PR 3.

Ej 14) $F(x,y) = (y^2 e^x + \cos x + (x-y)^2, 2ye^x + \operatorname{sen} y)$

$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, ORIENTADA DE $(1,0)$ A $(-1,0)$.

¿ $\int_{\mathcal{C}} F \cdot dS$?

DOS CAMINOS: $\to$ 1) SIN GREEN
$\to$ 2) GREEN.

1). F SE PARECE A UN CAMPO GRADIENTE:

$$F(x,y) = \underbrace{(y^2 e^x + \cos x, 2ye^x + \operatorname{sen} y)}_{F_1(x,y)} + \underbrace{((x-y)^2, 0)}_{F_2(x,y)}$$

F_1 ES CAMPO GRADIENTE CON POTENCIAL

$f(x,y) = y^2 e^x + \operatorname{sen} x - \cos y$ (+ cte).

(A OJO O INTEGRANDO).

ENTONCES: $F = \nabla f + F_2$.

RESULTA:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dS = \int_{\mathcal{C}} (\nabla f + F_2) \cdot dS = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot dS + \int_{\mathcal{C}} F_2 \cdot dS$$

LA PRIMERA INTEGRAL SE CALCULA CON LA RESTA DE LAS EVALUACIONES DE f EN $(-1,0)$, $(1,0)$.

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot dS = f(-1,0) - f(1,0) =$$

$$= \operatorname{sen}(-1) - \cos 0 - \operatorname{sen}(1) + \cos(0) =$$

$$= -2 \operatorname{sen}(1) \;//$$

PARA CALCULAR $\int_{\mathcal{C}} F_2 \cdot ds$, PARAMETRIZO $\mathcal{C}$.

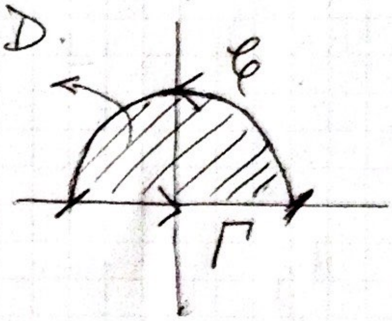
$\mathcal{C}$: $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

ASÍ:

$$\int_{\mathcal{C}} F_2 \cdot dS = \int_0^{\pi} \langle F_2(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = -2$$

$$\Longrightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot dS = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot dS + \int_{\mathcal{C}} F_2 \cdot dS = -2 - 2\operatorname{sen}(1)$$

2) GREEN: CERRAMOS LA REGIÓN CON LA CURVA Γ PARAM. POR $\gamma(t) = (t, 0)$, $-1 \leq t \leq 1$; QUEDA BIEN ORIENTADA. ✓



GREEN:

$$\int_{\mathcal{C} * \Gamma} F \cdot ds = \int_D \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{?} \, dx \, dy$$

$? \; \ldots$ CUENTAS $= 2(x-y)$.

ASÍ:

$$\int_{\mathcal{C} * \Gamma} F \cdot ds = \underbrace{\int_D 2(x-y) \, dx \, dy}_{= -4/3} \quad \text{(SALE C/POLARES)}$$

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dS + \underbrace{\int_{\Gamma} F \cdot dS}_{= \frac{2}{3} + 2\operatorname{sen}(1)} = -\frac{4}{3}$$

(NO ES DIFÍCIL)

ENTONCES:

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot dS = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - 2\operatorname{sen}(1) = -2 - 2\operatorname{sen}(1)$$