Práctica 4, Ejercicio 17

Análisis 2 - Mate 3

2do Cuatrimestre - 2020

Índice

1. Enunciado del problema
2. Parametrización de la superficie del Mate
3. Intento de resolver la integral directamente
4. Planteo de las condiciones para aplicar Teorema de Gauss
5. Resolución de las integrales en la tapa y de volumen
6. Resultado Final

1. Enunciado del problema

Dada la función $f(z) = \frac{1}{2}ze^{2-2z}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, con $0 \leq z \leq 1$.

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y agua caliente, el calor de un campo es dado por:

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right)$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

2. Parametrización de la superficie del Mate

Nos dicen que la superficie de la calabaza del Mate puede construirse por revolución alrededor del eje Z de la curva $x = f(z)$. Para poder construir esta superficie, primero parametricemos la curva.

Sea $\sigma_{(z)}$ la parametrización de mi curva, entonces puedo escribir $\sigma_{(z)} = (f(z), 0, z) = \left(\frac{1}{2}ze^{2-2z}, 0, z\right)$, con $0 \leq z \leq 1$.

Se puede ver rápidamente que $\sigma_{(z)}$ es una parametrización regular. Sus componentes son C^1 por ser composición y producto de funciones C^1, la tercer coordenada me determina que es inyectiva, y como al derivarla es una constante, entonces $\sigma'_{(z)} \neq (0, 0, 0), \forall\, z$

Graficando esta curva obtengo lo siguiente:

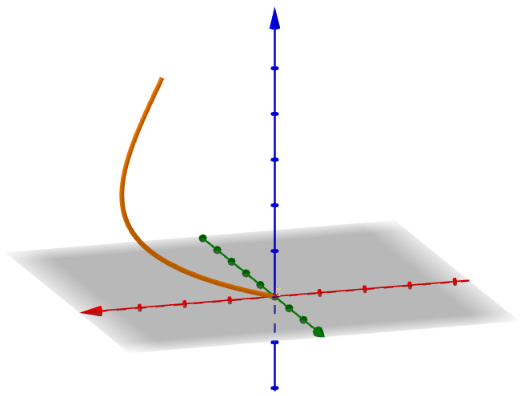

Figura 1: Curva que voy a revolucionar respecto del eje Z

Repasemos un segundo cómo revolucionar una curva respecto del eje Z. La idea es que vamos a tomar cada uno de los puntos de mi curva $\sigma_{(t)}$ y los vamos a girar usando al eje Z como centro de giro. Esto va a formar una circunferencia para cada altura de valor z entre 0 y 1. Estos puntos se van a rotar según un ángulo φ que va a variar entre 0 y 2π. De esta manera, y como se muestra en la próxima figura, en la parametrización de mi superficie, los valores en la coordenada x estarán asociados con el coseno de φ y los valores en la coordenada y con el seno de φ.

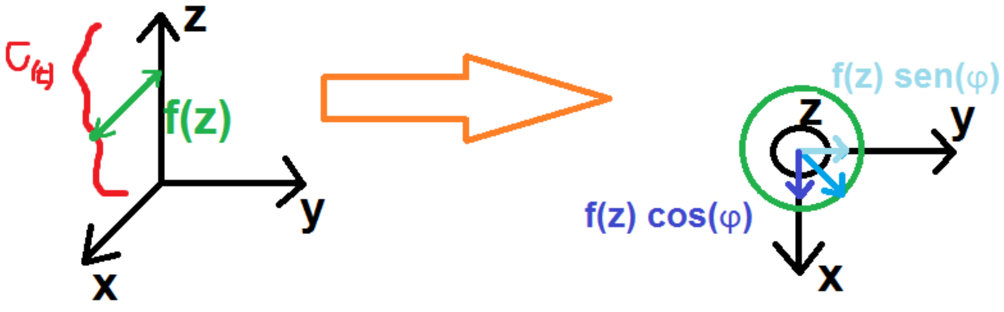

Figura 2: Revolucionando los puntos de σ respecto del eje Z

Finalmente, la parametrización de la superficie de mi calabaza de mate es:

$$T_{(z,\varphi)} = \left(\frac{1}{2}ze^{2-2z}cos(\varphi), \frac{1}{2}ze^{2-2z}sen(\varphi), z\right)$$

Graficada esta superficie nos queda:

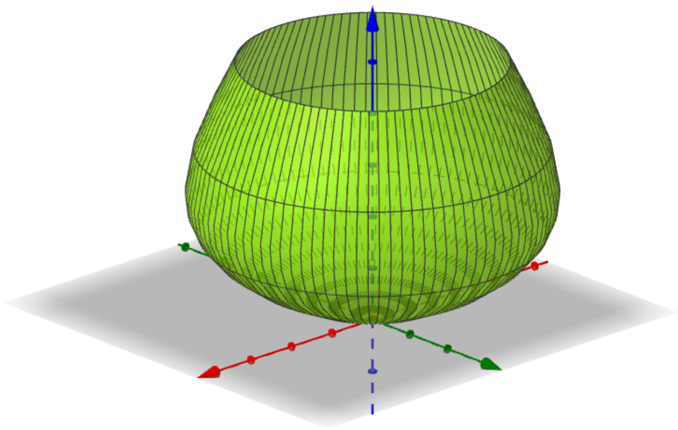

Figura 3: Gráfico de la superfice de la calabaza de Mate

(No se ve tan similar a la imagen de la guía, pero definitivamente se parece a la calabaza de un mate. Yo creo que la diferencia está dada porque la escala de los ejes que toman en la guía es distinta a la tomada en este dibujo)

3. Intento de resolver la integral directamente

Intentemos resolver el problema realizando la integral directamente. Por un lado, algunas de las cuentas que acá hagamos igualmente las hubiéramos hecho más tarde, pero **más importante**, siempre es una buena práctica comprobar si de verdad necesito aplicar un teorema antes de lanzarme ciégamente a hacerlo sólo porque creo que es lo que el profesor espera de mi.

La integral que nos piden hacer es:

$$\int_S \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds}$$

Con S la superficie de la calabaza de mate orientada con la normal externa. Ya tenemos una parametrización de S. Necesitamos calcular su normal y comprobar que efectivamente sea la externa.

3.1. Cálculo de la normal

$$
\begin{aligned}
T_z(z,\varphi) &= \left(\left[\frac{1}{2}e^{2-2z}+\frac{1}{2}ze^{2-2z}(-2)\right]cos(\varphi), \left[\frac{1}{2}e^{2-2z}+\frac{1}{2}ze^{2-2z}(-2)\right]sen(\varphi), 1\right)\\
T_\varphi(z,\varphi) &= \left(\frac{1}{2}ze^{2-2z}(-sen(\varphi)), \frac{1}{2}ze^{2-2z}cos(\varphi), 0\right)\\
T_z\times T_\varphi(z,\varphi) &= \frac{1}{2}ze^{2-2z}(-cos(\varphi), -sen(\varphi), \frac{1}{2}e^{2-2z}-ze^{2-2z})
\end{aligned}
$$

Notemos que si z=1 y $\varphi = 0$, el vector normal apunta en **dirección** $(-1, 0, -\frac{1}{2})$. Es decir, estando en el frente de la calabaza, el vector apunta hacia adentro de la superficie. Esta orientación es la contraria de lo que me pide el enunciado. Entonces puedo simplemente cambiar el signo de la integral y listo.

Por otra parte, si $z = 0$, es decir en la punta inferior del mate, el vector normal se me anula.Aún así, esto no representa un problema, ya que esto se produce en el borde de mi dominio. Puedo restringir mi dominio tomando el conjunto semiabierto para z: $(0, 1]$ y el resultado de la integral no se modifica. Esto es porque la contribución de la integral sobre una línea es despreciable cuando mi región de integración es una superficie.

3.2. Planteo de la integral de Flujo

$$
\begin{aligned}
\int_s \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds} &= -\int_0^1\int_0^{2\pi}\overrightarrow{F}_{T(z,\varphi)}(T_z\times T_\varphi)\,d\varphi dz =\\
&= -\int_0^1\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}ze^{2-2z}cos(\varphi), \frac{1}{2}ze^{2-2z}sen(\varphi), z-\frac{1}{2})\cdot\\
&\quad\cdot\frac{1}{2}ze^{2-2z}(-cos(\varphi), -sen(\varphi), \frac{1}{2}e^{2-2z}-ze^{2-2z})\,d\varphi dz
\end{aligned}
$$

Esta integral se ve bastante fea, aunque no es imposible. Se volvería muy extensa y engorrosa, pero definitivamente se puede lograr.

Ahora entonces, sabiendo qué es lo que nos espera para resolver en esta dirección, cabe preguntarnos:

¿Qué tan difícil sería si aplicamos el Teorema de Gauss e intentamos integrar en el volumen? Calculemos la divergencia de F.

$$
\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F} = div(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\partial z} = 1+1+1 = 3
$$

La divergencia me da una constante. Eso es algo super fácil de integrar, y además me marca que cuando pase a la integral en volumen lo que voy a tener que calcular es el volumen encerrado por mi superficie. Pareciera que es ganancia aplicar el Teorema de Gauss, así que vamos a intentar hacer eso.

4. Planteo de las condiciones para aplicar el Teorema de Gauss

Para aplicar el Teorema de la divergencia de Gauss tenemos que comprobar que nuestro campo $\overrightarrow{F}$ sea C^1 en $\mathbb{R}^3$, (o por lo menos en la región donde voy a aplicar el teorema). Claramente el campo es re contra C^1, así que eso es un problema menos.

Pero tenemos todavía un segundo problema, que es que la superficie S no es una superficie cerrada y por tanto no puedo aplicar el Teorema. Esto se puede solucionar si le colocamos una tapa en el agujero superior a la superficie S. Como sé que la parametrización de S está hecha por revolución y que el z se mueve entre 0 y 1, sé que puedo usar como tapa un disco de radio *f(1)* ubicado a la altura z = 1.

La parametrización de este disco, al cual llamaré D_1 es:

$$T_D(r,\theta) = (r\,cos(\theta), r\,sen(\theta), 1)\,, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}\,, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

En la figura 4 se puede observar como queda la superficie cerrada $\tilde{S}$ que es unión de la calabaza y del disco, es decir, $\tilde{S} = S + D_1$

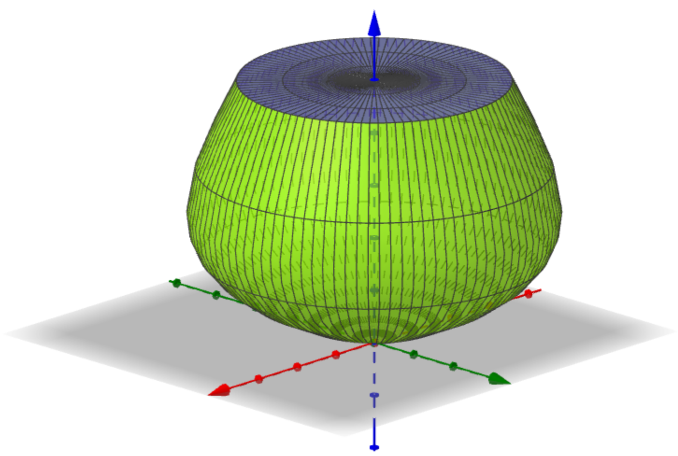

Figura 4: Superficie $\tilde{S}$ que es unión del Disco y de S

Con todo esto aclarado, entonces el Teorema de la divergencia implica lo siguiente:

$$\int\int_{\tilde{S}} \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds} = \int\int_{S} \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds} + \int\int_{D_1} \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds} = \int\int\int_{V} \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F}\,dV$$

$$\int\int_{S} \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds} = \int\int\int_{V} \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F}\,dV - \int\int_{D_1} \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds}$$

5. Resolución de las integrales en la tapa y de volumen

5.1. Integral en la tapa

Comencemos integrando en la tapa. La parametrización de esta región ya la tenemos de antes. La normal de esta superficie será $T_{D_r} \times T_{D_\theta} = (0, 0, r)$. Podemos ver que como r es mayor a cero, esta normal apunta hacia arriba. Esta es la orientación correcta ya que el Teorema de Gauss nos pide la normal externa.

Cabe destacar que para $r = 0$ la normal se me anula. Para evitar este problema, removemos ese punto de la superficie, recordando que remover un punto no modifica el valor de la integral. Mi región de integración será ahora: $\left(0, \frac{1}{2}\right] \times [0, 2\pi]$ para r y θ

Ahora sí, procedamos a integrar.

$$\int\int_{D_1} \vec{F}\vec{ds} = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} (r\,cos(\theta), r\,sen(\theta), 1 - \frac{1}{2}) \cdot (0, 0, r)\, d\theta dr =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r\, d\theta dr = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} r\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{\frac{1}{2}} 2\pi = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} 2\pi = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

Algo interesante de observar acá es que esta integral resultó muy sencilla. Eso es simplemente porque la región y el campo a integrar son sencillos. Es decir, la primer integral resultó compleja no porque el campo fuera asqueroso, sino porque la región del mate es difícil. Pero el campo no era el problema. Pensemos que si el campo fuera muy feo, pasar a hacer Gauss no necesariamente sería una solución, porque la nueva región podría no ser mejor y seguiría teniendo el mismo campo molesto.

5.2. Integral en el Volumen

Yo quiero calcular la siguiente integral:

$$\int\int\int_V \vec{\nabla}\vec{F}\, dV = \int\int\int_V 3\, dV = 3 \int\int\int_V dV = 3Vol(V)$$

Entonces la integral de la divergencia se resuelve si puedo calcular el volumen de la calabaza. A partir de acá, la forma que cada uno elija para hacerlo depende de gustos. A continuación algunas que se me ocurren:

- Dada la forma de la calabaza, creo que se podría intentar integrar con esféricas, aunque habría que encontrar el centro de la calabaza para integrar desde ahí, y también habría que ver que el radio ρ variaría seguramente con el ángulo azimutal φ. Por no mencionar que además el ángulo azimutal no recorrería el clásico intervalo de $[0, \pi]$.

- Sabiendo que la calabaza fue construída por revolución, eso significa que para cada altura z se tiene un disco. Entonces, como los discos son paralelos al plano xy, también es viable integrar por cilíndricas. Suena mucho más cómodo que esféricas en este caso.

- Esta opción es la que voy a tomar yo, que es casi como el punto anterior pero resumiendo dos integrales. Como yo sé que puedo construir el volumen de la calabaza apilando discos, entonces puedo aplicar el método de Cavallieri. Entonces simplemente integro en z el área de los discos y listo. Estos discos tienen radio *f(z)*.

$$Vol(V) = \int_0^1 \pi (f(z))^2 \, dz = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2} z e^{2-2z} \right)^2 dz = \frac{\pi}{4} \int_0^1 z^2 e^{4-4z} \, dz = \dots$$
$$\dots = \boxed{\frac{\pi}{4} \left[\frac{e^4}{16} - \frac{7}{16} \right]}$$

Queda como ejercicio el resolver la integral. Sale haciendo integral por partes dos veces, no conlleva mayores problemas.

6. Resultado Final

Ya hicimos todas las cuentas, lo único que queda es simplemente juntar todos los resultados:

$$\int\int_S \overrightarrow{F} \overrightarrow{ds} = \int\int\int_V \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{F} \, dV - \int\int_{D_1} \overrightarrow{F} \overrightarrow{ds} = \frac{\pi}{4} \left[\frac{e^4}{16} - \frac{7}{16} \right] - \frac{\pi}{8} \approx 1{,}94$$

Y con esto, obtuvimos el flujo de la temperatura a través del mate que nos pedían. Fíjense que el resultado es positivo. Esto nos indica que el flujo neto de calor es hacia afuera, es decir que se me enfría el mate. Digo flujo neto porque esto **no** significa que en todo punto de la superficie el flujo sea externo. Si bien este es un ejercicio de matemática, es decir que no tendría porque tener sentido con lo que uno esperaría, es bueno ver que el resultado coincide con lo que uno intuiría que sea el resultado, que es que el mate pierde calor por su pared. Obsérvese también que este resultado nos habla únicamente del calor perdido por la pared, no me dice nada del que se pierde por el agujero superior del mate. ¿Cómo sería el resultado del flujo si tomara en cuenta el calor que se pierde por la tapa?

(En el caso particular de este ejercicio, a ojo pareciera que efectivamente el campo F apunta para afuera en todo punto de la superficie del mate, por tanto en todo punto su flujo es externo. Aún así, a riesgo de ser redundante, vuelvo a recalcar que la integral de flujo me da el resultado del flujo total, no me dice si en la mitad de la superficie tengo flujo entrante y en la otra mitad saliente. Si yo quiero saber como es el flujo de un campo en un punto de una superficie, evalúo el campo en ese punto y miro para donde apunta el vector.)