Práctica 0 Ejercicio 9

Análisis 2

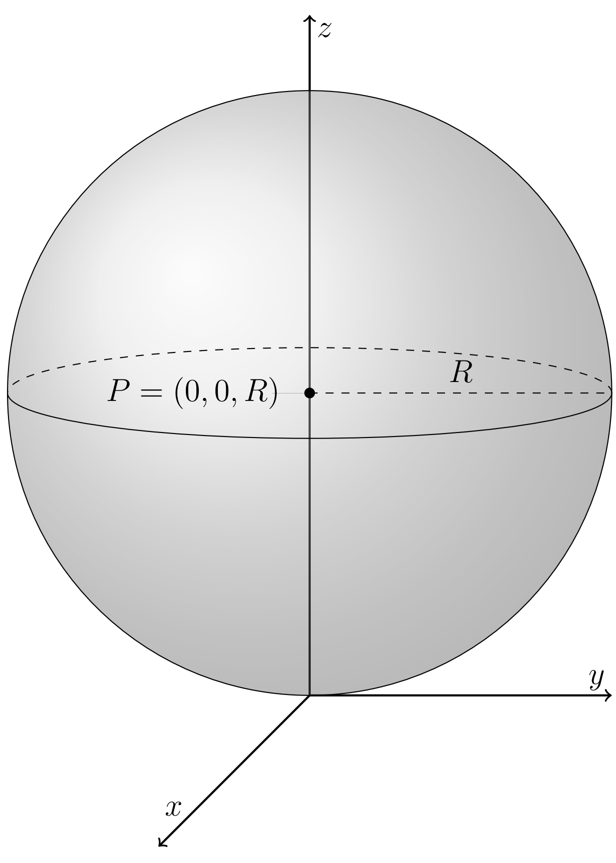
2do Cuatrimestre 2020

Enunciado

Masa. Hallar la masa de la región esférica $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa ρ es proporcional a la componente z, digamos $\rho = \lambda z$.

1. Resolución

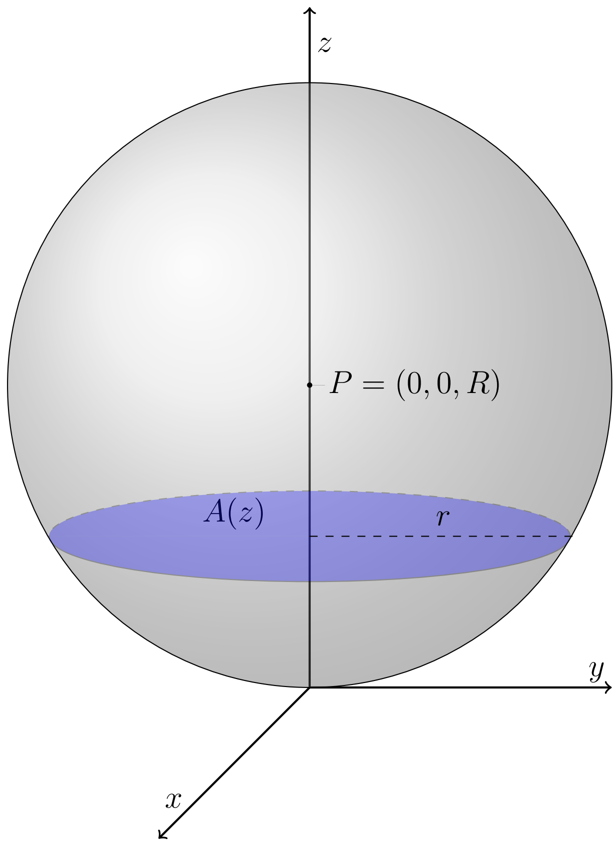
En estos ejercicios lo mejor es empezar graficando la esfera en los ejes cartesianos. A partir de la ecuación que define a la esfera podemos ver que tenemos una esfera de radio R centrada en el punto $(0, 0, R)$



Como la densidad solo depende de z podemos utilizar el principio de Cavalieri para integrar a lo largo del eje z. Si reemplazamos la integración en x e y por el área de las secciones de la esfera en función de z, $A(z)$, la cuenta se simplifica bastante. En este caso la masa queda

$$M = \int_V \rho dxdydz = \int_0^{2R} \lambda z A(z) dz. \tag{1}$$

En el siguiente esquema podemos ver una de las secciones de la esfera de area $A(z)$.



Estas secciones son círculos de radio r así que como sabemos su área es πr^2. Necesitamos obtener $r(z)$ para poder calcular la masa de la esfera. Notemos que $r^2 = x^2 + y^2$ así que podemos obtener la expresión r en función de z a partir de la ecuación que define la esfera

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2 \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = -z^2 + 2Rz - R^2 + R^2 \tag{3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = -z^2 + 2Rz \tag{4}$$

Entonces ahora tenemos $r(z)$ y podemos obtener $A(z)$ para calcular la masa.

$$M = \int_0^{2R} \lambda z A(z) dz = \int_0^{2R} \lambda z \pi (-z^2 + 2Rz) dz \tag{5}$$

Ahora tenemos un polinomio que ya sabemos integrar y obtenemos

$$M = \lambda\pi \left[-\frac{z^4}{4} + 2R\frac{z^3}{3} \right]_0^{2R}. \tag{6}$$

Finalmente el valor de la masa es

$$M = \frac{4}{3}\lambda\pi R^4. \tag{7}$$