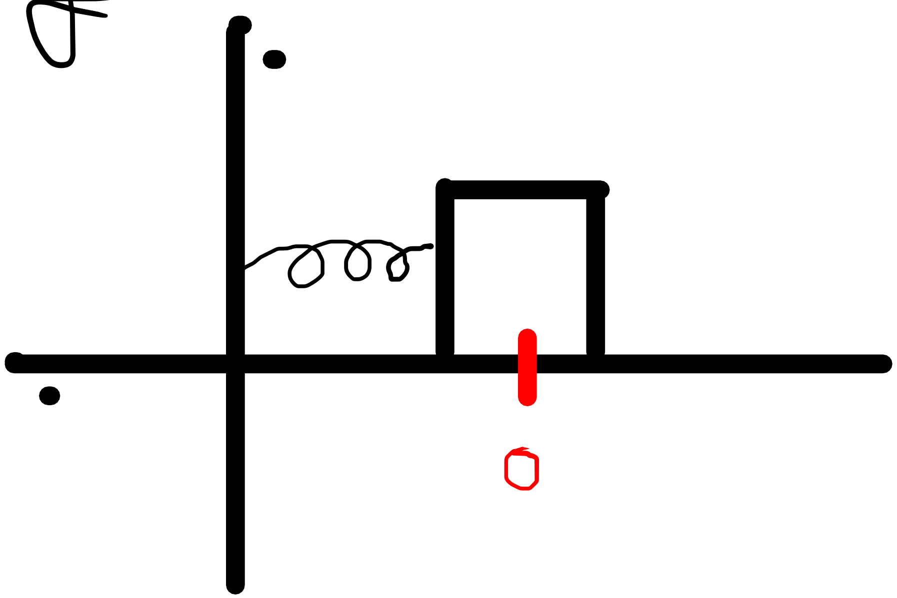
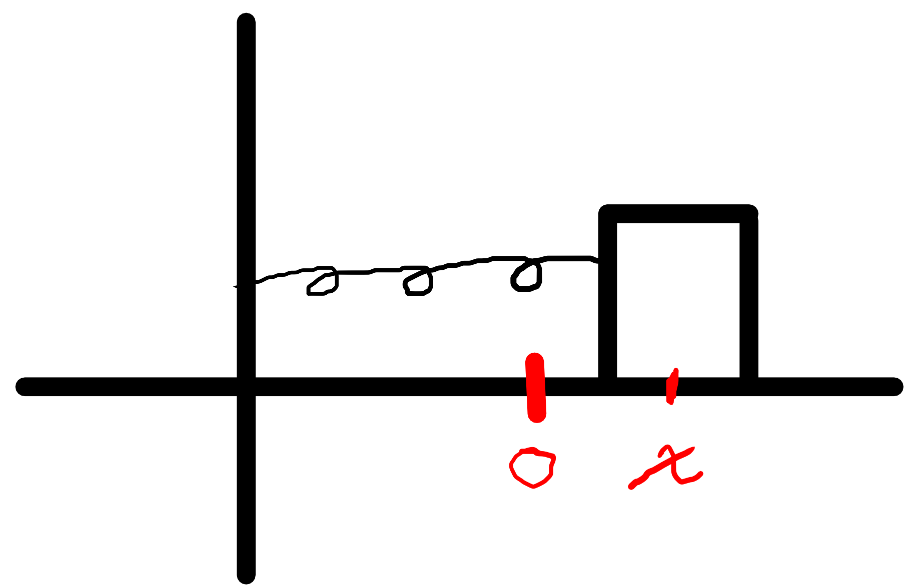
Métodos de energía

→ alternativa a linearizar

→ estudio del comportamiento global de las soluciones.

Ej: ①





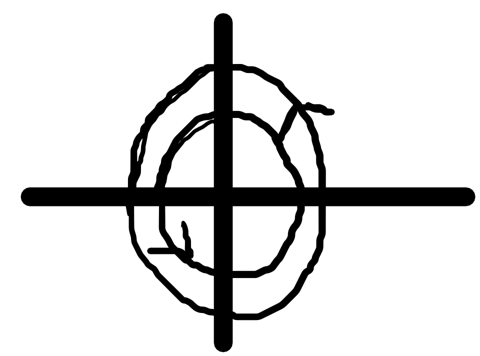
$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -kx \end{cases}$$

(Ley de Hooke. s/roz.)

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Aval $\lambda = -\sqrt{k}\, i$

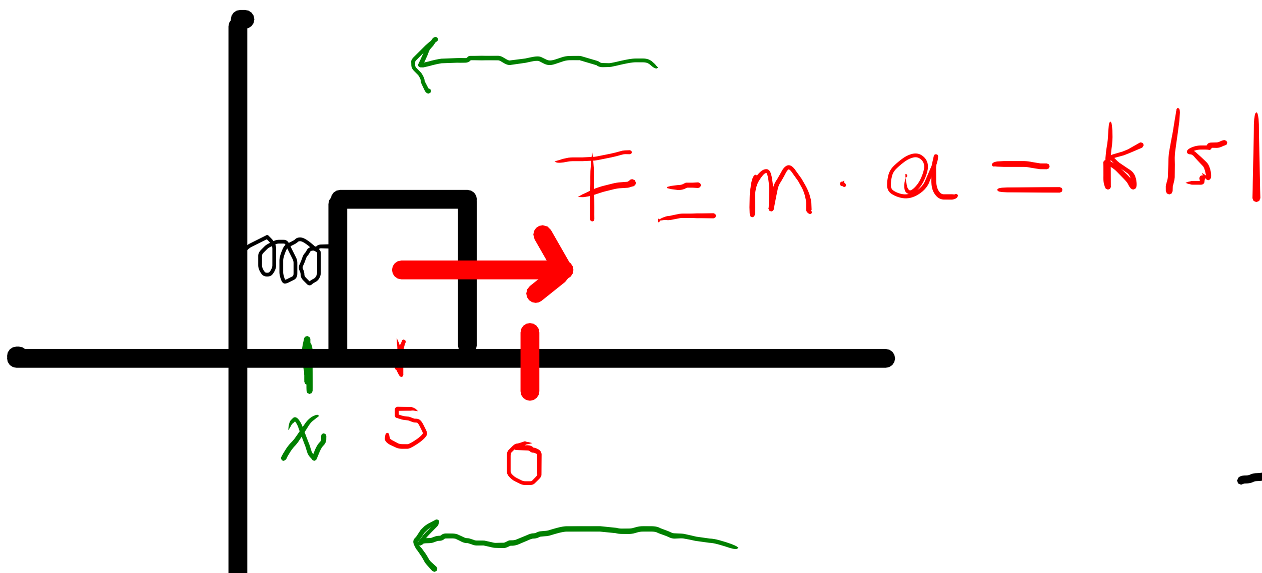
Avec $v = (1,0) + i(0, \sqrt{k})$



Las soluciones son elipses. ¿Porqué?

Calculemos la <u>energía</u> del proceso:

$$E = E_p + E_c$$



Para avanzar "ds" necesito aplicar una fuerza de tam. k|s|.

$$E_p(x) = \int_x^0 -ks = \frac{1}{2} k x^2.$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \frac{1}{2} v^2$$

$$\Longrightarrow E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} v^2 .$$

¿Cómo varía con respecto a t?

$$E(x(t), v(t))' = E_x x' + E_v v'$$
$$= kx \cdot v + v \cdot (-kx)$$
$$= \underline{0} .$$

$\Longrightarrow$ E es constante a lo largo de las soluciones:

$$\left\{ \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} v^2 = C \right\} \quad ✓ .$$

Ej 1: Le agregamos rozamiento:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x - v \end{cases} \qquad (k=1)$$

$$E = \frac{x^2 + v^2}{2}$$

$$E'(t) = xv + v(-x-v) = -v^2 \leq 0.$$

- $E(x,v) \geq 0$ y $E(x,v) = 0 \iff (x,v) = (0,0)$
- $E'(t) \leq 0$

$$\overset{??}{\Longrightarrow} (x(t), v(t)) \xrightarrow{t \to +\infty} (0,0)$$

Teo: Sea $F=(f_1,f_2)$ una función C^1 tal que $F(0,0)=0$ y $E:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (C^1) /

1. $E(x,y)\geq 0$ y $E(x,y)=0 \iff (x,y)=(0,0)$

★ 2. $\langle \nabla E(x,y), F(x,y)\rangle < 0$ en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

3. Los conjuntos $\{(x,y)/E(x,y)\leq C\}$ son acotados.

Entonces todas las soluciones de $X'=F(X)$ convergen a $(0,0)$ cuando $t\to+\infty$.

★ $E(x(t),y(t))' = \langle \nabla E(x(t),y(t)), F(x(t),y(t))\rangle < 0$ si $(x(t),y(t))\neq(0,0)$

[illegible]

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x - v \end{cases}$$

Considero

$$E(x,v) = \frac{1}{2}\left(x^2 + v^2 + xv\right)$$

- $E = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}x + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right]$

$\Rightarrow E(x,v) \geq 0$ y $E(x,v) = 0 \Leftrightarrow (x,v) = (0,0)$.

- $\langle \nabla E(x,y), (v, -x-v) \rangle = -E(x,y)$
- $\{E(x,v) \leq C\}$ son acotados.

(terminar).

Ej 2: Pruebe que todas las sol. de

$$\begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = -x - y^3 \end{cases}$$

convergen.

(Sug: Considere $E(x,y) = a x^k + b y^j$)

→ Para saber a donde convergen, busco los p. de eq.:

$$\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ -x - y^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x = 4y \\ -4y - y^3 = -y\underbrace{(4+y^2)}_{>0} = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x = y = 0$.

$(0,0)$ es el único punto de eq.

1. Si k y j son pares y $a, b > 0$,
$E(x,y) \geq 0$ y $E(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

2. Veamos cómo evoluciona $E(t)$:

$$E'(t) = E_x x' + E_y y'$$

$$= akx^{k-1}(-x+4y) + bj\, y^{j-1}(-x-y^3)$$

$$= \underbrace{-akx^k}_{\leq 0} \underbrace{+ 4akx^{k-1}y - bj\, y^{j-1}x}_{k=j=2} \underbrace{- bj\, y^{j+2}}_{\leq 0}$$

$$8axy - 2bxy \longrightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array}$$

2 $\rightarrow$ $E = x^2 + 4y^2$ cumple

$\langle \nabla E(x,y), F(x,y) \rangle < 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

3 $\rightarrow$ $x^2 + y^2 \leq x^2 + 4y^2$

$\Rightarrow \{E(x,y) \leq C\} \subseteq \{x^2 + y^2 \leq C\}$

acotado.

$\overset{(\text{teo})}{\Longrightarrow}$ Todas las soluciones convergen a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$.

Ej 3: Sea $F(x,y) = x^4 + y^4$.

Muestre que $(0,0)$ es un punto de equilibrio estable de $\underline{X}' = -\nabla F(\underline{X})$.

$$\begin{cases} x' = -4x^3 \\ y' = -4y^3 \end{cases}$$

$G = -\nabla F$.

$DG(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

no puedo linearizar.

Recuerdo: ∇F es la dirección de máx. crec.

$\rightsquigarrow -\nabla F$ es la dirección de máx decrec.

- $F > 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $F(0,0) = 0$.

$\rightsquigarrow E(x,y) = F(x,y)$.

- $E'(t) = 4x^3 \cdot x' + 4y^3 \cdot y'$
$= -16x^6 - 16y^6 < 0$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- Los conjuntos $\{x^4 + y^4 \leq C\}$ son acotados:
$x^4 + y^4 \leq C \Rightarrow |x|, |y| \leq \sqrt[4]{C}$.

$\Longrightarrow$ Todas las sol. convergen al origen. (en part., es un punto estable).