Complemento a clases teóricas 11 y 12

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3 -

* Campos conservativos en $\mathbb{R}^2$.
* Campos sin divergencia.

Recordamos...

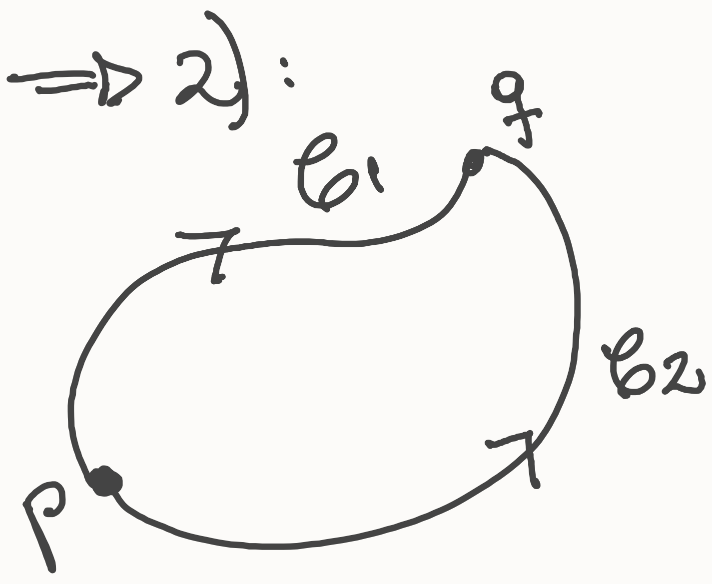
Teorema de Campos conservativos en $\mathbb{R}^3$

Teorema: Sea F un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$ salvo quizá en finitos puntos. Entonces, son equivalentes:

1) $\int_C F \cdot dS = 0$ $\forall$ curva cerrada simple orientada.
2) $\int_{C_1} F \cdot dS = \int_{C_2} F \cdot dS$ $\forall$ par de curvas suaves a trozos, simples que comienzan y terminan en los mismos puntos.
3) F es un campo gradiente.
4) $\nabla \times F = 0$.

Demostración sin detalles:

. 1) $\Rightarrow$ 2):



Se considera $C := C_1 - C_2$

Como $\int_C F \cdot ds = 0$ (por 1))

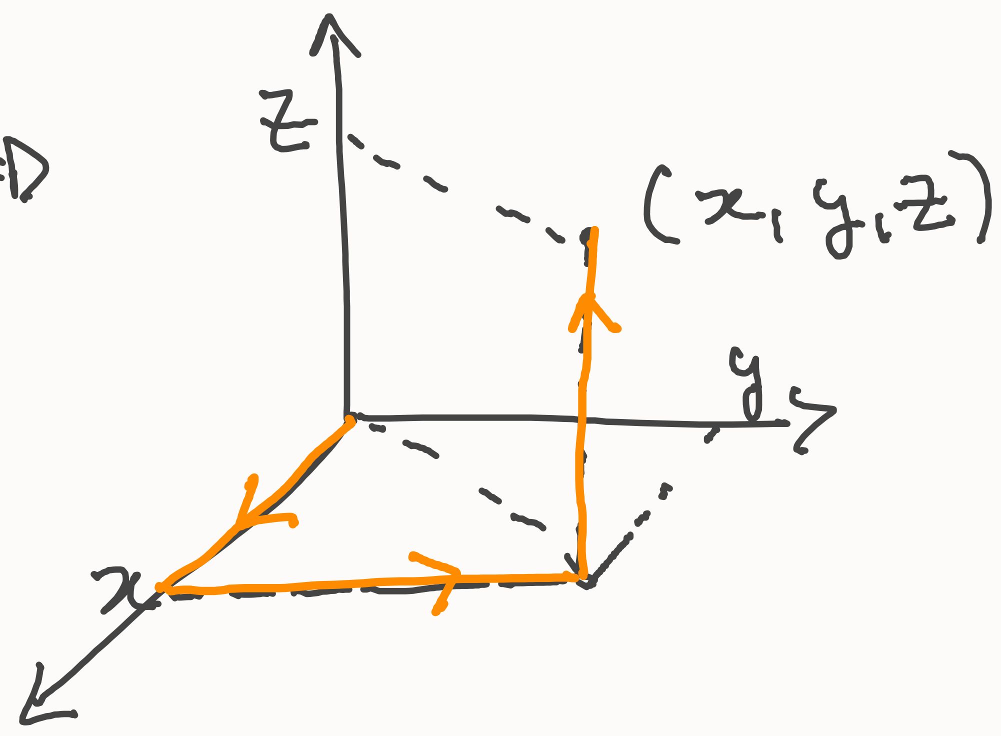
$$\Rightarrow \int_{C_1} F\,ds = \int_{C_2} F\,ds.$$

. 2) $\Rightarrow$ 3): Dice como construir f!

Si $(x,y,z) \Rightarrow f(x,y,z) = \int_C F \cdot ds$ donde

C una curva que une $(0,0,0)$ con (x,y,z)

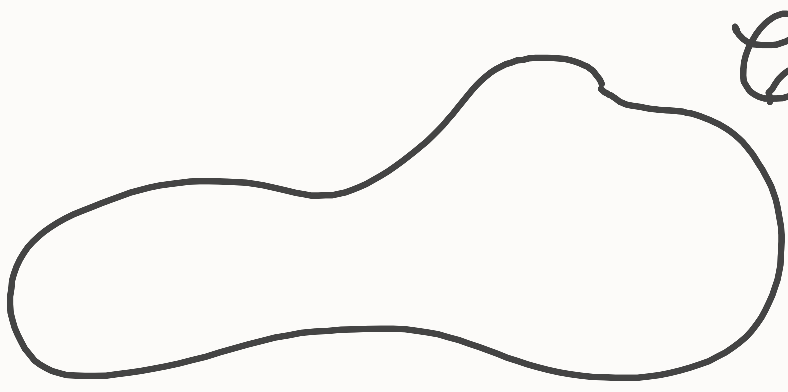
$\Rightarrow$



$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt.$$

3) $\Rightarrow$ 4) cuenta simple $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$

4) $\Rightarrow$ 1) $\boxed{\text{Stokes}}$



$\mathcal{C}$ curva cerrada simple. Se toma S sup $/ \ \partial S = \mathcal{C}$ y F sea $\mathcal{C}^1$ en S.

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot dS \underset{\text{Stokes}}{=} \iint_S \nabla \times F \cdot = 0 \quad \boxtimes$$

Teorema de campos conservativos en $\mathbb{R}^2$:

F un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^1$.

$\Rightarrow$ son equivalentes:

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F\,ds = 0$ $\quad \forall\, \mathcal{C}$ curva cerrada suave a trozos y simple

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} F\,ds = \int_{\mathcal{C}_2} F\,ds$ $\quad \forall\, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ curvas suaves a trozos, simples q' empiezan y terminan en los mismos puntos.

$\boxed{3}$ $F = \nabla f$ para $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$.

$\boxed{4}$ $F = (P, Q)$ $\wedge$ $Q_x - P_y = 0$ (rotor escalar $= 0$).

<u>Dem:</u> Todas las implicaciones se demuestran como para el caso $\mathbb{R}^3$ y aplicando Green en vez de Stokes en $\boxed{4} \Rightarrow \boxed{1}$.

→ En $\mathbb{R}^2$, F <u>no</u> tiene puntos excepcionales, tiene que ser $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^2$.

<u>Ej:</u> $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, $\nabla \times F = 0$ $\wedge$ $\int_{\partial B_1(0,0)} F = 2\pi$.

→ El teorema $\mathbb{R}^2$ vale si F está definido en $U \subseteq \mathbb{R}^2$ donde U es un abierto "simplemente conexo" [conexo por arcos y contractivo: todo curva cerrada contenida en U encierra una región contenida en U].

. $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no cumple

<u>Teorema de Gauss:</u>

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ región de tipo IV y $\partial\Omega$ una superficie cerrada orientada con normal exterior que acota a Ω. Sea F un campo vectorial diferenciable en Ω. ($\mathcal{C}^1$).

Entonces,

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \int_{\partial\Omega} F . dS}$$

Integral de volumen

Integral de superficie de un campo.

Nombre: Si F es un campo / $\operatorname{div}(F) = 0 \Rightarrow$ decimos que F es sin divergencia.

- F campo $\mathcal{C}^1$ sin divergencia $\Rightarrow \int_S F \cdot dS = 0$ $\forall S$ superficie cerrada.

Dem: $\iint_S F \cdot dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx\, dy\, dz = 0 \Rightarrow V$ $\boxtimes$

con $\partial\Omega = S$.

- Si $\iint_S F\, dS = 0$ $\forall S$ sup. cerrada $\Rightarrow \operatorname{div}(F) = 0$.

Dem: Si $\exists (x_0, y_0, z_0) \,/\, \underbrace{\operatorname{div}(F)(x_0, y_0, z_0)}_{a} > 0$

$\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, \operatorname{div}(F)(x, y, z) > \frac{a}{2} > 0 \;\; \forall (x, y, z) \in B_r(x_0, y_0, z_0)$

luego, si $S = \partial B_r(x_0, y_0, z_0)$ tenemos que

$$\iint_{\partial B_r(x_0 y_0 z_0)} F\, dS = 0.$$

Pero $$\iint_{\partial B_r(x_0 y_0 z_0)} F\, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_{B_r(x_0, y_0, z_0)} \operatorname{div}(F) \cdot dV \geq \frac{a}{2} \operatorname{Vol}(B_r) > 0 \text{ ABS!}$$ $\boxtimes$

- Si G es un campo vectorial $\mathcal{C}^2 \Rightarrow \operatorname{div}(\nabla \times G) = 0$

Dem: $\nabla \times G = (G_{3y} - G_{2z}, G_{1z} - G_{3x}, G_{2x} - G_{1y})$

$G = (G_1, G_2, G_3)$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\nabla \times G) = (G_{3yx} - G_{2zx} + G_{1zy} - G_{3xy} + G_{2xz} - G_{1yz})$

- Si F es un campo $\mathcal{C}^1$ / $\operatorname{div}(F) = 0 \Rightarrow$ existe G / $F = \nabla \times G$.

Dem: Basta tomar $G=(G_1, G_2, G_3)$ con:

$$G_1(x,y,z) = \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt$$

$$G_2(x,y,z) = -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt$$

$$G_3(x,y,z) = 0.$$

Entonces:

$G_{3y} = 0$ $\qquad$ $G_{3x} = 0$

$G_{2z} = -F_1$ $\qquad$ $G_{2x} = -\int_0^z \partial_x F_1(x,y,t)\,dt$

$G_{1z} = F_2$ $\qquad$ $G_{1y} = \int_0^z \partial_y F_2(x,y,t)\,dt - F_3(x,y,0).$

$$\Rightarrow \nabla\times G = \Big(F_1, F_2, \underbrace{-\int_0^z \partial_x F_1(x,y,t)\,dt - \int_0^z \partial_y F_2(x,y,t)\,dt}_{= -\int_0^z \underbrace{\partial_x F_1(x,y,t)+\partial_y F_2(x,y,t)}_{= -\partial_z F_3(x,y,t)}\,dt} - F_3(x,y,0)\Big)$$

$(\operatorname{div}(F)=0$

$$\Rightarrow \nabla\times G = \Big(F_1, F_2, \underbrace{\int_0^z \partial_z F_3(x,y,t)\,dt}_{F_3(x,y,z)-F_3(x,y,0)} - F_3(x,y,0)\Big)$$

$$= (F_1, F_2, F_3).$$

Probamos el siguiente resultado.

Teorema: F un campo C^1 en $\mathbb{R}^3$. Son equivalentes:

$\boxed{1}$ $\iint_S F\cdot dS = 0$ $\forall S$ sup. suave cerrada.

$\boxed{2}$ $\operatorname{div}(F) = 0$

$\boxed{3}$ $\exists G \,/\, F = \nabla\times G.$