# Análisis II
# Matemática 3
# Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 7, 2do. cuatrimestre 2020

# Teorema de Green

El teorema de Green relaciona una integral de línea alrededor de una curva simple, cerrada $C \subset \mathbb{R}^2$ con una integral doble sobre la región plana encerrada por $C$.

Posteriormente, vamos a generalizarlo (en el Teorema de Stokes) a curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$.

# Regiones de tipo I

Recordamos que una región $D \subset \mathbb{R}^2$ se dice de tipo I si

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\Big\},$$

donde $\varphi_1, \varphi_2 : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$ satisfacen $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ para cada $x \in [a_1, a_2]$.

En otras palabras, $D$ es de tipo I si se puede describir como el conjunto encerrado entre el gráfico de dos funciones $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ y $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ en un intervalo $[a_1, a_2]$.

# Regiones de tipo I

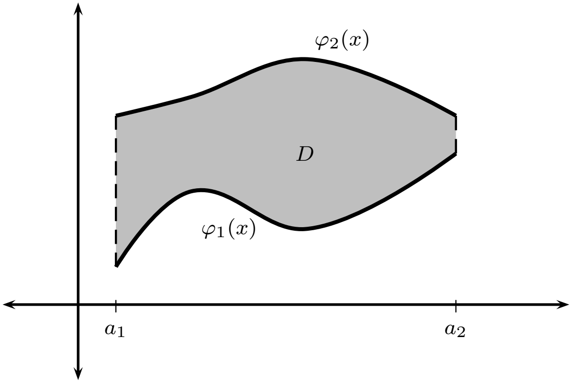



Figura: Región de tipo I.

# Regiones de tipo II y III

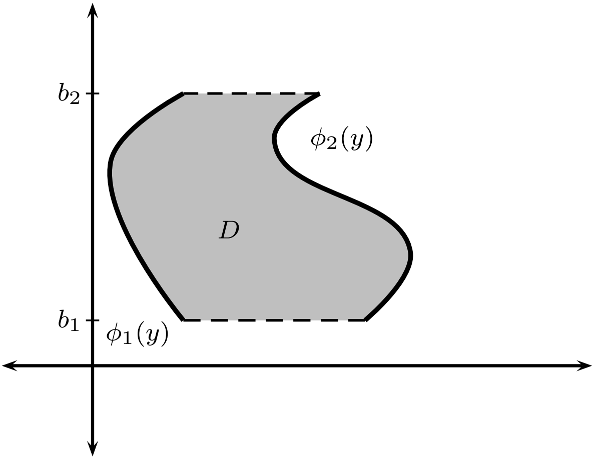
Asimismo, una región $D \subset \mathbb{R}^2$ se dice de tipo II si

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : b_1 \leq y \leq b_2,\ \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\Big\},$$

es decir, si $D$ se puede expresar como el conjunto encerrado entre el gráfico de dos funciones de $\phi_1 = \phi_1(y)$ y $\phi_2 = \phi_2(y)$ en un intervalo $[b_1, b_2]$.

Finalmente, una región $D$ es de tipo III si es de tipo I y de tipo II simultáneamente.

# Regiones de tipo II



# Regiones de tipo I, II y III

Ejemplo: La región

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ (x(x-1))^2 \leq y \leq x(x-1)\right\}$$

es de tipo I, pero no es de tipo II.

Ejemplo: El rectángulo

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2,\ b_1 \leq x \leq b_2\right\}$$

y el disco unitario

$$D_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

son regiones de tipo III.

# Orientaciones de curvas cerradas

Si $C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada, simple, que es la frontera de una región de tipo I, II o III, tiene dos orientaciones: una recorriendo la curva en sentido "contrario a las agujas del reloj", y otra recorriendo la curva en el "sentido de las agujas del reloj".

Llamamos a la primera la orientación positiva, que notamos por $C^+$, y llamamos a la segunda la orientación negativa, que notamos por $C^-$.

En particular, la orientación positiva también puede reconocerse de la siguiente forma: si se recorre la curva $C$ caminando en sentido positivo, la región $D$ que encierra $C$ queda a la izquierda.

# Orientaciones de curvas cerradas

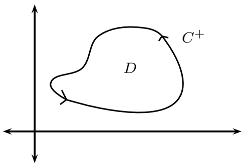



Figura: $C^+$.

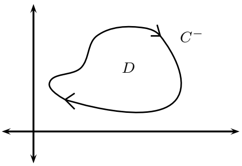



Figura: $C^-$.

## Curvas cerradas

Si la curva $C^+$ encierra una región $D$ de tipo I (con orientación positiva), entonces podemos descomponerla en las partes "inferior" y "superior", $C_1^+$ y $C_2^-$, y las partes verticales a izquierda y derecha, $B_1^-$ y $B_2^+$:

$$C^+ = C_1^+ \cup C_2^- \cup B_1^- \cup B_2^+,$$

como se muestra en la figura siguiente.

# Curvas cerradas

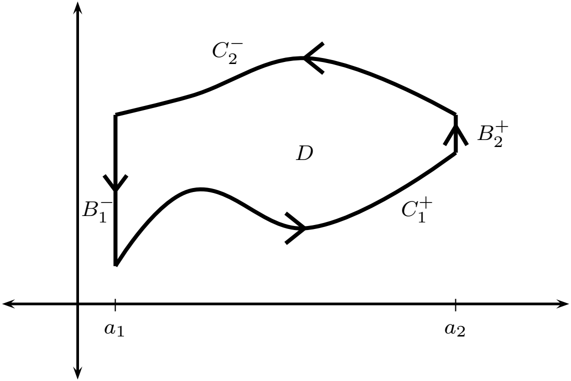



Figura: Descomposición de $C^+ = C_1^+ \cup C_2^- \cup B_1^- \cup B_2^+$.

# Curvas cerradas

Más precisamente, si
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, entonces

$$C_1^+ = \{a_1 \leq x \leq a_2,\ y = \varphi_1(x)\} \quad \text{(de izquierda a derecha)},$$

$$C_2^- = \{a_1 \leq x \leq a_2,\ y = \varphi_2(x)\} \quad \text{(de derecha a izquierda)},$$

$$B_1^- = \{x = a_1,\ \varphi_1(a_2) \leq y \leq \varphi_2(a_2)\} \quad \text{(de arriba hacia abajo)},$$

$$B_2^+ = \{x = a_2,\ \varphi_1(a_2) \leq y \leq \varphi_2(a_2)\} \quad \text{(de abajo hacia arriba)}.$$

Observemos que $B_1^-$ o $B_2^+$ pueden no aparecer: por ejemplo, si $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1)$, entonces $B_1^-$ no aparece.

# Teorema de Green

En preparación del Teorema de Green, tenemos el siguiente resultado.

Lema 1: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de tipo I, definida por funciones $\varphi_1, \varphi_2 : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$ continuas, y sea $C$ la curva simple, cerrada que consiste de su frontera. Si $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces

$$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dx\,dy.$$

(donde $\int_{C^+} P\,dx = \int_{C^+} P\,dx + Q\,dy$ con $Q = 0$.)

# Teorema de Green

Demostración: Como la región $D$ es de la forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

por el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy &= -\int_{a_1}^{a_2} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy\, dx \\
&= -\left( \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_2(x))\, dx - \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_1(x))\, dx \right) \\
&= \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_1(x))\, dx - \int_{a_1}^{a_2} P(x, \varphi_2(x))\, dx.
\end{aligned}$$

# Teorema de Green

Ahora calculamos la integral sobre la curva $C$,

$$C^+ = C_1^+ \cup C_2^- \cup B_1^- \cup B_2^+.$$

Tenemos que

$$\int_{C^+} P\,dx = \int_{C_1^+} P\,dx + \int_{C_2^-} P\,dx + \int_{B_1^-} P\,dx + \int_{B_2^+} P\,dx.$$

Calculamos cada una de estas cuatro integrales.

# Teorema de Green

Respecto de la primera, tenemos la parametrización

$$\sigma_1 : [a_1, a_2] \to C_1, \quad \sigma_1(t) = (t, \varphi_1(t)),$$

que recorre $C_1$ de izquierda a derecha. Por lo tanto,

$$\int_{C_1^+} P\,dx = \int_{a_1}^{a_2} (P, 0) \cdot (1, \varphi_1'(t))\,dt = \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t))dt.$$

Asimismo, si parametrizamos $C_2$ en la forma

$$\sigma_2 : [a_1, a_2] \to C_2, \quad \sigma_2(t) = (t, \varphi_2(t)),$$

entonces recorremos $C_2$ de izquierda a derecha, y por lo tanto

$$\int_{C_2^-} P\,dx = -\int_{a_1}^{a_2} (P, 0) \cdot (1, \varphi_2'(t))\,dt = -\int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t))dt.$$

# Teorema de Green

Respecto de la integral sobre $B_2^+$, parametrizamos a $B_2$ por

$$\sigma_3 : [\varphi_1(a_2), \varphi_2(a_2)] \to B_2, \quad \sigma_3(t) = (a_2, t).$$

En consecuencia,

$$\int_{B_2^+} P\,dx = \int_{\varphi_1(a_2)}^{\varphi_2(a_2)} (P(\sigma_3(t)), 0) \cdot (0, 1) = 0.$$

Del mismo modo,

$$\int_{B_1^-} P\,dx = 0.$$

# Teorema de Green

Juntando las cuatro integrales de línea, obtenemos

$$\int_{C^+} P\,dx = \int_{C_1^+} P\,dx + \int_{C_2^-} P\,dx + \int_{B_1^-} P\,dx + \int_{B_2^+} P\,dx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_1(t))dt - \int_{a_1}^{a_2} P(t, \varphi_2(t))dt + 0 + 0.$$

Concluimos que

$$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dx\,dy,$$

como queríamos demostrar. $\blacksquare$

# Teorema de Green

En el caso de una región $D \subset \mathbb{R}^2$ de tipo II, la curva que describe su frontera se puede descomponer en dos partes laterales (izquierda y derecha) y una parte superior y otra inferior.

De forma similar al lema anterior, se puede probar el siguiente resultado (la demostración queda como ejercicio).

Lema: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de tipo II, definida por funciones $\phi_1, \phi_2 : [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$ continuas, y sea $C$ la curva cerrada, simple que recorre su frontera. Si $Q : D \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces

$$\int_{C^+} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

# Teorema de Green

Finalmente, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal de esta clase, el Teorema de Green:

Teorema: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de tipo III y $C$ una curva cerrada, simple, que recorre su frontera. Si $P, Q : D \to \mathbb{R}$ son de clase $\mathcal{C}^1$, entonces

$$\int_{C^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy\,.$$

# Teorema de Green

Demostración: Tenemos que

$$\int_{C^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{C^+} P\,dx + \int_{C^+} Q\,dy,$$

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Dado que, por los dos lemas previos, tenemos

$$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy, \quad \int_{C^+} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy,$$

resulta la conclusión del teorema. ∎

# Teorema de Green

El Teorema de Green se puede aplicar a regiones más generales que las de tipo III. Por ejemplo, si una región $D \subset \mathbb{R}^2$ se puede descomponer en una unión finita y disjunta de regiones de tipo III, entonces se puede usar el teorema.

Para entender porqué esto es así, consideremos el anillo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Si $C = \partial D$, entonces $C^+ = C_1^- \cup C_2^+$, donde

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}, \; C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}.$$

# Teorema de Green

Si bien esta región no es de tipo III, podemos descomponerla en regiones de tipo III, y aplicar el Teorema de Green en cada una de ellas.

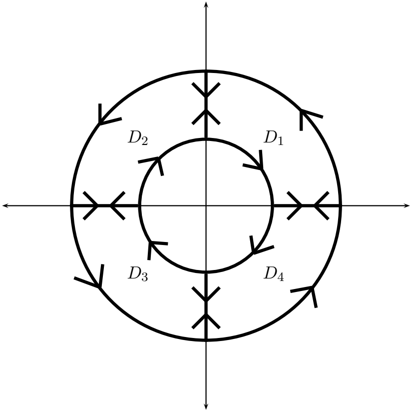



Figura: Partición de $D$ en regiones de tipo III.