Variación de las constantes

Es un método que sirve para hallar una solución particular de:

(I) Un sistema lineal de 'n' ecuaciones de orden '1' no homogéneo

$$\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X} + B(t)$$

o bien

(II) Una ecuación lineal de orden 'n' no homogénea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Conociendo una base de soluciones del problema homogéneo

(I) $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$, digamos $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$

(II) $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$, digamos $\{x_1, \dots, x_n\}$

OBSERVACIÓN La solución general del homogéneo $\mathbf{X}' = A(t)\mathbf{X}$,

$$\mathbf{X}_h(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{X}_n(t) \qquad c_i \in \mathbb{R} \text{ constantes}$$

o bien la solución general de la ecuación homogénea

$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$$

deben encontrarse primero por algún método conocido antes de poder aplicar el método.

¡¡El método siempre se puede aplicar!!

Ejemplo 1 Resuelva el sistema de 2 ecuaciones de orden 1 dado por

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + e^t \\ x_2' = -2x_1 + x_2 + \dfrac{e^t}{\cos(2t)} \end{cases}$$

Notemos que podemos escribirlo como $X' = AX + B(t)$ siendo

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos(2t)} \end{pmatrix}$$

- las soluciones del sistema homogéneo asociado

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

al ser de coeficientes constantes las hallamos con el método del polinomio característico.

Tenemos:

$\lambda_1 = 1+2i$ autovalor con autovector asociado $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ " " " " $v_2 = \overline{v_1}$

Como queremos soluciones reales, nos quedamos con la parte real y la parte imaginaria, obteniendo

$$X_h(t) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ -e^t \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen} 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}}_{X_2(t)} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Es sencillo verificar que $X_1' = AX_1$ y que $X_2' = AX_2$

• El método de variación de las constantes nos proporciona una solución particular de $\mathbb{X}' = A\mathbb{X} + B(t)$ de la forma

$$\mathbb{X}_p(t) = C_1(t)\mathbb{X}_1(t) + C_2(t)\mathbb{X}_2(t)$$

y nos dice que hallemos $C_1(t)$, $C_2(t)$ resolviendo (integrando)

$$Q(t)\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = B(t) \quad \left(\longrightarrow \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}(t)B(t) \right)$$

No siempre es el mejor camino

En nuestro ejemplo tenemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^t\cos 2t & e^t \operatorname{sen} 2t \\ -e^t \operatorname{sen} 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix}}_{Q(t)}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{\cos 2t} \end{pmatrix}}_{B(t)}$$

$Q(t) = (\mathbb{X}_1(t) \mid \mathbb{X}_2(t))$ matriz fundamental

Cancelando e^t obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \cos 2t \cdot C_1'(t) + \operatorname{sen} 2t\, C_2'(t) = 1 \\ -\operatorname{sen} 2t \cdot C_1'(t) + \cos 2t\, C_2'(t) = \dfrac{1}{\cos 2t} \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\operatorname{sen} 2t$ y la segunda por $\cos 2t$, y sumando ambas obtenemos que:

$$C_2'(t) = \operatorname{sen} 2t + 1 \implies \boxed{C_2(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t + t}$$

Multiplicando ahora la primera por $\cos 2t$, la segunda por $-\operatorname{sen} 2t$ y sumando obtenemos

$$C_1'(t) = \cos 2t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{\cos 2t} \implies \boxed{C_1(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\ln(\cos 2t)}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{X}_p(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2t + \ln(\cos 2t))\begin{pmatrix} e^t\cos 2t \\ -e^t\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\cos 2t + t\right)\begin{pmatrix} e^t \operatorname{sen} 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}$$

(comprobar)

es la solución particular que buscábamos. todas las soluciones del sistema son enteras

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t).$$

Hagamos ahora un ejemplo de una ecuación lineal de orden 2 con coeficientes NO constantes y NO homogénea.

Ejemplo 2 Halle la solución general de la ecuación

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x} \quad (x>0)$$

Sabiendo que la ecuación homogénea asociada tiene una solución de la forma $y_1(x) = e^{mx}$

- Determinemos primero $y_1(x)$, es decir, el valor de 'm'.

Buscamos un valor de m tal que

$$xm^2e^{mx} - 2(x+1)me^{mx} + (x+2)e^{mx} = 0$$

sí, y sólo si

$$m^2x - 2m(x+1) + (x+2) = 0$$

$$\iff (m^2-2m+1)x - 2m+2 = 0$$

$$\iff \begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ 2(1-m) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{m=1}$$

Así, $\boxed{y_1(x) = e^x}$ es una solución del homogéneo asociado

- Buscamos ahora otra solución y_2 de la forma $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ tal que $\{y_1(x), y_2(x)\}$ sea linealmente independiente.

Derivamos

$$\underline{y_2(x)} = v(x)\, y_1(x) = \underline{v(x)e^x}$$

$$\underline{y_2'(x)} = v'(x)e^x + v(x)e^x = \underline{(v'(x)+v(x))e^x}$$

$$\underline{y_2''(x)} = (v''(x)+v'(x))e^x + (v'(x)+v(x))e^x$$

$$= \underline{(v''(x)+2v'(x)+v(x))e^x}$$

Reemplazando, obtenemos

$$x(v''+v'+v)e^x - 2(x+1)(v'+v)e^x + (x+2)ve^x = 0 \iff$$

$$xv'' + (x-2x-2)v' + (\cancel{x}-2x-2+x+2)v = 0 \iff$$

$$\underbrace{xv'' - (x+2)v' = 0}$$

Esta última ecuación diferencial de segundo orden es de la forma

$$F(x, v', v'') = 0 .$$

Es decir, no aparece "v".

Mediante la sustitución

$$\begin{cases} v' = u \\ v'' = u' \end{cases}$$

la transformamos en una ecuación de primer orden de la forma

$$F(x, u, u') = 0 \quad \text{(Reducimos el orden!!)}$$

O sea, buscamos resolver

$$xu' - (x+2)u = 0$$

$$\frac{du}{u} = \left(\frac{x+2}{x}\right)dx$$

$$\ln|u| = x + \ln x^2 + C$$

$$|u| = e^C \cdot (e^x \cdot x^2)$$

$$\boxed{u = k \cdot x^2 e^x} \quad k \neq 0 \ (k \in \mathbb{R})$$

Volviendo a la función original V, queda:

$$V' = kx^2e^x \quad (k=1) \text{ buscamos una solución}$$

$$\Rightarrow V = \int x^2 e^x dx$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$$

$$= (x^2-2x+2)e^x + C$$

Así, nos quedamos con $V(x) = (x^2-2x+2)e^x$ y en definitiva la otra solución es

$$y_2(x) = (x^2-2x+2)e^x \cdot e^x$$

$$= (x^2-2x+2)e^{2x}$$

De esta manera la solución general del homogéneo es

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2(x^2-2x+2)e^{2x}$$

- Aplicamos el método de variación de las constantes reescribiendo (o transformando) la ecuación de orden 2 en forma de un sistema de dos ecuaciones de orden 1

$$\underline{Y}_h(x) = c_1\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} (x^2-2x+2)e^{2x} \\ (x^2-2x+2)e^{2x} + x^2e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2e^{2x} \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\frac{2}{x}) & 2(1+\frac{2}{x}) \end{pmatrix}$$

Pues

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x} \rightarrow y'' - \frac{2(x+1)}{x}y' + \frac{(x+2)}{x}y = x^2e^{2x}$$

Como en el ejemplo anterior, resolvemos

$$\begin{pmatrix} e^x & (x^2-2x+2)e^{2x} \\ e^x & (x^2-2x+2)e^{2x}+x^2e^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2e^{2x} \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{cases} e^x c_1'(x) + (x^2-2x+2)e^{2x} c_2'(x) = 0 \\ e^x c_1'(x) + (x^2-2x+2)e^{2x} c_2'(x) + x^2e^{2x}c_2'(x) = x^2e^{2x} \end{cases}$$

Restándole la primera a la segunda ecuación obtenemos

$$x^2e^{2x}\, c_2'(x) = x^2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{c_2(x) = x} \quad (\text{constante arbitraria} = 0)$$

Ahora reemplazando en la primera obtenemos que

$$c_1'(x) = -(x^2-2x+2)e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1(x) = (-x^2+4x-6)e^x} \quad (\text{Partes } x2,\ C=0)$$

Por lo tanto, la solución particular es

$$y_p(x) = (-x^2+4x-6)e^{2x} + (x^3-2x^2+2x)e^{2x}$$
$$= (x^3-3x^2+6x-6)e^{2x}.$$

o, en forma vectorial

$$\underline{Y}_p(x) = \begin{pmatrix} (x^3-3x^2+6x-6)e^{2x} \\ (2x^3-3x^2+6x-6)e^{2x} \end{pmatrix}.$$

También podríamos haber encontrado una solución particular utilizando el Método ORIGINAL de variación de las constantes de J. L. Lagrange.

Se busca resolver

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (1)$$

Se supone que tenemos que

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

todas las soluciones del homogéneo asociado

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (3)$$

Como antes, se propone como solución particular de (1) a

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \qquad (4)$$

Para hallar C_1 y C_2 debemos tener dos ecuaciones que las relacionen. La primera relación se obtiene derivando

$$y_p' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2$$

$$= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \underbrace{(C_1' y_1 + C_2' y_2)}_{\substack{\text{debería ser cero si } C_1 \text{ y } C_2 \\ \text{efectivamente fueran constantes}}} \qquad (5)$$

Para no complejizar el problema al derivar nuevamente, se exige que

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \qquad (6)$$

y por lo tanto

$$y_p' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \qquad (7)$$

Derivando nuevamente

$$y_p'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' \qquad (8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4), (7) y (8) en la original (1)
y reordenando, llegamos a

$$c_1 \underbrace{(y_1'' + P y_1' + Q y_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(y_2'' + P y_2' + Q y_2)}_{=0 \text{ xq } y_1, y_2 \text{ sol de } (2)} + c_1' y_1' + c_2' y_2' = R \qquad (9)$$

y entonces

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = R \qquad (10)$$

que es precisamente la segunda ecuación.
Nos queda por resolver

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = R \end{cases}$$

que, en forma matricial, es lo que nos dice el teorema más general

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{\text{matriz fundamental}} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$$

Finalmente, estas se resuelven, dando

$$c_1' = \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \text{y} \quad c_2' = \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)}$$

que integrando, es

$$c_1 = \int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad c_2 = \int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Ejercicio Resuelva la ecuación no homogénea de Euler-Cauchy

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^4\ln(x) \quad (x>0)$$

sabiendo que tiene tres soluciones, linealmente independientes, del homogéneo asociado de la forma

$$y(x) = x^m \quad m\in\mathbb{N}.$$