TEÓRICA 24

• Sistemas conservativos:

Estudiamos ecuaciones de la forma

$$x'' = -U'(x).$$

- $U(x)$ se llama **potencial** y representa una forma de energía llamada **energía potencial**.
- La **energía cinética** de $x(t)$ es $\dfrac{x'(t)^2}{2}$.
- La **energía mecánica** es la suma de la energía potencial y la mecánica:

$$\boxed{E(t) = \frac{x'(t)^2}{2} + U(x(t)).}$$

☒ Si $x(t)$ es una trayectoria solución de $x'' = -U'(x)$ $\Rightarrow$ su energía mecánica se conserva: $E(t)$ es constante.

En efecto,

$$E'(t) = \frac{\cancel{2}x'(t)}{\cancel{2}} \cdot x''(t) + U'(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$= x'(t)\left[x''(t) + U'(x(t))\right] = 0.$$

☒ Si pasamos la ecuación $x'' = -U'(x)$ a sistemas obtenemos:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -U'(x). \end{cases} \longrightarrow$$ Sistema conservativo.

<u>Objetivo</u>: estudiar el diagrama de fases de sistemas conservativos.

- En este caso, la energía se representa por
$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x).$$

- Por lo que vimos, si $(x(t), y(t))$ es sol. del sistema $\Rightarrow$ $E(x(t), y(t))$ es constante.

$$\left[\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) &= \langle \nabla E(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle \\ &= U'(x(t))x'(t) + \underbrace{y}_{= x'(t)}(-U'(x(t))) = 0 \end{aligned} \right]$$

- Luego, las trayectorias $(x(t), y(t))$ están contenidos en las curvas de nivel de E,
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : E(x,y) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$.

- $F(x,y) = (y, -U'(x))$ $\Rightarrow$ los puntos de equilibrio del sistema son (x_0, y_0) con $y_0 = 0$ y $x_0 \,/\, U'(x_0) = 0$. Notemos que son los mismos puntos que anulan a $\nabla E = (U'(x), y)$.

- Por esta razón (teorema de la función implícita) las curvas de nivel que <u>no</u> tienen puntos críticos, son curvas suaves que corresponden a soluciones del sistema.

Idea: conociendo $U(x)$ poder esbozar el diagrama de fases.

<u>Algunas observaciones:</u>

- Si $(x(t), y(t))$ pasa por $(\bar{x}, 0) \Rightarrow$ tenemos que $E(t) = U(\bar{x})$ $\forall t$ pues $E(t)$ es constante. Entonces

$$U(\bar{x}) = E(t) = \frac{y^2(t)}{2} + U(x(t)) \geq U(x(t)) \ \forall t$$

y $U(x(t))$ no vuelve a valer $U(\bar{x})$ a menos que simultáneamente tengamos $y(t) = 0$.

- Si $|y|$ crece $\Rightarrow U(x)$ decrece y viceversa.

- Los conjuntos de nivel de $E(x,y)$ son simétricos respecto al eje x $\left(E(x,y) = E(x,-y)\right)$.

- Si U es acotado superiormente por M y $c > M \Rightarrow$ el conjunto de nivel c <u>no</u> corta al eje x:

$$c = E(x,y) = \frac{y^2}{2} + \underbrace{U(x)}_{\leq M} \Rightarrow y \neq 0.$$

- Si $U(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ y $U(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \Rightarrow$ todos los conjuntos de nivel $\neq \phi$ cortan al eje x:

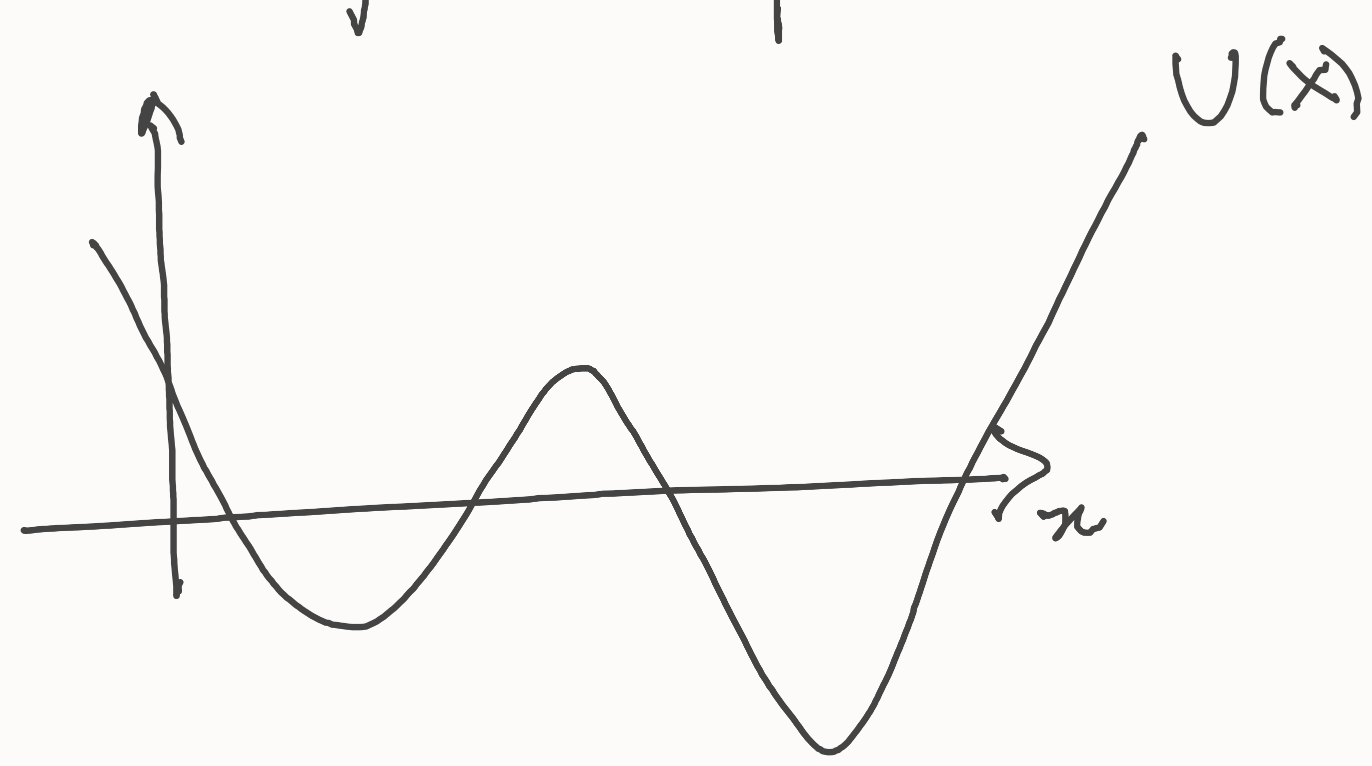
$E_c = \{(x,y) : E(x,y) = c\} \neq \phi \Rightarrow c \geq$ mínimo de $U = m$

$\Rightarrow c \in Im(U) = [m, +\infty)$. Entonces, $\exists x_1 / c = U(x_1)$ y $\therefore (x_1, 0) \in E_c$.

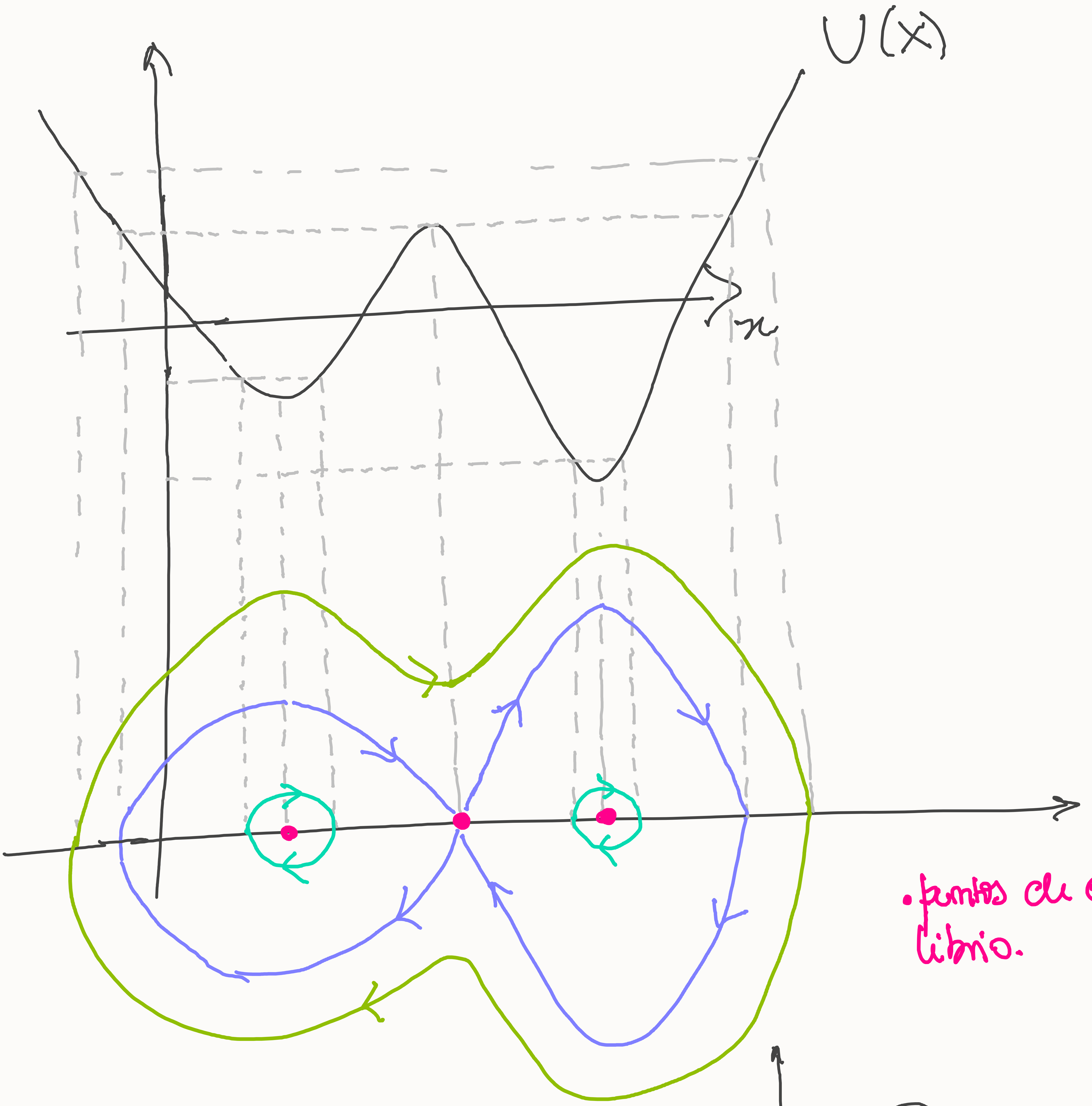
- Las flechas (el sentido de las trayectorias) se ubican de acuerdo a $y = x'$ (ie: $y > 0 \Rightarrow$ x crece y si $y < 0$, x decrece).

Ejemplo 1:

Supongamos que el potencial U tiene el siguiente gráfico:

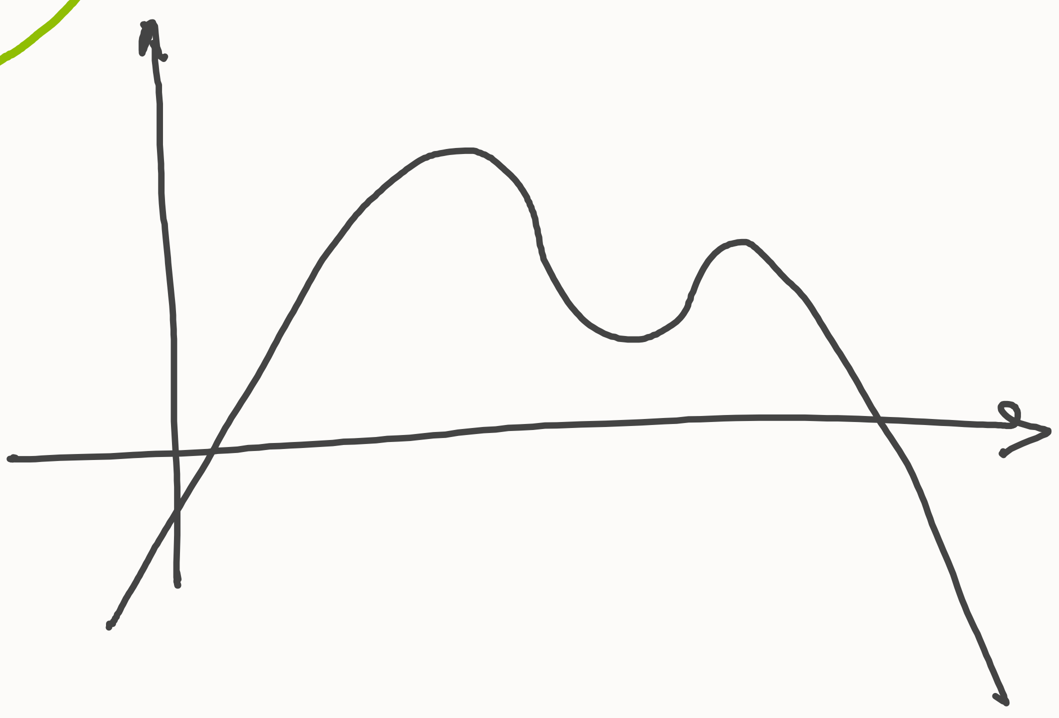


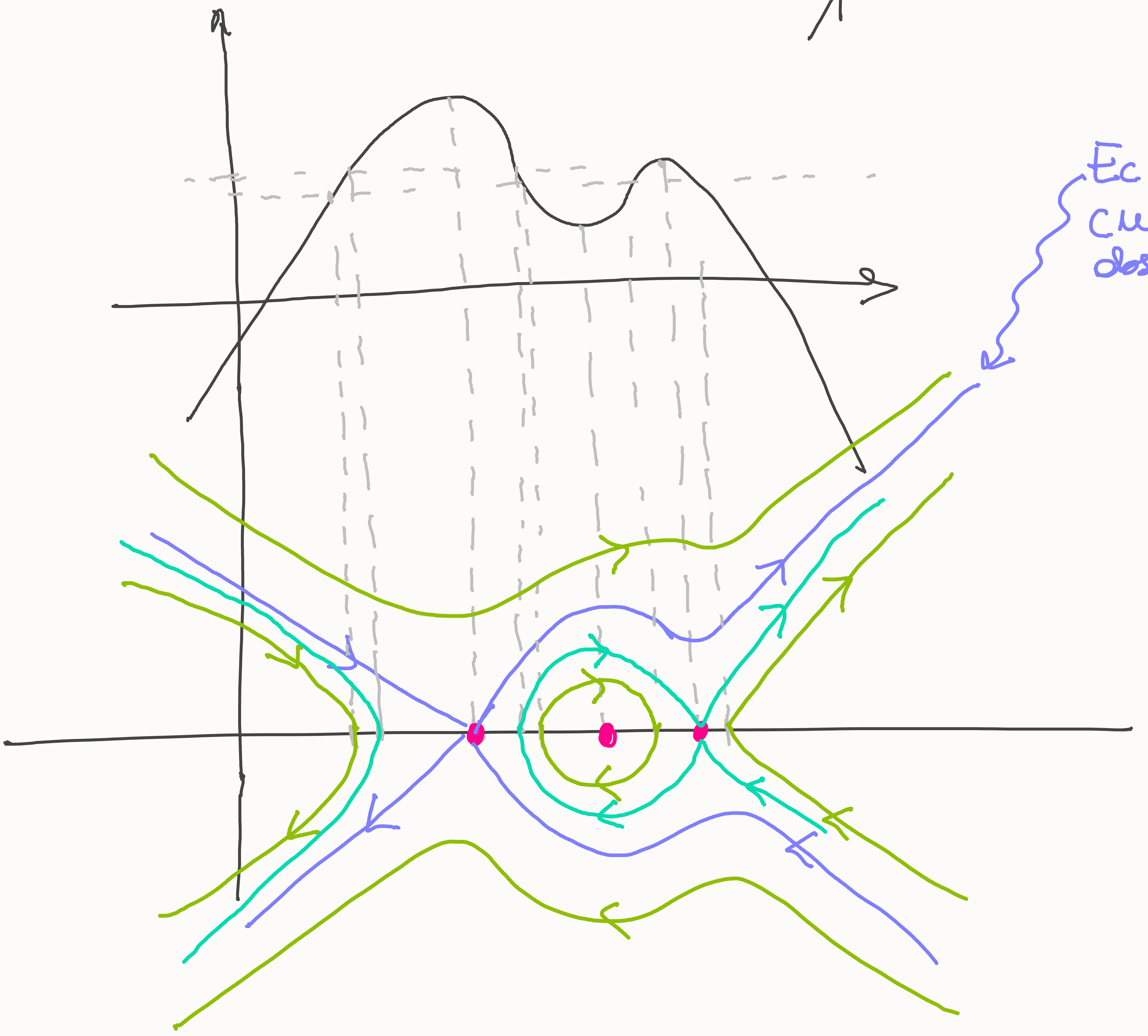
Esbozar el diagrama de fases de $\begin{cases} x' = y \\ y' = -U'(x). \end{cases}$



· puntos de equilibrio.

Ejemplo 2: Lo mismo para U(x)





Ec con cruz desdoblada

Cuando el teorema de linealización falla...

Teorema:

Consideremos $X' = F(X)$ con $F = (f_1, f_2)$ un campo $\mathcal{C}^1$, tal que $F(0,0) = 0$.

Sea $E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ /

- $E(x,y) \geq 0$ y $E(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.
- $\langle \nabla E(x,y), F(x,y) \rangle < 0$ en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
- los conjuntos $\{(x,y) : E(x,y) \leq c\}$ son acotados.

Entonces, todas las soluciones de $X' = F(X)$ convergen a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$.

Dem: Sup $X(t) = (x(t), y(t))$ es solución de $X' = F(X)$ / $\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) \neq (0,0)$.

Consideremos $E(t) := E(x(t), y(t))$.

Entonces: $\cdot\ E(t) > 0$

$$\cdot\ E'(t) = \langle \nabla E(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle$$
$$= \langle \nabla E(x(t), y(t)), F(x(t), y(t)) \rangle$$
$$< 0.$$

Por lo tanto, E es un función decreciente acotada inf $\Rightarrow \lim_{t \to \infty} E(t) = e$.

Como $(x(t), y(t)) \underset{t\to+\infty}{\not\to} (0\,0) \Rightarrow e>0.$

Así tenemos que $e \leqslant E(t) \leqslant E(0) \quad \forall t \geqslant 0.$

Como $\{e \leqslant E(x,y) \leqslant E(0)\}$ es acotado por hipótesis y cerrado xq. $E(x,y)$ es C^1 $\Rightarrow$ la función

máximo!

$g(x,y) := \langle \nabla E(x,y), F(x,y) \rangle$ alcanza un ~~mínimo~~ en el conjunto, que tiene que ser <0. Digamos que el mínimo es $m<0$.

Ahora si $t_0>0 \Rightarrow$

$$E(t_0) = E(0) + \int_0^{t_0} E'(t)\,dt$$

$$= E(0) + \int_0^{t_0} \langle \nabla E(x(t), y(t)), F(x(t), y(t)) \rangle\,dt$$

$$\leqslant \underbrace{E(0) + m\,t_0}_{\text{es } <0 \text{ si } t_0 \text{ es suficientemente grande}}.$$

Absurdo pues $E(t)>0$.

$\Rightarrow (x(t), y(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0).$

Observación: El teorema vale si cambiamos el $(0,0)$ por cualquier otro punto (x_0, y_0).

- Comentario:

Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene autovalores $b<a<0$

Sabemos que $(0,0)$ es estable (asintóticamente).

Supongamos que $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ y consideremos la energía $E(x,y) := x^2+y^2$.

$\Rightarrow E(t) = E(x(t),y(t))$ con $(x(t),y(t))$ sol de

$X' = AX \Rightarrow$

$$E'(t) = \langle (2x(t), 2y(t)), (ax(t), by(t)) \rangle$$
$$= 2ax^2(t) + 2by^2(t) < 0$$

Además $\quad E'(t) \underset{b<a}{\leq} 2a\,E(t) \quad \Rightarrow E(t) \leq Ce^{2at}$

$$\Rightarrow E(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0. \quad \underset{x^2(t)+y^2(t)=E(t)}{\Longrightarrow} \quad (x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,0).$$

Si A no es diagonal pero tiene autov $a<b<0$ hacemos un cambio de variable y razonar como recién.

Podemos concluir que el $(0,0)$ es estable sin usar la forma explícita de las soluciones usando una función E apropiada.

FIN