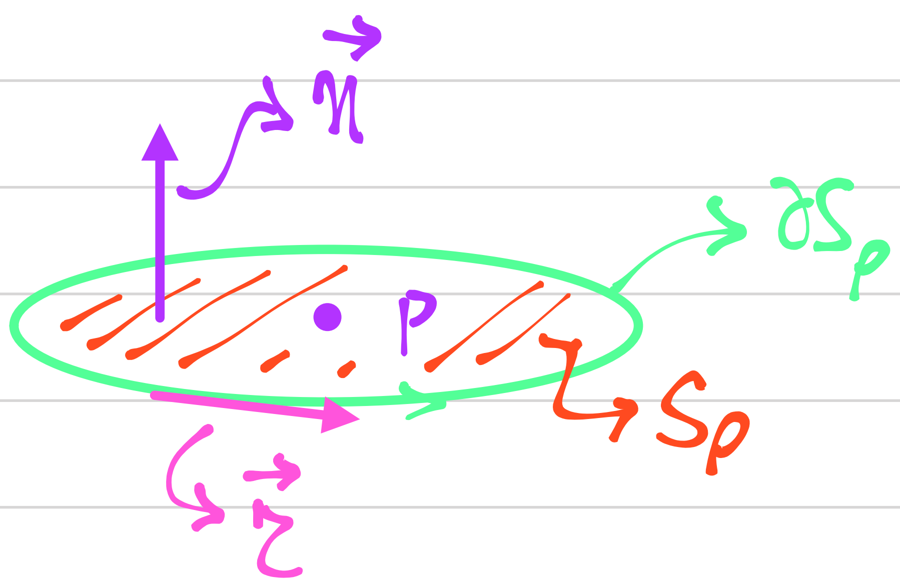
APLICACIONES
DE LOS TEOREMAS DE STOKES Y DE GAUSS

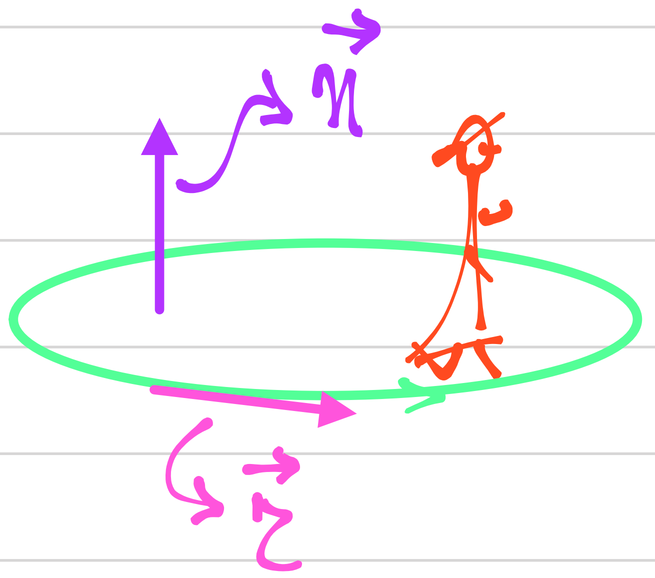
A continuación veremos algunas aplicaciones de los teoremas de Stokes y de Gauss.

- **Interpretación física del rotor**

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ y sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto. A continuación daremos una interpretación física de $\operatorname{rot}(\vec{F})(P)$.



Sea $S_\rho \subset \mathbb{R}^3$ un disco con centro en P y radio ρ, y sea $\vec{n}$ un campo unitario normal a S_ρ. Notar que $\vec{n}$ es constante y que orienta a S_ρ. Sea también ∂S_ρ la circunferencia que encierra a S_ρ y sea $\vec{\tau}$ un campo tangente a ∂S_p que orienta a ∂S_p de acuerdo a la siguiente regla:



Una persona que camina sobre ∂S_p siguiendo la orientación de $\vec{\tau}$ tiene su cabeza "apuntando" en el mismo sentido que $\vec{n}$.

<u>OBSERVACIÓN</u> Se puede demostrar (no lo haremos aquí) que la orientación positiva del borde de una superficie respeta esta regla cuando $\vec{n}$ es la orientación que da la parametrización T de la superficie (ver la definición de borde de una superficie).

El teorema de Stokes vale en este contexto (no discutiremos esto en detalle). Más precisamente, se tiene que

$$\iint_{S_p} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot dS = \int_{\partial S_p} \vec{F} \cdot ds, \qquad (*)$$

donde S_p está orientada por $\vec{n}$ y ∂S_p está orientado por $\vec{z}$.

Sea $A(S_p)$ el área de S_p. Usando el teorema del valor medio para integrales, vemos que existe $Q_p \in S_p$ tal que

$$\iint_{S_p} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot dS = \iint_{S_p} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

$$= \left(\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\right)(Q_p) \, A(S_p) \qquad (**)$$

Entonces, dividiendo (*) miembro a miembro por $A(S_\rho)$ y usando (**) obtenemos que

$$\left(\operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\right)(Q_\rho) = \frac{1}{A(S_\rho)}\int_{\partial S_\rho}\vec{F}\cdot ds$$

Haciendo $\rho\to 0^+$ miembro a miembro de la expresión anterior, vemos que

$$\left(\operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\right)(P) = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{A(S_\rho)}\int_{\partial S_\rho}\vec{F}\cdot ds. \qquad (***)$$

Notar que $\int_{\partial S_\rho}\vec{F}\cdot ds$ representa el trabajo que ejerce $\vec{F}$ sobre una partícula que se desplaza sobre ∂S_ρ siguiendo la orientación $\vec{T}$. Luego,

$$\frac{1}{A(S_p)} \int_{\partial S_p} \vec{F} \cdot ds.$$

indica el trabajo que ejerce $\vec{F}$ sobre una partícula que se desplaza sobre una trayectoria circular centrada en un punto P y orientada en compatibilidad con un vector $\vec{n}$ (tal como definimos antes de la observación), por unidad de área.

Supongamos ahora que $\vec{F}$ es el campo de velocidad de un fluido. Si, en cada punto de ∂S_p, $\vec{F}$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{\tau}$ entonces las partículas de fluido sobre ∂S_p notan alrededor de P siguiendo la orientación de $\vec{\eta}$. Notar que, en este caso,

$$\int_{\partial S_\rho} \vec{F} \cdot ds = \int_{\partial S_\rho} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, ds > 0.$$

Si, en cambio, $\vec{F}$ tiene la misma dirección pero sentido contrario a $\vec{\eta}$ sobre cada punto de ∂S_ρ, entonces $\vec{F}$ fuerza a las partículas sobre ∂S_ρ a rotar alrededor de P siguiendo la orientación de $-\vec{\eta}$. En este caso,

$$\int_{\partial S_\rho} \vec{F} \cdot ds = \int_{\partial S_\rho} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, ds < 0.$$

Supongamos finalmente que $\vec{F}$ es perpendicular a $\vec{\eta}$ en cada punto de ∂S_ρ. En esta situación $\vec{F}$ no fuerza ninguna rotación alrededor a P y se tiene

$$\int_{\partial S_p} \vec{F} \cdot ds = \int_{\partial S_p} \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = 0.$$

En base a lo anterior vemos que $\int_{\partial S_p} \vec{F} \cdot ds$ caracteriza la circulación de partículas alrededor de P, sobre una curva normal a $\vec{n}$. Esto motiva denominar a $\int_{\partial S_p} \vec{F} \cdot ds$ como "circulación" de $\vec{F}$ alrededor de ∂S_p.

Concluimos entonces que $(\operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n})(P)$ representa la circulación de $\vec{F}$ alrededor de P sobre una curva normal a $\vec{n}$, por unidad de área; ver (***).

Si $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$ en todo punto, decimos que $\vec{F}$ es "irrotacional".

• Interpretación física de la divergencia

Sea $\vec{F}$ un campo vectorial C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ y sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto. A continuación daremos una interpretación física de $\operatorname{div}(\vec{F})(P)$.

Sea $B_\rho(P)$ una bola de radio ρ centrada en P. Usando el teorema de Gauss y el teorema del valor medio para integrales, obtenemos

$$\iint_{\partial B_\rho(P)} \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds \underset{\substack{\text{teo. de} \\ \text{Gauss}}}{=} \iint_{B_\rho(P)} \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\, dy \qquad (*)$$

$$= \operatorname{div}(\vec{F})(Q_\rho)\, \operatorname{Vol}(B_\rho(P)),$$

para algún $Q_\rho \in B_\rho(P)$. Aquí $\operatorname{Vol}(B_\rho(P))$

denota el volumen de la bola $B_\rho(P)$.

Haciendo $\rho \to 0^+$, deducimos que

$$\operatorname{div}(\vec{F})(P) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\rho(P))} \iint_{\partial B_\rho(P)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds. \qquad (**)$$

Concluimos entonces que $\operatorname{div}(\vec{F})(P)$ es el flujo en dirección normal exterior a $\partial B_\rho(P)$ en el punto P, por unidad de volumen.

Si $\operatorname{div}(\vec{F})(P) > 0$, sigue de $(**)$ que existe $\tilde{\rho} > 0$ para el cual $\iint_{\partial B_\rho(P)} \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds > 0$ si $0 < \rho < \tilde{\rho}$. Por esta razón se dice que P es una "fuente".

Si $\operatorname{div}(\vec{F})(P) < 0$ se dice que P es un "sumidero", por una razón análoga a la anterior.

Para finalizar veamos qué ocurre si $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ en todo punto de $\mathbb{R}^3$. Usando el teorema de Gauss se ve que

$$\iint_{\partial B} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \text{ para cualquier bola } B.$$

En otras palabras, si $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ en todo punto entonces el flujo en la dirección normal exterior a la frontera de cualquier bola es nulo. Además, usando (*), vemos que el recíproco de este enunciado también es cierto.

En particular, que el flujo en la dirección normal exterior a la frontera de una bola sea nulo equivale a que el flujo en cualquier dirección "exterior" a ∂B (cualquier dirección excepto la dirección tangente) sea nulo. Si $\vec{F}$ es el campo de velocidad de un fluido, esto implica que la cantidad de fluido que entra a la bola a través de ∂B tiene que coincidir con la cantidad de fluido que sale de la bola a través de ∂B. Un fluido con esta propiedad se denomina "incompresible". Dicho de otro modo, un fluido se dice "incompresible" si y sólo si su campo de velocidad tiene divergencia nula en todo punto.

• Ley de conservación

Una ley de conservación para una cierta propiedad de un sistema físico establece que dicha propiedad no cambia cuando el sistema evoluciona. A continuación veremos esto en detalle y deduciremos un modelo matemático para una ley de conservación.

Sea $Q: \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función que representa alguna propiedad física de un sistema, la cual se conserva. Aquí, Q depende de la posición espacial $x \in \mathbb{R}^3$ y del tiempo $t \in (0,+\infty)$.

Consideramos un punto $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y una bola $B_\rho(x_0)$ con centro en x_0 y radio ρ. Consideramos también un instante $t_0 \in (0,+\infty)$ y $h>0$.

Si Q es una propiedad que se conserva, entonces la diferencia entre la cantidad de Q que hay en la bola $B_\rho(x_0)$ en el tiempo t_0+h y la cantidad de Q que hay en $B_\rho(x_0)$ en el tiempo t_0, tiene que coincidir con la cantidad de Q que atravieza $\partial B_\rho(x_0)$ durante el intervalo de tiempo (t_0, t_0+h). En símbolos,

$$\iiint_{B_\rho(x_0)} Q(x,t_0+h)\,dx - \iiint_{B_\rho(x_0)} Q(x,t_0)\,dx$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+h} \iint_{\partial B_\rho(x_0)} \vec{q}\cdot ds\, dt \qquad (*)$$

donde $\vec{q}: \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ es tal que $\vec{q}(x,t)$ representa la cantidad de Q que pasa por x en el tiempo t (flujo de Q), por unidad de tiempo, y $\partial B_\rho(x_0)$ está orientada por $-\vec{n}$ siendo $\vec{n}$ el campo unitario normal exterior a $\partial B_\rho(x_0)$.

Usando el teorema de Gauss en el lado derecho de (*), obtenemos

$$\iiint_{B_\rho(x_0)} Q(x,t_0+h)\,dx - \iiint_{B_\rho(x_0)} Q(x,t_0)\,dx$$

$$= -\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\rho(x_0)} \operatorname{div}(\vec{q})(x,t)\,dx\,dt \qquad (**)$$

Escribiendo al lado izquierdo de (**) como $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\rho(x_0)} \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt$, nos queda

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\rho(x_0)} \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt$$

$$= -\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\rho(x_0)} \operatorname{div}(\vec{q})(x,t)\,dx\,dt$$

Dividiendo miembro por h y haciendo $h \to 0^+$ nos queda

$$\iiint_{B_\rho(x_0)} \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t_0)\,dx\,dt$$

$$= -\iiint_{B_\rho(x_0)} \operatorname{div}(\vec{q})(x,t_0)\,dx\,dt \qquad (***)$$

ya que

- $$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\rho(x_0)} \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \iiint_{B_\rho(x_0)} \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t_0)\, dx\, dt$$

- $$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\rho(x_0)} \operatorname{div}(\vec{q})(x,t)\, dx\, dt$$

$$= \iiint_{B_\rho(x_0)} \operatorname{div}(\vec{q})(x,t_0)\, dx\, dt$$

Dividiendo (***) miembro a miembro por el volumen $Vol(B_\rho(x_0))$ de $B_\rho(x_0)$ y haciendo $\rho \to 0^+$, nos queda

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x_0,t_0) = -\operatorname{div}(\vec{q})(x_0,t_0)$$

ya que

- $$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{Vol(B_\rho(x_0))} \iiint_{B_\rho(x_0)} \frac{\partial Q}{\partial t}(x,t_0)\, dx = \frac{\partial Q}{\partial t}(x_0,t_0)$$

$$\bullet \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{Vol(B_\rho(x_0))} \iiint_{B_\rho(x_0)} div(\vec{q})(x,t_0)dx$$

$$= div(\vec{q})(x_0,t_0).$$

Como $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $t_0 \in (0,+\infty)$ son arbitrarios, concluimos que Q y su flujo $\vec{q}$ se relacionan mediante la siguiente expresión

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t) = -div(\vec{q})(x,t)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y todo $t \in (0,+\infty)$.

La expresión anterior es una ecuación diferencial en derivadas parciales. En este contexto, recibe el nombre de "ley de conservación local" o "ecuación de continuidad".

• Ecuación del calor

A continuación vamos a deducir la "ecuación del calor" homogenea:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \alpha \Delta u(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0 \qquad (*)$$

usando la ecuación de continuidad para la energía interna de un sistema y la ley de Fourier para modelar el flujo de calor. Aquí $u : \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ está dada como $u(x,t)$ y representa la temperatura de un medio homogeneo e isotrópico, en la posición $x \in \mathbb{R}^3$ a tiempo $t > 0$. El parámetro α es una constante positiva denominada "difusi-vidad térmica". La ecuación del calor

(*) se verifica cuando la densidad de masa ρ, el calor específico c y la conductividad térmica k son constantes, y cuando no hay ninguna fuente de energía interna actuando sobre el material.

Sea $Q: \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x,t)$ representa la energía interna del medio en la posición $x \in \mathbb{R}^3$ a tiempo $t>0$. Como Q es una cantidad que se conserva, vale la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x,t) = -\operatorname{div}(\vec{q})(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t>0 \qquad (**)$$

donde $\vec{q}: \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ representa el flujo de Q ("flujo de calor"), por unidad de tiempo. En el escenario que describimos en el párrafo anterior es razonable suponer que Q es proporcional a u de acuerdo a

$$Q(x,t) = c\rho\, u(x,t) \qquad (***)$$

y que $\vec{q}$ es proporcional a $-\nabla u$ de acuerdo a

$$\vec{q}(x,t) = -k\nabla u(x,t) \qquad (****)$$

Esta última expresión se conoce como "ley de Fourier" para la conducción del calor y se basa en principios experimentales. Notar que establece que el calor fluye desde regiones con mayor temperatura a regiones con menor temperatura.

Reemplazando (***) y (****) en (**), obtenemos

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -k \operatorname{div}(\nabla u)(x,t).$$

Observando que

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

si $x = (x_1, x_2, x_3)$, y anotando $\alpha = k/c\rho$, deducimos que u satisface la ecuación del calor (*).

<u>OBSERVACIÓN</u> Recordar que el operador Δ que aparece en (*) está definido por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

y se denomina operador "Laplaciano".