Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

Teórica 22

• Diagramas de fase

☒ Sabemos que bajo condiciones bastante generales, una ecuación dif. admite solución única y las soluciones son continuas respecto a los datos iniciales.

☒ Vimos que en muchos casos las soluciones pueden ser calculadas explícitamente. Cuando esto no es posible, todavía podemos obtener mucha información de las soluciones.

☒ Vamos a estudiar sistemas autónomos es decir, sistemas de la forma

$$X' = F(X)$$

donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un campo C^1 y Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

<u>Observación</u>: como F es C^1, F es localmente lipschitz $\Rightarrow$ $X' = F(X)$ tiene solución $X : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ C^1.

Definición: Sea F un campo $\mathcal{C}^1$ y $X' = F(X)$.

- Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama **punto de equilibrio** si $F(x_0) = 0$.
- Una solución se llama **estacionaria** si es constante.

- $X \equiv x_0$ es estacionaria $\Rightarrow$ x_0 es un punto de equilibrio.

Lema: Sean $X_1 : I_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $X_2 : I_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones maximales de $X' = F(X)$ con $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo $\mathcal{C}^1$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abto.
Entonces tenemos:

$$\{X_1(t) : t \in I_1\} \cap \{X_2(t) : t \in I_2\} = \emptyset$$ o

$$\{X_1(t) : t \in I_1\} = \{X_2(t) : t \in I_2\}.$$

Esto dice que trayectorias distintas <u>no</u> se cortan.

Dem: Supongamos que $\exists\, t_1 \in I_1$ y $t_2 \in I_2 /$
$X_1(t_1) = X_2(t_2) = X_0$.
Definamos $\tilde{X}(t) := X_2(t - t_1 + t_2)$. Entonces,
$\tilde{X}$ es solución de

$$\begin{cases} X' = F(X) \\ X(t_1) = X_0. \end{cases}$$

Pero X_1 también es solución y $\therefore$ como hay unicidad, tenemos que $X_1 \equiv \tilde{X}$.

Así, como $\mathrm{Im}(\tilde{X}) = \mathrm{Im}(X_2)$ el lema queda demostrado.

Observación: Siempre podemos suponer que el dato inicial está dado en $t_0 = 0$.

En efecto, X es solución de $\begin{cases} X' = F(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\bar{X}(t) := X(t+t_0)$ es sol de $\begin{cases} X' = F(X) \\ X(0) = X_0 . \end{cases}$

$\boxed{*}$ Queremos estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones, es decir cuando $t \to \infty$ ($+$ ó $-$). Esto lo hacemos vía el

Diagrama de fases

$\hookrightarrow$ gráfico de las trayectorias en $\mathbb{R}^n$

$\downarrow$

$X' = F(X)$

en $n=2$: las trayectorias son $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

tales que la tangente a X en el punto $X(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es el vector $F(x_0, y_0)$.

Graficando F tenemos una idea de cómo es X.

Lema: Sea $X: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ solución de $X' = F(X)$.

$\boxed{1}$ Si $t_0 \in I$, $X(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} X_0$ y $X \not\equiv X_0 \Rightarrow F(X_0) \neq 0$.
Es decir, una trayectoria tiende a un punto de equilibrio sólo a tiempo infinito.

$\boxed{2}$ Si $X(t) \to X_0$ cuando $t \to +\infty \Rightarrow F(X_0) = 0$.
(Análogamente cuando $t \to -\infty$) Es decir, una trayectoria tiene límite finito para t tendiendo a infinito si ese límite es un punto de equilibrio.

Dem: Para ver 1) supongamos que $F(X_0) = 0$.
En ese caso, por unicidad, la única sol X de $\begin{cases} X' = F(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ es $X \equiv X_0$. Pero esto no puede pasar.

[Notemos que X es $C^1 \Rightarrow$ si $X(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} X_0 \Rightarrow X(t_0) = X_0$].

Para probar 2) digamos que $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.
Entonces

$$X(t+1) - X(t) = \begin{pmatrix} x(t+1) - x(t) \\ y(t+1) - y(t) \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} x'(\xi_1) \\ y'(\xi_2) \end{pmatrix}$$

para ciertos ξ_1, ξ_2 entre t y $t+1$.

$$= \begin{pmatrix} f_1(x(\xi_1), y(\xi_1)) \\ f_2(x(\xi_2), y(\xi_2)) \end{pmatrix}.$$

Tomando límite

$$\lim_{t \to +\infty} X(t+1) - X(t) = \lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} f_1(x(\xi_1), y(\xi_1)) \\ f_2(x(\xi_2), y(\xi_2)) \end{pmatrix}$$

$$= F(X_0)$$

$\hookrightarrow \xi_1, \xi_2 \to +\infty \Rightarrow \begin{pmatrix} x(\xi_1) \\ y(\xi_2) \end{pmatrix} \to X_0$

Por otro lado, $\lim_{t \to +\infty} X(t+1) - X(t) = X_0 - X_0 = 0$.

Luego, $F(X_0) = 0$.

• Ejemplo: Sea $\begin{cases} x'(t) = (-1+y)x. \\ y'(t) = (-2+x)y \end{cases}$

Esboza un diagrama de fases.

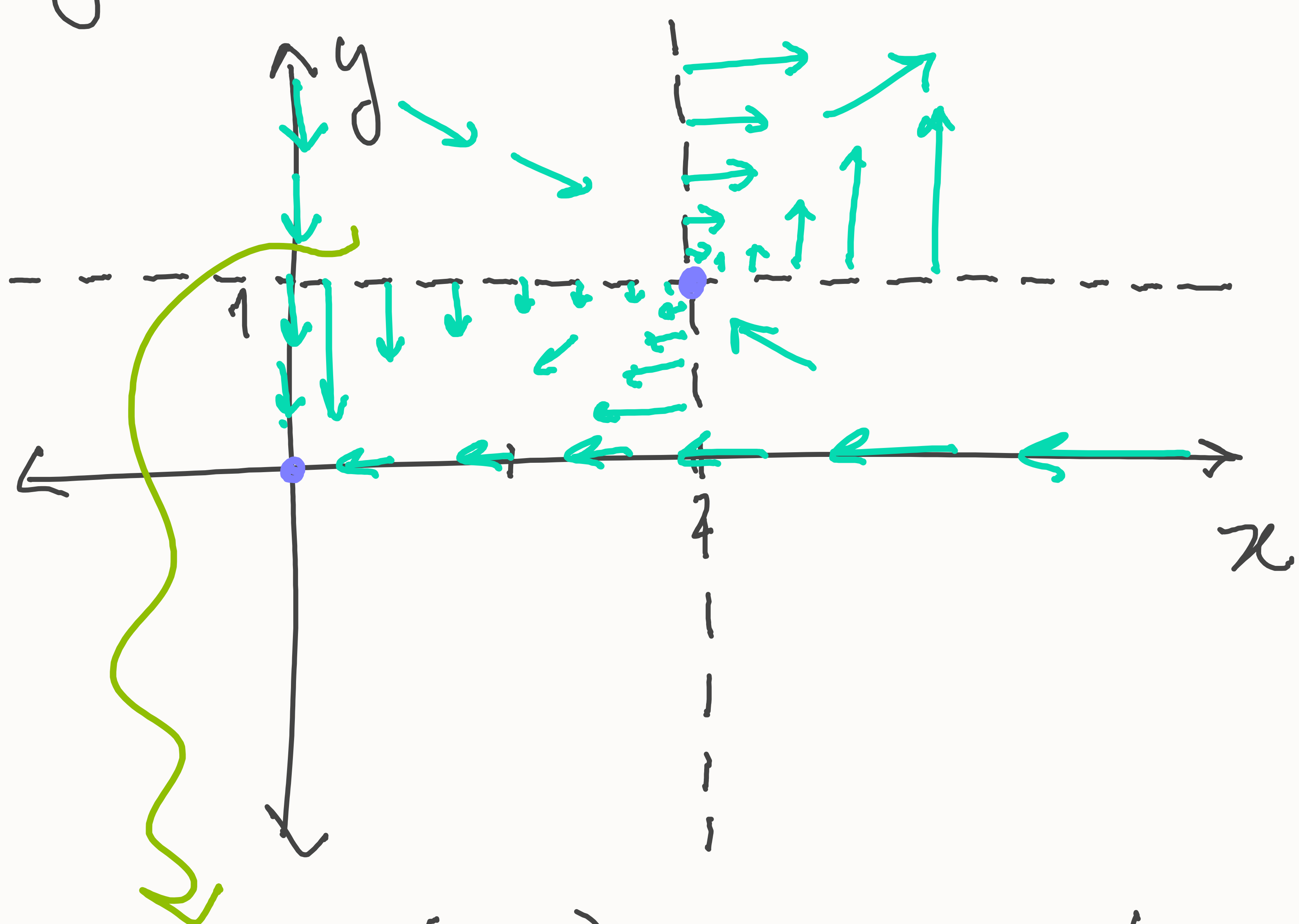
Sol: $F(x,y) = ((-1+y)x, (-2+x)y)$.

Buscamos puntos de equilibrio:

$$F(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} (-1+y)x = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ o } x = 0 \\ (-2+x)y = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ o } y = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ los puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $(2,1)$.

graficamos F:



$y=0 \rightarrow F(x,0)=(-x,0)$

$x=0 \rightarrow F(0,y)=(0,-2y)$

$y=1 \rightarrow F(x,1)=(0,-2+x)$

$x=2 \rightarrow F(2,y)=((-1+y)2,0)$

- $x\in(0,2) \wedge y>1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underbrace{(-1+y)}_{>0}x>0 \\ \underbrace{(-2+x)}_{<0}y<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\searrow$"

- por el 1º lema las trayectorias no se cortan.
- los ejes son trayectorias pues si $X_0=(x_0,0)$

$\Rightarrow$ si $x(t)$ es solución de $\begin{cases} x'=-x \\ x(0)=x_0 \end{cases} \Rightarrow$

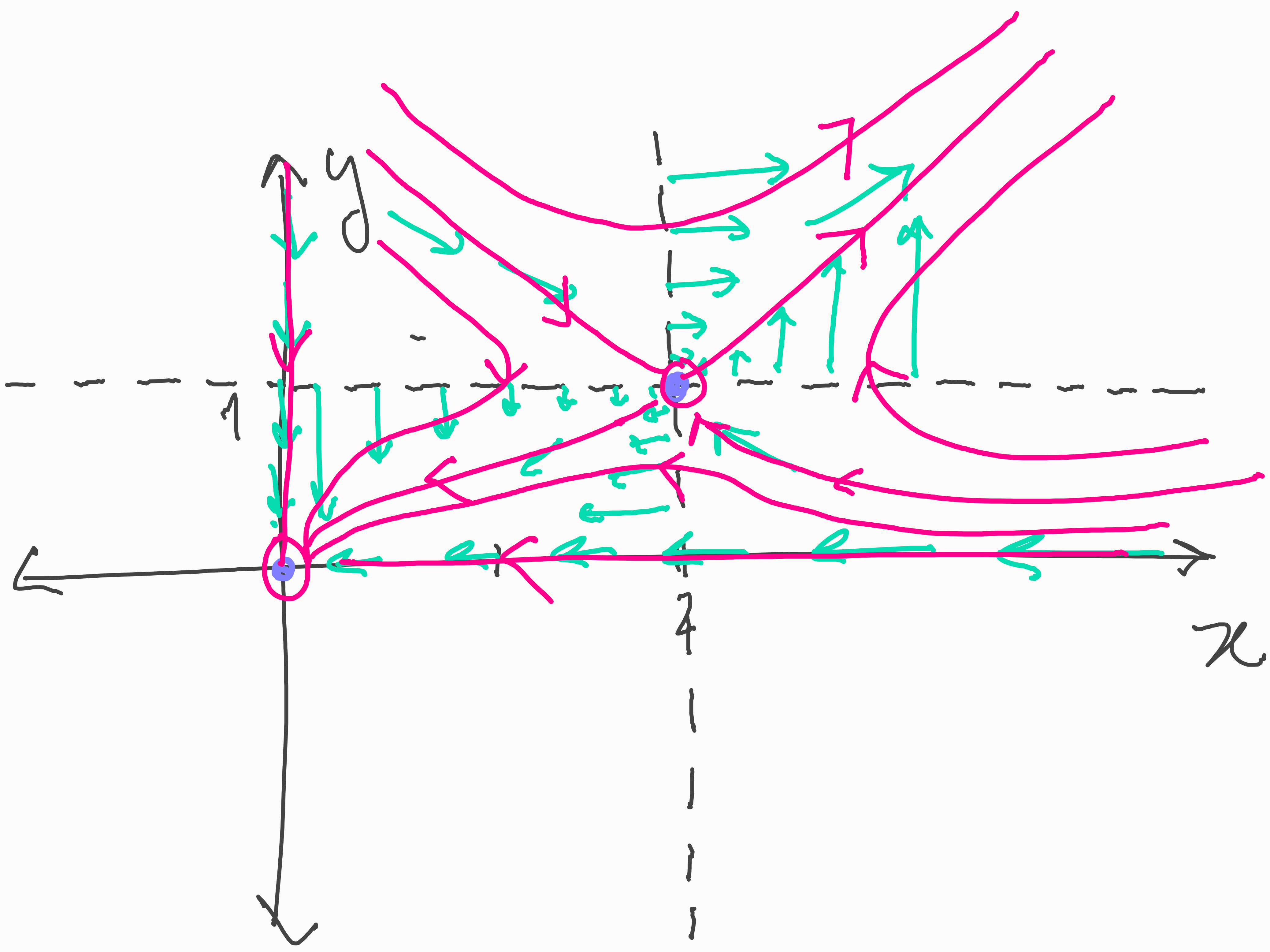
$X(t)=(x(t),0)$ es solución del sistema.

Es decir que si arranco en el eje x no me salgo de ahí.

Idem con el eje y.

- los puntos de equilibrio son sol. estacionarias, y son los únicos.
- cerca de los puntos de equilibrio, las trayectorias pasan "muy despacio".

Con todo esto graficamos las trayectorias:



Comentarios:

- En general, vamos a hacer diagramas de fase cerca de los puntos de equilibrio.
- En muchos casos, vamos a ver que los sistemas no lineales tienen diagramas de fases muy parecidos a los de un sistema lineal con coef. constantes en los puntos de equilibrio.
- Vamos a analizar los diagramas de fase de los sist. lineales a coef. constantes. Lo bueno en este caso es que tenemos sol explícitas (en 2x2).