Recordemos el Teorema de Green

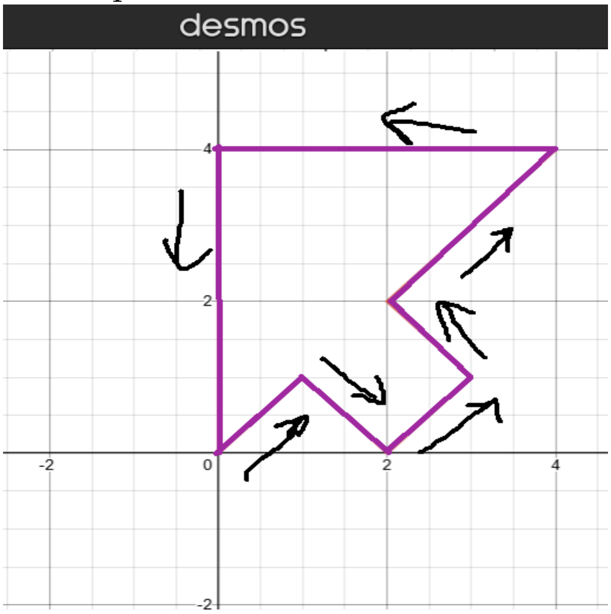
Clase número 6 de Análisis 2-Mate 3

(Green) Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ y sea C una curva en el plano, cerrada, simple, orientada positivamente y diferenciable a trozos, que encierra a una región D de tipo III que queda contenida en Ω. Entonces,

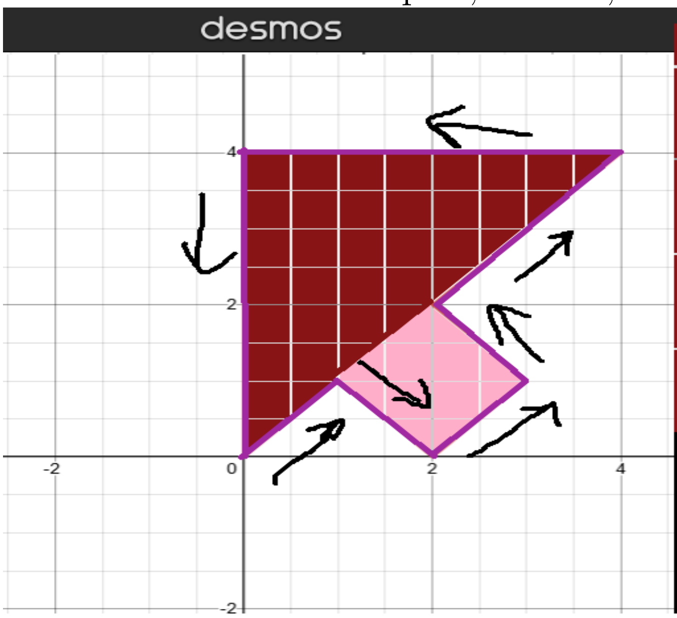
$$\int_{C^+}(Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

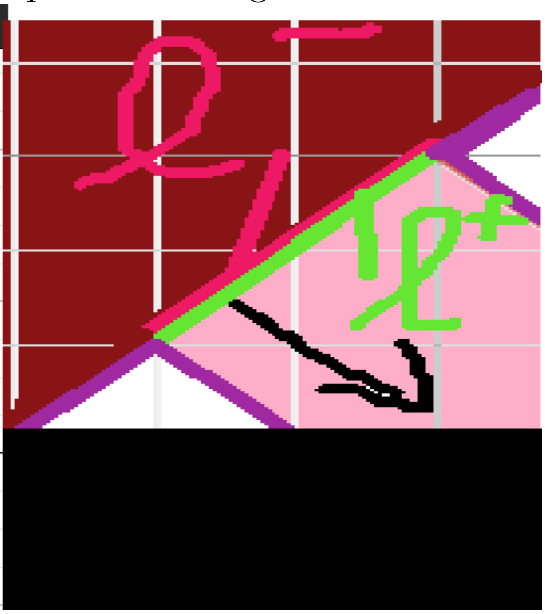
Leamos el ejercicio 8...

Ejercicio 8. Sea C la curva $x = 0$, $0 \leq y \leq 4$, $y = 4$, $0 \leq x \leq 4$, $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, $y = 2 - x$, $1 \leq x \leq 2$, $y = x - 2$, $2 \leq x \leq 3$, $y = 4 - x$, $2 \leq x \leq 3$, $y = x$, $2 \leq x \leq 4$, orientada positivamente.



Para poder acá aplicar el teorema de Green, notamos que aunque la región que encierra la curva no es de tipo I, II o III, si separamos la región como





Las dos regiones marcadas con colores (el cuadrado rotado 45 grados y el triangulo rectángulo) son regiones de tipo III, y la integral de línea del tramo común en las dos regiones tendría orientación opuesta, por lo que se cancelarían los términos asociados a la integral (si el campo en que trabajáramos fuera un campo en que valiera el teorema de Green). Entonces

$$\iint_{cuadrado}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\iint_{triangulo}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$
$$=\int_{\partial cuadrado}(Pdx+Qdy)+\int_{\partial triangulo}(Pdx+Qdy)$$

$$=\int_{\partial cuadrado\cup C}(Pdx+Qdy)+\{\int_{l^+}(Pdx+Qdy)+\int_{l^-}(Pdx+Qdy)\}+\int_{\partial triangulo\cup C}(Pdx+Qdy)$$

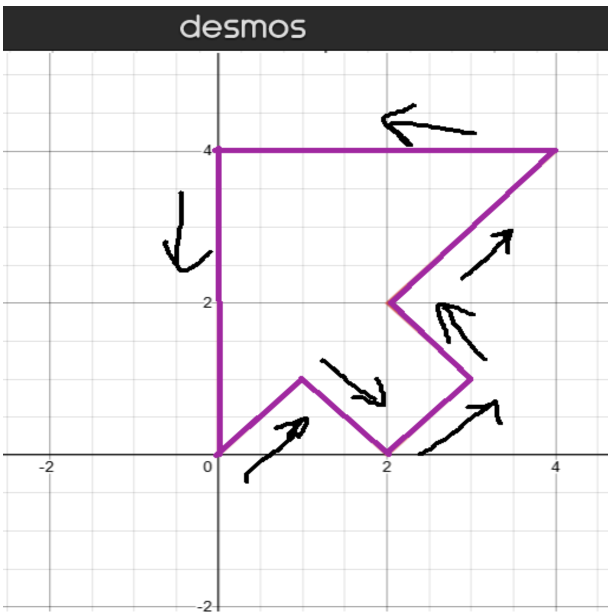
$$=\int_{\partial cuadrado\cup C}(Pdx+Qdy)+\int_{\partial triangulo\cup C}(Pdx+Qdy)$$
$$=\int_{C}(Pdx+Qdy)$$

Así que el teorema de Green se puede generalizar para este tipo de regiones que son pegotear en tramos de los bordes a regiones de tipo III, por lo que allí no aparece un problema con su aplicación. Sigamos leyendo el ejercicio.

Calcular

$$\iint_C \frac{y}{(x-1)^2+y^2}dx+\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}dy$$

La cosa es que $(P,Q)=(\frac{y}{(x-1)^2+y^2},\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2})$. Esta función es $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2-(1,0)$, así que el teorema de Green no se va a poder aplicar en una región que contiene el $(1,0)$. Si vemos en



Notaremos que no incluye ese punto la región contenida por la curva, por lo que no generará problemas la presencia de ese polo a la hora de calcular la integral.

Notando que

$$(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2+y^2}(\frac{\partial 1-x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}) - \frac{(1-x)\frac{\partial((x-1)^2+y^2)}{\partial x} - y\frac{\partial((x-1)^2+y^2)}{\partial y}}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2+y^2}(-1-1) - \frac{-2(1-x)^2-2y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2+y^2} - \frac{(-2)((1-x)^2+y^2)}{((x-1)^2+y^2)^2}$$

$$= -2\frac{1}{(x-1)^2+y^2} + 2\frac{1}{(x-1)^2+y^2} = 0$$

Entonces podemos ver que va a ser más fácil calcular la integral en área que la integral en curva, ya que es integrar 0.

Disgreción:

Si en vez de esa curva, hubieramos tenido la curva $\tilde{C}$ dada por la parametrización $\sigma(t) = (1+\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]$, aunque la curva y la región sirven para Green el campo en esa región no es $\mathcal{C}^1$, y la integral de linea hubiera sido

$\int_{\tilde{C}}(\sin^2(t)+\cos^2(t))dt = 2\pi$

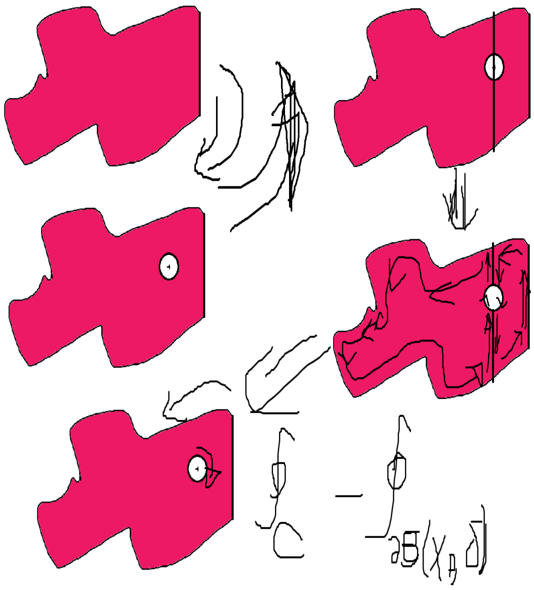
Mientras que la integral de área $\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0$. El que difieran no habla mal del teorema de Green, si no de quien trate de aplicarlo igual (bajo condiciones que no cumplen las hipótesis del mismo).

Esto está vinculado a un teorema muy importante de análisis complejo (mate 4// análisis III), materia que no es esta, que se llama fórmula de Cauchy. Pueden pispear en Wikipedia o Youtube u otra plataforma en que haya info de estas cosas, y divertirse mucho.

Fin de disgreción

En el ejercicio 10, pueden calcular más fácilmente la integral curvilinea si usan el teorema de Green para pasar el problema a una integral de área. Tienen que decir porqué se puede usar el teorema de Green (mencionar porqué cumple las condiciones y demás).

Recomiendo mucho hacer el ejercicio 11. Es similar a la disgreción que antes mencioné. Para el ejercicio 12, voy a dar una herramienta más. Si tienen una curva C orientada positivamente que encierra una región D donde en principio podría usar el teorema de Green, pero resulta que para el campo sobre el que quiero hacer integral curvilínea no se cumple que sea $\mathcal{C}^1$ en todo D, aunque falla sólo en algún lugar de una bolita de centro $B(x_p, \delta) \subseteq D$ o similar, entonces podemos usar el teorema de Green de la siguiente forma.



O sea, como se cancelan las integrales de la frontera de la región de la derecha con la de la izquierda, al final nos queda que hay que aplicar el teorema de Green sobre D' de la siguiente forma: $\iint_{D'}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_C(Pdx + Qdy) - \oint_{\partial B(x_p,\delta)}(Pdx + Qdy)$ Esto se puede hacer sacando regiones más generales de adentro, e incluso con múltiples regiones. Aplicando esto al ejercicio 12, vemos que, tomando D' como la región D salvo por un circulito en que no vale el teorema de Green,

$$\iint_{D'} \underbrace{(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})}_{\substack{\text{Esto es cero,}\\ \text{por lo que habíamos}\\ \text{visto antes}}} dxdy + \underbrace{\oint_{\partial B(x_p,\delta)}(Pdx + Qdy)}_{\substack{\text{Esto es } 2\pi \text{, por lo que}\\ \text{habíamos visto antes}}} = \oint_C (Pdx + Qdy)$$

Para el ejercicio 13, notar que la curva que dan no es cerrada, por lo que no va a poder aplicarse directamente el teorema de Green. Igual es interesante que

$$-\nabla(\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)) = -\frac{(x, y)}{x^2 + y^2}$$

Así que

$$(\frac{\partial \frac{ysen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})+x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{xsen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})-y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}}{\partial y}) =$$

$$(\frac{\partial \frac{ysen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})}{(x^2+y^2)^2}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{xsen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})}{(x^2+y^2)^2}}{\partial y}) - (\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2))) =$$

$$(\frac{\partial \frac{ysen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})}{(x^2+y^2)^2}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{xsen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})}{(x^2+y^2)^2}}{\partial y}) =$$

$$(y\frac{\partial x^2 + y^2}{\partial x} - x\frac{\partial x^2 + y^2}{\partial y})\frac{\partial \frac{sen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})}{(x^2+y^2)^2}}{\partial x^2 + y^2} =$$

$$(2yx - 2xy)\frac{\partial \frac{sen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)})}{(x^2+y^2)^2}}{\partial x^2 + y^2} = 0$$

Como este campo tiene una singularidad (un $\frac{1}{0}$) en $(x, y) = (0, 0)$, el teorema de Green no se puede aplicar en una región que contenga ese punto.

Si uniésemos la curva C con una curva $\tilde{C}$ que empezara donde termina en C y que termine donde empieza C, y fuera más fácil calcular la integral en $\tilde{C}$ el campo, y la región encerrada entre C y $\tilde{C}$ no contiene al punto $(x, y) = (0, 0)$, como la integral de área asociada al teorema de Green es 0, entonces la integral en C es igual a la integral en $\tilde{C}$ con la orientación contraria.

Como la función se simplifica drásticamente en $x^2 + y^2 = 1$, así que tomamos $\tilde{C}$ como la curva parametrizada por $\sigma(t) = (cos(t), sin(t)), t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Entonces $\int_C (Pdx + Qdy) = -\int_{\tilde{C}}(Pdx + Qdy)$

$$\int_{\tilde{C}} (\frac{xsen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}) - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{ysen(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}) + x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}dy) =$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (cos(t)sen(\frac{\pi}{2}) - sen(t))(-sen(t))dt + (sen(t)sen(\frac{\pi}{2}) + cos(t))cos(t)dt) =$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (cos(t) - sen(t))(-sen(t)) + (sen(t) + cos(t))cos(t)dt) =$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} -cos(t)sen(t) + sen(t)sen(t) + cos(t)sen(t) + cos(t)cos(t)dt) =$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} sen(t)sen(t) + cos(t)cos(t)dt =$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} 1dt = \pi$$

Ulises Wainstein Haimovichi