Clase práctica

- Práctica 5 (ejercicios 1 - 4)

Ejercicio 1

Resolver $\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 2 \end{cases}$

Solución: recordemos que $x' = x$ es $x'(t) = x(t)$

Para resolver usamos el método de separación de variables:

$$x' = x \Rightarrow \frac{x'}{x} = 1 \Rightarrow \int \frac{x'(t)dt}{x(t)} = \int 1\, dt$$

$$\Rightarrow \ln|x(t)| = t + c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x(t)| = e^t \cdot e^c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x(t)| = k \cdot e^t \quad k > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \hookrightarrow x(t) = ke^t \\ \hookrightarrow x(t) = -ke^t \end{array}\right\} \longrightarrow x(t) = ke^t \quad k \neq 0.$$

¿$k = 0$? $x(t) = 0 \; \forall t$ es solución $\Rightarrow$ todas las soluciones son $x(t) = ke^t$ $k \in \mathbb{R}$.

Si $x(0) = 2 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \boxed{x(t) = 2e^t}$.

Ejercicio 2

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Solución: Como la ecuación es de variables separados;

$$x' = \frac{1}{x} \Rightarrow x'x = 1 \Rightarrow \int x'(t)x(t)\,dt = \int 1\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)^2}{2} = t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow x(t)^2 = 2t + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Notemos que $2t + \tilde{c} = x(t)^2 \geq 0 \Rightarrow t \geq -\frac{\tilde{c}}{2}$.

Entonces, $|x(t)| = \sqrt{2t + \tilde{c}}$ con $t \in \left[-\frac{\tilde{c}}{2}, +\infty\right)$.

Como antes, $x(t) = \sqrt{2t + \tilde{c}}$, $t \in \left[-\frac{\tilde{c}}{2}, +\infty\right)$

ó $x(t) = -\sqrt{2t + \tilde{c}}$, $t \in \left[-\frac{\tilde{c}}{2}, +\infty\right)$.

Estas son todas las soluciones ($\tilde{c} \in \mathbb{R}$)

Si $x(0) = 1$, $\sqrt{\tilde{c}} = 1 \Rightarrow \tilde{c} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{2t+1}, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)}.$$

Ejercicio 3

$$\begin{cases} x' = 2(t+1)\sqrt{x-1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$x'(t) = 2(t+1)\sqrt{x(t)-1}$$

Supongamos que $x(t) \neq 1$.

$$\Rightarrow \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)-1}} = 2(t+1) \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)-1}}\,dt = \int 2(t+1)\,dt$$

$$\underbrace{\int \frac{x'(t)}{\sqrt{x(t)-1}}\,dt}_{} = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{x(t)-1}.$$

$u = x(t)-1$

$du = x'(t)dt$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x(t)-1} = (t+1)^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x(t)-1} = \frac{(t+1)^2}{2} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = \left(\frac{(t+1)^2}{2} + \tilde{C}\right)^2 + 1, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

Solución general

Si $x(0) = 1 \Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{2} + \tilde{C}\right)^2 + 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \tilde{C}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \tilde{C} = 0 \Leftrightarrow \tilde{C} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\frac{(t+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1,$$ definido en $\mathbb{R}$.

Atención! $x(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$ también es solución.

Ecuaciones homogéneas.

- Una función $f(t,x)$ se dice homogénea de grado n si

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n f(t,x) \quad \forall \lambda \neq 0 \ \forall (t,x).$$

Ejemplos:

- $f(t,x) = t^2 + xt$ es homogénea de grado 2.

D/ $f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^2 t^2 + \lambda x \lambda t = \lambda^2 f(t,x)$.

- $f(t,x) = \sqrt{t^2 + x^2}$ es homogénea de grado 1.
- $f(t,x) = e^{-\frac{x}{t}}$ es homogénea de grado 0.

Decimos que la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x)$$

es homogénea si f es homogénea de grado 0.

¿Cómo las resolvemos?

Idea: hacer la sustitución $y = \frac{x}{t}$ y la transformamos en una ecuación dif. de variables separadas.

Si $x' = f(t,x)$ homogénea

Si $\lambda = \frac{1}{t} \Rightarrow \underbrace{f(\lambda t, \lambda x)}_{= f(t,x)} = f(1, \frac{x}{t})$

$\Rightarrow x' = f(1, \frac{x}{t})$.

Llamamos $y = \frac{x}{t}$ $\left(y(t) = \frac{x(t)}{t} \right)$

$\Rightarrow yt = x \Rightarrow x' = y't + y$

$\Rightarrow y't + y = f(1,y)$

$\Rightarrow y't = f(1,y) - y$

$$\frac{y'}{f(1,y)-y} = \frac{1}{t} \longrightarrow \text{variable separadas!}$$

$\boxed{\text{Ejercicio 4}}$

Resolver $\quad x' = \dfrac{tx + x^2 + t^2}{t^2} \qquad t \neq 0.$

Solución:

$f(t,x) = \dfrac{tx + x^2 + t^2}{t^2}$ que es homogéneo de grado 0 pues, $f(\lambda t, \lambda x) = \dfrac{\lambda t \lambda x + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 t^2}{\lambda^2 t^2} = f(t,x).$

Hacemos la sustitución $y = \frac{x}{t}$

$\Rightarrow yt = x \Rightarrow y't + y = x' = \dfrac{t^2 y + t^2 y^2 + t^2}{t^2}$

$\Rightarrow y't + y = y + y^2 + 1$

$\Rightarrow y't = y^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{y'}{y^2+1} = \dfrac{1}{t}$ variables separadas!

$$\underbrace{\int \frac{y'(t)}{y(t)^2+1}\,dt}_{\operatorname{arctg}(y(t))} = \underbrace{\int \frac{1}{t}\,dt}_{\ln|t|} \Rightarrow \operatorname{arctg}(y(t)) = \ln|t| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y(t) = \operatorname{tg}\left(\ln|t| + C\right), \; C \in \mathbb{R}.$

Recordemos! $\quad y(t) = \dfrac{x(t)}{t}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = t\,\mathrm{tg}(\ln|t| + c) \quad c \in \mathbb{R}}.$$

Ejercicio 5

$$x' = \frac{x^2 e^{x/t} + t^2}{x t e^{x/t}}, \qquad t \neq 0.$$

<u>Solución:</u> $f(t,x) = \dfrac{x^2 e^{x/t} + t^2}{x t e^{x/t}}$ que es homogénea de grado 0 (verificar!).

Hacemos la sustitución $y = \frac{x}{t}$

$$\Rightarrow y't + y = x' = \frac{y^2t^2 e^{y} + t^2}{y t^2 e^{y}} = \frac{y^2 e^{y} + 1}{y e^{y}}$$

$$\Rightarrow y't = \frac{y^2 e^{y} + 1}{y e^{y}} - y = \frac{\cancel{y^2 e^{y}} + 1 - \cancel{y^2 e^{y}}}{y e^{y}} = \frac{1}{y e^{y}}$$

$$\Rightarrow y' e^{y} y = \frac{1}{t} \longrightarrow \text{variables separadas!}$$

$$\Rightarrow \int y'(t) e^{y(t)} y(t)\, dt = \int 1/t \, dt$$

$$\left[\int y'(t) e^{y(t)} y(t)\, dt \underset{\substack{u = y(t) \\ du = y'(t)dt}}{=} \int e^{u} u\, du \underset{\text{partes}}{=} (u-1)e^{u} \right]$$

$$\Rightarrow (y(t) - 1)e^{y(t)} = \ln|t| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Recordamos! $\quad y(t) = \dfrac{x(t)}{t}$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{x(t)}{t} - 1\right) e^{\frac{x(t)}{t}} = \ln|t| + C \quad C \in \mathbb{R}}$$

$\hookrightarrow$ solución expresada en forma implícita.