Clase número 10 de Análisis 2-Mate 3

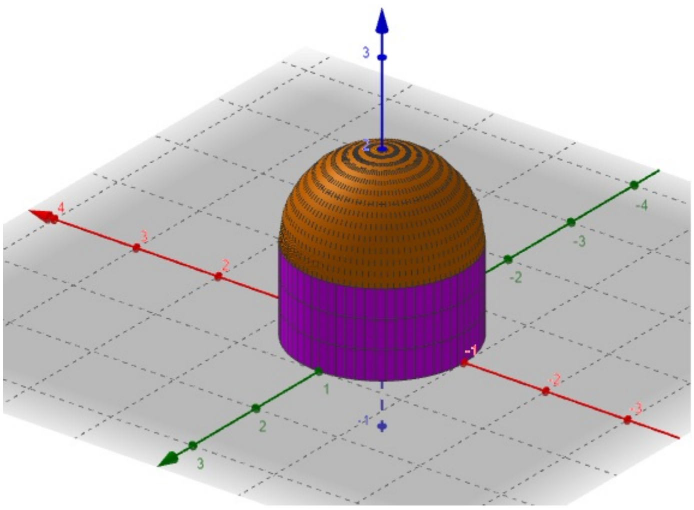
1. Stokes

Hoy cntinuamos con Stokes y luego damos campos conservativos. Primero dejo escrito el teorema de Stokes, porque realizaremos primero ejercicios de Stokes.

(Stokes) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región donde vale el teorema de Green. Supongamos que T es de clase C^2 y que ∂S^+ es la orientación del borde de S dada por $T(\partial D^+)$. Si $\vec{F}$ es un campo de clase C^1 definido en S, entonces
$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot \sigma'(t)dt$

Leamos el ejercicio 2 de la práctica 4...
Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2, donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1$, orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $F(x, y, z) = (zx + z^2y, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS$.

Primero que nada, para pensar, vamos a ver cómo dibujaríamos S_1 y S_2.
S_1 es el conjunto de los puntos (x, y, z) que cumplen $x^2 + y^2 = 1$ y $0 \leq z \leq 1$. $x^2 + y^2 = 1$ es un círculo de radio 1 paralelo en un plano de z constante, centrado en $x = 0$, $y = 0$ ¿y en que z?... bueno, para cualquier $z \in [0, 1]$. O sea que va a ser un cilíndro de radio 1 paralelo al eje z.
S_2 es el conjunto de los puntos (x, y, z) que cumplen $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ y $z \geq 1$. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ es una esfera de radio 1 centrada en $(0, 0, 1)$ (porque el radio 0"para la bola de la que esta esfera es borde sería $0^2 + 0^2 + (1 - 1)^2 = 0$). Ahora, como $z \geq 1$, $z - 1 \geq 0$, lo que equivale a pedirle a esta superficie que sólo sea el hemisferio superior de esta esfera, o sea que es una semiesfera la superficie.
Notar que la base de la semiesfera es $x^2 + y^2 = 1$ con $z = 1$, lo que también aparece en S_1.



Parametrizemos esto...

S_1 la puedo parametrizar con $T(u,v) = (cos(u), sin(u), v), u \in [0, 2\pi], v \in [0, 1]$ y S_2 la puedo parametrizar con $S(u,v) = (cos(v)cos(u), sin(v)cos(u), 1 + sin(u)), u \in [0, \frac{\pi}{2}], v \in [0, 2\pi]$. La normal de S_1 dada por T es $T_u \times T_v = (-sin(u), cos(u), 0) \times (0, 0, 1) = (cos(u), sin(u), 0)$, lo que es la normal exterior al cilindro. Por otro lado, la normal de S_2 dada por S es $S_u \times S_v = (-cos(v)sin(u), -sin(v)sin(u), cos(u)) \times (-sin(v)cos(u), cos(v)cos(u), 0) = (-cos(v)cos(u)sin(u), -sin(v)cos(u)^2, -sin(u)cos(u)) = -cos(u)(cos(v)cos(u), sin(v)cos(u), sin(u))$, lo que indica que (salvo cuando la normal se anula, lo que se puede corregir dividiendo por su módulo y tomando límite) la normal es interior. Con intercambiar u con v se intercambian los roles en el producto cruz, y se consigue que nuestra superficie esté orientada con la normal exterior. Así que la parametrización que usaremos para S_2 es $\tilde{T} = (cos(u)cos(v-1), sin(u)cos(v-1), 1 + sin(v-1)), u \in [0, 2\pi], v \in [1, 1 + \frac{\pi}{2}]$ (desplacé el dominio sólo para que sea más redundantemente obvio como pegar S_1 con S_2). Nos queda confirmar que el borde de la unión de las superficies (que no es la intersección común, si no el borde inferior del cilindro, que quedó .ªl aire") esté orientado positivamente respecto a su parametrización. Y luego ver que el campo tiene condiciones de regularidad suficientes (ser C^1).

El borde de la superficie $S_1 \cup S_2$ dado por nuestras parametrizaciones es $T(u, 0) = (cos(u), sin(u), 0)$, lo que se puede obtener del plano coincide con tener orientación positiva. Bah, en realidad se tiene una curva $\sigma(t) = (1, 0)$ que es parte del borde de D, la única parte que nos importa, porque en cierto sentido pegamos los dominios de la esfera y del cilíndro e impusimos condiciones de periodicidad (medio que el dominio no se puede decir estrictamente que esté en $\mathbb{R}^2$), pero igual sigue siendo recorrido positivamente, porque es recorrido de modo antihorario con respecto al borde el tramo que estamos usando. Entonces está todo bien. Y pueden ignorar eso y sencillamente ver si "gira en sentido horario.ᵉˡ borde con su parametrización, respecto a la superficie. Haré dibujos de esto en el pizarrón y explicaré un póco más.

Sugiero que calculen ahora F sobre el borde de $S_1 \cup S_2$. ¿Es F restringido al borde $(0, sin(u), 0)$ o es $(cos(u) + sin(u), (cos(u) + 1)sin(u), cos(u)^2)$? (aunque la intuición les diga cual es la falsa, y la intuición esté en lo correcto, calculen igual. Cualquier inconveniente me avisan.).

Bueno, ahora veamos que el campo $\vec{F} = (zx + z^2y, z^3yx + y, z^4x^2)$ es C^2 (la condición de regularidad/de suavidad). Como es un vector de polinómios de varias variables, es C^∞, y por lo tanto es C^2. Estamos ya para aplicar el teorema entonces, dado que en la construcción de las parametrizaciones confirmamos que eran adecuadas. Entonces podemos usar la integral de $\vec{F}$ sobre el borde de $S_1 \cup S_2$, lo que es

$\int F \circ \sigma(t) \cdot \sigma'(t) dt$

Calculen si vale 2π o -2π.

Ahora, una consecuencia muy importante del teorema de Stokes, y del hecho de que $\nabla \times (\nabla f) = 0$ donde f sea C^2, es el teorema de los campos conservativos. Este teorema plantea que los campos irrotacionales C^1 se pueden interpretar como campos gradientes C^2. ¿De donde saca esta idea rara?

Bueno... Empecemos notando que si tenemos una curva $\mathcal{C}$ que sea simple y suave a trozos de dominio $[a, b]$, y también un campo f que sea C^2, se tiene

$$f(\sigma(a)) - f(\sigma(b)) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\sigma(t)))dt$$

(por el teorema fundamental del cálculo)

$\int_a^b \frac{d}{dt}(f(\sigma(t)))dt = \int_a^b [\lim\limits_{dt\to 0}(f(x(t+dt),y(t+dt),z(t+dt)) - f(x(t),y(t),z(t)))\frac{1}{dt}]dt$ (definición de tomar derivada, y abuso de notación. También llamo $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$)

$\frac{f(x(t+dt),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t))}{dt} =$
$\frac{f(x(t+dt),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))}{dt}$
$+\frac{f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t+dt))}{dt}$
$+\frac{f(x(t),y(t),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t))}{dt}$ (sumar y restar términos iguales)

$\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t+dt),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t))}{dt} = \lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t+dt),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))}{dt}$
$+\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t+dt))}{dt}$
$+\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t),y(t),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t))}{dt}$ (suponer la existencia de esos límites, que para una función C^1 en $\sigma(t)$ está garantizado poder hacerlo)

$\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t+dt),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))}{dt}$
$+\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t+dt))}{dt} + \lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t),y(t),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t))}{dt}$
$= \underbrace{\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t+dt),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))}{dx(t)}\frac{dx(t)}{dt}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t))x'(t)}$
$+\underbrace{\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t),y(t+dt),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t+dt))}{dy(t)}\frac{dy(t)}{dt}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t))y'(t)}$
$+\underbrace{\lim\limits_{dt\to 0}\frac{f(x(t),y(t),z(t+dt))-f(x(t),y(t),z(t))}{dz(t)}\frac{dz(t)}{dt}}_{\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t))}$ (acá uso regla de la cadena y la definición de derivada parcial)

Entonces, como $f(\sigma(a)) - f(\sigma(b)) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\sigma(t)))dt$ tengo que

$$f(\sigma(a)) - f(\sigma(b)) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(t))z'(t)dt$$

$$f(\sigma(a)) - f(\sigma(b)) = \int_a^b (\nabla f \circ (\sigma(t))) \cdot \sigma'(t)dt$$

Notar que esto implica que si dicha curva fuera cerrada la integral curvilinea de un campo gradiente sería cero.

Por otro lado, si tenemos un campo F cuyo rotor es cero, y tenemos curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que comparten extremos inicial y final, la curva que es unión de $\mathcal{C}_1$ con $\mathcal{C}_2$ orientada al reves (la llamaremos $\bar{\mathcal{C}_2}$) resulta ser una curva cerrada, por lo que si puedo tomar una superficie $\mathcal{S}$ cuyo borde sea dado por esa curva que tome esa curva con orientación positiva, entonces tenemos por el teorema de Stokes que

$\int_{\mathcal{C}_1 \cup \bar{\mathcal{C}_2}} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt = \iint_{\mathcal{S}} \nabla \times F \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} 0 \cdot d\vec{S} = 0$

Y notando que

$$\int_{\mathcal{C}_1 \cup \bar{\mathcal{C}_2}} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt = \int_{\mathcal{C}_1} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt + \int_{\bar{\mathcal{C}_2}} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt$$

$$= \int_{\mathcal{C}_1} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt - \int_{\mathcal{C}_2} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)dt$$

(esto último nos permite además ver que si la integral de toda curva cerrada es cero para un campo, las integrales curvilineas del campo sólo dependeran de sus extremos)

Concluimos que la integral curvilinea de F depende sólo de sus extremos, así que tomando un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ y definiendo para un punto cualquiera $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ una curva $\mathcal{C}_{\vec{x}_0}(\vec{x})$ que tiene como extremos a $\vec{x}_0$ y a $\vec{x}$ y es suave a trozos y simple, y tomo un valor $a \in \mathbb{R}$ fijo cualquiera, puedo definir $f(\vec{x}) = \int_{\mathcal{C}_{\vec{x}_0}(\vec{x})} F \cdot ds + f(a)$. Es fácil confirmar que este campo es C^2 e independiente de la elección de la curva $\mathcal{C}_{\vec{x}_0}(\vec{x})$ que cumpla con ser simple, suave a trozos y que empiece y termine en los puntos indicados. También se puede comprobar sin mayor dificultad que su gradiente coincide con F.

Así que podemos enunciar el teorema de los campos conservativos (usando que toda curva puede esquivar un punto que no esté en sus extremos deformandola un poquito, y dejando a la imaginación las generalizaciones que salen de hablar de otras regiones en esta demostración)

(Campos Conservativos) Sea F un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^3$ excepto tal vez un número finito de puntos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para cualquier curva cerrada, simple y suave a trozos $\mathcal{C}$ se tiene $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = 0$

2.Para cualquier par de curvas simples, suaves a trozos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, con los mismos extremos y la misma orientación, se tiene $\int_{\mathcal{C}_1} F \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot ds$

3. F es gradiente de alguna función f. $F = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$,

4. F tiene rotor cero, $rot(F) = \nabla \times F = (0,0,0)$

Ejercicio 5.

(a) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $F = -GmM\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||^3}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ cuando el punto de aplicación de F se desplaza de $(1,1,1)$ a $(2,2,2)$ a lo largo de

(i) El segmento que une los dos puntos. (haganlo ustedes)

(ii) Una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1,1,1)$ y $(2,2,2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

Aunque no lo dicen, en principio tomar cualquiera de las poligonales deberá dar lo mismo. Voy a tomar la poligonal que primero crece en x, luego en y, y por último en z, o sea: $\sigma(t) = \begin{cases} (1+t,1,1) & t \in [0,1] \\ (2,t,1) & t \in [1,2] \\ (2,2,t-1) & t \in [2,3] \end{cases}$. El trabajo es la integral de línea sobre la fuerza $\vec{F}$. Eso es,

$$\int_0^3 \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt = \int_0^1 \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt + \int_1^2 \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt + \int_2^3 \vec{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt$$

$$= \int_0^1 -GmM\frac{\sigma(t)}{||\sigma(t)||^3}\cdot\sigma'(t)dt + \int_1^2 -GmM\frac{\sigma(t)}{||\sigma(t)||^3}\cdot\sigma'(t)dt + \int_2^3 -GmM\frac{\sigma(t)}{||\sigma(t)||^3}\cdot\sigma'(t)dt$$

$$= -GmM\Big\{\int_0^1 \frac{(1+t,1,1)\cdot(1,0,0)}{||(1+t,1,1)||^3}dt + \int_1^2 \frac{(2,t,1)\cdot(0,1,0)}{||(2,t,1)||^3}dt + \int_2^3 \frac{(2,2,t-1)\cdot(0,0,1)}{||(2,2,t-1)||^3}dt$$

$$= -GmM\{\int_0^1 \frac{1+t}{((t+1)^2+2)^{3/2}}dt + \int_1^2 \frac{t}{(5+t^2)^{3/2}}dt + \int_2^3 \frac{(t-1)}{((8+(t-1)^2)^{3/2}}dt\}$$

$$= -GmM\{\int_1^2 \frac{t}{(t^2+2)^{3/2}}dt + \int_1^2 \frac{t}{(5+t^2)^{3/2}}dt + \int_1^2 \frac{t}{((8+t^2)^{3/2}}dt\}$$

$$= -GmM\{\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(t^2+2)^{3/2}}d(t^2) + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(5+t^2)^{3/2}}d(t^2) + \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{((8+t^2)^{3/2}}d(t^2)\}$$

$$= GmM\Big\{((6)^{-1/2}-(3)^{-1/2})+((9)^{-1/2}-(6)^{-1/2})+\int_9^1 2(12^{-1/2}-9^{-1/2})\frac{1}{((8+t^2)^{3/2}}d(t^2)\Big\}$$

$$= GmM\Big[(12)^{-1/2}-(3)^{-1/2}\Big] = \frac{GmM}{\sqrt{3}}\Big[\frac{1}{2}-1\Big]$$

$$= -\frac{mMG}{2\sqrt{3}}$$

Ahora, el punto b del ejercicio 5 dice

(b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla\times\vec{F}$ y hallar una función potencial $f:\mathbb{R}^3-\{0\}\to\mathbb{R}$ para $\vec{F}$.

Bueno, si calcularon el punto a.i ya tienen una comprobación parcial de la cosa. Y el asunto es ahora demostrar que $\vec{F}$ es un gradiente.

Por el teorema de los campos conservativos, como $\vec{F}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3$ salvo un número finito de puntos (en particular, un punto, el punto $(0,0,0)$), entonces con mostrar que el rotor es cero tenemos probado que es un campo gradiente, y que la integral del campo sobre una curva sólo depende de los extremos inicial y final. Entonces vamos a calcular el rotor este...

$$\nabla\times(-mMG\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}) =$$

$$-mMG\nabla\times(\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3})=$$

$$-mMG(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\times(\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3})=$$

$$-mMG(\frac{(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\times(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3})+mMG(x,y,z)\times(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3})=$$

(acá usé propiedades del producto vectorial y traté a ∇ como a un vector, además de haber utilizado implícitamente la regla del producto)

$$-mMG(0)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3})+mMG(x,y,z)\times(2x,2y,2z)(\frac{-3}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5})=$$

$$+2mMG(x,y,z)\times(x,y,z)(\frac{-3}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5})=(0,0,0)$$

Hacer el punto a.ii y el (b). Del (b), dejar en el medio pequeños pasos para que rellenen las estudiantes.

Ejercicio 6. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales F en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

a) $F(x,y)=(x,y)$
b) $F(x,y)=(x^2+y^2,2xy)$
c) $F(x,y)=(cos(xy)-xysen(xy),x^2sen(xy)$

Primero muestro cómo hacer el (c), y luego les pido a ustedes que hagan el a y el b.

Primero supondré que F es un gradiente de una función f, así que $F=(\frac{df}{dx},\frac{df}{dy})$. Ahora igualo a la expresión de F en el primer término, e integro en x. La y se toma cómo constante.

$\frac{df}{dx}=cos(xy)-xysen(xy)$

$f(x,y)=\int cos(xy)-xysen(xy)dx+C(y)$ ($C(y)$ es una función en y que no depende de x, por lo que su derivada en x es cero, y sirve de çonstante" de integración)

$$f(x,y)=\underbrace{\int cos(xy)dx}_{=\frac{1}{y}sin(xy)}-\underbrace{\int xysen(xy)dx}_{=\frac{1}{y}\int^{xy}tsen(t)dt,\text{ se integra por partes}}+C(y)$$

($C(y)$ es una función en y que no depende de x, por lo que su derivada en x es cero, y sirve de çonstante" de integración)

$f(x,y)=\frac{1}{y}sin(xy)+\frac{1}{y}xycos(xy)-\frac{1}{y}sin(xy)+C(y)$

Ahora derivo en y, para terminar de definir C o concluir que F no es gradiente...

$\frac{df}{dy}=\frac{x}{y}cos(xy)-\frac{1}{y^2}sin(xy)-x^2sin(xy)-\frac{x}{y}cos(xy)+\frac{1}{y^2}sin(xy)+C'(y)$

$x^2sen(xy)=\frac{x}{y}cos(xy)-\frac{1}{y^2}sin(xy)-x^2sin(xy)-\frac{x}{y}cos(xy)+\frac{1}{y^2}sin(xy)+C'(y)$

No suena posible que coincidan de modo algúno... triste (Importante: leer con la voz de algún personaje de Undertale)

Ejercicio 7 Evaluar $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, donde

(a) $\vec{F} = (2xyz + sen(x), x^2z, x^2y)$, y $\mathcal{C}$ es la curva que está parametrizada por $((cos(t))^5, (sen(t))^3, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.

(b) $\vec{F} = (cos(xy^2) - xy^2sen(xy^2), -2x^2ysen(xy^2), 0)$, y $\mathcal{C}$ es la curva que está parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Les doy 10 minutos para hacer el punto *b*, la respuesta es $cos(e^2) - e^{-1}cos(e^{-1})$...

7.a. Para calcular el campo gradiente asociado, cuando lo hay, es útil empezas por alguna componente que se vea más fácil para integrar. Así que voy a tomar la tercer componente.

$\frac{df}{dz} = x^2y \Rightarrow f(x,y,z) = g(x,y) + x^2yz$ Calculo las derivadas de esto en x y en y, luego comparo con F. $\frac{df}{dx} = \frac{dg(x,y)}{dx} + 2xyz$, $\frac{df}{dy} = \frac{dg(x,y)}{dy} + x^2z$,

Comparando con la segúnda componente del campo, $\frac{dg(x,y)}{dy} + x^2z = x^2z$, entonces $g(x,y)$ no depende de y. Queda ver la primer componente.

$\frac{dg(x,y)}{dx} + 2xyz = 2xyz + sen(x) \Rightarrow \frac{dg(x,y)}{dx} = sen(x)$, así que $g(x,y) = -cos(x)$ a menos de una constante que podemos elegir arbitrariamente.

Entonces F es gradiente de $f(x,y,z) = x^2yz - cos(x)$. Como f es C^2 (como F ya era C^1, y además es gradiente) entonces la integral de línea es la resta de f evaluado en los extremos final e inicial de la curva.

La curva está parametrizada por $((cos(t))^5, (sen(t))^3, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$, según la consigna. La misma tiene como extremos a $((cos(\pi))^5, (sen(\pi))^3, \pi^4) = (-1, 0, \pi^4)$ y a $((cos(0))^5, (sen(0))^3, 0^4) = (1, 0, 0)$. Así que la respuesta al ejercicio será

$f(1,0,0) - f(-1,0,\pi^4) = (1^200 - cos(1)) - ((-1)^20\pi^4 - cos(-1)) = -cos(1) + cos(1) = 0$.

Ejercicio 8 Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} (y + senx)dx + (\frac{3}{2}z^2 + cosy)dy + 2x^3dz$$

donde $\mathcal{C}$ es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (sent, cost, sen2t), 0 \leq t \leq 2\pi$. Sugerencia: Observar que $\mathcal{C}$ se encuentra en la superficie $z = 2xy$

Si tomamos la sugerencia en cuenta, puede parecer una buena idéa tomar el parche de la superficie que tiene borde $\mathcal{C}$. Pero antes de eso, veamos más explícitamente que lo que nos dicen se cumple...

$\sigma(t) = (sent, cost, sen2t) = (sent, cost, 2costsent), 0 \leq t \leq 2\pi$

Claramente se cumple... ¿Se les ocurre algo que se pueda hacer para armar la parametrización de esa superficie que tiene este borde? Discutamoslo durante la clase. Yo creo que hay al menos una versión que es muy fácil imaginar y es bastante buena a menos de un punto que podemos ignorar por argumentos de medida (cosas de área cero en lugares en que una función es regular y bla).

Bueno, si tratamos de sustituir σ en F vamos a encontrar cosas como composición de trigonométricas con trigonométricas, e integrar eso "te la regalo"(o sea, no recomiendo hacerlo, por lo menos hoy y sin mejor motivo para hacerlo). Así que parece buena idea inclinarse por calcular el rotor, y aprovechar que el campo es C^2, y que si tomaron bien la parametrización (la orientación es correcta) podremos usar el teorema de Stokes para calcular la integral. Calcularé el rotor del campo, con la parametrización obtenida calculen la integral de flujo.

$\nabla \times (y + senx, \frac{3}{2}z^2 + cosy, 2x^3) = (-3z, -6x^2, -1)$

La integral de flujo debería darles $-\pi$

(nota: Una bola abierta de radio r y centro $(c_1, ..., c_n)$ en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1 - c_1)^2 + ... + (x_n - c_n)^2 < r^2\}$ mientras que una bola cerrada es el conjunto $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1 - c_1)^2 + ... + (x_n - c_n)^2 \leq r^2\}$

Ejercicio 9 Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en $\mathbb{R}^3$. Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B.

Para esto pueden usar que la integral de linea de ∇f, que va a coincidir con $f(final) - f(inicial)$...

Ejercicio 10 Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ donde $\vec{F}$ es el campo vectorial definido por:

$$\vec{F} = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al polo norte.

Les dejo este para hacer en clase y que lo discutamos. Luego, sugiero hacer consultas y quizás comente cosas random sobre la materia...

Ulises Wainstein Haimovichi