Clase 19 de Análisis 2-Mate 3

Comentario pendiente de la clase pasada. Cuando hay un autovalor complejo λ para el sistema de coeficientes constantes $A\vec{X} = \frac{d}{dt}\vec{X}$, las soluciones $\vec{X}_\lambda$ asociadas van a cumplir que $Re(\vec{X}_\lambda)$ e $Im(\vec{X}_\lambda)$ son soluciones (parte real y parte imaginaria) siempre que A fuera una matriz de coeficientes reales.

En esta clase vamos a ver que hacer con ecuaciones lineales de órden superior y con ecuaciones lineales no homogéneas.

Básicamente, la idea con ecuaciones no-homogéneas es la siguiente: Si tenemos el sistema de ecuaciones traducido a un sistema de ecuaciones de primer orden que traducido a forma matricial sería $\frac{d}{dt}\vec{X} - A(t)\vec{X} = \vec{b}(t)$, por lo visto en la teórica sabemos que sus soluciones son de la forma $\vec{X}_0 + \vec{X}_H$ con $\vec{X}_0$ alguna solución a $\frac{d}{dt}\vec{X}_0 - A(t)\vec{X}_0 = \vec{b}(t)$ y $\vec{X}_H$ cualquier solución a $\frac{d}{dt}\vec{X}_H - A(t)\vec{X}_H = 0$, que podemos trabajar con las técnicas de la clase pasada.

Si tenemos una ecuación

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} f_n(t) + ... + \frac{dx(t)}{dt} f_1(t) + x(t) f_0(t) = b(t)$$

Podemos llamar $x_1(t) = x(t)$, $x_{j+1}(t) = x'_j(t)$ para cada j entre 2 y $n-1$.

Lo podemos tomar como un sistema de ecuaciónes

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t) \\ x'_n(t) = (-\frac{f_0(t)}{f_n(t)})x_1(t) + ... + (-\frac{f_{n-1}(t)}{f_n(t)})x_n(t) + \frac{b(t)}{f_n(t)} \end{cases}$$

Lo que se puede llevar a forma matricial $\frac{d}{dt}\vec{X} = A\vec{X} + \vec{b}$ con A siendo la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{f_0(t)}{f_n(t)} & -\frac{f_1(t)}{f_n(t)} & -\frac{f_2(t)}{f_n(t)} & \dots & -\frac{f_{n-2}(t)}{f_n(t)} & -\frac{f_{n-1}(t)}{f_n(t)} \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(t)}{f_n(t)} \end{pmatrix}$$

Ahora describiré algunos métodos en abstracto que son útiles para la clase de problemas que veremos desde este momento:

1) Uno, si tenemos A constante, $b(t) = \vec{b}_0 e^{\lambda t}$, al insertar $\vec{X} = \vec{X}_0 e^{\lambda t} f(t)$ en la ecuación $\frac{d}{dt}\vec{X} = A\vec{X} + \vec{b}$ obtenemos

$f'(t)\vec{X}_0 + \lambda f(t)\vec{X}_0 = Af(t)\vec{X}_0 + \vec{b}_0$

Si λ no es autovalor de A, y tomamos a $f = 1$, entonces podemos llegar a

$(\lambda I - A)\vec{X}_0 = \vec{b}_0$

y como λ no es autovalor de A, entonces $det(\lambda I - A) \neq 0 \Rightarrow \lambda I - A$ es invertible, y

$\vec{X}_0 = (\lambda I - A)^{-1}\vec{b}_0$

En otro caso, podremos encontrar que existe un X_0 y un polinómio f que resuelven la ecuación.

2) En las ecuaciones de la forma $y^{(n)}(t) + f_n(t)y^{(n-1)} + ... + f_1(t)y(t) = b(t)$, si conocemos $y_s(t)$ solución de la ecuación, proponer $g(t)y_s(t)$ nos lleva a una ecuación con función incógnita g que en principio podría llegar a ser más sencilla (va a haber cancelaciones asociadas a que y_s ya se sabe que es solución. Esto será más claro cuando lleguemos a un ejemplo concreto de esto).

3) Si tenemos un sistema de órden superior con coeficientes constantes e inhomogeneidad polinomial $b(x) = a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t)$, proponer que y es un polinómio de grado igual a b usualmente resuelve la ecuación. Incluso, si $b(x)$ es producto entre un polinómio $p(x)$ y una exponencial $e^{\lambda t}$ (o una trigonométrica, que es parte real de una exponencial multiplicada por una constante, ya que $Re(e^{iat}e^{-i\theta}) = cos(at - \theta)$, lo que para distintos valores de θ nos recupera cualquier trigonométrica combinación lineal de senos y cosenos) va a servirnos para hallar una solución particular a la ecuación proponer $y(t) = q(t)e^{\lambda t}$ (o parte real de esto, si estamos hablando de cosas con trigonométricas) con q un polinómio (que puede ser de grado mayor que p, si llega a darse que λ es autovalor de A la matriz asociada al sistema// si $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$).

4) (método de variación de constantes) Si tengo $x_1(t), ..., x_n(t)$ soluciones independientes de la ecuación $x^k(t)f_k(t) + ... + x(t)f_0(t) = 0$, la ecuación $z^k(t)f_k(t) + ... + z(t)f_0(t) = b(t)$ tiene solución $z(t) = c_1(t)x_1(t) + ... + c_n(t)x_n(t)$ con $c_1(t), ..., c_n(t)$ funciones a encontrar...

Ahora vamos a empezar a trabajar con ejemplos concretos de la guía...

Ejercicio similar al ejercicio 4 de la práctica 6

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + e^{3t} \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) + 1 \end{cases}$$

Primero vamos a llevar este sistema a forma matricial...

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{\vec{X}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2}$$

Podemos ver que si tengo $\vec{X}(t) = \vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) + \vec{X}_H(t)$ con $A\vec{X}_1(t) + \vec{b}_1 = \frac{d}{dt}\vec{X}_1(t)$, $A\vec{X}_2(t) + \vec{b}_2 = \frac{d}{dt}\vec{X}_2(t)$ y cualquier $A\vec{X}_H(t) = \frac{d}{dt}\vec{X}_H(t)$ vamos a tener solución a la ecuación previa (hacer la cuenta). Entonces procederemos primero a solucionar el sistema homogéneo y luego a encontrar $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$.

El sistema homogéneo se resuelve primero que nada, buscando autovalores de A. Para eso calculamos primero su polinómio característico $det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 8$ (por resolvente, los autovalores son $\lambda_\pm = \frac{4\pm\sqrt{16-4,8}}{2} = 2 \pm 2i$). Ahora calculemos los autovectores...

$$\begin{pmatrix} \mp 2i & -1 \\ (-\mp 2i)(\mp 2i) & \mp 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 2i \end{pmatrix}$$

Así que

$$\vec{X}_H(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{2t+2it} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2t-2it}$$

El término con α es de la forma $\alpha \begin{pmatrix} cos(2t+arg(\alpha)) + isin(2t+arg(\alpha)) \\ 2sin(2t+arg(\alpha)) - 2icos(2t+arg(\alpha)) \end{pmatrix} e^{2t}$

Y es similar a menos de una conjugación y trivialidades el término con β. Si se observa, tomar parte real y parte imaginaria da soluciones reales (en $\mathbb{R}$) linealmente independientes, por lo que son uan base de soluciones tan válida cómo la dada por autovectores (aunque algo más útil, en algún sentido).

Podemos reescribir entonces las solucioens como

$$\vec{X}_H(t) = \tilde{\alpha} \begin{pmatrix} cos(2t) \\ 2sin(2t) \end{pmatrix} e^{2t} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} sin(2t) \\ -2cos(2t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

Ya tenemos entonces resuelta la parte de $\vec{X}_H$. Ahora trabajemos en resolver $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$.

Notemos que $\vec{b}_1$ es resultado de multiplicar un vector constante con e^{3t}, y que $\vec{b}_2$ es resultado de multiplicar un vector constante con $e^{0t} = 1$. Ni 0 ni 3 son autovalores de A. Vamos a proponer que $\vec{X}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}$ y $\vec{X}_2 = \vec{v}_2 e^{0t} = \vec{v}_2$.

$A\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se pueden resolver (hay que invertir A, o despejar $(a,b) = v_1$ y $(c,d) = v_2$).

$$\begin{pmatrix} 2a-b \\ 4a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+1 \\ 3b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a-b-1 \\ 4a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a-b-1=0 \\ 4a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-b-1=0 \\ b=4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a-1=0 \\ b=4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2c-d \\ 4c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2c-d \\ 4c+2d-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=2c \\ 4c+2d-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2c \\ 4c+2d-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=2c \\ 8c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=\frac{1}{4} \\ c=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Así que la solución general al sistema en este caso sería

$$\vec{X}_H + \vec{x}_1 + \vec{x}_2 =$$
$$\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} cos(2t) \\ 2sin(2t) \end{pmatrix} e^{2t} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} sin(2t) \\ -2cos(2t) \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Los números feos son porque al proponer la inhomogeneidad no me fijé que diera números lindos previamente. La vida en general es así, pero en un parcial si hay cosas tan feas tienen motivo para sospechar jej...

Si en lugar de $\vec{b}$ ser $\vec{b}_1 + \vec{b}_2$ hubiese sido $(t^2, te^{-t}) = (t^2, 0) + (te^{-t}, -te^{-t})$, entonces hubiera buscado $(p_1(t) + q_1(t)e^{-t}, p_2(t) + q_2(t)e^{-t})$ con p_1, p_2, q_1, q_2 polinomios de grado a lo sumo 2. Veamos cómo se resolvería en este caso

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}p_1(t)\\p_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p_1(t)-p_2(t)\\4p_1(t)+2p_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2\\0\end{pmatrix}$$

Si $p_1(t)=p_{10}+p_{11}t+p_{12}t^2$ y $p_2(t)=p_{20}+p_{21}t+p_{22}t^2$, entonces

$$\begin{pmatrix}p_{11}+2p_{12}t\\p_{21}+2p_{22}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p_{10}+2p_{11}t+2p_{12}t^2-p_{20}-p_{21}t-p_{22}t^2\\4p_{10}+4p_{11}t+4p_{12}t^2+2p_{20}+2p_{21}t+2p_{22}t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2\\0\end{pmatrix}$$

Lo que da el sistema (al separar en t^0,t y t^2)

$$\begin{cases}p_{11}=-p_{20}+2p_{10}\\2p_{12}t=-p_{21}t+2p_{11}t\\0t^2=-p_{22}t^2+t^2+2p_{12}t^2\\p_{21}=4p_{10}+2p_{20}\\2p_{22}t=(4p_{11}+2p_{21})t\\0t^2=(4p_{12}+2p_{22})t^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_{11}=-p_{20}+2p_{10}\\2p_{12}=-p_{21}+2p_{11}\\0=-p_{22}+1+2p_{12}\\p_{21}=4p_{10}+2p_{20}\\2p_{22}=4p_{11}+2p_{21}\\0=4p_{12}+2p_{22}\end{cases}$$

Reordenando las ecuaciones

$$\begin{cases}0=-p_{11}-p_{20}+2p_{10}\\0=-2p_{12}-p_{21}+2p_{11}\\0=-p_{22}+2p_{11}+p_{21}\\0=-p_{21}+4p_{10}+2p_{20}\\-1=-p_{22}+2p_{12}\\0=2p_{12}+p_{22}\end{cases}$$

Sumando las dos últimas se obtiene $4p_{12}=-1$, insertando esto en la última se obtiene $p_{22}=\frac{1}{2}$, volviendo al sistema de ecuaciones (omitiendo las dos últimas, y añadiendo que $p_{12}=-\frac{1}{4}$ y $p_{22}=\frac{1}{2}$),

$$\begin{cases}0=-p_{11}-p_{20}+2p_{10}\\0=-2(-\frac{1}{4})-p_{21}+2p_{11}\\0=-\frac{1}{2}+2p_{11}+p_{21}\\0=-p_{21}+4p_{10}+2p_{20}\end{cases}$$

Sumando la segunda y la tercera obtenemos $p_{11}=0$, e insertando esto en la tercera obtenemos $p_{21}=\frac{1}{2}$ volviendo al sistema de ecuaciones (y omitiendo la segunda y la tercera)

$$\begin{cases}0=-p_{20}+2p_{10}\\0=-\frac{1}{2}+4p_{10}+2p_{20}\end{cases}$$

Lo que se puede resolver obteniendo $p_{10}=\frac{1}{16}$ y $p_{20}=\frac{1}{8}$.

Ahora vamos por q_1,q_2.

Si $q_1(t)=q_{10}+q_{11}t$ y $q_2(t)=q_{20}+q_{21}t$ (ya que tratamos de despejar algo que es te^{-t} por un vector constante, y -1 no es autovalor de A), entonces

$$\frac{d}{dt}(\begin{pmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\end{pmatrix}e^{-t})=\begin{pmatrix}2q_1(t)-q_2(t)\\4q_1(t)+2q_2(t)\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{-t}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}q_1'(t)\\q_2'(t)\end{pmatrix}e^{-t}-\begin{pmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\end{pmatrix}e^{-t}=\begin{pmatrix}2q_1(t)-q_2(t)\\4q_1(t)+2q_2(t)\end{pmatrix}e^{-t}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{-t}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}q_1'(t)\\q_2'(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2q_1(t)-q_2(t)\\4q_1(t)+2q_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_{10}+q_{11}t \\ q_{20}+q_{21}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_{10}+2q_{11}t-q_{20}-q_{21}t \\ 4q_{10}+4q_{11}t+2q_{20}+2q_{21}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$

Reemplazando $q_1 = q_{10} + q_{11}t$ y $q_2 = q_{20} + q_{21}t$, y agrupando un poco obtenemos $\begin{pmatrix} (q_{11}-q_{10}) - q_{11}t \\ (q_{21}-q_{20}) - q_{21}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2q_{10}-q_{20}) + (2q_{11}t - q_{21}t + t) \\ (4q_{10}+2q_{20}) + (4q_{11}t + 2q_{21}t - t) \end{pmatrix}$

Y pasando esto a un sistema de ecuaciones lineales, devuelta separando las igualdades de términos t^0 y de términos t^1 obtenemos

$$\begin{cases} q_{11} - q_{10} = 2q_{10} - q_{20} \\ -q_{11} = 2q_{11} - q_{21} + 1 \\ q_{21} - q_{20} = 4q_{10} + 2q_{20} \\ -q_{21} = 4q_{11} + 2q_{21} - 1 \end{cases}$$

Esto se puede reescribir cómo

$$\begin{cases} q_{11} - 3q_{10} + q_{20} = 0 \\ -3q_{11} + q_{21} = 1 \\ q_{21} - 4q_{10} - 3q_{20} = 0 \\ -4q_{11} - 3q_{21} = -1 \end{cases}$$

La segunda y la cuarta ecuación forman un sistema de 2×2 $\begin{cases} -3q_{11} + q_{21} = 1 \\ -4q_{11} - 3q_{21} = -1 \end{cases}$

Multiplicamos la fila 1 por 3, $\begin{cases} -9q_{11} + 3q_{21} = 3 \\ -4q_{11} - 3q_{21} = -1 \end{cases}$

Sumamos la segunda ecuación a la primera $\begin{cases} -13q_{11} = 2 \\ -4q_{11} - 3q_{21} = -1 \end{cases}$

Entonces $q_{11} = -\frac{2}{13}$ y $q_{21} = \frac{-1+4(-\frac{2}{13})}{-3} = \frac{7}{13}$

Insertando esto en el sistema de ecuaciones restante (ecuación 1 y 3 del sistema de q_{ij})

$$\begin{cases} -\frac{2}{13} - 3q_{10} + q_{20} = 0 \\ \frac{7}{13} - 4q_{10} - 3q_{20} = 0 \end{cases}$$

Devuelta, este sistema se puede despejar usando métodos de álgebra de CBC, obteniendo los coeficientes q_{10} y q_{20}...

$$\begin{cases} \frac{1}{13^2} = q_{10} \\ \frac{29}{169} = q_{20} \end{cases}$$

Así que la solución general al sistema en este caso sería

$\vec{X}_H + \vec{x}_1 + \vec{x}_2 =$

$\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} cos(2t) \\ 2sin(2t) \end{pmatrix} e^{2t} + \tilde{\beta} \begin{pmatrix} sin(2t) \\ -2cos(2t) \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}t^2 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{169} - \frac{2}{13}t \\ \frac{29}{169} + \frac{7}{13}t \end{pmatrix} e^{-t}$

Los números feos son porque al proponer la inhomogeneidad no me fijé que diera números lindos previamente. La vida en general es así, pero en un parcial si hay cosas tan feas tienen motivo para sospechar jej...

Ejercicio 6

Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $\frac{a_1-a_2}{\pi}$ no es un número entero

a) Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y''+y=0$ cuya gráfica pasa por esos puntos.

(b) ¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?

(c) Generalizar el resultado de (a) para la ecuación $y'' + k^2y = 0$. Discutir también el caso $k = 0$.

Voy a resolver el punto (a) y el (b), el (c) quiero que lo resolvamos en clase, lo piensen y lo respondan ustedes.

(a) ¿Cómo puedo resolver la ecuación $y'' + y = 0$? Hay dos posibilidades. Una, aprovechando que es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes probar $y = e^{\lambda x}$, y ver si eso la resuelve para algún λ y el número de soluciones independientes de este tipo es dos (ya que es una sola ecuación de segundo orden y es lineal) ya tendríamos resuelto el problema (si en un problema de coeficientes constantes faltan). Otra forma es pasando el problema a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Veamos cómo sale con la primera forma, y luego con la segunda.

Si tomamos $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x)$, y $y'' = (y')' = (\lambda y)' = \lambda y' = \lambda(\lambda y) = \lambda^2 y$. Entonces $y'' + y = 0$ es $\lambda^2 y + y = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)y = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \vee \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow y(x) = 0 \vee \lambda^2 = -1 \Rightarrow y(x) = 0 \vee \lambda = +i \vee \lambda = -i$ ($\vee$ quiere decir que se cumple una de las dos afirmaciones lógicas, $\Rightarrow$ ”se deduce que.º ïmplica”). Esto nos dice que e^{ix} y e^{-ix} resuelven la ecuación.

Como $e^{i,0} = 1$ y $e^{-i,0} = 1$ si son linealmente dependientes son iguales porque coinciden para un x, en particular para $x = 0$. O sea, si e^{ix} y e^{-ix} son linealmente dependientes se tiene que $e^{ix} = e^{-ix}$. Ahora, como $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ y $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \neq i$, e^{ix} y e^{-ix} no son iguales. Entonces no son linealmente dependientes (basandose en la ley lógica del tercero excluido, que la usé un par de veces en todo esto. Hay gente en matemática que niega que sea valida. Para esta materia esta ley lógica vale, porque no somos constructivistas.).

Entonces e^{ix} y e^{-ix} son dos soluciones linealmente independientes de $y'' + y = 0$, y como la ecuación es diferencial lineal de orden dos, su espacio de soluciones tiene dimension dos, por lo que toda y solución de la ecuación es de la forma $e^{ix}a + e^{-ix}b$ con $a, b \in \mathbb{C}$.

Sea z solución de $z''+z=0$ se cumple que $z = a_z e^{ix} + b_z e^{-ix}$. Si es tal que $z(a_1) = b_1$ y $z(a_2) = b_2$, entonces $a_z e^{ia_1} + b_z e^{-ia_1} = b_1$ y $a_z e^{ia_2} + b_z e^{-ia_2} = b_2$. Esto es el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_z e^{ia_1} + b_z e^{-ia_1} = b_1 \\ a_z e^{ia_2} + b_z e^{-ia_2} = b_2 \end{cases}$$

De incógnitas a_z, b_z.

$$\begin{cases} a_z + b_z e^{-2ia_1} = b_1 e^{-ia_1} \\ a_z + b_z e^{-2ia_2} = b_2 e^{-ia_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_z(e^{-2ia_1} - e^{-2ia_2}) = b_1 e^{-ia_1} - b_2 e^{-ia_2} \\ a_z + b_z e^{-2ia_2} = b_2 e^{-ia_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_z e^{-2ia_1}(1-e^{-2i(a_2-a_1)}) = b_1 e^{-ia_1} - b_2 e^{-ia_2} \\ a_z + b_z e^{-2ia_2} = b_2 e^{-ia_2} \end{cases}$$

El siguiente paso se puede realizar porque $\frac{a_2-a_1}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ son los números enteros, $\notin$ quiere decir "no es elemento de").

$$\begin{cases} b_z = \frac{b_1 e^{-ia_1} - b_2 e^{-ia_2}}{e^{-2ia_1}(1-e^{-2i(a_2-a_1)})} \\ a_z = -b_z e^{-2ia_2} + b_2 e^{-ia_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_z = \frac{b_1 e^{-ia_1} - b_2 e^{-ia_2}}{e^{-2ia_1} - e^{-2ia_2}} \\ a_z = -\frac{b_1 e^{-ia_1} - b_2 e^{-ia_2}}{e^{-2ia_1} - e^{-2ia_2}} e^{-2ia_2} + b_2 e^{-ia_2} \end{cases}$$

Eso nos da los coeficientes a_z, b_z, y nos los determina univocamente, por lo que no hay otra solución. Además, sin importar quienes son a_1, b_1, a_2, b_2 siempre que $\frac{a_2-a_1}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ vamos a tener que hay solución. Con esto contestamos el punto (a), que decía "Probar que existe exactamente una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ cuya gráfica pasa por esos puntos."

Ahora pasemos a ver el (b), que dice "¿Se cumple en algún caso la parte (a) si $a_1 - a_2$ es un múltiplo entero de π?"

Bueno, tomemos $k \in \mathbb{Z}$ y $a_2 = a_1 + k\pi$. También va a ser muy cómodo para esto usar que z se puede escribir en general cómo $acos(x) + bsin(x)$ o como $Ampcos(x - x_0)$... Usemos la segunda forma...

$Ampcos(a_1 - x_0) = b_1$

$Ampcos(a_1 + k\pi - x_0) = b_2$

Como $cos(t + k\pi) = (-1)^k cos(t)$, entonces

$Ampcos(a_1 - x_0) = b_1$

$Amp(-1)^k cos(a_1 - x_0) = b_2$

Entonces si $(-1)^k b_1 = b_2$, en principio se pueden cumplir las condiciones para una solución.

Si $Ampcos(a_1 - x_0) = b_1$, lo que se puede cumplir para algún x_0 siempre que $|Amp| > |b_1|$, entonces existen soluciones que cumplen estas condiciones, pero no es única la solución que lo cumple.

Les dejo para pensar ahora el item (c).

Sugiero hacer también el ejercicio 9.

(Ulises Wainstein Haimovichi)