$\boxed{\text{Complemento a clases teóricas 20 y 21}}$

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3 -

⊛ Resumen / Repaso

———— × ———— × ———— × ———— × ————

Si tenemos $\boxed{X' = AX}$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{X(t) = v e^{\lambda t}}}$ con λ autovalor de A

y v autovector asociado a λ es una

solución del sistema.

• **Observaciones útiles:**

$\boxed{1}$ Si $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $X(t) = v e^{\lambda t}$ es una función

compleja.

- Como $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\Rightarrow$ $\overline{X(t)} = \bar{v} e^{\bar{\lambda} t}$ también

es solucion (compleja)

- Para obtener soluciones reales consideramos

$Re(X(t))$ y $Im(X(t))$.

$\boxed{2}$ Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor doble $\Rightarrow$

$\tilde{X}(t) = (tv + w) e^{\lambda t}$ también es solución

con v autovector asociado a λ y

w solución de $(A-\lambda I)w = v$.

Tenemos lo siguiente:

Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $X' = AX$ sistema de 2×2

$\Rightarrow \chi_A(\lambda)$ polinomio de grado 2 con coef. en $\mathbb{R}$. Hay que mirar sus autovalores!

→ Existen sólo 3 posibilidades:

1 χ_A tiene 2 autovalores en $\mathbb{R}$ distintos:

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t} \wedge X_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$

son soluciones li y entonces todas las soluciones son de la forma

$$\boxed{X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

2 χ_A tiene raíces complejas:

$\lambda = a+ib$
$\bar{\lambda} = a-ib$, $b \neq 0$.

$\Rightarrow X(t) = v e^{\lambda t} \wedge \bar{X}(t) = \bar{v} e^{\bar{\lambda} t}$ son soluciones en $\mathbb{C}$ linealmente independientes.

$\Rightarrow \{Re(X(t)), Im(X(t))\}$ forman una base de soluciones en $\mathbb{R}$. Luego, todas las soluciones son

$$\boxed{Y(t) = C_1 Re(X(t)) + C_2 Im(X(t)),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

3) X_A tiene una única raíz en $\mathbb{R}$ (doble)

Si λ es autovalor y v autovector asociado

$\Rightarrow X_1(t) = v e^{\lambda t} \wedge X_2(t) = (tv + w) e^{\lambda t}$

con w solución de $(A - \lambda I)w = v$ son soluciones l.i. de $X' = AX \Rightarrow$ la sol. general

$$\boxed{X(t) = C_1 v e^{\lambda t} + C_2 (tv + w) e^{\lambda t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

- Ecuaciones lineales de orden 2 homogéneas:

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

Tenemos lo siguiente:

1) p tiene 2 raíces en $\mathbb{R}$ $\neq$: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ y $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ son sol l.i.

$\Rightarrow \boxed{x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$ sol gral.

$\boxed{2}$ p tiene raíces complejas $\lambda = a+ib \wedge \bar{\lambda} = a-ib$ con $b \neq 0 \Rightarrow X(t) = e^{\lambda t} \wedge \bar{X}(t) = e^{\bar{\lambda} t}$ son sol. li complejas.

Soluciones reales $\longrightarrow$ $X_1(t) = e^{at}\cos(bt)$ $(\mathrm{Re}(X))$

$X_2(t) = e^{at}\sin(bt)$ $(\mathrm{Im}(X))$.

Sol general:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{at}\cos(bt) + C_2 e^{at}\sin(bt), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{3}$ p tiene una única raíz en $\mathbb{R}$ (doble), λ

$\Rightarrow$ solución general

$$\boxed{x(t) = (C_1 + tC_2)e^{\lambda t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Un poco más... ecuaciones de orden + alto (lineales a coef más altos).

$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0$

$\downarrow$

$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \lambda_1 a_1 + a_0$

$\downarrow$ Factorizamos!

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$

$\lambda_1 \dots \lambda_k$ raíces (en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$n_1 + \dots + n_k = n$

n_j = multip. de λ_j

$x^{(5)} - 4x^{(4)} + 6x^{(3)} - 8x'' + 8x = 0$

$\downarrow$

$p(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 8\lambda^2 + 8\lambda$

$\downarrow$

$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda^2 + 2)$

$= \lambda(\lambda - 2)^2(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$

$\lambda = 0$

$\lambda = 2$ raíz doble

$\lambda = 2i$

$\lambda = -2i$

Armamos las soluciones sólo en el ejemplo

$\lambda = 0 \longrightarrow x_1(t) = e^{0t} = 1$ (las constantes son sol!)

$\lambda = 2$ (doble) $\rightarrow x_2(t) = (\alpha + \beta t)e^{2t} = \alpha e^{2t} + \beta t e^{2t}$

* si hubiera sido triple

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha + \beta t + \gamma t^2)}_{\text{polinomio de orden } 2} e^{2t}$

$\left[x_2(t) = p_{m_j}(t) e^{\lambda_j t} \quad p_{m_j} = \text{poli de orden } m_j - 1 \right]$

$\lambda = \pm 2i \longrightarrow$ aportan $x_3(t) = \cos(2t)$

$x_4(t) = \operatorname{sen}(2t)$

$\Rightarrow$ Base de soluciones:

$\{1, e^{2t}, te^{2t}, \cos(2t), \operatorname{sen}(2t)\}$

Solución general:

$$\boxed{x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t)e^{2t} + C_4 \cos(t) + C_5 \operatorname{sen}(t) \qquad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}.}$$