Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 13, 2do. cuatrimestre 2020

Curvas

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva. Una parametrización regular de $\mathcal{C}$ es

$$\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$$

con σ inyectiva, de clase C^1, tal que

$$\sigma'(t_0) := \left(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\right) \neq (0, 0, 0) \text{ para todo } t_0 \in [a, b].$$

La recta tangente en $P_0 = \sigma(t_0)$ es

$$L_{P_0} \equiv \lambda\sigma'(t_0) + \sigma(t_0).$$

La longitud de curva de $\mathcal{C}$ es

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt.$$

No depende de la parametrización.

Parámetro de longitud de arco

Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta, suave y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular. La longitud entre $P_0 = \sigma(a)$ y $P = \sigma(t) \in \mathcal{C}$ es

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma'(l)\| dl.$$

Si escribimos $s(t) = \int_a^t \|\sigma'(l)\| dl$, resulta $s(t) \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$ y se denomina parámetro de longitud de arco.

Así, podemos considerar la reparametrización de $\mathcal{C}$ dada por

$$\tilde{\sigma} : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}, \quad \tilde{\sigma}(s) = \sigma(t(s)).$$

$\mathcal{C}$ se dice parametrizada por longitud de arco. Notar que

$$\|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1 \ \text{ pues } \ \tilde{\sigma}'(s) = \sigma'(t(s))t'(s) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}.$$

Integral de longitud de arco

Si $\rho : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ es una densidad de masa (continua), entonces

$$\int_a^b \rho(\sigma(t)) \, \|\sigma'(t)\| \, dt$$

nos da entonces la masa total del alambre.

Si $\hat{\sigma} : [c, d] \to \mathcal{C}$, $\hat{\sigma}(s) = \sigma(h(s))$ es una reparametrización de σ,

$$\int_a^b \rho(\sigma(t))\|\sigma'(t))\|dt = \int_c^d \rho(\hat{\sigma}(s))\|\hat{\sigma}'(s))\|ds.$$

LA MASA NO DEPENDE DE LA PARAMETRIZACIÓN.

Integrales curvilíneas. Trabajo

El vector tangente $\tau(P)$ en $P = \sigma(t) \in \mathcal{C}$ es $\tau(P) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$. En particular, $\tau : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ es una función vectorial continua.

Si σ preserva la orientación de $\mathcal{C}$, dada una fuerza $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ el trabajo está dado por

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt.$$

Si $\hat{\sigma} : [c, d] \to \mathcal{C}$, $\hat{\sigma}(s) = \sigma(h(s))$ es una reparametrización de σ,

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)) \, dt = \pm \int_c^d \boldsymbol{F}(\hat{\sigma}(s)) \cdot \hat{\sigma}'(s)) \, ds,$$

y son iguales $\Leftrightarrow h'(s) > 0$, y difieren en el signo $\Leftrightarrow h'(s) < 0$.

EL TRABAJO DEPENDE DE LA ORIENTACIÓN (en el signo).

Integrales curvilíneas. Campos gradientes

Si $\boldsymbol{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, y $\mathcal{C}$ viene parametrizada por $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$, entonces

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

Superficies

Una superficie suave $S \subset \mathbb{R}^3$ es una dada por una parametrización regular, es decir, por

$$T : D \subset \mathbb{R}^2 \to S, \quad T(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

inyectiva, de clase C^1 tal que los vectores derivados $T_u(u_0, v_0)$, $T_v(u_0, v_0)$ son linealmente independientes.

El plano Π_0 por $P_0 = T(u_0, v_0)$ que determinan $T_u(u_0, v_0)$, $T_v(u_0, v_0)$ es tangente a S en P_0. Si

$$\nu_0 = (a_0, b_0, c_0) = \frac{T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)}{\| T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \|},$$

la ecuación del plano tangente es (aquí $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$):

$$\Pi_0 : \; a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + c_0(z - z_0) = 0.$$

Superficies – Area

Definición: Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie dada por una parametrización regular $T : D \to S$. Entonces

$$Area(S) := \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

NO DEPENDE DE LA PARAMETRIZACIÓN.

Sea $f : S \to \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$\iint_S f \, dS := \iint_D f(T(u,v)) \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

NO DEPENDE DE LA PARAMETRIZACIÓN.

Superficies – Flujo

Definición: Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada por el versor normal $\nu(P)$. Sea $\boldsymbol{F} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Llamamos flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S a la integral

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{S} := \int_S \boldsymbol{F} \cdot \nu \, dS.$$

DEPENDE DE LA PARAMETRIZACIÓN EN UN SIGNO (SEGÚN PRESERVE O NO LA ORIENTACIÓN).

Si $T : D \to S$ es una parametrización regular que preserva la orientación de S, entonces

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(T(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) \, du \, dv.$$

Si T invierte la orientación de S, entonces

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_D \boldsymbol{F}(T(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) \, du \, dv$$

RESUMEN

Integral	**Cálculo**	**Reparametriz.**
$\int_{\mathcal{C}} \rho \, dl$	$\int_a^b \rho(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt$	no dep. de σ
$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot dl$	$\pm \int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt$	$\pm$ dep. de σ
$\iint_S f \, dS$	$\iint_D f(T(u,v))\|T_u \times T_v\|dudv$	no dep. de T
$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot dS$	$\pm \iint_D \boldsymbol{F}(T(u,v)) \cdot (T_u \times T_v)dudv$	$\pm$ dep. de T

Teoremas integrales

Teorema de Green: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de tipo III y C una curva cerrada, simple, que recorre su frontera. Si $P, Q : D \to \mathbb{R}$ son de campos escalares de clase C^1, entonces

$$\int_{C^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy\,.$$

Teoremas integrales

Teorema de Stokes: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie definida por una parametrización inyectiva $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2 tal que vale el Teorema de Green en D. Sea $\partial S^+ = \Phi(\partial D^+)$ la frontera orientada de S, donde ∂D^+ es la frontera de D recorrida de forma simple, orientada positivamente. Si $\boldsymbol{F} : S \to \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1, entonces

$$\iint_S \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S^+} \boldsymbol{F} \cdot ds.$$

Teoremas integrales

Teorema de los campos conservativos: Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ excepto tal vez en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para cualquier curva cerrada simple y suave a trozos C,

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\sigma = 0.$$

2. Para cualquier par de curvas simples, suaves a trozos C_1, C_2, con los mismos extremos y la misma orientación,

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot \, d\sigma = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot \, d\sigma.$$

3. Existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$.
4. $\boldsymbol{F}$ tiene rotor cero, $\mathrm{rot}(\boldsymbol{F}) = \nabla \times \boldsymbol{F} = (0, 0, 0)$.

Teoremas integrales

Teorema de Gauss: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ una región de tipo VI. Sea $S = \partial\Omega$ la superficie cerrada, regular a trozos, orientada con la normal exterior η. Si $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase C^1, entonces

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \eta \, dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, dV = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{F}) \, dV.$$