ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 10

Campos conservativos:

Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo gradiente, esto es $F = \nabla f$ para alguna $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$. Entonces, si $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ es una curva orientada que empieza en el punto p y termina en q, tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} F.ds = f(q) - f(p).$$

⊛ La integral de un campo gradiente no depende de la curva, sino del punto final y el punto inicial.

⊛ ¿Cuáles son los campos a los que les pasa esto?

Definición:

Sea F un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$, salvo quizá en finitos puntos. Decimos que F es un campo conservativo si

$$\int_{\mathcal{C}_1} F\,ds = \int_{\mathcal{C}_2} F.ds$$

$\forall$ par de curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ suaves a trozos, simples que comienzan y terminan en los mismos puntos.

<u>Comentario</u>: • $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$ mide el trabajo que la fuerza F ejerce sobre una partícula que recorre la curva $\mathcal{C}$.

Si F es conservativo, el trabajo se "<u>conserva</u>" independientemente del camino.

• Un campo gradiente es conservativo.

<u>Pregunta</u>: ¿son los únicos?, es decir: si F es conservativo, ¿tiene que ser un campo gradiente?.

<u>Teorema</u>: (de los campos conservativos)
Sea F un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathbb{R}^3$ salvo quizá en finitos puntos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$\boxed{1}$ $\int_{\mathcal{C}} F ds = 0$ $\quad \forall$ curva $\mathcal{C}$ cerrada, simple y suave a trozos.

$\boxed{2}$ $\int_{\mathcal{C}_1} F ds = \int_{\mathcal{C}_2} F ds$ $\quad \forall$ par de curvas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ simples, suaves a trozos que empiezan y terminan en los mismos puntos.

$\boxed{3}$ F es un campo gradiente, i.e: $\exists f\ \mathcal{C}^2 /$
$F = \nabla f$.

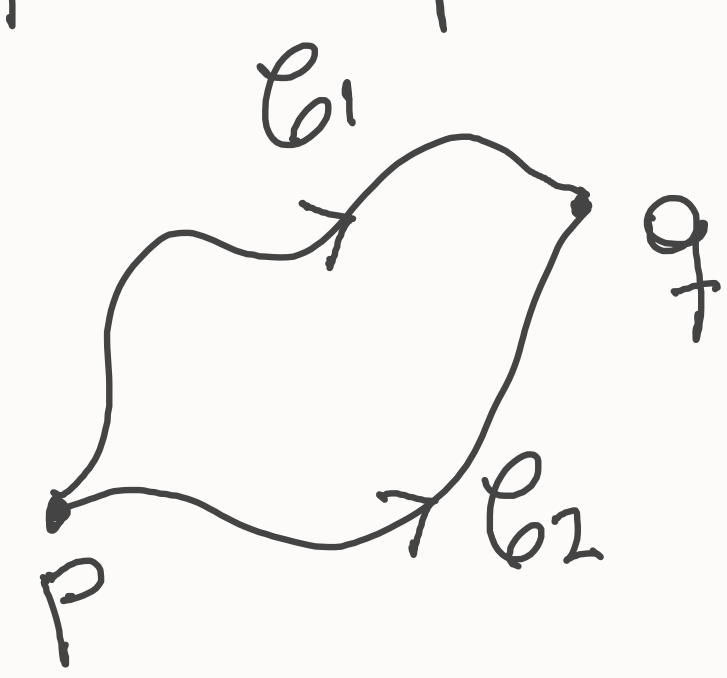
$\boxed{4}$ $\nabla \times F = (0,0,0)$

Observación: El teorema dice que ser conservativo es equivalente a $\boxed{1}$ a $\boxed{3}$ y a $\boxed{4}$.

Dem:

• $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$:

Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ curvas suaves a trozos, simples que empiezan en p y terminan en q.



Si llamamos $\mathcal{C}_2^-$ a la curva $\mathcal{C}_2$ pero recorrida en sentido contrario y consideramos la concatenación de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2^-$, obtenemos una curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^-$ que es cerrada.

Como vale $\boxed{1}$, $\int_{\mathcal{C}} F\, ds = 0$. Pero,

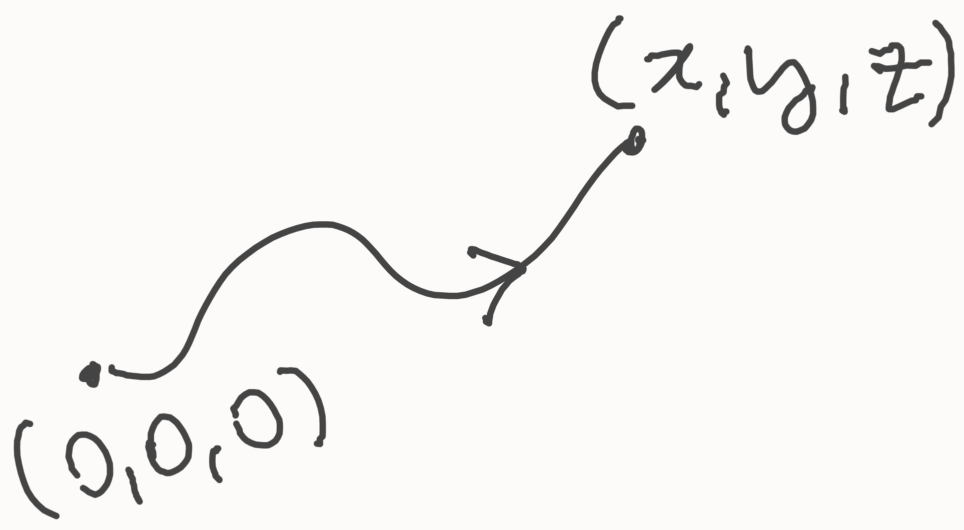
$$0 = \int_{\mathcal{C}} F\,ds = \int_{\mathcal{C}_1} F\,ds + \int_{\mathcal{C}_2^-} F\,ds = \int_{\mathcal{C}_1} F\,ds - \int_{\mathcal{C}_2} F\,ds.$$

Luego, $\int_{\mathcal{C}_1} F\,ds = \int_{\mathcal{C}_2} F\,ds$ como queríamos ver.

• $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$:

Queremos ver que $\exists f \,/\, \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (F_1, F_2, F_3)$.

Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C}$ una curva simple, suave a trozos que empieza en $(0,0,0)$ y termina en (x,y,z).

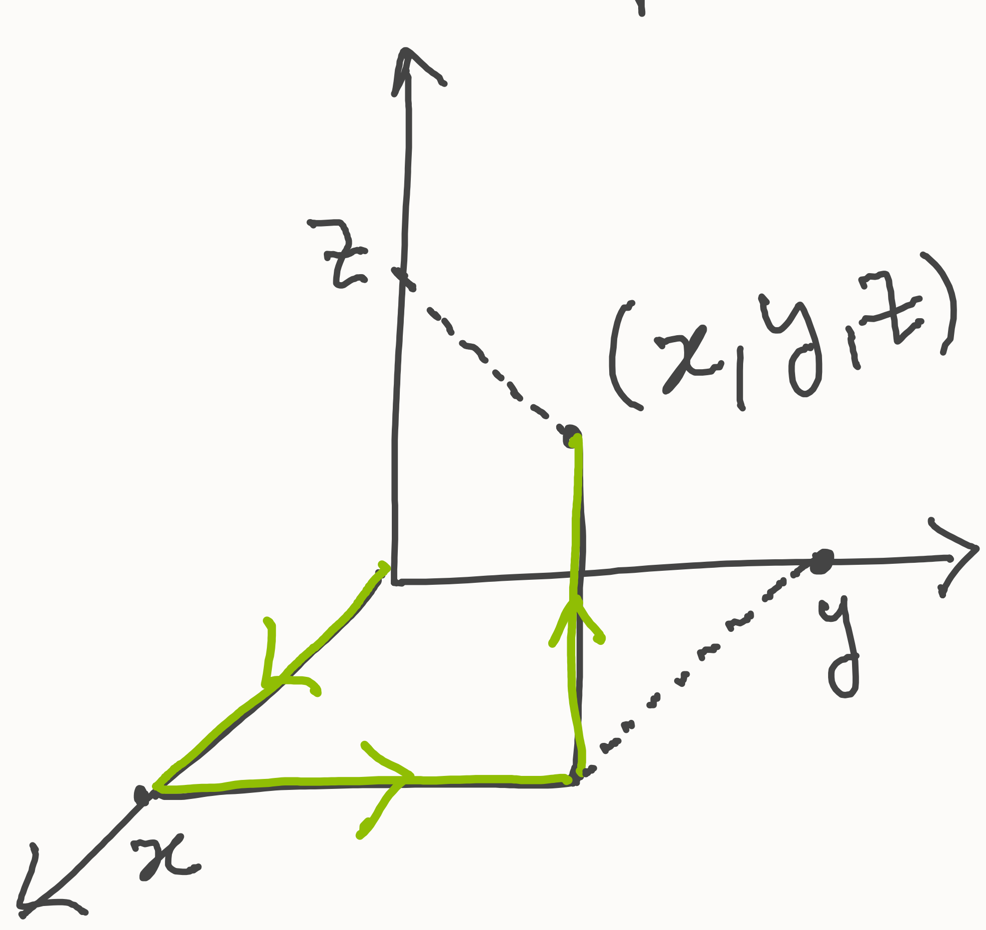


Definimos

$$f(x,y,z) := \int_{\mathcal{C}} F\, ds.$$

$\boxed{2}$ garantiza que f está bien definido (pues no depende de $\mathcal{C}$).

Veamos que $\nabla f = F$.



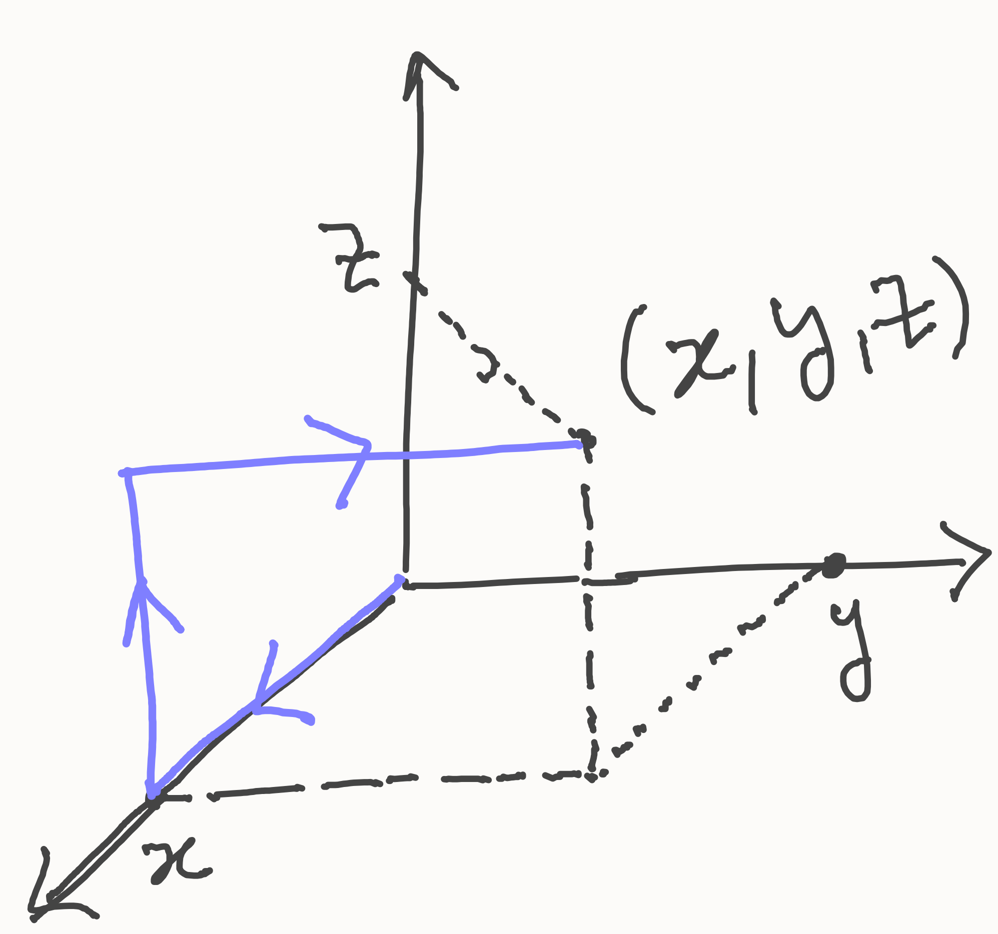
Consideremos $\mathcal{C}$ como en el dibujo.

Tomando esta curva se tiene que

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \underset{\text{TFC}}{=} F_3(x,y,z).$$

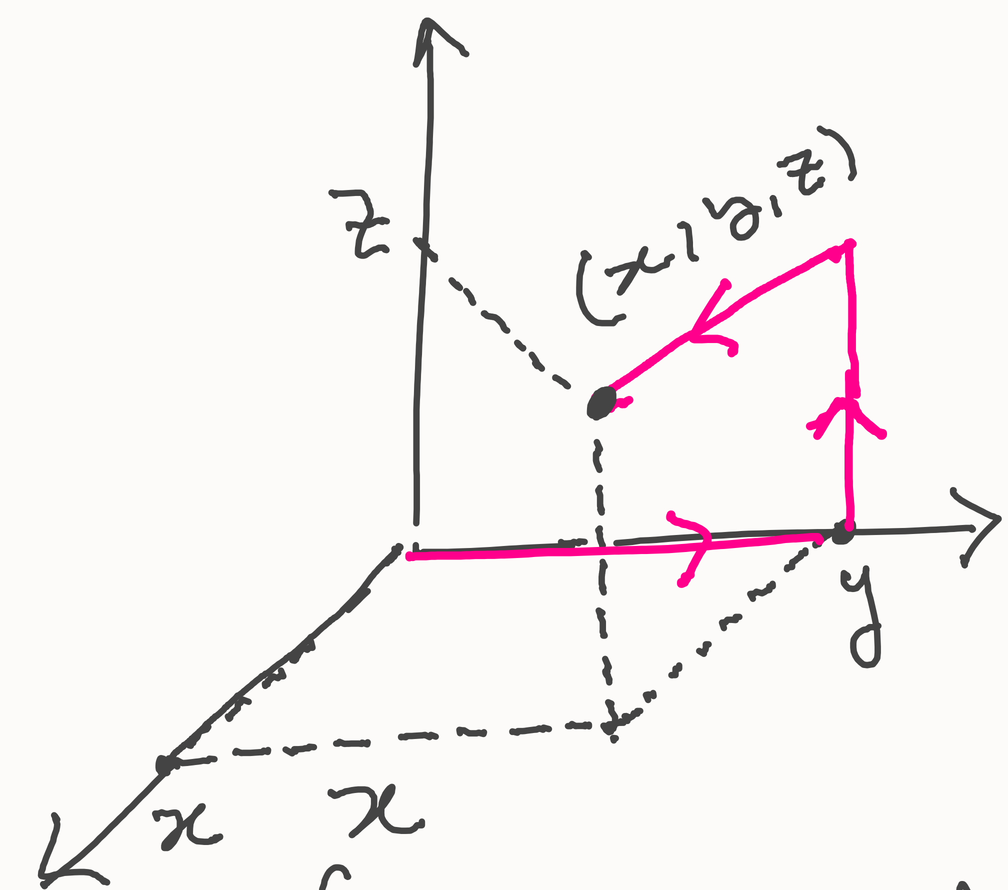
Consideremos ahora



Entonces,

$$f(x,y,z)=\int_0^x F_1(t,0,0)\,dt+\int_0^z F_3(x,0,t)\,dt+\int_0^y F_2(x,t,z)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=F_2(x,y,z).$$



Finalmente, consideramos

$\Rightarrow$

$$f(x,y,z)=\int_0^y F_2(0,t,0)\,dt+\int_0^z F_3(0,y,t)\,dt+\int_0^x F_1(t,y,z)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=F_1(x,y,z).$$

Luego, $\nabla f=F$ y como F es $\mathcal{C}^1$, f es $\mathcal{C}^2$.

- $\boxed{3}\Rightarrow\boxed{4}$:

  Si $F=\nabla f$ vimos que $\nabla\times(\nabla f)=(0,0,0)$.

- $\boxed{4}\Rightarrow\boxed{1}$:

  Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple y suave a trozos orientada.

  Tomamos $S\subseteq\mathbb{R}^3$ una superficie / $\partial S^+=\mathcal{C}$ y F sea $\mathcal{C}^1$ en toda S.

  Notemos que esto es posible porque hay sólo finitos puntos donde F no es $\mathcal{C}^1$ y por lo tanto puedo esquivarlos.

Luego, aplicando el teorema de Stokes tenemos

$$\int_S \nabla \times F \, ds = \int_{\mathcal{C}} F \, ds.$$

Como por $\boxed{4}$, $\nabla \times F = (0,0,0)$,

$$0 = \int_S \nabla \times F \, ds = \int_{\mathcal{C}} F \, ds$$ como queríamos.

$\boxtimes$

Observación:
La demostración de $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ da una forma de encontrar f.

Ejemplo:
Sea $F(x,y,z) = (y, z\cos(yz) + x, y\cos(yz))$
$\Rightarrow \nabla \times F(x,y,z) = (0,0,0)$. Como F es $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^\infty$) por el Teorema de campos conservativos, $\exists f \,/\, \nabla f = F$.

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt$$

$$= \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x\,dt + \int_0^z y\cos(yt)\,dt$$

$$= xy + \operatorname{sen}(yt)\Big|_{t=0}^{t=z} = xy + \operatorname{sen}(yz).$$

Observación:
Es importante que los puntos donde F no es $\mathcal{C}^1$ sean finitos.

Ejemplo:

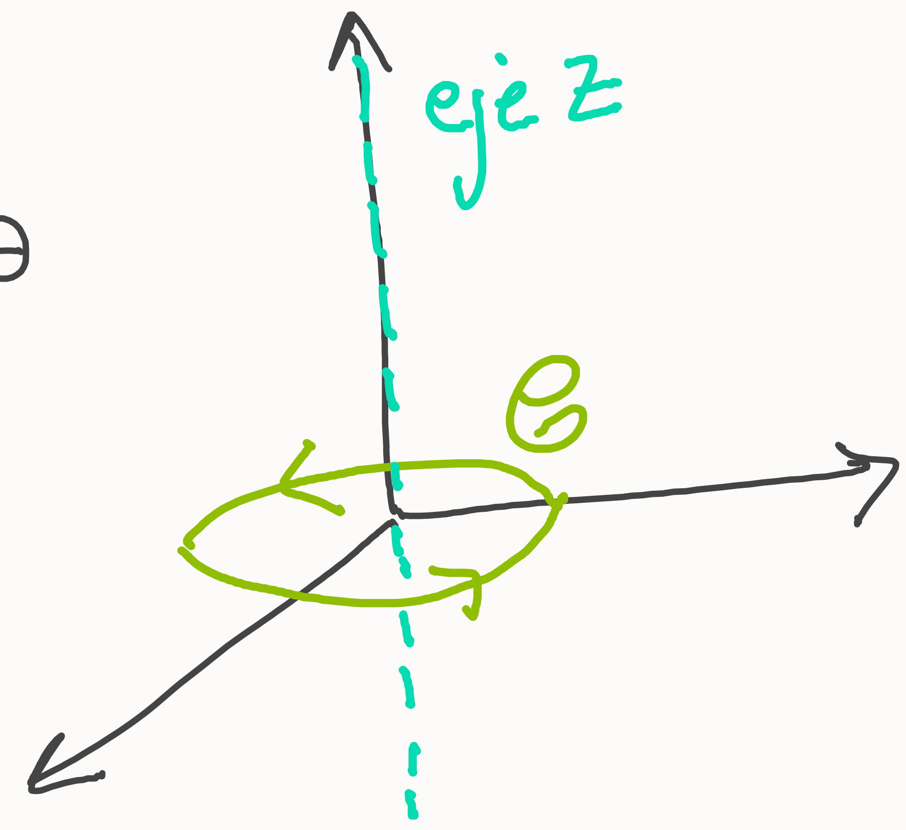
$$F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) \Rightarrow \nabla \times F = (0,0,0)$$

Como F no está definido en el eje z, no puedo decir que F sea conservativo.

De hecho; si considero la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por

$$\sigma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \sigma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F\, ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta) \rangle \, d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi \neq 0.$$