ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN LINEAL DE ORDEN n NO HOMOGENEA

A continuación vamos a estudiar cómo determinar la solución de una ecuación de la forma

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=f(t) \qquad (*)$$

para $t\in I$, donde $I\subseteq\mathbb{R}$ es un intervalo y $a_j, f: I\to\mathbb{R}$ son funciones continuas para $j=0,\ldots,n-1$. Para ello nos valdremos de lo que hemos estudiado para sistemas lineales de primer orden. Ya hemos visto que $(*)$ admite soluciones definidas en todo I y que x es solución de $(*)$ en I si y sólo si $y=(x,x',\ldots,x^{(n-1)})$ es solución de

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = -a_0(t)y_0(t) - \dots - a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + f(t) \end{cases} \qquad (**)$$

También vimos que la solución general de (**) se puede expresar como la suma entre la solución general y_H del sistema homogeneo asociado a (**) y una solución particular y_p de (**); y que y_p se puede obtener mediante el método de variación de las constantes.

Veamos cómo se traduce todo esto en la solución general de (*).

Ya hemos visto que el conjunto de soluciones en I de la ecuación homogenea asociada a $(*)$,

$$x^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t)+\dots+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0, \qquad (***)$$

es un espacio vectorial de dimensión n.

Si $\{x_1,\dots,x_n\}$ es una base de soluciones de $(**)$ entonces las funciones $z_j: I\to\mathbb{R}^n$ definidas por

$$z_j(t)=(x_j(t),x_j'(t),\dots,x_j^{(n-1)}(t))$$

para $j=1,\dots,n$, forman una base de soluciones para el sistema homogeneo asociado a $(**)$. En efecto, es directo que cada z_j es solución. Además, $\{z_1,\dots,z_n\}$ es li ya que $\{z_1(t),\dots,z_n(t)\}$ es li puesto que $z_1(t),\dots,z_n(t)$ son las columnas de la matriz

$$W(x_1,..,x_n)(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & & & \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es no nulo por ser el Wronskiano de $x_1,..,x_n$ en t, siendo $\{x_1,..,x_n\}$ li, cualquiera sea $t\in I$.

A partir de esto se deduce que la solución general de $(*)$ es

$$x = x_p + x_H$$

siendo x_H la solución general de $(***)$ y x_p una solución particular de $(*)$.

Además se deduce que x_p se puede tomar como la primera componente de una solución particular y_p de (**) obtenida con el método de variación de las constantes usando la base $\{z_1, \dots, z_n\}$. En tal caso, y_p está dada por

$$y_p(t) = c_1(t) z_1(t) + \dots + c_n(t) z_n(t)$$

donde las funciones $c_1, \dots, c_n$ son tales que $Q(t) c'(t) = b(t)$ para todo $t \in I$, siendo Q la matriz fundamental del sistema homogeneo asociado a (**) correspondiente a la base $\{z_1, \dots, z_n\}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$. Notar que $Q = W$.

Esto conduce al siguiente resultado.

<u>TEOREMA</u> Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $a_j, f : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en I

para $j=1,\dots,n$. Entonces la solución general de (*) es

$$x = x_p + x_H$$

donde x_H es la solución general de la ecuación homogenea (***) asociada a (*) y x_p es una solución particular de (*).

Además, se puede considerar a x_p dada por

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t)$$

donde $\{x_1,\dots,x_n\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogenea (***) y las funciones $c_1,\dots,c_n$ son tales que

$$\begin{cases} c_1'(t)\,x_1(t) + c_2'(t)\,x_2(t) + \dots + c_n'(t)\,x_n(t) = 0 \\ c_1'(t)\,x_1'(t) + c_2'(t)\,x_2'(t) + \dots + c_n'(t)\,x_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(t)\,x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)\,x_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'(t)\,x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

para todo $t \in I$.

Veamos un ejemplo.

<u>EJEMPLO</u> Vamos a determinar la solución general de

$$x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = -e^{4t}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Para ello vamos a determinar primero una base de soluciones de la ecuación homogenea asociada y luego vamos a buscar una solución particular de la ecuación no homogenea mediante el método de variación de las constantes.

•• Base de soluciones para la ecuación homogenea asociada

La ecuación homogenea asociada es

$$x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Como sus coeficientes son constantes, sabemos determinar una base de soluciones a partir de conocer las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$

Dado que este polinomio tiene como raíz doble a $\lambda = 4$, sabemos que las funciones $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$x_1(t) = e^{4t} \quad y \quad x_2(t) = te^{4t}$$

forman una base de soluciones para la ecuación homogenea.

.. Solución particular de la ecuación no homogenea

Buscamos una solución particular x_p de la forma $x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$, donde las funciones c_1, c_2 son tales que

$$\begin{cases} c_1'(t)\,x_1(t) + c_2'(t)\,x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\,x_1'(t) + c_2'(t)\,x_2'(t) = -e^{4t} \end{cases}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Comenzamos por determinar c_1' y c_2'.

$$\begin{cases} c_1'(t)\,x_1(t) + c_2'(t)\,x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\,x_1'(t) + c_2'(t)\,x_2'(t) = -e^{4t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{4t}c_1'(t) + te^{4t}c_2'(t) = 0 \\ 4e^{4t}c_1'(t) + (t+4)e^{4t}c_2'(t) = -e^{4t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1'(t) + t\,c_2'(t) = 0 \\ 4c_1'(t) + (t+4)\,c_2'(t) = -1 \end{cases}$$

Se deja como ejercicio deducir que la solución de este sistema está dada por

$$c_1'(t) = t \qquad \text{y} \qquad c_2'(t) = -1$$

cualquiera sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces elegimos

$$c_1(t) = \frac{t^2}{2} \quad \text{y} \quad c_2(t) = -t$$

para $t \in \mathbb{R}$. Así obtenemos la solución particular x_p definida por

$$x_p(t) = \frac{t^2}{2} e^{4t} - t^2 e^{4t} = -\frac{t^2}{2} e^{4t}$$

Ya estamos en condiciones de dar la solución general de la ecuación no homogenea,

$$x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{\text{Sol. part. de la ec. no hom.}} + \underbrace{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)}_{\text{Sol. gral. de la ec. hom.}}$$

$$= -\frac{t^2}{2} e^{4t} + c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}$$

$$= e^{4t} \left(-\frac{t^2}{2} + c_2 t + c_1 \right)$$

para $t \in \mathbb{R}$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.