Variación de las constantes

Es un método que sirve para hallar una solución particular de:

(I) Un sistema lineal de 'n' ecuaciones de orden '1' no homogéneo

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + B(t)$$

o bien

(II) Una ecuación lineal de orden 'n' no homogénea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Conociendo una base de soluciones del problema homogéneo

(I) $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$, digamos $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$

(II) $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$, digamos $\{x_1, \dots, x_n\}$

OBSERVACIÓN La solución general del homogéneo $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X}_h(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{X}_n(t) \qquad c_i \in \mathbb{R} \text{ constantes}$$

o bien la solución general de la ecuación homogénea

$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$$

deben encontrarse primero por algún método conocido antes de poder aplicar el método.

¡¡El método siempre se puede aplicar!!

Ejemplo 1 Resuelva el sistema de 2 ecuaciones de orden 1 dado por

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + e^t \\ x_2' = -2x_1 + x_2 + \dfrac{e^t}{\cos(2t)} \end{cases}$$

Notemos que podemos escribirlo como $\bar{X}' = A\bar{X} + B(t)$ siendo

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos(2t)} \end{pmatrix}$$

- Las soluciones del sistema homogéneo asociado

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

al ser de coeficientes constantes las hallamos con el método del polinomio característico.

Tenemos:

$\lambda_1 = 1+2i$ autovalor con autovector asociado $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ " " " " $v_2 = \bar{v}_1$

Como queremos soluciones reales, nos quedamos con la parte real y la parte imaginaria, obteniendo

$$\bar{X}_h(t) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^t\cos 2t \\ -e^t \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}}_{\bar{X}_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen} 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}}_{\bar{X}_2(t)} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Es sencillo verificar que $\bar{X}_1' = A\bar{X}_1$ y que $\bar{X}_2' = A\bar{X}_2$

• El método de variación de las constantes nos proporciona una solución particular de $\Phi' = A\Phi + B(t)$ de la forma

$$\Phi_p(t) = C_1(t)\Phi_1(t) + C_2(t)\Phi_2(t)$$

Y nos dice que hallemos $C_1(t), C_2(t)$ resolviendo (integrando)

$$Q(t)\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = B(t) \quad \left(\longrightarrow \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}(t)B(t) \right)$$

No siempre es el mejor camino

En nuestro ejemplo tenemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^t\cos 2t & e^t \operatorname{sen} 2t \\ -e^t \operatorname{sen} 2t & e^t\cos 2t \end{pmatrix}}_{Q(t)} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos 2t} \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

$Q(t) = (\Phi_1(t) \mid \Phi_2(t))$ matriz fundamental

Cancelando e^t obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \cos 2t \cdot C_1'(t) + \operatorname{sen} 2t \, C_2'(t) = 1 \\ -\operatorname{sen} 2t \cdot C_1'(t) + \cos 2t \, C_2'(t) = \dfrac{1}{\cos 2t} \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\operatorname{sen} 2t$ y la segunda por $\cos 2t$, y sumando ambas obtenemos que:

$$C_2'(t) = \operatorname{sen} 2t + 1 \implies \boxed{C_2(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t + t}$$

Multiplicando ahora la primera por $\cos 2t$, la segunda por $-\operatorname{sen} 2t$ y sumando obtenemos

$$C_1'(t) = \cos 2t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{\cos 2t} \implies \boxed{C_1(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\ln(\cos 2t)}$$

Por lo tanto

$$\Phi_p(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2t + \ln(\cos 2t))\begin{pmatrix} e^t\cos 2t \\ -e^t \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} +$$

$$\left(-\frac{1}{2}\cos 2t + t\right)\begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen} 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

(comprobar)

es la solución particular que buscábamos. todas las soluciones del sistema son enteras

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t).$$

Hagamos ahora un ejemplo de una ecuación lineal de orden 2 con coeficientes NO constantes y NO homogénea.

Ejemplo 2 Halle la solución general de la ecuación

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3 e^{2x} \quad (x>0)$$

Sabiendo que la ecuación homogénea asociada tiene una solución de la forma $y_1(x) = e^{mx}$

- Determinemos primero $y_1(x)$, es decir, el valor de 'm'.

Buscamos un valor de m tal que

$$xm^2 e^{mx} - 2(x+1)me^{mx} + (x+2)e^{mx} = 0$$

sí, y sólo si

$$m^2 x - 2m(x+1) + (x+2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (m^2-2m+1)x - 2m + 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ 2(1-m) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{m=1}$$

Así, $\boxed{y_1(x) = e^x}$ es una solución del homogéneo asociado

- Buscamos ahora otra solución y_2 de la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ tal que $\{y_1(x), y_2(x)\}$ sea linealmente independiente.

Derivamos

$$y_2(x) = v(x)\,y_1(x) = v(x)e^x$$
$$y_2'(x) = v'(x)e^x + v(x)e^x = (v'(x)+v(x))e^x$$
$$y_2''(x) = (v''(x)+v'(x))e^x + (v'(x)+v(x))e^x$$
$$= (v''(x) + 2v'(x) + v(x))e^x$$

Reemplazando, obtenemos

$$x(v''+2v'+v)e^x - 2(x+1)(v'+v)e^x + (x+2)ve^x = 0 \iff$$
$$xv'' + (2x-2x-2)v' + (x-2x-2+x+2)v = 0 \iff$$
$$\boxed{xv'' - (\cancel{x}+2)v' = 0}$$

Esta última ecuación diferencial de segundo orden es de la forma

$$F(x, v', v'') = 0.$$

Es decir, no aparece "v".

Mediante la sustitución

$$\begin{cases} v' = u \\ v'' = u' \end{cases}$$

la transformamos en una ecuación de primer orden de la forma

$$F(x, u, u') = 0 \quad \text{(Reducimos el orden!!)}$$

O sea, buscamos resolver

$$xu' - (\cancel{x}+2)u = 0$$
$$\frac{du}{u} = \left(\frac{\cancel{x}+2}{x}\right)dx$$
$$\ln|u| = \cancel{x} + \ln x^2 + C$$
$$|u| = e^C.(\cancel{e^x}.x^2)$$
$$\boxed{u = k.x^2\cancel{e^x}} \quad k \neq 0 \ (k \in \mathbb{R})$$

Volviendo a la función original V, queda:

$$V' = kx^2\cancel{e^x} \quad (k=1) \text{ buscamos una solución}$$

$$\Rightarrow V = \int x^2 \cancel{e^x} dx = x^3 + C$$

$$\cancel{= x^2e^x - 2\int xe^x dx}$$

$$\cancel{= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx}$$

$$\cancel{= (x^2-2x+2)e^x + C}$$

$\underline{C=0}$

Así, nos quedamos con $V(x) = \cancel{(x^2-2x+2)e^x}$ y en definitiva la otra solución es

$$Y_2(x) = \cancel{(x^2-2x+2)e^x \cdot e^x} \quad \boxed{x^3e^x}$$

$$\cancel{= (x^2-2x+2)e^{2x}}$$

De esta manera la solución general del homogéneo es

$$Y_h(x) = c_1e^x + c_2 \cancel{(x^2-2x+2)e^{2x}}\, x^3e^x$$

- Aplicamos el método de variación de las constantes reescribiendo (o transformando) la ecuación de orden 2 en forma de un sistema de dos ecuaciones de orden 1

$$\bar{Y}_h(x) = c_1\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \overset{x^3e^x}{\cancel{(x^2-2x+2)e^{2x}}} \\ \underset{(3x^2+x^3)e^x}{\cancel{(x^2-2x+2)e^{2x}+x^2e^{2x}}} \end{pmatrix}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2e^{2x} \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\frac{2}{x}) & 2(1+\frac{2}{x}) \end{pmatrix}$$

Pues

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x} \longrightarrow y'' - \frac{2(x+1)}{x}y' + \frac{(x+2)}{x}y = x^2e^{2x}$$

Como en el ejemplo anterior, resolvemos

$$\begin{pmatrix} e^x & \cancel{(x^2-2x+2)e^{2x}}\ x^3e^x \\ e^x & \underset{(3x^2+x^3)e^x}{\cancel{(x^2-2x+2)e^{2x}+x^2e^{2x}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ x^2e^{2x}\end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{cases} e^x c_1'(x) + \overset{x^3e^x}{\cancel{(x^2-2x+2)e^{2x}}}\, c_2'(x) = 0 \\ e^x c_1'(x) + \underset{3x^2e^x}{\cancel{(x^2-2x+2)e^{2x}}}\, c_2'(x) + \underset{x^3e^x}{\cancel{x^2e^{2x}}}\, c_2'(x) = x^2e^{2x} \end{cases}$$

Restándole la primera a la segunda ecuación obtenemos

$$3x^2e^x\, \cancel{x^2e^{2x}}\, c_2'(x) = x^2e^{2x}$$

$$\iff \quad c_2'(x) = \cancel{x}\ \frac{e^x}{3}$$

$$\iff \quad \boxed{c_2(x) = \cancel{x}}\ \frac{e^x}{3} \quad \text{(constante arbitraria } = 0)$$

Ahora reemplazando en la primera obtenemos que

$$-\frac{x^3e^x}{3} = c_1'(x) = \cancel{-(x^2-2x+2)e^x}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1(x) = \cancel{(-x^2+4x-6)e^x}} \quad \text{(Partes x2, C=0)}$$

$$\left(-\tfrac{1}{3}x^3+x^2-2x+2\right)e^x$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p(x) = \cancel{(-x^2+4x-6)}\,e^{2x} + \overset{\frac{x^3}{3}}{\cancel{(x^3-x^2+2x)}}\,e^{2x}$$

$$= \cancel{(x^3-3x^2+6x-6)}\,e^{2x}.$$

$$(x^2-2x+2) \longrightarrow$$ verificar !!

o, en forma vectorial

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} \overset{?}{\cancel{(x^3-3x^2+6x-6)}}\,e^{2x} \\ \cancel{(2x^3-3x^2+6x-6)}\,e^{2x} \end{pmatrix}.$$

? Ejercicio

<u>Nota</u>: Así se arregla un error de cuenta (la prolijidad hizo que no fuera tan doloroso)

También podríamos haber encontrado una solución particular utilizando el Método ORIGINAL de variación de las constantes de J. L. Lagrange.

Se busca resolver

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (1)$$

Se supone que tenemos que

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

todas las soluciones del homogéneo asociado

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (3)$$

Como antes, se propone como solución particular de (1) a

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \qquad (4)$$

Para hallar C_1 y C_2 debemos tener dos ecuaciones que las relacionen. La primera relación se obtiene derivando

$$y_p' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2$$

$$= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \underbrace{(C_1' y_1 + C_2' y_2)}_{\text{debería ser cero si } C_1 \text{ y } C_2 \text{ efectivamente fueran constantes}} \qquad (5)$$

Para no complejizar el problema al derivar nuevamente, se exige que

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \qquad (6)$$

y por lo tanto

$$y_p' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \qquad (7)$$

Derivando nuevamente

$$Y_p'' = c_1' Y_1' + c_1 Y_1'' + c_2' Y_2' + c_2 Y_2'' \qquad (8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4), (7) y (8) en la original (1) y reordenando, llegamos a

$$c_1 \underbrace{(Y_1'' + P Y_1' + Q Y_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(Y_2'' + P Y_2' + Q Y_2)}_{=0} + c_1' Y_1' + c_2' Y_2' = R \qquad (9)$$

xq Y_1, Y_2 sol de (2)

y entonces

$$c_1' Y_1' + c_2' Y_2' = R \qquad (10)$$

que es precisamente la segunda ecuación.

Nos queda por resolver

$$\begin{cases} c_1' Y_1 + c_2' Y_2 = 0 \\ c_1' Y_1' + c_2' Y_2' = R \end{cases}$$

que, en forma matricial, es lo que nos dice el teorema más general

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{pmatrix}}_{\text{matriz fundamental}} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$$

Finalmente, estas se resuelven, dando

$$c_1' = \frac{-Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} \quad y \quad c_2' = \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)}$$

que integrando, es

$$c_1 = \int \frac{-Y_2 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx \quad y \quad c_2 = \int \frac{Y_1 R(x)}{W(Y_1, Y_2)} dx$$

Ejercicio Resuelva la ecuación no homogénea de Euler-Cauchy

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln(x) \quad (x>0)$$

sabiendo que tiene tres soluciones, linealmente independientes, del homogéneo asociado de la forma

$$y(x) = x^m \quad m \in \mathbb{N}.$$