• EJERCICIO TIPO PARCIAL: Arr

$S = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ a \leq z \leq a+1\}$

con $a \in \mathbb{R}_{>0}$ y $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq

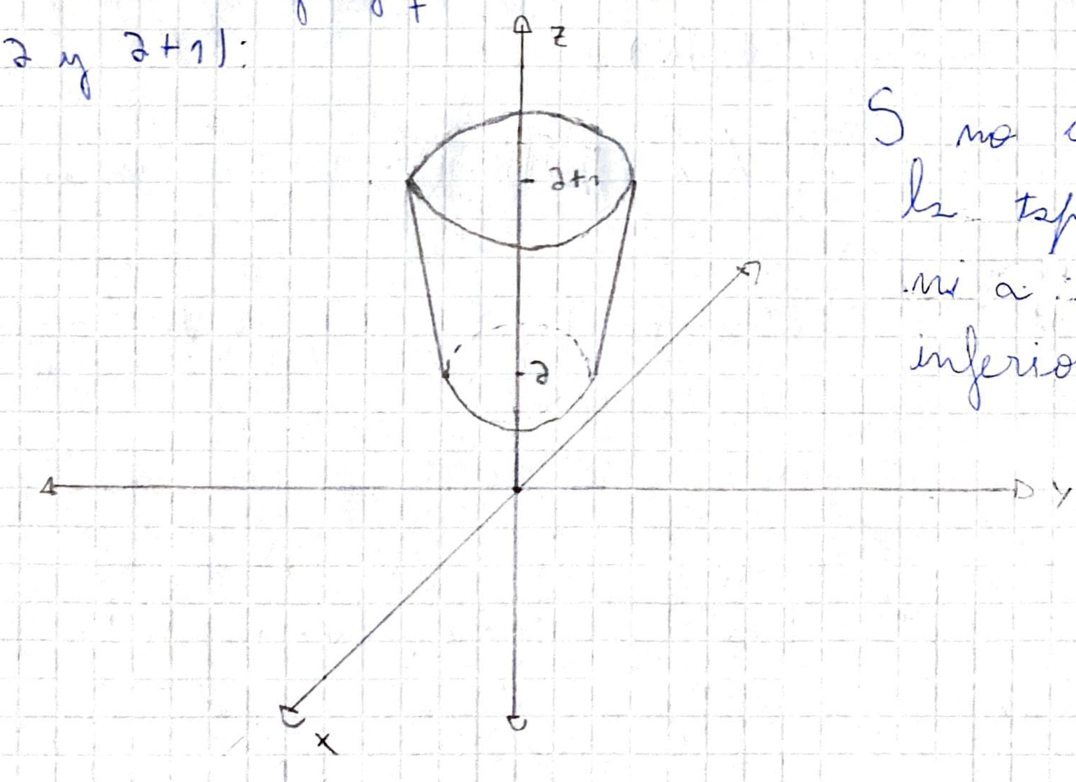
$F(x;y;z) = (y e^{-z^2};\ z\ln(x^2+1);\ 1)$.

Considere la normal a S cuya tercer coordenada es positiva. Encuentre $a$ de tal forma que

$$\int_S F \cdot dS = 3\pi$$

SOLUCIÓN:

Primero grafiquemos a S (es un cono cortado entre $a$ y $a+1$):

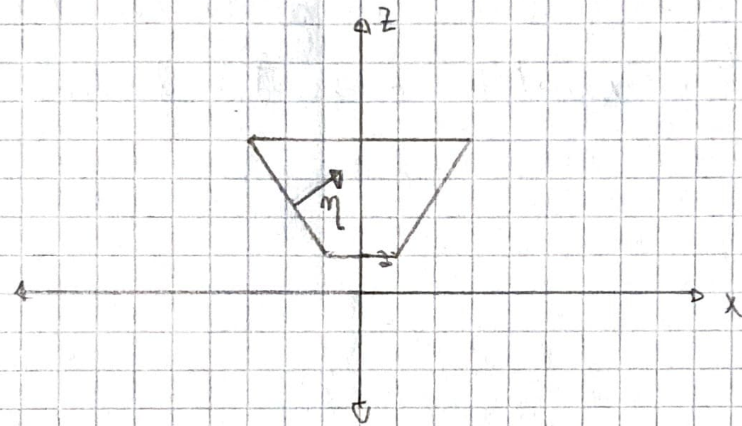



S no contiene a la tapa superior ni a la tapa inferior

Ahora parametrizamos al cono como

$T(t;\theta) = (t\cos\theta ; t\,\text{sen}\,\theta ; t)$ con $\theta \in [0;2\pi]$ y $t \in [2;2+1]$

Notamos que si la tercer coordenada de la normal de S es positiva entonces la normal apunta hacia adentro; esto es claro mirando al cono de costado:




Ahora cerramos al cono con los siguientes discos (que son las tapas de arriba y abajo de nuestro cono cortado)

$D_{2+1} = \{(x;y;2+1) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (x;y) \in B_{2+1}(\bar{0})\}$ tapa de arriba

$D_2 = \{(x;y;2) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (x;y) \in B_2(\bar{0})\}$ tapa de abajo

La idea es usar el teorema de la divergencia entonces oriento a $D_{2+1}$ con la normal hacia arriba y a $D_2$ con la normal hacia abajo

NOTA

Considero $S^+$ como $S$ con la normal hacia afuera y $B = S^+ \cup D_2 \cup D_{2+1}$ y $U$ el interior de $B$ (osea $\partial U = B$)

Como $F$ es $C^1$ (por cada coordenada lo es) y $B$ es cerrada y suave a trozos entonces puedo aplicar el teorema de la divergencia

$$\iiint_U \operatorname{div}(F)\,.\,dV = \iint_{\partial U} F\,.\,dS = \iint_B F\,.\,dS =$$

$$\iint_{D_{2+1}} F\,.\,dS + \iint_{D_2} F\,.\,dS + \iint_{S^+} F\,.\,dS =$$ como $S^+$ cambia la orientacion de $S$

$$\iint_{D_{2+1}} F\,.\,dS + \iint_{D_2} F\,.\,dS - \iint_S F\,.\,dS$$

Osea nos quedo que

$$\iiint_U \operatorname{div}(F)\,.\,dV = \iint_{D_{2+1}} F\,.\,dS + \iint_{D_2} F\,.\,dS - \iint_S F\,.\,dS$$

Empezamos a calcular estas integrales, para eso calculemos $\operatorname{div}(F)$

$F_{1x}(x;y;z) = 0$

$F_{2y}(x;y;z) = 0$

$F_{3z}(x;y;z) = 0$

Luego

$\operatorname{div} F = 0$ lo que implica

$$\iiint_U \operatorname{div} F \, dV = 0$$

Ahora calculemos las integrales de los discos. Para eso consideremos las siguientes parametrizaciones:

$L_1(r;\theta) = (r\cos\theta; r\sin\theta; a)$ $\quad \theta \in [0;2\pi]; r \in [0;a]$

$L_2(r;\theta) = (r\cos\theta; r\sin\theta; a+1)$ $\quad \theta \in [0;2\pi]; r \in [0;a+1]$

Notemos que $L_1$ parametriza a $D_a$ y $L_2$ a $D_{a+1}$; veamos como nos quedan las normales

$L_{1r}(r;\theta) = (\cos\theta; \operatorname{sen}\theta; 0)$

$L_{1\theta}(r;\theta) = (-r\sin\theta; r\cos\theta; 0)$

$(L_{1r} \times L_{1\theta})(r;\theta) = (0;0;r)$

$L_{2r}(r;\theta) = (\cos\theta; \sin\theta; 0)$

$L_{2\theta}(r;\theta) = (-r\sin\theta; r\cos\theta; 0)$

$(L_{2r} \times L_{2\theta})(r;\theta) = (0;0;r)$

NOTA

Notemos que las normales de ambas parametrizaciones apuntan hacia arriba; luego $L_1$ invirtió la orientación de $D_a$ y $L_2$ la mantuvo.

Ahora calculemos las integrales

$$\iint_{D_a} F \cdot dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^{a} F(L_1(r;\theta)) \cdot (0;0;r)\, dr\, d\theta$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{a} 1 \cdot r\, dr\, d\theta = -2\pi \int_0^{a} r\, dr = -2\pi \frac{a^2}{2} = -\pi a^2$$

---

$$\iint_{D_{a+1}} F \cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{a+1} F(L_2(r;\theta)) \cdot (0;0;r)\, dr\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a+1} 1 \cdot r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{a+1} r\, dr = 2\pi \frac{(a+1)^2}{2} = \pi (a+1)^2$$

Calculadas estas integrales podemos calcular

$$\iint_S F \cdot dS$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{D_a} F \cdot dS + \iint_{D_{a+1}} F \cdot dS = -\pi a^2 + \pi (a+1)^2 =$$

$$\pi(-a^2 + (a+1)^2) = \pi(-a^2 + a^2 + 2a + 1) = \pi(2a+1)$$

Nosotros queremos que

$$\iint_S F \cdot dS = 3\pi$$

$$\pi(2a+1) = 3\pi$$

$$2a+1 = 3$$

$$\boxed{a = 1}$$

NOTA