Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

TEÓRICA 14

· Ecuaciones diferenciales

Ejemplos:

1 Una partícula se mueve en línea recta a velocidad t a tiempo t. Calcular la posición de la partícula si sabemos que en el tiempo inicial $t=0$, estaba en la posición 0.

Sol: $x(t)=$ posición de la partícula a tiempo t.

Sabemos: $x(0)=0$, $x'(t)=t$ ¿$x(t)$?

Como $x'(t)=t \Rightarrow x(t)=\frac{t^2}{2}+c \underset{x(0)=0}{\Longrightarrow} c=0 \wedge \boxed{x(t)=\frac{t^2}{2}}$

2 Hallar todas las funciones C^1 para las cuales la recta tangente en cada $t_0 \in \mathbb{R}$ se hace 0 en t_0+1.

Sol: $x(t)=$ función

recta tang en $(t_0, x(t_0))$

$$L_{t_0}(t)=x'(t_0)(t-t_0)+x(t_0)$$

$$\Rightarrow L_{t_0}(t_0+1)=0 \Rightarrow x'(t_0)+x(t_0)=0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

tenemos $x'(t)+x(t)=0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

¿cómo resolvemos?

$$x'(t) = -x(t) \Rightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = -1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt}_{} = -\int 1\,dt$$

$u = x(t)$
$du = x'(t)\,dt$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| = \ln|x(t)|$$

$$\Rightarrow \ln|x(t)| = -t + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow e^{\ln|x(t)|} = e^{-t+c}$$

$$\Rightarrow |x(t)| = e^{-t} \cdot e^{c}$$

soluciones: $x(t) = k e^{-t}$ $\quad k \in \mathbb{R}$.

Definición:

- Una **ecuación diferencial ordinaria** es una ecuación de la forma

$$F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$$

donde la incógnita es la función $x(t)$.

- El **orden de la ecuación** está dado por el mayor orden de derivada que aparece. Así, una ecuación ordinaria de orden 1 es de la forma

$$F(t, x, x') = 0.$$

- Cuando podemos despejar x' tenemos una escritura de la forma

$$x' = f(t, x)$$

$\boxed{*}$ "Queremos encontrar soluciones "buenas" es decir, C^1, de ecuaciones dif. ordinarias que estén definidos en intervalos".

Ejemplos:

↳ en los ejemplos anteriores

- $x'(t) = t \rightarrow$ orden 1 $\wedge$ $f(t,x) = t$
- $x'(t) = -x(t) \rightarrow$ orden 1 $\wedge$ $f(t,x) = x(t)$

↳ $\ln(1+|x'|) = \dfrac{x' x^4}{1+t^2}$ $\rightarrow$ hay métodos numéricos para resolverlas.

$*$ Hay métodos que resuelven determinado tipo de ecuaciones.

Ejemplos:

$\boxed{1}$ $x' = tx \quad , \quad x(0) = 1$

Sol: $x'(t) = t\,x(t) \Rightarrow \dfrac{x'(t)}{x(t)} = t$

$\Rightarrow \underbrace{\int \dfrac{x'(t)}{x(t)}\,dt}_{\ln|x(t)|} = \underbrace{\int t\,dt}_{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \ln|x(t)| = \dfrac{t^2}{2} + C$

busco primitiva

$\Rightarrow |x(t)| = e^{t^2/2} \cdot e^{C} \Rightarrow x(t) = e^{t^2/2} \cdot K$ $\quad K \in \mathbb{R}$

despejo $x(t)$

Como $x(0) = K = 1 \Rightarrow \boxed{x(t) = e^{t^2/2}}$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Sol: $\frac{x'}{x^2} = 1 \xrightarrow[\text{busco primitiva}]{} \int \frac{x'(t)}{x^2(t)}\,dt = \int 1\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{x(t)} = t + c \xrightarrow[\text{despejo } x(t)]{} x(t) = \frac{-1}{t+c}$

$x(0) = \frac{-1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1 \;\wedge\; \therefore\; x(t) = \frac{-1}{t-1}$

Atención: $x(t)$ tiene que estar def. en un intervalo: $(-\infty, 1)$ ó $(1, +\infty)$?

como $0 \in (-\infty, 1) \Rightarrow$ tiene que ser ese.

- Método de separación de variables:

Tenemos una ecuación dif. de la forma

$$x' = f(x) \cdot g(t)$$

$$x'(t) = f(x(t)) \cdot g(t)$$

La idea es lo siguiente:

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = g(t).$$

Si $F(s)$ es una primitiva de $\frac{1}{f(s)}$ $\left(F'(s) = \frac{1}{f(s)}\right)$

y $G(t)$ es una primitiva de $g(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} F(x(t)) = \frac{d}{dt} G(t)$$

$\Rightarrow \quad F(x(t)) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

y se trata de despejar $x(t)$ de esta ecuación.

Ejemplo: Resolver $\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Sol: es del tipo $x' = f(x(t)) \cdot g(t)$ con $f(s) = \sqrt{s}$ y $g(t) = 1$. Aplicamos el método:

$$x' = \sqrt{x} \longrightarrow \frac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \xrightarrow[\text{primitivas}]{} 2\sqrt{x(t)} = t + c$$

$\Rightarrow$ despejamos $x(t)$

$$\sqrt{x(t)} = \frac{t+c}{2} \Rightarrow x(t) = \left(\frac{t+c}{2}\right)^2$$

Como $x(0) = 0$, $c = 0$ y $\therefore$ $x(t) = \frac{t^2}{4}$

Observación importante:

$\sqrt{x(t)} = \frac{t}{2} \Rightarrow t \geq 0$. Pero podemos prolongar $x(t)$ a $t<0$ así:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x$ es una solución def. en $\mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

No es único ya que $\tilde{x}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ también es solución.

- Sistemas de ecuaciones dif:

Sea $\sigma(t)$ la trayectoria de una partícula en $\mathbb{R}^3$ que se mueve de acuerdo a un campo de velocidades $V(t, x, y, z)$

$$\Rightarrow \sigma'(t) = V(t, \sigma(t)) \quad \forall t.$$

Si $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tenemos:

$$\begin{cases} x'(t) = V_1(t, x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = V_2(t, x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = V_3(t, x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Sistema de ecuaciones dif. de orden 1.

(*) Si tenemos una ecuación dif. de orden n la podemos reducir a un sistema de n ecuaciones dif. con n incógnitas de orden 1.

$\boxed{n=2}$

$$x'' = f(t, x, x')$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x \\ x_1 = x' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = f(t, x_0, x_1) \end{cases}$$

en general: $x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_1 &= x' \\ x_2 &= x'' \\ &\vdots \\ x_{m-1} &= x^{(n-1)} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1}' = f(t, x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}). \end{cases}$$

• Un caso que vamos a estudiar en detalle:

Sistemas lineales:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ x_m' = a_{m1}x_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{mm}x_m \end{cases}$$

donde las funciones $a_{ij} = a_{ij}(t)$ son continuas.

Si llamamos $A(t) = (a_{ij}(t))_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ escribimos

$$x'(t) = A(t)\, x(t)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}.$$

• Si las funciones a_{ij} no dependen de t decimos que es un sistema lineal a coeficientes constantes.