,0,0)$, por lo cual no es suave.

<u>EJEMPLO</u> Consideramos la superficie S parametrizada por $T : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

con $T(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \rho^2)$. Vamos a ver que T no es regular y que S es suave.

Que T no es regular se ve como en el ejemplo anterior: T no es inyectiva porque $T(0,\theta) = (0,0,0)$ para cualquier $\theta \in [0,2\pi]$.

Veamos ahora que S es suave. Primero observamos que S es un paraboloide elíptico de ecuación $x^2+y^2=z$, así que sabemos graficarla:



A partir del gráfico observamos que S es suave. Vamos a demostrarlo.

Comenzamos por observar que T es inyectiva en

$$D^* = D - \{(0,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

La verificación de esto se deja como ejercicio. Notar que

Además, T es diferenciable en todo $(\rho_0, \theta_0) \in D^*$ y los vectores $T_\rho(\rho_0, \theta_0)$ y $T_\theta(\rho_0, \theta_0)$ son no nulos y no paralelos ya que

$$T_\rho(\rho_0, \theta_0) = (\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0), 2\rho_0)$$

$$T_\theta(\rho_0, \theta_0) = (-\rho_0 \operatorname{sen}(\theta_0), \rho_0 \cos(\theta_0), 0)$$

 y entonces

$$T_\rho(\rho_0,\theta_0) \times T_\theta(\rho_0,\theta_0)$$
$$= (-2\rho_0^2\cos(\theta_0), -2\rho_0\,\text{sen}(\theta_0), \rho_0^2)$$
$$\neq (0,0,0)$$

ya que $\rho_0 \neq 0$. Estamos casi en las condiciones del teorema anterior: La única diferencia es que en el teorema se pide que el dominio de T debe ser una región elemental y nosotros tenemos que el dominio de T es D^*. El teorema sigue siendo válido en regiones como D^* (no lo vemos en detalle aquí), así que podemos afirmar que existe el plano tangente Π_0 a la superficie S en el punto $P_0 \in S$, siempre que $P_0 \neq (0,0,0)$. Para demostrar que S es suave sólo falta ver que existe el plano tangente a S en el punto $(0,0,0)$. A partir del gráfico de S es razonable suponer que dicho plano está dado por la ecuación $z=0$. Vamos a demostrar que efectivamente esto es así. Primero observamos que el plano $z=0$ tiene como vector normal unitario a $(0,0,1)$. Además, dado $P \in S$, resulta

$$\frac{P}{|P|} = \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \rho^2)$$

donde $P = T(\rho,\theta)$. Luego,

$$\underbrace{\frac{P}{|P|}}_{\frac{P-(0,0,0)}{|P-(0,0,0)|}} \cdot (0,0,1) = \rho^2 \to 0 \quad \text{si} \quad \underbrace{P \to (0,0,0)}_{\text{equivalente a } \rho \to 0}$$

 Esto prueba que el plano de ecuación $z=0$ es tangente a S en $(0,0,0)$. Por lo tanto, S es suave.

Para terminar, veamos que si S es el gráfico de una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en C^1 o S está dada implícitamente por la ecuación $F(x,y,z)=0$ para $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en C^1, entonces S es suave y es conocida la ecuación del plano tangente a S en cada uno de sus puntos.

PROPOSICIÓN Sea S el gráfico de una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en C^1, donde D es una región elemental. Entonces S es suave y la ecuación del plano tangente a S en el punto $P=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

DEMOSTRACIÓN Sean S y f como en el enunciado. Para demostrar que S es suave basta ver que S admite una parametrización inyectiva y diferenciable T tal que $T_x(x,y)$ y $T_y(x,y)$ sean no nulos y no paralelos para todo (u,r) en el dominio de T. La parametrización $T: D \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=(x,y,f(x,y))$ satisface estas condiciones: Es directo que T es inyectiva y diferenciable. Además, dado $(x,y)\in D$, se tiene

$$T_x(x,y) = (1, 0, f_x(x,y))$$
$$T_y(x,y) = (0, 1, f_y(x,y)),$$

así que

$$T_x(x,y) \times T_y(x,y)$$
$$= (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$$
$$\neq (0,0,0).$$

Como el plano tangente a S en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ tiene normal $(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1)$, se obtiene la ecuación del plano que se da en el enunciado. $\boxtimes$

<u>**PROPOSICIÓN**</u> Sea S una superficie dada por la ecuación $F(x,y,z)=0$ donde $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es C^1 y satisface

 $\nabla F(x,y,z) \neq (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces F es suave y la ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Sean S y F como en el enunciado y sea $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$, sabemos que alguna de las coordenadas de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es no nula. Supongamos $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Luego, por el teorema de la función implícita existen un entorno V de (x_0, y_0, z_0) y una función f definida en un

 entorno de (x_0, y_0) tales que si $P \in S \cap V$ entonces existe un único $(x, y) \in D$ tal que $P = (x, y, f(x, y))$.

Más aún, como F es C^1 se tiene que f es C^1. Luego, $S \cap V$ es el gráfico de una función C^1. Por la proposición anterior sabemos que $S \cap V$ es suave y que la ecuación del plano tangente a $S \cap V$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Como

$$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{-F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)},$$

y $z_0 = f(x_0, y_0)$, multiplicando la ecuación anterior por $F_z(x_0, y_0, z_0)$ se obtiene la ecuación del plano dada en el enunciado.

Se llega a la misma conclusión si en lugar de suponer $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ se supone $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ o $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Como S es suave en algún entorno $S \cap V$ de cada punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$, concluimos que S es suave. $\blacksquare$