Ecuaciones diferenciales NO exactas reducibles a exactas (se convierten)

Recuerdo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta sii

$$M_y = N_x$$

En tal caso, las soluciones serán de la forma

$$\phi(x,y) = C$$

con C constante y ϕ un potencial de (M,N), es decir

$$\nabla\phi = (M,N).$$

Observación La ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ rara vez va a ser exacta.

Pregunta 1 ¿Vale la pena discutir las ecuaciones exactas o no? Voy a intentar convencerlos de que sí.

Algunas notaciones

- $y' = \frac{dy}{dx}$. Al resolver tratamos $\frac{dy}{dx}$ como si fuera una fracción

$$0 = x\,dy - y\,dx \iff 0 = xy' - y$$

- $\phi = \phi(x,y) \implies d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy$

Ejemplos que serán útiles en lo que sigue:

1) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2}$

2) $d(xy) = y\,dx + x\,dy$

3) $d(x^2+y^2) = 2(x\,dx + y\,dy)$

4) $d\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$

5) $d\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}$

- $d(\phi + \psi) = d\phi + d\psi$

2

Pregunta 2 ¿ Si $M\,dx + N\,dy = 0$ NO es exacta, bajo qué condiciones se puede encontrar una función $\mu = \mu(x,y)$ (factor integrante) con la propiedad de que $\mu(M\,dx + N\,dy) = 0$ sea exacta?

Recuerdo: 1) Si $\frac{1}{N}(M_y - N_x) = f(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$ es F.I

2) Si $\frac{1}{M}(N_x - M_y) = g(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$ es F.I

Veamos que $M\,dx + N\,dy = 0$ siempre admitirá un F.I cuando tenga una solución general.

Si $f(x,y) = C$ es solución general de $M\,dx + N\,dy = 0$

Entonces

$$f_x\,dx + f_y\,dy = 0 \qquad (df = dc = 0)$$

con lo cual

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = -\frac{f_x}{f_y}$$

es decir

$$\frac{f_x}{M} = \frac{f_y}{N} := \mu(x,y) \,.$$

Con esta notación, nos queda que

$$\begin{cases} f_x = \mu M \\ f_y = \mu N \end{cases}$$

Multiplicando $M\,dx + N\,dy = 0$ por μ obtenemos

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \,.$$

O sea, $f_x\,dx + f_y\,dy = 0$ que sí es exacta.

Este argumento muestra que si $Mdx + Ndy = 0$ tiene una solución general, entonces admite al menos (infinitos de hecho) un factor integrante μ.

Pregunta 3 ¿Cómo hallar F.I. en la práctica?

Recuerdo μ F.I. para $Mdx + Ndy = 0$ sii

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad \text{sii}$$

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x \quad \text{sii}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu}(N\mu_x - M\mu_y) = M_y - N_x} \quad \text{EDP}$$

Observación Resolver EDP es mucho más difícil que resolver la EDO $Mdx + Ndy = 0$.
Pero NO buscamos la solución general de EDP.
Planteando $\mu = \mu(x)$ o $\mu = \mu(y)$ se llega a las fórmulas de la hoja anterior

---

Teniendo en cuenta 1) a 5) veamos una técnica eficaz para convertir ecuaciones sencillas NO exactas en exactas
(Método de inspección)

Ejemplo 1 Resolver $(-x + x^2 y)dy + y\,dx = 0$

Podemos reescribirla como $\quad x^2 y\,dy - (x\,dy - y\,dx) = 0$

Por 1) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2}$ y esto nos sugiere que $\mu = \frac{1}{x^2}$ es FI

pues $\quad y\,dy - \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) = 0$

entonces $\quad 0 = y\,dy - d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{y}{x}\right)$ y

$\frac{1}{2}y^2 - \frac{y}{x} = C$ es la solución general

Observación La EDO $y\,dx - x\,dy = 0$ admite F.I

$\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{xy}$

Ejemplo 2 Resolver $\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + y\,dy = 0$

Reescribimos como antes

$$x\,dx + y\,dy = -\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

$$-\left(\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = dx$$

$$-d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - dx = 0 \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ es F.I.}\right)$$

$$-d\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right) = 0$$

Entonces $\sqrt{x^2+y^2} + x = C$ sol gral

$\left(y^2 = c^2 - 2cx \right)$

Veamos algunos ejemplos de $\mu = \mu(x,y)$ en lo que sigue

Ejercicios para practicar el método anterior Resolver:

a) $y\,dx + (1-x+y^2)\,dy = 0$

b) $x\,dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\,dx$ (Guía)

c) $x\,dy + y\,dx = \sqrt{xy}\,dy$

d) $x\,dy - y\,dx = x^2y^4(x\,dy + y\,dx)$

Ejemplo 3 $\mu(x,y) = x^r y^s$. $r,s \in \mathbb{N}$

Resolver $(7x^4y - 3y^8)\,dx + (2x^5 - 9xy^7)\,dy = 0$

Notemos que

$$\begin{cases} M(x,y) = 7x^4y - 3y^8 \\ N(x,y) = 2x^5 - 9xy^7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M_y = 7x^4 - 24y^7 \\ N_x = 10x^4 - 9y^7 \end{cases}$$

y la EDO NO es exacta.

También notemos que $M(x,y) = p(x,y)$, $N(x,y) = q(x,y)$ con p, q polinomios en las variables x e y sin términos constantes. $(p(0,0) = q(0,0) = 0)$.

Multipliquemos por $x^r y^s$ y veamos si podemos determinar valores de r, s de manera tal que

$$x^r y^s M\,dx + x^r y^s N\,dy = 0 \qquad (r,s \in \mathbb{N})$$

sea exacta.

Derivamos:

$$\begin{aligned}(x^r y^s M)_y &= s x^r y^{s-1}(7x^4y - 3y^8) + x^r y^s (7x^4 - 24y^7) \\ &= 7s x^{r+4} y^s - 3s x^r y^{s+7} + 7x^{r+4}y^s - 24x^r y^{s+7} \\ &= (7s+7)x^{r+4}y^s - (3s+24)x^r y^{s+7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^r y^s N)_x &= r x^{r-1} y^s (2\,{}^5 - 9xy^7) + x^r y^s (10x^4 - 9y^7) \\ &= 2r x^{r+4} y^s - 9r x^r y^{s+7} + 10x^{r+4}y^s - 9x^r y^{s+7} \\ &= (2r+10)x^{r+4}y^s - (9r+9)x^r y^{s+7}\end{aligned}$$

Así, $(x^r y^s M)_y = (x^r y^s N)_x$ sii

$$(7s+7)\,x^{r+4}y^s - (3s+24)\,x^r y^{s+7} = (2r+10)\,x^{r+4}y^s - (9r+9)\,x^r y^{s+7}$$

sii $\begin{cases} 7s+7 = 2r+10 \\ 3s+24 = 9r+9 \end{cases}$

sii $\begin{cases} 2r - 7s = -3 \\ 3r - s = 5 \end{cases}$

sii $\begin{cases} r = 2 \\ s = 1 \end{cases}$

Por lo tanto $\mu(x,y) = x^2 y$ es F.I.

Queda como ejercicio comprobar que la solución general es

$$x^2y\,(x^5y - xy^8) = C$$

Veamos como sería la idea con el método de inspección

Multiplicamos por $x^r y^s$ y distribuímos, nos queda:

$$\underbrace{(7x^{r+4})}_{(x^{r+5})'} y^{s+1}dx + \underbrace{(2y^s)}_{(y^{s+1})'} x^{r+5}dy - \underbrace{(3x^r)}_{(x^{r+1})'} y^{s+8}dx - \underbrace{(9y^{s+7})}_{(y^{s+8})'} x^{r+1}dy = 0$$

Debería ser $r=2$, $s=1$. Reemplazando queda

$$(x^7)'y^2dx + (y^2)'x^7dy - \left((x^3)'y^9dx + (y^9)'x^3dy\right) = 0$$

Entonces $d(x^7y^2) - d(x^3y^9) = 0$

$$d(x^7y^2 - x^3y^9) = 0$$

$$x^2y(x^5y - xy^8) = x^7y^2 - x^3y^9 = C$$

Ejercicio Resolver

$$(2y^2 + 4x^2y)\,dx + (4xy + 3x^3)\,dy = 0$$

encontrando un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^r y^s$ $r,s \in \mathbb{N}$.

Ejercicio Comprobar que la ecuación diferencial

$$\left(y + x f(x^2+y^2)\right)dx + \left(y f(x^2+y^2) - x\right)dy = 0$$

en general no es exacta, pero admite un factor integrante $(f \in C^1)$ de la forma $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

a) Mediante cuenta directa.

b) Utilizando método de inspección.