
ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

Segundo cuatrimestre de 2020

Clase 7/12 - Repaso EDOs. Parcial del 2° cuatrimestre del 2015.

Ejercicio 1. Halle la solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$\left(e^{-x}+\frac{1}{y}\right)dy+dx=0,$$

sabiendo que admite un factor integrante de la forma $e^x g(y)$, con g una función de clase C^1 a determinar.

Ejercicio 2. Sabiendo que $\dfrac{1}{x^3}$ es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2y''+3xy'-3y=0,\qquad x>0.$$

Halle:

a) La solución general de la ecuación.

b) Una solución que satisfaga $y(1)=-2$ e $y'(1)=6$.

Ejercicio 3. Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Halle algún valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que el sistema tenga una solución que verifique simultáneamente

$$X(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\quad\text{y}\quad\lim_{t\to+\infty}X(t)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Esboce el diagrama de fases alrededor del $(0,0)$ para el siguiente sistema no lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1' &= x_1^2-\dfrac{1}{2}x_1-\dfrac{3}{2}x_2 \\[2ex] x_2' &= x_2^3-\dfrac{3}{2}x_1-\dfrac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Solución Ejercicio 1:

Notemos primero que la ecuación diferencial que queremos resolver no es exacta.
Buscamos $\mu(x,y) = e^x g(y)$ factor integrante de

$$\left(e^{-x} + \frac{1}{y}\right) dy + dx = 0,$$

con g una función de clase C^1.
Es decir, si llamamos

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \mu(x,y).1 = e^x g(y) \\ N(x,y) &= \mu(x,y)\left(e^{-x} + \frac{1}{y}\right) = g(y) + \frac{e^x g(y)}{y}, \end{aligned}$$

buscamos una función $g(y)$ tal que

$$\begin{aligned} M_y = N_x \quad &\Leftrightarrow \quad e^x g'(y) = \frac{e^x g(y)}{y} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{1}{y} \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{g'(y)}{g(y)}\, dy = \int \frac{dy}{y} \\ &\Rightarrow \quad \ln|g(y)| = \ln|y| + K \\ &\Rightarrow \quad |g(y)| = e^K |y| \\ &\Rightarrow \quad g(y) = Cy. \end{aligned}$$

Como buscamos un factor integrante, nos sirve elegir $C = 1$ y entonces $g(y) = y$.
Notemos que la ecuación que nos queda

$$(y + e^x)\, dy + e^x y dx = 0,$$

ciertamente es exacta.
Para resolverla, buscamos $\phi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \phi_x = e^x y \\ \phi_y = y + e^x \end{cases}$$

Integrando ambas, llegamos sin mayor dificultad a que $\phi(x,y) = e^x y + \frac{y^2}{2}$ sirve.
Por lo tanto, la solución general es

$$\boxed{e^x y + \frac{y^2}{2} = C,}$$

con C una constante arbitraria.
♦

Solución Ejercicio 2:

a) Como por el enunciado sabemos que $y_1(x) = \dfrac{1}{x^3}$ es una solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, \qquad x > 0, \tag{1}$$

para hallar la solución general de la ecuación (1), buscamos otra solución $y_2(x)$ de la forma

$$y_2(x) = v(x)y_1(x),$$

con $v(x)$ a determinar, tal que $\{y_1, y_2\}$ sea linealmente independiente.
Derivando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \frac{1}{x^3}v.\\
y_2' &= \frac{1}{x^3}v' - \frac{3}{x^4}v.\\
y_2'' &= \frac{1}{x^3}v'' - \frac{3}{x^4}v' - \frac{3}{x^4}v' + \frac{12}{x^5}v = \frac{1}{x^3}v'' - \frac{6}{x^4}v' + \frac{12}{x^5}v.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}
x^2y_2'' + 3xy_2' - 3y_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2\left(\frac{1}{x^3}v'' - \frac{6}{x^4}v' + \frac{12}{x^5}\right) + 3x\left(\frac{1}{x^3}v' - \frac{3}{x^4}v\right)v - 3\left(\frac{1}{x^3}v\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x}v'' - \frac{6}{x^2}v' + \frac{12}{x^3}v\right) + \left(\frac{3}{x^2}v' - \frac{9}{x^3}v\right) + \left(-\frac{3}{x^3}v\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}v'' - \frac{3}{x^2}v' = 0
\end{aligned}$$

Bajamos el orden llamando $z = v'$ y resolvemos

$$\frac{1}{x}z' - \frac{3}{x^2}z = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dz}{z} = 3\frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad z = Cx^3.$$

Volviendo a v y eligiendo $C = 1$ tenemos

$$v' = x^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad v = \frac{1}{4}x^4 + K \quad \overset{(K=0)}{\Rightarrow} \quad v = \frac{1}{4}x^4.$$

Obtenemos así que

$$y_2(x) = \frac{1}{4}x^4\frac{1}{x^3} = \frac{1}{4}x.$$

$0 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x = 0$ ✓

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\\
&= C_1\frac{1}{x^3} + C_2\frac{1}{4}x \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Por supuesto, si escribimos (1) como $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, que en nuestro caso es

$$y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0,$$

podemos usar las cuentas hechas en la práctica que nos dicen que

$$v = \int e^{-\int B(x)\,dx}dx, \qquad B(x) = \frac{2y_1'(x) + P(x)y_1(x)}{y_1(x)}.$$

---

b) Buscamos ahora una solución de (1) que satisfaga $y(1) = -2$ e $y'(1) = 6$. O sea, Buscamos $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{4}C_2 &= -2 \\ -3C_1 + \frac{1}{4}C_2 &= 6 \end{cases}$$

d donde $C_1 = -2$ y $C_2 = 0$.
Por lo tanto la solución buscada es

$$\boxed{y(x) = -2\frac{1}{x^3}.}$$

♦

Solución Ejercicio 3:

Tenemos el sistema $X' = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Empezamos buscando las raíces de χ_A.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\lambda I - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |\lambda - \alpha| = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \{\alpha - 1, \alpha + 1\}. \end{aligned}$$

Llamamos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha - 1 \\ \lambda_2 &= \alpha + 1. \end{aligned}$$

Notemos que sin importar quién sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con lo que la solución general será de la forma

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donde v_1 y v_2 son autovectores de autovalor λ_1 y λ_2 respectivamente, los cuales seguidamente pasamos a encontrar: $(\lambda_1 I - A)$

$$\begin{aligned} v_1 \quad \text{tal que} \quad & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \\ v_2 \quad \text{tal que} \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, la solución general es $\lambda_2 I - A$

$$X(t) = C_1 e^{(\alpha-1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(\alpha+1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos para qué valor de α se satisfacen las dos condiciones del enunciado.
La primera de ellas

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

se satisface cuando C_1, C_2 cumplen

$$\begin{cases} C_1 + C_2 &= 1 \\ -C_1 + C_2 &= 3 \end{cases}$$

Es decir, cuando $C_1 = -1$ y $C_2 = 2$.
Notemos que esta condición es independiente del valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, mientras que la segunda no, pues

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lim_{t\to+\infty} X(t) = \lim_{t\to+\infty} -1.e^{(\alpha-1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lim_{t\to+\infty} +2.e^{(\alpha+1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

solamente se satisface si $\alpha = -1$. $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

♦

Solución Ejercicio 4:

Si llamamos

$$F(x_1,x_2) = \left(x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2, x_2^3 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)$$

entonces efectivamente tenemos que $F(0,0) = (0,0)$, de donde el $(0,0)$ es un punto de equilibrio del sistema no lineal $X' = F(X)$.
Veamos si podemos utilizar el **teorema de linealización** para esbozar el diagrama de fases alrededor del $(0,0)$.

$Y' = DF(0,0)Y$

Calculamos la matriz diferencial de F en el $(0,0)$.

$$DF(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3x_2^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A := DF(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Buscamos autovalores y autovectores asociados.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\lambda I - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\lambda + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-2, 1\}. \end{aligned}$$

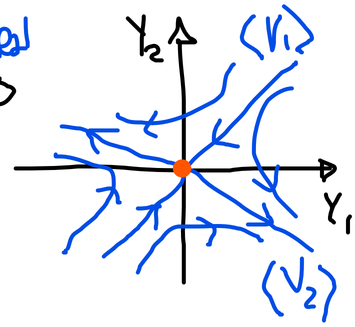
Buscamos v_1 autovector de autovalor $\lambda_1 = -2$ y v_2 autovector de autovalor $\lambda_2 = 1$

$$v_1 \quad \text{tal que} \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 \quad \text{tal que} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como los autovalores tienen parte real no nula (son reales) podemos usar el teorema para esbozar el diagrama de fases en el $(0,0)$.
De esta manera

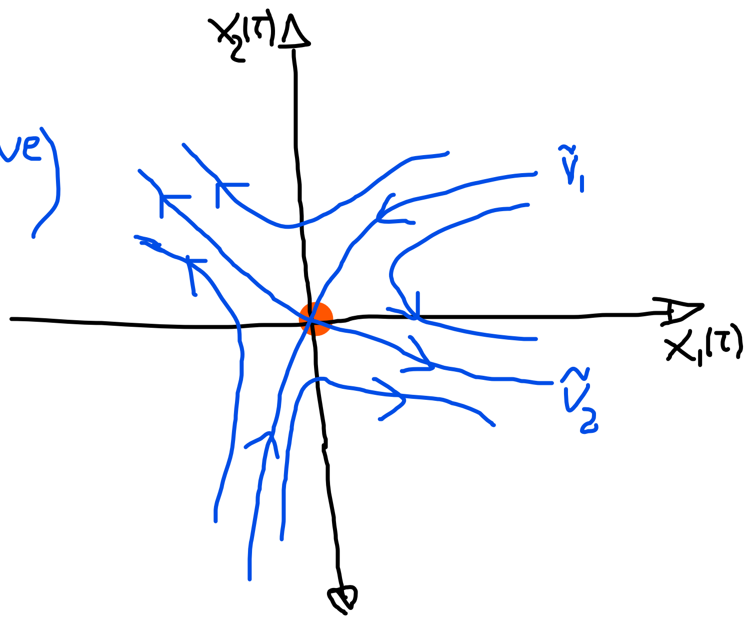
$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_2 e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_2} + C_1 e^{-2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1}.$$



es la solución general del sistema lineal asociado $Y' = AY$.
El diagrama de fases de $X' = F(X)$ cerca del $(0,0)$ es aproximadamente

No lineal

(un poco mejor que en el video)



♦