Orientación / Integrales de Flujo

27 de marzo de 2021

Contenidos

Tabla de Contenidos

Superficies Orientables y No Orientables

Superficies Orientables y No Orientables

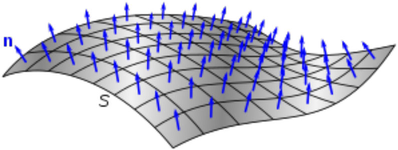
Definición

Una superficie suave $\boldsymbol{S}$ *se dice* ***orientable*** *si para cada* $p \in S$*, existe un vector normal unitario* $\boldsymbol{N}(p)$*, de manera tal que la aplicación* $p \mapsto \boldsymbol{N}(p)$ *es continua.*

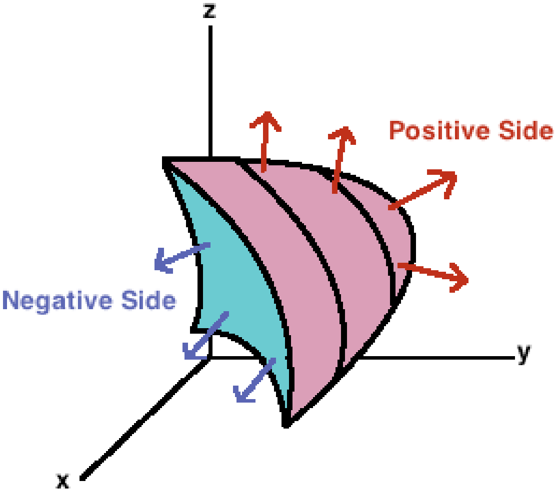
Superficies Orientables y No Orientables

Definición

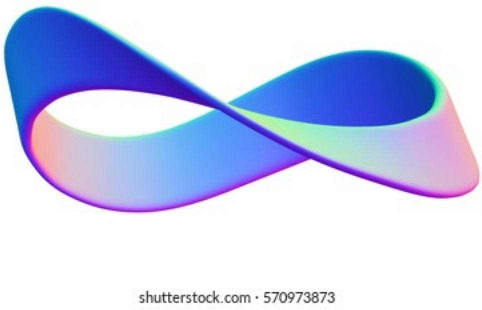
Una superficie suave $\boldsymbol{S}$ *se dice* ***orientable*** *si para cada* $p \in S$*, existe un vector normal unitario* $\boldsymbol{N}(p)$*, de manera tal que la aplicación* $p \mapsto \boldsymbol{N}(p)$ *es continua.*



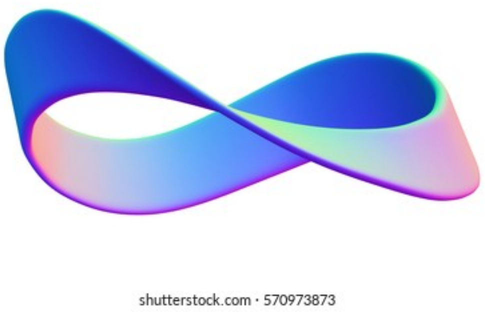
Superficies Orientables y No Orientables



Ejemplo de Superficie no orientable



Ejemplo de Superficie no orientable



https://www.youtube.com/watch?v=XlQ0ipIVFPk

Superficies Orientables y No Orientables

https://www.youtube.com/watch?v=Z30c5wvoS_s
https://www.youtube.com/watch?v=dkj8tEWJ4Lw
https://www.youtube.com/watch?v=WbLCVwXZ4UY

Algunas formas de ver que una Superficie es orientable:

Algunas formas de ver que una Superficie es orientable:

Proposición

Sea $\boldsymbol{S}$ *una superficie suave y* $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *una parametrización regular. Si la aplicación*

$$(u, v) \mapsto \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$$

es continua, entonces $\boldsymbol{S}$ *es orientable.*

Algunas formas de ver que una Superficie es orientable:

Proposición

Sea $\boldsymbol{S}$ *una superficie suave y* $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *una parametrización regular. Si la aplicación*

$$(u, v) \mapsto \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$$

es continua, entonces $\boldsymbol{S}$ *es orientable. Además,* $N = \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$ *da una orientación a la superficie.*

Algunas formas de ver que una Superficie es orientable:

Proposición

Sea $\boldsymbol{S}$ *una superficie suave y* $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *una parametrización regular. Si la aplicación*

$$(u, v) \mapsto \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$$

es continua, entonces $\boldsymbol{S}$ *es orientable. Además,* $N = \frac{T_u \times T_v}{||T_u \times T_v||}$ *da una orientación a la superficie.*

Proposición

Si $\boldsymbol{S}$ *es una superficie de nivel de una función* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que* $\nabla f(p) \neq 0$ *para todo* $p \in \boldsymbol{S}$*, entonces* $\boldsymbol{S}$ *es orientable y* $\frac{\nabla f(p)}{||\nabla f(p)||}$ *orienta a* $\boldsymbol{S}$.

Tabla de Contenidos

Flujo a través de Superficies Orientables

Definición

Sea $\boldsymbol{S}$ una superficie orientada por el campo de vectores unitarios N. Sea F un campo de vectores continuos sobre $\boldsymbol{S}$. Se define el flujo de F sobre $\boldsymbol{S}$ como la integral

$$\int\int_{\boldsymbol{S}} F \cdot d\boldsymbol{S} := \int\int_{\boldsymbol{S}} F \cdot N \, dS$$

Flujo a través de Superficies Orientables

Definición

Sea $\boldsymbol{S}$ *una superficie orientada por el campo de vectores unitarios* N*. Sea* F *un campo de vectores continuos sobre* $\boldsymbol{S}$*. Se define el flujo de* F *sobre* $\boldsymbol{S}$ *como la integral*

$$\int\int_{\boldsymbol{S}} F \cdot d\boldsymbol{S} := \int\int_{\boldsymbol{S}} F \cdot N\, dS$$

Si $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S (y D es una región elemental) que respeta la orientación de **S**, entonces podemos calcularla de la siguiente manera

$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot d\mathbf{S} = \int\int_{D} F(T(u, v)) \cdot T_u \times T_v \, du\, dv.$$

Si T invierte la orientación, en lugar de buscar una nueva parametrización, le podemos cambiar el signo a la integral de la derecha. Es decir,

$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot d\mathbf{S} = -\int\int_{D} F(T(u,v)) \cdot T_u \times T_v \, du \, dv.$$

Si T invierte la orientación, en lugar de buscar una nueva parametrización, le podemos cambiar el signo a la integral de la derecha. Es decir,

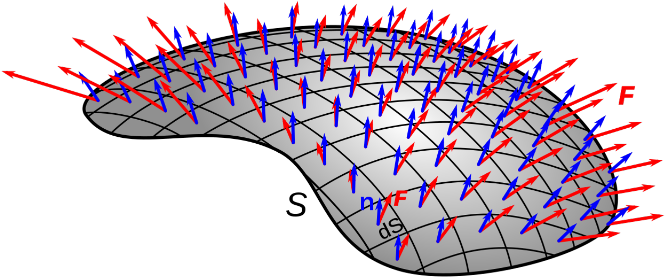
$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot d\mathbf{S} = -\int\int_{D} F(T(u,v)) \cdot T_u \times T_v \, du \, dv.$$

¿Qué interpretación tiene la integral de Flujo?

Si T invierte la orientación, en lugar de buscar una nueva parametrización, le podemos cambiar el signo a la integral de la derecha. Es decir,

$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot d\mathbf{S} = -\int\int_{D} F(T(u,v)) \cdot T_u \times T_v \, du \, dv.$$

¿Qué interpretación tiene la integral de Flujo?



Idea intuitiva:

Idea intuitiva:

Supongamos que F es el campo de velocidades de un fluido y que **S** representa una membrana.

Idea intuitiva:
Supongamos que F es el campo de velocidades de un fluido y que $\mathbf{S}$ representa una membrana. En cada punto $p \in \mathbf{S}$, el plano tangente a $\mathbf{S}$ en p está determinado por la normal $N(p)$, que también le da una una orientación a $\mathbf{S}$.

Idea intuitiva:
Supongamos que F es el campo de velocidades de un fluido y que $\mathbf{S}$ representa una membrana. En cada punto $p \in \mathbf{S}$, el plano tangente a $\mathbf{S}$ en p está determinado por la normal $N(p)$, que también le da una una orientación a $\mathbf{S}$. La cantidad de fluido que atraviesa la membrana en el punto p en la dirección de N por unidad de tiempo se puede pensar como la proyección del campo sobre dicho vector, $F \cdot N$.

Idea intuitiva:
Supongamos que F es el campo de velocidades de un fluido y que $\mathbf{S}$ representa una membrana. En cada punto $p \in \mathbf{S}$, el plano tangente a $\mathbf{S}$ en p está determinado por la normal $N(p)$, que también le da una una orientación a $\mathbf{S}$. La cantidad de fluido que atraviesa la membrana en el punto p en la dirección de N por unidad de tiempo se puede pensar como la proyección del campo sobre dicho vector, $F \cdot N$. Notar que si $F \cdot N > 0$, entonces F apunta para el mismo lado del plano tangente que N, si $F \cdot N < 0$, apunta para el lado contrario y si $F \cdot N = 0$ entonces en ese punto no pasa fluido de un lado al otro.

Mucho cuidado:

Mucho cuidado:
Si, por ejemplo, $\mathbf{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y consideran el campo $F(x, y, z) = (0, 0, 8z + 16)$ orientada con la normal exterior. Les queda como tarea verificar que en el punto $p = (0, 0, -1)$ se tiene que $N(p) = (0, 0, -1)$, con lo cual

$$F(0, 0, -1) \cdot N(0, 0, -1) = -8,$$

pero

$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot N \, dS > 0.$$

Mucho cuidado:

Si, por ejemplo, $\mathbf{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y consideran el campo $F(x, y, z) = (0, 0, 8z + 16)$ orientada con la normal exterior. Les queda como tarea verificar que en el punto $p = (0, 0, -1)$ se tiene que $N(p) = (0, 0, -1)$, con lo cual

$$F(0, 0, -1) \cdot N(0, 0, -1) = -8,$$

pero

$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot N \, dS > 0.$$

Es decir, si bien en al menos un punto la F apunta en la dirección contraria a la normal, o bien en la mayoría de los puntos de la superficie F y N apuntan en la misma dirección, o hay suficientes puntos donde se apunten en la misma dirección con una magnitud suficiente como para que haya más fluido saliendo que entrando de $\mathbf{S}$.

Tabla de Contenidos

Ejercicio 1

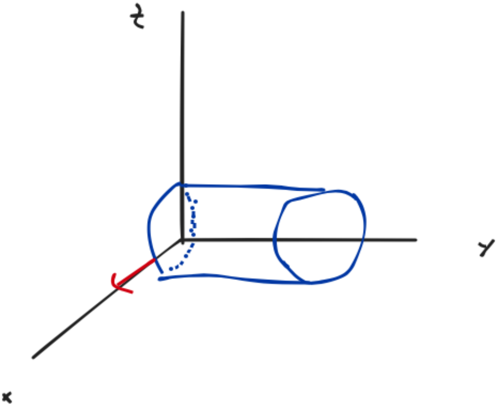
Sea $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, 0 \leq y \leq 2\}$ orientada 'hacia afuera' (es decir $N(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$). Si $F(x, y, z) = (x, 0, z)$, calcular

$$\int\int_S F \cdot dS.$$

Solución:

Solución:

$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, 0 \leq y \leq 2\}$



Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución.

Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución. Usemos la parametrización $T : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta).$$

Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución. Usemos la parametrización $T : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta).$$

A esta altura ya conocemos lo suficiente esta parametrización, pero

Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución. Usemos la parametrización $T : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta).$$

A esta altura ya conocemos lo suficiente esta parametrización, pero ¿respeta la orientación?

Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución. Usemos la parametrización $T : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta).$$

A esta altura ya conocemos lo suficiente esta parametrización, pero ¿respeta la orientación? Para esto, necesitamos verificar si el versor normal inducido por esta parametrización satisface que $N(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución. Usemos la parametrización $T : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta).$$

A esta altura ya conocemos lo suficiente esta parametrización, pero ¿respeta la orientación? Para esto, necesitamos verificar si el versor normal inducido por esta parametrización satisface que $N(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Para esto, necesitamos calcular $T_\theta \times T_y$.

Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución. Usemos la parametrización $T : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta).$$

A esta altura ya conocemos lo suficiente esta parametrización, pero ¿respeta la orientación? Para esto, necesitamos verificar si el versor normal inducido por esta parametrización satisface que $N(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Para esto, necesitamos calcular $T_\theta \times T_y$.

$$T_\theta(\theta, y) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad T_y(\theta, y) = (0, 1, 0).$$

Ya sabemos parametrizar dicho cilindro, por ejemplo, como superficie de revolución. Usemos la parametrización $T : [0, 2\pi] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta).$$

A esta altura ya conocemos lo suficiente esta parametrización, pero ¿respeta la orientación? Para esto, necesitamos verificar si el versor normal inducido por esta parametrización satisface que $N(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Para esto, necesitamos calcular $T_\theta \times T_y$.

$$T_\theta(\theta, y) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad T_y(\theta, y) = (0, 1, 0).$$

Luego,

$$(T_\theta \times T_y)(\theta, y) = (-\sin\theta, 0, \cos\theta) \times (0, 1, 0) = (-\cos\theta, 0, -\sin\theta)$$

La otra cuestión que necesitamos saber es para qué valores de $(\theta, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2]$ se cumple que $T(\theta, y) = (1, 0, 0)$.

La otra cuestión que necesitamos saber es para qué valores de $(\theta, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2]$ se cumple que $T(\theta, y) = (1, 0, 0)$. Para esto, debe ocurrir que

$$(\cos\theta, y, \sin\theta) = (1, 0, 0),$$

lo cual ocurre si y solo si $\theta = 0$ e $y = 0$.

La otra cuestión que necesitamos saber es para qué valores de $(\theta, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2]$ se cumple que $T(\theta, y) = (1, 0, 0)$. Para esto, debe ocurrir que

$$(\cos\theta, y, \sin\theta) = (1, 0, 0),$$

lo cual ocurre si y solo si $\theta = 0$ e $y = 0$. Calculemos $N_T(0, 0)$ y veamos si da $(1, 0, 0)$ o $(-1, 0, 0)$.

La otra cuestión que necesitamos saber es para qué valores de $(\theta, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2]$ se cumple que $T(\theta, y) = (1, 0, 0)$. Para esto, debe ocurrir que

$$(\cos\theta, y, \sin\theta) = (1, 0, 0),$$

lo cual ocurre si y solo si $\theta = 0$ e $y = 0$. Calculemos $N_T(0, 0)$ y veamos si da $(1, 0, 0)$ o $(-1, 0, 0)$.

$$N_T(0,0) = \frac{(T_\theta \times T_y)(0,0)}{||(T_\theta \times T_y)(0,0)||} = \frac{(-\cos 0, 0, -\sin 0)}{1} = (-1, 0, 0).$$

La otra cuestión que necesitamos saber es para qué valores de $(\theta, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2]$ se cumple que $T(\theta, y) = (1, 0, 0)$. Para esto, debe ocurrir que

$$(\cos\theta, y, \sin\theta) = (1, 0, 0),$$

lo cual ocurre si y solo si $\theta = 0$ e $y = 0$. Calculemos $N_T(0, 0)$ y veamos si da $(1, 0, 0)$ o $(-1, 0, 0)$.

$$N_T(0,0) = \frac{(T_\theta \times T_y)(0,0)}{||(T_\theta \times T_y)(0,0)||} = \frac{(-\cos 0, 0, -\sin 0)}{1} = (-1, 0, 0).$$

Luego, T invierte la orientación.

La otra cuestión que necesitamos saber es para qué valores de $(\theta, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2]$ se cumple que $T(\theta, y) = (1, 0, 0)$. Para esto, debe ocurrir que

$$(\cos\theta, y, \sin\theta) = (1, 0, 0),$$

lo cual ocurre si y solo si $\theta = 0$ e $y = 0$. Calculemos $N_T(0, 0)$ y veamos si da $(1, 0, 0)$ o $(-1, 0, 0)$.

$$N_T(0,0) = \frac{(T_\theta \times T_y)(0,0)}{||(T_\theta \times T_y)(0,0)||} = \frac{(-\cos 0, 0, -\sin 0)}{1} = (-1, 0, 0).$$

Luego, T invierte la orientación. Hay varias opciones: cambiar la parametrización, usar $T_y \times T_\theta$ o cambiarle el signo a la integral.

Falta calcular $F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y)(\theta, y)$.

Falta calcular $F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y)(\theta, y)$. Ya sabemos que $T_\theta \times T_y = (-\cos\theta, 0, -\sin\theta)$.

Falta calcular $F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y)(\theta, y)$. Ya sabemos que $T_\theta \times T_y = (-\cos\theta, 0, -\sin\theta)$. Como $F(x, y, z) = (x, 0, z)$ y $T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta)$, tenemos que

$$F(T(\theta, y)) = F(\cos\theta, y, \sin\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta).$$

Falta calcular $F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y)(\theta, y)$. Ya sabemos que $T_\theta \times T_y = (-\cos\theta, 0, -\sin\theta)$. Como $F(x, y, z) = (x, 0, z)$ y $T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta)$, tenemos que

$$F(T(\theta, y)) = F(\cos\theta, y, \sin\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta).$$

Luego,

$$F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y) = (\cos\theta, 0, \sin\theta) \cdot (-\cos\theta, 0, -\sin\theta) = -1.$$

Falta calcular $F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y)(\theta, y)$. Ya sabemos que $T_\theta \times T_y = (-\cos\theta, 0, -\sin\theta)$. Como $F(x, y, z) = (x, 0, z)$ y $T(\theta, y) = (\cos\theta, y, \sin\theta)$, tenemos que

$$F(T(\theta, y)) = F(\cos\theta, y, \sin\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta).$$

Luego,

$$F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y) = (\cos\theta, 0, \sin\theta) \cdot (-\cos\theta, 0, -\sin\theta) = -1.$$

Con lo cual,

$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot d\mathbf{S} = -\int\int_D F(T(\theta, y)) \cdot (T_\theta \times T_y)\, d\theta\, dy$$

$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^2 -1\, d\theta\, dy = 4\pi.$$

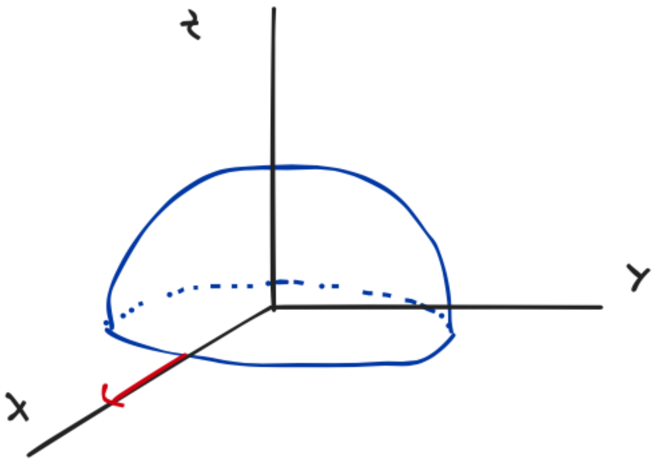
Tabla de Contenidos

Ejercicio 2

Sea $\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ el hemisferio norte de la esfera orientado según la normal exterior, es decir, $N(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.
Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de $\mathbf{S}$.

Solución:

Solución:



Podemos parametrizar **S** usando coordenadas esféricas. Es decir, vía $T : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$, donde

$$T(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

Podemos parametrizar **S** usando coordenadas esféricas. Es decir, vía $T : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$, donde

$$T(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

Como antes,

$$\begin{aligned} T_\theta(\theta, \varphi) &= \left(-\sin\theta \sin\varphi, \quad \cos\theta \sin\varphi, \quad 0 \right), \\ T_\varphi(\theta, \varphi) &= \left(\cos\theta \cos\varphi, \quad \sin\theta \sin\varphi, -\sin\varphi \right). \end{aligned}$$

Podemos parametrizar **S** usando coordenadas esféricas. Es decir, vía $T : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$, donde

$$T(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

Como antes,

$$\begin{aligned} T_\theta(\theta, \varphi) &= (-\sin\theta\sin\varphi, \quad \cos\theta\sin\varphi, \quad 0), \\ T_\varphi(\theta, \varphi) &= (\cos\theta\cos\varphi, \quad \sin\theta\sin\varphi, \quad -\sin\varphi). \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$$

Podemos parametrizar **S** usando coordenadas esféricas. Es decir, vía $T : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$, donde

$$T(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

Como antes,

$$\begin{aligned} T_\theta(\theta, \varphi) &= (-\sin\theta \sin\varphi, \quad \cos\theta \sin\varphi, \quad 0), \\ T_\varphi(\theta, \varphi) &= (\cos\theta \cos\varphi, \quad \sin\theta \sin\varphi, \quad -\sin\varphi). \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta \sin^2\varphi, -\sin\theta \sin^2\varphi, -\sin\varphi \cos\varphi)$$

¿Está bien orientada?

Necesitamos ver si el vector normal inducido por esta parametrización satisface $N_T(1,0,0) = (1,0,0)$.

Necesitamos ver si el vector normal inducido por esta parametrización satisface $N_T(1,0,0) = (1,0,0)$. Primero busquemos para qué valores de $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ se tiene que $T(\theta, \varphi) = (1,0,0)$ (recordar que la parametrización no es inyectiva).

Necesitamos ver si el vector normal inducido por esta parametrización satisface $N_T(1,0,0) = (1,0,0)$. Primero busquemos para qué valores de $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ se tiene que $T(\theta, \varphi) = (1,0,0)$ (recordar que la parametrización no es inyectiva).
Ahora, $T(\theta, \varphi) = (1,0,0)$ si y solo si

$$(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi) = (1,0,0).$$

Necesitamos ver si el vector normal inducido por esta parametrización satisface $N_T(1,0,0) = (1,0,0)$. Primero busquemos para qué valores de $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ se tiene que $T(\theta, \varphi) = (1,0,0)$ (recordar que la parametrización no es inyectiva).
Ahora, $T(\theta, \varphi) = (1,0,0)$ si y solo si

$$(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi) = (1,0,0).$$

Claramente $(\theta, \varphi) = (0, \frac{\pi}{2})$ satisface esto último.

Necesitamos ver si el vector normal inducido por esta parametrización satisface $N_T(1,0,0) = (1,0,0)$. Primero busquemos para qué valores de $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ se tiene que $T(\theta, \varphi) = (1,0,0)$ (recordar que la parametrización no es inyectiva).
Ahora, $T(\theta, \varphi) = (1,0,0)$ si y solo si

$$(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi) = (1,0,0).$$

Claramente $(\theta, \varphi) = (0, \frac{\pi}{2})$ satisface esto último.
Veamos cuánto vale $N_T(0, \frac{\pi}{2})$.

Ya sabemos que
$T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta \sin^2\varphi, -\sin\theta \sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$.

Ya sabemos que $T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$. Si bien no es estrictamente necesario, ya que alcanza con ver si $(T_\theta \times T_\varphi)(0, \frac{\pi}{2})$ es paralelo a $(1, 0, 0)$, calculemos $||T_\theta \times T_\varphi||$.

Ya sabemos que $T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$. Si bien no es estrictamente necesario, ya que alcanza con ver si $(T_\theta \times T_\varphi)(0, \frac{\pi}{2})$ es paralelo a $(1,0,0)$, calculemos $||T_\theta \times T_\varphi||$.

$$||T_\theta \times T_\varphi||^2 = (-\cos\theta\sin^2\varphi)^2 + (-\sin\theta\sin^2\varphi)^2 + (-\sin\varphi\cos\varphi)^2$$

Ya sabemos que
$T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$. Si bien no es estrictamente necesario, ya que alcanza con ver si $(T_\theta \times T_\varphi)(0, \frac{\pi}{2})$ es paralelo a $(1, 0, 0)$, calculemos $||T_\theta \times T_\varphi||$.

$$||T_\theta \times T_\varphi||^2 = (-\cos\theta\sin^2\varphi)^2 + (-\sin\theta\sin^2\varphi)^2 + (-\sin\varphi\cos\varphi)^2$$

$$= \sin^4\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \sin^2\varphi.$$

Como $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $||T_\theta \times T_\varphi|| = \sin\varphi$

Ya sabemos que
$T_\theta \times T_\varphi = (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$. Si bien no es estrictamente necesario, ya que alcanza con ver si $(T_\theta \times T_\varphi)(0, \frac{\pi}{2})$ es paralelo a $(1, 0, 0)$, calculemos $||T_\theta \times T_\varphi||$.

$$||T_\theta \times T_\varphi||^2 = (-\cos\theta\sin^2\varphi)^2 + (-\sin\theta\sin^2\varphi)^2 + (-\sin\varphi\cos\varphi)^2$$

$$= \sin^4\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \sin^2\varphi.$$

Como $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $||T_\theta \times T_\varphi|| = \sin\varphi$
Además, como nos interesa $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$,

$$\frac{T_\theta \times T_\varphi}{||T_\theta \times T_\varphi||} = (-\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, -\cos\varphi).$$

Luego,

$$N_T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\cos 0 \sin \frac{\pi}{2}, -\sin 0 \sin \frac{\pi}{2}, -\cos \frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0).$$

Luego,

$$N_T\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\cos 0\sin\frac{\pi}{2},-\sin 0\sin\frac{\pi}{2},-\cos\frac{\pi}{2}\right)=(-1,0,0).$$

Es decir, se invierte la orientación.

Luego,

$$N_T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\cos 0 \sin \frac{\pi}{2}, -\sin 0 \sin \frac{\pi}{2}, -\cos \frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0).$$

Es decir, se invierte la orientación. Además nos falta calcular $F(T(\theta, \varphi))$ y $F(T(\theta, \varphi)) \cdot (T_\theta \times T_\varphi)$.

Luego,

$$N_T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\cos 0 \sin \frac{\pi}{2}, -\sin 0 \sin \frac{\pi}{2}, -\cos \frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0).$$

Es decir, se invierte la orientación. Además nos falta calcular $F(T(\theta,\varphi))$ y $F(T(\theta,\varphi)) \cdot (T_\theta \times T_\varphi)$. Recordando que $F(x,y,z) = (x,y,z)$ y $T(\theta,\varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$, tenemos que

$$\begin{aligned} F(T(\theta,\varphi)) &= F(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) \\ &= \end{aligned}$$

Luego,

$$N_T\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\cos 0\sin\frac{\pi}{2},-\sin 0\sin\frac{\pi}{2},-\cos\frac{\pi}{2}\right)=(-1,0,0).$$

Es decir, se invierte la orientación. Además nos falta calcular $F(T(\theta,\varphi))$ y $F(T(\theta,\varphi))\cdot(T_\theta\times T_\varphi)$. Recordando que $F(x,y,z)=(x,y,z)$ y $T(\theta,\varphi)=(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)$, tenemos que

$$F(T(\theta,\varphi))=F(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)$$

$$=(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)$$

Por lo tanto,

$$F(T(\theta,\varphi)) \cdot (T_\theta \times T_\varphi) =$$

$$(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\cdot(-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$$

Por lo tanto,

$$F(T(\theta,\varphi))\cdot(T_\theta \times T_\varphi) =$$

$$(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\cdot(-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos^2\theta\sin^3\varphi - \sin^2\theta\sin^3\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi \\
&= -\sin^3\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \sin\varphi\cos^2\varphi \\
&= -\sin\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = -\sin\varphi
\end{aligned}$$

Luego, como T invierte la orientación,

$$\int\int_{\mathbf{S}} F \cdot d\mathbf{S} = -\int\int_{D} F(T(\theta,\varphi)) \cdot (T_\theta \times T_\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = 2\pi.$$

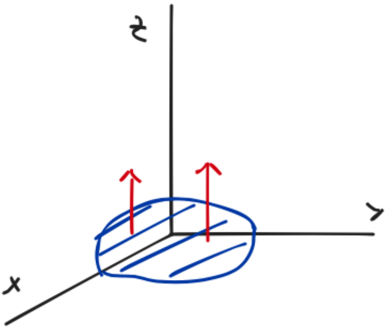
Tabla de Contenidos

Ejercicio 3

A veces podremos calcular las integrales de Flujo sin parametrizar: Sea $\mathbf{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = 0\}$ orientado con la normal 'hacia arriba'. Calcular el Flujo de $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de $\mathbf{S}$.

Solución:

Solución:



Queremos calcular

$$\int\int_{\mathbf{S}} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S}.$$

Queremos calcular

$$\int\int_{\mathbf{S}} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S}.$$

Notemos que, como $\mathbf{S}$ está completamente contenida en el plano xy, entonces $N(p) = (0, 0, 1)$ para todo $p \in \mathbf{S}$. Luego,

$$\int\int_{\mathbf{S}} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \int\int_{\mathbf{S}} (x, y, z) \cdot (0, 0, 1)\, dS$$

$$= \int\int_{\mathbf{S}} z\, dS =$$

Queremos calcular

$$\int\int_{\mathbf{S}} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S}.$$

Notemos que, como $\mathbf{S}$ está completamente contenida en el plano xy, entonces $N(p) = (0, 0, 1)$ para todo $p \in \mathbf{S}$. Luego,

$$\int\int_{\mathbf{S}} (x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \int\int_{\mathbf{S}} (x, y, z) \cdot (0, 0, 1)\, dS$$

$$= \int\int_{\mathbf{S}} z\, dS = \int\int_{\mathbf{S}} 0\, dS = 0,$$

donde en la última igualdad usamos $\mathbf{S} \subseteq \{z = 0\}$.

Ejercicio 3