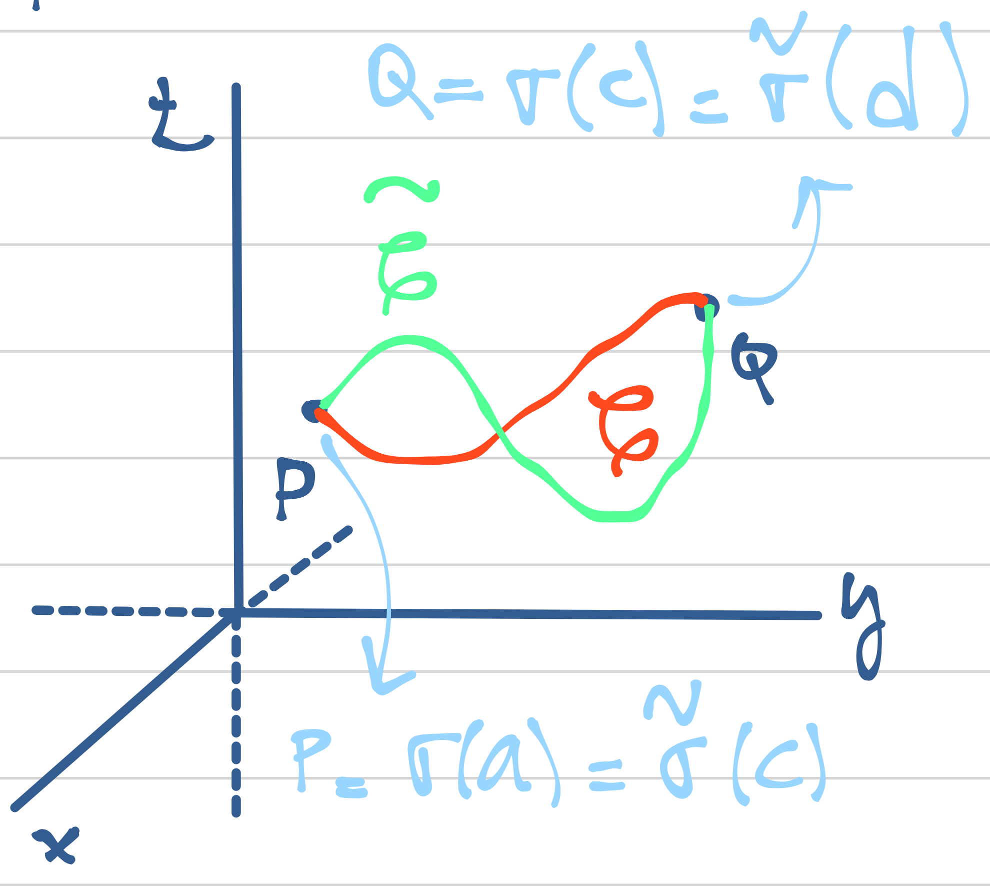
EL TEOREMA DE LOS CAMPOS CONSERVATIVOS

Hemos visto que si $\mathcal{C}$ es una curva simple, abierta y suave, orientada por una parametrización regular $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$, y $\vec{F} = \nabla f$ es un campo gradiente sobre $\mathcal{C}$ entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

A partir de esto observamos que si $\tilde{\mathcal{C}}$ es otra curva simple, abierta y suave con parametrización regular $\tilde{\sigma} : [c,d] \to \mathcal{C}$



y se satisface que $\sigma(a) = \tilde{\sigma}(c)$ y $\sigma(b) = \tilde{\sigma}(d)$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{F} \cdot ds.$$

En otras palabras, si $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ son dos curvas simples, abiertas y suaves, las cuales tienen el mismo punto inicial P y el mismo punto final Q, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{F} \cdot ds \qquad (*)$$

para todo campo gradiente $\vec{F} = \nabla f$ (aquí f es de clase C^1).

Si el campo $\vec{F}$ representa una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve desde el punto P hasta el punto Q a lo largo de una trayectoria $\mathcal{C}$, entonces $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds$ representa el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$. En este contexto, la igualdad (*) establece que el trabajo que realiza $\vec{F}$ no depende de la trayectoria elegida por la partícula para desplazarse de P hasta Q. En otras palabras, que el trabajo "se conserva". Esto motiva la siguiente definición.

<u>DEFINICIÓN</u> Sea $\vec{F}$ un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$, excepto quizás en una cantidad finita de puntos. Decimos que $\vec{F}$ es un "campo conservativo" si

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{F} \cdot ds$$

para todo par de curvas simples, suaves por trozos $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ que tengan el mismo punto inicial y el mismo punto final.

OBSERVACIÓN Si $\vec{F} = \nabla f$ es un campo gradiente con f de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$, excepto quizás en una cantidad finita de puntos, entonces $\vec{F}$ es un campo conservativo. En el próximo teorema veremos que si $\vec{F}$ es un campo conservativo entonces $\vec{F}$ tiene que ser un campo gradiente como el de la oración anterior.

TEOREMA (Teorema de los campos conservativos) Sea $\vec{F}$ un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$, excepto quizás en una cantidad finita de puntos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = 0$ para toda curva simple, cerrada y suave a trozos $\mathcal{C}$.

b) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{F} \cdot ds$ para todo par de curvas simples y suaves por trozos $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ que tengan el mismo punto inicial y el mismo punto final.

c) $\vec{F} = \nabla f$ para alguna función f de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$, excepto quizás en una cantidad finita de puntos.

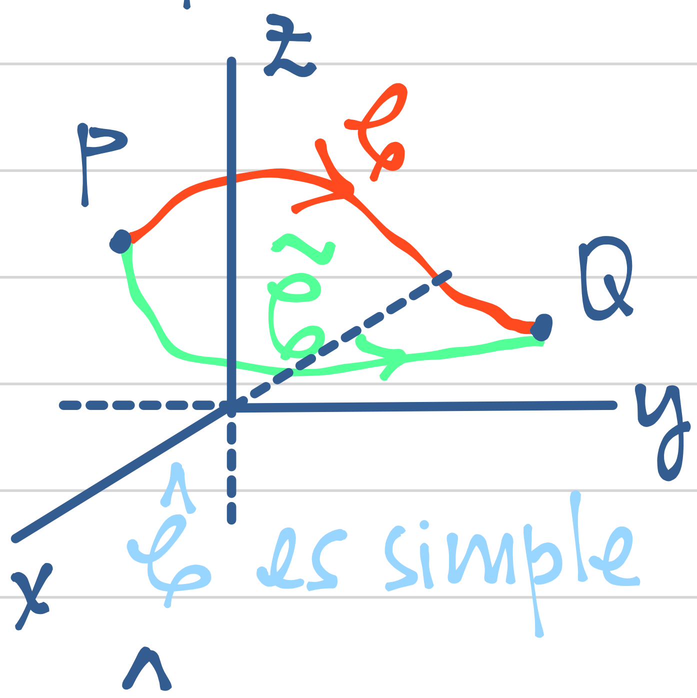
d) $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en todo punto donde esté definido.

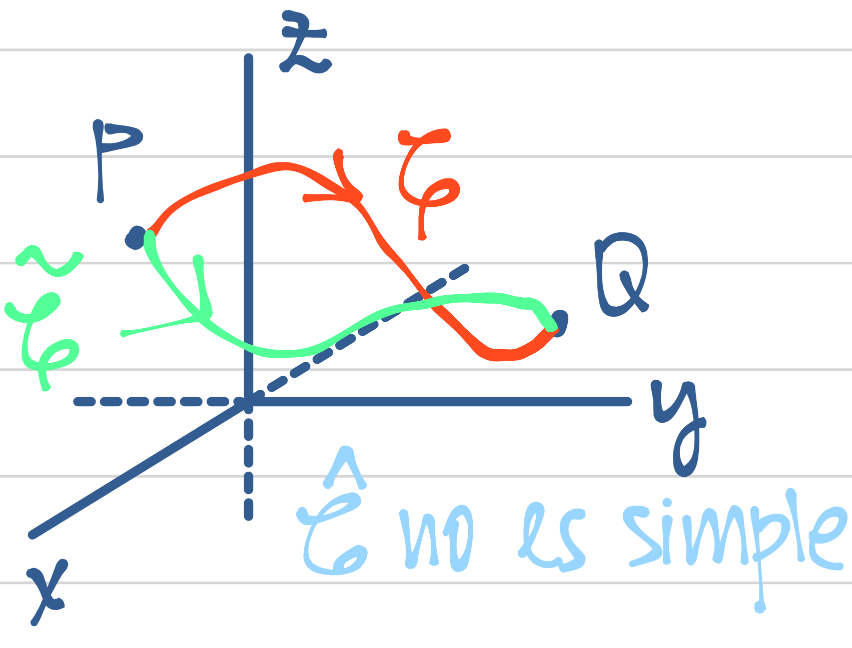
<u>OBSERVACIÓN</u> A partir de este teorema vemos que un campo es conservativo si cumple (a), (b), (c) o (d).

DEMOSTRACIÓN Sea $\vec{F}$ un campo vectorial como en el enunciado. Vamos a demostrar:

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$$

• $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $\vec{F}$ satisface (a). Sean $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ dos curvas simples y suaves por trozos que tienen el mismo punto inicial P y el mismo punto final Q. La curva $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \tilde{\mathcal{C}}^-$ es suave a trozos y cerrada, pero puede no ser simple:





Si $\hat{\mathcal{C}}$ es simple, usando (a), obtenemos:

$$\underset{(a)}{0} = \int_{\hat{\mathcal{C}}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds + \int_{\tilde{\mathcal{C}}^-} \vec{F} \cdot ds$$

Usando ahora que $\int_{\tilde{\mathscr{C}}^-} \vec{F}\cdot ds = -\int_{\tilde{\mathscr{C}}} \vec{F}\cdot ds$,

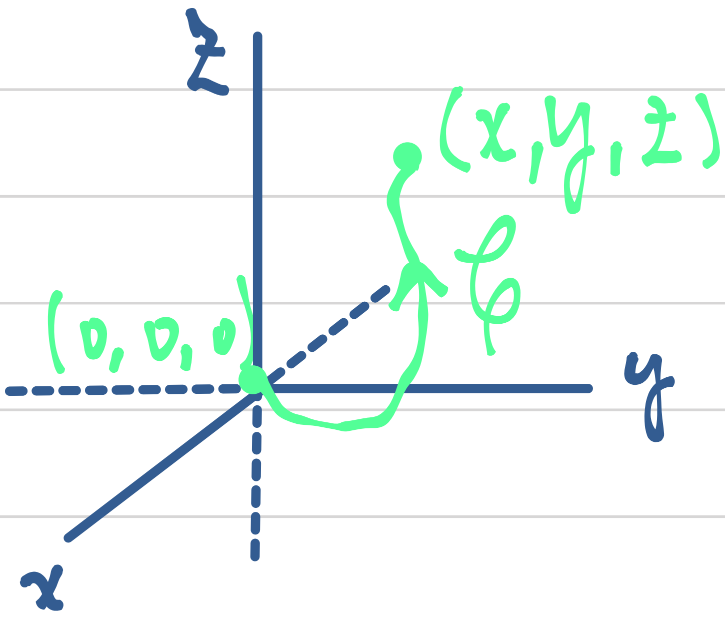
vemos que $\int_{\mathscr{C}} \vec{F}\cdot ds = \int_{\tilde{\mathscr{C}}} \vec{F}\cdot ds$.

Si $\mathscr{C}$ no es simple, se puede seguir un argumento similar pero aquí no lo vamos a desarrollar en detalle.

• (b) ⇒ (c) Suponemos que $\vec{F}$ satisface (b). Sean (x,y,z) y (α,β,γ) dos puntos distintos donde $\vec{F}$ es C^1. Por comodidad supondremos $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$. Si $\vec{F}$ no es C^1 en $(0,0,0)$ o si $(x,y,z)=(0,0,0)$, la demostración se obtiene siguiendo los mismos pasos que se dan a continuación pero cambiando $(0,0,0)$ por un punto genénico (α, β, γ), distinto de (x, y, z), donde $\vec{F}$ sea C^1.

Ahora definimos

$$f(x,y,z) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds$$

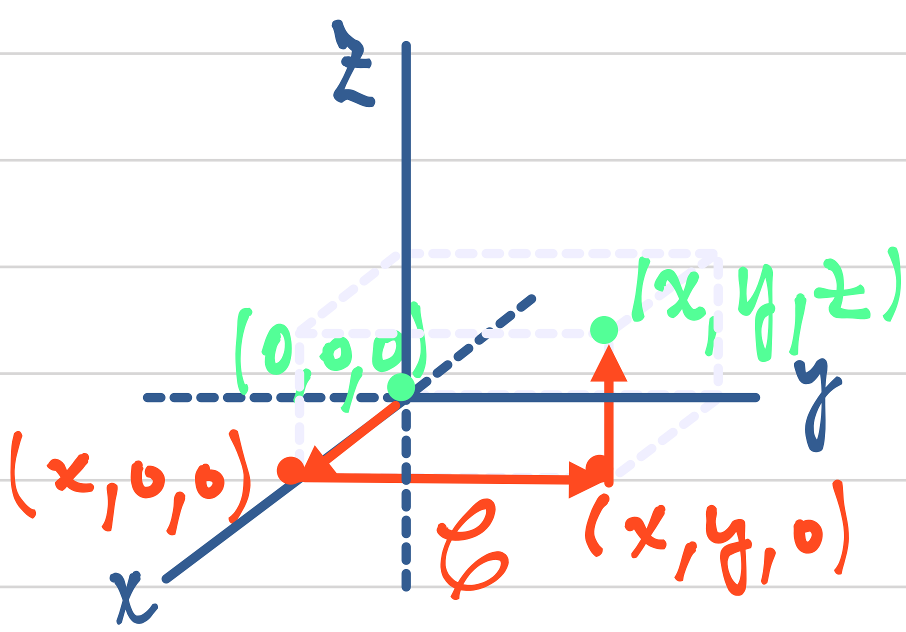


donde $\mathcal{C}$ es una curva simple, abierta y suave a trozos con punto inicial $(0,0,0)$ y punto final (x,y,z). Como $\vec{F}$ satisface (b), f está bien definida puesto que el valor de la integral no depende de la curva considerada. Notar que, puesto que $\vec{F}$ es C^1 excepto quizás en una cantidad finita de puntos, se tiene que f es C^2 excepto, quizás, en una cantidad finita de puntos (los puntos donde f puede no ser C^2 son los mismos donde $\vec{F}$ puede no ser C^1).

A continuación vamos a ver que

$$\nabla f(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z).$$

Anotamos $\vec{F} = (P, Q, R)$. Primero veremos que $\frac{\partial f}{\partial z} = R$ en (x,y,z).



Para ello consideramos la curva $\mathcal{C}$ dada en el esquema y calculamos $f(x,y,z)$ usando esta curva (se deja como ejercicio completar los detalles de este cálculo):

$$f(x,y,z) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds$$

$$= \int_0^x P(t,0,0)\,dt + \int_0^y Q(x,t,0)\,dt + \int_0^z R(x,y,t)\,dt.$$

Derivando con respecto a z se obtiene

que $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z)$.

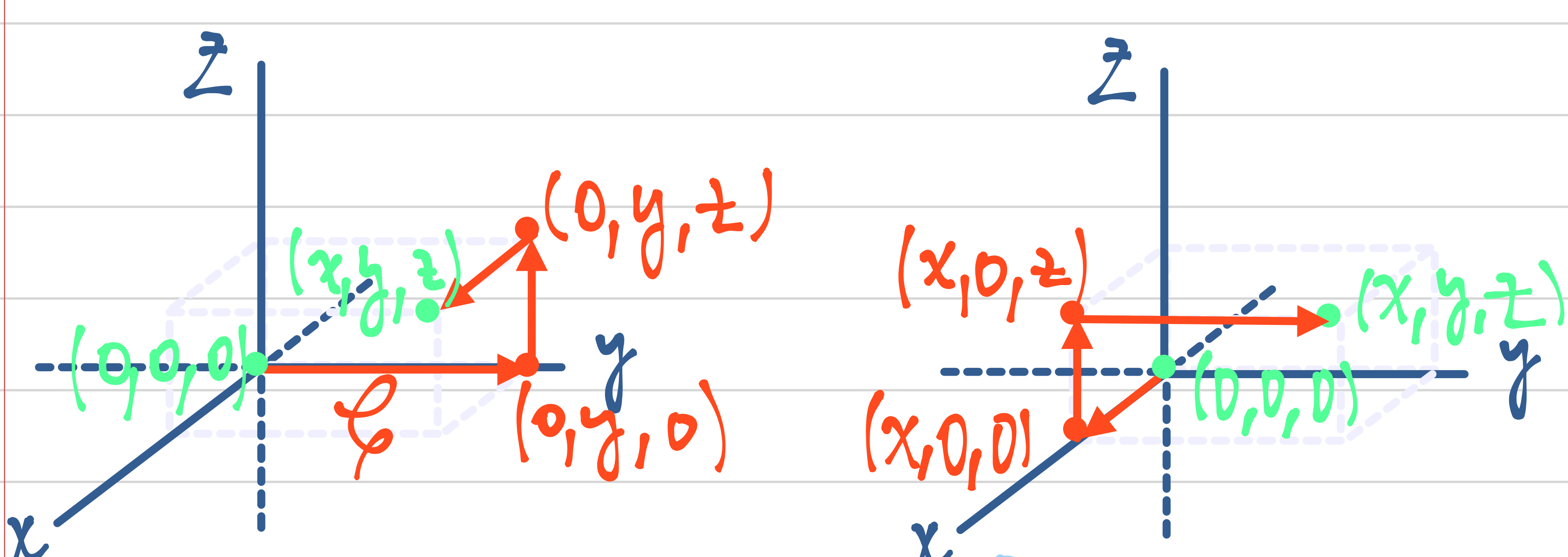
Para demostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z)$

y que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z)$ se sigue

la misma idea pero considerando

las curvas en el esquema siguiente

para calcular $f(x,y,z)$.



Para trabajar con $\partial f/\partial x$ | Para trabajar con $\partial f/\partial y$

Como (x,y,z) fue elegido arbitrariamente,

se tiene que $\vec{F} = \nabla f$.

. (c) ⇒ (d) Suponemos que $\vec{F}$ satisface (c).

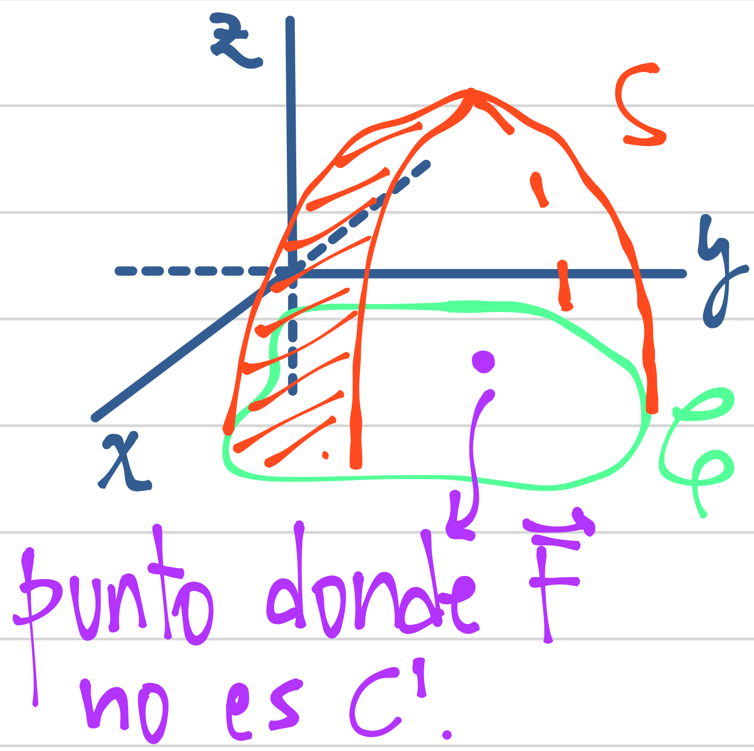
Usando que, excepto quizás en una cantidad finita de puntos, se tiene que $\vec{F} = \nabla f$ con f de clase C^2, resulta

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla f$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

$$= (0,0,0).$$

• (d) ⇒ (a) Suponemos que $\vec{F}$ satisface (d). Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, cerrada y suave a trozos. Consideramos una superficie suave S con parametrización regular $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\partial S = \mathcal{C}$ (sin considerar la orientación) y $\vec{F}$ es de clase C^1 en S. Notar que esto último es posible porque $\vec{F}$ no es C^1 a lo sumo en una cantidad finita de puntos, los cuales se pueden "esquivar" con la superficie S,



tal como se ejemplifica en el esquema para el caso de una curva plana que encierra un punto donde $\vec{F}$ no es de clase C^1.

Supongamos que D es una región elemental de tipo III. Si $\mathcal{C}$ y ∂S tienen la misma orientación, entonces, usando el teorema de Stokes, obtenemos

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds \underset{\text{teo. de Stokes}}{=} \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot ds \underset{(d)}{=} 0$$

Si $\mathcal{C}$ y ∂S tienen orientación distinta, se usa la misma idea ya que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = - \int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds.$$

El caso en el que D no es de tipo III se trata de manera similar, pero acá no lo vamos a desarrollar en detalle. $\boxtimes$

<u>EJEMPLO</u> Sea $\vec{F}$ el campo vectorial definido por $\vec{F}(x,y,z) = (y, z\cos(yz) + x, y\cos(yz))$. Vamos a demostrar que $\vec{F}$ es un campo conservativo y vamos a determinar una función f tal que $\vec{F} = \nabla f$.

Notar que $\vec{F}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$, así que tiene sentido la noción de campo conservativo para $\vec{F}$. Gracias al teorema anterior, para demostrar que $\vec{F}$ es conservativo basta ver que $\nabla \times \vec{F} = (0,0,0)$ en $\mathbb{R}^3$. Veamos:

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z\cos(yz)+x & y\cos(yz) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\cancel{\cos(yz)} - \cancel{yz\,\mathrm{sen}(yz)} - \cancel{\cos(yz)} + \cancel{zy\,\mathrm{sen}(yz)}, 0, 0\right)$$

$= (0,0,0)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

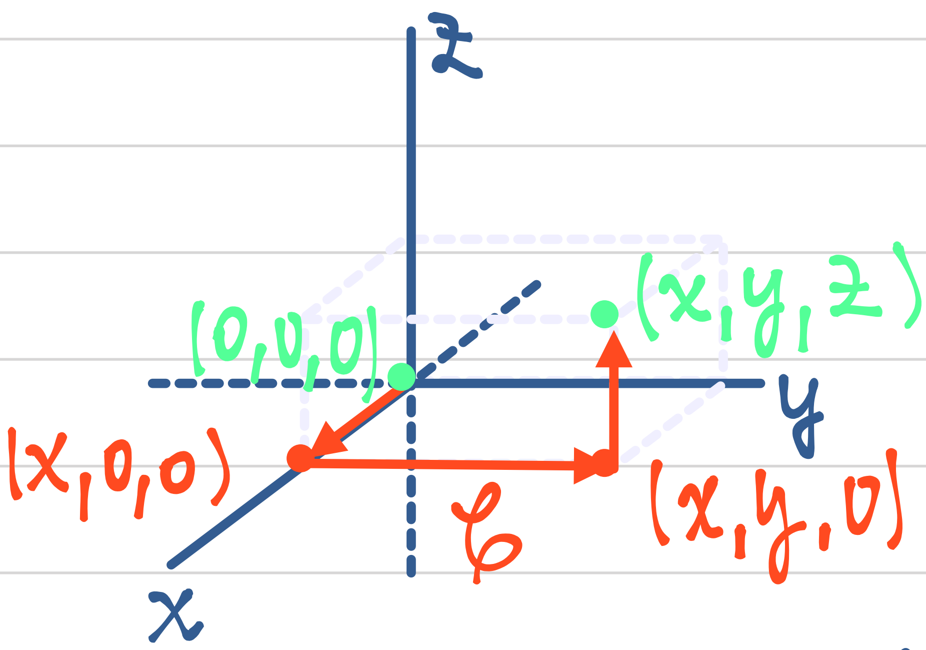
Luego $\vec{F}$ es un campo conservativo.

Notar que el teorema anterior asegura la existencia de una función f de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \nabla f$. A continuación vamos a determinar f mediante dos métodos distintos.

- **Método 1** Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. De acuerdo con la demostración del teorema anterior, podemos definir

$$f(x,y,z) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds$$

donde $\mathcal{C}$ es cualquier curva simple y suave a trozos con punto inicial $(0,0,0)$ y punto final (x,y,z), siempre que $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. En tal caso, usando la curva $\mathcal{C}$ que se muestra en el esquema, obtenemos



$$f(x,y,z) = \int_0^x \underbrace{0}_{y|_{(t,0,0)}} dt + \int_0^y \underbrace{x}_{x+\cos(yz)|_{(x,t,0)}} dt + \int_0^z \underbrace{y\cos(yt)}_{y\cos(yz)|_{(x,y,t)}} dt$$

$$= xy + \operatorname{sen}(y.z).$$

Entonces definimos

$$f(x,y,z) = xy + \operatorname{sen}(yz)$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (aquí puede ser $(x,y,z) = (0,0,0)$. Es sencillo comprobar que $\nabla f = \vec{F}$ en $\mathbb{R}^2$. Veámoslo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + y\cos(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = z\cos(y,z)$$

para cualquier $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Luego, $\nabla f = \vec{F}$ en $\mathbb{R}^3$.

• **Método 2** Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. La función f que buscamos debe satisfacer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y \qquad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + y\cos(yz) \qquad (**)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = z\cos(yz) \qquad (***)$$

Integrando $(*)$ miembro a miembro con respecto a x, obtenemos

$$f(x,y,z) = xy + \alpha(y,z)$$

para alguna función α que dependa sólo de y, z. Derivando esta expresión miembro a miembro con respecto a y y usando $(**)$, obtenemos

$$\cancel{x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y,z) = \cancel{x} + y\cos(yz).$$

Integrando ahora miembro a miembro

esta expresión con respecto a y, deducimos que

$$\alpha(y,z) = \operatorname{sen}(yz) + \beta(z)$$

para alguna función β que dependa sólo de z. Luego,

$$f(x,y,z) = xy + \operatorname{sen}(yz) + \beta(z).$$

Finalmente, derivando miembro a miembro esta expresión con respecto a z y usando (***), obtenemos

$$\cancel{z\cos(yz)} + \beta'(z) = \cancel{z\cos(yz)}$$

de donde deducimos que β tiene que ser una constante (cualquiera). Eligiendo $\beta = 0$ obtenemos

$$f(x,y,z) = xy + \operatorname{sen}(yz),$$

que coincide con la f que encontramos con el primer método. Para cualquier otra elección de B, las funciones f determinadas con el primer y el segundo método son diferentes. En particular, esto muestra que el campo escalar f que verifica $\nabla f = \vec{F}$ no es único.

Para terminar, veamos un resultado análogo al teorema anterior para campos definidos en $\mathbb{R}^2$.

<u>TEOREMA</u> Sea $\vec{F}$ un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = 0$ para toda curva simple, cerrada y suave a trozos $\mathcal{C}$.

b) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{F} \cdot ds$ para todo par de curvas simples y suaves por trozos $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ que tengan el mismo punto inicial y el mismo punto final.

c) $\vec{F} = \nabla f$ para alguna función f de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$.

d) $\nabla \times \vec{F} = 0$.

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Es análoga a la demostración del teorema anterior, así que no la desarrollamos en detalle. Sólo mencionamos que en la prueba de (d) $\Rightarrow$ (a) se usa el teorema de Green en lugar del teorema de Stokes. $\blacksquare$

OBSERVACIÓN El teorema anterior no es cierto para campos $\vec{F}$ que sean C^1 excepto en una cantidad finita de puntos de $\mathbb{R}^2$. En efecto, el campo $\vec{F}$ dado por

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, satisface que $\nabla \times \vec{F} = 0$, pero no cumple que su integral sobre cualquier curva simple, cerrada y suave a trozos sea nula ya que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = 2\pi$$

si $\mathcal{C}$ es la circunferencia de radio 1 y centro $(0,0)$.