Clase 18 de Análisis 2-Mate 3 (Ulises Wainstein Haimovichi)

Vamos a empezar a estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Primero trabajaremos con coeficientes constantes, luego veremos coeficientes variables. También, cómo ya vieron en la teórica, las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior se pueden resolver a partir de sistemas de ecuaciones de primer orden asociados.

Si traducimos el sistema de ecuaciónes

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + ... + a_{1n}(t)x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + ... + a_{2n}(t)x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + ... + a_{nn}(t)x_n(t) \end{cases}$$

En un sistema matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Podemos pensar que los $x_1, ..., x_n$ forman un campo vectorial/un vector de funciones/una función que devuelve vectores

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

y

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

una matriz de funciones.

Podemos reescribir entonces el sistema como la ecuación $\frac{d\vec{X}}{dt} = A.\vec{X}$. Esta forma de presentar el sistema la llamaremos forma matricial.

Este tipo de problemas se pueden interpretar geométricamente pensando en $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo tal que $F(x_1, ..., x_n) = A\vec{x}$, y $\sigma(t) = \vec{x}(t)$ y σ se puede pensar como una curva de $\mathbb{R}^n$ que cumple $\sigma'(t) = F(\sigma(t))$, en donde la curva es guiada punto a punto por la función F. Notar que si se cumple que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ para la curva, entonces $\vec{x}$ va a ser una linea recta que parte del 0 (o va desde el infinito hacia el 0).

También nos podríamos hacer una imagen "física"(con muchas comillas, no sigue nada de física en realidad esto, pero sirve para hacerse una imagen simil a animación) de que cada punto de $\mathbb{R}^n$ es una partícula que se mueve de acuerdo a la ecuación y se puede ver como si fluyeran cada una teniendo como trayectoria, la curva previamente mencionada.

Para ver un poco de visualización de esto,

homepages.bluffton.edu/˜nesterd/apps/slopefields.html para el caso 2-D puede servir (resuelve numéricamente ecuaciones y hace gráficos que dan una idea de como se comportan sus componentes).

Si tengo dos soluciones $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ a esta ecuación, su suma es $\vec{X}_1 + \vec{X}_2$, que si la multiplico a izquierda por A obtengo $A(\vec{X}_1+\vec{X}_2) = A\vec{X}_1+A\vec{X}_2 = \frac{d\vec{X}_1}{dt}+\frac{d\vec{X}_2}{dt} = \frac{d(\vec{X}_1+\vec{X}_2)}{dt}$. Así que suma de soluciones es solución.

Aclaración: Escalar quiere decir que es un numerito, o sea, que no es vector, matriz o tensor de grado mayor que 1 (pueden wikipediar para saber que son esos cubos de números y cosas mas raras).

Por otro lado, si tengo c un escalar constante y $\vec{X}$ solución de esta ecuación, $c.\frac{d\vec{X}}{dt} = c.A.\vec{X}$ se cumple, y por lo tanto $\frac{d(c.\vec{X})}{dt} = A.(c\vec{X})$. Entonces multiplicar por un escalar constante una solución nos da solución. ¡¡¡ Importante !!! Si el escalar no fuera constante, esto no sería cierto, porque $c(t).\frac{d\vec{X}(t)}{dt} \neq \frac{dc(t)\vec{X}(t)}{dt} = c(t).\frac{d\vec{X}(t)}{dt} + \frac{dc(t)}{dt}\vec{X}(t)$. Si en vez de ser escalar la constante fuera un vector, no tendría sentido multiplicarlo de ese modo, y si fuera una matriz, $C.A \neq A.C$ salvo que A y C conmutasen. Si es escalar está todo bien.

Esto es suficiente para probar que las soluciones a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden **forman un espacio vectorial**. Además, a partir del "Teorema 2.5"del apunte de Wolanski, (página 24, el que dice que una solución está únicamente determinada por el vector a un tiempo fijo dado siempre que las constantes sean continuas dentro de un intervalo abierto I), podemos deducir que la dimensión del espacio vectorial es igual a la cantidad de funciones incógnita en el problema/la dimensión del vector $\vec{X}$ (o sea, la dimensión del espacio de soluciones coincide con la dimensión del espacio de $\vec{X}$. Quizás esta afirmación no se entienda ahora, la veremos bien en el pizarrón y la pueden consultar cuando les parezca necesario).

Heurística que no tienen porqué tomarse enserio y no necesitan saber a fondo, pero que será útil.

Inicio de digresión

Si nos imaginamos que existe $U(t', t)$ matriz de $\mathbb{C}^{n\times n}$, tal que si $\vec{X}(t)$ es solución al sistema, entonces se va a cumplir que $\vec{X}(t) = U(t, t_0)\vec{X}(t_0)$, entonces podemos insertar esto en la ecuación $\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = A\vec{X}(t)$, lo que resulta en tener

$$\frac{dU(t,t_0)\vec{X}(t_0)}{dt} = AU(t,t_0)\vec{X}(t_0)$$

$$\frac{dU(t,t_0)}{dt}\vec{X}(t_0) = AU(t,t_0)\vec{X}(t_0)$$

Y con mucha imaginación...

$$\frac{dU(t,t_0)}{dt} = AU(t,t_0)$$

$$\frac{dU(t,t_0)}{dt}[U(t,t_0)]^{-1} = A$$

$$\frac{d\log(U(t,t_0))}{dt} = A$$

$$U(t,t_0) = e^{At}U(t_0,t_0) = e^{\int Adt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\int Adt)^n$$

Si A es constante,

$$U(t,t_0) = e^{A(t-t_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n$$

Si B es una matriz diagonal y C una matriz de cambio de base tales que $A = C^{-1}BC$, $A^1 = A = C^{-1}BC$, $A^n = C^{-1}B^nC$ (si suponemos que es cierto, $A^{n+1} = A^nA = C^{-1}B^nCA = C^{-1}B^n\cancel{CC^{-1}}BC = C^{-1}B^nBC = C^{-1}B^{n+1}C$). Usando esto en la serie, podemos ver que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}C^{-1}B^nC = C^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}B^n)C$$

Y como elevar a una potencia una matriz diagonal es elevar a esa potencia los elementos de la matriz,

$$e^{A(t-t_0)} = C^{-1}\begin{pmatrix} e^{b_{11}(t-t_0)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & e^{b_{22}(t-t_0)} & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & e^{b_{n-1\,n-1}(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & e^{b_{nn}(t-t_0)} \end{pmatrix} C$$

A podría no ser diagonalizable, en cuyo caso la solución al problema se tornaría ligeramente diferente.

Fin de digresión

Cosas útiles de álgebra lineal (bueno saberlo, no necesario para este curso conocer el porqué ni su demostración).

- Una matriz $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ siempre va a tener al menos un autovector.
- Otra cosa útil es que casi toda matriz tiene una base de autovectores, lo que quiere decir que todo vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de autovectores de la matriz, o sea, si tengo $v \in \mathbb{C}^k$ entonces existen $a, ..., a \in \mathbb{C}^k$ tales que $v = a_1v_1 + ... + a_kv_k$.
- Si A es una matriz de coeficientes reales, se puede tomar como una matriz de coeficientes complejos de parte imaginaria nula.
- Si A es una matriz cuadrada, e I es la matriz identidad de mismo número de filas y columnas, $p(x) = det(A-xI)$ es un polinomio llamado polinomio característico de A, y sus raíces son autovalores de A.

- Si A es una matriz real, las raíces que no son reales vienen de a pares $\lambda, \overline{\lambda}$ (esto se puede ver tomando el complejo conjugado de $p(x)$, que va a ser $p(\overline{x})$ por ser los coeficientes de la matriz reales siendo solo x posiblemente complejo, por lo que si $p(x) = 0$ entonces $p(\overline{x}) = 0$ entonces ambas son raíz y etc)

El modo en que en general enfrentaremos los problemas cuando los coeficientes sean constantes es

- Primero pasar el sistema a su forma matricial. $\vec{X}' = A\vec{X}$.
- Plantearemos el problema cómo si estuviéramos trabajando en los complejos (aunque la variable en que derivaremos será real)
- Calcular para la matriz A autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$ y autovectores $v_{1,1}, ..., v_{k,m_k}$ independientes. Notar que si tenemos $\vec{X_{i,j}} = exp(\lambda_i t)v_{i,j}$ entonces $Av_{i,j} = \lambda_i v_{i,j}$ (definición de que $v_{i,j}$ sea un autovector de A asociado al autovalor λ_i) y $\frac{dexp(\lambda_i t)v_{i,j}}{dt} = \lambda_i exp(\lambda_i t)v_{i,j}$, así que los $\vec{X}_{i,j}$ son soluciones a la ecuación.
- Si el número de autovectores es menor que la dimensión del problema, tendremos que buscar soluciones más complicadas asociadas a los autovalores de modo más indirecto. En general, tendrán la forma $\vec{X}(t) = P_J(t)e^{\lambda_i t}$ con $P_J(t)$ un polinomio cuyos coeficientes son vectores, $J = (i, j)$. Podemos ver que $\frac{dP_J(t)e^{\lambda_i t}}{dt} = (P_J'(t) + \lambda_i P_J(t))e^{\lambda_i t}$, entonces $AP_J(t) = P_J'(t) + \lambda_i P_J(t)$. Esto en abstracto parece horrible e insufrible, pero en la práctica es bastante más sencillo que lo esperado.

Ejercicio 1.c Hallar la solución general $(x_1(t), x_2(t))$ del sistema

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases}$$

En cada caso, hallar el conjunto de datos iniciales tales que la solución tienda a 0 cuando t tienda a $+\infty$, y también hallar el conjunto de datos iniciales en que la solución tienda a 0 cuando t tienda a $-\infty$

Esto se puede reescribir cómo $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ con $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$.

Veamos cuales son los autovalores de $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-4-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot (-2)$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda - 4 + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Entonces los autovalores son -1 y -2. Los autovectores van a ser

$$\begin{pmatrix} -4-(-1) & 3 \\ -2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+3b \\ -2a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -4-(-2) & 3 \\ -2 & 1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2a+3b \\ -2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esto nos da las soluciones $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{-t}$ y $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} e^{-2t}$. Esto son dos soluciones independientes, y como los vectores son de $\mathbb{C}^2$ ($\mathbb{R}^2$) entonces no va a haber más soluciones independientes, por lo que las soluciones de este problema van a ser (la solución general va a ser)

$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} ae^{-t} + 3be^{-2t} \\ ae^{-t} + 2be^{-2t} \end{pmatrix}$

Con a, b constantes reales (para que $\vec{x}$ sea real). Ahora, ¿A que tiende la solución cuando $t \to +\infty$?

$\begin{pmatrix} ae^{-t} + 3be^{-2t} \\ ae^{-t} + 2be^{-2t} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a0 + 3b0 \\ \cdot 0 + 2b0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así que para toda condición inicial / para todo par a, b se tiene que la solución tiende a 0 cuando t tiende a ∞.

¿A que tiende la solución cuando $t \to -\infty$?

$\begin{pmatrix} ae^{-t} + 3be^{-2t} \\ ae^{-t} + 2be^{-2t} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a\infty + 3b\infty \\ a\infty + 2b\infty \end{pmatrix}$

Ahora, si a y b son simultáneamente cero, la solución será constantemente cero, por lo que la única condición inicial para la cual cuando t tiende a $-\infty$ resulta tender a 0 es la solución es cero para todo t.

Traten de resolver en grupo el problema 1.d. Si necesitan, la fórmula del determinante para una matriz de 3×3 es:

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{pmatrix} = l \cdot det \begin{pmatrix} a & b \\ f & g \end{pmatrix} - h \cdot det \begin{pmatrix} a & b \\ j & k \end{pmatrix} + c \cdot det \begin{pmatrix} f & g \\ j & k \end{pmatrix}$$

$$= l(ag - bf) - h(ak - bj) + c(fk - gj)$$

Veamos ahora el ejercicio 2...

Ejercicio 2 Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea. Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$. Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque?

Lo primero que hay que hacer en un problema así, es traducirlo a algo manejable.

Si llamamos A a la cantidad en el primer tanque, y B a la cantidad en el segúndo tanque, podemos ver que $A(0) = 24, B(0) = 24$

$\frac{d}{dt}A(t) = 6 - 8 + 2 = 0$ (Entran 6 litros por minuto del exterior, salen 8 para el tanque 2, entran 2 desde el tanque 2)

$\frac{d}{dt}B(t) = -6 + 8 - 2 = 0$ (Se van 6 litros por minuto al exterior, entran 8 desde el tanque 1, salen 2 hacia el tanque 1)

Por lo que la cantidad de agua en cada tanque no cambia, mientras que, si llamamos $x(t)$ a la concentración de sal en el tanque 1 e $y(t)$ a la concentración de sal en el tanque 2,

$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{6 \cdot 0 - 8.x(t) + 2y(t)}{24}$ (entran 6 litros de agua pura, no hay aporte de sal. Los 8 que salen del tanque 1 llevan en cantidad de sal $8 \cdot \frac{x(t)}{24}$, y los 2 que vienen del tanque 2 llevan $2\frac{y(t)}{24}$ en cantidad de sal)

$\frac{y(t)}{dt} = \frac{-6y(t)+8x(t)-2y(t)}{24}$

Esto, traducido a forma matricial, es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{24} & \frac{2}{24} \\ \frac{8}{24} & -\frac{8}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Hallemos autovalores y autovectores...

$det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{12} = (\lambda + \frac{1}{6})(\lambda + \frac{1}{2})$

Esto nos da los autovalores $-\frac{1}{6}$ y $-\frac{1}{2}$. Para allar los autovectores uso que

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2a + b \\ -2(-2a + b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2a + b \\ 2(2a + b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Como el sistema es de dos dimensiones y tenemos dos autovectores, la solución general va a ser

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{6}t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}$$

Ahora, queremos la solución en particular que cumple que $x(0) = x_0$ y en $y(0) = y_0$. Esto quiere decir

$x_0 = a + b, y_0 = 2(a - b) \Rightarrow a = \frac{2x_0 + y_0}{3}, b = \frac{2x_0 - y_0}{3}$

Como $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{1}{6}t} = 0$ y $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$ (dado que tienen exponentes negativos), entonces se tiene que cuando pase mucho tiempo la concentración de sal en cada tanque será despreciable.

Ejercicio similar al 3

Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + bx_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & b \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - b$$

Autovalores $\lambda_+ = 1 + \sqrt{b}$ y $\lambda_- = 1 - \sqrt{b}$. Si $b > 0$ son reales, si $b = 0$ estamos en un caso degenerado, si $b < 0$ son complejos. $e^{\lambda_+ t} = e^t e^{\sqrt{b}t}$, $e^{\lambda_- t} = e^t e^{-\sqrt{b}t}$

Autovectores asociados

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{b} & (-\sqrt{b})(-\sqrt{b}) \\ 1 & -\sqrt{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b}(x - \sqrt{b}y) \\ (x - \sqrt{b}y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{b} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{b} & (\sqrt{b})(\sqrt{b}) \\ 1 & \sqrt{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{b}(x + \sqrt{b}y) \\ (x + \sqrt{b}y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $b \neq 0$, los autovectores son independientes, así que la solución general a este problema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \sqrt{b}(\alpha e^{\sqrt{b}t} - \beta e^{-\sqrt{b}t}) \\ (\alpha e^{\sqrt{b}t} + \beta e^{-\sqrt{b}t}) \end{pmatrix}$$

Si $b < 0$, $\sqrt{b} = ia$ para algún a real. $e^{iat} = cos(at) + isin(at)$. Así que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} ia(\alpha - \beta)cos(at) - a(\alpha + \beta)sin(at) \\ (\alpha - \beta)cos(at) + i(\alpha + \beta)sin(at) \end{pmatrix}$$

Si $\alpha - \beta$ es imaginario puro y $\alpha + \beta$ es real puro, entonces $\bar{\alpha} = \beta$ (o sea, $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$, $\beta = \alpha_R - i\alpha_I$), y la solución es real (son trigonométricas con algún defasaje).

El caso $b > 0$ es fácil de analizar, pero especialmente interesante es el caso $b = 0$, donde los autovectores no nos alcanzaban...

El único autovalor que hay en ese caso es $\lambda = 1$. Tenémos una solución dada por $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ahora necesitamos otra más (si no, no tendríamos solucion para condiciones iniciales como $(x_0, y_0) = (1, 0)$). Para ello usamos lo de los polinómios...

$e^t \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$

En la ecuación esto queda como

$e^t \begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_1(t) + P_2(t) \end{pmatrix}$

Entonces

$P_1'(t) + P_1(t) = P_1(t)$ $P_2'(t) + P_2(t) = P_1(t) + P_2(t)$

Así que

$P_1'(t) = 0 \Rightarrow P_1(t) = C$ constante $P_2'(t) = P_1(t) = C \Rightarrow P_2(t) = Ct + D$

Esto nos da las soluciones $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^t + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$, lo que tiene dos parámetros independientes, entonces tiene dimensión 2, que siendo un sistema de dos ecuaciones es lo que tiene que ser. Así que con eso tenemos la solución general del sistema.

Cuando puedan, busquen en la página

homepages.bluffton.edu/˜nesterd/apps/slopefields.html

Y prueben para el sistema de ecuaciones con $b = 1$, con $b = 2$, con $b = 0$ y con $b = -1$. Disfruten. (En el pizarrón explicaré cómo se grafican las soluciones de estos sistemas cuando estamos en 2×2 si da el tiempo en esta clase, si no será la próxima).