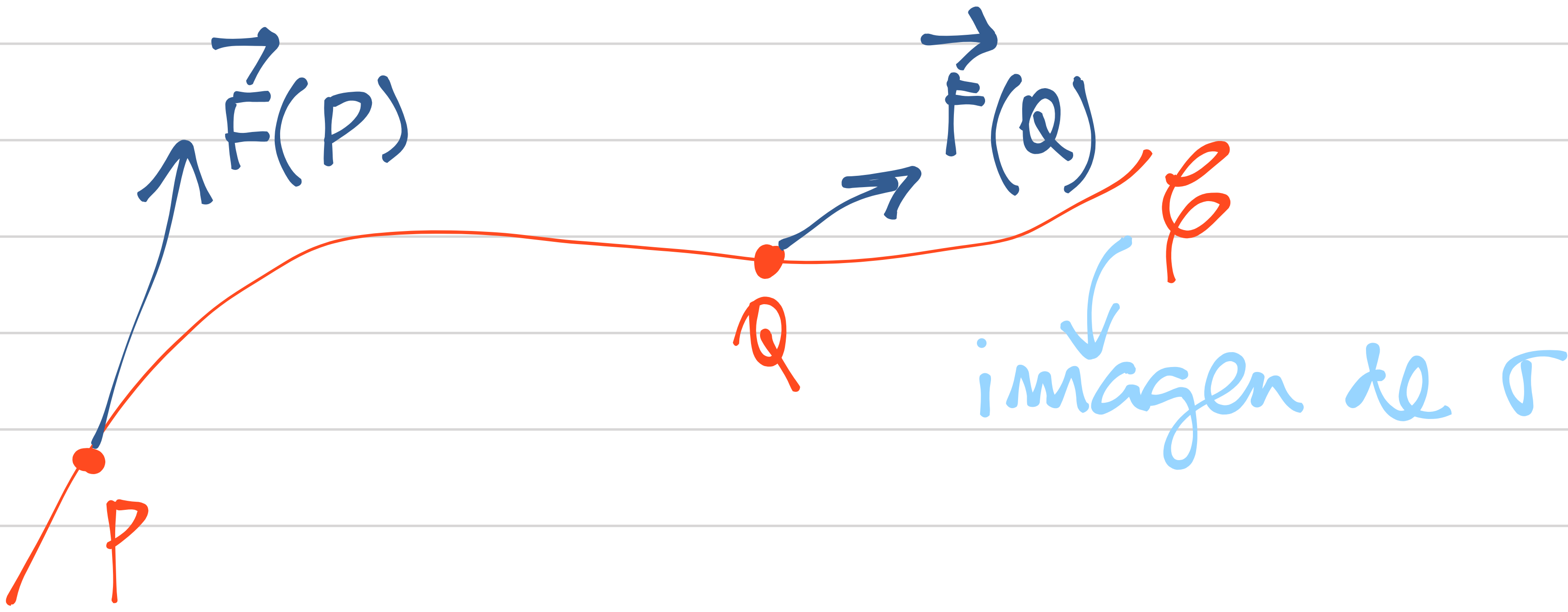
CURVAS

INTEGRALES CURVILÍNEAS

Siguiendo ideas parecidas a las que usamos para deducir la fórmula la que nos permite calcular la masa total de un alambre que ocupa una región del espacio representada por una curva $\mathcal{C}$, a partir de conocer su densidad (esto nos sirvió como motivación para definir la integral de una función escalar continua sobre una curva $\mathcal{C}$ con respecto a la longitud de arco), se puede deducir que el trabajo que ejerce una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula que sigue una trayectoria dada por $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, donde $n = 2$ o $n = 3$,



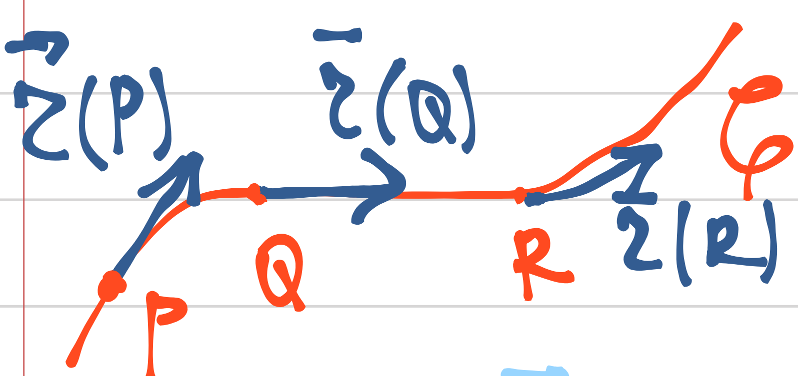
está dado por:

$$\int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt,$$

siempre que $\vec{F}$ sea continua sobre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ sea una curva simple, abierta y suave con parametrización regular σ (ver apunte en págs.

30 a 32). Esto motiva las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave. Decimos que $\mathcal{C}$ está "orientada por $\bar{\tau}$" si $\bar{\tau}$ es un campo vectorial continuo unitario tangente a $\mathcal{C}$.



unitario: $|\bar{\tau}(P)|=1$ para todo $P\in\mathcal{C}$

OBSERVACIÓN Si $\mathcal{C}$ es una curva simple, abierta y suave con parametrización regular σ entonces el campo $\bar{\tau}$ definido por

$$\bar{\tau}(t) = \frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|} \qquad t\in[a,b],$$

 es continuo, unitario y tangente a $\mathcal{C}$. En este caso decimos indistintamente que $\mathcal{C}$ está orientada por $\vec{\tau}$ o que $\mathcal{C}$ está orientada por σ.

<u>DEFINICIÓN</u> Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave, y sea $\sigma:[a,b]\to\mathcal{C}$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$ (la cual orienta a $\mathcal{C}$). Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{C}$, definimos la "integral curvilínea de $\bar{F}$ sobre la curva orientada $\mathcal{C}$" como:

$$\int_a^b \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt$$

y la anotamos como $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{s}$.

 OBSERVACIÓN Por definición, es:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

La manera en la cual se orienta una curva puede afectar el valor de una integral curvilínea sobre ella. Lo vemos en detalle a continuación.

DEFINICIÓN Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave, orientada por una parametrización regular $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$. Sea $\tilde{\sigma} : [c,d] \to \mathcal{C}$ otra parametrización regular de $\mathcal{C}$. Decimos que $\tilde{\sigma}$ "preserva la orientación" si

$$\frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|} = \frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})|}$$

para todo $t \in [a,b]$ y todo $\tilde{t} \in [c,d]$ tales que $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{t})$.

<u>PROPOSICIÓN</u> Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave, orientada por una parametrización regular $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$. Sean $\vec{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathcal{C}$ y $\tilde{\sigma} : [c,d] \to \mathcal{C}$ otra parametrización regular de $\mathcal{C}$.

a) Si $\tilde{\sigma}$ preserva la orientación, entonces

$$\int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_a^b \vec{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\sigma}'(\tilde{t})\, d\tilde{t}.$$

 b) Si $\tilde{\sigma}$ no preserva la orientación, entonces

$$\int_a^b \bar{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt = - \int_c^d \bar{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\sigma}'(\tilde{t})\,d\tilde{t}.$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Sean $\mathcal{C}$, $\bar{F}$, σ y $\tilde{\sigma}$ como en el enunciado.

a) Supongamos que $\tilde{\sigma}$ preserva la orientación de $\mathcal{C}$. Como σ y $\tilde{\sigma}$ son parametrizaciones regulares de una misma curva, sabemos que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de σ y que existe una función biyectiva $h: [a,b] \to [c,d]$ en $C^1([a,b])$

con $h'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$ tal que $\tilde{\sigma}(\tilde{t}) = \sigma(h^{-1}(\tilde{t}))$ para todo $\tilde{t} \in [c,d]$ (ver apunte en pág. 23).

Luego,

$$\int_c^d \vec{F}\big(\overbrace{\tilde{\sigma}(\tilde{t})}^{\sigma(h^{-1}(\tilde{t}))}\big) \cdot \overbrace{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}^{\sigma'(h^{-1}(\tilde{t}))\,(h^{-1})'(\tilde{t})}\, d\tilde{t} =$$

$$\int_c^d \vec{F}\big(\sigma(h^{-1}(\tilde{t}))\big) \cdot \sigma'(h^{-1}(\tilde{t}))\,(h^{-1})'(\tilde{t})\, d\tilde{t} =$$

Sustitución: $h^{-1}(\tilde{t}) = t$

$\left((h^{-1})'(\tilde{t})\, d\tilde{t} = dt \right)$

$$\int_{h^{-1}(c)}^{h^{-1}(d)} \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \qquad (*)$$

Ahora observamos lo siguiente:

$$\tilde{\sigma}'(\tilde{t}) = \sigma(h^{-1}(\tilde{t}))\,(h^{-1})'(\tilde{t}).$$

 Luego,

$$\frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|} = \frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})|}$$

$$= \frac{\sigma'(h^{-1}(\tilde{t}))\,(h^{-1})'(\tilde{t})}{|\sigma'(h^{-1}(\tilde{t}))|\,|(h^{-1})'(\tilde{t})|} \qquad (**)$$

donde $t \in [a,b]$ es tal que $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{t})$.

Sigue de esto último que

$$\sigma(h^{-1}(\tilde{t})) = \sigma(t)$$

lo cual implica (¿por qué?) que

$$h^{-1}(\tilde{t}) = t.$$

Volviendo a (**), deducimos que

$$\frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|} = \frac{\sigma'(t)\,(h^{-1})'(\tilde{t})}{|\sigma'(t)|\,|(h^{-1})'(\tilde{t})|}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{(h^{-1})'(\tilde{t})}{|(h^{-1})'(\tilde{t})|} = 1 \qquad (***)$$

En particular, esto implica que $(h^{-1})'(\tilde{t}) > 0$ para todo $\tilde{t} \in [c,d]$.

Entonces h^{-1} es estrictamente creciente.

Volviendo sobre (*), obtenemos:

$$\int_c^d \vec{F}(\tilde{\sigma}(\tilde{t})) \cdot \tilde{\sigma}'(\tilde{t})\,d\tilde{t} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt.$$

b) Supongamos ahora que $\tilde{\sigma}$ no preserva la orientación de $\mathcal{C}$. Comenzamos por observar que, dados $t \in [a,b]$ y $\tilde{t} \in [c,d]$ tales que $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{t})$, se tiene que $\sigma'(t)$ y $\tilde{\sigma}'(\tilde{t})$ son tangentes a $\mathcal{C}$ en $P=\sigma(t)=\sigma'(\tilde{t})$. En particular, $\sigma'(t)$ y $\tilde{\sigma}'(\tilde{t})$ son paralelos. Luego existe $c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$, tal que $\tilde{\sigma}'(\tilde{t}) = c\,\sigma(t)$. Entonces,

$$\frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})|} = \frac{c\,\sigma'(t)}{|c\,\sigma'(t)|} = \frac{c\,\sigma'(t)}{|c|\,|\sigma'(t)|}.$$

Como $\tilde{\sigma}$ no preserva la orientación de $\mathcal{C}$, existen t y $\tilde{t}$ como antes tales que

$$\frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})|} \neq \frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|},$$

a partir de lo cual deducimos que

$\frac{c}{|c|} \neq 1$. Esto implica que $c<0$.

Deducimos así que si $\tilde{\sigma}$ no preserva la orientación de $\mathcal{C}$, entonces

$$\frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|} = -\frac{\tilde{\sigma}'(\tilde{t})}{|\tilde{\sigma}'(\tilde{t})|}$$

para todo $t \in [a,b]$ y todo $\tilde{t} \in [c,d]$ tales que $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(\tilde{t})$.

A partir de acá, la demostración es como la de (a), poniendo

$$\frac{(h^{-1})'(\tilde{t})}{|(h^{-1})'(\tilde{t})|} = -1$$

en lugar de (***). Notar que esto implica que $(h^{-1})'(\tilde{t}) < 0$ para todo $\tilde{t} \in [c,d]$ y por lo tanto h^{-1}

es estrictamente decreciente. Se deja como ejercicio completar los detalles de esta parte de la demostración. $\blacksquare$

<u>OBSERVACIÓN</u> (Notación) La integral curvilínea de un campo $\vec{F}$ sobre una curva orientada $\mathcal{C}$, se anota como

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds \quad \text{o} \quad \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

donde $\vec{F} = (P, Q, R)$. La nueva notación surge de lo siguiente: Sea $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$, dada por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Si σ preserva la orientación, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t)) \cdot \underbrace{x'(t)\,dt}_{dx}$$

$$+ \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy}$$

$$+ \int_a^b R(x(t),y(t),z(t)) \cdot \underbrace{z'(t)\,dt}_{dz}$$

Para finalizar, veremos que la integral curvilínea de un campo $\vec{F}$ sobre una curva $\mathcal{C}$ es fácil de calcular cuando $\vec{F}$ es el gradiente de alguna función escalar.

DEFINICIÓN Sea $\vec{F}$ un campo vectorial. Decimos que $\vec{F}$ es un "campo gradiente" si existe una función escalar f tal que

$$\vec{F} = \nabla f.$$

PROPOSICIÓN Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave, orientada por una parametrización regular $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$. Si $\vec{F}$ es un campo gradiente sobre $\mathcal{C}$ entonces

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

DEMOSTRACIÓN Sean $\mathcal{C}$, σ y F como en el enunciado. Tenemos lo siguiente:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

$$(f \circ \sigma)'(t)$$

$$= \int_a^b \underbrace{\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)}\, dt$$

$$= \int_a^b (f \circ \sigma)'(t)\,dt$$

$$= f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) \qquad \blacksquare$$