ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 18

• Sistemas lineales de orden 1 con coeficientes constantes (caso homogéneo)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, queremos encontrar las soluciones de $X' = AX$.

Observación: vimos que si $A(t) = (a_{ij}(t))_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz de coef. continuos $\Rightarrow$ el conjunto de soluciones de $X' = A(t)X$ es un E.V de dim n.
Entonces, si A es constante sabemos que existe una base de soluciones de $X' = AX$ con n funciones.
Sabemos además que las soluciones van a estar definidas en todo $\mathbb{R}$ (son globales)

Recordemos: si $n=1 \Rightarrow x' = ax$ $\quad a \in \mathbb{R}$
tiene como solución a $x(t) = ke^{at}$ con $k \in \mathbb{R}$.

$\boxed{*}$ Para $n>1$ proponemos una solución de la forma $X(t) = v e^{\lambda t}$ con $v \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veamos cómo tienen que ser v y λ para que $X(t) = v e^{\lambda t}$ sea efectivamente sol.

- Si $X(t) = ve^{\lambda t} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} \Rightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} = v\lambda e^{\lambda t}$.

- $AX(t) = (Av)e^{\lambda t}$.

Entonces, $X(t) = ve^{\lambda t}$ es solución de $X' = AX$

si y sólo si

$$v\lambda e^{\lambda t} = (Av)e^{\lambda t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si y sólo si

$$\lambda v = Av.$$

$\Rightarrow \lambda$ es autovalor de A con autovector v.

$$\boxed{\text{$X(t) = ve^{\lambda t}$ es solución de $X' = AX$ si y sólo si λ es autovalor de A con autovector v}}$$

Recordar: Si λ y μ son autovalores $\neq$ de A, v es autovector asociado a λ y w es autovector asociado a $\mu \Rightarrow \{v, w\}$ es l.i.

- Entonces, si $X_1(t) = ve^{\lambda t}$ y $X_2(t) = we^{\mu t}$ tenemos que $\{X_1, X_2\}$ es un conjunto l.i. de soluciones de $X' = AX$ pues vimos que $\{X_1, X_2\}$ es l.i. $\Leftrightarrow \{X_1(0), X_2(0)\}$ es l.i. y $X_1(0) = v \wedge X_2(0) = w$ que son l.i.

- Con el mismo argumento, si λ es autovalor y v_1 y v_2 son autovectores li asociados a $\lambda \Rightarrow X_1(t) = v_1 e^{\lambda t}$ y $X_2(t) = v_2 e^{\lambda t}$ son soluciones li de $X' = AX$.

Proposición: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz con autovalores en $\mathbb{R}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (se pueden repetir) que admite una base de autovectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Entonces las funciones

$$X_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, n$$

forman una base de soluciones $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $X' = AX$. En este caso, una solución general es de la forma $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t}$ con $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Hallar todas las soluciones de

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$$

Solución: Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ buscamos autovalores y autovectores.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

$\hookrightarrow$ polinomio característico de A.

λ autovalor $\Leftrightarrow$ λ raíz de χ_A.

$\Rightarrow \quad (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ o } \lambda = 3.$

. autovector de $\lambda = 1$:

$$Av = v \iff (A-I)v = 0$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. autovector de $\lambda = 3$

$$Av = 3v \iff (A - 3I)v = 0$$

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ y $X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$ son

soluciones li de $X' = AX$ y $\therefore$ una

solución general es

$$X(t) = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$= \begin{pmatrix} ae^t + be^{3t} \\ -ae^t + be^{3t} \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Pregunta: ¿que pasa si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene autovalores en $\mathbb{C}$?

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Definición: si } \lambda = a + ib \in \mathbb{C} \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\ \text{la exponencial compleja } e^{\lambda} \text{ se define} \\ \text{como } \quad e^{\lambda} = e^{a}(\cos(b) + i\,\mathrm{sen}(b)) \end{array}}$$

Ejercicio Si $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow (e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A con autovector $v \in \mathbb{C}^n \Rightarrow X(t) = v e^{\lambda t}$ es solución de $X' = AX$.

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovector $v \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \bar{\lambda}$ es autovalor de A con autovector $\bar{v}$ ($Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$).

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A con autovector $\xi \in \mathbb{C}^n \Rightarrow X_1(t) = \xi e^{\lambda t}$ y $X_2(t) = \bar{\xi} e^{\bar{\lambda} t}$ son soluciones li de $X' = AX$.
(misma cuenta de la teórica 16).

Ayuda: $\xi = v + iw$, $v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{\xi} = v - iw$. Ver q' $\{\xi, \bar{\xi}\}$ es li.

- **Objetivo:** obtener soluciones en $\mathbb{R}$ li a partir de $\{X_1, X_2\}$

- Notemos que $X_2 = \overline{X_1} \Rightarrow$ definimos

$$\tilde{X}_1 = \frac{X_1 + \overline{X_1}}{2} = \text{parte real de } X_1$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{X_1 - \overline{X_1}}{2i} = \text{parte imaginaria de } X_1$$

$\Rightarrow$ como $\tilde{X}_1$ y $\tilde{X}_2$ son combinaciones lineales de X_1 y X_2, tenemos que $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$

son soluciones de $X'=AX$ en $\mathbb{R}$.

- Veamos que $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ es li.

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ / $a\tilde{X}_1 + b\tilde{X}_2 = \vec{0} \Rightarrow$

$$\vec{0} = a\frac{(X_1+X_2)}{2} + b\frac{(X_1-X_2)}{2i}$$

$$= X_1\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2i}\right) + X_1\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2i}\right).$$

Como $\{X_1, X_2\}$ son li $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b}{2i}=0 \\ \frac{a}{2}-\frac{b}{2i}=0 \end{cases}$

$\underset{\text{(cuentas)}}{\Rightarrow}$ $a=b=0$.

Luego, $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$ es un conjunto li de soluciones reales de $X'=AX$.

<u>Ejemplo:</u> Hallar todas las soluciones de

$$(*)\begin{cases} x_1' = x_1 - x_3 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = x_1 - x_2. \end{cases}$$

<u>Solución:</u> si $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (*)\ X'=AX$

Buscamos autovalores de A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\lambda^2 - (-1+\lambda) = (1-\lambda)\lambda^2 + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, \ \underbrace{\lambda = i \ \text{ o } \ \lambda = -i}_{\text{conjugados!}}$$

Buscamos autovectores asociados:

- $\lambda = 1$ $\quad A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A-I)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ como una solución.

- $\lambda = i$ $\quad A - iI = \begin{pmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (Cuentas) $\xi = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ es solución de $(A - iI)\xi = 0$.

- $\lambda = -i$ sabemos q' $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ es autovector.

$\Rightarrow X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{it}$ y $X_3(t) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{-it}$

son soluciones de $X' = AX$.

Busquemos las soluciones reales $\tilde{X}_2$ y $\tilde{X}_3$:

$\tilde{X}_2 = \dfrac{X_2 + X_3}{2}$ parte real de X_2

$\tilde{X}_3 = \dfrac{X_2 - X_3}{2i}$ parte real de X_2.

$$\Rightarrow X_2(t) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix} (\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t))$$

$$= \begin{pmatrix} i\cos(t) - \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t) \\ (1+i)(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(t) + i\cos(t) \\ \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t) + i\cos(t) - \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) - \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}}_{\tilde{X}_2} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \\ \mathrm{sen}(t) + \cos(t) \end{pmatrix}}_{\tilde{X}_3}$$

Es fácil ver que $\{X_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3\}$ es li y $\therefore$ es una base de soluciones reales de $X' = AX$.

$\boxed{*}$ Caso particular (muy importante) $n=2$.

Si $X' = AX$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tenemos 3 posibilidades para los autovalores de A:

$\boxed{1}$ A tiene 2 autovalores $\neq$ en $\mathbb{R}$:

$\Rightarrow$ A se diagonaliza en $\mathbb{R}$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son sus autovalores con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$

sus respectivos autovectores $\Rightarrow$

$X_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$ $\wedge$ $X_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$ son soluciones li y $\therefore$ forman una base.

$\boxed{2}$ $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de A:

$\Rightarrow \bar{\lambda}$ también es autovalor y $\therefore$ A se diagonaliza. Si ξ es autovector $\sim \lambda \Rightarrow$ $\bar{\xi}$ es autovector $\sim$ a $\bar{\lambda}$. Entonces

$X_1(t) = \xi e^{\lambda t}$ y $X_2(t) = \bar{\xi} e^{\bar{\lambda} t}$ son soluciones li en $\mathbb{C}$. Tomando parte real e imaginaria de X_1 (o de X_2, total es lo mismo pues $X_2 = \overline{X_1}$) tenemos soluciones li en $\mathbb{R}$:

$\{Re(X_1), Im(X_1)\}$ es base de soluciones reales.

$\boxed{3}$ A tiene un solo autovalor λ. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

- Si A se diagonaliza $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y las soluciones se desacoplan:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} K e^{\lambda t} \\ \tilde{K} e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad K, \tilde{K} \in \mathbb{R}.$$

- Si A no se diagonaliza (ie no hay 2 autovectores li) $\longrightarrow$ clase próxima!