EL TEOREMA DE GREEN
PARTE II

El teorema de Green establece que si $\mathcal{C}$ es una curva en el plano, simple, cerrada, orientada en sentido antihorario, diferenciable a trozos y encierra una región elemental D de tipo III entonces

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy$$

para todo campo (P,Q) que sea C^1 en una región abierta del plano que contenga a D.

A continuación veremos algunas consecuencias de este teorema.

La primera de ellas es que el teorema

 de Green nos permite establecer una fórmula para calcular el área de una región elemental de tipo III a partir de una integral sobre su borde:

PROPOSICIÓN Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región elemental de tipo III y sea $\mathcal{C}$ su borde, orientado en sentido antihorario. Si $\mathcal{C}$ es diferenciable por trozos, entonces

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy.$$

DEMOSTRACIÓN Sean D y $\mathcal{C}$ como en el enunciado. Ya sabemos que

$$\text{Área}(D) = \iint_D dx\,dy.$$

 Entonces basta ver que

$$\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy. \qquad (*)$$

Sea $\bar{F} = (P, Q)$ donde

$$P(x,y) = -y, \qquad Q(x,y) = x.$$

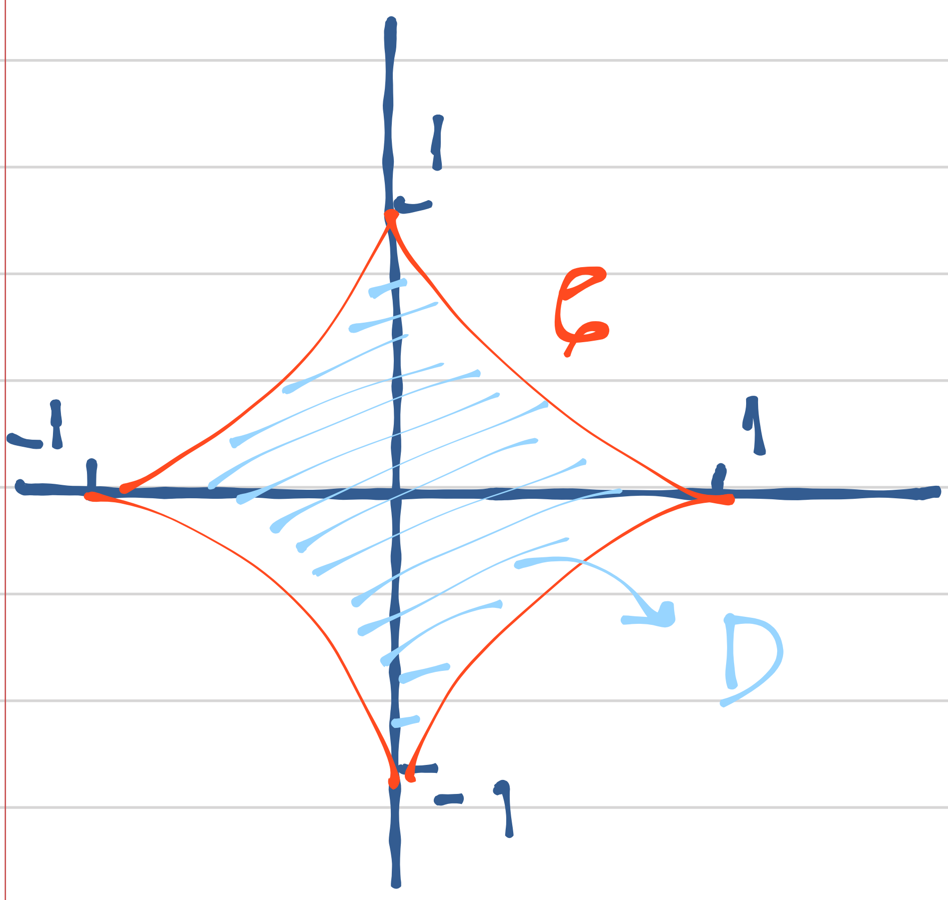
Como $\bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y las condiciones dadas sobre D y $\mathcal{C}$ son las mismas que en el teorema de Green, podemos aplicarlo y obtener

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy.$$

Como $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2$ para todo $(x,y) \in D$, obtenemos $(*)$. $\blacksquare$

OBSERVACIÓN Más generalmente, para calcular un área con el teorema de Green tal como en la demostración anterior, se puede usar cualquier campo $\vec{F}=(P,Q)$ que sea C^1 en una región abierta del plano que contenga a D y que verifique que $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$ sea constante. Para un tal campo, qué fórmula se obtiene para calcular el área de D? (ejercicio).

EJEMPLO Vamos a calcular el área de la región D encerrada por la astroide $\mathcal{C}$, parametrizada por $\sigma:[0,2\pi]\to\mathcal{C}$, dada por $\sigma(t)=(\cos^3\theta, \operatorname{sen}^3\theta)$, ver esquema en la página siguiente.



Notar que podemos usar la proposición anterior porque D es una región elemental de tipo III y $\mathcal{C}$ es diferenciable por trozos.

Para usar la proposición anterior necesitamos orientar $\mathcal{C}$ en sentido antihorario con una parametrización regular. Se deja como ejercicio verificar que a esto lo podemos hacer con la parametrización σ que define a $\mathcal{C}$. Luego,

$$\text{Área}(D) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}^3(t), \cos^3(t)\right)\cdot\left(-3\cos^2(t)\operatorname{sen}(t), 3\operatorname{sen}^2(t)\cos(t)\right)dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2(t)\cos^4(t) + \operatorname{sen}^4(t)\cos^2(t)\right) dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)\cos^2(t)\left(\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)\right)dt$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t)\cos^2(t)\,dt$$

(*) Usamos que $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)$

$$\overset{(*)}{=} \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2t)\,dt$$

(*) Usamos que $2\operatorname{sen}^2(t) = (1-\cos(4t))$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(4t)}{2}\right)dt = \frac{3}{8}\pi .$$

A continuación veremos otras dos consecuencias del teorema de Green, conocidas como "forma vectorial del teorema de Green" y "teorema de la divergencia". Más adelante veremos que estos dos resultados se pueden generalizar a regiones $D \subset \mathbb{R}^3$. Por ahora, comenzamos con un par de definiciones.

DEFINICIÓN Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$. El "rotor" de $\vec{F}$ es el campo vectorial definido como

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right), \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

OBSERVACIÓN Una manera de recordar cómo calcular el rotor es a través del producto vectorial: Si definimos $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, se tiene que

$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times F.$

Si $\vec{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^2$, entonces se define el rotor de $\vec{F}$ como el rotor de $(P, Q, 0)$:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times (P, Q, 0) = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

A partir de ahora haremos un abuso de notación y escribiremos

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

para indicar al rotor de un campo diferenciable $\vec{F} = (P, Q)$.

DEFINICIÓN Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial diferenciable definido en $\mathbb{R}^3$. La "divergencia" de $\vec{F}$ es el campo escalar definido como

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

OBSERVACIÓN Una manera de recordar cómo calcular la divergencia es a traves del producto escalar:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F}$$

Si $\vec{F} = (P, Q)$ es un campo vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^2$ entonces se define su divergencia como

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

OBSERVACIÓN Se deja como ejercicio verificar que si $\vec{F}$ es un campo vectorial en $C^2(\mathbb{R}^3)$ entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = 0$$

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar las dos consecuencias del teorema de Green que mencionamos antes.

TEOREMA (Forma vectorial del teorema de Green) Sean $\mathcal{C}$, D y $\vec{F} = (P, Q)$ como en el teorema de Green. Entonces,

$$\iint_D \underbrace{\operatorname{rot}(\vec{F})}_{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}} \, dx\,dy = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds}_{\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy}$$

DEMOSTRACIÓN Es directa, ya que el enunciado es una reescritura del Teorema de Green (usando el concepto de rotor) $\boxtimes$

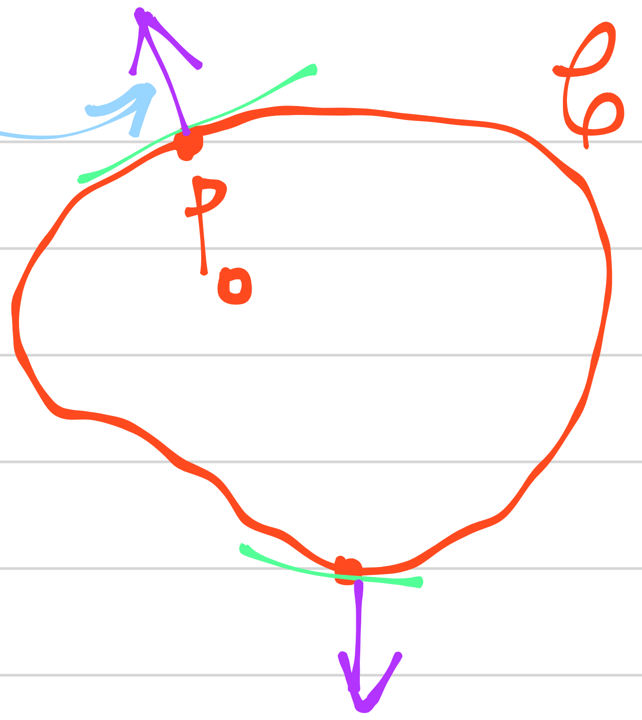
TEOREMA (Teorema de la divergencia)

Sean $\mathcal{C}$, D y $\bar{F} = (P, Q)$ como en el teorema de Green, con el agregado que ahora suponemos que $\mathcal{C}$ es suave. Si $\vec{n}$ es el campo vectorial unitario normal exterior a $\mathcal{C}$ entonces

$$\iint_D \operatorname{div}(\bar{F})\, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

DEMOSTRACIÓN Sean $\mathcal{C}$, D y $\bar{F}$ como en el enunciado y sea $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Lo primero que observamos (y que aquí no demostraremos) es que si $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ y $P_0 = \sigma(t) \in \mathcal{C}$ entonces

$$\vec{n}(P_0) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$



Luego,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\cdot \underbrace{\vec{n}(\sigma(t))\,|\sigma'(t)|}_{(y'(t),\,-x'(t))}\,dt$$

$$= \int_a^b P(\sigma(t))\,y'(t)\,dt - \int_a^b Q(\sigma(t))\,x'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \big(-Q(\sigma(t)), P(\sigma(t))\big)\cdot\sigma'(t)\,dt$$

$$= \int_{\mathcal{C}} (-Q, P)\,ds = \int_{\mathcal{C}} -Q\,dx + P\,dy$$

$$\overset{(*)}{=} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right)dx\,dy$$

(*) Teorema de Green

$$= \iint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,dx\,dy. \quad \blacksquare$$