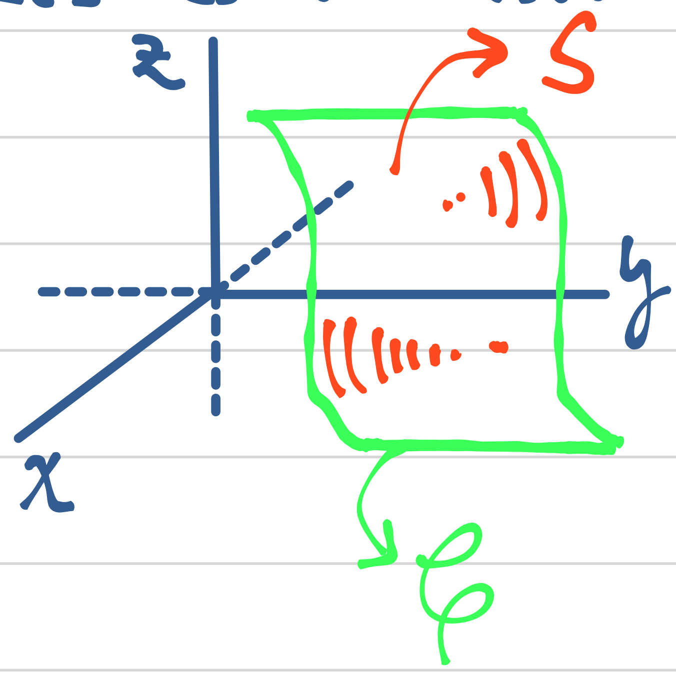
EL TEOREMA DE STOKES

Recordemos que el teorema de Green establece que si $\mathcal{C}$ es una curva plana simple, cerrada, orientada en sentido antihorario, diferenciable a trozos y encierra una región elemental D de tipo III, entonces

$$\iint_D \operatorname{rot}(\vec{F})\, dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds$$

siempre que $\vec{F}$ sea un campo vectorial C^1 en alguna región abierta que contenga a D. El teorema de Stokes es un resultado análogo pero para curvas cerradas en $\mathbb{R}^3$.

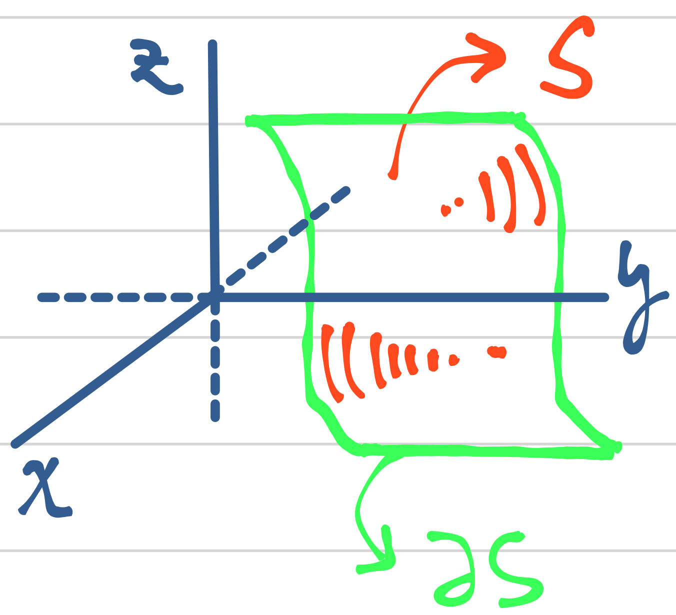


Comenzamos con una definición relacionada con la noción de "borde" de una superficie.

<u>DEFINICIÓN</u> Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie suave que admite una parametrización regular $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, la cual orienta a S con $\vec{n} = T_u \times T_v / \| T_u \times T_v \|$. Sea también $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una parametrización regular a trozos del borde de D, al cual anotamos como ∂D, la cual lo orienta con sentido antihorario. Definimos "∂S" como la curva parametrizada por $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(t) = T(\sigma(t))$

<u>OBSERVACIÓN</u> En las condiciones de la definición anterior se tiene que ∂S

es una curva simple y cerrada, orientada por la parametrización φ. Además, ∂S es el borde geométrico de S.



<u>OBSERVACIÓN</u> Si en la definición anterior eliminamos que T sea una parametrización regular entonces ∂S no está necesariamente relacionada con el borde geométrico de S, el cual incluso puede no existir. Consideremos por ejemplo la esfera unitaria S, centrada en el origen de coordenadas, parametrizada por $T: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$

dada por

$$T(\theta,\varphi)=(\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \cos(\varphi)).$$

Esta parametrización no es inyectiva ya que $T(\theta,0)=(0,0,1)$ para todo $\theta\in[0,2\pi]$.

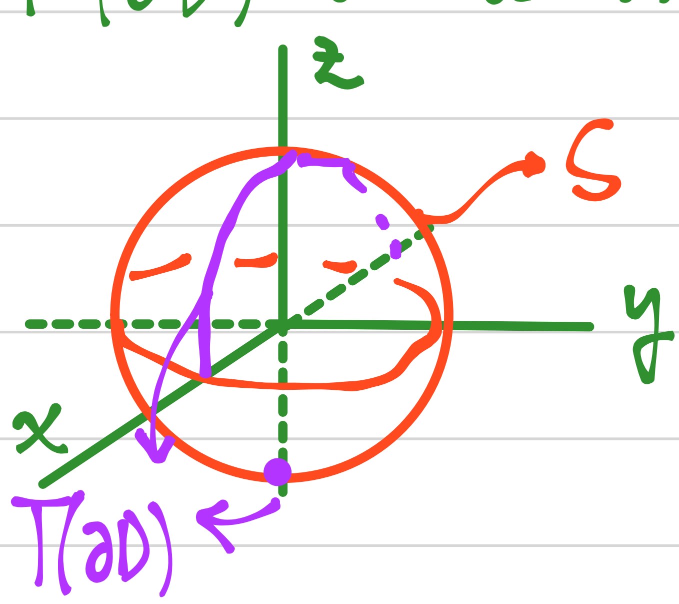
Ahora observamos que $T(\partial D)$ no puede interpretarse como el borde geométrico de S (el cual no existe), donde $D=[0,2\pi]\times[0,\varphi]$.

En efecto, como

$$T(0,\varphi)=T(2\pi,\varphi)=(\mathrm{sen}(\varphi),0,\cos(\varphi)),$$

$$T(\theta,0)=(0,0,1),\quad T(\theta,2\pi)=(0,0,-1)$$

para $\varphi\in[0,\pi]$ y $\theta\in[0,2\pi]$, vemos que $T(\partial D)$ es la unión del punto $(0,0,-1)$ con



la semicircunferencia dada por $x^2+z^2=1$, $y=0$, $z>0$.

<u>DEFINICIÓN</u> Sea S una superficie como en la definición anterior. Llamamos "borde de S" a ∂S y decimos que ∂S está "orientada positivamente" si está orientada con la parametrización φ.

Ya estamos en condiciones de enunciar el teorema de Stokes.

<u>TEOREMA</u> (Teorema de Stokes) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie suave que admite una parametrización regular $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2, la cual la orienta, donde D es una región elemental de tipo III delimitada por una curva diferenciable por trozos. Si consideramos al borde ∂S de S orienta-

do positivamente y $\vec{F}$ es un campo vectorial C^1 definido en S, entonces

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot ds = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds.$$

A continuación vamos a demostrar este teorema para el caso especial en el que S es el gráfico de una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. La demostración del caso general se puede hacer siguiendo ideas parecidas, pero requiere un poco más de esfuerzo técnico y no la haremos aquí (se la puede consultar en el apunte de Paternostro y Rossi, pág. 22).

<u>DEMOSTRACIÓN</u> (Caso especial, $S = \operatorname{Gra}(f)$)

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2, donde D es una región elemental como en el enunciado, y sea S su gráfico. Observamos que la función $T: D \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

parametriza a S. Además es fácil comprobar que T es regular y de clase C^2. Luego S es una superficie suave y T es una parametrización de S como la del enunciado.

Para demostrar el teorema vamos a calcular:

a) $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot ds$

b) $\displaystyle\int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds$

y ver que los resultados coinciden.

a) Comenzamos calculando

$T_x(x,y) = (1, 0, f_x(x,y))$

$T_y(x,y) = (0, 1, f_y(x,y))$.

Entonces,

$$T_x(x,y) \times T_y(x,y) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1).$$

Como S está orientada por T, definimos

$$\vec{n}(P) = \frac{T_x(x,y) \times T_y(x,y)}{|T_x(x,y) \times T_y(x,y)|}$$ para

$P = T(x,y) \in S$. Luego,

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot ds \overset{\text{def.}}{=} \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds$$

def.

$$= \iint_D \operatorname{rot}(\vec{F})(T(x,y)) \cdot \bar{n}(T(x,y)) \| T_x(x,y) \times T_y(x,y) \| \, dx\, dy$$

$$= \iint_D \operatorname{rot}(\vec{F})(T(x,y)) \cdot T_x(x,y) \times T_y(x,y) \, dx\, dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)(x,y,f(x,y)) \, (-f_x(x,y)) \, dx\, dy$$

$$+ \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)(x,y,f(x,y)) \, (-f_y(x,y)) \, dx\, dy$$

$$+ \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)(x,y,f(x,y)) \, dx\, dy \qquad (*)$$

b) Como estamos suponiendo que ∂S está orientada positivamente, consideramos que está parametrizada por $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(t) = T(\sigma(t))$, donde

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ es una parametrización regular a trozos del borde ∂D de D, la cual lo orienta en sentido antihorario.

Observemos que

$$\varphi(t) = \big(x(t), y(t), f(x(t), y(t)) \big).$$

Ahora calculamos

$$\varphi'(t) =$$

$$\big(x'(t), y'(t), f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)\big)$$

Luego,

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \Big(P\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big)\, x'(t)$$

$$+ Q\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big)\, y'(t)$$

$$+ R\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) f_x(x(t), y(t)) x'(t)$$

$$+ R\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) f_y(x(t), y(t)) y'(t)\Big) dt$$

Agrupando los términos en color violeta por un lado y los términos en color rojo por otro, vemos que

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds = \int_{\partial D} \vec{G} \cdot ds,$$

donde $G = (G_1, G_2)$, siendo

$$G_1(x,y) = P(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y)) f_y(x,y)$$

$$G_2(x,y) = Q(x,y,f(x,y)) + R(x,y,f(x,y)) f_x(x,y)$$

Ahora observamos que G es un campo vectorial C^1 y que D es una región donde se puede aplicar el teorema de Green.

Usando dicho teorema obtenemos

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds = \int_{\partial D} \vec{G} \cdot ds$$

teo. de Green

$$= \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy.$$

Ahora calculamos $\partial G_2/\partial x$ y $\partial G_1/\partial y$:

- $\dfrac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) =$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,f(x,y)) f_x(x,y)$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,f(x,y)) f_y(x,y)$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,f(x,y)) f_x(x,y) f_y(x,y)$$

$$+ R(x,y,f(x,y)) f_{yx}(x,y)$$

- $\dfrac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) =$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,f(x,y))\, f_y(x,y)$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,f(x,y))\, f_x(x,y)$$

$$+ \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,f(x,y))\, f_x(x,y)\, f_y(x,y)$$

$$+ R(x,y,f(x,y))\, f_{xy}(x,y)$$

Luego,

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) =$$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)\right) f_x(x,y)$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial z}(x,y)\right) f_y(x,y).$$

Por lo tanto,

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy$$

coincide con (*) y obtenemos que

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds.$$

$\blacksquare$