EJERCICIO 7) d). $x\,dy = (x^5 + x^3y^2 + y)\,dx$.

PODEMOS ENCARAR EL PROBLEMA DE DOS MANERAS:

1). CAMBIO DE VARIABLE.

2) FACTOR INTEGRANTE.

1). CAMBIO DE VARIABLE.

TOMEMOS $u = y/x$. LUEGO, $y = u \cdot x$, Y SI DERIVAMOS TENEMOS $dy = x\,du + u\,dx$ (NO OLVIDAR QUE u ES FUNCIÓN DE x)

SUSTITUIMOS EN LA ECUACIÓN:

$$(*) \qquad dy = \frac{x^5 + x^3y^2 + y}{x}\,dx. \qquad y^2 = u^2x^2.$$

$$x\,du + u\,dx = (x^4 + x^4u^2 + u).\,dx$$

REAGRUPAMOS:

$$x\,du = (x^4 + x^4u^2 + u - u)\,dx$$

$$x\,du = x^4(1+u^2)\,dx.$$

$$\frac{du}{1+u^2} = x^3\,dx.$$

INTEGRAMOS:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int x^3\,dx.$$

$$\operatorname{arctg}(u) = \frac{x^4}{4} + c. \qquad u = y/x$$

$$\Longrightarrow \quad u = tg\left(\frac{x^4}{4} + c\right) \Longrightarrow \boxed{y = x\,tg\left(\frac{x^4}{4} + c\right)}.$$

$(c \in \mathbb{R}.)$

QUEDA PENDIENTE LA VERIFICACIÓN.

<u>NOTA</u>: DE (*) SE VE FÁCIL QUE LA ECUACIÓN PUEDE ESCRIBIRSE $y' = x^4 + \frac{1}{x} y + x^2 y^2$.

LA ECUACIÓN ES UN EJEMPLO DE LA <u>ECUACIÓN DE RICCATI</u>, QUE SE CARACTERIZA POR SER CUADRÁTICA EN LA INCÓGNITA. EN WIKIPEDIA PUEDEN ENCONTRAR LA SOLUCIÓN GENERAL A ESTE PROBLEMA.

2) <u>FACTOR INTEGRANTE</u>

PROPONEMOS UN FACTOR INTEGRANTE $\mu = \mu(x^2+y^2)$. NUESTRO OBJETIVO ES QUE LA ECUACIÓN MULTIPLICADA POR μ SEA EXACTA.

$$\mu(x^5 + x^3y^2 + y)\,dx - \mu x\,dy = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x^5+x^3y^2+y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-\mu x) \qquad (**)$$

LLAMEMOS $z = x^2+y^2$. DERIVEMOS:

$$\frac{d\mu}{dz} \cdot 2y\,(x^5+x^3y^2+y) + \mu\,(2x^3y+1) = -\frac{d\mu}{dz}\, 2x . x - \mu .$$

REESCRIBIMOS PARA TENER VARIABLES SEPARADAS (μ y z).

$$\frac{d\mu}{dz}\left(2yx^5 + 2x^3y^3 + \underbrace{2y^2 + 2x^2}_{2z}\right) = \mu\,(-2x^3y-2).$$

$$\frac{d\mu}{dz}\left[yx^3(2x^2+2y^2) + 2z\right] = \mu\,(-2x^3y-2)$$

$$\frac{d\mu}{dz}\, 2z\,(yx^3+1) = \mu\,(-2x^3y-2)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2x^3y-2}{(yx^3+1)2z}\,dz.$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{2z}\,dz = -\frac{dz}{z}.$$

INTEGRAMOS:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int -\frac{dz}{z} \Longrightarrow \ln|\mu| = -\ln|z| + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

$$\Longrightarrow |\mu| = |z|^{-1}\cdot K, \quad K\in\mathbb{R}.$$

$$\Longrightarrow \mu = \frac{K}{x^2+y^2}, \quad K\in\mathbb{R}.$$

OBSERVEMOS QUE K NO CUMPLE NINGÚN ROL EN (**), POR LO QUE PODEMOS TOMAR $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$. LA ECUACIÓN RESULTA:

$$\frac{x^5+x^3y^2+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy = 0,$$

Y ES EXACTA.

BUSQUEMOS EL POTENCIAL DE $(P,Q) =$

$$= \left(\frac{x^5+x^3y^2+y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right);\ f(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2} \Longrightarrow f(x,y) = \int \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int \frac{-x}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}\,dy = \int \frac{-1}{x\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}\,dy = -\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + K(x)$$

ADEMÁS, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^5 + x^3 y^2 + y}{x^2 + y^2}$, POR LO QUE:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + K(x)\right) = \frac{x^5 + x^3 y^2 + y}{x^2 + y^2}.$$

$$-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} y(-1)\, x^{-2} + K'(x) = \frac{x^3(x^2+y^2) + y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} + K'(x) = x^3 + \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} + K'(x) = x^3 + \frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$K'(x) = x^3 \Longrightarrow K(x) = \frac{x^4}{4} + c.$$

$\Longrightarrow$ UN POTENCIAL PARA (P, Q) ES $f(x,y) = \dfrac{x^4}{4} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

LAS SOLUCIONES A LA ECUACIÓN SON LAS CURVAS DE NIVEL DE f:

$$\boxed{\frac{x^4}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = C \quad , \; C \in \mathbb{R}}$$