ANÁLISIS II – ANÁLISIS MATEMÁTICO II – MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 20

• Sistemas lineales de orden 1 no homogéneos.

Recordemos:

Si $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con entradas continuas $\Rightarrow$ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$X' = A(t)X$$

es un espacio vectorial de dimensión n.

Si $b(t) \in \mathbb{R}^n$ con entradas continuas queremos ver cómo son las soluciones del sistema no homogéneo

$$X' = A(t)X + b(t).$$

Teorema: Si $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con entradas continuas y $b(t) \in \mathbb{R}^n$ también con entradas continuas, entonces una solución general del sistema no homogéneo

$$X' = A(t)X + b(t)$$

tiene la forma

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

donde $X_h(t)$ es una solución del sistema homogéneo asociado $X' = A(t)X$ y $X_p(t)$ es una solución particular

Dem: Sea X_p una solución particular de $X' = A(t)X + b(t)$. Supongamos que $X(t)$ es otra solución del mismo sistema y veamos que existe una solución $X_h(t)$ de $X' = A(t)X$ / $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$.

Llamemos $Y = X - X_p$. Entonces,

$$Y' = X' - X_p' = [A(t)X + b(t)] - [A(t)X_p + b(t)]$$
$$= A(t)X - A(t)X_p$$
$$= A(t)(X - X_p) = A(t)Y.$$

Por lo tanto, Y es una solución del sistema homogéneo y como $X = Y + X_p$, Y es la solución X_h del homogéneo que buscábamos.

Si ahora X_h es solución del homogéneo, consideremos $X_h + X_p$. Entonces

$$(X_h + X_p)' = X_h' + X_p'$$
$$= A(t)X_h + A(t)X_p + b(t)$$
$$= A(t)[X_h + X_p] + b(t)$$

y $\therefore$ $X_h + X_p$ es solución del sistema $\square$

Pregunta: ¿cómo encontramos X_p?

Vamos a buscarlo en base a una base de soluciones del homogéneo ...

Teorema: (Variación de las constantes)

Sea $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ continua en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base de soluciones del sistema homogéneo $X' = A(t)X$. Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continua en I. Entonces, existen funciones de clase $\mathcal{C}^1$ $c_1(t), \dots, c_n(t)$ definidas en I tales que

$$X_p(t) = c_1(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)X_n(t)$$

es una solución particular de $X' = A(t)X + b(t)$.

Más precisamente, las funciones $c_i(t)$ $i=1,\dots,n$ cumplen que

$$Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = b(t)$$ donde $Q(t)$ es la matriz fundamental $Q(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ X_1(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$.

Dem: Recordemos que $Q'(t) = A(t)Q(t)$ y que si X es una solución del homogéneo $\Rightarrow$

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t) \quad \text{con}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ vector constante}$$

Proponemos ahora tomar

$$X(t) = c_1(t) X_1(t) + \cdots + c_n(t) X_n(t)$$

y ver qué se tiene que cumplir para que X sea solución de $X' = A(t)X + b(t)$.

Entonces, $X(t) = Q(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow$ derivando

$$X'(t) = Q'(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} + Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}$$

$$= A(t)Q(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} + Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}$$

$$= A(t)X(t) + Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $X(t)$ es solución si se cumple que

$$Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = b(t). \quad (*)$$

Veamos ahora que siempre existen $c_1(t), \dots, c_n(t)$ que cumplen $(*)$

Recordemos que como $Q(t)$ es matriz fundamental $\det(Q(t)) \neq 0 \; \forall t \in I$. Entonces $Q(t)$ es inversible $\forall t$ y $Q(t)^{-1}$ tiene entradas continuas.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = Q(t)^{-1} b(t).$$

Así, como $Q(t)^{-1} b(t)$ es continuo, encontramos funciones continuas $c_1'(t), \dots, c_n'(t)$ que cumplen $(*)$ e integrándolos, obtenemos $c_1(t), \dots, c_n(t)$ funciones de clase $\mathcal{C}^1$ que hacen X_p una solución de $X' = A(t)X + b(t)$ $\boxtimes$

$\boxed{*}$ Apliquemos el método a ecuaciones no homogéneas de orden n.

Tenemos

$$X^{(n)} + a_{n-1}(t) X^{(n-1)} + \dots + a_1(t) X' + a_0(t) X = b(t).$$

Sabemos que podemos transformar la ecuación en un sistema de orden 1:

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = -a_{n-1}(t)x_{n-1} - \dots - a_0(t)x_0 + b(t) \end{cases}$$

que escrito matricialmente es

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & & \\ -a_0(t) & \cdots & & & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Si $Q(t)$ es matriz fundamental de $X' = A(t)X$

$$\Rightarrow X_p(t) = Q(t)\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \text{ con}$$

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \Big/ \; Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ son las columnas de $Q(t)$, es decir, son base de soluciones de $X' = A(t)X$

$$\Rightarrow \text{cada } X_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ x_i'(t) \\ \vdots \\ x_i^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \text{ y } x_i(t) \text{ solución}$$

de la ecuación homogénea

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0.$$

Entonces la condición $Q(t)\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$ nos queda

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) + \cdots + c_n'(t)x_n(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) + \cdots + c_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = b(t). \end{cases}$$

Como $X_p(t)$ es solución particular del sistema tenemos que

$$x_p(t) = x_1(t)c_1(t) + \cdots + x_n(t)c_n(t)$$

es solución particular de la ecuación de orden n.

Con todo esto tenemos el siguiente teorema:

Teorema: La solución general de la ecuación no homogénea de orden n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

tiene la forma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

con x_h una solución de la ecuación homogénea asociada y x_p una sol. particular.