ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

Segundo cuatrimestre de 2020

Clase 19/10 - Repaso Teoremas Integrales.

Ejercicio 1. (Parcial del segundo cuatrimestre del 2015)
Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\} \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 satisfaciendo:

i) $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$.

ii) $\int_{H_b} F \cdot ds = -b \cdot L$, para cualquier segmento horizontal de ordenada b y longitud L que no pase por $(1,1)$, orientado tal que su vector tangente tenga dirección $(1,0)$.

iii) $\int_{V_a} F \cdot ds = a \cdot L$, para cualquier segmento vertical de abscisa a y longitud L que no pase por $(1,1)$, orientado tal que su vector tangente tenga dirección $(0,1)$.

Calcule $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$, siendo $\mathcal{C}$ el arco de circunferencia de centro $(1,1)$ y radio uno recorrido en sentido antihorario desde el punto $(1,2)$ hasta el punto $(1,0)$

Ejercicio 2. (Parcial del segundo cuatrimestre del 2015).
Sean $\mathbb{S}$ la porción de plano dado por

$$\mathbb{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=3,\ y \geq x,\ x^2+y^2 \leq 4\}$$

y F el campo vectorial dado por $F(x,y,z) = (z+y+\cos^2 x, -xz + \operatorname{sen}^3 y, 2e^{z^2} + x^2 y)$.
Calcule $\oint_{\partial\mathbb{S}^+} F \cdot ds$ donde $\partial\mathbb{S}^+$ está orientada de manera tal que su proyección al plano xy respeta la orientación positiva del *Teorema de Green.*

Ejercicio 3. (Parcial del segundo cuatrimestre del 2015).
Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$ para cualquier $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y F el campo vectorial dado por

$$F(x,y,z) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + xye^{xz^2}(2+xz^2),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + x^2e^{xz^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) + 2zyx^3e^{xz^2}\Big).$$

Calcule la circulación de F a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

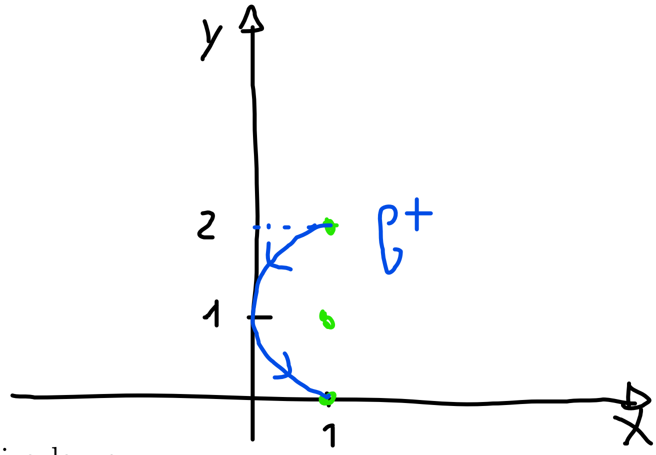
$$\sigma(t) = ((1+e^{t^2})\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ t(\pi - t)^{4/3}\ ), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Ejercicio 4. (Parcial del primer cuatrimestre del 2020).
Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f > 0$ en el interior de D y $f = 0$ en el borde de D. Para cada $t \in [0,1]$ consideremos la superficie $\mathbb{S}_t$ parametrizada regularmente mediante $T_t : D \to \mathbb{S}_t$ dada por $T_t(u,v) = (u,v,t\cdot f(u,v))$, orientadas con la normal que apunta hacia arriba.
Pruebe que para cualquier $t \in [0,1]$ se satisface

$$\iint_{\mathbb{S}_t} (2x, 3y, -5z+5) \cdot dS = 5 \cdot \text{Área}(D).$$

Solución Ejercicio 1:

La curva $\mathcal{C}$ está recorrida de la siguiente manera:

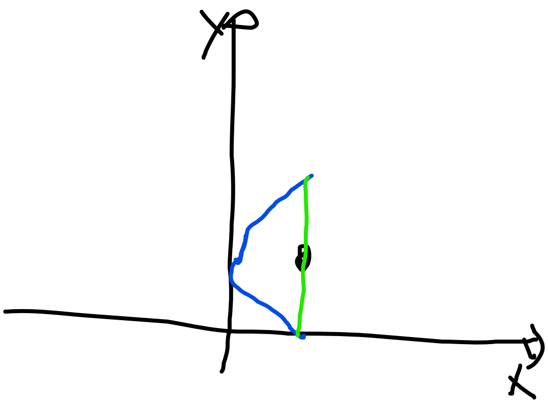


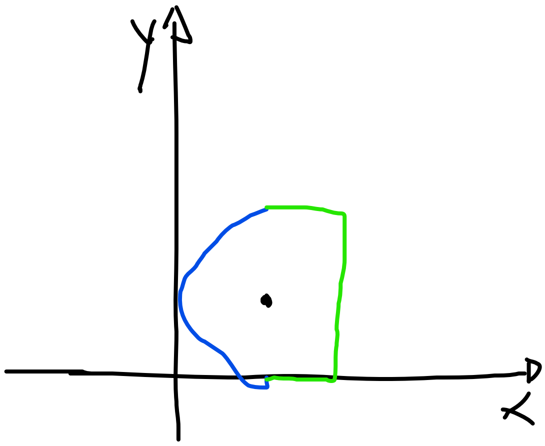
y podemos parametrizarla por

$$\sigma(t) = (1 + \cos t, 1 + \operatorname{sen} t), \qquad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2},$$

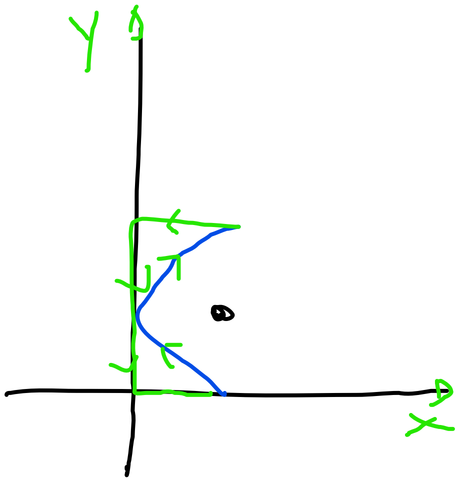
pero al instante nos damos cuenta de que no tenemos suficiente información para calcular $\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds$ usando la definición.
La idea es usar el Teorema de Green llamando $F = (P, Q)$ (ver dato i)). Para eso será necesario cerrar la curva (con segmentos para utilizar los datos ii) y iii) de manera tal que $F \in C^1$ en esa región encerrada por las curvas.
¿Cómo cerrarla?

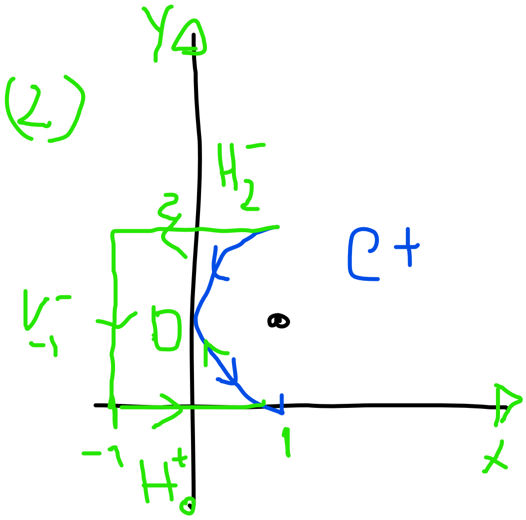
NO

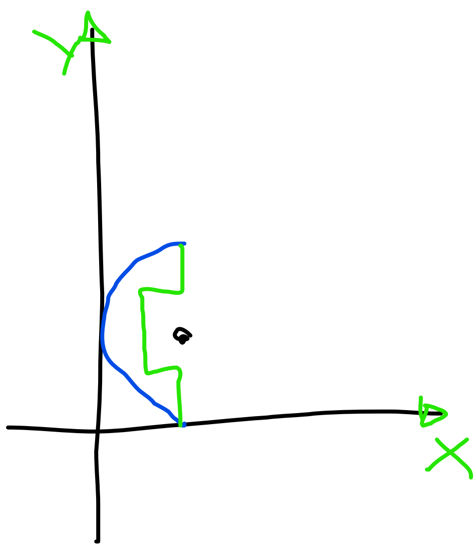




SI !







Resolvamos utilizando la opción (2) con cada una de las curvas orientadas como se muestra en el gráfico. Por el Teorema de Green podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \oint_{\partial D^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\
&= \left(\int_{\mathcal{C}^-} + \int_{H_2^-} + \int_{V_{-1}^-} + \int_{H_0^+}\right) P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \\
&= \left(\int_{\mathcal{C}^-} + \int_{H_2^-} + \int_{V_{-1}^-} + \int_{H_0^+}\right) F \cdot ds.
\end{aligned}
$$

Como nosotros queremos calcular $\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds$, nos conviene despejar de la siguiente manera:

$$
\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \left(\int_{H_2^-} + \int_{V_{-1}^-} + \int_{H_0^+}\right) F \cdot ds.
$$

Empezamos a calcularlas

$$
\begin{aligned}
\int_{H_2^-} F \cdot ds &= -\int_{H_2^+} F \cdot ds = -(-2 \cdot 2) = \boxed{4.} \\
\int_{V_{-1}^-} F \cdot ds &= -\int_{V_{-1}^+} F \cdot ds = -(-1 \cdot 2) = \boxed{2.} \\
\int_{H_0^+} F \cdot ds &= 0 \cdot 2 = \boxed{0.} \\
-\iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=2} dA &= -2 \cdot \text{Área}(D) = -2(4 - \pi/2) = \boxed{-8 + \pi.}
\end{aligned}
$$

Entonces obtenemos que

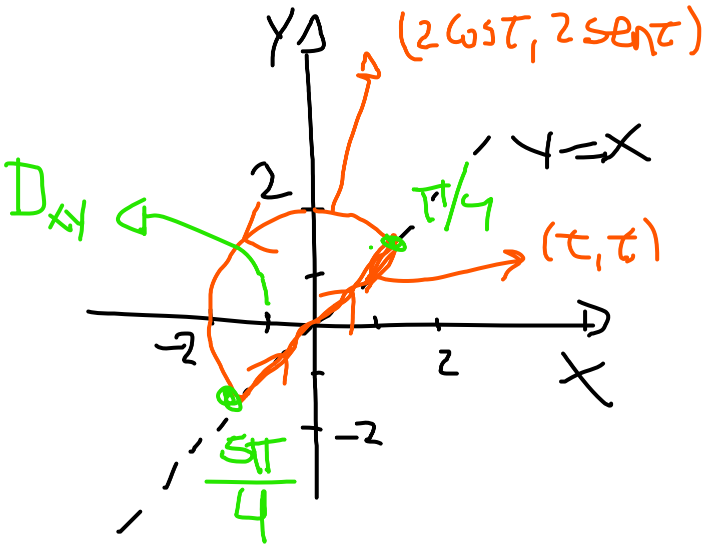
$$
\begin{aligned}
\boxed{\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds} &= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \left(\int_{H_2^-} + \int_{V_{-1}^-} + \int_{H_0^+}\right) F \cdot ds. \\
&= -8 + \pi + 4 + 2 + 0 \\
&= \boxed{\pi - 2.}
\end{aligned}
$$

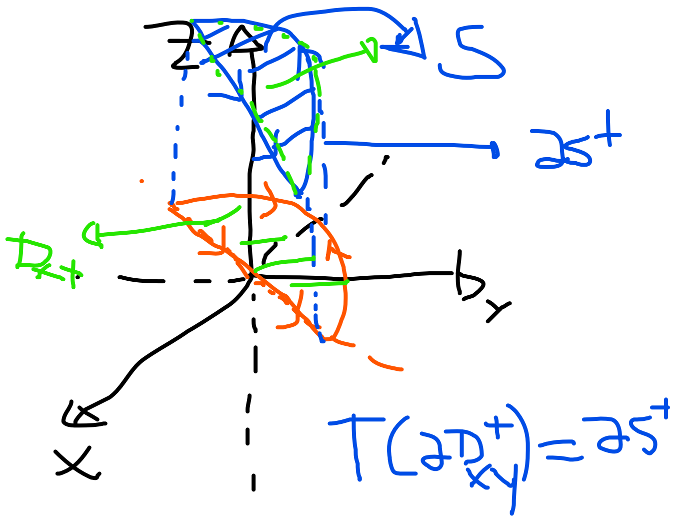
♦

Solución Ejercicio 2:

Para darnos cuenta de que forma es $\partial\mathbb{S}$ es una buena idea parametrizar $\mathbb{S}$ como el gráfico de una función, es decir, con $T : D_{xy} :\to \mathbb{S}$ dada por

$$T(x, y) = (x, y, 3 - x - y).$$
$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$





Ahora es claro quién es $\partial\mathbb{S}$ y como es su orientación para que al proyectarla sobre el plano xy tenga la orientación positiva del teorema de Green.
Podemos parametrizar $\partial\mathbb{S} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ con un poco de esfuerzo:

$$\sigma_1 : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathcal{C}_1 \qquad \sigma_1(t) = (t, t, 3 - 2t)$$
$$\sigma_2 : [\pi/4, 5\pi/4] \to \mathcal{C}_2 \qquad \sigma_2(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 3 - 2\cos t - 2\operatorname{sen} t)$$

pero mirando el campo no parece que sea sencillo calcular la circulación de F a lo largo de $\partial\mathbb{S}^+$.
Veamos que utilizando el *Teorema de Stokes* sale más accesible. Notemos que todas las orientaciones se llevan bien pues

$$\sigma_1(t) = T(t, t), \qquad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2},$$
$$\sigma_2(t) = T(2\cos t, 2\operatorname{sen} t), \qquad \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4},$$

es decir, $T(\partial D^+) = \partial\mathbb{S}^+$.
Calculemos $\nabla \times F$.

$$(\nabla \times F)(x, y, z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + y + \cos^2 x & -xz + \operatorname{sen}^3 y & 2e^{z^2} + x^2 y \end{vmatrix}$$
$$= (x^2 - (-x),\ 1 - 2xy,\ -z - 1)$$
$$= (x^2 + x,\ 1 - 2xy,\ -z - 1).$$

Entonces, por Stokes

$$
\begin{aligned}
\boxed{\oint_{\partial\mathbb{S}^+} F\cdot ds} &= \iint_{\mathbb{S}} (\nabla\times F)\cdot dS\\
&= \iint_{D_{xy}} (\nabla\times F)(T(x,y))\cdot(1,1,1)\,dA\\
&= \iint_{D_{xy}} (x^2+x+1-2xy-3+x+y-1)\,dA\\
&= \iint_{D_{xy}} (x^2+2x+y-2xy-3)\,dA\\
\text{(polares)} \quad &= \int_0^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} r(r^2\cos^2\theta+2r\cos\theta+r\operatorname{sen}\theta-2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta-3)\,d\theta dr\\
&= \int_0^2\left[r^3\Big(\frac{\operatorname{sen}2\theta+2\theta}{4}\Big)+2r^2\operatorname{sen}\theta+r^2\cos\theta-r^3\operatorname{sen}^2\theta-3\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dr\\
&= \int_0^2\left[r^3\frac{\pi}{2}-2\sqrt{2}r^2+\sqrt{2}r^2-0-3\pi\right]dr\\
&= \left[\frac{\pi}{8}r^4-\frac{\sqrt{2}}{3}r^3-3r\pi\right]_0^2\\
&= 2\pi-8\frac{\sqrt{2}}{3}-6\pi\\
&= \boxed{-\frac{8\sqrt{2}}{3}-4\pi.}
\end{aligned}
$$

♦

Solución Ejercicio 3:

Notemos que podemos escribir a F como

$G(x,y,z)=(P,Q,R)$

$$F(x,y,z) = (\nabla f)(x,y,z) + (xye^{xz^2}(2+xz^2),\ x^2e^{xz^2},\ 2zyx^3e^{xz^2}).$$

Llamamos G al segundo campo.
De esta manera podemos hacer

obs
C No es cerrada

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds &= \int_{\mathcal{C}} (\nabla f)\cdot ds + \int_{\mathcal{C}} G\cdot ds\\ &= f(\sigma(\pi)) - f(\sigma(0)) + \int_{\mathcal{C}} G\cdot ds.\end{aligned}$$

A simple vista se ve que va a ser imposible calcular $\int_{\mathcal{C}} G\cdot ds$ por definición.
Veamos si también es un campo conservativo.
→ x teorema
Al ser $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$, alcanza con comprobar que $\nabla\times G = (0,0,0)$ o, equivalentemente, que $DG(x,y,z)$ sea simétrica respecto de la diagonal. Para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tenemos:

$$DG(x,y,z) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \partial x & \partial y & \partial z \end{array} & \\ \begin{pmatrix} * & xe^{xz^2}(2+xz^2) & 2x^2yze^{xz^2}(2+xz^2)+2x^2yze^{xz^2}\\ 2xe^{xz^2}+x^2z^2e^{xz^2} & * & 2x^3ze^{xz^2}\\ 6x^2yze^{xz^2}+2x^3yz^3e^{xz^2} & 2x^3ze^{xz^2} & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P\\ Q\\ R \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} * & xe^{xz^2}(2+xz^2) & 2x^2yze^{xz^2}(3+xz^2)\\ xe^{xz^2}(2+xz^2) & * & 2x^3ze^{xz^2}\\ 2x^2yze^{xz^2}(3+xz^2) & 2x^3ze^{xz^2} & * \end{pmatrix}$$

y efectivamente es simétrica.
Hallamos un potencial para G, es decir, buscamos ϕ de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla\phi = G$.

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) &= xye^{xz^2}(2+xz^2)\\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) &= x^2e^{xz^2}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) &= 2zyx^3e^{xz^2} \end{cases} \qquad \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Integrando con respecto a la variable que aparece la derivada nos queda

$$\begin{cases} \phi(x,y,z) = \int xye^{xz^2}(2+xz^2)\,dx = x^2ye^{xz^2}+A(y,z).\\ \phi(x,y,z) = \int x^2e^{xz^2}\,dy = x^2ye^{xz^2}+B(x,z).\\ \phi(x,y,z) = \int 2zyx^3e^{xz^2}\,dz = x^2ye^{xz^2}+C(x,y). \end{cases}$$

Con lo que podemos elegir $A\equiv B\equiv C\equiv 0$, siendo

$$\phi(x,y,z) = x^2ye^{xz^2}. \qquad \text{(comprobarlo derivando)}$$

Como $\sigma(\pi) = (0,-1,0)$ y $\sigma(0) = (0,1,0)$, estamos en condiciones de calcular lo pedido.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds &= \int_{\mathcal{C}} (\nabla f)\cdot ds + \int_{\mathcal{C}} G\cdot ds\\ &= f(\sigma(\pi)) - f(\sigma(0)) + \int_{\mathcal{C}} (\nabla\phi)\cdot ds\\ &= f(0,-1,0) - f(0,1,0) + \phi(0,-1,0) - \phi(0,1,0)\\ &= 0+0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donde hemos usado la hipótesis de que $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$.
♦

¡¡No necesitamos dibujar la curva!!

Solución Ejercicio 4:

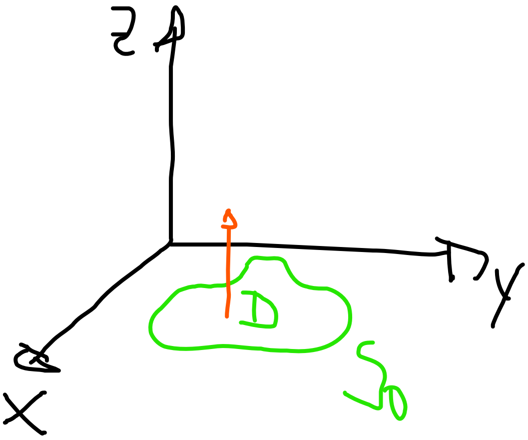
Notemos primero que para cada $t \in [0,1]$ las parametrizaciones regulares T_t respetan las orientaciones de $\mathbb{S}_t$ pues

$$\left(\frac{\partial T_t}{\partial u} \times \frac{\partial T_t}{\partial v}\right)(u,v) = \left(-t \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), -t \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), 1\right), \quad \forall\,(u,v) \in D.$$

Veamos que nos dicen esas hipótesis sobre f.

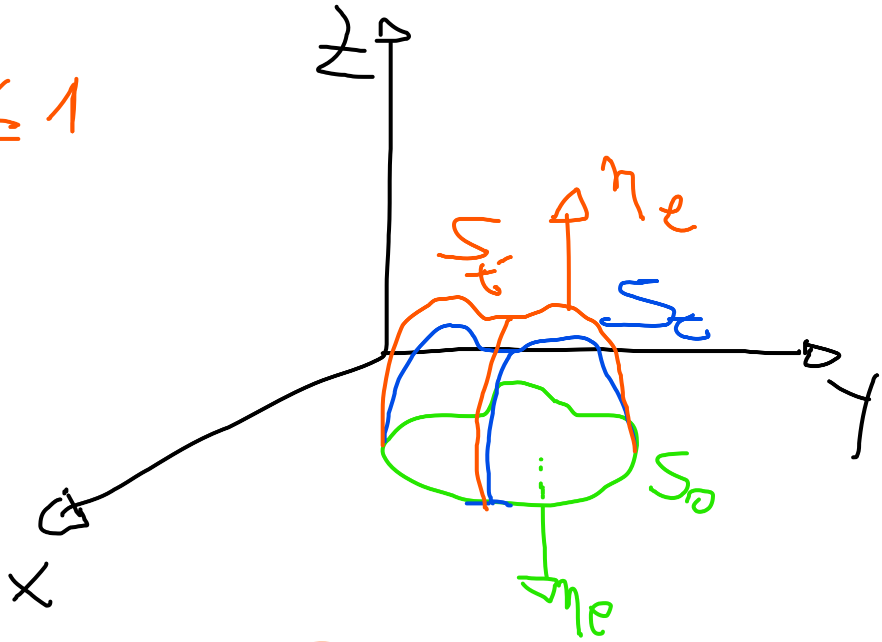
$T_t(u,v) = (u, v, t \cdot f(u,v))$

$t = 0$



$0 < t \leq 1$

$0 < t < t' \leq 1$



$\Omega_t = \text{sólido} /$

$\partial \Omega_t = S_0 \cup S_t$

Utilizando las parametrizaciones dadas tenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{S}_t} (2x, 3y, -5z+5) \cdot dS &= \iint_D (2u, 3v, -5t \cdot f(u,v) + 5) \cdot \Big(-t \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u,v), -t \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), 1 \Big)\, dA \\
&= \iint_D \Big(-2tu \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - 2tv \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) - 5t \cdot f(u,v) + 5 \Big)\, dA \\
&= \iint_D \Big(-2tu \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - 2tv \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) - 5t \cdot f(u,v) \Big)\, dA + 5 \cdot \text{Área}(D).
\end{aligned}$$

Si $F(x,y,z) = (2x, 3y, -5z)$ y probamos que

$$\iint_{\mathbb{S}_t} F \cdot dS = \iint_D \Big(-2tu \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) - 2tv \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) - 5t \cdot f(u,v) \Big)\, dA = 0 \quad \forall\, t \in [0,1],$$

tendremos probado lo que nos piden pues $(2x, 3y, -5z+5) = F(x,y,z) + (0,0,5)$.
Para $t = 0$ es trivial (integramos la función cero sobre D).
Sea $0 < t \leq 1$ arbitrario. En tal caso tenemos que $\mathbb{S}_0 \cup \mathbb{S}_t = \partial\Omega_t$, con

$$\Omega_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq t \cdot f(x,y)\} \qquad (x,y) \in D.$$

es una región con volumen.
Utilizaremos el Teorema de la divergencia para $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y para Ω_t.
Para que $\partial\Omega_t$ tenga la normal exterior unitaria η_e, debemos considerar la normal $(0,0,-1)$ en $\mathbb{S}_0$ y en $\mathbb{S}_t$ sirve la orientación dada. Entonces:

$$\iint_{\mathbb{S}_0} (F \cdot (0,0,-1))\, dS + \iint_{\mathbb{S}_t} F \cdot dS = \iint_{\mathbb{S}=\partial\Omega_t} (F \cdot \eta_e)\, dS \overset{\text{Teo Div}}{=} \iiint_{\Omega_t} (\nabla \cdot F)\, dV = 0$$

ya que $(\nabla \cdot F)(x,y,z) = 0 \ \forall\, (x,y,z)$.
Despejando obtenemos:

$$\iint_{\mathbb{S}_t} F \cdot dS = -\iint_{\mathbb{S}_0} (F \cdot (0,0,-1))\, dS = \iint_{\mathbb{S}_0} (F \cdot (0,0,1))\, dS = 0$$

pues estamos en el caso donde $t = 0$.
Con esto queda probado lo pedido.
♦