Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 21, 2do. cuatrimestre 2020

Sistemas lineales con coeficientes constantes

Analizamos un sistema no homogéneo, a fin de ver cómo funciona el método de variación de constantes.

Ejemplo: Se trata de resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + e^t, \\ x_2' = -2x_1 + x_2 + \dfrac{e^t}{\cos 2t}. \end{cases}$$

Comenzamos resolviendo el sistema homogéneo asociado:

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} X.$$

Sistemas lineales con coeficientes constantes

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 1 + 2i$ y $\lambda_2 = 1 - 2i$. Para λ_1, buscamos un autovector asociado:

$$((1+2i)I - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2ix_1 - 2x_2 = 0.$$

Por lo tanto, $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ es un autovector asociado, con lo cual

tenemos la solución compleja $\widetilde{X}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\xi_1$, es decir,

$$\widetilde{X}_1(t) = e^t(\cos(2t) + i\,\mathrm{sen}(2t))\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix} + i\, e^t \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Sistemas lineales con coeficientes constantes

Asimismo, $\widetilde{X}_2(t) = \overline{\widetilde{X}_1(t)}$ también es solución.

Una base de soluciones reales consiste de la parte real y la parte imaginaria de $\widetilde{X}_1$:

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo asociado es

$$X_H(t) = c_1\, e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2\, e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Sistemas lineales con coeficientes constantes

Ahora buscamos una solución particular de la forma

$$X_p(t) = c_1(t)\, e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2(t)\, e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos(2t)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\cos^2(2t) + \operatorname{sen}^2(2t))\, c_1' & = \left(\cos(2t) - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\cos(2t)} \right), \\ (\operatorname{sen}^2(2t) + \cos^2(2t))\, c_2' & = \operatorname{sen}(2t) + 1. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' & = \cos(2t) - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\cos(2t)} \\ c_2' & = \operatorname{sen}(2t) + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 & = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + \frac{\ln(\cos(2t))}{2}, \\ c_2 & = t - \frac{\cos(2t)}{2}. \end{cases}$$

Sistemas lineales con coeficientes constantes

Así obtenemos una solución particular, a saber

$$X_p(t) = \left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + \frac{\ln(\cos(2t))}{2}\right) e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + \left(-\frac{\cos(2t)}{2} + t\right) e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución general $X_G(t)$ se obtiene como $X_G(t) = X_p(t) + X_H(t)$:

$$X(t) = \left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + \frac{\ln(\cos(2t))}{2} + c_1\right) e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + \left(-\frac{\cos(2t)}{2} + t + c_2\right) e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Aplicamos ahora el método de variación de parámetros para hallar la solución de una ecuación lineal no homogénea.

Ejemplo: determinar la solución general de la ecuación

$$x'' - 2x' + x = t.$$

Hallamos primero una base de soluciones de la ecuación homogénea asociada $x'' - 2x' + x = 0$. El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Por lo tanto la única raíz es $\lambda = 1$ y una base de soluciones es

$$\{e^t, t\,e^t\}.$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Buscamos una solución particular de la forma

$$x(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)t\,e^t.$$

Recordamos que

$$\begin{aligned} c_1' e^t + c_2' t e^t &= 0, \\ c_1' e^t + c_2'(e^t + t\,e^t) &= t. \end{aligned}$$

Concluimos que $c_2' = t\,e^{-t}$ y $c_1' = -c_2' t = -t^2 e^{-t} \Rightarrow$

$$c_2 = \int te^{-t}\,dt = -te^{-t} + \int e^{-t}\,dt = -te^{-t} - e^{-t} = -(t+1)e^{-t},$$

$$c_1 = -\int t^2 e^{-t}\,dt = t^2 e^{-t} - 2\int te^{-t}\,dt = t^2 e^{-t} + 2(t+1)e^{-t}.$$

Así, la solución general es

$$x(t) = (t^2+2t+2) - (t+1)t + c_1 e^t + c_2 t\,e^t = t + 2 + c_1 e^t + c_2 t\,e^t.$$

Resumen: Existencia y unicidad de soluciones

Estudiamos existencia y unicidad local de soluciones para un sistema de 1er. orden de la forma

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}).$$

Definición: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $\boldsymbol{F} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X})$. Decimos que $\boldsymbol{F}$ es Lipschitz en $\boldsymbol{X}$ si $\boldsymbol{F}$ es continuo y existe $L > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{Y})\| \leq L\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\|,$$

para todo $t \in I$ y $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \Omega$.

Asimismo, decimos que $\boldsymbol{F}$ es localmente Lipschitz en $\boldsymbol{X}$ si para todo $J = [a, b] \subset I$ y todo conjunto cerrado y acotado $\Omega' \subset \Omega$, $\boldsymbol{F}$ es Lipschitz en $J \times \Omega'$.

Resumen: Existencia y unicidad de soluciones

Tenemos el siguiente resultado de existencia de soluciones para un sistema de 1er. orden.

Teorema: Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $\boldsymbol{F} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo localmente Lipschitz en $\boldsymbol{X}$. Sean $(\tau, \xi) \in I \times \Omega$. Si τ es interior a I, existen $\lambda > 0$ y una función $\boldsymbol{X} : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \Omega$ de clase C^1 tales que

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t) &= \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}(t)), \quad \text{para todo } t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda], \\ \boldsymbol{X}(\tau) &= \xi. \end{cases}$$

Si τ es el extremo izquierdo de I, existen $\lambda > 0$ y una función $\boldsymbol{X} : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \Omega$ de clase C^1 tales que

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}'(t) &= \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}(t)), \quad \text{para todo } t \in [\tau, \tau + \lambda], \\ \boldsymbol{X}(\tau) &= \xi. \end{cases}$$

Idem si τ es el extremo derecho de I.

Resumen: Existencia y unicidad de soluciones

En relación con la unicidad de las soluciones, tenemos el siguiente resultado de continuidad de las soluciones respecto del dato inicial.

Teorema: Con I y f como antes, sean $\tau \in I$ y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Si $x_1, x_2 : [\tau, \eta] \subset I \to \mathbb{R}$ son soluciones de

$$x' = f(t, x) \quad \text{en } [\tau, \eta],$$

con $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2$, entonces existe $C = C(\eta)$ tal que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(\eta)\,|\xi_1 - \xi_2| \quad \text{para todo } t \in [\tau, \eta].$$

Vale lo mismo si $x_1, x_2 : [\eta, \tau] \to \mathbb{R}$ son soluciones con $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2$.

Resumen: Existencia y unicidad de soluciones

Como corolario del resultado anterior, obtenemos el siguiente resultado de unicidad:

Teorema: Sean I y f como en el Teorema. Sean $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$, y sean $J_1, J_2 \subset I$ dos intervalos tales que $\tau \in J_1 \cap J_2 \subset I$ y existen funciones $x_i : J_i \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$ tales que

$$\begin{cases} x_i' = f(t, x_i) & \text{en } J_i, \\ x_i(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Entonces $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in J_1 \cap J_2$.

Resumen: Existencia y unicidad de soluciones

En particular, las soluciones de un sistema lineal con coeficientes continuos en un intervalo abierto I son globales.

Teorema: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sean $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas para $i, j = 1, \cdots, n$. Sean $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Existe entonces una única solución $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ del sistema

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n, \end{cases}$$

que satisface $\boldsymbol{X}(\tau) = \xi$. Esta solución está definida en todo el intervalo I.

Resumen: sistemas lineales homogéneos

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Sean $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas para $i, j = 1, \ldots, n$ y sea $A(t) = (a_{ij}(t))$.
Consideramos el sistema lineal homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = A(t)\boldsymbol{X}(t).$$

Teorema: El conjunto de las soluciones del sistema $\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X}$ forma un espacio vectorial de dimensión n.

Proposición: Sean $\{\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n\}$ soluciones del sistema $\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X}$ y sea $\tau \in I$. Entonces $\{\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n\}$ son linealmente independientes si y sólo si los vectores $\{\boldsymbol{X}_1(\tau), \ldots, \boldsymbol{X}_n(\tau)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.

Resumen: A con coeficientes constantes

Autovalores	**Base**
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}\xi_1, \; e^{\lambda_2 t}\xi_2$
$\lambda_1 = \alpha + i\beta$	$e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t))\xi$
$\overline{\lambda_1} = \lambda_2 \in \mathbb{C}$	tomar parte real
	tomar parte imaginaria
$\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda_1 t}\xi_1, \; e^{\lambda_1 t}(t\xi_1 + \eta)$
	$(A - \lambda_1 I)\eta = \xi_1$

Resumen: sistema no homogéneo

Teorema: La solución general del sistema lineal

$$\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$$

es de la forma

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_p(t) + \boldsymbol{X}_H(t),$$

donde $\boldsymbol{X}_p$ es una solución particular del sistema y $\boldsymbol{X}_H$ es la solución general del sistema homogéneo asociado, es decir,

$$\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X}.$$

Resumen: Variación de los parámetros

Teorema: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a_{i,j}, b_j : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas para $i, j = 1, \ldots, n$, $A(t) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ y $\boldsymbol{b}(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))$. Sea $\{\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n\}$ una base del conjunto de soluciones del sistema homogéneo $\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X}$. Existen funciones $c_1, \ldots, c_n : I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$\boldsymbol{X}_p(t) = c_1(t)\boldsymbol{X}_1(t) + \cdots + c_n(t)\boldsymbol{X}_n(t)$$

es una solución particular del sistema $\boldsymbol{X}' = A(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}(t)$.

Las funciones c_i satisfacen la siguiente condición:

$$Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}(t),$$

donde $Q(t)$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $\boldsymbol{X}_1(t), \ldots, \boldsymbol{X}_n(t)$.

Resumen: Ecuación lineal de orden n

Consideramos la ecuación lineal de orden n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t),$$

donde $a_j, f : I \to \mathbb{R}$ son funciones definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.

Teorema: El conjunto de soluciones de la ecuación lineal homogénea de orden n (cuando $f = 0$) forma un espacio vectorial de dimensión n.

Teorema: La solución general tiene la forma

$$x(t) = x_p(t) + x_H(t),$$

donde x_p es una solución particular y x_H es la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Resumen: ecuación con coeficientes constantes

La ecuación característica es

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Raíces	Base
$\lambda \in \mathbb{R}$ simple	$e^{\lambda t}$
$\lambda = \alpha + i\beta$	$e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\,\text{sen}(\beta t))$
$\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	$e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ e^{\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$
$\lambda \in \mathbb{R}$ mult. k	$e^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$

Resumen: Variación de los parámetros

Teorema: Existe una solución particular de la ecuación lineal de orden n de la forma

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t),$$

donde $\{x_1, \cdots, x_n\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea asociada y $c_1, \ldots, c_n : I \to \mathbb{R}$ son de clase C^1, tal que sus derivadas satisfacen el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$