Complementos a clases teóricas 7 y 8

(Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3)

- Regiones donde vale el teorema de Green.
- Importancia de las hipótesis!

Recordemos...

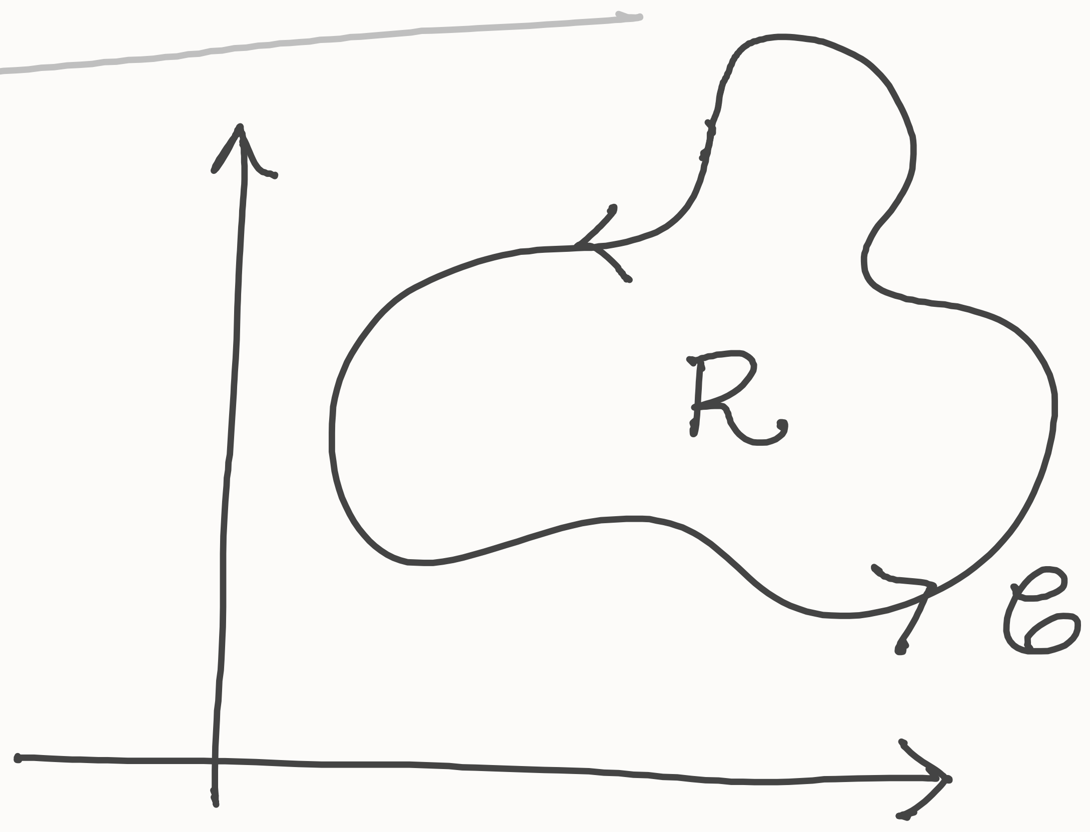
Teorema de Green:

. Sea $F=(P,Q)$ definido en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ de clase C^1

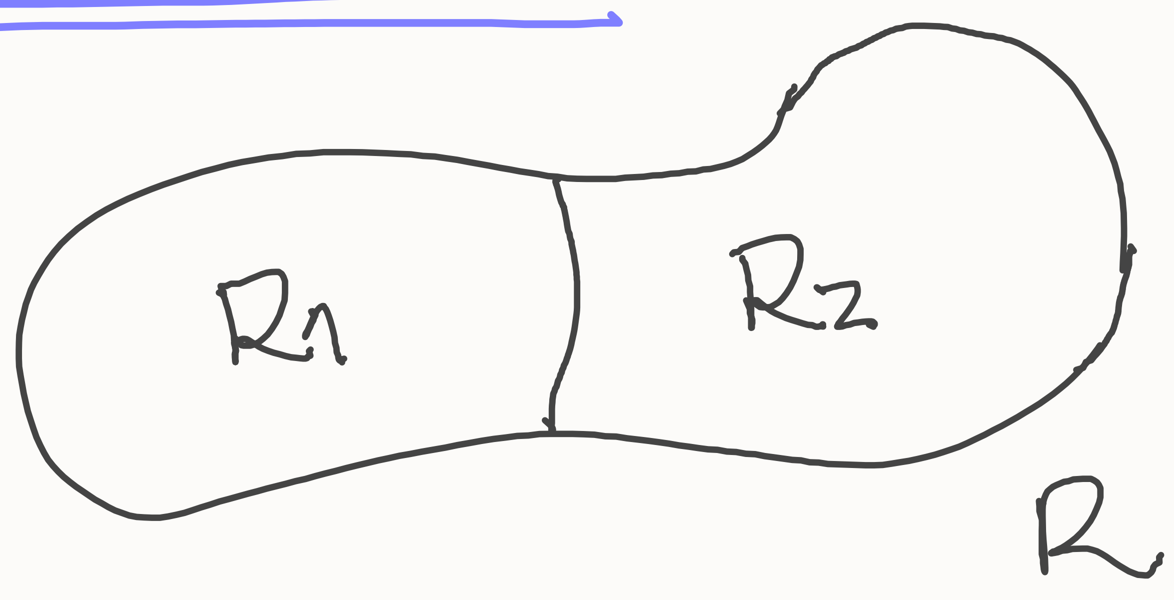
. Sea C una curva del plano, cerrada, simple orientada positivamente y dif. a trozos, que encierra una región $R \subseteq \Omega$ de tipo III.

Entonces

$$\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$



Observación:



$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy +$$

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Por Green: $\displaystyle\iint_{R_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx\,dy=\int_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx+Q\,dy$

y lo mismo para $R_2 \wedge \mathcal{C}_2^+$.

Además también vale

$$\iint_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx+Q\,dy.$$

Por lo tanto, tiene que valer:

$$\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx+Q\,dy=\int_{\mathcal{C}_1^+} P\,dx+Q\,dy+\int_{\mathcal{C}_2^+} P\,dx+Q\,dy.$$

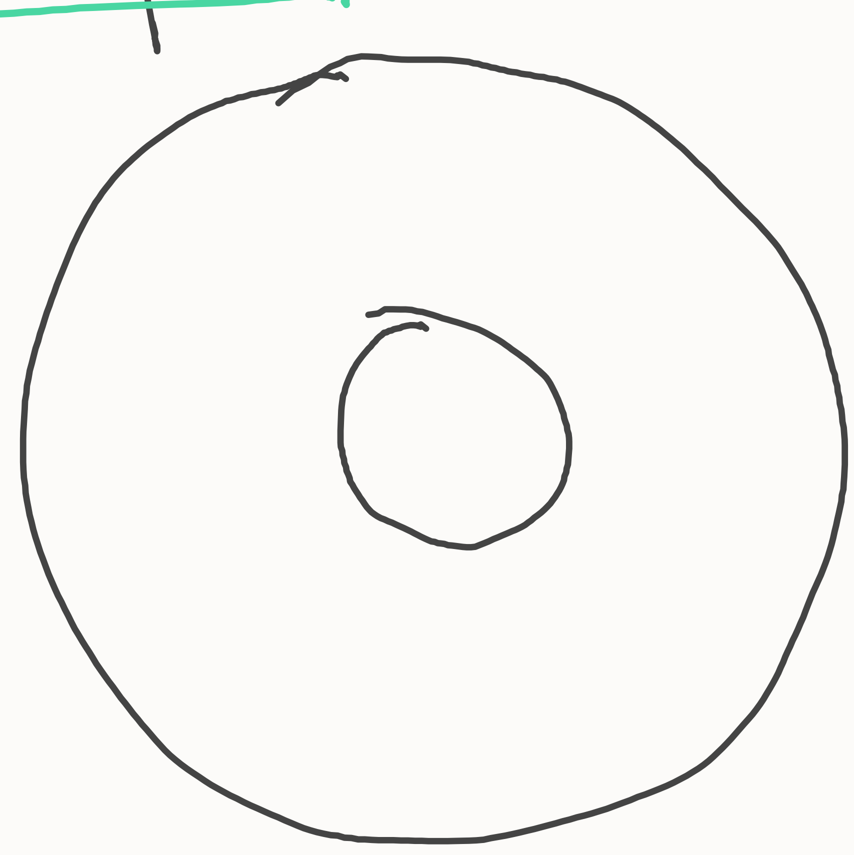
¿qué está pasando?

El borde entre R_1 y R_2 se recorre 2 veces pero en sentido contrario y entonces hay cancelación.

→ ¿Para qué sirve esta observación?

Para entender que el Teorema de Green vale para regiones más generales que aquellas de tipo III.

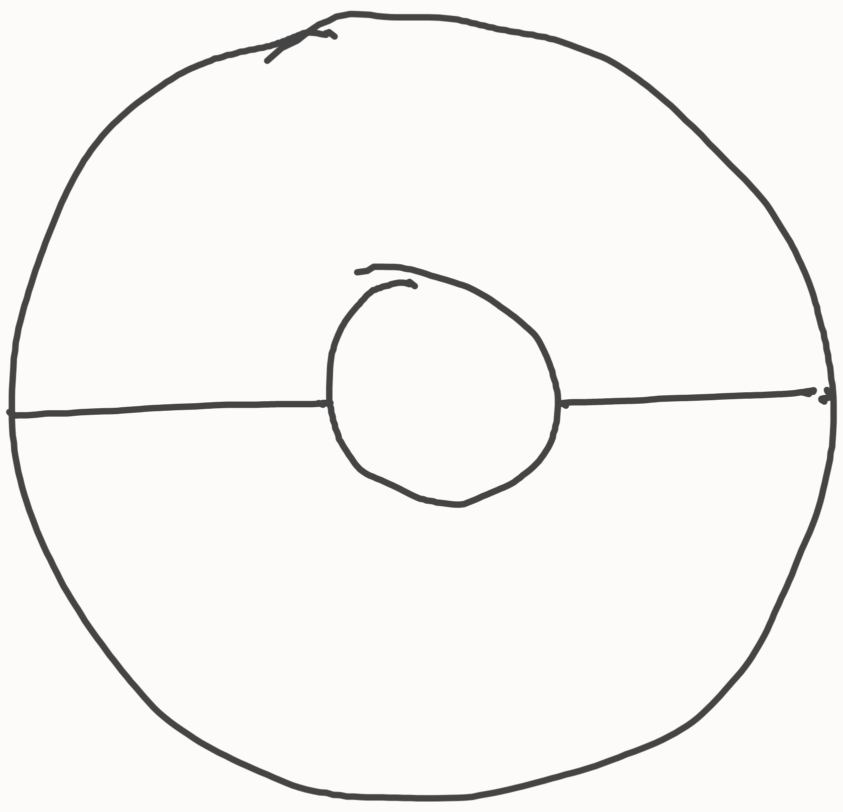
Ejemplo: $R=$ anillo, $\mathcal{C}^+=\partial R^+$.



R no es de tipo III

Idea: Lo partimos en regiones de tipo III.

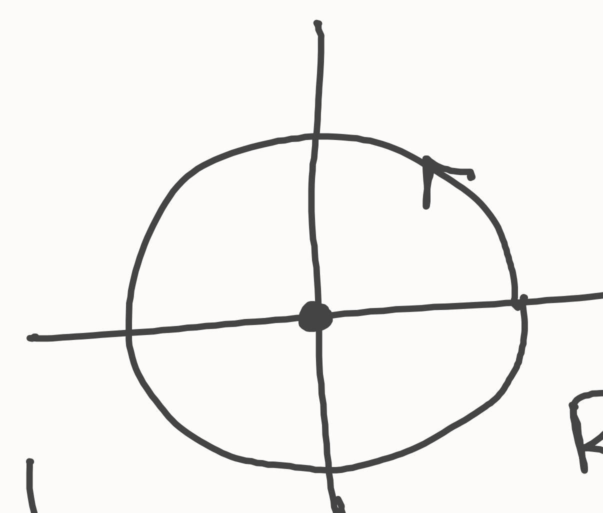
$R =$



Ejemplo:

Sea $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ es $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Sea $R = B_1(0,0)$



R

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \quad \text{vs} \quad \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \therefore \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = 0$$

Para calcular $\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy$ tomamos la parametrización de $\mathcal{C}^+$ dado por

$\sigma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} \langle (P(\sigma(\theta)), Q(\sigma(\theta))), \sigma'(\theta) \rangle\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \rangle \, d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Ojo! F no es $\mathscr{C}^1$ en R.