ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN Y ECUACIÓN LINEAL DE ORDEN n

A continuación vamos a estudiar el conjunto solución de un sistema lineal homogeneo de primer orden con n ecuaciones y n incógnitas. Veremos que se trata de un espacio vectorial de dimensión n. También veremos que una EDO lineal de orden n tiene asociado un sistema lineal de primer orden, lo cual permitirá estudiar el conjunto solución de la EDO.

TEOREMA Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sean $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas para $i,j = 1, \ldots, n$. Entonces, el conjunto solución del sistema Lineal homogeneo de primer orden

$$x'(t) = A(t)\, x(t) \qquad t \in I$$

 donde $A(t) = (a_{ij}(t))$, es un espacio vectorial real de dimensión n.

DEMOSTRACIÓN Opcional, se la puede consultar en el apunte de Wolanski, pág. 25. $\blacksquare$

OBSERVACIÓN Recordar que, en las condiciones del teorema, toda solución está definida en I.

OBSERVACIÓN Una consecuencia de este teorema es que si x_1, x_2 y x son soluciones de $x'(t) = A(t)x(t), t \in I$, donde $A: I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ es continua en I, siendo $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, entonces

$$x_1 + x_2 \qquad \text{y} \qquad \alpha x$$

también son soluciones, cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN Otra consecuencia del teorema es que si $A: I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es continua, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces el conjunto solución de $x'(t) = A(t)x(t)$, $t \in I$, tiene una base de soluciones

$$\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$$

y por lo tanto cualquier solución del sistema es de la forma

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

El siguiente teorema resulta muy útil en la práctica.

TEOREMA Sean I y A como en el teorema anterior. Sean también $\{x_1, \dots, x_n\}$

 Un conjunto de n soluciones de $x'(t) = A(t)\,x(t)$ para $t \in I$, y $t_0 \in I$. Entonces el conjunto de funciones

$$\{x_1, \ldots, x_n\}$$

es linealmente independiente si y sólo si el conjunto de vectores

$$\{x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\}$$

es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ l.i. $\Rightarrow \{x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\}$ l.i.

Supongamos que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de funciones l.i. y que $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 x_1(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) = 0.$$

 Ahora observamos que la función dada por

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \qquad t \in I$$

satisface

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) & t \in I \quad (*) \\ x(t_0) = 0 & \quad (**) \end{cases}$$

Como la función nula es solución de $(*)$ y $(**)$, sigue del teorema de unicidad que $x = 0$, es decir

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0.$$

Usando ahora que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es li, concluimos que $c_1 = \dots = c_n = 0$. Por lo tanto, $\{x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$ es li.

- $\{x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$ l.i. $\Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ l.i.

Supongamos que $\{x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$ es un conjunto de vectores l.i. y que $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0,$$

es decir,

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0 \qquad \forall t \in I.$$

Considerando $t = t_0$ y usando que $\{x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\}$ es li, deducimos que $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Por lo tanto, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es li. $\blacksquare$

El siguiente resultado es una consecuencia directa del teorema anterior.

<u>COROLARIO</u> Sean I, A y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ como en el teorema anterior, y sean $t_0, t_1 \in I$. Entonces el conjunto de vectores

 $\{x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$ es li si y sólo si el conjunto de vectores $\{x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)\}$ es li.

<u>OBSERVACIÓN</u> Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base de soluciones de

$$x'(t) = A(t)x(t) \qquad t \in I \qquad (*)$$

donde $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ es continua e $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Sea Q una matriz cuyos vectores columna son $x_1, \dots, x_n$. Es decir, si $x_1 = (x_{11}, \dots x_{1n}), \dots, x_n = (x_{n1}, \dots, x_{nn})$, entonces

$$Q = \left(\boxed{x_1} \cdots \boxed{x_n} \right) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{nn} \\ \vdots & & \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

A toda matriz de este tipo se la denomina "matriz fundamental". Como las columnas de la matriz $A(t)Q(t)$ son los vectores $A(t)x_j(t)$, $j=1,\dots,n$, se tiene que

$$Q'(t) = A(t)Q(t).$$

Usando que el determinante de una matriz es no nulo si y sólo si las columnas de la matriz son l.i., sigue del corolario anterior que

$$\det(Q(t_0)) \neq 0 \text{ para } \underline{\text{algún}}\ t_0 \in I \iff$$
$$\det(Q(t)) \neq 0 \text{ para } \underline{\text{todo}}\ t \in I$$

Si bien esto es cierto para matrices fundamentales, no es cierto para matrices en general. Por ejemplo, la matriz

$$R(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

es tal que $\det(R(1)) \neq 0$ y $\det(R(0)) = 0$.

Finalmente observamos que, como toda solución x de $(*)$ es combinación lineal real de $x_1, \ldots, x_n$, se tiene que $x = Qc$ para algún vector $c \in \mathbb{R}^n$, es decir,

$$x(t) = Q(t)\,c \qquad \forall\, t \in I.$$

Estudiaremos ahora el conjunto solución de una EDO lineal de orden n. Consideremos la EDO

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\,x'(t) + a_0(t)\,x(t) = 0 \qquad (*)$$

Se deja como ejercicio verificar que x es solución de esta EDO si y sólo si

$y = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ es solución del

$\hookrightarrow (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$

 sistema

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = -a_{n-1}(t)\, y_{n-1}(t) - \dots - a_1(t)\, y_1(t) - a_0(t)\, y_0(t) \end{cases} \qquad (**)$$

Usando esta relación entre la EDO de orden n (*) y el sistema de primer orden (**) se deduce el siguiente teorema, relativo al conjunto solución de la EDO (*). Por comodidad, presentamos primero la siguiente definición.

<u>DEFINICIÓN</u> Sean $x_j : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, funciones derivables hasta el orden $(n-1)$. Se denomina

 "Wronskiano" de $\{x_1, .., x_n\}$ a la función $W(x_1, .., x_n): I \to \mathbb{R}$ dada por

$$W(x_1, .., x_n)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

<u>TEOREMA</u> Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $a_j: I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en I para $j = 1, .., n$.

a) Sea $t_0 \in I$. Entonces para cada $(x_0, x_1, .., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ existe una única solución x de $(*)$ que satisface la condición inicial

$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$

y está definida en todo I.

b) El conjunto solución de (*) es un espacio vectorial de dimensión n.

c) Un conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ de n soluciones de (*) es l.i. si y sólo si $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$.

Más aún, dado un conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ de n soluciones de (*) se tiene que $W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I \iff W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

DEMOSTRACIÓN Opcional, se la puede consultar en el apunte de Wolanski, pág. 28. $\blacksquare$

EJEMPLO Consideramos el sistema lineal de EDOs dado por $x'(t) = Ax(t)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean x_1 y x_2 las funciones definidas por

$$x_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Veamos que x_1 y x_2 son soluciones del sistema para todo $t \in \mathbb{R}$.

- x_1 es solución

$$x_1'(t) = 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A x_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ x_1'(t) = A x_1(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

- x_2 es solución

Se ve de forma análoga.

Además $\{x_1, x_2\}$ es un conjunto de

 funciones l.i. ya que el conjunto de vectores $\left\{x_1(0), x_2(0)\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es l.i. Usando que el conjunto de soluciones de $x'(t) = Ax(t)$, $t \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial de dimensión 2, vemos que $\{x_1, x_2\}$ es una base de soluciones. Por lo tanto, cualquier solución del sistema es de la forma

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

para algunos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Más adelante veremos una estrategia para hallar las soluciones x_1 y x_2.

<u>EJEMPLO</u> Consideramos la EDO lineal

 de orden 2 dada por

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0.$$

Es sencillo verificar que las funciones x_1 y x_2 definidas por

$$x_1(t) = e^t \quad \text{y} \quad x_2(t) = te^t$$

para $t \in \mathbb{R}$, son soluciones de la EDO para todo $t \in \mathbb{R}$.

Además, como

$$W(x_1, x_2)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{pmatrix} = e^{2t}$$

vemos que $W(x_1, x_2)(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego $\{x_1, x_2\}$ es l.i. Usando ahora que el conjunto solución de la EDO es un espacio vectorial de dimensión 2, concluimos que $\{x_1, x_2\}$ es una base de soluciones. Así que toda solución de la EDO se puede expresar como

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = (c_1 + c_2 t) e^t$$

para algunos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>OBSERVACIÓN</u> La EDO del ejemplo anterior está asociada al siguiente sistema lineal de primer orden

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = -y_0(t) + 2y_1(t). \end{cases}$$