EL TEOREMA DE GREEN
PARTE I

El Teorema Fundamental del Cálculo establece que

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a) \qquad (*)$$

donde $f \in C^1([a,b])$. El lado izquierdo de $(*)$ está dado por una integral sobre $[a,b]$ de una expresión que involucra a la derivada de f, mientras que el lado izquierdo es una expresión que involucra valores de f sobre el borde de $[a,b]$.

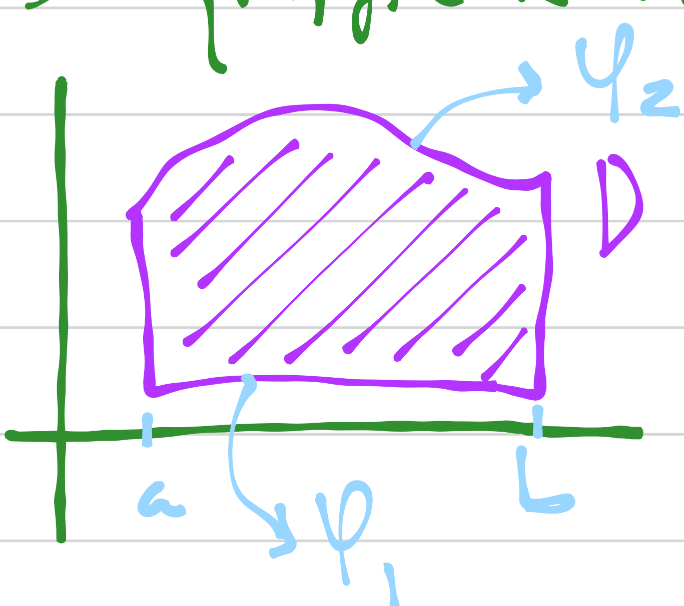
Ahora estudiaremos una identidad similar, la cual toma la forma

$$\int_D \begin{pmatrix}\text{combinación de} \\ \text{derivadas de la} \\ \text{función}\end{pmatrix} = \int_{\mathcal{C}} (\text{función})$$

donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\mathcal{C}$ es su borde.

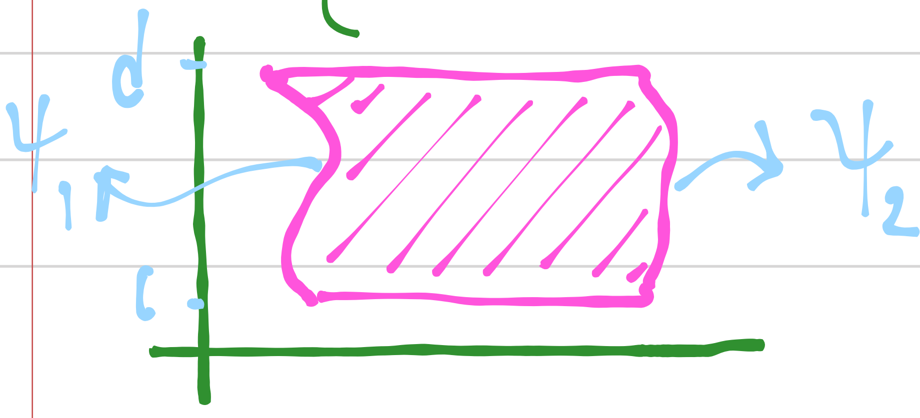
OBSERVACIÓN Recordar que $D \subset \mathbb{R}^2$ es una "región elemental" si D se puede expresar de alguna de las siguientes maneras:

a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$



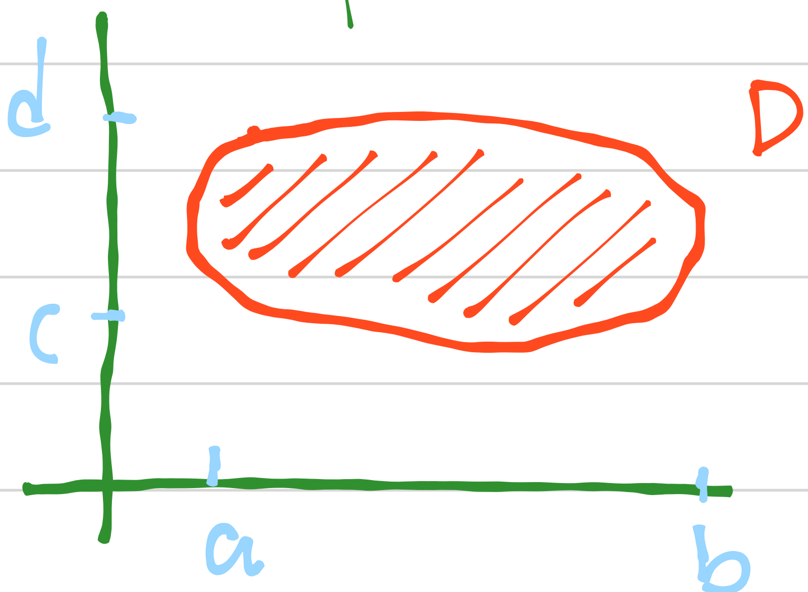
(TIPO I)

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$



(TIPO II)

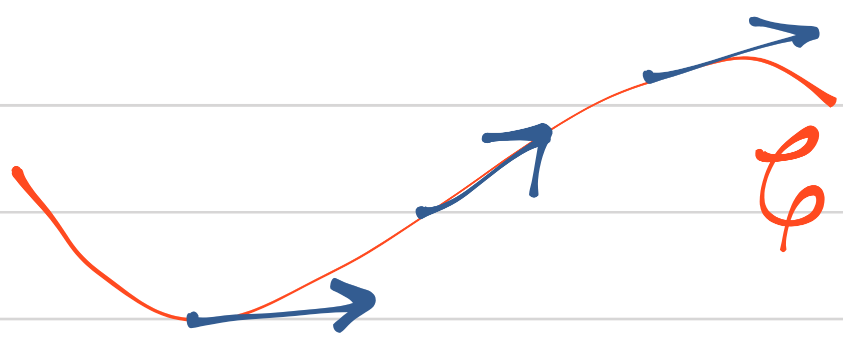
Si D es como en (a) entonces decimos que D es una región elemental de "tipo I". Si D es como en (b), decimos que D es una región elemental de "tipo II". Finalmente, si D se puede expresar tanto como una región de tipo I como de tipo II entonces decimos que D es una región elemental de "tipo III".



(TIPO III)

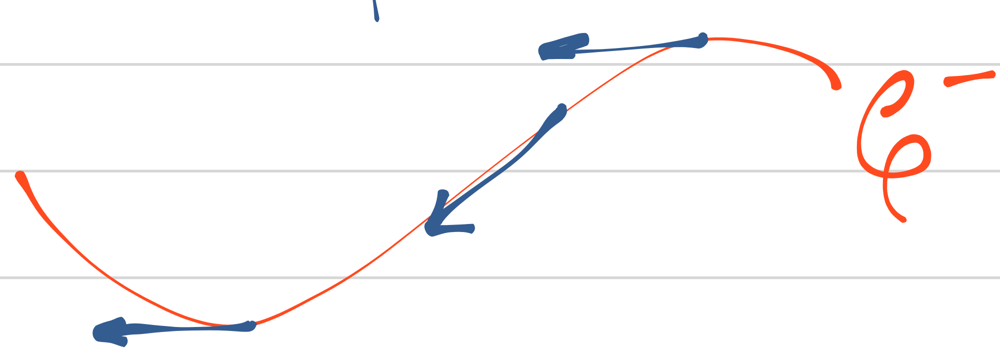
<u>NOTACIÓN</u> Dada una curva orientada $\mathcal{C}$, usaremos la notación $\mathcal{C}^-$ para

4/19 referirnos a la misma curva pero con la "orientación" "contraria". Si el campo τ que orienta $\mathcal{C}$ es de la forma

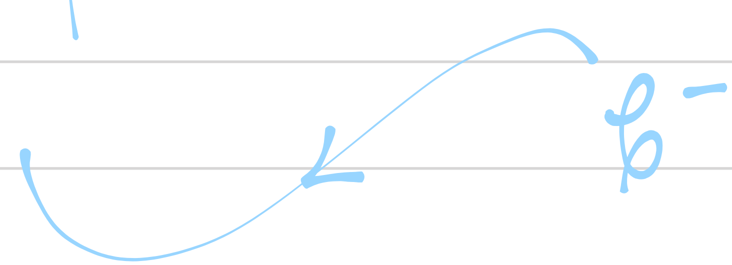


⇝ Lo abreviamos poniendo

entonces el campo τ que orienta $\mathcal{C}^-$ es de la forma



⇝ Lo abreviamos poniendo



OBSERVACIÓN Si $\mathcal{C}$ es una curva simple cerrada con orientación antihoraria, y $\mathcal{C}$ encierra una región elemental de tipo I, dada por

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

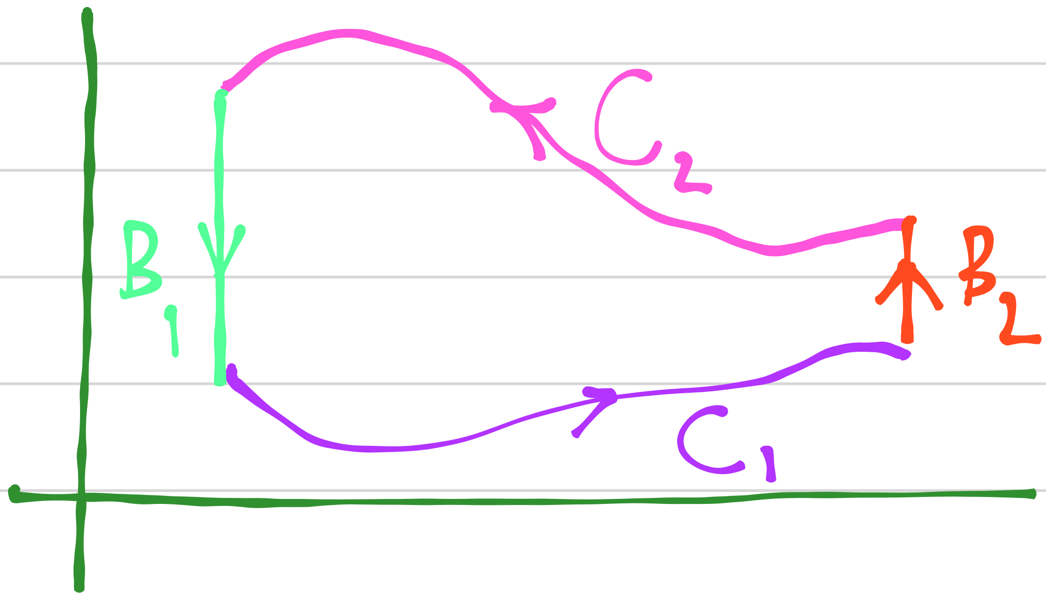
entonces $\mathcal{C}$ puede escribirse como unión de cuatro curvas orientadas:

$$\mathcal{C} = C_1 \cup C_2 \cup B_1 \cup B_2$$

dadas por

- $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ y = \varphi_1(x)\}$
- $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ y = \varphi_2(x)\}$
- $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
- $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$

orientadas como se muestra a continuación:



 Es importante tener presente que si $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ entonces B_1 no aparece en la descomposición. Lo mismo ocurre con B_2 si $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$.

Si $\mathcal{C}$ encierra una región elemental de tipo II y/o $\mathcal{C}$ está orientada en sentido horario, entonces $\mathcal{C}$ se puede escribir como unión de (a lo sumo) cuatro curvas orientadas, en forma análoga a lo hecho antes.

Ya estamos en condiciones de estudiar la identidad que habíamos mencionado al comienzo.

TEOREMA (Teorema de Green) Sea $\vec{F}=(P,Q)$ un campo vectorial en $C^1(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es abierto, y sea $\mathcal{C}$ una curva en el plano, simple, cerrada, orientada en sentido antihorario y diferenciable por trozos (admite una parametrización diferenciable por trozos), la cual encierra una región elemental de tipo III, digamos D, contenida en Ω. Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot ds = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy$$

DEMOSTRACIÓN Sean $\vec{F}$, Ω, $\mathcal{C}$ y D como en el enunciado. Para demostrar el teorema es suficiente demostrar las siguientes igualdades:

a) $$\int_{\mathcal{C}} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$

b) $$\int_{\mathcal{C}} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy.$$

A continuación sólo vamos a demostrar (a). La demostración de (b) es parecida a la de (a) y se deja como ejercicio.

Comenzamos por calcular la integral sobre D. Como D es una región de tipo III es, en particular, una región de tipo I. Entonces podemos escribir a D como

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Luego,

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \quad \text{Teorema de Fubini}$$

$$-\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$-\int_a^b \big(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\big)\,dx.$$

Obtuvimos:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx + \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx \qquad (*)$$

Ahora calculamos la integral sobre $\mathcal{C}$.

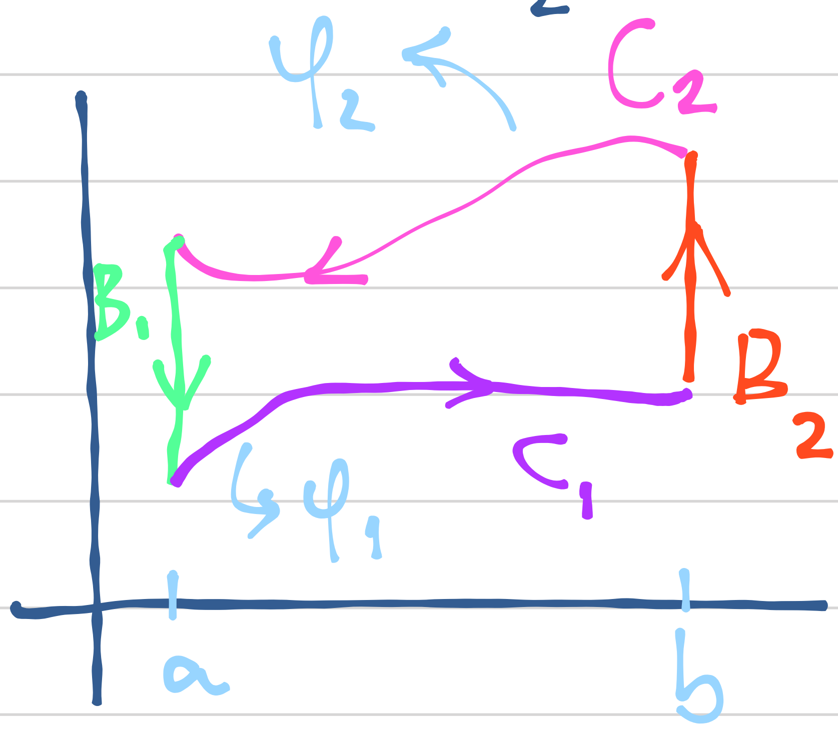
Para ello, descomponemos $\mathcal{C}$ como la unión de (a lo sumo) cuatro curvas orientadas,

$$\mathcal{C} = C_1 \cup C_2 \cup B_1 \cup B_2,$$

tal como hicimos en la observación previa al teorema. Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{B_1} P\,dx + \int_{B_2} P\,dx.$$

Ahora calculamos cada una de las integrales que aparecen en el lado derecho.



$*$ Cálculo de $\int_{C_1} P\,dx$:

Comenzamos por notar que C_1 es una curva simple, abierta y suave, orientada por la parametrización regular

$\sigma : [a,b] \to C_1$ dada por:

$\sigma(t) = (t, \varphi_1(t))$.

Entonces,

$$\int_{C_1} P\,dx = \int_{C_1} (P,0)\cdot ds$$

$$= \int_a^b \big(P(\underbrace{\sigma(t)}_{(t,\varphi_1(t))}), 0\big) \cdot \underbrace{\sigma'(t)}_{(1,\varphi_1'(t))}\,dt$$

$$= \int_a^b P(t, \varphi_1(t))\,dt$$

Obtuvimos:

$$\int_{C_1} P\,dx = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\,dt.$$

* Cálculo de $\int_{C_2} P\,dx$:

Comenzamos por observar que C_2^- es

una curva simple, abierta y suave, orientada por la parametrización regular $\sigma : [a,b] \to C_2$ dada por $\sigma(t) = (t, \varphi_2(t))$. Entonces,

$$\int_{C_2} P\,dx = \int_{C_2} (P,0)\cdot ds = -\int_{C_2^-} (P,0)\cdot ds$$

$$= -\int_a^b \Big(P(\underbrace{\sigma(t)}_{(t,\varphi_2(t))}), 0\Big)\cdot \underbrace{\sigma'(t)}_{(1,\varphi_2'(t))}\,dt$$

$$= -\int_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt$$

Obtuvimos

$$\int_{C_2} P\,dx = -\int_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt.$$

 * Cálculo de $\int_{B_2} P\,dx$.

Primero observamos que B_2 es una curva simple, cerrada y suave, orientada por la parametrización $\sigma : [\varphi_1(a), \varphi_1(b)] \to B_2$, dada por $\sigma(t) = (b, t)$. Luego,

$$\int_{B_2} P\,dx = \int_{B_2} (P, 0) \cdot ds$$

$$= \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_1(b)} (P(\underbrace{\sigma(t)}_{(b,t)}), 0) \cdot \overbrace{\sigma'(t)}^{(0,1)}\,dt = 0$$

Obtuvimos

$$\int_{B_2} P\,dx = 0.$$

* Cálculo de $\int_{B_1} P\,dx$:

Se deja como ejercicio verificar que

$$\int_{B_1} P\,dx = 0.$$

A partir de los cuatro cálculos anteriores, resulta que

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx = \int_a^b P(t,\varphi_1)\,dt - \int_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt \quad (**)$$

De (*) y (**) se tiene (a). $\blacksquare$

<u>EJEMPLO</u> Vamos a calcular

$$\int_{\mathcal{C}} y e^{-x}\,dx + \left(\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right)dy,$$

 donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia de ecuación

$$(x-2)^2 + y^2 = 1,$$

orientada en sentido antihorario.

Anotamos

$$P(x,y) = y e^{-x}, \quad Q(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}$$

y observamos que $\vec{F} = (P,Q) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{C}$ es simple, cerrada, diferenciable y encierra una región elemental D de tipo $\underline{III}$ (un círculo). Estamos en condiciones de aplicar el teorema de Green:

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy.$$

Ahora calculamos la integral de la derecha:

$$\iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}_{x+e^{-x}} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}_{e^{-x}} \Big)\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \left(x + \cancel{e^{-x}} - \cancel{e^{-x}} \right) dx\, dy$$

$$\overset{(*)}{=} \iint_D x \, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + r\cos\theta)\, d\theta\, dr$$

(*) Introducimos coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$0 < r < 1$

$0 < \theta < 2\pi$

$$= 4\pi$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{C}} y e^{-x} dx + \left(\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\right) dy = 4\pi.$$

OBSERVACIÓN En el ejemplo anterior, si no se recurre al teorema de Green, hay que calcular la integral sobre $\mathcal{C}$ por definición: Primero observamos que $\mathcal{C}$ se puede escribir como la unión de dos curvas simples, abiertas y suaves, orientadas con el sentido que heredan de la orientación de $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} = C_1 \cup C_2$$

donde C_1 está dada por $(x-2)^2+y^2=1$ con $y \geq 0$ y C_2 está dada por $(x-2)^2+y^2=1$ con $y \leq 0$. Luego,

$$\int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy.$$

Para calcular la primera integral en

 el lado derecho, parametrizamos C_1 por $\sigma : [0, \pi] \to C_1$ dada por:

$$\sigma(\theta) = (2 + \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)).$$

Luego,

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_1} (P, Q) \cdot ds$$

$$= \int_0^{\pi} \left(P(\sigma(t)), Q(\sigma(t))\right) \cdot \sigma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-\operatorname{sen}^2(\theta) e^{-(2+\cos(\theta))} + \left(\frac{1}{2}(2+\cos\theta)^2 - e^{-(2+\cos(\theta))} \right) \cos\theta \right) d\theta .$$

Para calcular la integral sobre C_2 hay que seguir ideas parecidas. En este ejemplo resulta que el cálculo de la integral sobre $\mathcal{C}$ por definición es más complicado que el cálculo vía el teorema de Green.