SUPERFICIES

INTEGRAL DE CAMPOS ESCALARES

Con la intención de motivar la definición de la integral de un campo escalar sobre una superficie que daremos a continuación (y a la vez dar una herramienta de cálculo), comenzaremos discutiendo una fórmula para calcular el área de una superficie.

Para mantener la discusión simple sin perturbar su esencia, consideramos una superficie suave S con parametrización regular $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde $D = [a,b] \times [c,d]$ (D es un rectángulo).

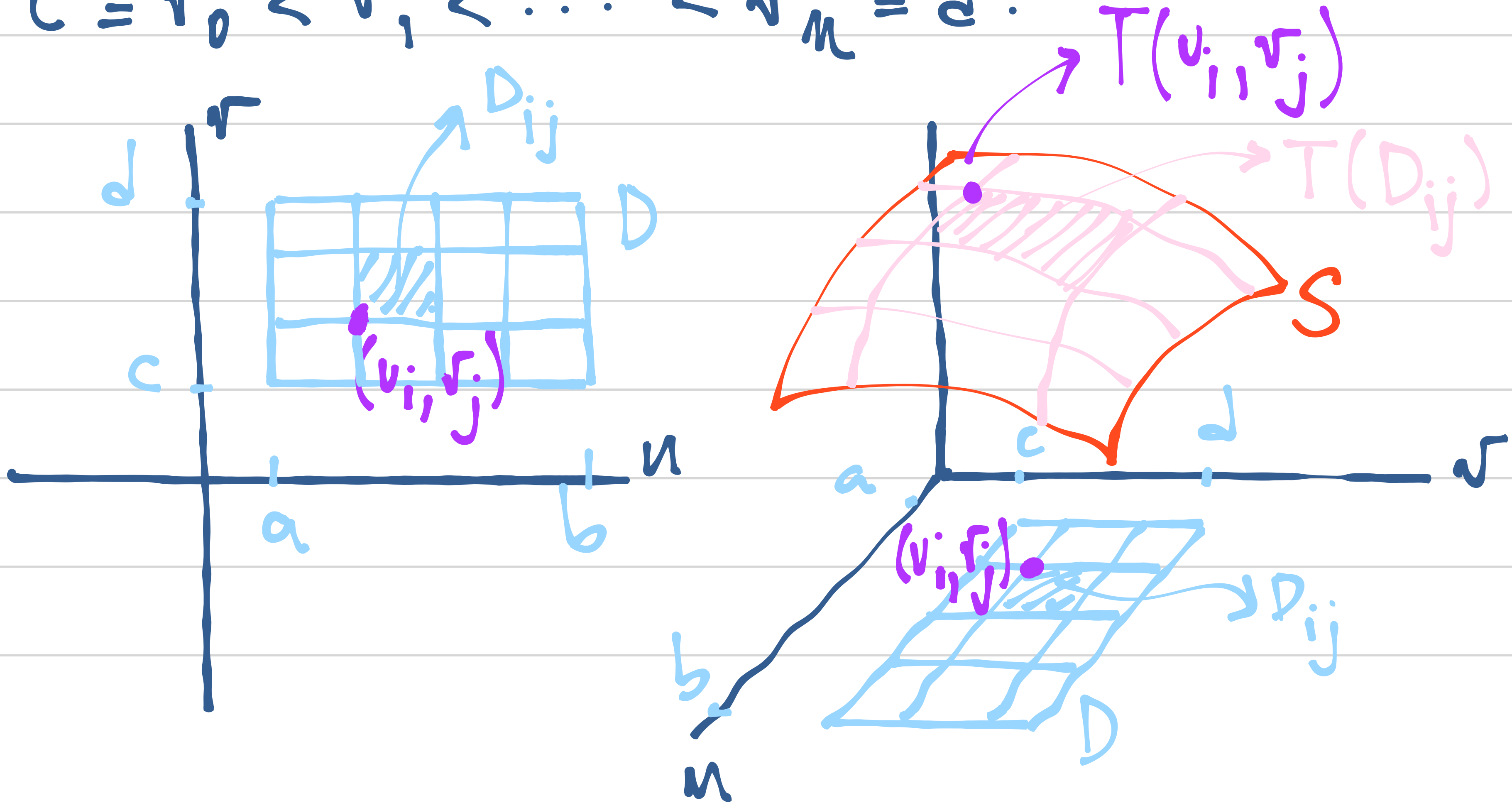
Ahora consideramos una partición regular $P_{[a,b]}$ del intervalo $[a,b]$ y una partición regular $P_{[c,d]}$ de $[c,d]$, las cuales inducen la misma cantidad de subintervalos de $[a,b]$ y de $[c,d]$, respectivamente. Anotamos

$$P_{[a,b]} = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$$

$$P_{[c,d]} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$$

donde $a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b$ y

$c = v_0 < v_1 < \dots < v_n = d$.



Estas particiones inducen una "malla" sobre D, constituida por rectángulos de la forma

$$D_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$$

con $i, j = 1, .., n$. A su vez, esta malla sobre D induce una malla sobre S, tal como se muestra en el esquema anterior.

A partir de esto observamos que el área de S es la suma de las áreas de cada uno de los "parches" que aparecen en la malla sobre S.

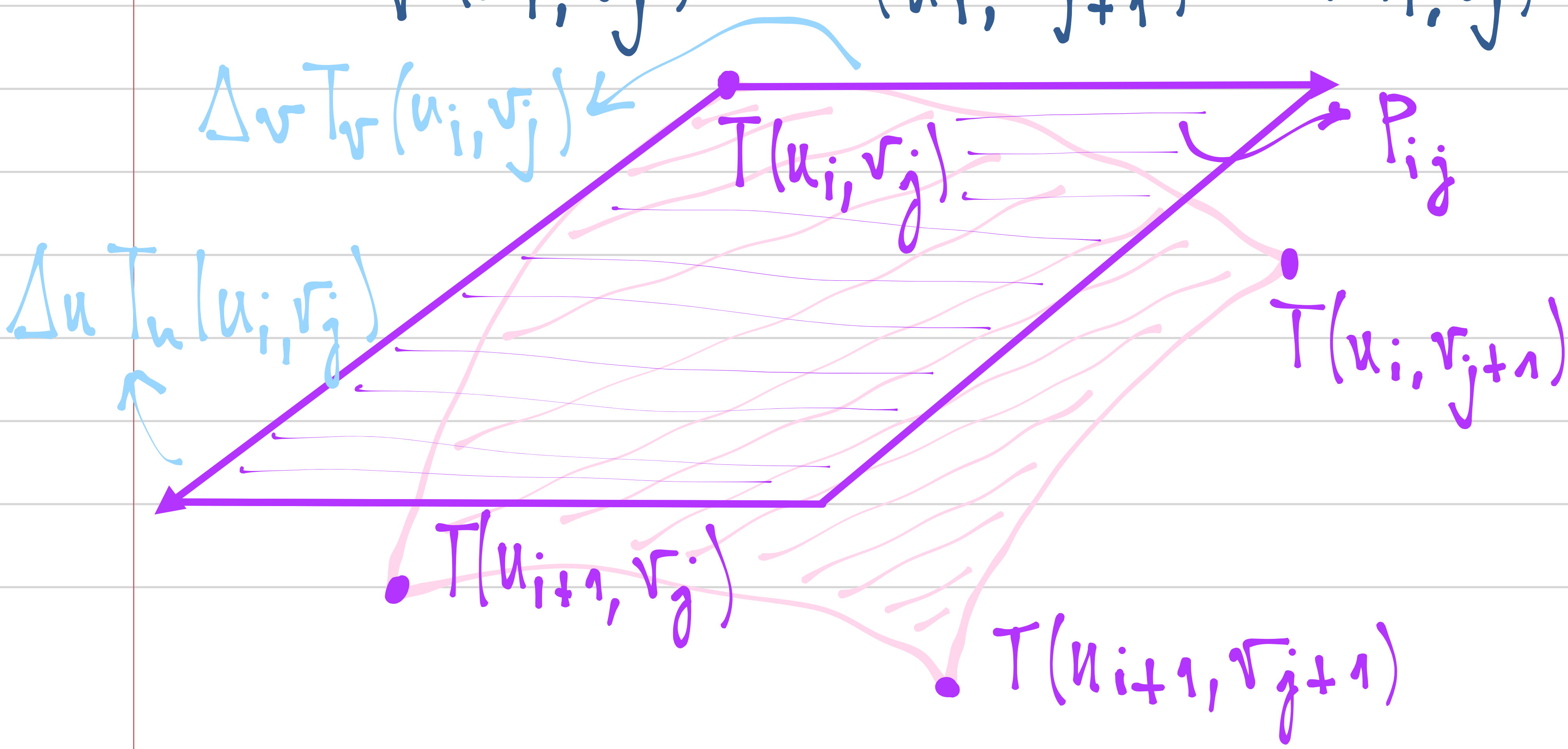
Para valores grandes de n es razonable aproximar el área del parche $T(D_{ij})$ por el área del paralelogramo P_{ij} definido por los vectores $\Delta u \, T_u(u_i, v_j)$

y $\Delta v\, T_v(u_i, v_j)$, donde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ y $\Delta v = v_{j+1} - v_j$.

La idea detrás de esta aproximación es que, como $\Delta u\, T_u(u_i, v_j)$ y $\Delta v\, T_v(u_i, v_j)$ son vectores tangentes a S en $T(u_i, v_j)$, el paralelogramo P_{ij} está sobre el plano tangente a S en $T(u_i, v_j)$ y será "muy parecido" al parche $T(D_{ij})$ para valores grandes de n. Notar, además, que

$$\Delta u\, T_u(u_i, v_j) \simeq T(u_{i+1}, v_j) - T(u_i, v_j)$$

$$\Delta v\, T_v(u_i, v_j) \simeq T(u_i, v_{j+1}) - T(u_i, v_j)$$



Como el área de P_{ij} está dada por $|\Delta u \, T_u(u_i, v_j) \times \Delta v \, T_v(u_i, v_j)|$, obtenemos que

$$\text{Área}(T(D_{ij})) \simeq |T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)| \Delta u \, \Delta v.$$

Luego,

$$\text{Área}(S) \simeq \sum_{i,j=0}^{n-1} |T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)| \Delta u \, \Delta v$$

Bajo adecuadas condiciones sobre T se puede demostrar que el lado derecho de la expresión anterior converge a $\iint_D |T_u(u,v) \times T_v(u,v)| \, du \, dv$, en cuyo caso se deduce que

$$\text{Área}(S) = \iint_D |T_u(u,v) \times T_v(u,v)| \, du \, dv.$$

Lo anterior motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN Sea S una superficie suave, excepto quizás en una cantidad finita de puntos; la cual admite una parametrización $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en C^1 que es inyectiva excepto quizás sobre el borde de D.

Definimos el "área de S" como

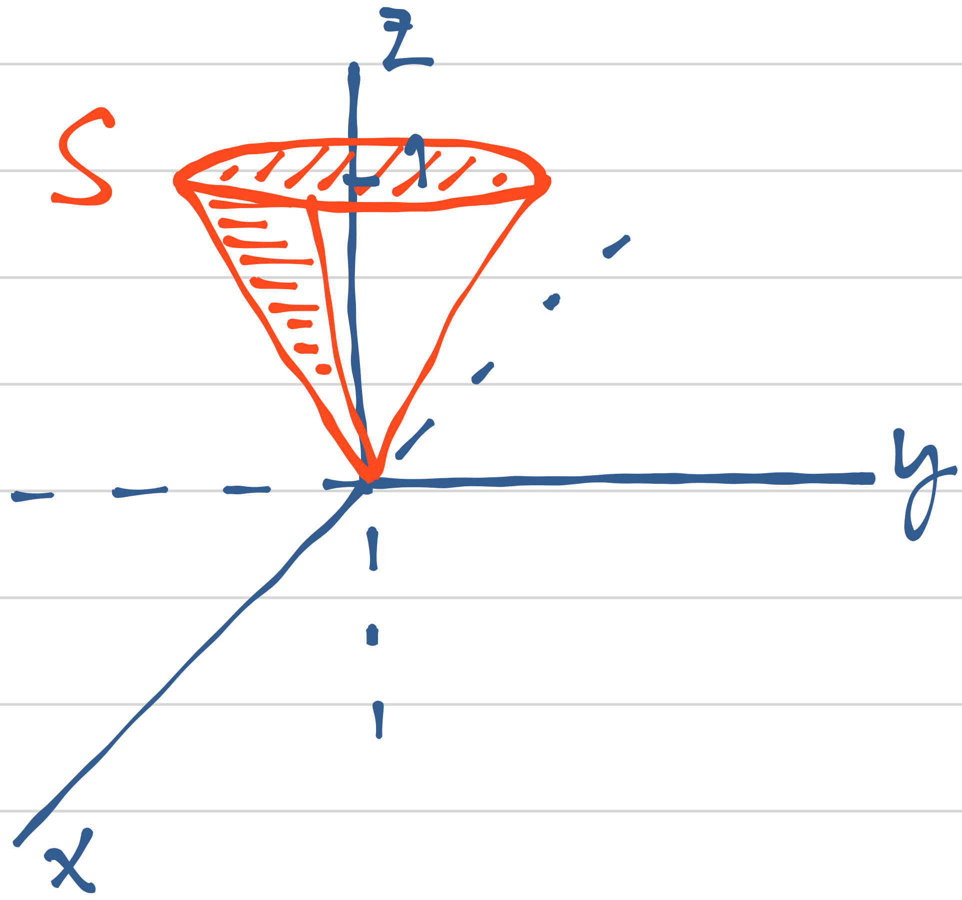
$$\text{Área}(S) = \iint_D \| T_u(u,v) \times T_v(u,v) \| \, du\, dv.$$

OBSERVACIÓN Se puede demostrar que la fórmula anterior no depende de la parametrización regular elegida.

EJEMPLO Vamos a calcular el área del cono S parametrizado por la función

$T : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por

$T(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta), \rho)$. Lo primero



que observamos es que S es suave salvo en el punto $(0,0,0)$, y que T es una parametrización C^1 que es inyectiva excepto sobre el borde de $D = [0,1] \times [0, 2\pi]$.

Entonces podemos calcular el área de S usando la definición anterior.

Para ello, calculamos:

$$T_\rho(\rho, \theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 1)$$

$$T_\theta(\rho,\theta) = (-\rho\,\mathrm{sen}(\theta), \rho\cos(\theta), 0)$$

Luego,

$$T_\rho(\rho,\theta) \times T_\theta(\rho,\theta) = (-\rho\cos(\theta), -\rho\,\mathrm{sen}(\theta), \rho)$$

y por lo tanto

$$|T_\rho(\rho,\theta) \times T_\theta(\rho,\theta)| = \rho\sqrt{2}.$$

Entonces,

$$\text{Área}(S) = \iint_D |T_\rho(\rho,\theta) \times T_\theta(\rho,\theta)|\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{2}\, d\theta\, d\rho = \int_0^1 2\pi\rho\sqrt{2}\, d\rho = \pi\sqrt{2}.$$

A continuación damos la definición de la integral de un campo escalar sobre una superficie.

<u>DEFINICIÓN</u> Sean S y T como en la definición anterior. Si f es un campo

escalar continuo sobre S, entonces se define "la integral de f sobre S" como

$$\iint_D f(T(u,v))\,|T_u(u,v) \times T_v(u,v)|\,du\,dv$$

y se la anota como $\iint_S f\,dS$.

<u>OBSERVACIÓN</u> Por definición, se tiene

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(T(u,v))\,|T_u(u,v) \times T_v(u,v)|\,du\,dv.$$

<u>OBSERVACIÓN</u> Se puede demostrar que la fórmula anterior no depende de la parametrización elegida.

<u>OBSERVACIÓN</u> Si en la definición anterior se considera que f es la función idénticamente igual a 1, entonces

se obtiene que

$$\text{Área}(S) = \iint_S dS.$$

Si, más generalmente, f es cualquier campo escalar continuo definido sobre S, entonces la expresión que define la integral de f sobre S puede deducirse siguiendo un razonamiento similar al utilizado para deducir la expresión que define al área de una superficie.

La idea es la siguiente: Consideramos una superficie S como la que usamos para deducir la expresión del área de S (parametrizada de la misma forma). También consideramos las mismas mallas sobre D y S que usamos en esa situación. Ahora pensamos que la integral de f sobre S es la suma de las integrales de f sobre cada parche $T(D_{ij})$ y aproximamos

$$\iint_{T(D_{ij})} f\, dS \simeq \underbrace{f(T(u_i, v_j))}_{\text{constante}}\, \text{Área}(T(D_{ij})).$$

Luego observamos que

$$\text{Área}(T(D_{ij})) = \iint_{D_{ij}} |T_u(u,v) \times T_v(u,v)|\, du\, dv$$

$$= |T_u(\hat{u}_i, \hat{v}_j) \times T_v(\hat{u}_i, \hat{v}_j)|\, \Delta u\, \Delta v,$$

para algún $(\hat{u}_i, \hat{v}_j) \in D_{ij}$ (ejercicio).

Entonces,

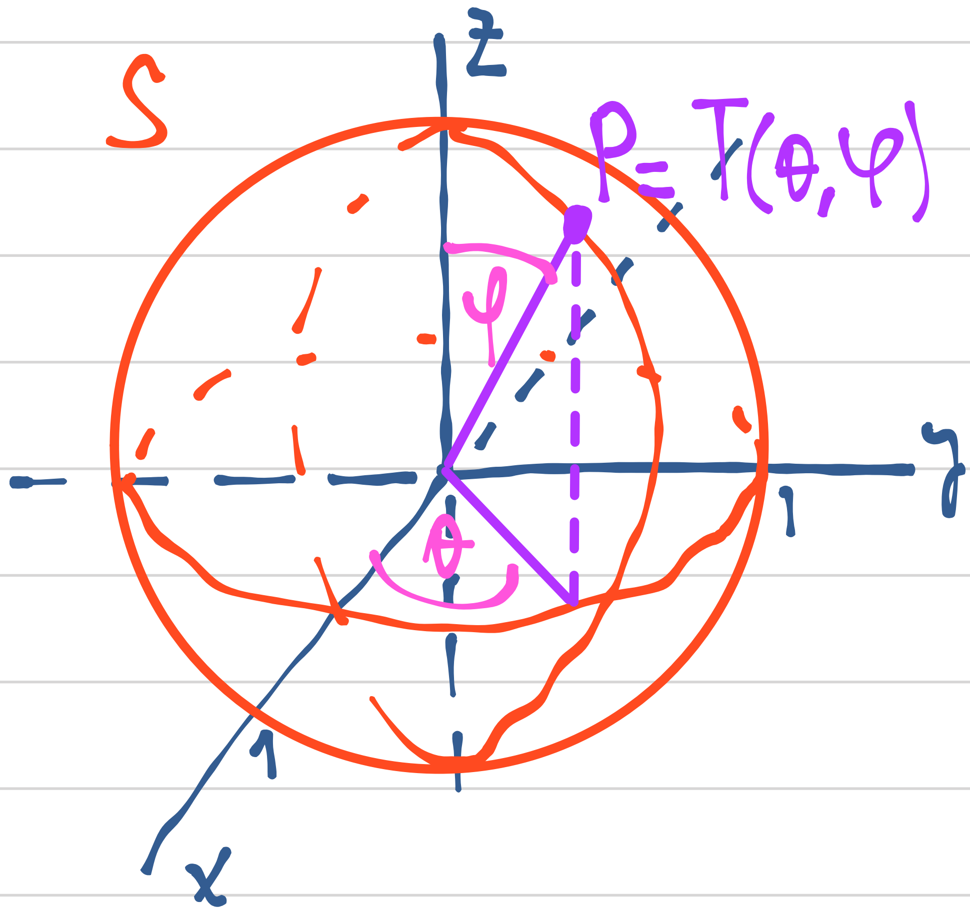
$$\iint_S f\,dS \simeq \sum_{i,j=0}^{n-1} f(T(u_i,v_j))\,|T_u(\hat{u}_i,\hat{v}_j)\times T_v(\hat{u}_i,\hat{v}_j)|\,\Delta u\,\Delta v$$

Haciendo n tender a infinito se deduce la fórmula que aparece en la definición de la integral de f sobre S.

EJEMPLO Vamos a calcular $\iint_S f\,dS$ donde S es la esfera de radio 1 con centro en el origen de coordenadas y f está dada por $f(x,y,z)=z^2$.

Comenzamos parametrizando S con la función $T:[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$T(\theta,\varphi)=\big(\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ \cos(\varphi)\big).$$



Se deja como ejercicio verificar que S, la parametrización T y f satisfacen las condiciones de la definición anterior, así como también que

$$|T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)| = \operatorname{sen}(\varphi).$$

Entonces,

$$\iint_S f\,dS = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \underbrace{f(T(\theta,\varphi))}_{\cos^2(\varphi)} \underbrace{|T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)|}_{\operatorname{sen}(\varphi)}\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi)\,d\varphi\,d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

OBSERVACIÓN La definición de la integral de un campo escalar f sobre una superficie S se extiende al caso en el que

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$$

donde cada S_j es suave, excepto quizás en una cantidad finita de puntos, cada S_j admite una parametrización $T_j : D_j \to \mathbb{R}^3$ en C^1 que es inyectiva, excepto quizás sobre el borde de D_j; y $S_i \cap S_j$ está contenido en la unión de los bordes de S_i y S_j para todo $i \neq j$. En este caso, la definición queda

$$\iint_S f\,dS = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_j} f\,dS.$$