ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
DIAGRAMAS DE FASE - PARTE II

A continuación vamos a determinar el diagrama de fases para un sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes.

- **Diagrama de fases para un sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes.**

Consideramos la ecuación (sistema)

$$x'(t) = A\,x(t) \qquad (*)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. A continuación anotaremos $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

En lo que sigue, el objetivo es graficar curvas solución en el diagrama de fases a partir de conocer los autovalores de A, λ_1 y λ_2.

De ahora en adelante supondremos que

que $\lambda = 0$ no es autovalor de A. En consecuencia el único punto crítico de $(*)$ es $(0,0)$ (ejercicio).

.. Caso 1: $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

En este caso, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Luego, la solución general de $(*)$ está dada por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (**)$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y v_1, v_2 son autovectores asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente.

Si el dato inicial para x se da sobre la recta de autovectores asociados a λ_1, es decir si $x(0) = c v_1$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces, usando $(**)$, se deduce que $c_1 = c$ y $c_2 = 0$. Luego, $(**)$ queda

$$x(t) = c e^{\lambda_1 t} v_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

a partir de lo cual se ve que $x(t)$ está sobre la recta de autovectores asociados a λ_1 para todo t. Por lo tanto, si al inicio se está sobre esta recta, se permanece sobre esta recta en todo instante de tiempo. Además, como $\lambda_1 > 0$, se tiene que $|x(t)| \to +\infty$ si $t \to +\infty$ y que $x(t) \to 0$ si $t \to -\infty$.

Algo similar ocurre si el dato inicial se da sobre la recta de autovalores asociados a λ_2. En este caso, la solución general (**) queda

$$x(t) = c e^{\lambda_2 (t)} v_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

para $c \in \mathbb{R}$ tal que $x(0) = c v_2$. Usando que $\lambda_2 < 0$, se tiene que $x(t) \to 0$ si $t \to +\infty$ y que $|x(t)| \to +\infty$ si $t \to -\infty$.

Supongamos ahora que el dato inicial no se da sobre las rectas de autovectores. Luego, $x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$ con $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$. Por comodidad, anotamos con $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a los coeficientes de $x(t)$ con respecto a la base $\{v_1, v_2\}$,

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Usando que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ se ve que

$$|y_1(t)| \to +\infty, \; y_2(t) \to 0 \text{ si } t \to +\infty;$$

y que $y_1(t) \to 0$, $|y_2(t)| \to +\infty$ si $t \to -\infty$.

Luego, $x(t)$ se acerca más a la recta

generada por v_1 si $t \to +\infty$; y se acerca más a la recta generada por v_2 si $t \to -\infty$.

Más aún, tenemos lo siguiente. Si M es la matriz cuyas columnas son v_1 y v_2 (en ese orden) entonces se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Con esto se ve que el diagrama de fases se puede obtener transformando las curvas dadas por $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ de acuerdo a una transformación lineal con matriz M. Siguiendo esta idea, grafiquemos primero las curvas $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

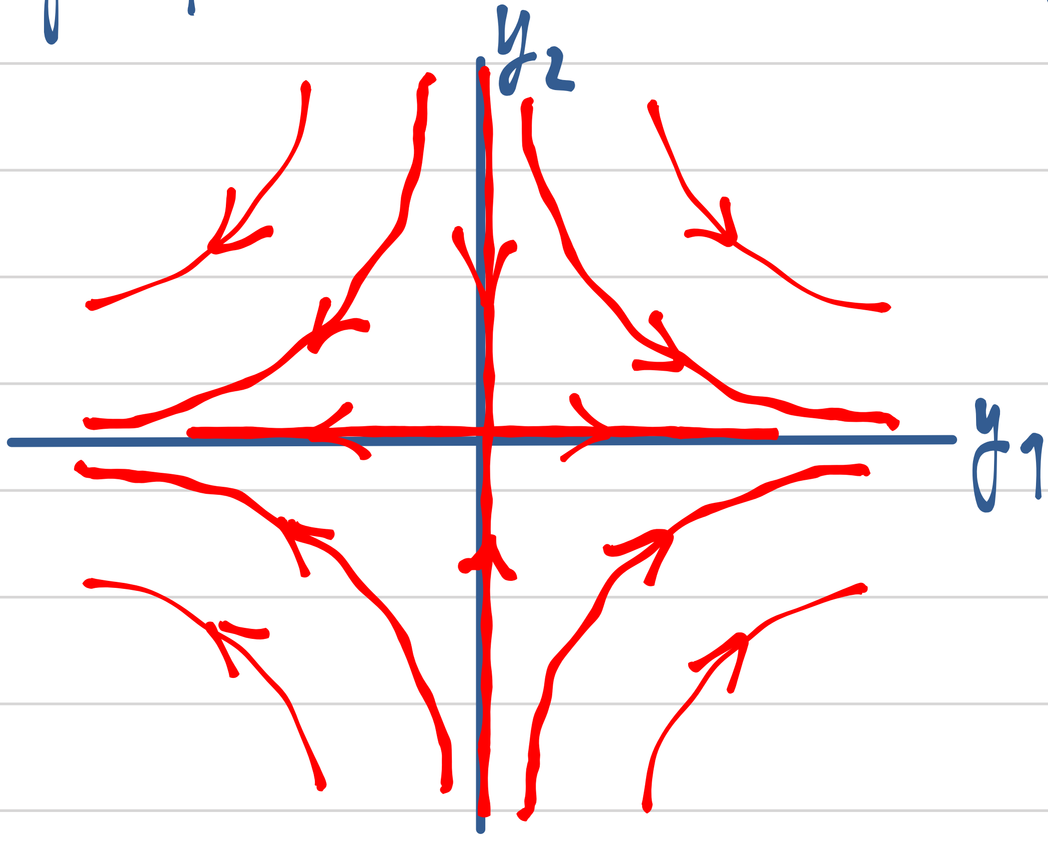
Como $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$, con $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$; deducimos que $e^t = (y_1(t)/c_1)^{1/\lambda_1}$, de donde obtenemos

$$y_2(t) = c_2 \left(\underbrace{\frac{y_1(t)}{c_1}}_{>0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Poniendo $k = c_2/|c_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, esta última expresión se puede escribir como

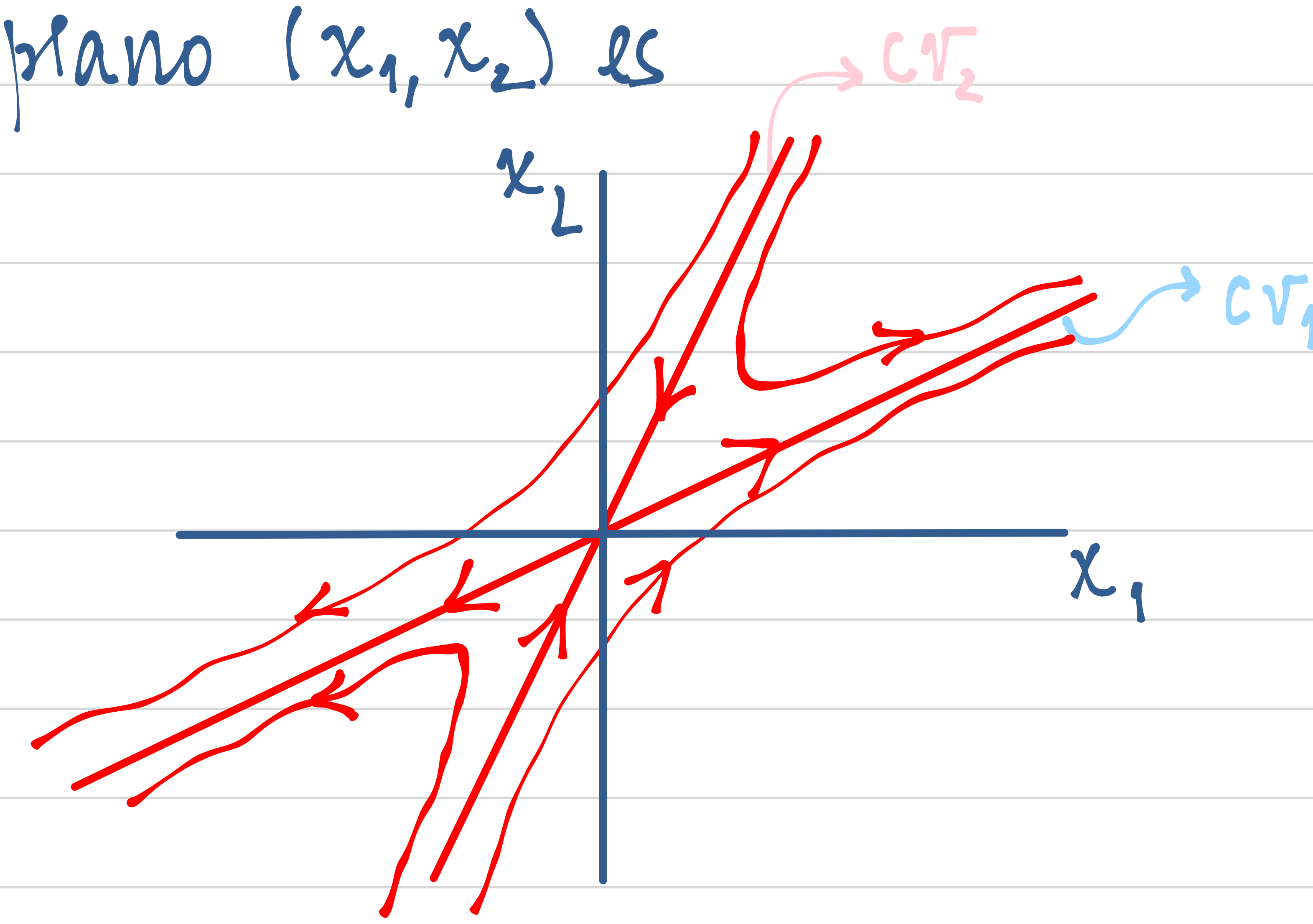
$$y_2(t) = k\,|y_1(t)|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

Entonces, en el plano (y_1, y_2), el gráfico de las curvas $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ es



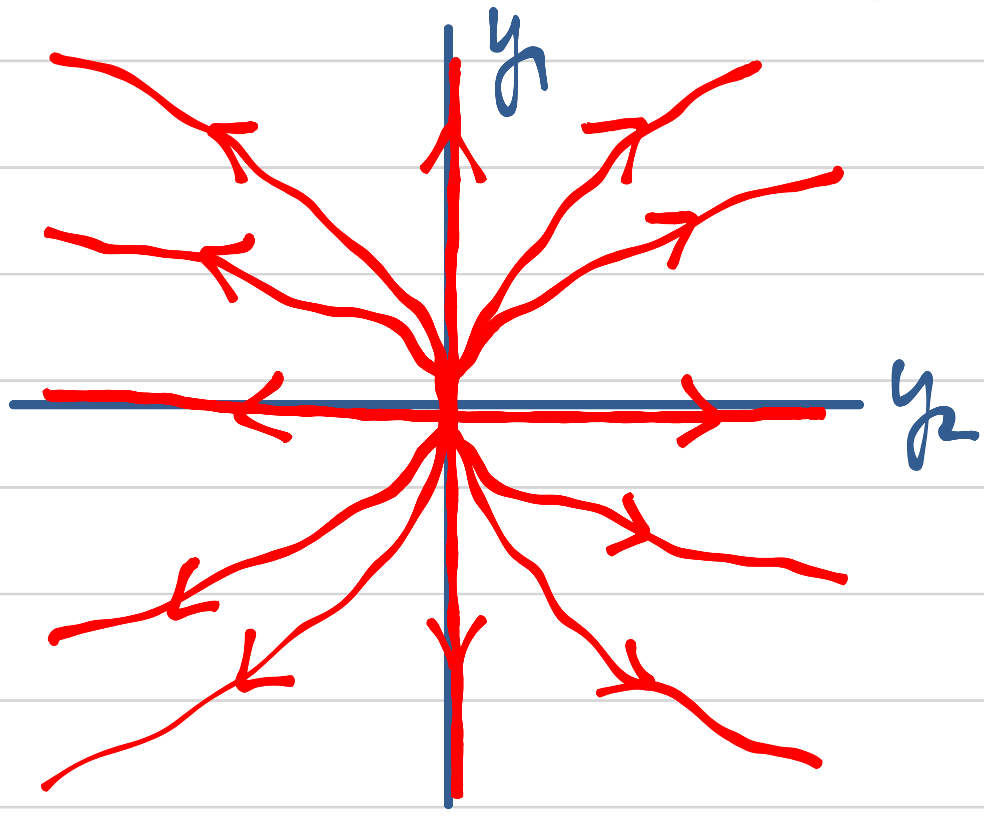
(Notar que $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$)

Luego, el diagrama de fases en el plano (x_1, x_2) es



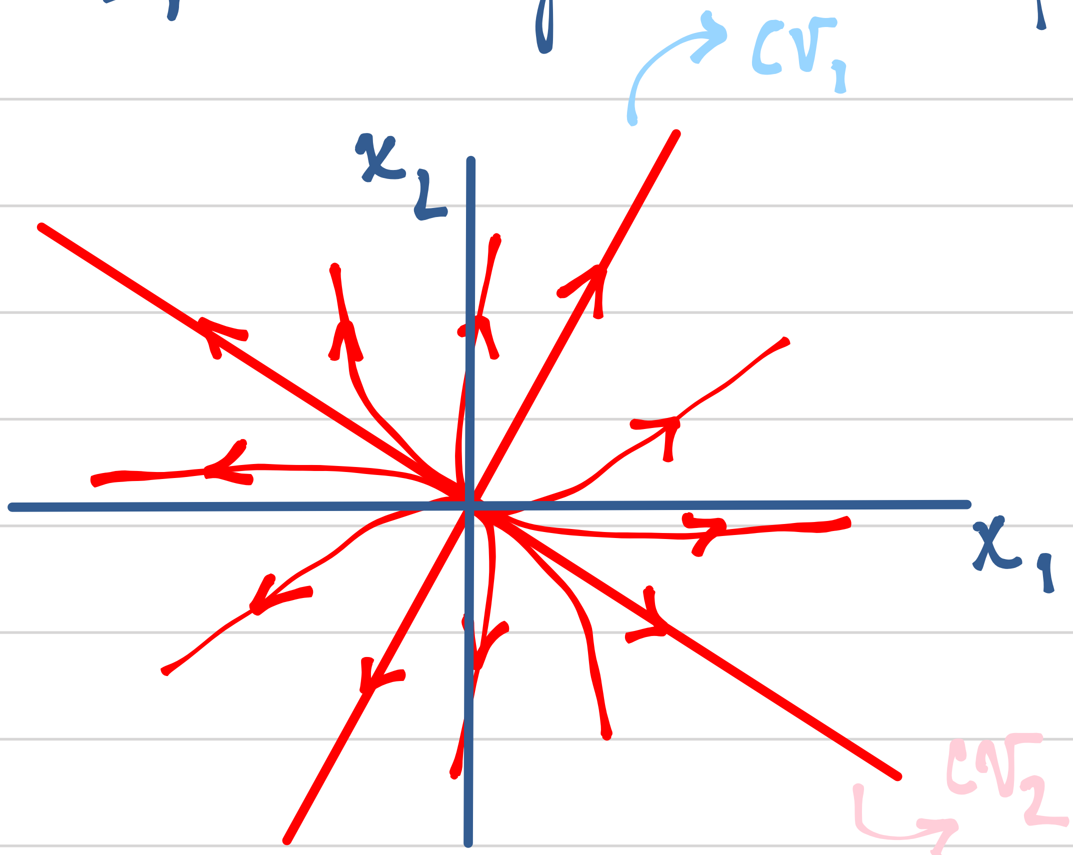
.. Caso 2: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

Razonando como en el caso anterior, se obtiene $y_2(t) = k|y_1(t)|^{\lambda_2/\lambda_1}$, ahora con $0 < \lambda_2/\lambda_1 < 1$, y



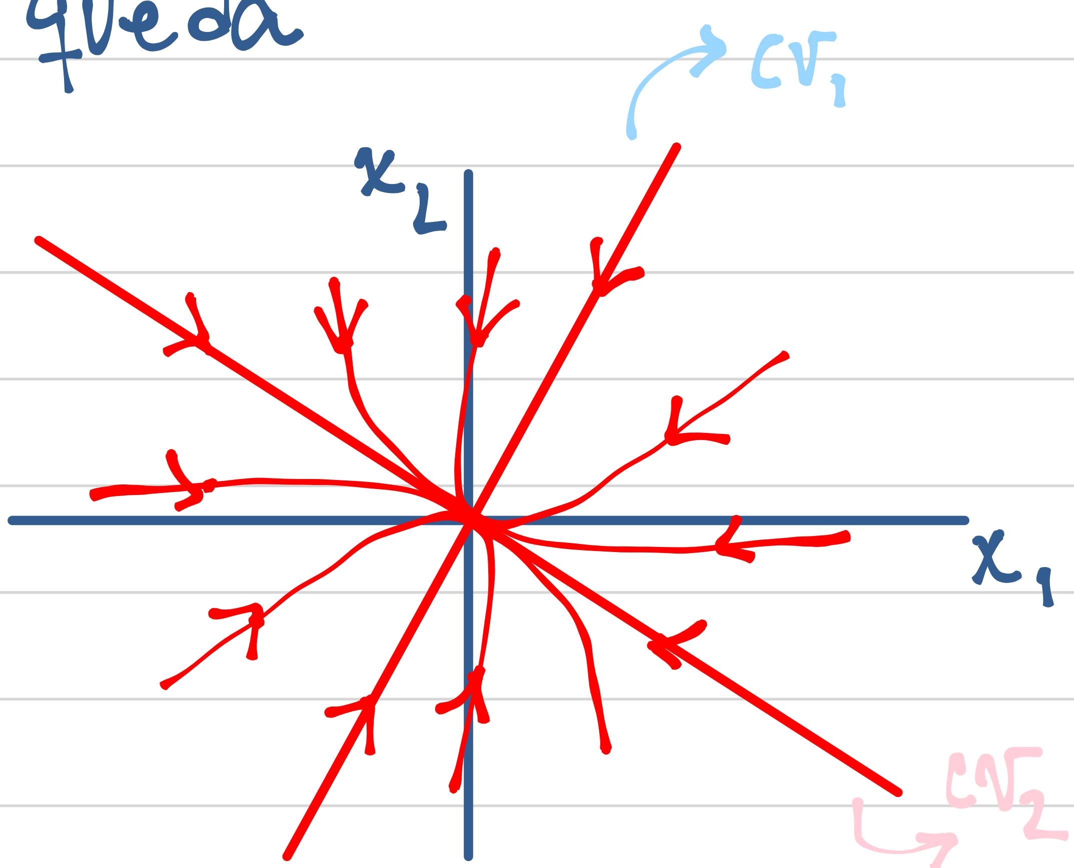
(Notar que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$)

Entonces, el diagrama de fases es



.. Caso 3: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

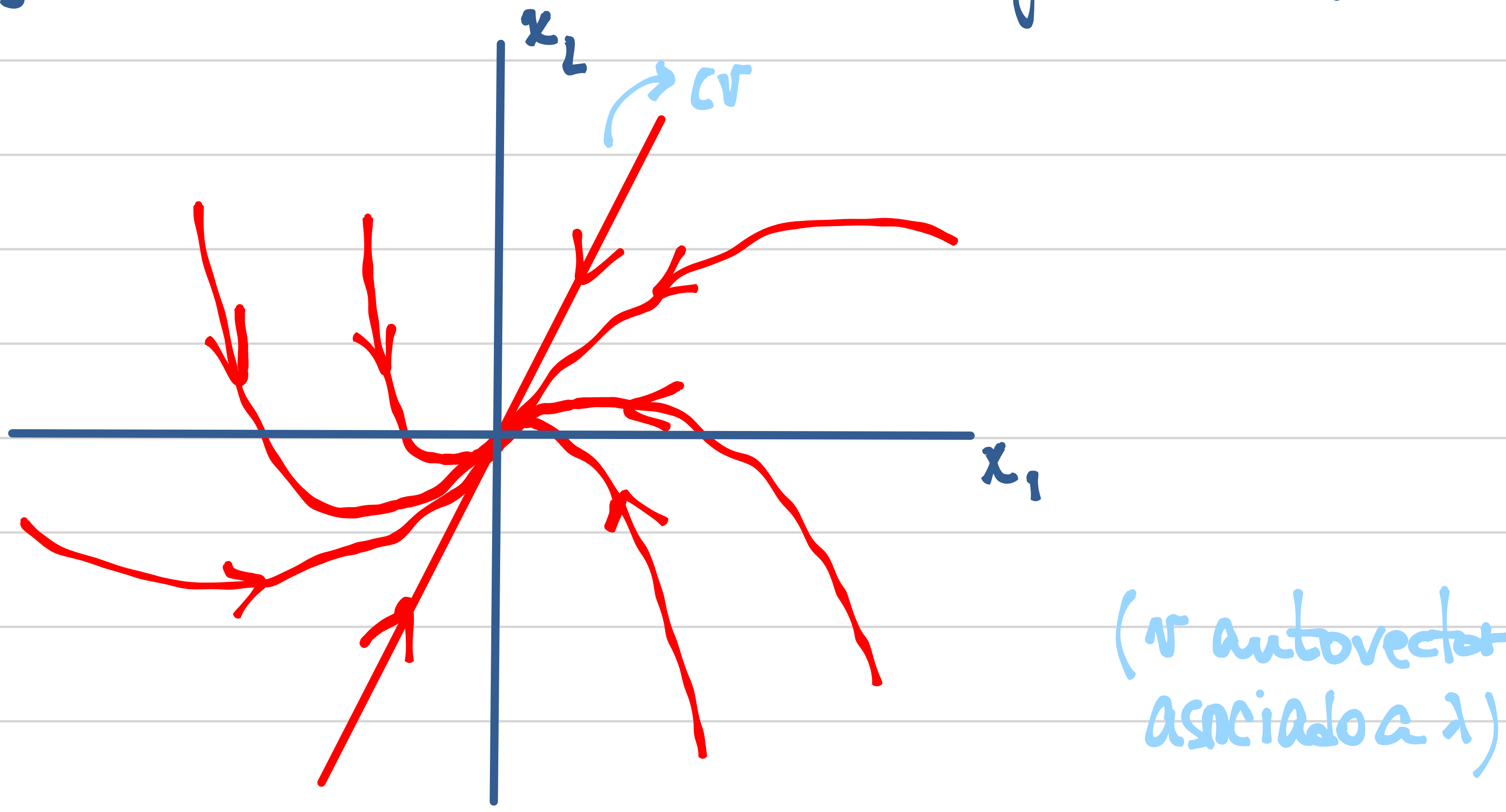
Este caso es igual que el anterior, pero con las flechas apuntando hacia el origen ya que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$. El diagrama de fases queda



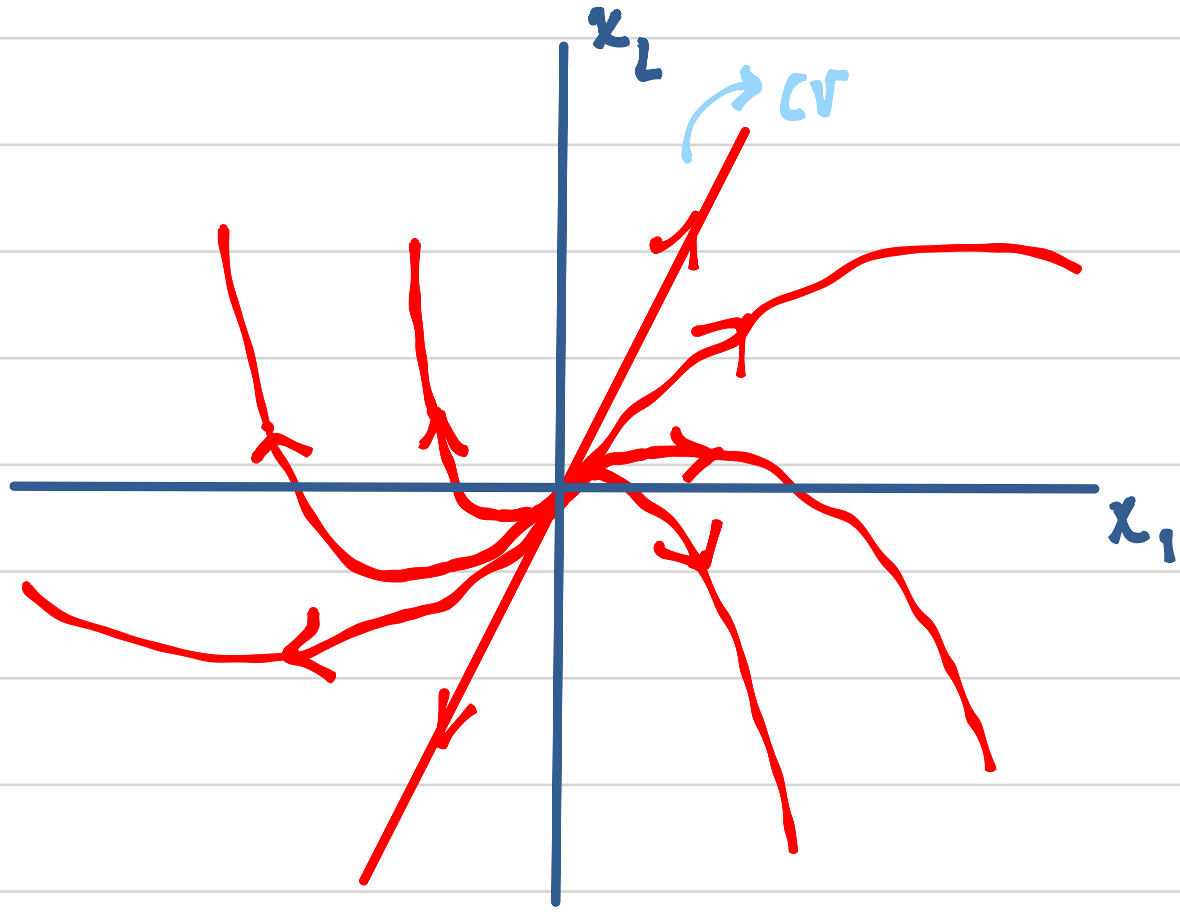
Para el resto de los casos sólo presentaremos el correspondiente diagrama de fases. La deducción de cada diagrama se basa en ideas similares a las presentadas en el caso 1. Los detalles se pueden consultar en el apunte de Wolanski, págs. 65 a 70.

• Caso 4: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \ (\neq 0)$

Presentamos el diagrama para el caso $A \neq \lambda I$. El caso $A = \lambda I$ se deja como ejercicio. Si $\lambda < 0$, el diagrama queda



y si $\lambda > 0$ el diagrama es de la forma



(v autovector asociado a λ)

•• Caso 5: $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$, $b \neq 0$

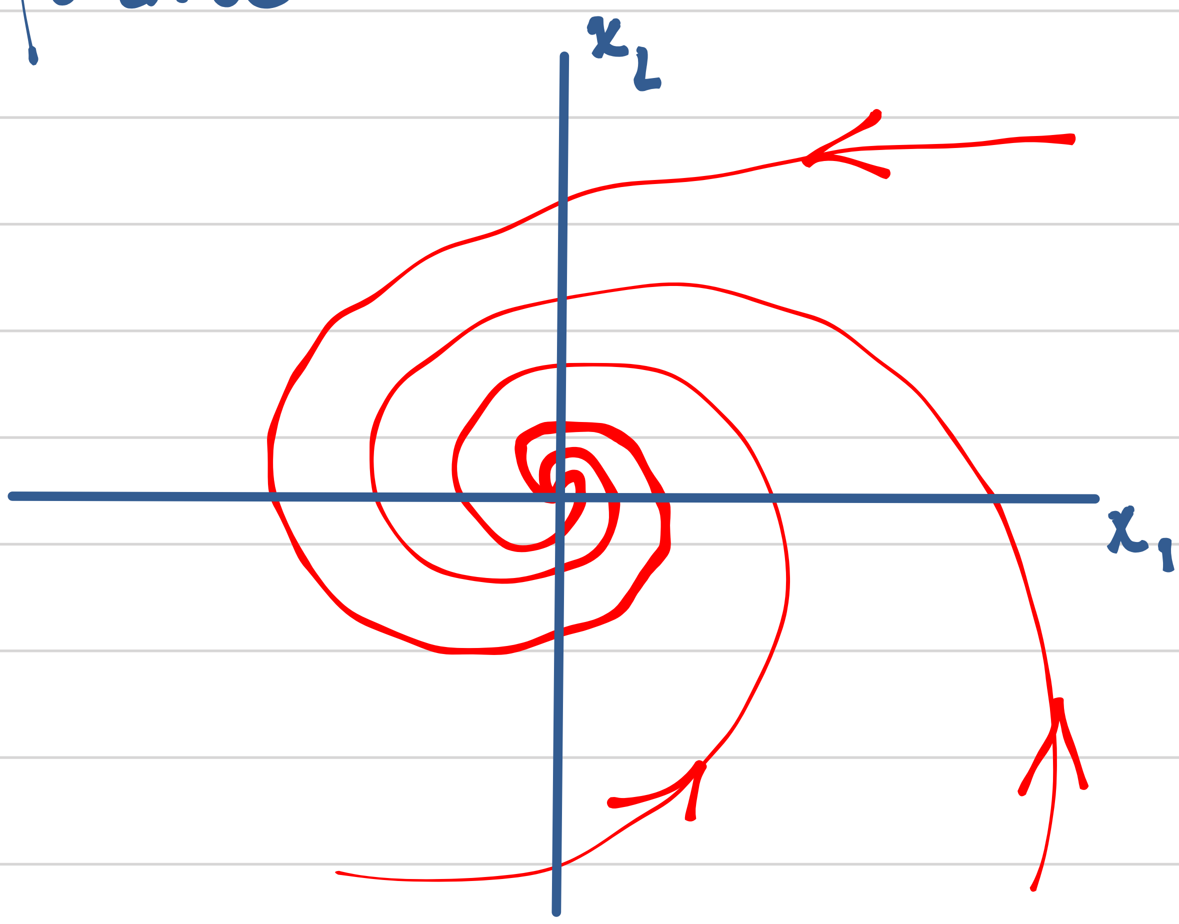
No se pierde generalidad al suponer $b < 0$, ya que en caso de tener $b > 0$ basta intercambiar los nombres para λ_1 y λ_2.

Si $a = 0$, el diagrama de fases es

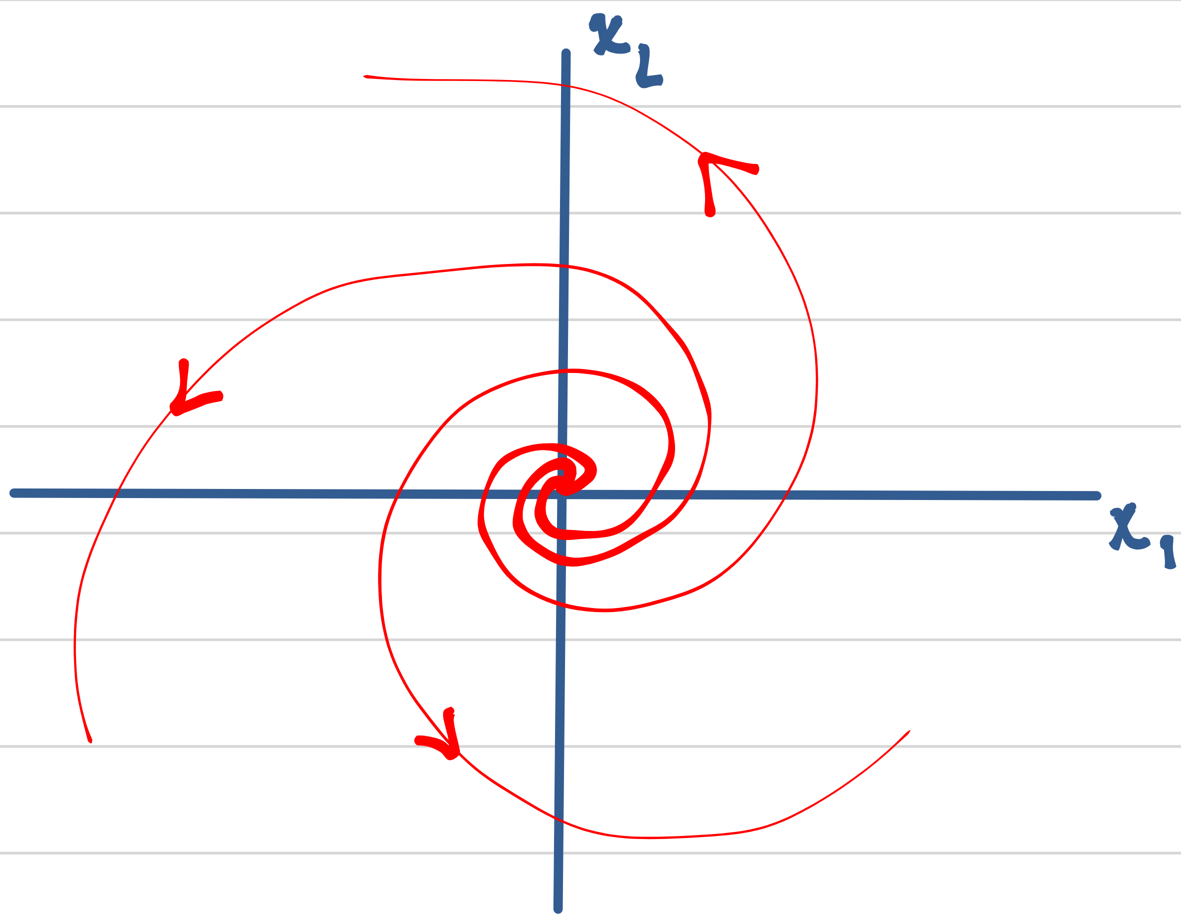
(Para decidir en qué sentido giran las curvas, ubicar v_1 y v_2, siendo $v_1 + i v_2$ autovector asociado a λ_1 y usar que las curvas giran de v_1 a v_2)

Esta regla también vale para $a > 0$ y $a < 0$

Si $a < 0$, el diagrama de fases es de la forma



Y si $a > 0$, queda



OBSERVACIÓN A partir de los diagramas de fases que hemos esbozado, deducimos lo siguiente:

- Si todos los autovalores de A tienen parte real negativa (esto es, son reales negativos o complejos no reales con parte real negativa) entonces todas las curvas tienden a 0 cuando $t \to +\infty$.
- Si todos los autovalores de A tienen parte real positiva, entonces todas las curvas tienden a 0 cuando $t \to -\infty$, y se alejan de 0 conforme el tiempo avanza.
- Si A tiene un autovalor positivo y otro negativo entonces hay sólo dos curvas que se acercan a 0 si $t \to +\infty$. Estas curvas son las que corresponden a la recta de

autovectores del autovalor negativo.
Además, hay sólo dos curvas que tienden a 0 cuando $t \to -\infty$ y se alejan de 0 conforme el tiempo avanza; las cuales corresponden a la recta de autovectores del autovalor positivo. El resto de las curvas se alejan de 0 tanto si $t \to +\infty$ como si $t \to -\infty$.