1	2	3	4
3	R	R+	B

Calificación
A

F

Apellido y Nombre: [redacted]

No. de libreta: [redacted]

E-mail: [redacted]

Turno: Mañana / Tarde / Noche

FÍSICA

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3
Segundo Parcial (25/11/17)

1. Consideremos la ecuación diferencial

$$\text{(R)} \quad y' + A(x)\,y + B(x)\,y^2 = C(x).$$

   a) Sea y_1 una solución de (R). Probar que existen funciones $P(x)$ y $Q(x)$ tales que si z es solución de

$$\text{(L)} \quad z' + P(x)\,z = Q(x)$$

   entonces $y_2 = y_1 + \frac{1}{z}$ es solución de (R).

   b) Sabiendo que $y_1 = 2$ es solución de

$$y' + y - y^2 = -2,$$

   hallar una solución y_2 tal que $y_2(0) = 3$.

2. Hallar una solución (implícita) a la ecuación diferencial

$$(3x - 5y)\,dx - (x + 9y)\,dy = 0$$

   que satisfaga $y(0) = 1$, sabiendo que existe una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(x, y) = \varphi(x + y)$ es un factor integrante de la ecuación.

3. Consideremos la ecuación diferencial

$$x\,y'' - (x+1)\,y' + y = x^2\,e^x \qquad (x > 0).$$

   Sabiendo que $y(x) = e^x$ es solución de la ecuación homogénea asociada, hallar todas las soluciones de la ecuación.

4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' &= y - x^2 y, \\ y' &= xy + x. \end{cases}$$

   a) Esbozar el diagrama de fases del sistema en un entorno de $(0, 0)$.

   b) Hallar todos los puntos de equilibrio del sistema y analizar la estabilidad de cada uno de ellos.

Justifique todas las respuestas, no omita detalles y sea claro al escribir.

1) a)

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y_2^2 = y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$y_2' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

$$y_2' + A(x)\cdot y_2 + B(x)\cdot(y_2)^2 = C(x)$$

$$\underbrace{y_1' - \frac{z'}{z^2} + A(x)\,y_1 + \frac{A(x)}{z} + B(x)\cdot y_1^2}_{=\,C(x)} + \frac{2y_1 \cdot B}{z} + \frac{B}{z^2} = c(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{A}{z} + \frac{2y_1 B}{z} + \frac{B}{z^2} = 0$$

Lo dejo en Standby

yo se que $z = \dfrac{\int e^{\int P dx}\cdot Q \, dx}{e^{\int P dx}} \Rightarrow z' = \dfrac{e^{\int P dx}\cdot Q - P e^{\int P dx}\cdot \int e^{\int P dx}\cdot Q}{e^{2\int P dx}}$

$$z' = Q - \frac{P \cdot \int e^{\int P dx}\cdot Q}{e^{\int P dx}}$$

Vuelvo

~~Vuelvo~~ a lo mio

$$\frac{1}{z}\left(\frac{-z'}{z} + A + 2y_1 B + \frac{B}{z}\right) = 0$$

Me tiro a remplazar

$$\frac{-e^{2\int P dx}\cdot Q + P e^{\int P dx}\cdot \int e^{\int P dx}\cdot Q}{e^{2\int P dx}} \cdot \frac{\cancel{e^{\int P dx}}}{\int e^{\int P dx}\cdot Q} + A + 2y_1 B + \frac{B}{\int e^{\int P dx}\cdot Q}\cdot e^{\int P dx}$$

$$-\frac{e^{\int P dx}\cdot Q}{\int e^{\int P dx}\cdot Q} + P\cdot\cancel{z} + A + 2y_1 B + \frac{e^{\int P dx}\cdot B}{\int e^{\int P dx}\cdot Q} = 0$$

$$\frac{e^{\int P\,dx}(B-Q)}{\int e^{\int P\,dx}\cdot Q} + P + A + 2y_1 \cdot B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B = Q}$$
$$\boxed{P = -A - 2y_1 \cdot B}$$

Bien

b) $y' + y - y^2 = -2$; $y_2 = y_1 + \frac{1}{z}$

z es solución de

$A = 4$
$B = -1$
$y_1 = 2$

$$z' + P(x) \cdot z = Q(x)$$
$$z' + [(-1) + 4] \cdot z$$
$$z' + 3z = -1$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{3\int dx} = e^{3x} \Rightarrow e^{3x} \cdot z = -\int e^{3x} = \frac{-e^{3x}}{3} + c$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{3} + \frac{c}{e^{3x}}}$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{1}{z} = 2 + \frac{1}{\frac{-e^{3x}+c}{3e^{3x}}}$$ → Pero una c distinta

$$y_2 = 2 + \frac{3e^{3x}}{-e^{3x}+c} \qquad y_2(0) = 3$$

$$\Rightarrow y_2(0) = 2 + \frac{3}{-1+c} \Rightarrow c = 4$$

$$\boxed{y_2(x) = 2 + \frac{3e^{3x}}{-e^{3x}+4}}$$

$$y_2'(x) = \frac{9e^{3x} \cdot (-e^{3x}+4) + \cancel{(-e^{3x}+2)}\; 3e^{3x} \cdot (+3e^{3x})}{(-e^{3x}+4)^2}$$

$$y_2'(x) = \frac{9e^{3x} \cdot (-e^{3x}+4) + 9e^{6x}}{(-e^{3x}+4)^2}$$

$$y_2^2 = 4 + \frac{\cancel{4}^{12} \cdot \cancel{3}e^{3x}}{-e^{3x}+4} + \frac{9e^{6x}}{(-e^{3x}+4)^2}$$

FECHA

$\Rightarrow y' + y - y^2 = -2$

$$\frac{9e^{3x}(-e^{3x}+4)\cancel{+9e^{6x}}}{(-e^{3x}+4)^2} + 2 + \frac{3e^{3x}}{(-e^{3x}+4)} - 4 - \frac{12e^{3x}}{-e^{3x}+4} - \cancel{\frac{9e^{6x}}{(-e^{3x}+4)^2}}$$

$$\frac{9e^{3x}}{(-e^{3x}+4)} + \frac{3e^{3x}}{(-e^{3x}+4)} - \frac{12e^{3x}}{(-e^{3x}+4)} + 2 - 4 = \boxed{-2}$$

Bien

Podías tomar directamente P y Q definiéndolos ej ahorrabas cuentas.

2) $\underbrace{(3x-5y)}_{M}dx - \underbrace{(x+9y)}_{N}dy = 0$

$M_y = -5$; $N_x = -1$; No es exacto

Lógica: ~~$\mu \cdot M_y = 2\mu \cdot N_x$~~ $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot M_y = \dfrac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + N_x \cdot \mu$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(3x-5y) - 5\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot (-x-9y) - \mu$$

Pero que haso yo le que $\mu(x,y) = \varphi(x+y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \varphi' \cdot (x+y)'$$
$$= \varphi' \cdot 1 = \varphi'$$

$$\Rightarrow \varphi'(3x-5y) - 5\varphi = \varphi'(-x-9y) - \varphi$$

$$\varphi'(3x-5y+x+9y) = 4\varphi$$

$$\varphi'(4x+4y) = 4\varphi$$

$$\varphi'(x+y) = \varphi$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{x+y}$$

Cambio de variable y entonces

$$\int \frac{1}{\varphi}\, d\varphi = \int \frac{1}{w}\, dw \qquad w = x+y$$

$$\ln(|\varphi|) = \ln|x+y|$$

$$e^{\ln(|\varphi|)} = e^{\ln|x+y|} \Rightarrow \boxed{\varphi = x+y}$$

Escaneado con CamScanner

Comparando $\overbrace{(x+y)(3x-5y)}^{\tilde{M}}\, dx \;-\; \overbrace{(x+9y)(x+y)}^{\tilde{N}}\, dy$

$\tilde{M} = 3x^2 - 5yx + 3xy - 5y^2 = 3x^2 - 2xy - 5y^2$

$\tilde{M}_y = -2x - 10y$

$\tilde{N} = -\left[x^2 + 9xy + yx + 9y^2\right] = -\left[x^2 + 10yx + 9y^2\right]$

$\tilde{N} = -x^2 - 10yx - 9y^2$

$\tilde{N}_x = -2x - 10y$

$\tilde{M}_y = \tilde{N}_x$ ✓

$\Rightarrow (3x^2 - 2xy - 5y^2)\,dx + (-x^2 - 10yx - 9y^2)\,dy$

$\int (3x^2 - 2xy - 5y^2)\,dx = x^3 - x^2y - 5y^2x + C(y) + K$

$\int (-x^2 - 10yx - 9y^2)\,dy = \cancel{x^3} - x^2y - 5y^2x - 3y^2 + C(x) + K$

~~Puse C y R solo para~~

$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = x^3 - 3y^2 - x^2y - 5y^2x = K}$

Falta $y(0) = 1$

NOTA

3) $xy'' - (x+1)\,y' + y = x^2 e^x \quad (x>0)$

$y_1(x) = e^x$ es solución de la homogénea

$\Rightarrow y_2(x) = y_1(x)\cdot \cancel{v}(x) = e^x \cdot v(x)$

$\Rightarrow y_2'(x) = y_1'(x)\cdot v(x) + y_1(x)\cdot v'(x) = e^x\cdot(v+v')$

$y_2''(x) = y_1''(x)\cdot v(x) + y_1'(x)\cdot v'(x) + y_1'(x)\cdot v'(x) + y_1(x)\cdot v''(x)$

$y_2''(x) = y_1''(x)\cdot v(x) + 2y_1'(x)\cdot v'(x) + y_1(x)\cdot v''(x)$

$y_2''(x) = e^x\cdot(v + 2v' + v'')$

$\Rightarrow x\,y' - (x+1)y' + y = 0 \quad$ (Homogénea)

$+(-x-1)$

$\cancel{e^x}\cdot\left[x\cdot(v+2v'+v'') - (x+1)(v+v') + v\right] = 0$

$\cancel{xv} + x2v' + xv'' - \cancel{xv} - xv' - \cancel{v} - v' + \cancel{v} = 0$

$xv'' + xv' - v' = 0$

$\boxed{xv'' + (x-1)v' = 0}$

$z = v' ;\ z' = v''$

$x z' + (x-1)\cdot z = 0$

$x z' = (1-x)\cdot z$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

Entonces hago un cambio de variable y...

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx - \int dx$$

$\ln(|z|) = \ln|x| - x + C$

$\boxed{z = x\cdot e^{-x}\cdot C}$

NOTA

$$\Rightarrow \int v' = v = c_1 \cdot \underbrace{\int x e^{-x} \, dx}_{\text{I}}$$

I

$$\int \underset{u}{x} \underset{w'}{e^{-x}} dx = -x e^{-x} + \int 1 \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$

$w' = e^{-x}$

$w = -e^{-x}$

$u = x$

$u' = 1$

$$\Rightarrow v = c_1 \cdot (-x e^{-x} - e^{-x} + c_2)$$ Pero distintas c_2

$$v = c_1 \cdot (-x e^{-x} - e^{-x}) + c_2$$

$$\Rightarrow y_2 = e^x \cdot v = e^x \cdot c_1 \cdot (-x e^{-x} - e^{-x}) + c_2$$

$$y_h = c_1 \cdot (-x - 1) + e^x \cdot c_2$$ (me quedaron al revés numeradas las cts.)

Compruebo si $(-x-1)$ funciona $\Rightarrow y_2 = -x-1$; $y_2' = -1$; $y_2'' = 0$

$$\Rightarrow x y'' - (x+1) y' + y = 0$$

$$-(x+1)(-1) + (-x-1) = 0$$

$$x + 1 - x - 1 = 0$$

$\Rightarrow$

~~$y_H = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot$~~

$$\boxed{y_H = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot (-x-1)}$$

La verdad es que estoy medio bloqueado con esto y no me acuerdo de un método para encontrar la particular, pero después de un par de intentos noté que $\frac{x^2 \cdot e^x}{2}$ cumple

$$\Rightarrow y_p = \frac{x^2 e^x}{2} \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^x + c_2 \cdot (-x-1) + \frac{x^2 e^x}{2}}$$

(El "desarrollo" de mi pseudo tanteo está en la hoja siguiente)

$\cancel{2}x^2 e^x = y_p \qquad y_1' = \cancel{2}e^x + x \cdot e^x$

$y'' = 2e^x + e^x \cdot x$

$\cancel{x^2 e^x} - (x+1)$
$+(-x-1) \quad -xe^x \cancel{-x^2e^x} - e^x \cancel{-xe^x} + \cancel{e^x} 2x$

$x' = -1 + +1 \cdot -1 = -1-1 = \boxed{-2}$

$x^2 e^x = y \qquad xy'' - \underbrace{(x+1)}_{-x-1} y' + y = x^2 e^x$

$y' = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2$

$y'' = 2e^x + 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2 + \cancel{2x\,e^x}$

$\cancel{2xe^x} + \underset{2}{\cancel{4}}x^2e^x + \cancel{x^3e^x} - \cancel{2x^2e^x} - \cancel{e^x x^3} - \cancel{2xe^x} - \cancel{e^x x^2} + \cancel{x^2 e^x}$

$2x^2e^x =$

$\cancel{\frac{x^2 e^x}{2}}$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^x$

$y_p' = \frac{1}{2}(2x e^x + x^2 e^x) = xe^x + \frac{x^2 e^x}{2}$

$y_p'' = \frac{1}{2} \cdot (2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x)$

$= \frac{1}{2} \cdot (2e^x + 4xe^x + x^2e^x)$

$y_p'' = e^x + 2xe^x + \frac{x^2 e^x}{2}$

$\Rightarrow y_p'' \cdot x + (-x-1)\, y_p' + y_p = \cancel{xe^x} + \cancel{2}x^2e^x + \cancel{\frac{x^3 e^x}{2}} - \cancel{x^2e^x} - \cancel{\frac{x^3e^x}{2}} - \cancel{xe^x} - \cancel{\frac{x^2e^x}{2}} + \cancel{\frac{x^2e^x}{2}}$

$= x^2 e^x$

(No pretendía entregar esta hoja, por eso el mamarracho)

NOTA

4) $x' = y - x^2 y$ ①

$y' = xy + x$ ②

Hallo puntos de equilibrio

① $y - x^2 y = 0$ $\Rightarrow y = 0$

$y \cdot (1 - x^2) = 0$ ó $x = 1$

$x = -1$

② $xy + x = 0$

$x(y+1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ ó $y = -1$

Meto los resultados de ① en ② y viceversa

$\Rightarrow$ $y = 0$

② $x(0+1) = x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

$x = 1$

$y + 1 = 0$

$y = -1$

$\Rightarrow (1,-1)$

$x = -1$

$-y - 1 = 0 \Rightarrow (-1,-1)$

$y = -1$

~~Es son equilibrio constantes~~

① $x = 0$

$y \cdot 1 = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = -1 \Rightarrow -1 + x^2 = 0$ $\boxed{x = \pm 1}$

~~$y = -1$ $-1 + x^2 = 0$ $x = \pm i$ esto no lo voy a tener en cuenta~~

$\Rightarrow$ ① $y(1 - x^2) = 0$

② $x(y+1) = 0$

Ptos de equilibrio

$(0,0)$; $(1,-1)$ $(-1,-1)$

Analizo la estabilidad

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy & 1 - x^2 \\ y + 1 & x \end{pmatrix}$$

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

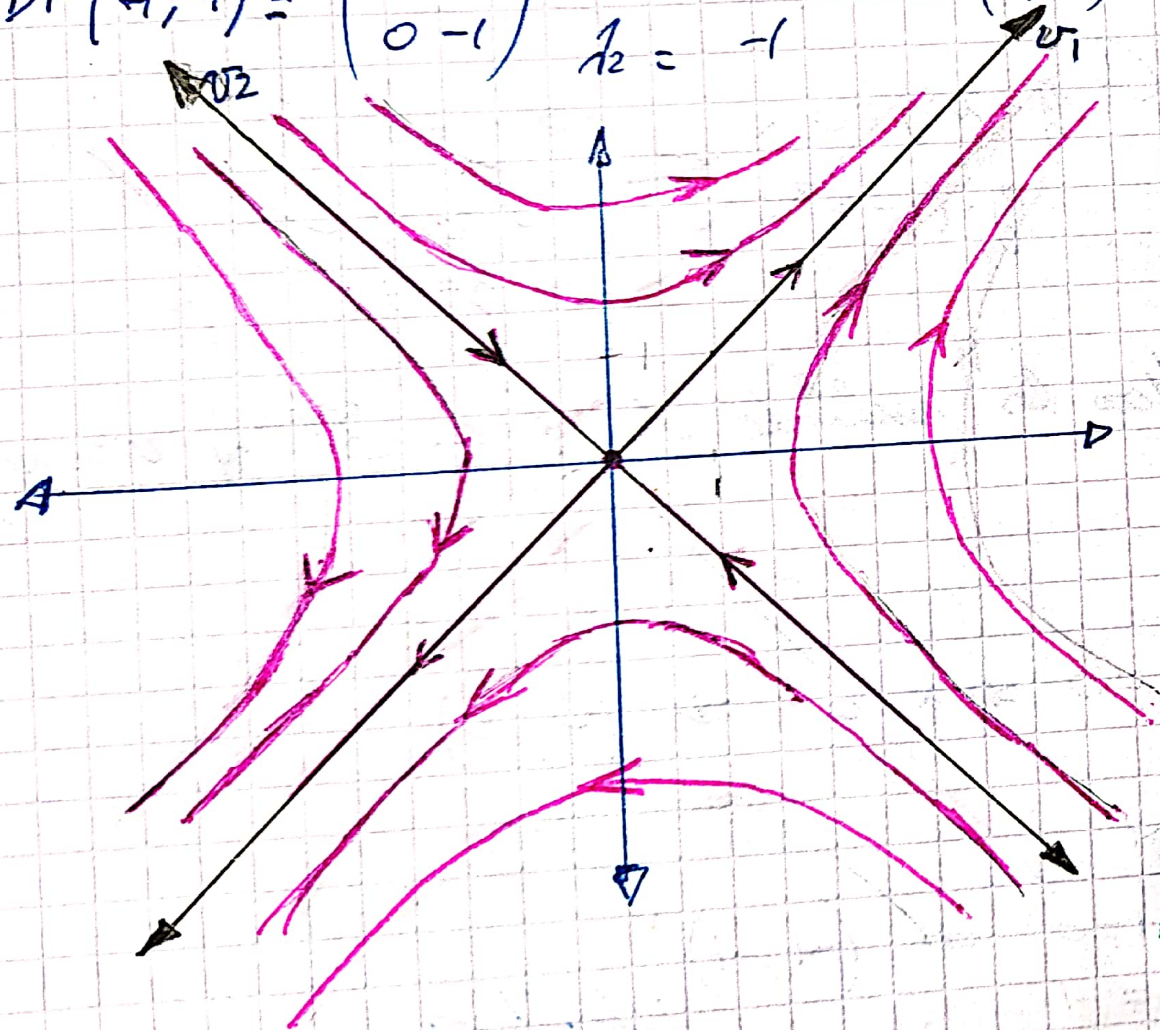
$\Rightarrow +\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

$(0,0)$ Es INESTABLE

$$DF(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow (1,-1) \text{ es INESTABLE}$$

$$DF(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow (-1,-1) \text{ Es estable}$$



$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x_1 = x_2 \quad v_1 = (1,1)$$

$\underline{\lambda_2 = -1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x_1 = -x_2 \quad v_2 = (-1,1)$$

Bien