Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 17, 2do. cuatrimestre 2020

Ecuación lineal de orden n

A partir de los resultados anteriores sobre el conjunto de soluciones de sistemas lineales, estudiamos el conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden n:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t), \qquad (1)$$

donde $a_j, f : I \to \mathbb{R}$. Recordamos que podemos obtener un sistema lineal con n incógnitas equivalente: si x es solución de (1), y llamamos $x_0 = x, x_1 = x', \ldots, x_{n-1} = x^{(n-1)}$, entonces

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \quad \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1}, \\ x_{n-1}' = -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-1} + f(t). \end{cases} \qquad (2)$$

Ecuación lineal de orden n

Recíprocamente, dada una solución $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ del sistema (2), afirmamos que $x(t) = x_0(t)$ es solución de la ecuación de orden n.

En efecto, $x_1 = x_0' = x'$. Luego, $x_2 = x_1' = (x')' = x''$. Así sucesivamente, $x_{n-1} = x_{n-2}' = (x^{(n-2)})' = x^{(n-1)}$. Por último,

$$
\begin{aligned}
x_{n-1}' &= (x^{(n-1)})' \\
&= x^{(n)} \\
&= -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-1} + f(t) \\
&= -a_0(t)\,x - a_1(t)\,x' - \cdots - a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + f(t).
\end{aligned}
$$

Ecuación lineal de orden n

Aplicando lo que sabemos para sistemas lineales, obtenemos:

Teorema: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $\tau \in I$. Sean $a_0, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ continuas. Para cada $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ existe una única solución de la ecuación (1) de orden n que satisface

$$x(\tau) = y_0,\ x'(\tau) = y_1,\ \ldots x^{(n-1)}(\tau) = y_{n-1}.$$

Además, esta solución está definida en todo el intervalo I.

Ecuación lineal de orden n

Demostración: Vemos primero la existencia de soluciones. Sea $\xi = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ y sea $X = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ la solución del sistema lineal (2) con $X(\tau) = \xi$.

Tenemos que $x = x_0$ es solución de la ecuación (1), y satisface

$$x' = x_1, \, , x'' = x_2, \, , \ldots, \, x^{(n-1)} = x_{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$x(\tau) = y_0, \; x'(\tau) = y_1, \; \ldots, \; x^{(n-1)}(\tau) = y_{n-1},$$

que prueba la existencia de soluciones. Más aun, dado que la solución X del sistema (2) está definida en todo I, x está definida en todo I.

Ecuación lineal de orden n

Respecto de la unicidad, si x y $\bar{x}$ son dos soluciones de la ecuación (1) de orden n con

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) = y_0, \ldots, x^{(n-1)}(\tau) = \bar{x}^{(n-1)}(\tau) = y_{n-1},$$

sean

$$X = (x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}), \quad \bar{X} = (\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}'', \ldots, \bar{x}^{(n-1)}).$$

Entonces X y $\bar{X}$ son soluciones del sistema (2) tales que $X(\tau) = \bar{X}(\tau)$. Por la unicidad de soluciones de los sistemas lineales, $X = \bar{X}$. En particular, $x = \bar{x}$, como afirmamos. $\blacksquare$

Ecuación lineal homogénea de orden n

Ahora consideramos la ecuación lineal homogénea de orden n:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \tag{3}$$

donde $a_0, \ldots, a_{n-1}, f : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.

Teorema: El conjunto de soluciones de la ecuación (3) es un espacio vectorial de dimensión n.

Demostración: El sistema equivalente

$$\begin{cases} x_0' = x_1, \\ x_1' = x_2, \\ \quad \vdots \\ x_{n-1}' = -a_0(t)x_0 - a_1(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-1}, \end{cases} \tag{4}$$

es homogéneo.

Ecuación lineal homogénea de orden n

En consecuencia, el conjunto de soluciones $X = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ del sistema (4) es un espacio vectorial. Por lo tanto, el conjunto de soluciones de (3) es un espacio vectorial.

Para ver que se trata de un espacio vectorial de dimensión n, vemos que existe un conjunto de soluciones $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ linealmente independientes de la ecuación homogénea (3), tales que cualquier solución de (3) se expresa en la forma $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n$ para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Ecuación lineal homogénea de orden n

Fijemos $\tau \in I$. Para $1 \leq i \leq n$, sea $X^i = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_{n-1}^i)$ la solución del sistema homogéneo (4) con $X^i(\tau) = \boldsymbol{e}_i$, donde $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\{X^1, \dots, X^n\}$ es una base del conjunto de soluciones del sistema (4).

Sea ahora x una solución de la ecuación homogénea (3) y llamemos $X = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$. Como X es solución del sistema (4), existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $X = \lambda_1 X^1 + \cdots + \lambda_n X^n$. En particular,

$$x = \lambda_1 x_0^1 + \lambda_2 x_0^2 + \cdots + \lambda_n x_0^n.$$

Ecuación lineal homogénea de orden n

Veamos que el conjunto $\{x_0^1, \ldots, x_0^n\}$ es linealmente independientes. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$x := \lambda_1 x_0^1 + \lambda_2 x_0^2 + \cdots + \lambda_n x_0^n = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
x' &= \lambda_1 (x_0^1)' + \lambda_2 (x_0^2)' + \cdots + \lambda_n (x_0^n)' = 0, \\
x'' &= \lambda_1 (x_0^1)'' + \lambda_2 (x_0^2)'' + \cdots + \lambda_n (x_0^n)'' = 0, \\
&\vdots \\
x^{(n-1)} &= \lambda_1 (x_0^1)^{(n-1)} + \lambda_2 (x_0^2)^{(n-1)} + \cdots + \lambda_n (x_0^n)^{(n-1)} = 0.
\end{aligned}$$

Dado que $X^i = (x_0^i, (x_0^i)', \ldots, (x_0^i)^{(n-1)})$ para $1 \leq i \leq n$, resulta $\lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. ■

Ecuación lineal homogénea de orden n

En las condiciones del Teorema, si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación homogénea (3), entonces es una base del conjunto de soluciones de (3). Por lo tanto, es importante tener un criterio para decidir si un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de soluciones de la ecuación homogénea (3) es linealmente independiente. Para esto, definimos el Wronskiano de $x_1, \ldots, x_n$ como

$$W(x_1, \ldots, x_n)(\tau) = \det \begin{pmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) & \cdots & x_n(\tau) \\ x_1''(\tau) & x_2''(\tau) & \cdots & x_n''(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(\tau) & x_2^{(n-1)}(\tau) & \cdots & x_n^{(n-1)}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Ecuación lineal homogénea de orden n

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema: Un conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de soluciones de la ecuación homogénea (3) es linealmente independiente (y por lo tanto, base) si y sólo si $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\tau) \neq 0$ para algún $\tau \in I$. Más aun, $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\tau) \neq 0$ para algún $\tau \in I$ si y sólo si $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Demostración: Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de soluciones de (3). Si $X_i = (x_i, x_i', x_i'', \ldots, x_i^{(n-1)})$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $\{X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ es un conjunto de soluciones de (4).

Afirmamos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ lo es.

En efecto, si $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente, sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n = \mathbf{0}$. En particular, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ecuación lineal homogénea de orden n

Recíprocamente, supongamos que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ son linealmente independientes, y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.

Si llamamos $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, entonces

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \cdots + \lambda_n x_n' = 0, \\ &\vdots \\ x^{(n-1)} &= \lambda_1 x_1^{(n-1)} + \lambda_2 x_2^{(n-1)} + \cdots + \lambda_n x_n^{(n-1)} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda_1 X^1 + \cdots + \lambda_n X^n = \mathbf{0}$. Como $\{X^1, \dots, X^n\}$ es linealmente independiente $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ecuación lineal homogénea de orden n

Ahora bien, recordamos que $\{X^1, \ldots, X^n\}$ es linealmente independiente si y sólo si

$$\det Q(\tau) \neq 0 \text{ para algún } \tau \in I,$$

donde $Q(t)$ es la matriz cuyas columnas son $X^1, \ldots, X^n$. Más,

$$\det Q(\tau) \neq 0 \text{ para algún } \tau \in I \Leftrightarrow \det Q(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in I.$$

Dado que

$$Q(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

tenemos que $\det(Q(t)) = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)(t)$, de donde deducimos el enunciado del teorema. $\blacksquare$