Clase número 7 de Análisis 2-Mate 3

Esta clase consistirá en una batería de ejercicios. Algunos serán resueltos en clase por mí, otros por ustedes. Los ejercicios serán de las guías 1 y 2.

Guía 1. Ejercicio 17 a y b

En este ejercicio, un detalle importante a tomar en cuenta es que $xdy - ydx$ es la integral de línea del campo $(-y, x)$. Esto es porque al dx lo acompaña el P y al dy el Q. Es importante no equivocarse con esto.

La respuesta del a es 2π, y la del b es 0.

Guia 1, Ejercicio 7

Si una partícula que está a tiempo t_0 con velocidad (v_x, v_y, v_z) en la posición (x_0, y_0, z_0), y ningúna fuerza actúa sobre esa partícula entre t_0 y t_1, por la primera ley de Newton (válida también en relatividad especial, pero no en cuántica), se tiene que la parametrización σ de la trayectoria (curva) con parámetro t tiempo en $t \in [t_0, t_1]$ cumple que su derivada no cambia. O sea, $\sigma''(t) = 0$. Además los datos que tenemos nos dicen $\sigma'(t_0) = (v_x, v_y, v_z)$ y $\sigma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Integrando $\sigma''(t)$, obtenemos $\sigma'(t) - \sigma'(t_0) = \int(0,0,0)dt = (0,0,0)$. Entonces $\sigma'(t) = \sigma'(t_0)$, entonces $\sigma'(t) = (v_x, v_y, v_z)$.

Integrando $\sigma'(t) = (v_x, v_y, v_z)$, obtenemos $\sigma(t) - \sigma(t_0) = (v_x, v_y, v_z)(t - t_0)$, y como $\sigma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ tenemos que $\sigma(t) = (x_0 + v_x(t - t_0), y_0 + v_y(t - t_0), z_0 + v_z(t - t_0))$

Ahora pueden tratar de hacer el ejercicio. La respuesta va a ser $\sigma(2) = (2e, 0, \cos(1) - \sin(1))$

Comentario aparte, la fuerza de la partícula, si la partícula tiene masa m, es $m\cdot\sigma''(t)$ (suponiendo que el t de la parametrización es el tiempo).

$$m\sigma''(t) = \begin{cases} (me^t, -me^{-t}, -m\sin(t)), & t \in [0,1] \\ (0,0,0), & t \in [1,2] \end{cases}$$

Guia 2, Ejercicio 15

El campo $F(x, y) = (y^2e^x + \cos(x) + (x - y)^2, 2ye^x + \sin(y)$ no parece ser el más amable del mundo para hacer integral de línea, a primera vista. Si una parte importante del mismo fuera un gradiente, seríamos muy felices...

Notamos que $\int y^2e^x + \cos(x) + (x - y)^2dx = y^2e^x + \sin(x) + \frac{(x-y)^3}{3} + f(y)$ (función en y constante para la variable x), y su derivada en y resulta ser $2ye^x - 3(x - y)^2 + f'(y)$. Al comparar con$2ye^x + \sin(y)$, si $f(y) = -\cos(y) + C$ con C una constante lo único que nos queda difiriendo es $-3(x - y)^2$, que con $f(y)$ no lo podíamos eliminar porque $f(y)$ no depende de x. O sea que

$$F - \nabla(e^x + \sin(x) + \frac{(x-y)^3}{3} - \cos(y))$$

$$= \begin{pmatrix} y^2e^x + \cos(x) + (x-y)^2 \\ 2ye^x + \sin(y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^2e^x + \cos(x) + (x-y)^2 \\ 2ye^x - 3(x-y)^2 + \sin(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3(x-y)^2 \end{pmatrix}$$

.

$$\Rightarrow F = \begin{pmatrix} 0 \\ 3(x-y)^2 \end{pmatrix} + \nabla(e^x + \sin(x) + \frac{(x-y)^3}{3} - \cos(y))$$

.

Ahora, este ejercicio es de la guía de Green... así que deberíamos resolverlo con Green. Para poder usarlo, tenemos que tener una curva cerrada. Como tenemos una curva abierta $\mathcal{C}$ que empieza en $(1,0)$ y termina en $(-1,0)$, necesitamos otra curva abierta $\mathcal{C}'$ que termine en $(1,0)$ y empieze en $(-1,0)$, y que en lo posible sea fácil integrar el campo en esa curva. Una posible curva para ese proposito es $(1-t,0)$ con $t \in [0,2]$. Por otro lado, podemos comprobar que F es C^1:

Como $2y$, y^2 y $(x-y)^2$ son polinomios, y e^x es una función exponencial, $\cos(x)$ y $\sin(y)$ son trigonométricas, sabemos que esas funciones son C^1.

También sabemos que producto de funciones C^1 es C^1, y lo mismo con suma de funciones C^1.

Por último, si cada componente de un campo es C^1 entonces el campo es C^1. Por lo tanto probamos que F es C^1 en $\mathbb{R}^2$.

Además, hay que comprobar que D la región encerrada por $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ es una región tipo III y es subconjunto de un abierto Ω en que F es C^1. Como F es C^1 en $\mathbb{R}^2$, y $\mathbb{R}^2$ es un abierto, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, así que si es de tipo III podremos aplicar Green.

Podemos ver que $D = \{x^2 + y^2 \leq 1 | y \geq 0\}$ se puede describir como una región de tipo I de modo $D = \{0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} | -1 \leq x \leq 1\}$ y como región de tipo II de modo $D = \{-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} | 0 \leq y \leq 1\}$. Entonces D es una región de tipo III. Notemos que C y C' están orientadas positivamente respecto a la región que encierran. Ya tenemos probadas las condiciones que requiere el teorema de Green para ser usado.

O sea, va a valer que $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}'} F \cdot d\vec{s} = \iint (\frac{\partial 2ye^x + \sin(y)}{\partial x} - \frac{\partial y^2e^x + \cos(x) + (x.y)^2}{\partial y})dxdy$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s} = -\int_{\mathcal{C}'} F \cdot d\vec{s} + \iint (\frac{\partial 2ye^x + \sin(y)}{\partial x} - \frac{\partial y^2e^x + \cos(x) + (x.y)^2}{\partial y})dxdy$$

Primero que nada calculemos la integral curvilinea en $\mathcal{C}'$. $\sigma'(t) = (-1, 0)$ y $F \circ \sigma(t) = (\cos(1-t) + (1-t)^2, 0)$. Entonces

$$\int_0^2 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_0^2 -(\cos(1-t) + (1-t)^2) dt$$
$$= -2\sin(1) - \frac{2}{3}$$

Guia 1, Ejercicio 22.

Este ejercicio es de la guía 1, y en particular es uno en que usar el potencial asociado al campo cambia las cosas mucho. ¿Cual va a ser la forma del potencial?

Les empiezo contando, $\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2(x, y, z)$ es ligeramente parecido en su parte vectorial a el campo buscado, y si probamos con $\nabla f(x^2+y^2+z^2) = f'(x^2+y^2+z^2)2(x, y, z)$, podemos ver que

$$\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z) = f'(x^2+y^2+z^2)2(x, y, z)$$
$$\frac{-1}{2}u^{-\frac{3}{2}} = f'(u)$$
$$u^{-\frac{1}{2}} = f(u)$$

Así que $F(x, y, z) = \nabla(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$. Con esto van a poder probar trivialmente lo pedido en el ejercicio.

Guia 2, Ejercicio 16

a) ¿Por qué podemos usar el teorema de Green?

b) ¿Como es la parametrización de la curva frontera de D que está orientada positivamente?

c) Calcular la integral y decidir si la respuesta es $6\pi^2$ o $2\pi^2$.

Guía 2, Ejercicio 5

Acá necesitamos, como $\iint dA = \iint r dr d\theta$, que el equivalente a (P, Q) sea tal que $\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial \theta} = r$. Una posible buena elección es $(P, Q) = (0, \frac{1}{2}r^2)$.

Verifiquen las hipótesis del teorema de Green, y comprueben que el área es $\frac{3}{2}\pi - 1$.

Ulises Wainstein Haimovichi