Ejercicio tipo parcial,
de teorema de Green y otras yerbas

Fiorella Beck

October 10, 2020

- **Enunciado:**

3)Calcular la circulación del campo F a lo largo de la curva C recorrida desde el (0,-1) al (0,0), donde
$F = \left(5y\ -3x^2y.sen\left(x^3y\right), -x^3sen\left(x^3y\right) - 2ye^{-y2} + x\right)$
y C es la curva dada en polares por $r(t) = 1 - cos(t)$*con* $t \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

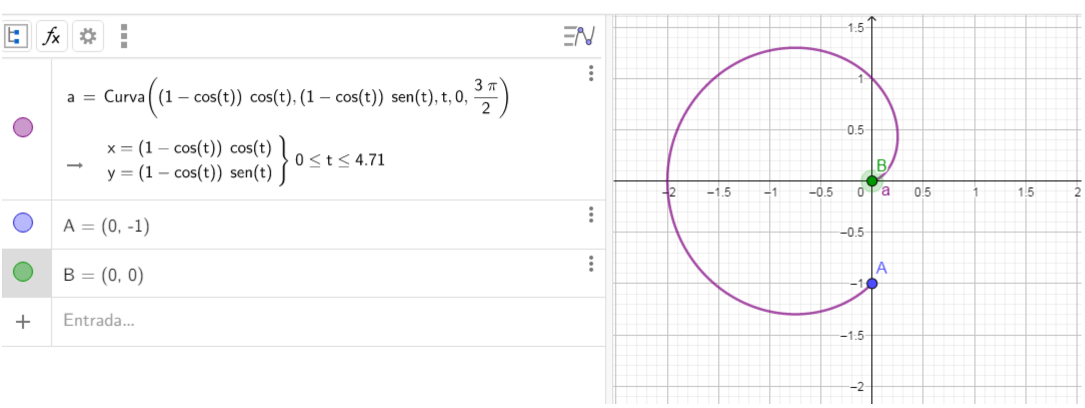
- **Resolución**

Calcule la circulación de F a lo largo de una curva es lo mismo que decir, calcule $\displaystyle\int_C FdS$ (*)

(**)*A lo último, hay una explicación de curva vs parametrización, ¿cuál es cuál? "C está dada en polares" significa que C va a ser la imagen de $(rcost), rsen(t))$. Además, nos dijeron que $r(t) = 1 - cos(t)$, así que juntando las dos cosas, -poniendo $1 - cos(t)$ donde iba r- queda que C es la imagen de:

$\sigma(t) = ((1 - cos(t))cos(t), (1 - cos(t))sen(t))$ con $t \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

Miremos qué es esto. Con Geogrebra lo puedo graficar, me queda así:



Curva C

Importante: en el enunciado me dijeron que la curva C -que es la imagen morada- tenía que ser recorrida desde el (0,-1) al (0,0), así que hay que recorrerla desde el punto A hasta el B. Eso gira igual que las agujas de un reloj, así que... te piden calcularla de forma HORARIA (negativa).

Pero... quiero usar la $\sigma(t)$ que escribí (y a la que estamos más acostumbrados)... que tiene sentido antihorario (positivo).

$\int_{C^-} FdS = -\int_0^{\frac{3\pi}{2}} F(\sigma(t)).\sigma'(t)dt$

(integral de una orientación = - integral de orientación contraria)

Bueeeeeno... a hacer cuentas.

Ya dije quién era $\sigma(t)$, así que calculo:

$\sigma'(t) = (\ sen(t)cos(t) + (1 - cos(t))(-sen(t))\ , sen(t)sen(t)\ + (1 - cos(t))cos(t)\ ) =$

$\sigma'(t) = \big(sen(t)cos(t) - sen(t) + sen(t)cos(t)\ ,\ sen^2(t)\ +\ cos(t)\ -\ cos^2(t)\ \big) =$

$\sigma'(t) = (sen(t)(2cos(t)\ - 1)\ ,\ cos(t)\ - cos(2t)\ )$

donde en la última igualdad usé la identidad trigonométrica:

$cos(2t) = cos^2(t) - sen^2(t)$, lo que probablemente no era necesario, pero lo puse porque quería escribir menos.

Ahora... si me pongo a escribir $F(\sigma(t))$... pues me quedaría algo horrible. Ni siquiera quiero tratar de escribirlo aquí. Argh. ¿Qué puedo hacer?

- **Campos gradientes**

Me gustaría que F fuera menos horrible. ¿Qué herramienta hay para que los campos me queden más fáciles?

Ojalá F tenga algún campo gradiente.

Para hallar campos gradientes, lo que uno hace es mirar fijo en busca de si hay cosas que parecen ser derivadas.

Llamo $F = (A, B)$, con $A = 5y\ -3x^2.ysen\left(x^3y\right)$, B=$-x^3sen\left(x^3y\right) - 2ye^{-y^2}$+$x$

Si F fuera un campo gradiente, entonces $F = \nabla f = (fx, fy)$ con $f : \mathbb{RR}^2$. Entonces, $A = fx$

Así que integro A con respecto de x:

$\int Adx = 5xy\ +\ cos\left(x^3y\right) +\ \alpha(y)$

donde $\alpha(y)$ =alguna función que solamente dependa de y

Similarmente con B:

$\int Bdy = cos\left(x^3y\right) +\ e^{-y^2} + xy + \beta(x)$

donde $\beta(x)$ =alguna función que solamente dependa de x

Miro ambos resultados.

$cos\left(x^3y\right)$ está en los dos, así que va a ser parte de mi campo gradiente.

e^{-y^2} solamente depende de y, así que propongo $\alpha(y)$ =e^{-y^2}

$5xy$, xy, no están en los dos lados (aunque se parezcan), y dependen tanto de x como de y, así que no van a ser parte de mi campo gradiente.

Propongo $F = G + H$

con $G = \left(-3x^2.ysen\left(x^3y\right) - x^3sen\left(x^3y\right) - 2ye^{-y}\right) = \nabla g$ con $g(x, y) = cos\left(x^3y\right) + e^{-y^2}$

y H =$(5y\ , x)$

$$\int_{C^-} FdS = \int_{C^-} (G+H)dS = \int_{C^-} GdS + \int_{C^-} HdS = \int_{C^-} (\nabla g)dS + \int_{C^-} HdS$$

Y hay un teorema que me dice que, si a C^- la puedo parametrizar por $\sigma(t)$ con $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_{C^-} GdS = \int_{C^-} (\nabla g)dS = g(\sigma(b)) - g(\sigma(a))$$

Entonces,

$$\int_{C^-} GdS = -\left[g\left(\sigma\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) - g(\sigma(0))\right] = -\left[g\left(\sigma\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) - g(\sigma(0))\right]$$

Recuerdo:

$$\sigma(t) = ((1-cos(t))cos(t), (1-cos(t))sen(t)) = \left(cos(t) - cos^2(t), sen(t) - cos(t)sen(t)\right)$$

$$g(x,y) = cos\left(x^3 y\right) + e^{-y^2}$$

$$g(\sigma(t)) = cos\left(\left(cos(t) - cos^2(t)\right)^3 (sen(t) - cos(t)sen(t))\right) + e^{-(sen(t)-cos(t)sen(t))^2}$$

Esto se ve ultra horrible, pero como $cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \ = sen(0)$, muchas cosas quedarán más bonitas cuando haga la cuenta.

$$g\left(\sigma\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \ cos((0) - 0)^3(-1-0)(-1))) + e^{-(-1)-0))^2}$$

$$= cos(0) + e^{-1} = 1 + \frac{1}{e}$$

$$g(\sigma(0)) = cos\left((1-1)^3(0-1.0)\right) + e^{-(0-1.0)^2} = cos(0) + e^0 = 1 + 1 = 2$$

Así que:

$$\int_{C^-} GdS = -\left[g\left(\sigma\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) - g(\sigma(0))\right] = -\left[1 + \frac{1}{e} - 2\right] = -\frac{1}{e} + 1$$

Ahora voy con la parte que no es campo gradiente, necesito calcular

$\int_{C^-} HdS$ donde $H = (5y\ , x)$

Recuerdo que mi parametrización era:

$$\sigma(t) = \left(cos(t) - cos^2(t), sen(t) - cos(t)sen(t)\right)$$

$$\sigma'(t) = (sen(t)(2cos(t)\ -1)\ ,\ cos(t)\ - cos(2t)\ )$$

$$\int_{C^-} HdS = -\int_0^{\frac{3\pi}{2}} H(\sigma(t)).\sigma'(t)dt =$$

$$= -\int_0^{\frac{3\pi}{2}} < \left(5(sen(t) - cos(t)sen(t)), \left(cos(t) - cos^2(t), sen(t)\right), \sigma'(t)\right) > dt$$

Esto me queda bastante horrible. ¿Qué puedo hacer?

Ah, este es un ejercicio tipo Green, porque me dijeron que integre una curva complicada. Y hasta ahora no usé Green. Quiero aplicar Green. Para usar Green, necesito que se cumplan las hipótesis del teorema de Green. Que son:

- **Verificando hipótesis**
- $H = (P,Q) \in C^1$: F va de $\mathrm{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P = 5y$, $H = x$, tanto P como Q son C^∞ , así que esta condición se cumple.
- H tiene que estar definida en un abierto que contenga dónde integraré: H está definida en todo $\mathbb{R}^2$, así que eso se cumple también.

- C tiene que ser una curva CERRADA... ahí la cosa pifia. C no es cerrada. Así que no se puede usar el Teorema.

La integral de línea era fea y Green no se podía aplicar. El ejercicio no se puede resolver. Fin.
(Sólo bromeaba)

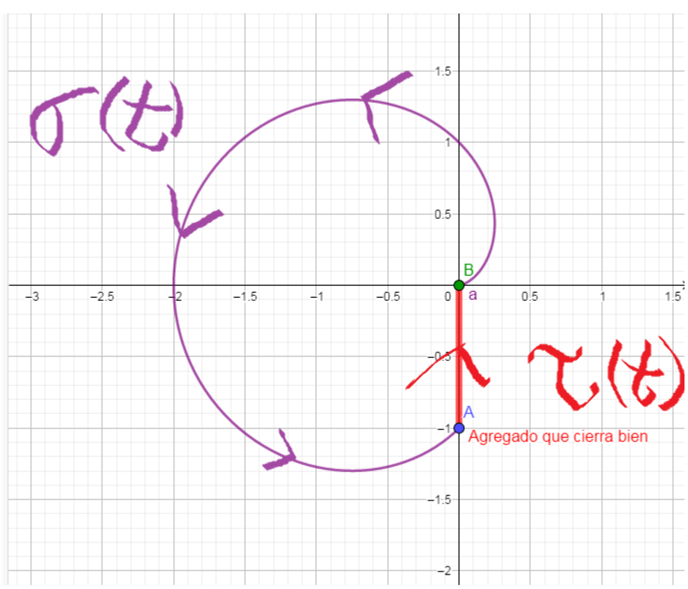
Si no es cerrada, pues le agrego algo para que sí sea cerrada.

- **Verificando hipótesis**
- $H = (P, Q) \in C^1$: F va de $\mathbb{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $P = 5y$, $H = x$, tanto P como Q son C^∞ , así que esta condición se cumple.
- H tiene que estar definida en un abierto que contenga dónde integraré: H está definida en todo $\mathbb{R}^2$, así que eso se cumple también.

- C tiene que ser una curva CERRADA... ahí la cosa pifia. C no es cerrada. Así que no se puede usar el Teorema.

La integral de línea era fea y Green no se podía aplicar. El ejercicio no se puede resolver. Fin.
(Sólo bromeaba)

Si no es cerrada, pues le agrego algo para que sí sea cerrada.



Curva CUT.

Ahora sí me queda cerrada.

Si le agrego la línea roja, pues me queda una curva cerrada. La línea roja la puedo parametrizar de esta forma:

$\tau(t) = (0,t)$ con $t \in [-1,0]$. Tomarse un momento para ver que si junto $\sigma \cup \tau$ me queda una curva cerrada, que "gira" en sentido antihorario (positivo).

Las dos parametrizaciones se pegan bien:

$\sigma(0) = \tau(0) = (0,0)$ y $\sigma\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \tau(-1) = (0,-1)$

Me defino $\upsilon(t) = \sigma(t) \cup \tau(t) = \begin{cases} \tau(t) & si\ t \in [-1,0] \\ \sigma(t) & si\ t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$

$\upsilon(t)$ es cerrada.

$\upsilon(t) \in C^\infty$ a trozos porque $\tau(t)$ es C^∞ en $(-1,0)$ y $\sigma(t)$ es C^∞ en $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Entonces $\upsilon(t)$ es diferenciable a trozos.

$\upsilon'(t) = \Big\{(0,1)\ si\ t \in [-1,0]$

y $\quad \sigma'(t) = (sen(t)(2cos(t)\ -1)\ ,\ cos(t)\ - cos(2t)\ )\ \ si\ t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

Obs: las derivadas $\tau'(t)$ y $\sigma'(t)$ no se van a pegar bien en los bordes... pero no importa, lo que importa es que cada una de ellas sea regular por sí sola en su interior... así $\upsilon(t)$ es simple y diferenciable a trozos.

$(0,1) \neq (0,0)$

¿$\sigma'(t) = (0,0)$?

$\sigma'(t) = (sen(t)(2cos(t)\ -1)\ ,\ cos(t)\ - cos(2t)\ )$

$sen(t)(2cos(t)\ -1) = 0$ si:

$sen(t) = 0\ \ o\ 2cos(t) - 1 = 0$

$t = 0\ o\ \pi \quad o\ \ 2cos(t) = 1$

$t = 0\ o\ \pi \quad o \quad cos(t) = \ \frac{1}{2}$

$t = 0\ o\ \pi \quad o\ \ \frac{\pi}{3}$

En $t = 0$, va a darme $\sigma'(0) = (0,0)$, pero como estoy en un borde, no importa (quiero ande bien en los interiores).

En $t = \pi$, $\sigma'(\pi) = (0, cos(\pi) - cos(2\pi)) = (0, -1-1) = (0,-2) \neq (0,0)$

En $t = \dfrac{\pi}{3}$, $\sigma'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \left(0, cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{-1}{2}\right) = (0,1) \neq (0,0)$

Así que, $\upsilon'(t) \neq (0,0)$ salvo en $t = 0$ y $t = -1$, con lo cual $\upsilon(t)$ es cerrada, simple y diferenciable a trozos. También, encierra a una región D de tipo III.

- **Aplico Teorema:**

Entonces, puedo aplicar Green en la última igualdad, de esta forma:

$$\int_{-1}^{0} H(\tau(t)).\tau'(t)dt\ + \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} H(\sigma(t)).\sigma'(t)dt\ =$$
$$\textstyle\int_{\partial D} H(\upsilon(t)).\upsilon'(t)dt = \ \iint_D (Qx - Py)dxdy$$

Entonces

$$-\int_{C^-} HdS = \int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} H(\sigma(t)).\sigma'(t)dt\ = \iint_D (Qx-Py)dxdy - \int_{-1}^{0} H(\tau(t)).\tau'(t)dt$$

Lo que es equivalente a

$$\int_{C^-} HdS = -\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} H(\sigma(t)).\sigma'(t)dt\ = - \iint_D (Qx-Py)dxdy + \int_{-1}^{0} H(\tau(t)).\tau'(t)dt$$

- **Resuelvo la integral sobre D**

Primero tengo que escribir qué es D, además de "lo que está adentro de $v(t)$"
$D = \left\{ (rcos(t), rsen(t)) \text{ con } \ 0 \leq r \leq 1 - cos(t), 0 \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2} \right\}$
$P = 5y$ entonces $Py = 5$
Q=x entonces $Qx = 1$
$\iint_D (Qx - Py)dxdy = \iint_D (1-5)dxdy = \iint_D -4dxdy \ =$
$-4 \iint_D dxdy = -4.\text{área}(D)$
uso cambio de variables, uso polares, con jacobiano=r

$$\text{área(D)=} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{1-cos(t)} rdrdt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{1-cos(t)} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (1-cos(t))^2 dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} 1 - 2cos(t) + cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\left[t - 2sen(t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}sen(t)cos(t)\right]\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3\pi}{2} + 2 + \frac{3\pi}{4}\right] = \frac{3\pi}{8} + 1$$

Entonces
$\iint_D (Qx - Py)dxdy = -4.\text{área}(D) = -4\left(\frac{3\pi}{8} + 1\right) = \frac{-3\pi}{2} - 4$

Cosa que NO me convendría haber hecho: haber dicho, ajá, tengo una fórmula para áreas:

Área(D)=$\int_{\partial D} -ydx + xdy$

Eso sería volver a tener que hacer una integral de línea sobre C, que era lo que no quería hacer.

- **Resuelvo la integral de línea chiquita**

$\int_{-1}^{0} H(\tau(t)).\tau'(t)dt$
H =$(5y \ , x)$ y $\tau(t) = (0, t)$ con $t \in [-1, 0]$
$\int_{-1}^{0} H(\tau(t)).\tau'(t)dt = \int_{-1}^{0} < (5t, 0), (0, 1) > dt = \int_{-1}^{0} (5t.0 \ + \ 0.1)dt =$
$= \int_{-1}^{0} 0dt = 0$
¡Yay! ¡Al fin una fácil!

- **Recapitulo y reescribo**

(porque vaya a saber qué era lo que quería averiguar en primer lugar)
$\int_{C^-} FdS = \int_{C^-} (\nabla g)dS + \int_{C^-} HdS =$
$= -\dfrac{1}{e} - \dfrac{5}{2} \ + \ - \iint_D (Qx - Py)dxdy \ + \int_{-1}^{0} H(\tau(t)).\tau'(t)dt =$
$= -\frac{1}{e} + 1 - \left(\frac{-3\pi}{2} - 4\right) + 0 = -\frac{1}{e} + 1 + \frac{3\pi}{2} + 4 + 0 = -\frac{1}{e} + \frac{3\pi}{2} + 5$

- **Respuesta**

La circulación del campo F a lo largo de la curva C recorrida como lo pedía el enunciado, es igual a $-\frac{1}{e}+\frac{3\pi}{2}+5$.

- **Comentario**

Circulación (*)

¿Qué es la circulación? Si tengo un campo F, F suele ser el campo de velocidades de un fluido, y la circulación $\left(\int_C F.dS\right)$es la cantidad neta de giro del fluido a lo largo de una curva C (recorrida de forma antihoraria).

-Ejemplo: Tengo una solución, quiero saber qué sustancias hay en ella. Pongo la solución en una máquina HPLC (cromatografía líquida a alta presión). El líquido va a circular por una manguera muy finita. Los componentes de la solución que sean más livianos, se van a "adelantar" a los demás, al "salir" por "el otro extremo" de la manguera, produciendo una señal (un pico en el gráfico). Si las señales están muy juntas, entonces, quiero regular el flujo para que fluya menos cantidad de líquido por unidad de superficie, y si estuvieran muy separadas, voy a querer que fluya más cantidad de líquido por unidad de superficie.

-Otro ejemplo: si C es una curva cerrada, la Ley de Ampère me dice que $\int_C H.dS$=corriente neta que pasa a través de cualquier superficie limitada por C, donde H es un campo magnético.

Curva vs parametrización (**)

Una parametrización es una función continua $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ con $a \leq t \leq b$. Por ejemplo, $\sigma(t) = (2cos(t), 2sen(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. La imagen de σ es una curva C. Entonces, si me dan una parametrización, yo adquiero también una curva.

Ahora, yo tengo una curva C.

Para meditar: "Una curva es un conjunto que tiene la propiedad de que una sucesión de puntos de la curva, si converge, converge dentro de la curva, y que se puede particionar en cachitos que tienen biyección con intervalos de R”

C podría estar dada por una ecuación, por ejemplo, podría ser:

$\{(x, y):\ x^2 + y^2 = 4\}$, podría decir, *"es la circunsferencia de radio 2 centrada en el (0,0)"*, podría estar dada por una parametrización $\sigma(t)$ como la de recién. O podría estar dada por otra parametrización , por ejemplo, $\tau(t) = (2cos(5t), 2sen(5t)), 0 \leq t \leq 50\pi$. La imagen de τ también es la curva C. Así que una curva tiene infinitas parametrizaciones, pero cada parametrización se refiere a una única curva. Y en un ejercicio me puede aparecer, tanto una curva dada por una definición, como conjunto, como parametrización, o de otra manera.

La curva C no tiene una orientación, es solamente un conjunto de puntos. Yo puedo recorrerla de forma horaria o antihoraria. En una parametrización, ya está definida su orientación. Entonces, si tengo una curva, yo puedo ponerle una parametrización que gire de forma horaria, entonces quedaría orientada negativamente. A veces, eso se escribe: C_- (la curva C, recorrida de forma horaria) (respectivamente, si la estoy mirando con una parametrización positiva, usaré C_+ =la curva C recorrida de forma antihoraria).