ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 16

- Prolongación de soluciones y soluciones maximales
- Sistemas lineales de 1º orden.

Recordemos:

Sea $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente lipschitz en x, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$ y consideremos el problema

$$(*) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi . \end{cases}$$

Entonces, si x_1 es solución de $(*)$ en un intervalo J_1 y x_2 es solución de $(*)$ en un intervalo J_2

$\Rightarrow x_1 = x_2$ en $J_1 \cap J_2$.

- Esto permite hacer lo siguiente:

Definimos $x_3(t) = \begin{cases} x_1(t) & t \in J_1 \\ x_2(t) & t \in J_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_3$ es solución de $(*)$ en $J_1 \cup J_2$.

Definición: Sea $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitz en x y consideremos el problema $\begin{cases} x' = f(t,x) . \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$

Definimos la solución maximal del problema como la solución definida en

$$J_0 = \bigcup\{J : J \subseteq I \text{ es intervalo tal que } \tau \in J \wedge \text{hay solución en } J\}.$$

Observaciones:

- Hay solución definida en J_0.
- J_0 es el intervalo más grande donde hay solución (no puedo extender más allá de J_0)
- la solución definida en J_0 es única.

Nombre: a esa solución la llamamos solución maximal. Cuando $J_0 = I$, la solución se llama solución global.

Proposición:
Sea $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo / $\forall\, t_1 < t_2$ en I, $f|_{[t_1,t_2]\times\mathbb{R}} : [t_1,t_2]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lipschitz en x. Entonces, la solución maximal de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$

es global (ie: está definida en todo I).

Dem: ver video complementario 6.

- Recordemos que si $F(t,X) = A(t)X + b(t)$ con $A(t) = (a_{ij}(t))_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tales que

$a_{ij}(t), b_j(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuos $\Rightarrow$ F era localmente lipschitz en X y más aún si $J=[t_1,t_2] \subseteq I \Rightarrow F|_{J\times\mathbb{R}^n}$ es lipschitz en x. Como consecuencia tenemos:

Teorema:

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo (que puede ser $\mathbb{R}$). Sean $a_{ij}(t), b_j(t)$ funciones definidas en I, $\forall\, 1\leq i,j \leq m$, continuas. Sean $\tau \in I \wedge \xi \in \mathbb{R}^n$.

Entonces el sistema

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ \vdots \\ x_m' = a_{m1}(t)x_1 + a_{m2}(t)x_2 + \cdots + a_{mn}(t)x_n + b_m(t) \end{cases}$$

tiene una única solución $x=(x_1, \ldots, x_n) \,/\, x(\tau)=\xi$. Esta solución resulta ser global (ie: está definida en todo I).

Sistemas lineales de 1º orden homogéneos.

Recordemos que el sistema anterior lo escribimos matricialmente como

$$\begin{cases} X' = A(t)X + b(t) \\ X(\tau) = \xi \end{cases}$$

con $A(t) = (a_{ij}(t))_{ij}$, $b(t) = (b_1(t) \ldots b_m(t))^t$.

Nombre: El sistema se dice homogéneo si $b(t) = (0, \ldots, 0)^t \ \forall t \in I$.

- Queremos probar que el conjunto de soluciones de $X' = A(t)X$ es un espacio vectorial de dimensión n.

Recordemos:

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto V con 2 operaciones:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

que cumplen las siguientes propiedades:

1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V$.

2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V$.

3) $\exists\, 0 \in V \ / \ v + 0 = v \quad \forall v \in V$

4) $\forall v \in V \ \exists\, (-v) \in V \ | \ v + (-v) = 0$.

5) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 \quad \forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

6) $1 . v = v \quad \forall v \in V$.

7) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v \quad \forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

8) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v \quad \forall v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

- $V = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\mathbb{V} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$
  - $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$
  - $(\lambda f)(t) = \lambda . f(t)$.

- $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio si
  - $0 \in \mathbb{S}$
  - $v, w \in \mathbb{S} \Rightarrow v + w \in \mathbb{S}$.
  - $v \in \mathbb{S} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in \mathbb{S}$.

Ejemplos:

- $\mathbb{S} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
- $\mathbb{S} = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es } \mathcal{C}^1 \}$ es subespacio de $\mathbb{V}$.

Teorema: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo y $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con coeficientes continuos. Entonces el conjunto de soluciones de

$$X'(t) = A(t) X(t)$$

es un espacio vectorial de dimensión n.

Dem: Como las soluciones de $X' = A(t) X$ son $\mathcal{C}^1$ y globales, tenemos que

$$\mathbb{S} = \{ \text{soluciones} \} \subseteq \mathbb{V} = \{ X : I \to \mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1 \}$$

Vamos a probar que $\mathbb{S}$ es subespacio de dim n.

1) $X \equiv \vec{0}$ es solución.

2) Si $X_1, X_2 : I \to \mathbb{R}^n$ son soluciones $\Rightarrow$ veamos que $X_1 + X_2$ es solución:

$$(X_1+X_2)' = X_1' + X_2' = A(t)X_1 + A(t)X_2$$
$$= A(t)(X_1+X_2) \Rightarrow ✓.$$

3) Si $X : I \to \mathbb{R}^n$ solución y $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$(\lambda X)' = \lambda X' = \lambda A(t)X = A(t)(\lambda X)$ y $\therefore$ λX es solución.

Entonces $\mathcal{S}$ es subespacio.

Para ver que tiene dimensión n, veamos que hay una base de $\mathcal{S}$ con n elementos.

Para $1 \leq i \leq n$, sea X_i la única solución de

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(\tau) = e_i \end{cases}$$

donde $\tau \in I$ (fijo) $\wedge$ $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to$ lugar i-ésimo

vector canónico.

Veamos que $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una base de $\mathcal{S}$.

1°) Son li: Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ /

$\alpha_1 X_1(t) + \cdots + \alpha_n X_n(t) = \vec{0}$ $\forall t \in I$ qvq:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Notemos que como $\tau \in I$, $\alpha_1 X_1(\tau) + \cdots + \alpha_n X_n(\tau) = \vec{0}$

$\underset{X_i(\tau)=e_i}{\Rightarrow}$ $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \vec{0}$ $\Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$ ✓

2º) Son un sistema de generadores:

qvq si $X \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ /

$$X = c_1 X_1 + \dots + c_n X_n.$$

Llamamos $\xi = X(r) \Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n.$

Tomamos $Y(t) = \xi_1 X_1(t) + \dots + \xi_n X_n(t)$ que está en $\mathcal{S}$ pues $X_1, \dots, X_n$ están en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es e.v.

Como $Y(r) = \xi_1 X_1(r) + \dots + \xi_n X_n(r)$

$$= \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$$

$$= \xi$$

y $\therefore$ Y es solución de $(*) \begin{cases} X' = A(t)X. \\ X(r) = \xi \end{cases}$

Pero X también es solución de $(*)$ $\underset{(\text{unicidad})}{\Rightarrow}$

$Y = X$ y $\therefore$ $\{X_1, \dots, X_n\}$ es un sistema de generadores.

Luego $\mathcal{B}$ es base $\boxtimes$

Proposición:

Sean $\{X_1, \dots, X_n\}$ soluciones de $X' = A(t)X$ con $A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ continua. Sea $r \in I$.

Entonces,

$\{X_1, \dots, X_n\}$ es li $\Leftrightarrow \{X_1(r), \dots, X_n(r)\}$ es li en $\mathbb{R}^n$.

Dem: $\Rightarrow$) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ / $\alpha_1 X_1(r) + \cdots + \alpha_n X_n(r) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ la función $Y(t) = \alpha_1 X_1(t) + \cdots + \alpha_n X_n(t)$ es solución de $\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(r) = \vec{0} \end{cases}$.

Como la función constantemente $\vec{0}$ también es solución, por unicidad tenemos que $Y \equiv \vec{0}$.

Entonces, como $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es li, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

$\Leftarrow$) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ / $\alpha_1 X_1(t) + \cdots + \alpha_n X_n(t) = \vec{0}$ $\forall t \in I$ $\Rightarrow$ para $t = r$ tenemos que

$$\alpha_1 X_1(r) + \cdots + \alpha_n X_n(r) = \vec{0}.$$

Como $\{X_1(r), \ldots, X_n(r)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es li, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ $\boxtimes$

Ejemplo:

Las funciones $X_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ definidas en $\mathbb{R}$ son li:

$$\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 t \\ \alpha_2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall t$$

$\Rightarrow$ para $t = 1$ $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Pero $\{X_1(0), X_2(0)\}$ no es li. Entonces, No existe un sistema lineal de 2×2 del cual X_1 y X_2 son solución.

Corolario:

Sean $\{X_1, \ldots, X_n\}$ soluciones de $X' = A(t)X$ con $A: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ continua. Sean r y r' en I. Entonces,

$$\{X_1(r), \ldots, X_n(r)\} \text{ es li} \iff \{X_1(r'), \ldots, X_n(r')\} \text{ es li.}$$

Definición:

Si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es una base de soluciones de $X' = A(t)X \Rightarrow$ la matriz de $n \times n$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

se llama **matriz fundamental**.

Observación:

La matriz fundamental cumple:

1. $Q'(t) = A(t)Q(t) \quad \forall t \in I$.
2. $\det(Q(r)) \neq 0$ para algún $r \in I \iff \det(Q(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$.
3. $X(t)$ es solución de $X' = A(t)X \iff \exists\, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,/\, X(t) = Q(t)C$.