ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

A continuación vamos a estudiar cómo determinar el conjunto solución de sistemas lineales de EDOs de primer orden con coeficientes constantes, es decir, sistemas de la forma

$$x'(t) = Ax(t), \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (A no depende de la variable t). De acuerdo con la teoría que desarrollamos hasta el momento, sabemos que $(*)$ admite soluciones definidas en todo $\mathbb{R}$ y que el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ de $(*)$ es un espacio vectorial de dimensión n. Bastará entonces determinar un conjunto de n soluciones li de (*).

Si $n=1$ entonces (*) se reduce a

$$x'(t) = a x(t) \quad t \in \mathbb{R},$$

con $a \in \mathbb{R}$, cuyo conjunto solución es

$$\left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x(t) = c e^{at} : c \in \mathbb{R} \right\}$$

Motivados en este hecho, buscamos soluciones de (*) de la forma

$$x(t) = v e^{\lambda t} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, son a determinar. Notar que nos interesa $v \neq 0$ para tener una solución no nula. Una función de esta forma satisface (*) si y sólo si $\underbrace{\lambda v e^{\lambda t}}_{x'(t)} = \underbrace{A v e^{\lambda t}}_{A x(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $v \neq 0$, esto ocurre si y sólo si

$$\lambda v = A v ,$$

es decir, si λ es autovalor de A y v es autovector de A asociado a λ. Vemos así que la existencia de una solución en la forma (**) depende de la existencia de un autovalor real λ de A. Si, por ejemplo, A admite un conjunto de n autovectores l.i. $v_1, .., v_n$ asociados a n autovalores reales $\lambda_1, .., \lambda_n$ (no necesariamente todos distintos) entonces las funciones $x_1, .., x_n$ definidas por

$$x_i(t) = v_i e^{\lambda_i t} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, .., n$$

son soluciones de (*) y son li ya que

lo son los vectores $x_1(0)=v_1, \ldots, x_n(0)=v_n$.

En este caso, el conjunto solución de (*) es

$$\left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n v_n e^{\lambda_n t} : c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Esta situación se da, por ejemplo, si A tiene n autovalores reales distintos ya que autovectores distintos se corresponden con autovectores l.i.

Siguiendo esta idea, vamos a estudiar en detalle el caso $n=2$ a partir de la información que tengamos acerca de los autovalores de la matriz A.

- Conjunto solución de $x'(t) = Ax(t)$, $t \in \mathbb{R}$ para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Como A es una matriz real de tamaño 2×2, sabemos que A tiene dos autovalores reales distintos, dos autovalores complejos conjugados (no reales) o un autovalor real doble. A continuación analizaremos cada uno de estos casos por separado.

- - Autovalores reales distintos: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

De acuerdo con lo que ya discutimos, sabemos que las funciones $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$$

forman una base de soluciones, donde

v_1 es autovector de A asociado a λ_1 y v_2 es autovector de A asociado a λ_2.

Luego, el conjunto solución del sistema es

$$\left\{ x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} :\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

• Autovalores complejos conjugados: $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\lambda = a+bi$, $b \neq 0$

Permitamos por un momento que las soluciones del sistema tomen valores complejos. En este escenario conviene introducir la función "exponencial compleja", la cual se define de la siguiente manera

$$e^{\lambda} = e^{a}(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)),\quad z = a+bi \in \mathbb{C}$$

(aquí entendemos que $a, b \in \mathbb{R}$). Se puede comprobar que la exponencial compleja comparte propiedades con la exponencial real, como por ejemplo

$$e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

(ejercicio). Además,

$$\frac{d e^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{t} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \ \forall t \in \mathbb{R}$$

ya que si $\lambda = a+bi$ con $a,b \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, entonces

- $\frac{d e^{\lambda t}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{at}\left(\cos(bt)+i\,\mathrm{sen}(bt)\right)\right)$

$= a e^{at}\left(\cos(bt)+i\,\mathrm{sen}(bt)\right) + e^{at}\left(-b\,\mathrm{sen}(bt)+ib\cos(bt)\right)$

- $\lambda e^{\lambda t} = (a+bi)\left(e^{at}\left(\cos(bt)+i\,\mathrm{sen}(bt)\right)\right)$

$= a e^{at}\left(\cos(bt)+i\,\mathrm{sen}(bt)\right) + e^{at}\left(ib\cos(bt)-b\,\mathrm{sen}(bt)\right)$

Gracias a esta propiedad, razonando como en el caso anterior se ve que las funciones $\hat{x}_1, \hat{x}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ definidas por

$$\hat{x}_1(t) = v\, e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad \hat{x}_2(t) = \hat{v}\, e^{\bar{\lambda} t}$$

son soluciones a valores complejos del sistema, donde v es autovector de A asociado a λ y $\check{v}$ es autovector de A asociado a $\bar{\lambda}$. A continuación vamos a usar esto para determinar una base de soluciones a valores reales. Comenzamos por recordar que para cualquier número complejo z se tiene que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Además, observamos que

$$\bar{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ya que

- $\hat{x}_1(t) = \overline{v e^{\lambda t}}$

$v = u + iw$, $u, w \in \mathbb{R}^2$; $\lambda = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$= \overline{(u+iw)\left(e^{at}(\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt))\right)}$$

$$= e^{at}(u\cos(bt) - w\,\mathrm{sen}(bt)) - ie^{at}(w\cos(bt) + u\,\mathrm{sen}(bt))$$

- $\hat{x}_2(t) = \hat{v}\, e^{\bar{\lambda} t} = \bar{v}\, e^{\bar{\lambda} t}$

$\hat{v} = \bar{v} = u - iw$, $\bar{\lambda} = a - bi$

$$= (u - iw)\left(e^{at}(\cos(bt) - i\,\mathrm{sen}(bt))\right)$$

$$= e^{at}(u\cos(bt) - w\,\mathrm{sen}(bt)) - ie^{at}(w\cos(bt) + u\,\mathrm{sen}(bt))$$

A partir de lo anterior, y usando que $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ son soluciones, es fácil comprobar que las funciones $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$x_1(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_1(t)) \quad y \quad x_2(t) = \mathrm{Im}(\hat{x}_1(t))$$

son soluciones a valores reales del sistema. Además, x_1 y x_2 son li ya que lo son los vectores $x_1(0)$ y $x_2(0)$.

En efecto, si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son tales que

$c_1 x_1(0) + c_2 x_2(0) = 0$ entonces

$$0 = \underbrace{\frac{c_1}{2}\left(\hat{x}_1(0) + \bar{\hat{x}}_1(0)\right)}_{c_1 x_1(0)} + \underbrace{\frac{c_2}{2i}\left(\hat{x}_1(0) - \bar{\hat{x}}_1(0)\right)}_{c_2 x_2(0)}$$

$$= \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i}\right)\hat{x}_1(0) + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i}\right)\hat{x}_2(0)$$

$\bar{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2$

$$= \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i}\right) v + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i}\right)\bar{v}$$

Como v y $\bar{v}$ son autovectores correspondientes a autovalores distintos (λ y $\bar{\lambda}$), son li. Entonces lo anterior implica que $\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2i}=0$ y $\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2i}=0$, de donde se obtiene que $c_1=c_2=0$. Usando, además, que

$$x_1(t)=e^{at}(u\cos(bt)-w\,\mathrm{sen}(bt))$$
$$x_2(t)=e^{at}(w\cos(bt)+u\,\mathrm{sen}(bt))$$

obtenemos que el conjunto solución del sistema es

$$\{x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ x(t)=c_1e^{at}(u\cos(bt)-w\,\mathrm{sen}(bt)) + c_2e^{at}(w\cos(bt)+u\,\mathrm{sen}(bt)) : c_1, c_2\in\mathbb{R}^2\}.$$

.. Autovalor real doble: $\lambda\in\mathbb{R}$

En este caso puede ocurrir que λ tenga asociados dos autovectores li, o bien que λ tenga asociado un autovector que no es li con ningún otro autovector asociado a λ. Analicemos cada caso.

* λ tiene asociados dos autovectores li: v_1, v_2

En este caso sabemos que las funciones $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = v_2 e^{\lambda t}$$

forman una base de soluciones. Luego, el conjunto solución del sistema es

$$\left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda t} + c_2 v_2 e^{\lambda t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

* λ no tiene asociados dos autovectores li

Si v es un autovector asociado a λ, sabemos que la función $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$x_1(t) = v e^{\lambda t}$$

es solución del sistema. A continuación veremos que es posible hallar una solución $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$x_2(t) = e^{\lambda t}(ut + w)$$

donde $u, w \in \mathbb{R}^2$ son tales que x_1 y x_2 sean l.i.

Para que x_2 sea solución, se debe tener $x_2'(t) = A x_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es

$$\lambda e^{\lambda t}(ut + w) + e^{\lambda t} u = A e^{\lambda t}(ut + w), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente,

$$e^{\lambda t}(u + \lambda w) + t\lambda e^{\lambda t} u = e^{\lambda t} Aw + t e^{\lambda t} Au, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces buscamos u y w de modo que

$$\begin{cases} Au = \lambda u \\ Aw = u + \lambda w \end{cases}$$

Como λ es autovalor de A, vemos que cualquier autovector de A asociado a λ resuelve la primera ecuación. Elegimos

$$u = v$$

Nos queda por resolver la segunda ecuación, la cual, con la elección $u = v$, queda $Aw = v + \lambda w$. Notar que esta ecuación se escribe como $(A - \lambda I)w = v$ y que $A - \lambda I$ es singular ya que λ es autovalor de A.

Sea $\hat{v}$ un vector li con v. Como $B = \{\hat{v}, v\}$ es base de $\mathbb{R}^2$, existen

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$A\hat{v} = \alpha\hat{v} + \beta v.$$

Usando esto junto con que

$$Av = \lambda v$$

vemos que, con respecto a la base $\mathcal{B}$, A se expresa como

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}$$

Como $A_{\mathcal{B}}$ es una matriz triangular, sus autovalores son los elementos de su diagonal, α y λ. Como, además, A y $A_{\mathcal{B}}$ tienen los mismos autovalores y λ es autovalor doble de A, deducimos que $\alpha = \lambda$. Si $\beta = 0$ entonces quedaría $A\hat{v} = \lambda\hat{v}$ y tendríamos que $\hat{v}$ es un autovector de A asociado a λ, li con v. Como estamos suponiendo que esto no ocurre, concluimos que $\beta \neq 0$. Entonces consideramos

$$w = \frac{\hat{v}}{\beta}$$

y observamos que w resuelve la segunda ecuación ya que

$$(A - \lambda I) w = \frac{1}{\beta} A\hat{v} - \frac{\lambda}{\beta} \hat{v} = v.$$

$\hookrightarrow \alpha \hat{v} + \beta v = \lambda \hat{v} + \beta v$

Resumiendo, obtuvimos que la función $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$x_2(t) = e^{\lambda t} (t v + \hat{v}/\beta)$$

es solución del sistema, donde $\hat{v}$ es li con $\hat{v}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ es tal que

$A\hat{v} = \lambda\hat{v} + \beta v$. Esta solución resulta li con x_1 ya que los vectores $x_1(0) = v$ y $x_2(0) = \hat{v}$ son li. Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es

$$\left\{ x: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x(t) = v e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) + e^{\lambda t}\hat{v}/\beta : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esto completa el estudio del conjunto solución de $x'(t) = A x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

<u>OBSERVACIÓN</u> Algunas de las ideas expuestas para resolver sistemas de tamaño 2x2 se pueden aplicar para resolver sistemas de tamaño $n\times n$, pero el estudio general de este caso requiere

más trabajo y no lo desarrollaremos
en detalle.