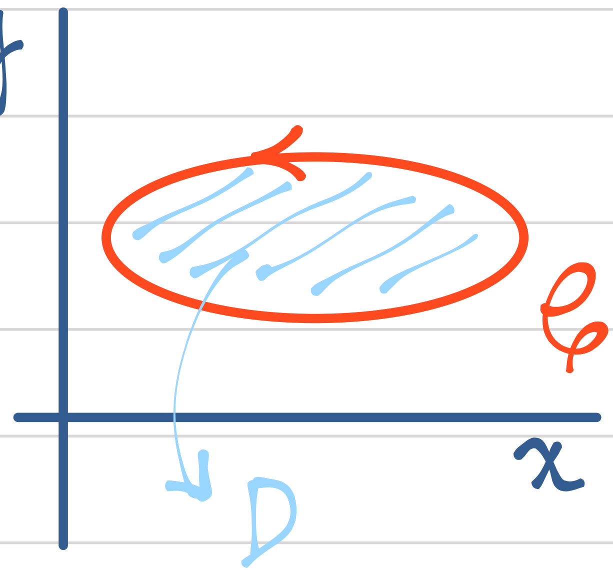
EL TEOREMA DE GAUSS
(TEOREMA DE LA DIVERGENCIA)

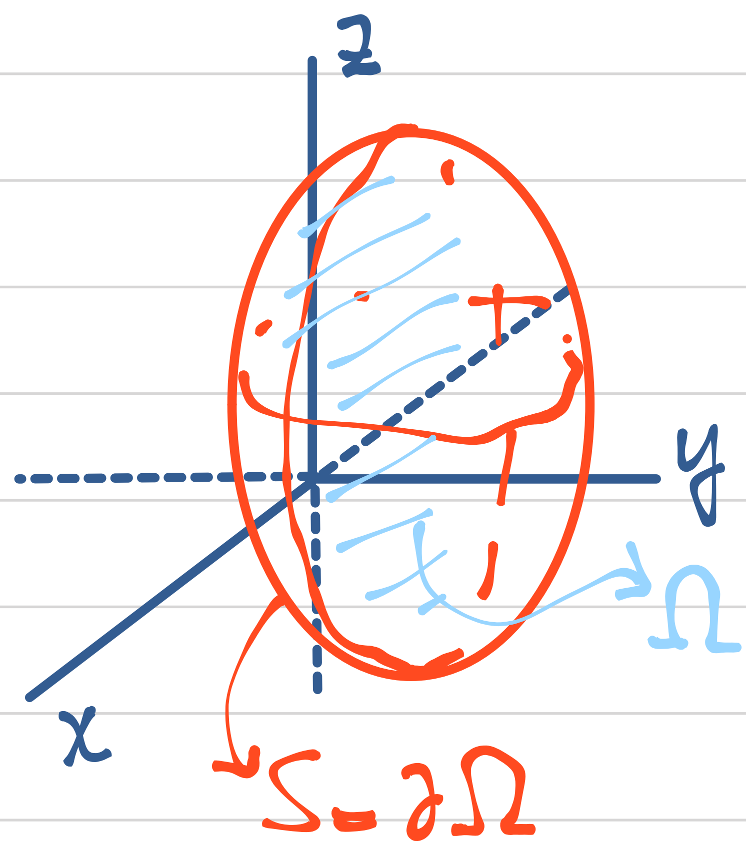
El teorema de la divergencia en el plano establece que si $\mathcal{C}$ es una curva plana, simple, cerrada, orientada en sentido antihorario y encierra una región elemental D de tipo $\underline{\text{III}}$, entonces

$$\iint_D \nabla \cdot \vec{F}\, dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot ds$$



para todo campo $\vec{F}$ de clase C^1 en D.

El teorema de Gauss que estudiaremos a continuación, también conocido como teorema de la divergencia, establece un resultado análogo para la integral de la divergencia de un campo vectorial sobre una región elemental del espacio y la integral de dicho campo sobre la superficie "cerrada" que encierra la región elemental.



OBSERVACIÓN Recordar que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una "región elemental" si se puede expresar de alguna de las siguientes maneras:

a) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,$
$\varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$

b) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D,$
$\varphi_1(x,z) \leq y \leq \varphi_2(x,z)\}$

c) $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D,$
$\varphi_1(y,z) \leq x \leq \varphi_2(y,z)\}$

donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental y $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$.

Si Ω es como en (a) entonces se dice que Ω es de tipo I; si es como en (b) se dice que es de tipo II; y si es como en (c) se dice que es de tipo III. Si Ω se puede escribir como en (a), (b) y (c) entonces se dice que Ω es de tipo IV.

A continuación damos la definición de qué entenderemos por "superficie cerrada".

<u>DEFINICIÓN</u> Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie.

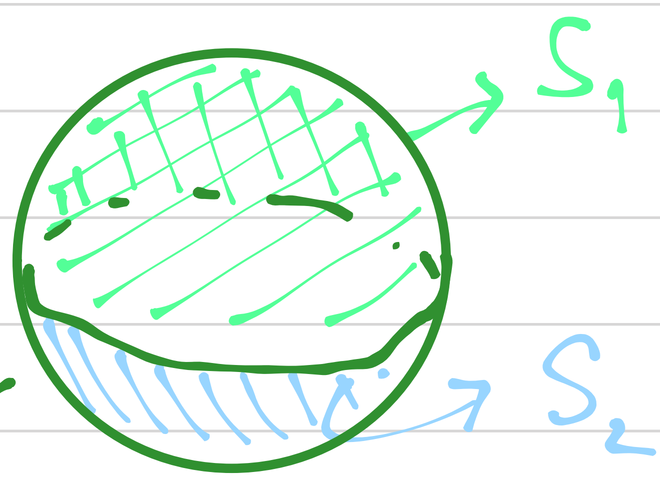
Decimos que S es una "superficie cerrada" si S encierra una región elemental $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. En tal caso, anotamos $S = \partial\Omega$.

<u>OBSERVACIÓN</u> Si S es una superficie cerrada entonces existen superficies $S_1, \ldots, S_n$ tales que

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j ,$$

$S_i \cap S_j$ está contenido en la unión de los bordes de S_i y de S_j para todo $i \neq j$ y cada S_j es el gráfico de una función definida sobre una región elemental $D_j \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. A cada superficie S_j la llamaremos "cara" de S.

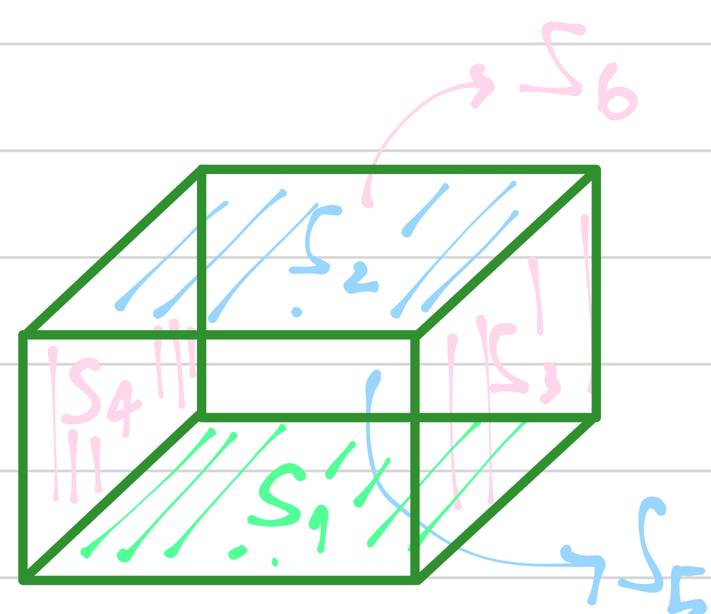
Si cada S_j es el gráfico de una fun-



S: región de tipo IV con dos caras.

ción C^1 entonces S_j es suave y orientable. En tal caso tenemos definida la integral de un campo vectorial contínuo $\vec{F}$ sobre S como

$$\iint_S \vec{F}\cdot ds = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_j} \vec{F}\cdot ds.$$



S: región de tipo IV con seis caras.

Además, en un tal caso diremos que S es "orientable a trozos" por el campo $\vec{n}$ definido como $\vec{n} = \vec{n}_j$ sobre S_j. En lo que sigue nos interesará el caso en el que $\vec{n}$ es exterior a S.

Ya estamos en condiciones de enunciar el teorema de Gauss.

<u>TEOREMA</u> (Teorema de Gauss) Sea S una superficie cerrada orientable a trozos por un campo normal exterior, la cual encierra una región elemental Ω de tipo $\underline{IV}$. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$ entonces

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F}\, dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{F} \cdot dS.$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Sean S, Ω y $\vec{F}$ como en el enunciado. Anotamos $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Dado que

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F}\, dx\,dy\,dz = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dS$$

y

$$\iint_{S} \vec{F} \cdot dS = \iint_{S} \Big((P,0,0) + (0,Q,0) + (0,0,R)\Big) \cdot dS,$$

basta demostrar que

a) $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \iint_{S} (P,0,0) \cdot dS$$

b) $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\,dy\,dz = \iint_{S} (0,Q,0) \cdot dS$$

c) $$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint_{S} (0,0,R) \cdot dS$$

A continuación vamos a demostrar (c).

Las pruebas de (a) y (b) son análogas y

se dejan como ejercicio.

Comenzamos por observar que, dado que Ω es una región de tipo IV y S es orientable por trozos, existen funciones $\varphi_1, \varphi_2 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 a trozos tales que

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$$

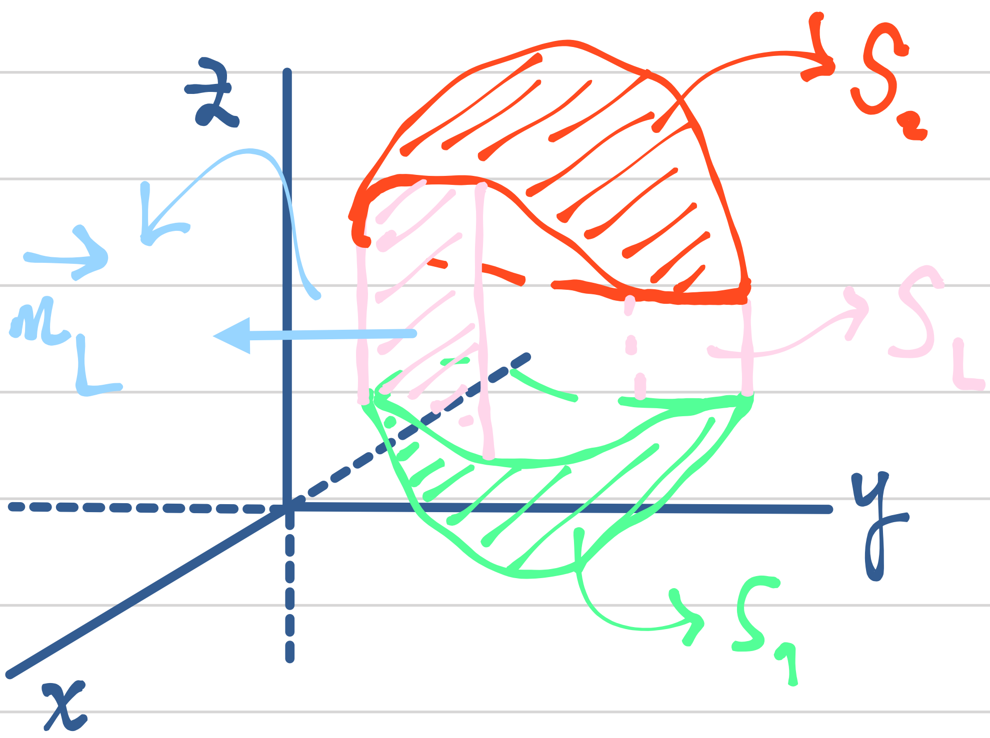
siendo $D \subset \mathbb{R}^2$ una región elemental. A continuación supondremos que φ_1 y φ_2 son de clase C^1. El caso más general se prueba de manera análoga. Luego,

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iint_D \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D \left(R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y)) \right) dx\,dy\,dz \qquad (*)$$

Para demostrar (c) basta ver que

$\iint (0,0,R) \cdot dS$ coincide con $(*)$.



Para calcular $\iint_S (0,0,R)\,dS$, escribimos

$$S = S_1 \cup S_L \cup S_2$$

donde $S_1 = \mathrm{Gra}(\varphi_1)$, $S_2 = \mathrm{Gra}(\varphi_2)$ y

S_L es la cara lateral de S, ver esquema

Notar que S_L puede ser vacío. Luego,

$$\iint_S (0,0,R) \cdot dS = \iint_{S_1} (0,0,R) \cdot dS$$

$$+ \iint_{S_L} (0,0,R) \cdot dS + \iint_{S_2} (0,0,R) \cdot dS.$$

A continuación vamos a calcular las tres últimas integrales.

- **Cálculo de $\iint_{S_L} (0,0,R) \cdot dS$**

Si S_L es vacío entonces $\iint_{S_L} (0,0,R)\cdot dS = 0$.

Si S_L no es vacío, vemos que tiene normal $\vec{n}_L$ dada por

$$\vec{n}_L(x,y,z) = (a(x,y,z), b(x,y,z), 0)$$

(cuya orientación suponemos compatible con la orientación exterior de S). Lo que aquí interesa es que la tercer componente de $\vec{n}_L$ es la función nula ya que esto implica

$$\iint_{S_L} (0,0,R)\cdot dS = \iint_{S_L} (0,0,R)\cdot(a,b,0)\, dS = 0.$$

- Cálculo de $\iint_{S_1} (0,0,R)\cdot ds$

Como $S_1 = Gra(\varphi_1)$, podemos parametrizar a S_1 con $T: D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y) = (x, y, \varphi_1(x,y))$$

Calculamos

$$T_x(x,y) = \left(1, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$T_y(x,y) = \left(0, 1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y)\right)$$

Así que

$$T_x(x,y) \times T_y(x,y) = \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y), 1\right).$$

Como la última coordenada de este vector es positiva, observamos que $T_x \times T_y$ no es compatible con la orientación exterior de S. Para conseguir la compatibilidad, consideramos a S_1 orientada por

$$\vec{n}_1(x,y,z) = -\frac{T_x(x,y) \times T_y(x,y)}{|T_x(x,y) \times T_y(x,y)|}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y), -1\right)}{|T_x(x,y) \times T_y(x,y)|}.$$

Hemos considerado a $\vec{n}_1$ unitario por comodidad. Notar que $T_x \times T_y \neq (0,0,0)$ en cada punto de D. Luego,

$$\iint_{S_1} (0,0,R) \cdot ds = \iint_{S_1} \underbrace{(0,0,R) \cdot \vec{n}_1}_{= -R} \, ds$$

$$= -\iint_D \frac{R(x,y,\varphi_1(x,y))}{\cancel{|T_x(x,y) \times T_y(x,y)|}} \cancel{|T_x(x,y) \times T_y(x,y)|} \, dx\,dy$$

$$= -\iint_D R(x,y,\varphi_1(x,y)) \, dx\,dy.$$

• Cálculo de $\iint_{S_2} (0,0,R)\cdot dS$

Razonando de manera análoga al cálculo anterior, se obtiene que

$$\iint_{S_2} (0,0,R)\cdot dS = \iint_{D} R(x,y,\varphi_2(x,y))\,dx\,dy$$

Por lo tanto, $\iint_{S} (0,0,R)\cdot dS$ coincide con (*). $\blacksquare$

__EJEMPLO__ Vamos a usar el teorema de Gauss para calcular

$$\iint_S f\,dS$$

donde $f(x,y,z)=x^2+y+z$ y S es la esfera de radio 1 con centro en $(0,0,0)$.

Observar que, como S es cerrada, orientable y encierra al disco

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\},$$

que es una región de tipo IV, el teorema de Gauss asegura que

$$\iint_S f \, dS = \iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \, dx\,dy\,dz$$

si $\vec{F}$ es un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} \cdot \vec{n} = f$, donde $\vec{n}$ es un campo normal exterior que orienta a S.

Ahora consideramos $\vec{n}$ dado por

$$\vec{n}(x,y,z) = (x,y,z)$$

y buscamos $\vec{F} = (P,Q,R)$ tal que

$$x P(x,y,z) + y Q(x,y,z) + z R(x,y,z)$$
$$= x^2 + y + z. \qquad (*)$$

Es directo que el campo $\vec{F}$ dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = (x,1,1)$$

cumple $(*)$. Además es de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. Como $\nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = 1$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene,

$$\iint_S f\,dS = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \mathrm{Vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi.$$