Complemento a los teóricos 24-25

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

* Comportamiento asintótico de sol.
* Ejemplo del péndulo simple amortiguado.

Diagrama de fases

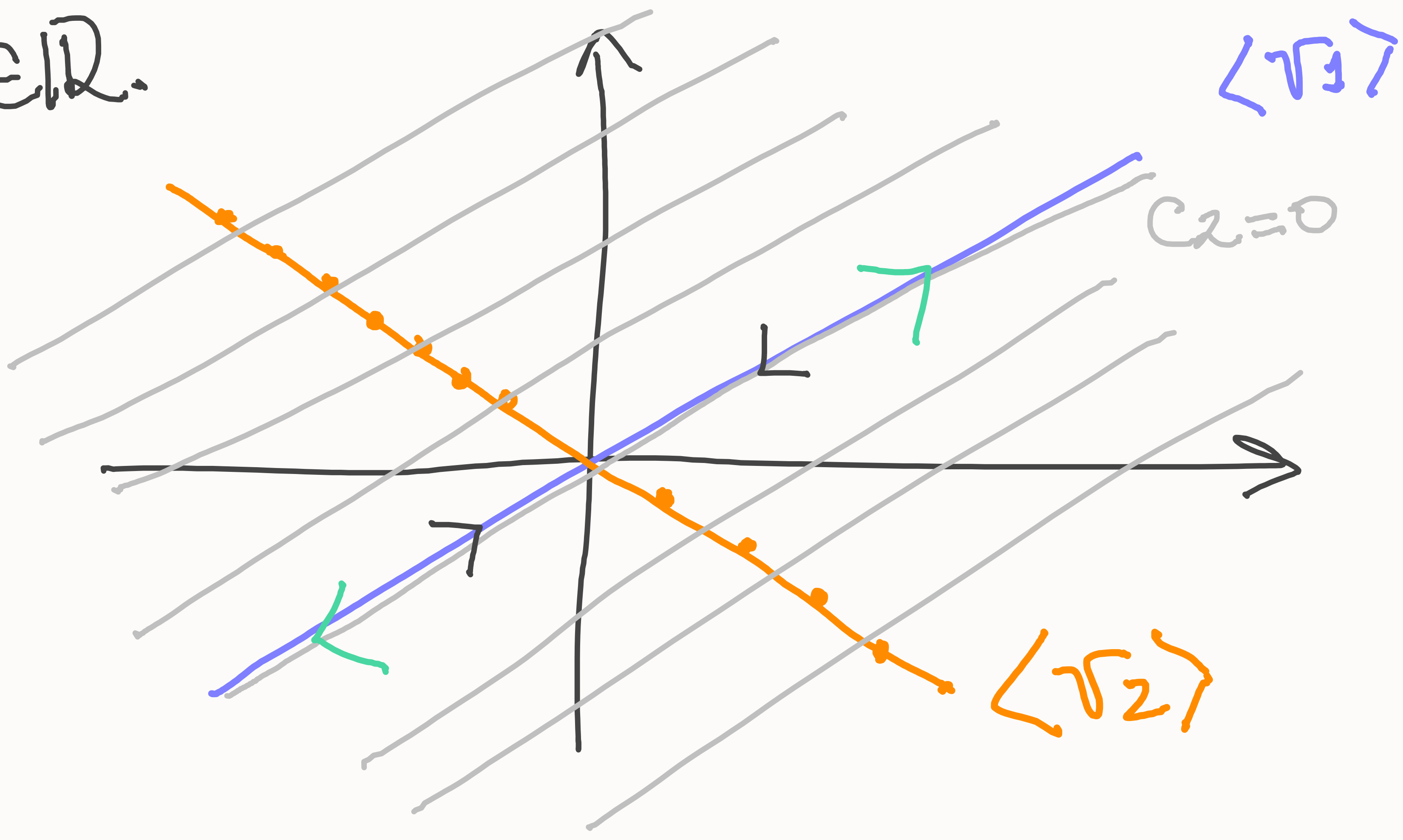
. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y el sistema lineal a coef. constantes

$$X' = AX \quad , \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

• Si $\lambda = 0$ es autovalor de A:

$X(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2$ con $\lambda_1 \neq 0$ el otro autovalor, v_1 su autovector asociado y v_2 autovector de $\lambda = 0$.

$\Rightarrow$ cada punto sobre la recta generada por v_2 es punto de equilibrio pues $A \alpha v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.



trayectorias paralelas a $\langle v_1 \rangle$

• $\lambda > 0$

• $\lambda < 0$

- $\lambda = 0$ no es autovalor

(*) Tenemos los 3 casos siguientes

→ autovalores reales $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

v_1 autovec λ_1
v_2 autovec λ_2

$$= y_1(t) v_1 + y_2(t) v_2$$

con $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ y $y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$.

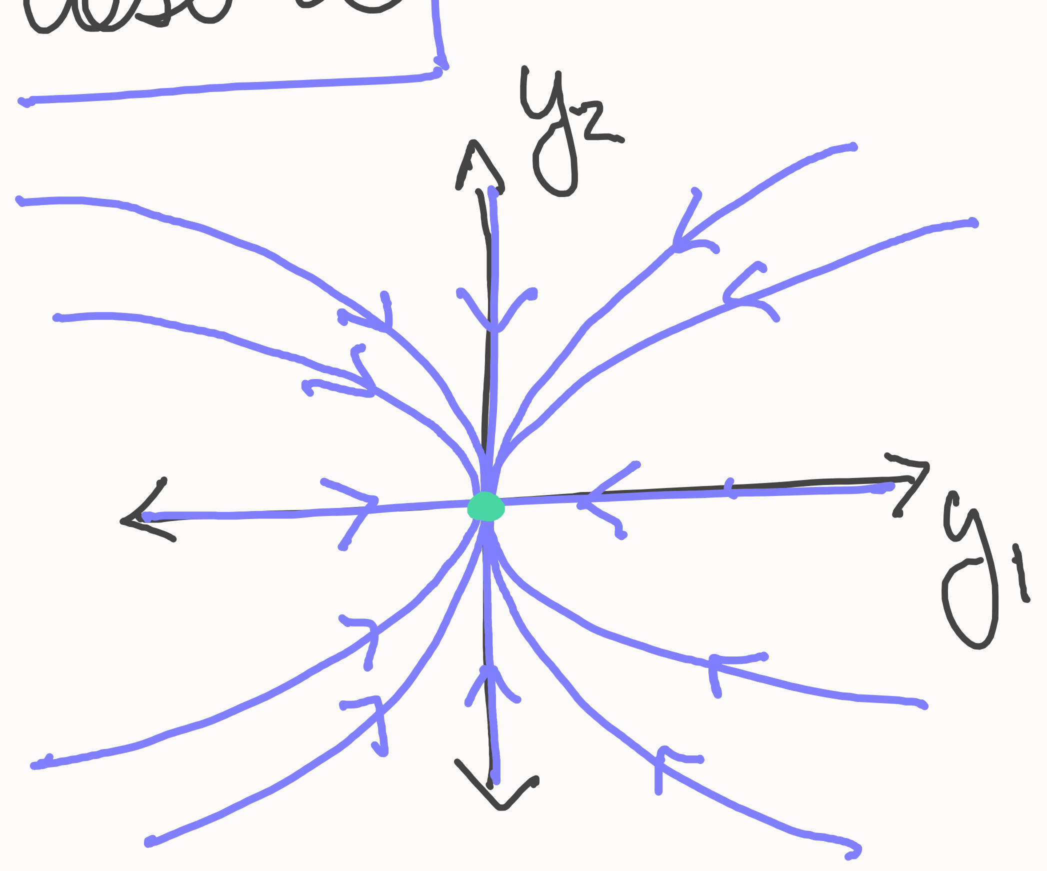
$$\Longrightarrow \boxed{y_2 = C_2 \left| \frac{y_1}{C_1} \right|^{\lambda_2/\lambda_1}}$$

- graficamos (y_1, y_2)
- con $C = (v_1 | v_2)$ graficamos (x_1, x_2).

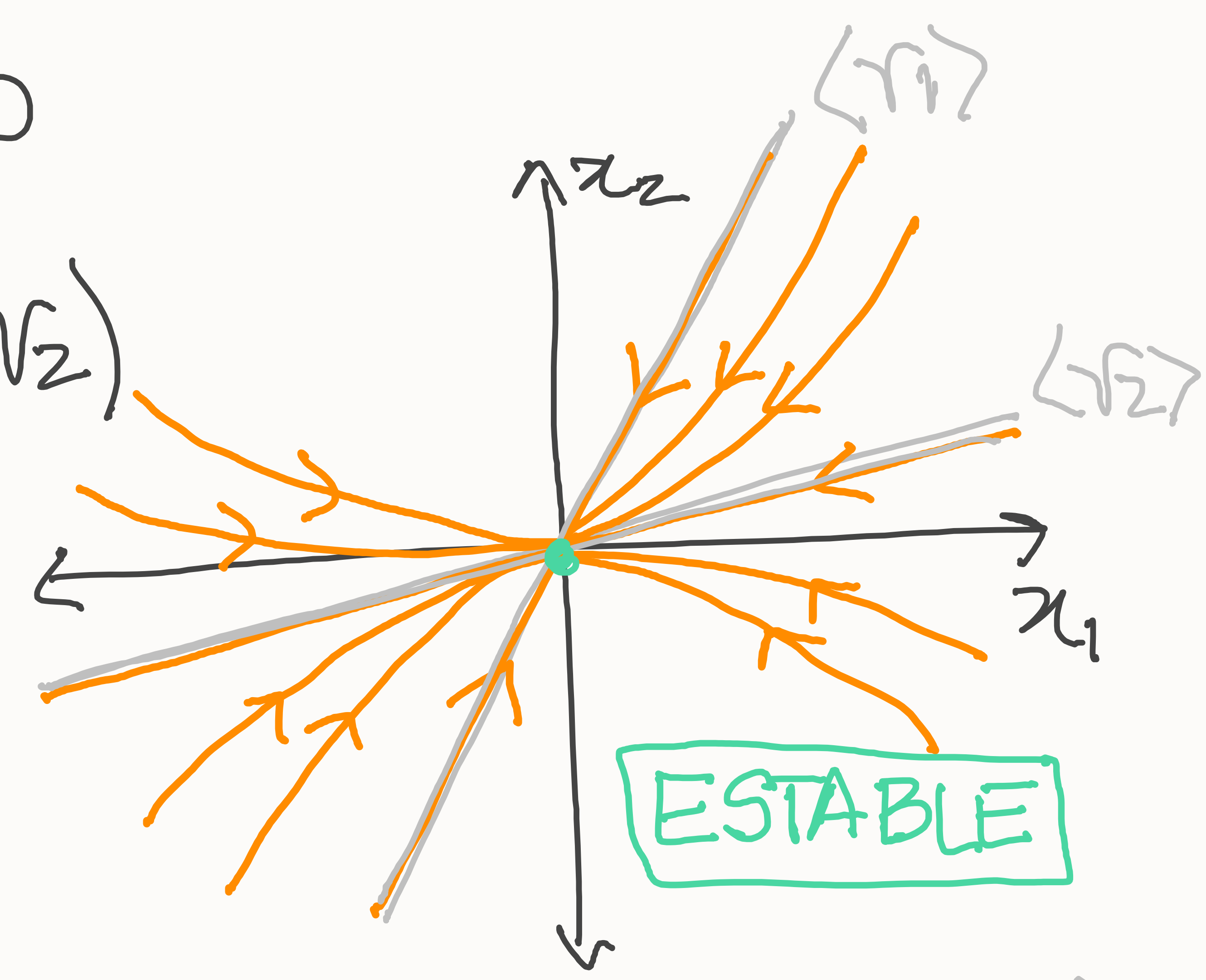
a) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in (0,1)$, b) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, c) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$

caso a

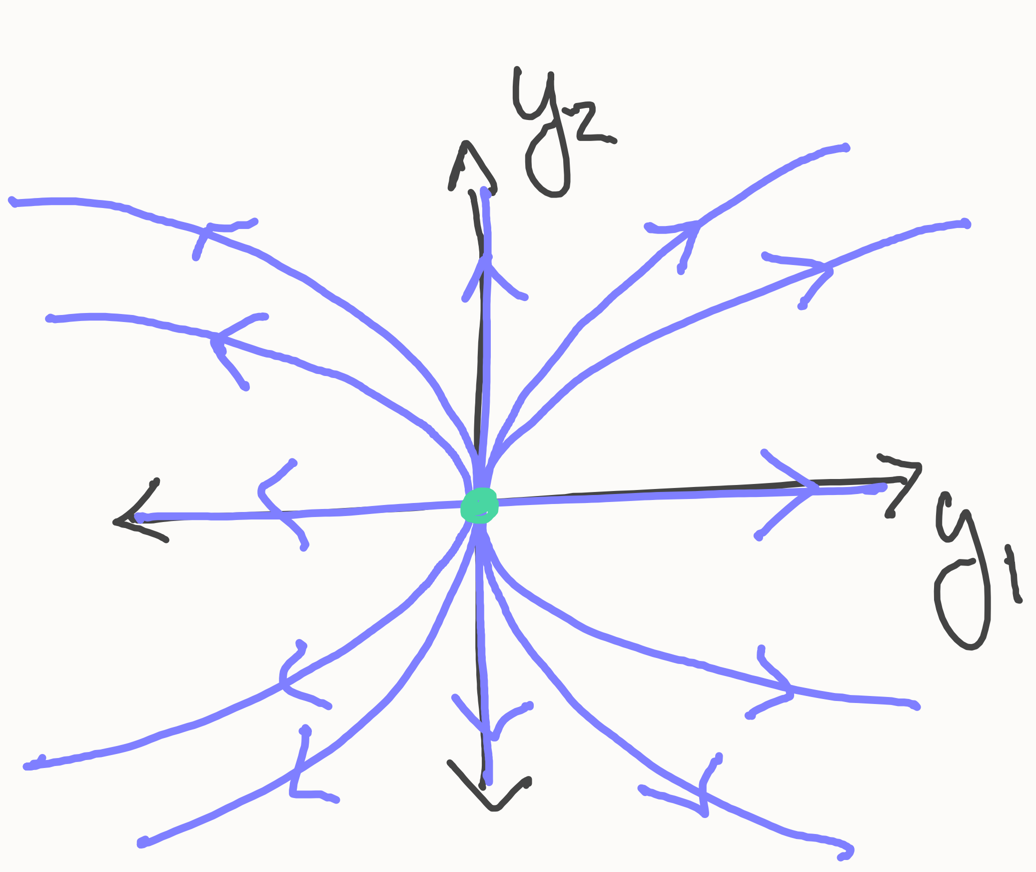
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



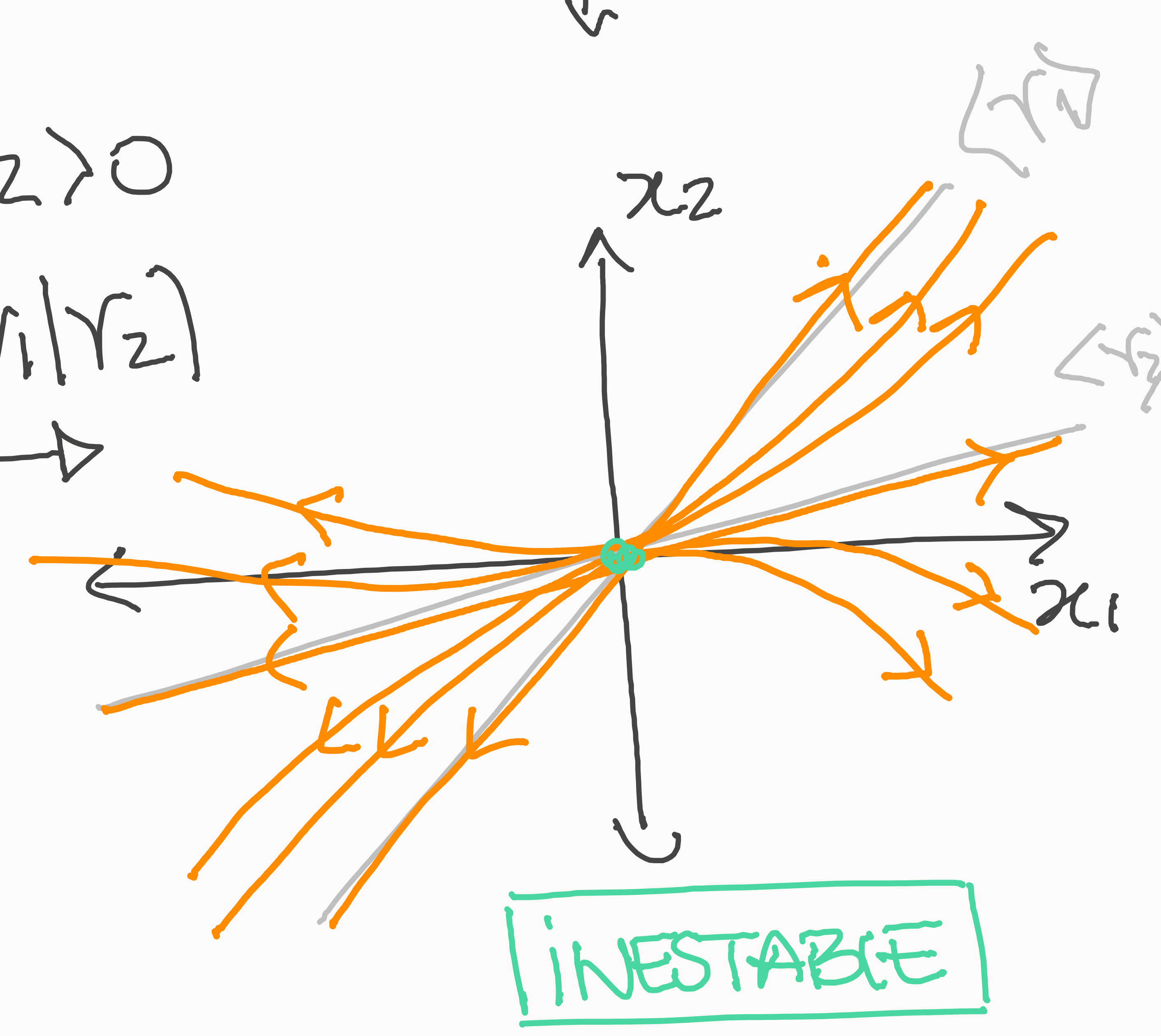
$C = (v_1 | v_2)$
$\longrightarrow$



- $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



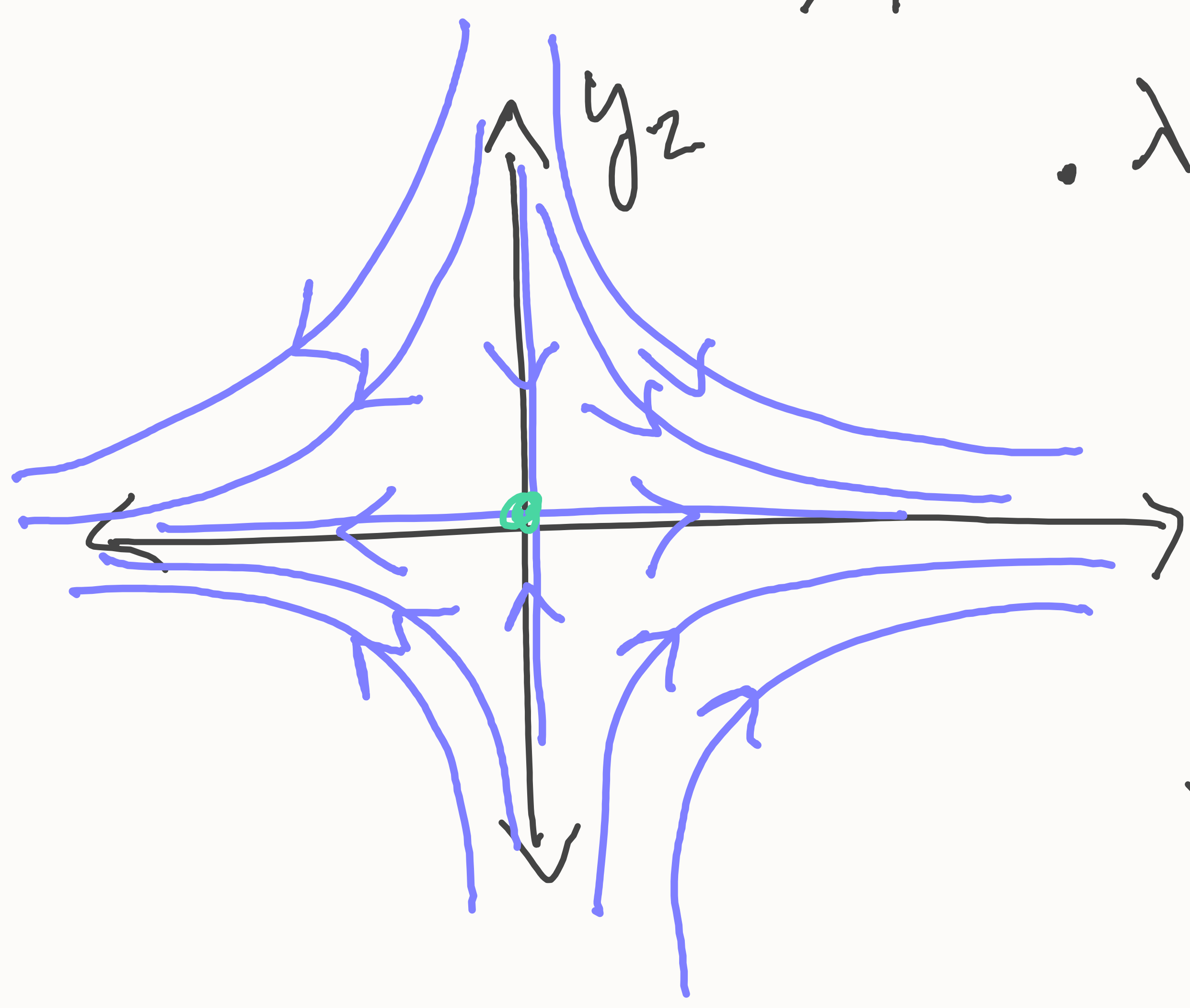
$C = (v_1 | v_2)$
$\longrightarrow$



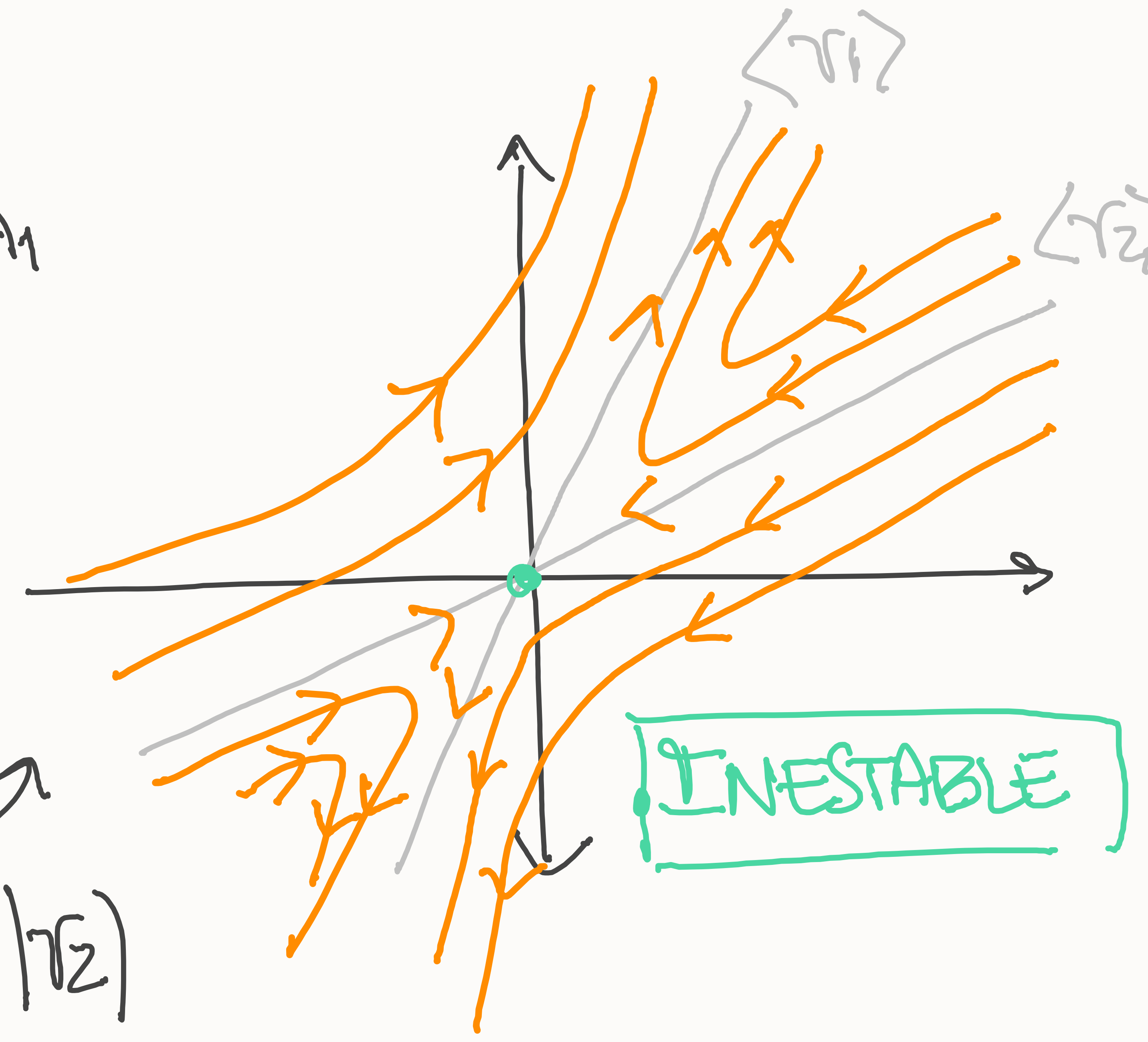
Caso b)

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$

• $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

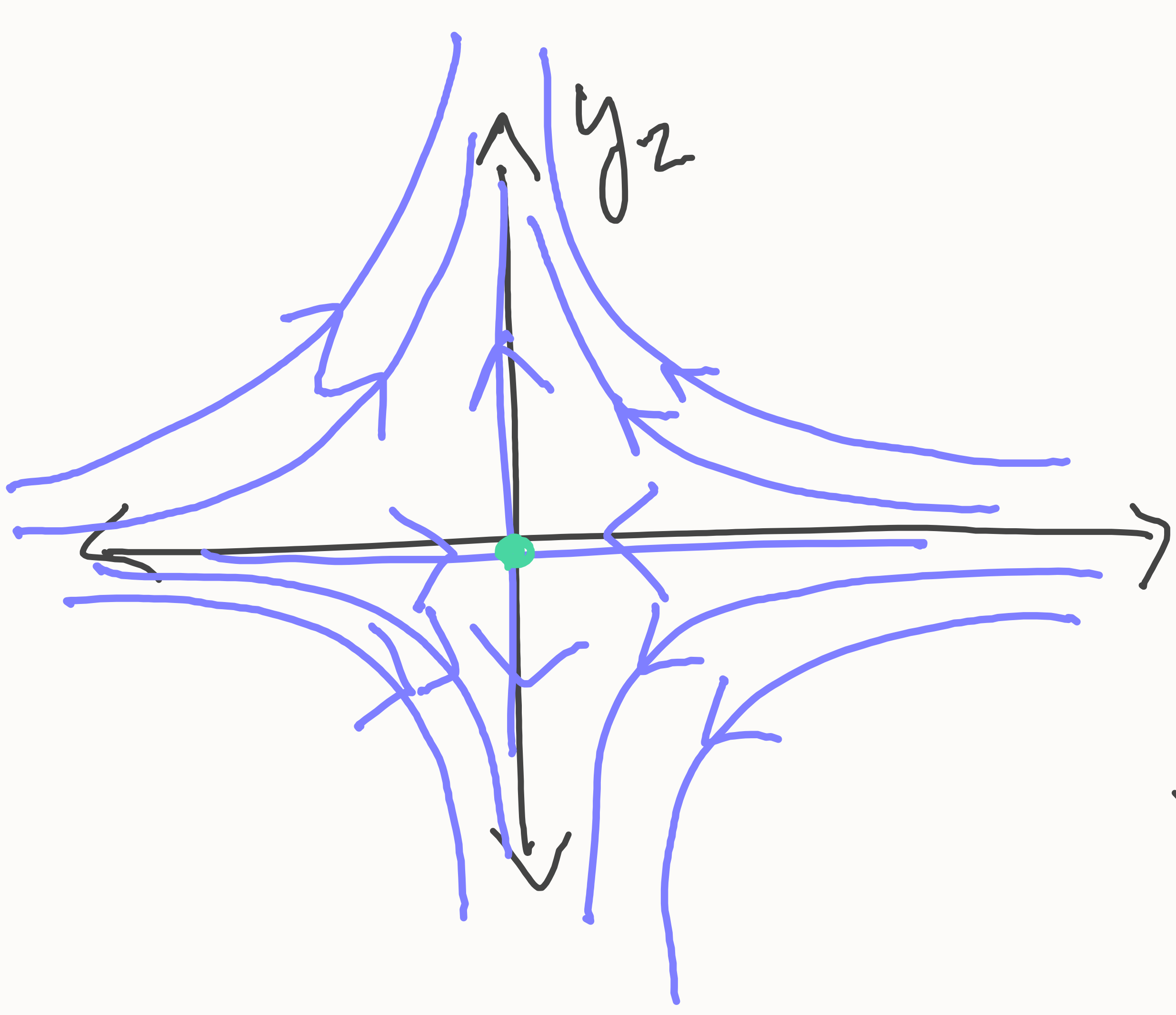


$C = (v_1 | v_2)$

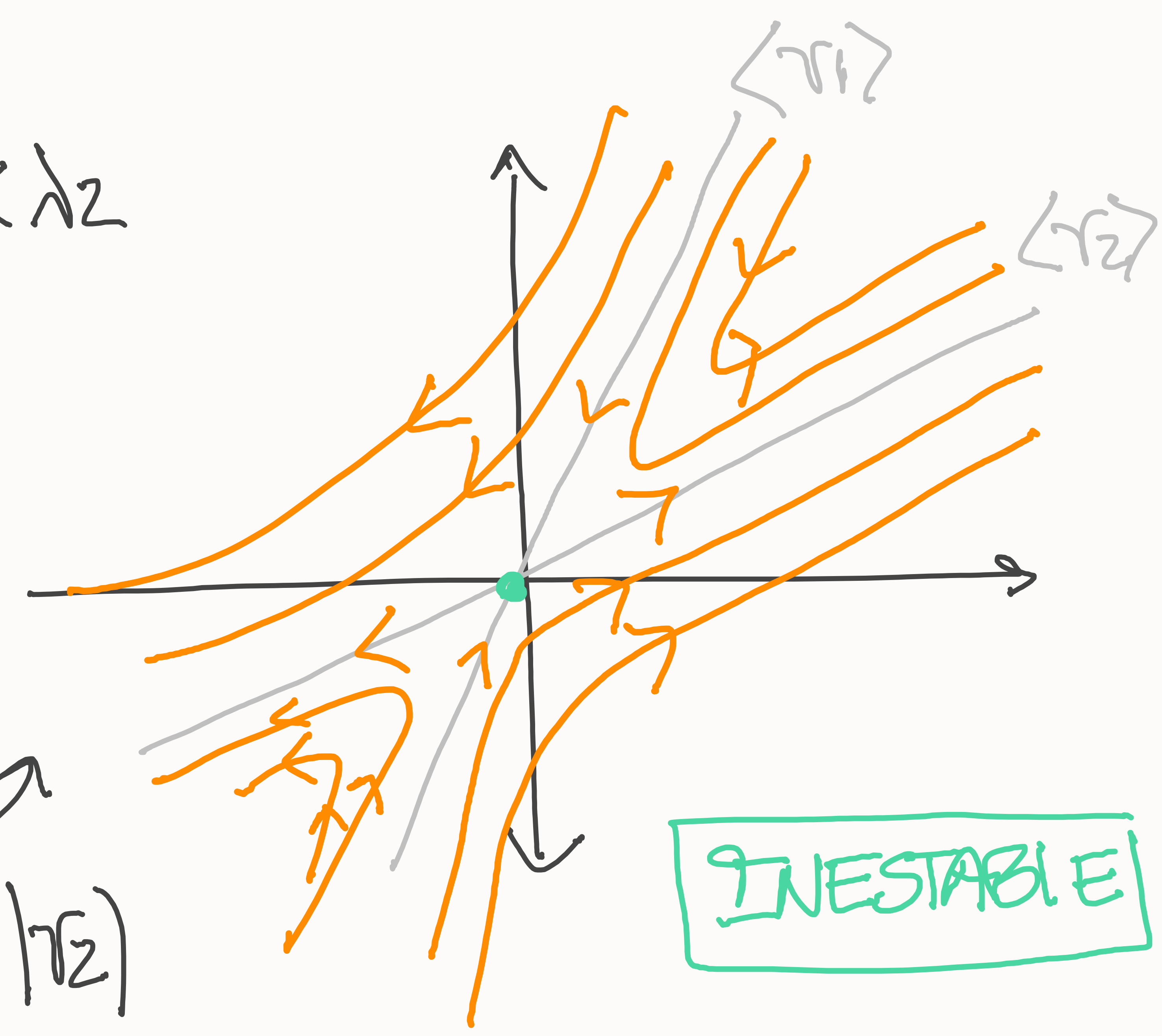


INESTABLE

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



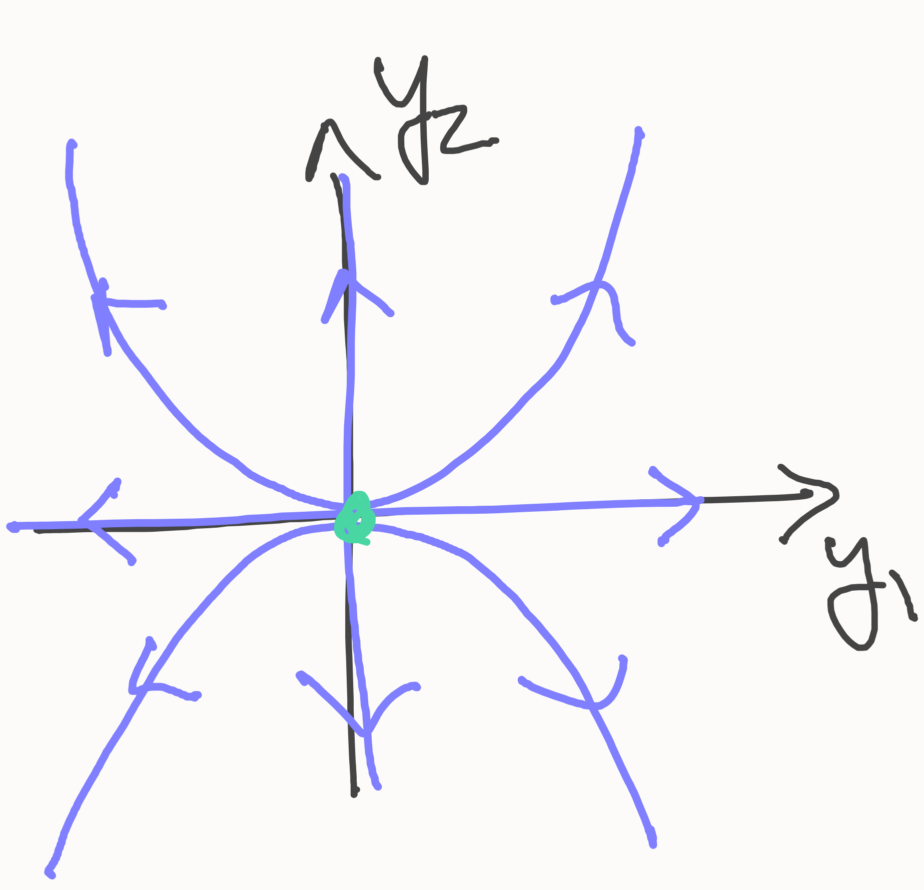
$C = (v_1 | v_2)$



INESTABLE

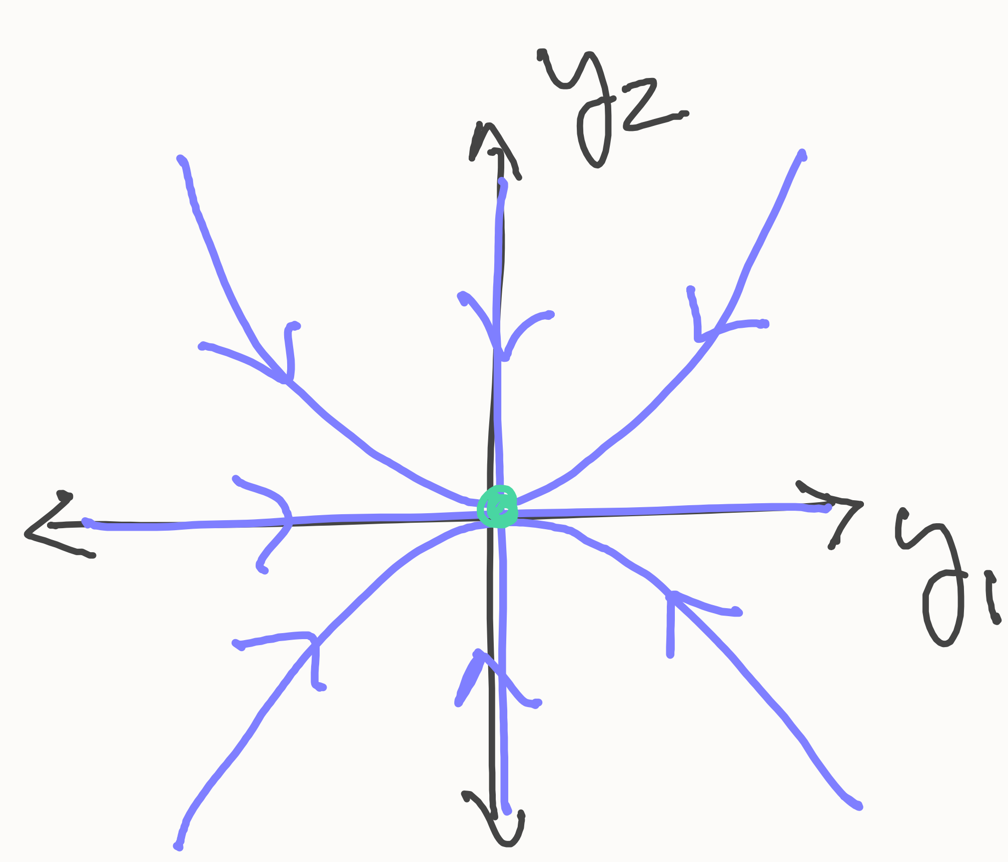
Caso c)

$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \iff \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in (0,1) \Rightarrow$ es como caso a) intercambiando ejes y_1 e y_2.



$\lambda_2, \lambda_1 > 0$

INESTABLE



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

ESTABLE

→ autovalores en $\mathbb{C}$: $\lambda = a+ib \wedge \bar{\lambda} = a-ib$.

autovector $\sim \lambda = v+iw$, $v,w \in \mathbb{R}^2$ l.i.

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{at}(v\cos(bt) - w\,\text{sen}(bt))$$

$$+\, c_2 e^{at}(v\,\text{sen}(bt) + w\cos(bt))$$

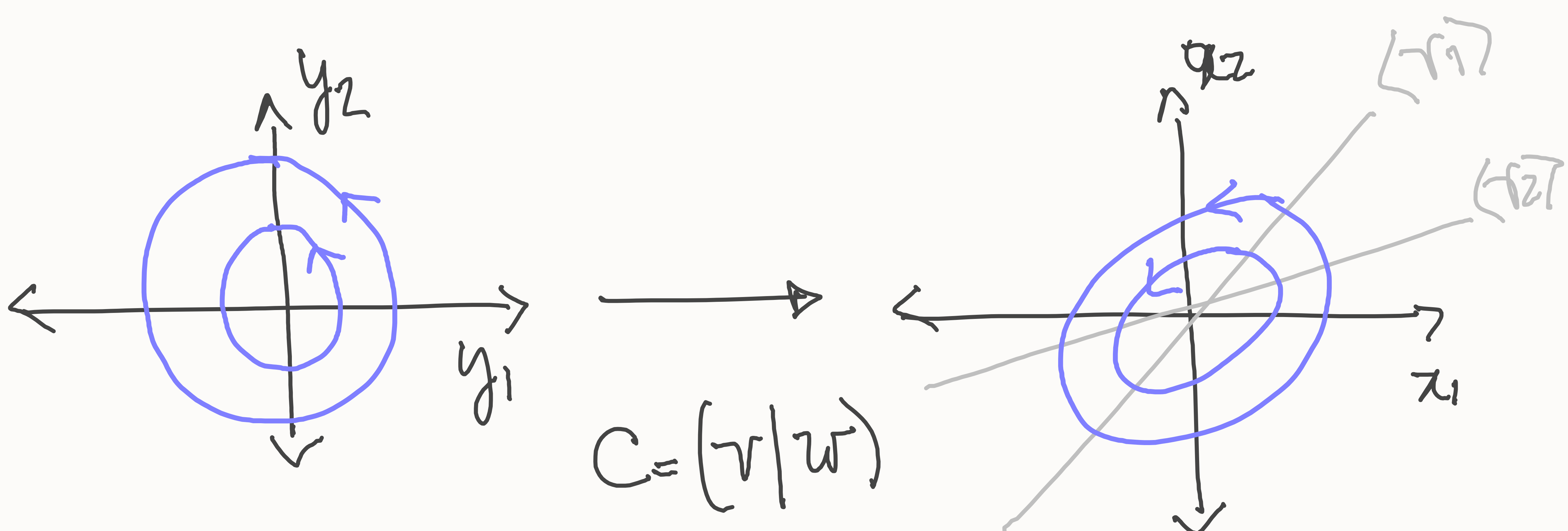
$$= v\,y_1(t) + w\,y_2(t)$$

con $y_1(t) = e^{at}(\,c_1\cos(bt) + c_2\,\text{sen}(bt))$

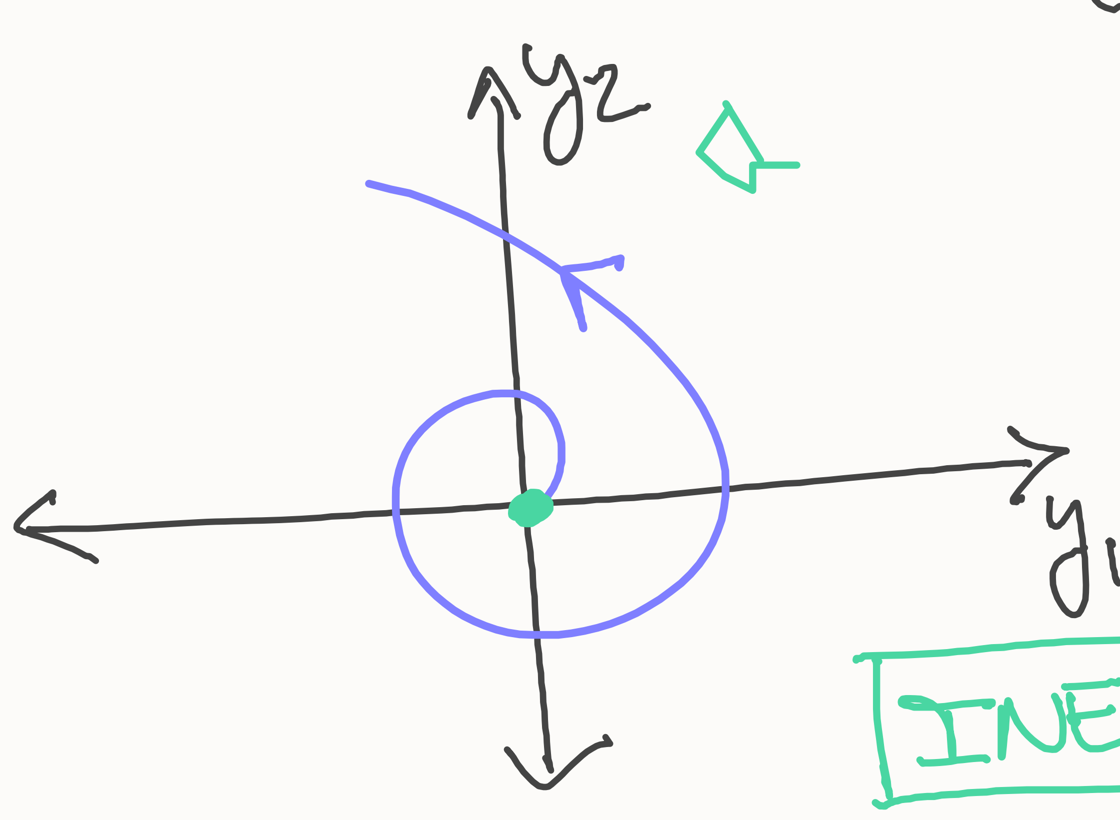
$$y_2(t) = e^{at}(-c_1\,\text{sen}(bt) + c_2\cos(bt))$$

Si $\begin{array}{l} c_1 = r\cos(\theta) \\ c_2 = r\,\text{sen}(\theta) \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = e^{at}\cos(\theta - bt) \\ y_2(t) = e^{at}\,\text{sen}(\theta - bt) \end{array}}$

$\boxed{a=0}$

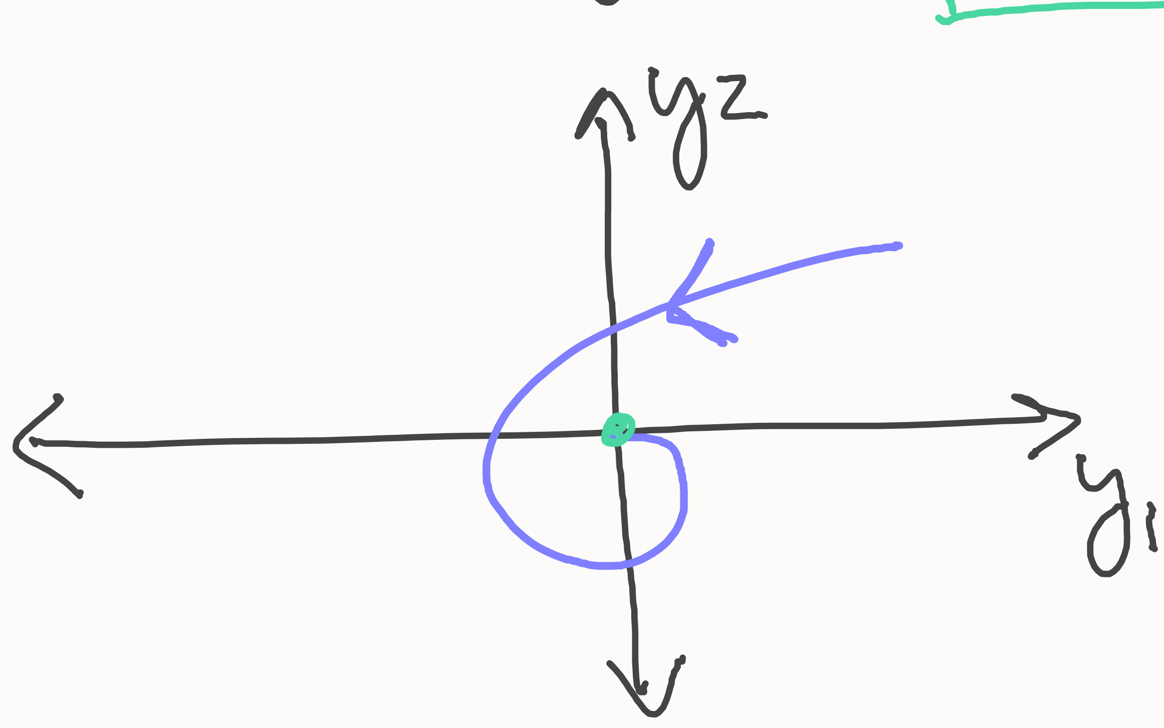


$\boxed{a>0}$



INESTABLE

$\boxed{a<0}$



ESTABLE

→ autovalor doble (A no diagonalizable)

$$X(t) = c_1 v e^{\lambda t} + c_2 (tv + w) e^{\lambda t}$$

con w | $(A - \lambda I) w = v$

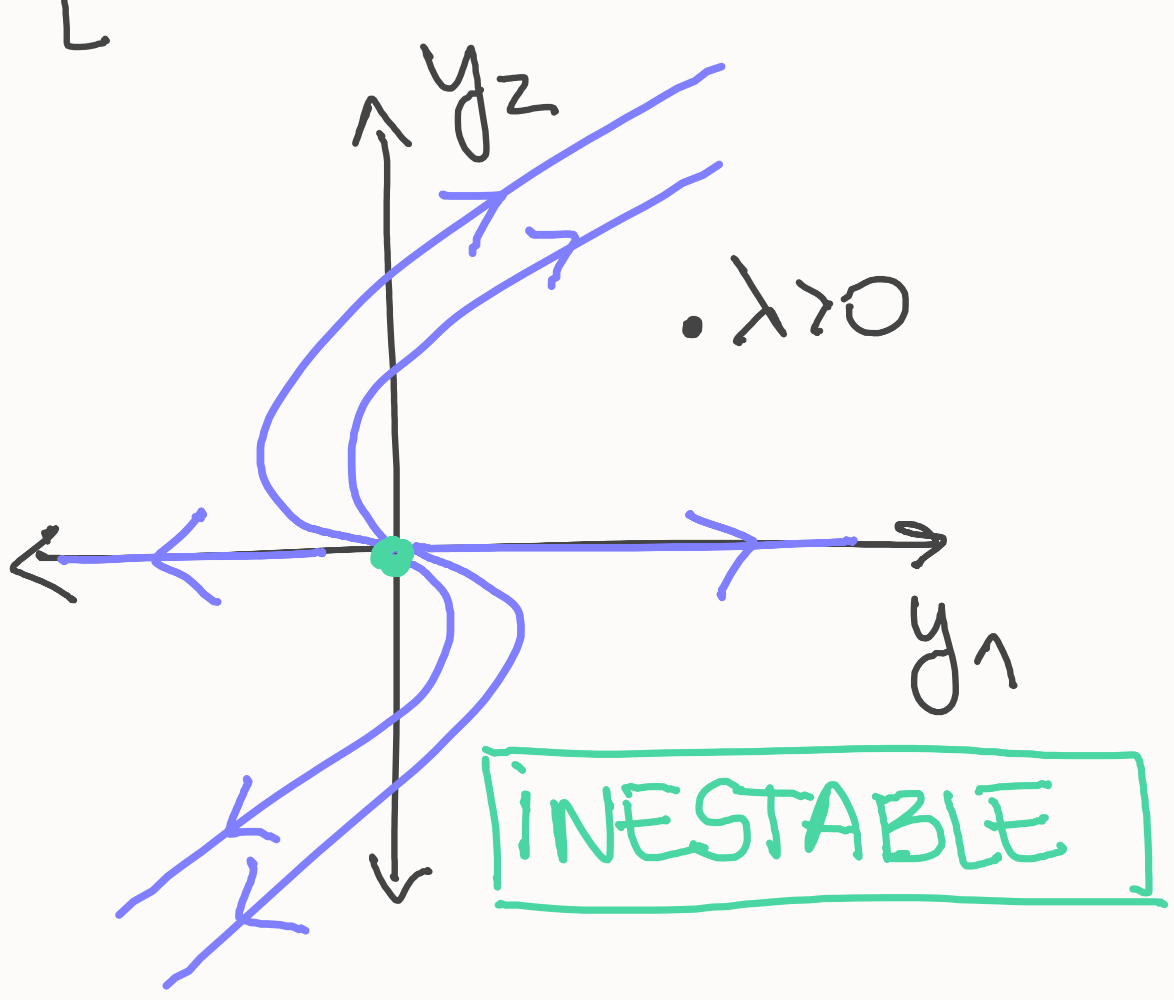
$\{v, w\}$ l.i.

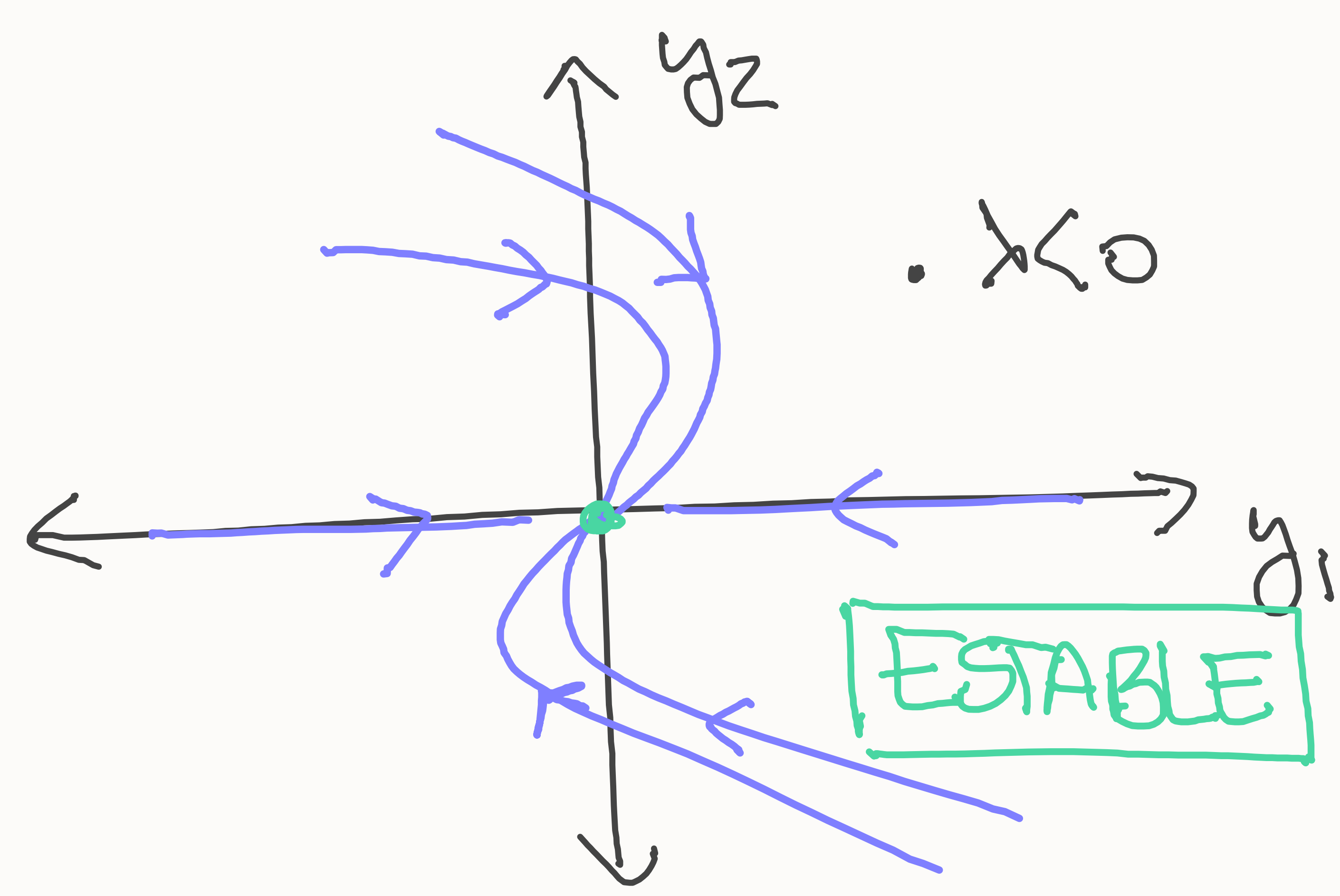
$$= v\, y_1(t) + w\, y_2(t)$$

$$y_1(t) = e^{\lambda t}(c_1 + t c_2)$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t} c_2.$$

[si $c_2 \neq 0 \Rightarrow y_2 = y_1\left(\frac{c_1}{c_2} - \frac{1}{\lambda}\ln|c_2| + \frac{1}{\lambda}\ln|y_1|\right)$]





Conclusiones

- Si la parte real de ambos autovalores es < 0 $\Rightarrow$ las soluciones tienden al $(0,0)$ que es el punto de equilibrio cuando $t \to +\infty$.

  $\boxed{\text{equilibrio ESTABLE}}$

- Si la parte real de los autov es > 0 $\Rightarrow$ las trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$.

y se alejan del equilibrio cuando $t \to +\infty$

$\boxed{\text{equilibrio INESTABLE}}$

- Si hay uno positivo y otro negativo hay exactamente 2 trayectorias que tienden a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$ y son los que están sobre la recta generada por el autovector asoc. al autov. <0.

  Hay exactamente 2 trayectorias que tienden al $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$ y son los que están en la recta generada por el autovec. asoc. al autovalor >0.

  Las demás trayectorias se alejan del origen en $t \to +\infty$ y $t \to +\infty$.

  $\boxed{\text{equilibrio INESTABLE}}$

Linealización

Tenemos un sistema autónomo:

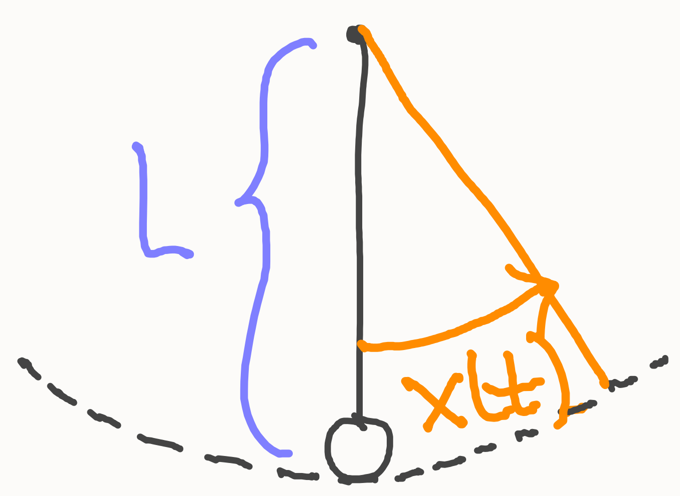
$$X' = F(X) \qquad \text{(no lineal)}$$

Si X_0 es punto de equilibrio $(F(X_0) = (0,0))$

y $DF(X_0)$ no tiene autov c/ parte real $=0$

$\Rightarrow$ el diagrama de fase de $X' = F(X)$ cerca de X_0, es similar al diagrama de fase de $Y' = DF(X_0)Y$ cerca de $Y_0 = (0,0)$.

Ejemplo del péndulo simple amortiguado.



- $x(t)$ = ángulo con la vertical (q' apunta hacia abajo)
- L = longitud del péndulo >0
- g = >0 constante de gravedad

$$\boxed{x'' + \frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) + cx' = 0}$$ con $c > 0$.

La pasamos a sistemas

$x = x$
$y = x'$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) - cy \end{cases}$

$F(x,y) = \left(y, -\frac{g}{L}\operatorname{sen}(x) - cy\right)$ es $\mathcal{C}^1$

$x \in [-\pi, \pi]$

. Puntos de equilibrio

$F(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\pi, 0, \pi \end{cases}$

$\Rightarrow (-\pi, 0), (\pi, 0), (0,0)$.

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(x) & -c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow DF(-\pi,0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -c \end{pmatrix}}_{A} = D(\pi,0)$$

Hacemos el diagrama de fase de $Y' = AY$.

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda - \frac{g}{L} \Rightarrow$ raíces $\lambda_1,\lambda_2 = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 + \frac{4g}{L}}}{2}$

. ambos autovalores son reales y

$\lambda_1 = \dfrac{-c - \sqrt{c^2 + \frac{4g}{L}}}{2} < 0$ y $\lambda_2 = \dfrac{-c + \sqrt{c^2 + 4g/L}}{2} > 0$

Autovectores:

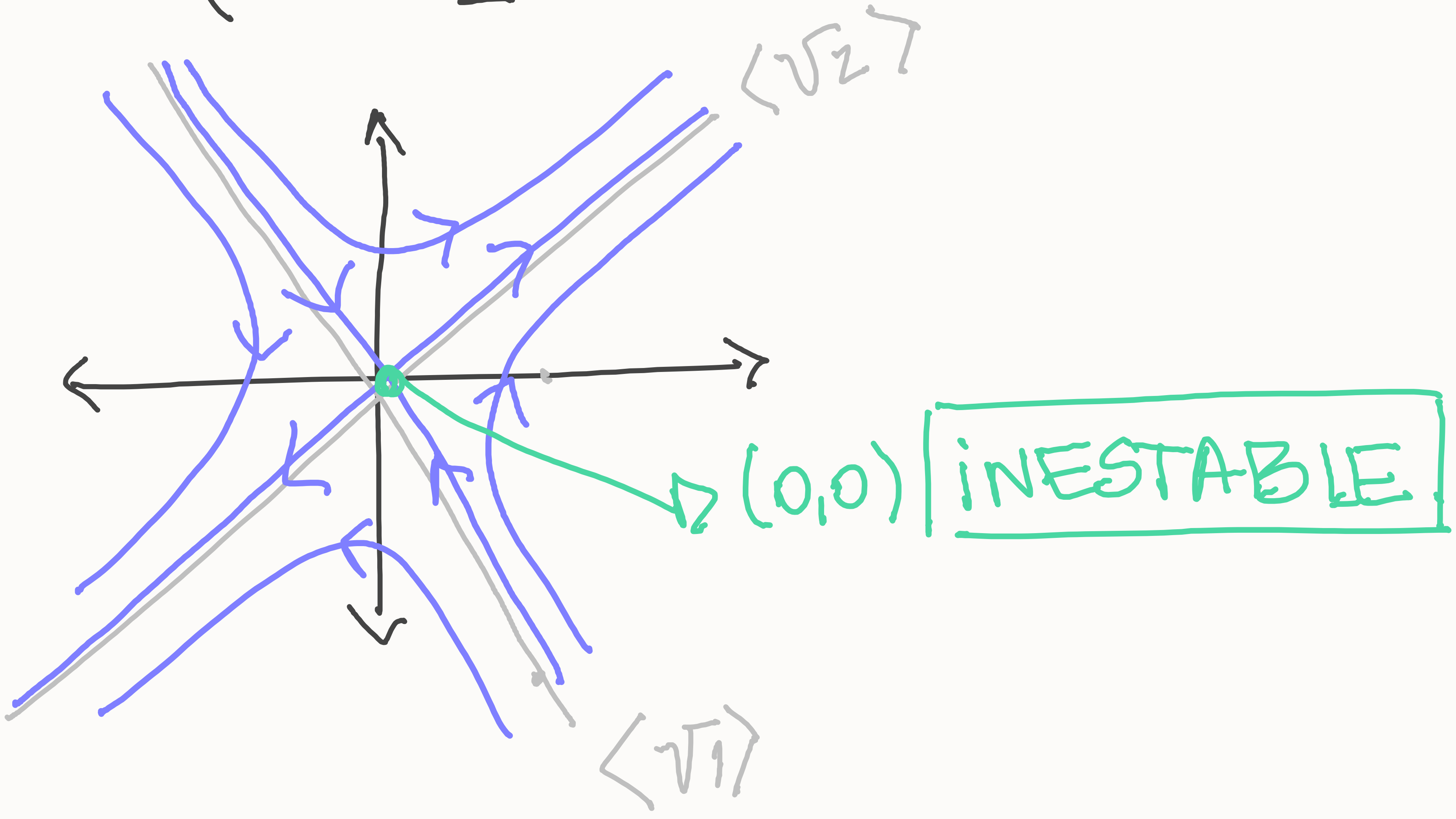
. $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4g/L}}{2} & 1 \\ g/L & \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4g/L}}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4g/L}}{2} \end{pmatrix}$

. $A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \frac{c - \sqrt{c^2 + 4g/L}}{2} & 1 \\ g/L & \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4g/L}}{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-c+\sqrt{c^2+4g/L}}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

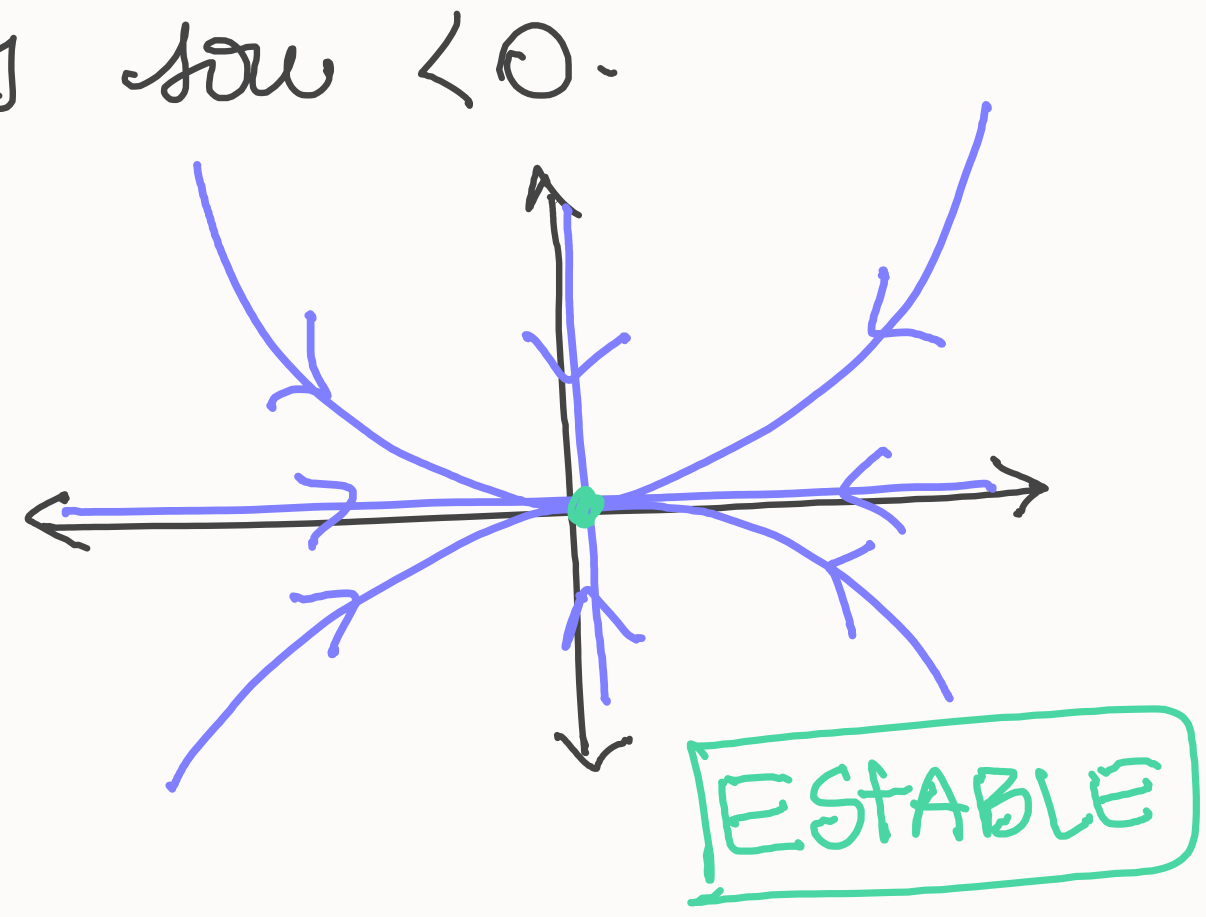


$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -c \end{pmatrix} = A \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda + \frac{g}{L}$$

$\Rightarrow$ raícas $\quad \lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4g/L}}{2}$

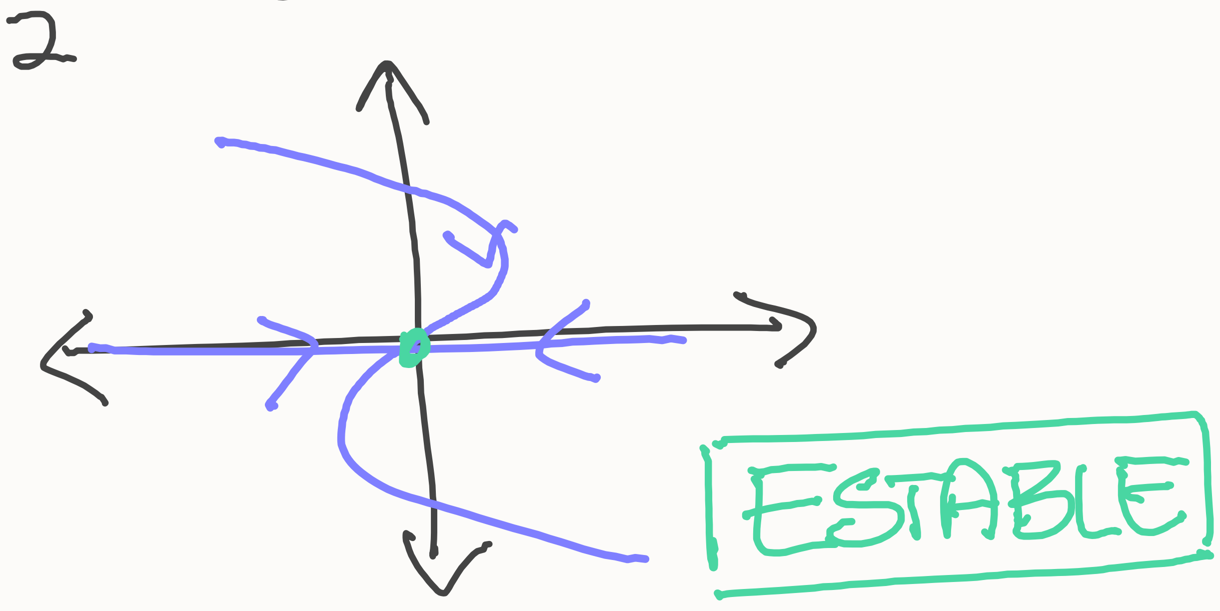
- $c^2 - 4g/2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ son reales, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y ambos son <0.

$\longrightarrow$

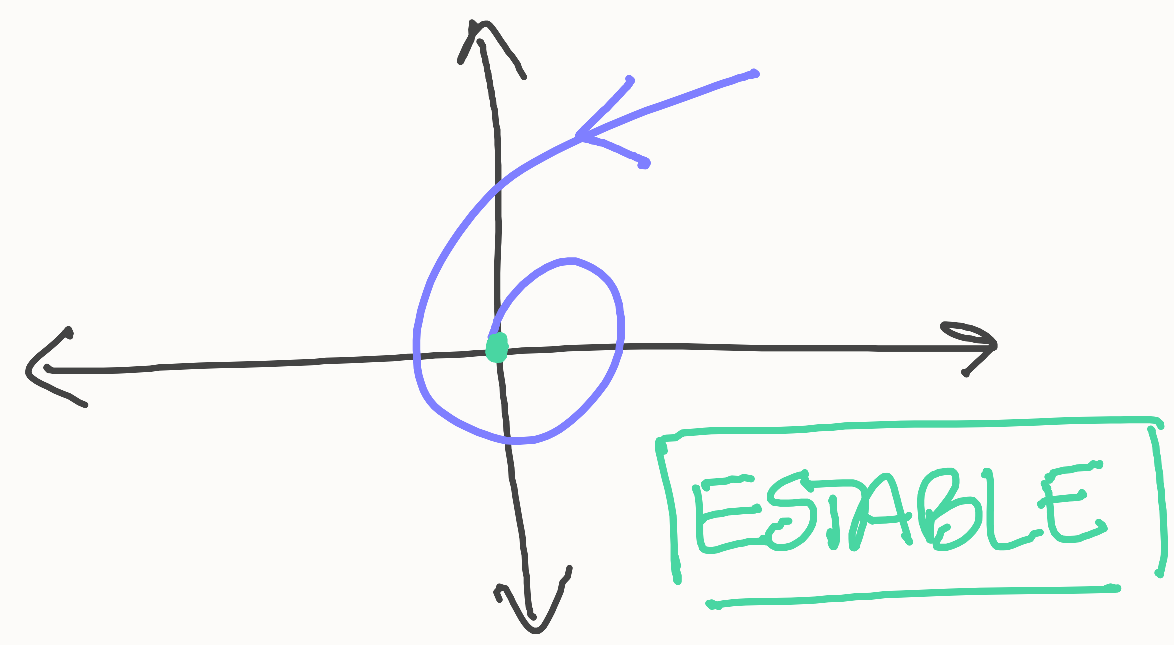


- $c^2 - 4g/2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c}{2}$ autovalor doble <0

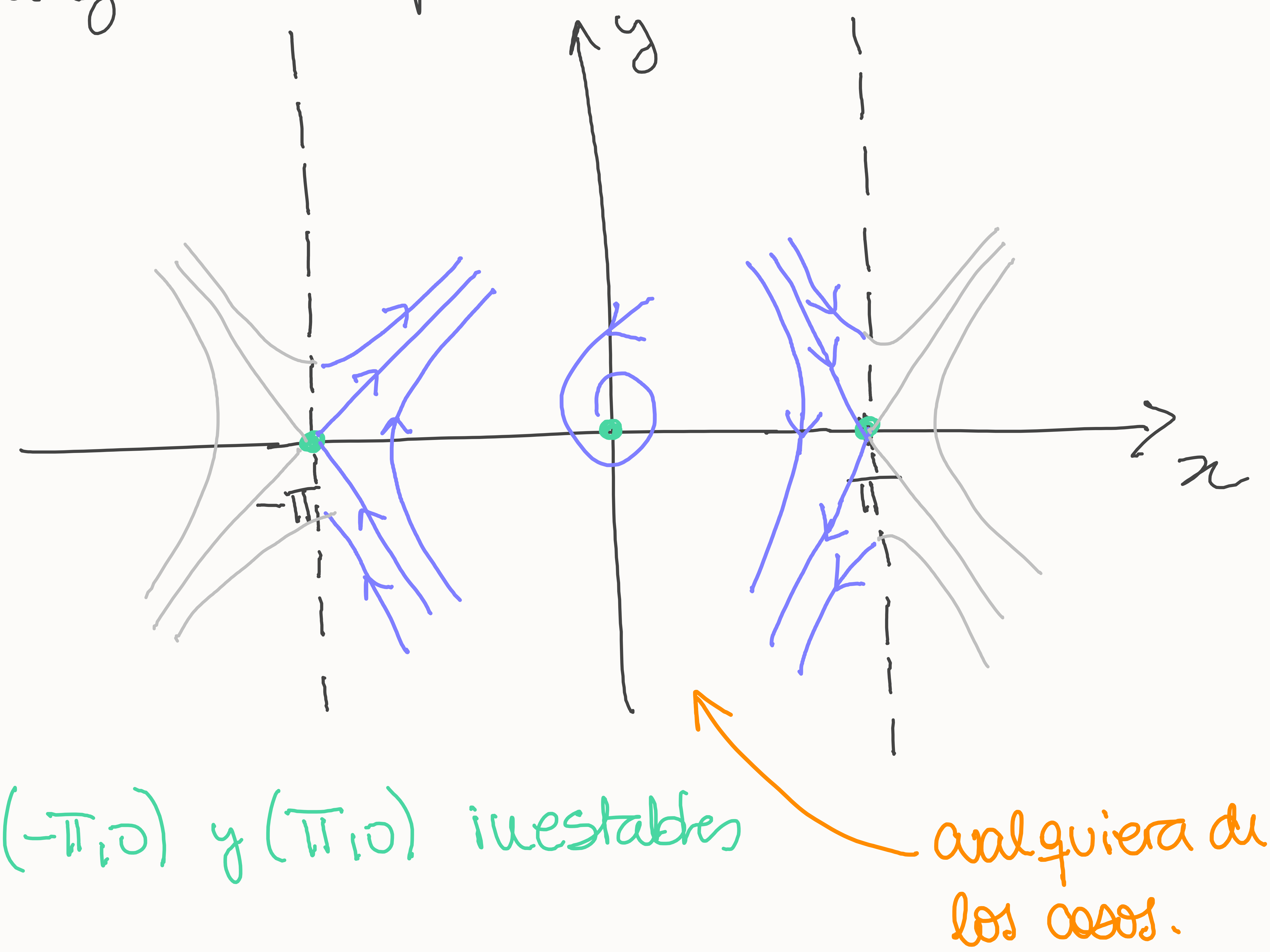
$\Rightarrow$



• $c^2 - 4\,g/L < 0 \Rightarrow$ autovalores complejos con parte real $= -\frac{c}{2} < 0$

$\Rightarrow$ 

⊛ diagrama de fase de $X' = F(X)$



• $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ inestables

• $(0, 0)$ estable.