Campos conservativos

Teo.: Sea F un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$ excepto tal vez en un número finito de puntos. Son equivalentes:

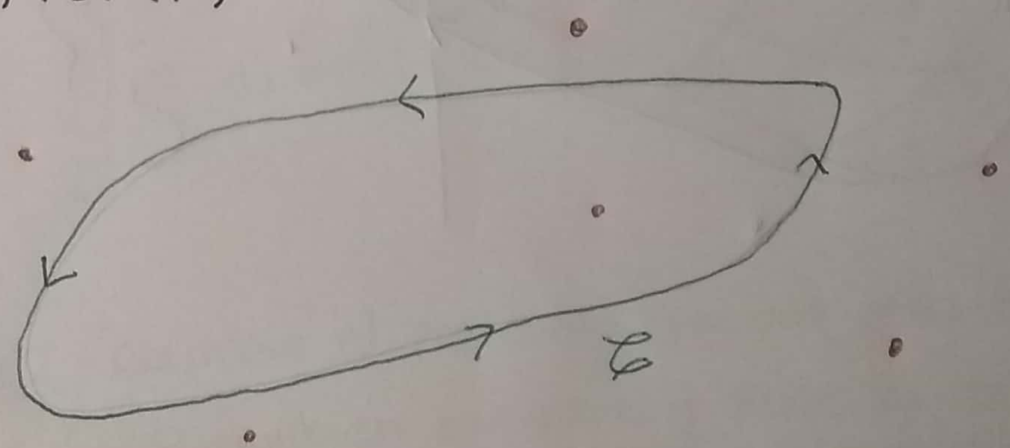
(1) Para cualquier curva cerrada simple y suave a trozos $\mathcal{C}$ se tiene $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 0$.

(2) Para cualquier par de curvas simples, suaves a trozos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ con los mismos extremos y la misma orientación se tiene
$$\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot ds.$$

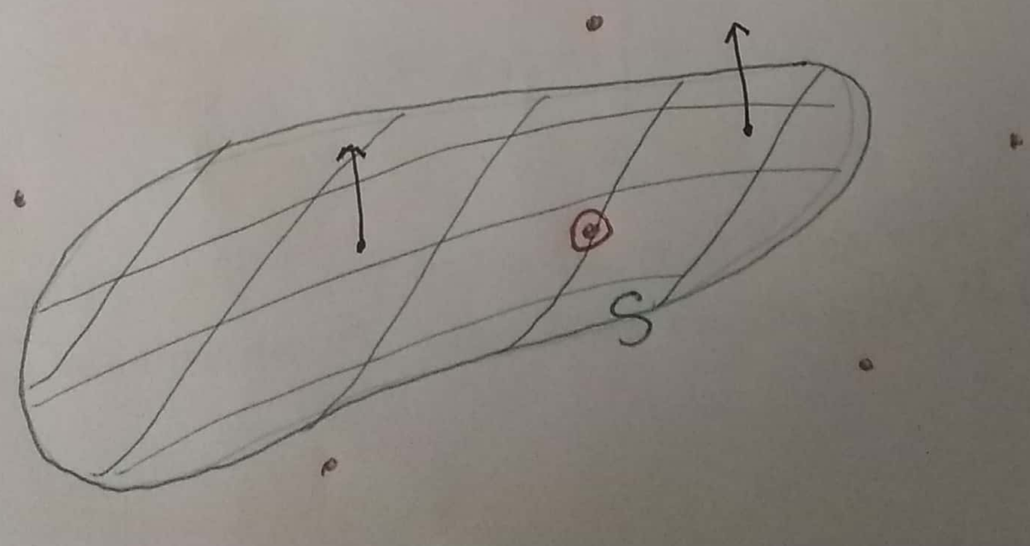
(3) F es el gradiente de alguna función f.

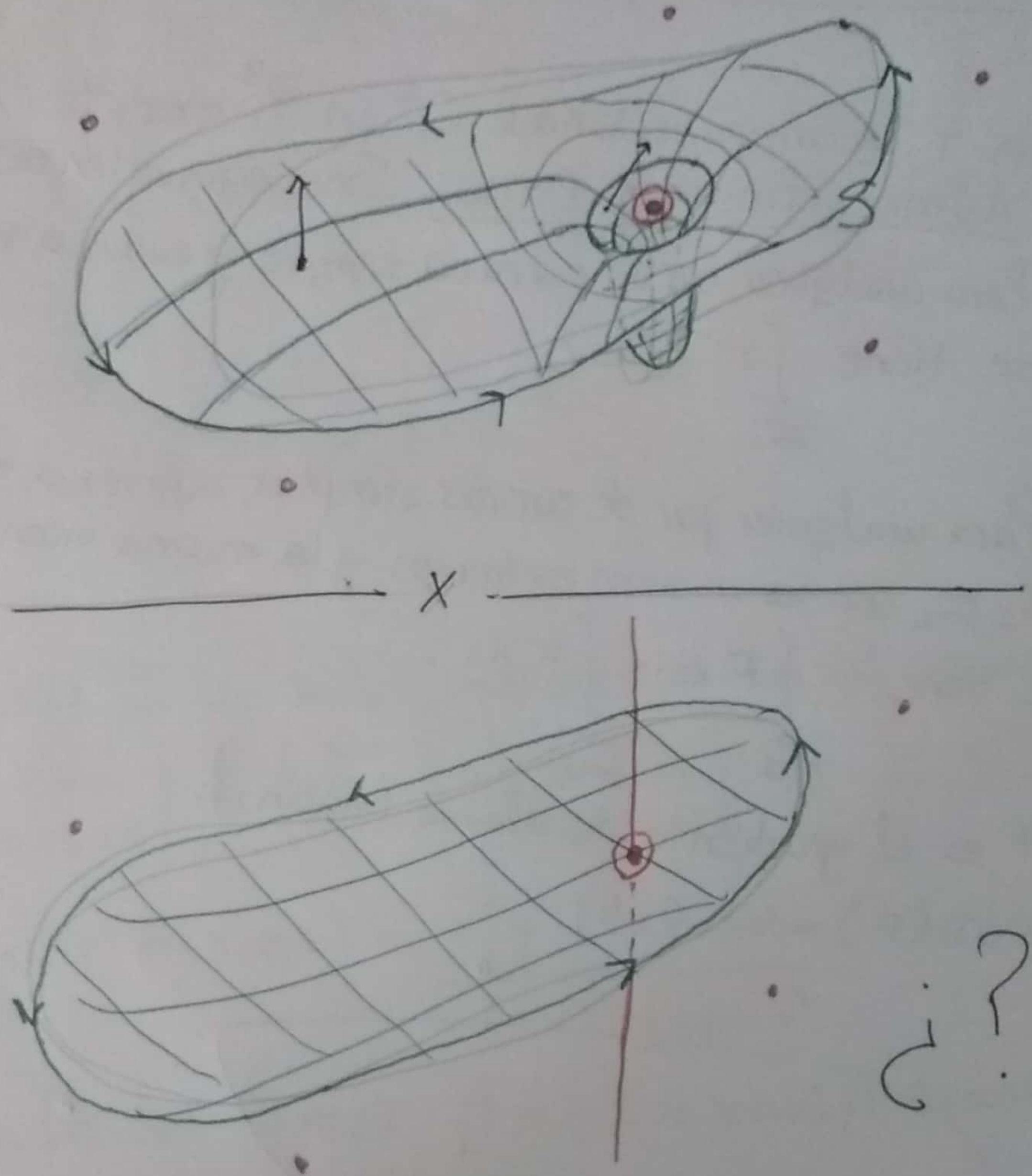
(4) $\text{rot}(F) = (0,0,0)$.

(4) ⇒ (1)



x



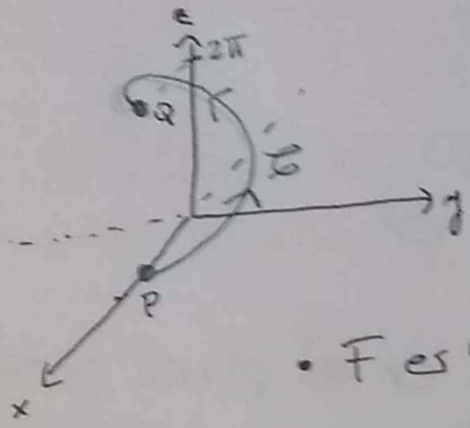

X
¿?

Ej.: Sea $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo definido por

$$F(x,y,z) = (-y\,\mathrm{sen}(2xy), -x\,\mathrm{sen}(2xy) + z\cos(4z), y\cos(4z) + z$$

y $\mathcal{C}$ la curva parametrizada por $\sigma:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ /

$\sigma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$. Calcular $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$.



- $\mathrm{rot}(F) = (0,0,0)$.
- F es C^1 en $\mathbb{R}^3$ ✓.
- $\mathcal{C}$ es una curva suave ✓.

<u>Opción 1</u>: Encuentro un potencial f para F. Así,

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = f(Q) - f(P).$$

<u>opción 2</u>: "cambio" el problema por uno más fácil.

- R también es suave y tiene los mismos extremos y la misma orientación.

(teo., (c)) $\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_{R} F \cdot ds$

- $\bar{\sigma}:[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 / \bar{\sigma}(s) = (1,0,s)$ es una parametrización regular de R (con la orientación correcta).

$$\int_R F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(s)), \sigma'(s) \rangle \, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (0,s,s), (0,0,1) \rangle \, ds = \left. \frac{s^2}{2} \right|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

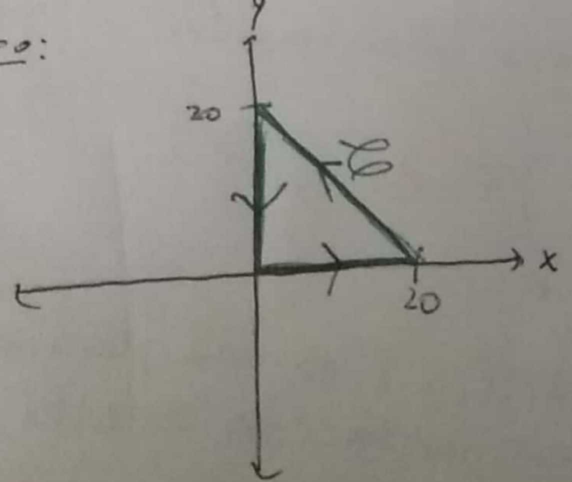
$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_R F \cdot ds.$$

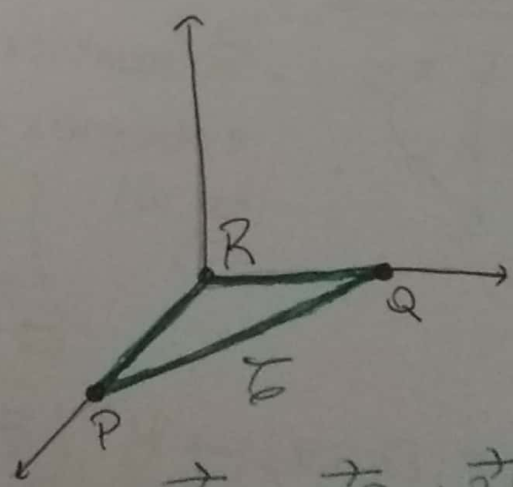
Ej.: Sea $\mathcal{C}$ la curva contenida en el plano $\{z=0\}$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \\ 0 \le x \le 20 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ x=0 \\ 0 \le y \le 20 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ x+y=20 \\ 0 \le x \le 20 \end{array} \right\}$$ y $H: \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array} \right\} \to \mathbb{R}$

la función $H(x,y,z) = \dfrac{x^2 y^2 (x+y-20)^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. Calcular la circulación del campo $F = (-2xz \operatorname{sen}(x^2+y), -2z \operatorname{sen}(x^2+y), \cos(x^2+y)) + \nabla H$ a lo largo de $\mathcal{C}$.

$\underline{z=0}$:





$\mathcal{C} = \overrightarrow{PQ} \cup \overrightarrow{QR} \cup \overrightarrow{RP}$

- $\operatorname{rot}(F) = (0,0,0)$

$$\operatorname{rot}(F) = \operatorname{rot}\left(-2xz\operatorname{sen}(x^2+y), -2z\operatorname{sen}(x^2+y), \cos(x^2+y)\right) + \operatorname{rot}(\nabla H)$$

Como H es de tipo C^2 en su dominio, $\operatorname{rot}(\nabla H) = \vec{0}$.

- ¿Dónde es F de tipo C^1?

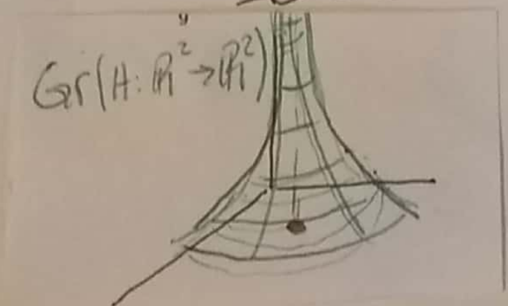
→ En $\mathbb{R}^3 \setminus \{\substack{x=1 \\ y=1}\}$,

$$F = \underbrace{G}_{C^1(\mathbb{R}^3)} + \underbrace{\nabla H}_{C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{\substack{x=1 \\ y=1}\})} \quad \text{es } C^1.$$

→ En un punto de la forma $P = (1, 1, z_0)$:

opción 1: Hago la cuenta.

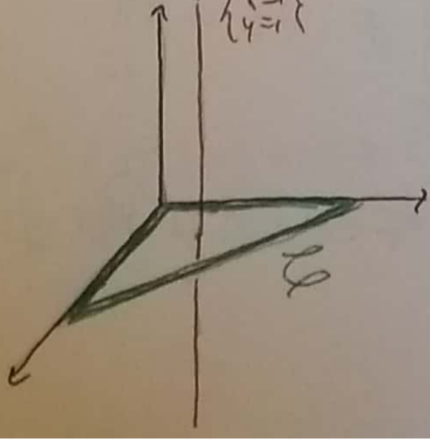
opción 2: Observo que $\lim_{(x,y,z)\to P} H(x,y,z) = +\infty$



y por lo tanto $\frac{\partial H}{\partial v}(x,y,z) \xrightarrow[(x,y,z)\to P]{} +\infty$

para toda dirección v.

Por lo tanto, F no es C^1 (no está definido) en la recta $\{\substack{x=1 \\ y=1}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.



Quiero calcular

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_{\mathcal{C}} G + \nabla H \cdot ds = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} G \cdot ds}_{=0,\ G \text{ es } C^1 \text{ y puedo usar in del teo.}} + \int_{\mathcal{C}} \nabla H \cdot ds.$$

Por otro lado, como H está definida y es C^1 en un entorno de $\mathcal{C}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla H \cdot ds = \int_{\overrightarrow{PQ}} \nabla H \cdot ds + \int_{\overrightarrow{QR}} \nabla H \cdot ds + \int_{\overrightarrow{RP}} \nabla H \cdot ds$$

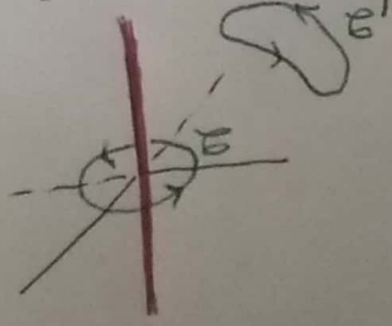
$$= \big(H(Q) - H(P)\big) + \big(H(R) - H(Q)\big) + \big(H(P) - H(R)\big)$$

$$= 0.$$

y entonces $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 0.$

<u>Ej.</u> Sea $F(x,y,z) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$,

de clase C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix}$.



- $\operatorname{rot}(F) = 0$.
- $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 2\pi$.

¿Cuánto vale $\displaystyle\int_{\mathcal{C}'} F \cdot ds$? ¿Por qué?