Práctica 6 Ejercicio 10. AII (M y Q) - MIII (F)

Docente: Ulises Wainstein Haimovichi

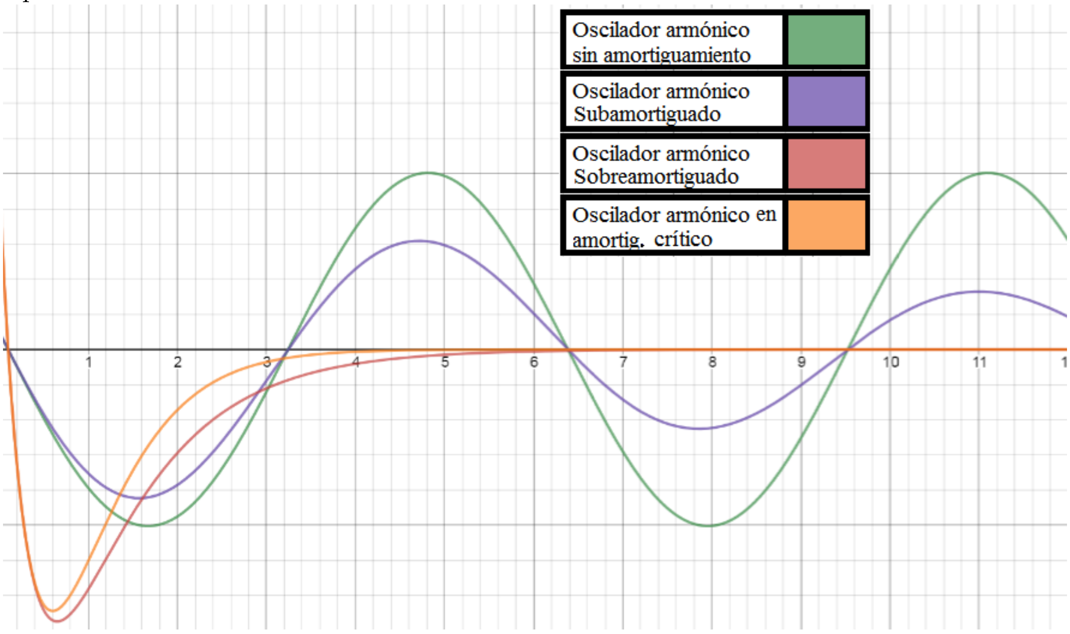
11 de noviembre de 2020

En este ejercicio vamos a ver, entre otras cosas, como trabajar con un problema degenerado, que tiene sutilezas que no aparecen en los problemas no-degenerados.

Primero daremos una breve descripción de que es movimiento oscilatorio, para luego explicar el enunciado, para extraer del mismo que es lo que el problema pide resolver. Esto es importante para responder a la pregunta realizada, y no una pregunta distinta.

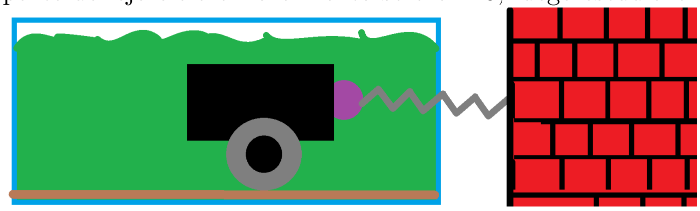
Un oscilador armónico simple es un objeto que tiene un movimiento periódico, ejemplo de ello es un péndulo de un reloj antiguo o un resorte, cuya posición es dada por una ecuación diferencial de la forma $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$, donde ω es una constante, llamada frecuencia del oscilador.

Figure 1: Oscilador armónico sin amortiguamiento y con distintos niveles de amortiguamiento. La abscisa es el tiempo (movimiento en horizontal), la ordenada es la posición del oscilador (movimiento en vertical). El eje x es la posición de equilibrio del mismo.



Un oscilador armónico amortiguado es un oscilador armónico en un medio viscoso. Un ejemplo es un resorte en aire (en vez de vacío), que por ser un medio poco viscoso, su comportamiento será similar al comportamiento del oscilador en el vacío, decayendo gradualmente la amplitud de este movimiento (si alguna vez observaron, cuando un resorte empieza a oscilar gradualmente se detiene). En ese caso se dice que el movimiento está *subamortiguado*. Si está en agua, sopa de avena o engrudo, el medio es mucho más viscoso. Salvo que el resorte sea muy fuerte, no va a oscilar el objeto. Solo va a volver una vez a su posición de equilibrio y se va a quedar allí, o (si tenía suficiente velocidad al acercarse a la misma) va a pasar un poco de largo y volver una única vez, para pasar al reposo. En este caso se dice el movimiento es sobreamortiguado o que está en amortiguamiento crítico.

Figure 2: Carreta inmerso en fluido viscoso con coeficiente de rozamiento c y resorte de constante elástica k. En la primer parte del ejercicio el rozamiento será $c = 0$, luego estudiaremos el caso $c > 0$



Una carreta a de masa M está sujeta a una pared por medio de un resorte, que no ejerce fuerza cuando la carreta está en la posición de equilibrio $x = 0$.

Tenemos la carreta, la cual tiene posición x[1]. Esa posición $x = x(t)$ depende del tiempo. O sea, $x(t)$ es una función de t, el tiempo.

Un resorte, en este contexto, solo lo vemos como la fuerza que ejerce[2], la cual actúa sobre x, y es exclusivamente función lineal de la posición x [3]. Como nos dicen que $F(0) = 0$, $\frac{F(x)}{x} = Constante$ (negativa). Acá, $\mathcal{O}$ es una notación sobre modo de acotar error conocida como notación de O grande.

Si la carreta se desplaza a una distancia x, el resorte ejerce una fuerza de restauración igual a $-\kappa x$, donde κ es una constante positiva que mide la rigidez del resorte.

Nuestra ecuación va a ser $M\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x$, o $x'' + a^2 x = 0$ con $a = \sqrt{\kappa/M}$.

a) Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y se libera sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, hallar la función $x(t)$. Verificar que se trata de una función periódica. Calcular su período τ, y su frecuencia $f = \frac{1}{\tau}$ (la cantidad de ciclos por unidad de tiempo). Verificar que la frecuencia de vibración aumenta al aumentar la rigidez del resorte, o al reducir la masa de la carreta (como dice el sentido común) y que la amplitud de esta oscilación es x_0.

a) Para resolver esta ecuación vamos a transformar este sistema lineal de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, usando una variable auxiliar $v(t) = \dot{x}$ ("velocidad del carreta"). Entonces podemos transformar la ecuación en el sistema

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad \frac{dv(t)}{dt} = -a^2 x(t) \tag{1}$$

Esto se puede ver como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Si asumimos que $(x(t), v(t)) = (A, B)e^{\lambda_1 t} + (C, D)e^{\lambda_2 t}$, entonces pasamos a tener un problema de autovalores y autovectores

$$\lambda\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ia, \lambda_2 = -ia \tag{3}$$

[1] es cierto que es un objeto espacialmente extendido, sin una única posición. Eso lo vamos a ignorar y vamos a asumir que la carreta es un punto, o que es el punto "centro de masa" la posición x

[2] Una fuerza F sobre un cuerpo de posición $x(t)$ nos da, por la segunda ley de Newton, una ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt}, ...)$, donde $t, x, ...$ son posibles variables de F como función.

[3] Esto se puede entender en relación al teorema de Taylor de aproximación por polinomios. Cualquier fuerza cuya dependencia sea sobre todo en la posición va a ser $F \approx F(x)$, y si es derivable al rededor de un punto x, va a poder aproximarse por $F(x) \approx a + bx$ (con error de orden $\mathcal{O}(x^2)$). Si la fuerza se anula en un punto, se dice que ese punto es de equilibrio. Si $F(x_0) \approx 0$, la función es derivable ahí, y su derivada no da cero, $F(x) = -\kappa(x - x_0)$ cerca de ese punto. Si κ fuera negativo, eso querría decir que si x no es x_0 con precisión infinita, el objeto se va a ir del punto rápidamente (va a ser aproximadamente exponencial la solución).

Esto nos indica que λ es imaginario en cualquier caso. En este caso, las soluciones serán de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{iat} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} e^{-iat} \tag{4}$$

Vamos a usar que $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$[4], por lo que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} \cos(at) + \begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} \sin(at) \tag{5}$$

Introducimos devuelta en el sistema

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} \cos(at) + \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} \sin(at) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} \cos(at) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix} \sin(at)$$

$$-\begin{pmatrix} aA' + D' \\ aB' - a^2C' \end{pmatrix} \sin(at) + \begin{pmatrix} aC' - B' \\ aD' + a^2A' \end{pmatrix} \cos(at) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} aA' + D' = 0 \\ aB' = a^2C' \\ B' = aC' \\ aD' + a^2A' = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Esto implica que

$$x(t) = A' \cos(at) + C' \sin(at) \tag{7}$$

Por el **teorema 3.1 del apunte de ODEs**, esto conforma todas las soluciones que puede tener el sistema. Notar que $x(0) = x_0 = A'$ y $\frac{dx}{dt}(0) = aC' = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}C'$, por lo que $A' = x(0)$ y $C' = \frac{dx}{dt}\big|_{t=0}\sqrt{\frac{M}{\kappa}}$, por lo que

$$x(t) = x_0 \cos(\sqrt{\frac{\kappa}{M}}t) + \sqrt{\frac{M}{\kappa}}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} \sin(\sqrt{\frac{\kappa}{M}}t) \tag{8}$$

Continuamos leyendo la consigna:

Si la carreta se lleva a la posición $x = x_0$ y se libera sin velocidad inicial en el instante $t = 0$, hallar la función $x(t)$. Verificar que se trata de una función periódica. Calcular su período τ, y su frecuencia $f = \frac{1}{\tau}$ (la cantidad de ciclos por unidad de tiempo). Verificar que la frecuencia de vibración aumenta al aumentar la rigidez del resorte, o al reducir la masa de la carreta (como dice el sentido común) y que la amplitud de esta oscilación es x_0.

Esto quiere decir que $x(0) = x_0$ y $\frac{dx}{dt}(0) = 0$.

Ya verificamos que era una función periódica, pues las funciones trigonométricas $\cos(at), \sin(at)$.

Su período es $\tau = \frac{2\pi}{a} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\kappa}}$ (porque $\cos(at) = \cos(at + 2\pi)$, entonces $a\tau = 2\pi$, etc).

Su frecuencia $f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{M}}$. Como κ y M constantes positivas, por la forma funcional de f fácilmente se puede ver que es estrictamente creciente en κ y estrictamente decreciente en M.

En una función $A\cos(\omega t + \phi_0) = A\cos(\phi_0)\cos(\omega t) + (-A\sin(\phi_0))\sin(\omega t)$, se llama amplitud a A y fase inicial a ϕ_0. Como

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{M}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa}{M}}}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{M}}t\right) \tag{9}$$

En este caso ocurre que

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{M}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa}{M}}}0 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{M}}t\right) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{M}}t\right) \tag{10}$$

Por lo que $A\cos(\phi_0) = x_0$ y $(-A\sin(\phi_0)) = 0$, por lo que $\phi_0 = 0$ y $A = x_0$. Entonces la amplitud de oscilación en este caso es A.

---

[4] Esta fórmula se puede probar comparando las series de Taylor al rededor de $x = 0$ de la exponencial, del seno y el coseno, viendo que coinciden y el error en todos estos casos converge a cero puntualmente para todo $x \in \mathbb{R}$ cuando el número de términos tiende a infinito

Continuamos leyendo la consigna:

Si se produce una amortiguación que se opone al movimiento, y de magnitud proporcional a la velocidad ($= -c\frac{dx}{dt}$) debida al rozamiento, la ecuación (1) que describe el movimiento de la carreta en función del tiempo se convierte en:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = 0, \tag{11}$$

o bien:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + a^2x = 0, b = \frac{c}{2M}, a = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}. \tag{12}$$

Vamos a tratar de solucionar esto, y luego ver que información es necesario extraer de este problema. Para ello vamos a recurrir otra vez a exponenciales complejas y a descomponer una ecuación de segundo orden en dos ecuaciones de primer orden.

$$\begin{cases} v = \frac{dx}{dt} \\ -2bv - a^2x = \frac{dv}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Suponiendo $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{i\tilde{\omega}t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, en analogía a el caso $b = 0$ que fue el del punto a).

$$i\tilde{\omega}e^{i\tilde{\omega}t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2b \end{pmatrix} e^{i\tilde{\omega}t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} i\tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}^2 - 2ib\tilde{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B/A \\ a^2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula de la resolvente:

$$\tilde{\omega} = \frac{2ib \pm \sqrt{-4b^2 + 4a^2}}{2} = ib \pm \sqrt{a^2 - b^2} \tag{14}$$

Y como $B/A = i\tilde{\omega} = -b \pm i\sqrt{a^2 - b^2}$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = A_+e^{-bt}e^{i\sqrt{a^2-b^2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -b + i\sqrt{a^2 - b^2} \end{pmatrix} + A_-e^{-bt}e^{-i\sqrt{a^2-b^2}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -b - i\sqrt{a^2 - b^2} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-bt}\left(A_+e^{i\sqrt{a^2-b^2}t} + A_-e^{-bt}e^{-i\sqrt{a^2-b^2}t}\right) \\ \left(-b + i\sqrt{a^2 - b^2}\right)A_+e^{i\sqrt{a^2-b^2}t} + A_-e^{-bt}e^{-i\sqrt{a^2-b^2}t}\left(-b - i\sqrt{a^2 - b^2}\right) \end{pmatrix}$$

Tomando $A_+ = Ae^{i\phi_0}$, $A_- = Ae^{-i\phi_0}$.

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2 - b^2}t + \phi_0\right) \\ v(t) &= -bAe^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2 - b^2}t + \phi_0\right) - Ae^{-bt}\sqrt{a^2 - b^2}\sin\left(\sqrt{a^2 - b^2}t + \phi_0\right) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $x(t) = Ae^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2 - b^2}t + \phi_0\right)$ implica (por relaciones trigonométricas)

$$x(t) = (A\cos(\phi_0))e^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2 - b^2}t\right) + (-A\sin(\phi_0))e^{-bt}\sin\left(\sqrt{a^2 - b^2}t\right) \tag{15}$$

Veo que la relación entre fase y amplitud con las condiciones iniciales es

$$x(0) = x_0 = A\cos(\phi_0) \tag{16}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0 = -bx_0 + (-A\sin(\phi_0))\sqrt{a^2 - b^2} \tag{17}$$

$$x(t) = x_0e^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2 - b^2}t\right) + (v_0 + bx_0)\frac{\sin\left(\sqrt{a^2 - b^2}t\right)}{\sqrt{a^2 - b^2}}e^{-bt} \tag{18}$$

Vamos a llamar $\omega_0 = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}$. Es interesante notar que, si $b = 0$, esta ecuación coincide con la solución al problema del punto a).

Ahora vamos a resolver los puntos $b), c), d)$**:**

*b) Si $b > a$ (la fuerza de fricción debida al rozamiento es grande en comparación con la rigidez del resorte), encontrar la solución de (2) que verifique como antes $x(0) = x_0$, $x_0'(0) = 0$. Probar que no hay ninguna vibración y que la carreta vuelve simplemente a su posición de equilibrio. Se dice que el movimiento está **sobreamortiguado**.*

La solución

$$x(t) = x_0 e^{-bt} \cos\left(\sqrt{a^2 - b^2} t\right) + b x_0 \frac{\sin\left(\sqrt{a^2 - b^2} t\right)}{\sqrt{a^2 - b^2}} e^{-bt} \tag{19}$$

Parecería no funcionar, porque $\sqrt{a^2 - b^2}$ es imaginario. Así que volvemos a cuando teníamos exponenciales como soluciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+ e^{-bt} e^{\sqrt{b^2 - a^2} t} + A_- e^{-bt} e^{-\sqrt{b^2 - a^2} t} \\ v(t) &= A_+ e^{-bt} e^{\sqrt{b^2 - a^2} t} \left(-b + \sqrt{b^2 - a^2}\right) + A_- e^{-bt} e^{-\sqrt{b^2 - a^2} t} \left(-b - \sqrt{b^2 - a^2}\right) \end{aligned}$$

Como $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = 0$, por lo que $A_+ \left(-b + \sqrt{b^2 - a^2}\right) + A_- \left(-b - \sqrt{b^2 - a^2}\right) = 0$, lo que implica que $\frac{A_+}{A_-} = \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{-b + \sqrt{b^2 - a^2}}$, por lo que

$$x(t) = A_- e^{-bt} \left[\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{-b + \sqrt{b^2 - a^2}} e^{\sqrt{b^2 - a^2} t} + e^{-\sqrt{b^2 - a^2} t}\right] \tag{20}$$

Y como $x(0) = x_0$, $x_0 = A_- \frac{2\sqrt{b^2 - a^2}}{-b + \sqrt{b^2 - a^2}}$, así que

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-bt}}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \left[\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right) e^{\sqrt{b^2 - a^2} t} + \left(-b + \sqrt{b^2 - a^2}\right) e^{-\sqrt{b^2 - a^2} t}\right] \tag{21}$$

Nota de color: Resulta que si tomamos $A_+ = \frac{A_1 + A_2}{2}$ y $A_- = \frac{A_1 - A_2}{2}$,

$$x(t) = A_1 e^{-bt} \frac{e^{\sqrt{b^2 - a^2} t} + e^{-\sqrt{b^2 - a^2} t}}{2} + A_2 e^{-bt} \frac{e^{\sqrt{b^2 - a^2} t} - e^{-\sqrt{b^2 - a^2} t}}{2} \tag{22}$$

$$x(t) = A_1 e^{-bt} \cosh\left(\sqrt{b^2 - a^2} t\right) + A_2 e^{-bt} \sinh\left(\sqrt{b^2 - a^2} t\right) \tag{23}$$

Donde cosh es el coseno hiperbólico, y sinh es el seno hiperbólico. Con lo que,

$$x(t) = x_0 e^{-bt} \cosh\left(\sqrt{b^2 - a^2} t\right) + (v_0 + b x_0) e^{-bt} \frac{\sinh\left(\sqrt{b^2 - a^2} t\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}} \tag{24}$$

c) *Si ahora $b < a$ (caso **subamortiguado**), probar que la solución de (2) con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$ es:*

$$x(t) = x_0 \frac{\sqrt{\alpha^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \theta) \tag{25}$$

donde $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$, y $\tan\theta = b/\alpha$.

Esta función oscila con una amplitud que se reduce exponencialmente. Su gráfica cruza la posición de equilibrio $x = 0$ a intervalos regulares, aunque no es periódica. Hacer un dibujo. Probar que el tiempo requerido para volver a la posición de equilibrio es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}} \tag{26}$$

*y su frecuencia está dada por $f = \frac{1}{T}$, llamada **frecuencia natural** del sistema. Notar que esta frecuencia disminuye al aumentar la constante de amortiguación c.*

$cos(atan(y)) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

Notar que

$$x(t) = x_0 \frac{\sqrt{\alpha^2+b^2}}{\alpha} e^{-bt}\cos(\alpha t - \theta) = x_0 \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos(\theta)\left[e^{-bt}\cos(\alpha t) + \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}e^{-bt}\sin(\alpha t)\right] \quad (27)$$

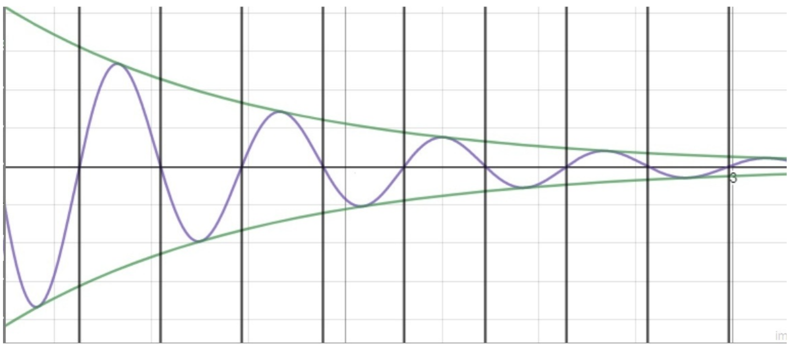
Vamos a utilizar que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

$$x(t) = x_0 \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos(\theta)\left[e^{-bt}\cos(\alpha t) + \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}e^{-bt}\sin(\alpha t)\right] \Rightarrow x(t) = x_0 e^{-bt}\left[\cos(\alpha t) + b\frac{\sin(\alpha t)}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$

Lo que coincide con la solución que habíamos encontrado,

$$x(t) = x_0 e^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2-b^2}t\right) + bx_0 \frac{\sin\left(\sqrt{a^2-b^2}t\right)}{\sqrt{a^2-b^2}}e^{-bt} \quad (28)$$

Como la posición de equilibrio es $x = 0$, y $x(t) = x_0 \frac{\sqrt{\alpha^2+b^2}}{\alpha}e^{-bt}\cos(\alpha t - \theta)$, esto se cumple cuanto $\alpha t_k - \theta = \pi k + \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que el tiempo que tarda en volver a $x = 0$ luego de partir de $x = 0$ es $t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, y como $b = \frac{c}{2M}, a = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}$, el tiempo es $\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}}$. Ahora, el tiempo para volver a la misma posición de equilibrio con el mismo signo de velocidad va a ser el doble, que es el "período de oscilación" $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}}$. La frecuencia $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}$ es la llamada *frecuencia natural* del sistema. Notar que f es función decreciente de c, o sea, a mayor amortiguamiento, menos vibra el resorte.



d) *Si $b = a$, ver que tampoco hay vibración y que el comportamiento es similar al del caso (b). Se dice que el movimiento es críticamente amortiguado.*

Este caso es bastante particular, porque la ecuación de autovalores en este caso está degenerada y la solución no va a ser suma de exponenciales complejas. Ahora, resulta que para este tipo de ecuación, el espacio de soluciones de las ecuaciones con parámetros sin degeneración cuando se toma el límite en que degeneran resulta coincidir, o sea:

Si tomo el caso subamortiguado,

$$x_{a,b}(t) = x_0 e^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2-b^2}t\right) + (v_0 + bx_0)\frac{\sin\left(\sqrt{a^2-b^2}t\right)}{\sqrt{a^2-b^2}}e^{-bt} \quad (29)$$

y trato de tomar el límite $b \to a^+$,

$$\lim_{b\to a^+} x_{a,b}(t) = \lim_{b\to a^+}\left[x_0 e^{-bt}\cos\left(\sqrt{a^2-b^2}t\right) + (v_0+bx_0)\frac{\sin\left(\sqrt{a^2-b^2}t\right)}{\sqrt{a^2-b^2}}e^{-bt}\right]$$

$$x_a^+(t) = x_0 e^{-at} + (v_0 + ax_0)te^{-at}$$

por otro lado, en el caso sobre-amortiguado,

$$x_{a,b}(t) = x_0 e^{-bt} \cosh\left(\sqrt{b^2-a^2}t\right) + (v_0 + bx_0)e^{-bt}\frac{\sinh\left(\sqrt{b^2-a^2}t\right)}{\sqrt{b^2-a^2}} \tag{30}$$

y trato de tomar el límite $b \to a^-$,

$$\lim_{b\to a^-} x_{a,b}(t) = \lim_{b\to a^-}\left[x_0 e^{-bt}\cosh\left(\sqrt{b^2-a^2}t\right) + (v_0+bx_0)e^{-bt}\frac{\sinh\left(\sqrt{b^2-a^2}t\right)}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$$
$$x_a^-(t) = x_0e^{-at} + (v_0 + ax_0)te^{-at}$$

No se si notan algo de similitud acá, pero...

$$x_a^+(t) = x_0e^{-at} + (v_0+ax_0)te^{-at} = x_a^-(t) \tag{31}$$

Por lo que vamos a probar si resulta ser que $x(t) = x_0e^{-at} + (v_0+ax_0)te^{-at}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + a^2x = 0,\\
&\frac{d}{dt}x(t) = -\left(av_0 + a^2x_0\right)te^{-at} + v_0e^{-at}, \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) = a^2(v_0+ax_0)te^{-at} - a(2v_0+ax_0)e^{-at},\\
\Rightarrow\quad &\left[a^2(v_0+ax_0)te^{-at} - a(2v_0+ax_0)e^{-at}\right] + 2a\left[-\left(av_0+a^2x_0\right)te^{-at} + v_0e^{-at}\right]\\
&+a^2\left[x_0e^{-at} + (v_0+ax_0)te^{-at}\right] = 0
\end{aligned}$$

Así que probamos que es solución, y además como es combinación lineal de dos funciones distintas, entonces el espacio que genera contiene a todas las soluciones de esta ecuación. Además se puede ver que $x_0 = x(0)$ y $v_0 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}$.

Esta característica de esta familia de ecuaciones (el que el tomar las soluciones con mismas condiciones iniciales para la familia de ecuaciones y tomar el límite de los parámetros dentro de una región conocida al borde de una región desconocida) es usual en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de un orden dado con coeficientes constantes, pero no lo es para familias más genéricas de ecuaciones diferenciales.[5]

Nos queda ver los últimos puntos del ejercicio, no menos importantes, aunque estén al final:

Hasta ahora hemos considerado vibraciones libres, porque sólo actúan fuerzas internas al sistema. Si una fuerza $F(t)$ actúa sobre la carreta, la ecuación sería:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + \kappa x = F(t). \tag{32}$$

e) Si esta fuerza es periódica de la forma $F(t) = F_0 cos(\omega t)$, con F_0, ω constantes, hallar $x(t)$.

Al valor $\frac{\omega}{2\pi}$ se lo llama frecuencia impresa al sistema.

Si $tan(\phi) = \frac{\omega c}{\kappa - \omega^2 M}$, probar que la solución general de de esta ecuación, con $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, puede escribirse:

$$x(t) = e^{-bt}(C_1\cos(\alpha t) + C_2\sin(\alpha t)) + \frac{F_0}{\sqrt{\left(\kappa - M\omega^2\right)^2 + \omega^2c^2}}\cos(\omega t - \phi) \tag{33}$$

Acá estamos ante un sistema no homogéneo de segundo orden. En modo matricial nos quedaría

$$\begin{pmatrix} 0 \\ F_0 cos(\omega t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 \\ \kappa & M\frac{d}{dt} + c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t)\end{pmatrix} \tag{34}$$

[5] Esto es relevante para la modelización de fenómenos naturales, porque distintas teorías consideradas válidas en su régimen de aplicación común, usualmente se considera suficiente que las ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones que describen la situación en ambas teorías cumplan con ser aproximadamente iguales unas a las otras, porque se supone que entonces sus soluciones también lo serán, que es lo que legitima que ambas teorías se diga que coinciden en dicho régimen.

Algunos ejemplos de esto: Mecánica de newton y mecánica de Einstein a velocidades menores al 0.01% de la velocidad de la luz; cuántica para hablar de caída de pianos desde edificios frente a mecánica newtoniana; Termodinámica estadística y termodinámica para explicar el cambio de energía específica de la leche azucarada cuando se transforma en dulce de leche en la cocina.

Los sistemas no homogéneos tienen en general como solución la suma de una solución del homogéneo con una solución particular del no homogéneo, así que esperamos poder escribir $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$. La parte homogénea nos va a permitir ajustar $x(0) = x_0$ y $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$. El sistema homogéneo tenía como solución en general

$$x_H(t) = e^{-bt}(C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)) \tag{35}$$

$$v_H(t) = -be^{-bt}(C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)) + e^{-bt}\alpha(-C_1 \sin(\alpha t) + C_2 \cos(\alpha t)) \tag{36}$$

Ahora, para la parte no homogénea, conviene asumir que la forma funcional va a ser similar en ambos lados, por lo que conviene pedir que $x_p(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$, por lo que $\frac{dx_p(t)}{dt} = v_p(t) = \omega A_2 \cos(\omega t) - \omega A_1 \sin(\omega t)$, y
$\frac{dv_p(t)}{dt} = -\omega^2 A_1 \cos(\omega t) - \omega^2 A_2 \sin(\omega t)$. Introduciendo esto en la ecuación:

$$F_0 cos(\omega t) = \left(\kappa - M\omega^2\right) A_1 \cos(\omega t) + \left(\kappa - M\omega^2\right) A_2 \sin(\omega t) + c\omega A_2 \cos(\omega t) - c\omega A_1 \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow F_0 = \left(\kappa - M\omega^2\right) A_1 + c\omega A_2 \tag{37}$$

$$0 = \left(\kappa - M\omega^2\right) A_2 - c\omega A_1 \tag{38}$$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 \frac{c\omega}{\kappa - M\omega^2} = A_1 \frac{2b\omega}{a^2 - \omega^2} \tag{39}$$

$$A_1 = \frac{(\kappa - M\omega^2)}{(\kappa - M\omega^2)^2 + c^2\omega^2} F_0 = \frac{(a^2 - \omega^2)}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} F_0 \tag{40}$$

$$A_2 = \frac{2b\omega}{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2} F_0 \tag{41}$$

$$Amplitud = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} F_0 \tag{42}$$

$$\tan(\phi_0) = \frac{c\omega}{\kappa - M\omega^2} \tag{43}$$

Entonces
$x(t) = \frac{1}{\sqrt{(a^2-\omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} F_0 \cos(\omega t - \phi_0) + e^{-bt}(C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t))$

Con lo que probamos lo que pedía el punto (e) del problema.

El primer término tiende a cero para $t \to +\infty$, luego es transitorio, es decir, a medida que pasa el tiempo, la solución se parece más y más al segundo sumando. Notar que la frecuencia de esta función es la frecuencia impresa al sistema, y que la amplitud es el coeficiente $\frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - M\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}$. ¿Qué pasa cuando la frecuencia impresa se acerca a la frecuencia natural del sistema? (Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia).

f) Si $b < a$ (caso subamortiguado) hallar la frecuencia impresa ω que provoca amplitud máxima. ¿Siempre existe este valor? Este valor de frecuencia impresa (cuando existe) se denomina frecuencia de resonancia. Demostrar que la frecuencia de resonancia es siempre menor que la frecuencia natural.

Cuando $\omega^2 \to \omega_0^2 = \frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}$, la amplitud $\frac{F_0}{\sqrt{(\kappa - M\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}} \to \frac{F_0}{c\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{c\omega_0}{4M}\right)^2}}$.

Notar que la frecuencia que minimiza el denominador sería $\omega^2 = \frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{2M^2}$, la que es llamada *frecuencia de resonancia*, que lleva a que la sea $\frac{F_0}{c\sqrt{\frac{\kappa}{M} - \frac{c^2}{4M^2}}} = \frac{F_0}{c\omega_0}$. Al dividir la amplitud en la frecuencia natural con la amplitud de resonancia obtenemos $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\omega_0}{4M}\right)^2}}$, lo que es estrictamente menor que 1 cuando $\omega_0 > 0$, $c > 0$ y $M > 0$.