ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

SISTEMAS CONSERVATIVOS

A continuación nos dedicaremos a estudiar ecuaciones (sistemas) de la forma

$$x''(t) = -U'(x(t)) \qquad (*)$$

donde $U : \Omega \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 e $I \subset \mathbb{R}^n$ es un intervalo. Los sistemas de la forma $(*)$ se denominan "sistemas conservativos". A continuación veremos por qué reciben este nombre.

Sea x una solución de $(*)$ que satisface $x(t_0) = x_0$. Si $x(t)$ representa la posición de una partícula de masa unitaria en el instante t, entonces x describe la trayectoria que sigue esta partícula. En el instante t, la energía cinética del sistema está dada por

$$E_c(t) = \frac{(x'(t))^2}{2}$$

y la energía potencial está dada por el opuesto del trabajo que realiza la fuerza F que se aplica sobre la partícula entre las posiciones $x(t_0)$ y $x(t)$. Usando la segunda ley de Newton, deducimos que $F = -U'$. Luego, la energía potencial está dada por

$$E_p(t) = \int_\gamma U' \cdot ds = U(x(t)) - U(x(t_0))$$

donde γ es la curva que describe la partícula para ir de $x(t_0)$ a $x(t)$. No se pierde generalidad en el razonamiento

Si se supone $U(x(t_0))=0$. En tal caso resulta

$$E_p(t)=U(x(t)).$$

La energía mecánica del sistema se define como la suma de las energías cinética y potencial. En nuestro caso,

$$E(t)=E_c(t)+E_p(t)=\frac{(x'(t))^2}{2}+U(x(t))$$

Es sencillo ver que si el sistema está gobernado por (*) entonces E es constante. En efecto,

$$E'(t)=x'(t)\,x''(t)+U'(x(t))\,x'(t)$$

$$=x'(t)\Big(\underbrace{x''(t)+U'(x(t))}_{=0}\Big)=0$$

En otras palabras, la energía mecánica del sistema se conserva. De allí el

nombre de "sistema conservativo" para (*).
Para estudiar (*) convendrá expresarlo como el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -U'(x(t)) \end{cases} \qquad (**)$$

ya que una forma de obtener información cualitativa acerca de las soluciones de (*) es a través del diagrama de fases de (**). En lo que sigue, la idea será realizar el diagrama de fases de (**) a partir de conocer el gráfico de U (comunmente llamado "potencial" del campo conservativo) y de aprovechar las propiedades de E.

Las siguientes observaciones serán de mucha utilidad.

- Si (x,y) es solución de $(**)$ entonces $E(x(t),y(t))=c$ para todo t, para algún $c\in\mathbb{R}$. Luego, (x,y) parametriza una curva que está contenida en el conjunto de nivel $K_c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : E(x,y)=c\}$ de E. Además, como $\nabla E(x,y)=(U'(x),y)$, vemos que ∇E se anula sólo en los puntos de la forma $(\bar{x},0)$ con $\bar{x}$ tal que $U'(\bar{x})=0$. Notar que los puntos de esta forma son los únicos puntos de equilibrio de $(**)$. Luego, vía el teorema de la función implícita, se puede ver que si un conjunto de nivel K_c es no vacío y no contiene a ningún punto de equilibrio de (**), entonces K_c representa una solución de (**).

- Como E es par con respecto a la variable y, se tiene que los conjuntos de nivel de E son simétricos con respecto al eje x.
- Si el potencial U está acotado superiormente, digamos que $U(x) \leq M$ para todo x, para algún $M \in \mathbb{R}$, entonces hay conjuntos de nivel de E que no cortan al eje x. En efecto, basta considerar $c > M$ y observar que el conjunto de nivel K_c de E es no vacío, ya que

cualquier (x,y) con $y^2 = 2(c-U(x))$ pertenece a K_c, y que $y \neq 0$ para todo $(x,y) \in K_c$ ya que

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + \underbrace{U(x)}_{\leq M < c} = c \Leftrightarrow y \neq 0$$

- Si el potencial U es tal que

$$\lim_{x \to +\infty} U(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to -\infty} U(x) = +\infty$$

entonces todos los conjuntos de nivel de E no vacíos cortan al eje x. En efecto, si $K_c \neq \emptyset$ entonces para todo $(x,y) \in K_c$ se tiene $\frac{y^2}{2} + U(x) = c$, de donde se deduce que $c \geq U(x)$ para todo x tal que $(x,y) \in K_c$. En particular, será $c \geq \min U = \underbrace{m}_{\text{notación}}$. Luego $c \in \operatorname{Im}(U) = [m, +\infty)$ y por lo tanto existe $\tilde{x}$ tal que $c = U(\tilde{x})$.

Sólo resta notar que $(\tilde{x},0) \in K_c$.

- Dado que $E(x,y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$ se mantiene constante sobre las curvas solución, vemos que sobre ellas se tiene que $|y|$ crece si y sólo si $U(x)$ decrece y que $|y|$ decrece si y sólo si $U(x)$ crece.
- Si una curva solución (x,y) corta al eje x en el punto $(\bar{x},0)$, entonces la energía sobre esta curva es igual a $E(\bar{x},0) = U(\bar{x})$. En particular esto implica que

$$U(x(t)) \leq E(x(t),y(t)) \leq U(\bar{x})$$

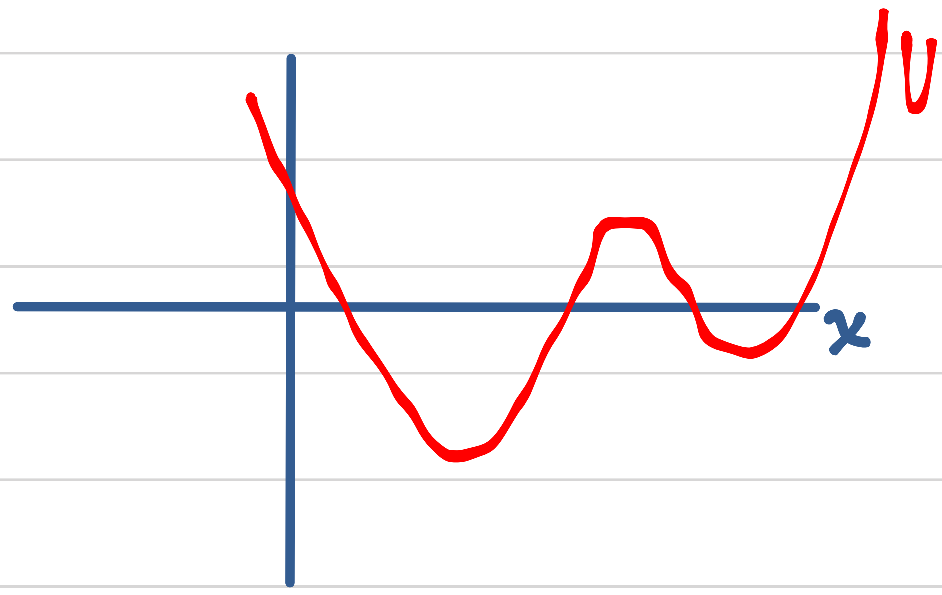
para todo t y que $U(x(t)) = U(\bar{x})$ sólo si t es tal que $y(t) = 0$.

- La orientación de las curvas en el plano de fases queda determinada por la relación $x'(t) = y(t)$: x es creciente en regiones donde $y > 0$; y x es decreciente en regiones donde $y < 0$.

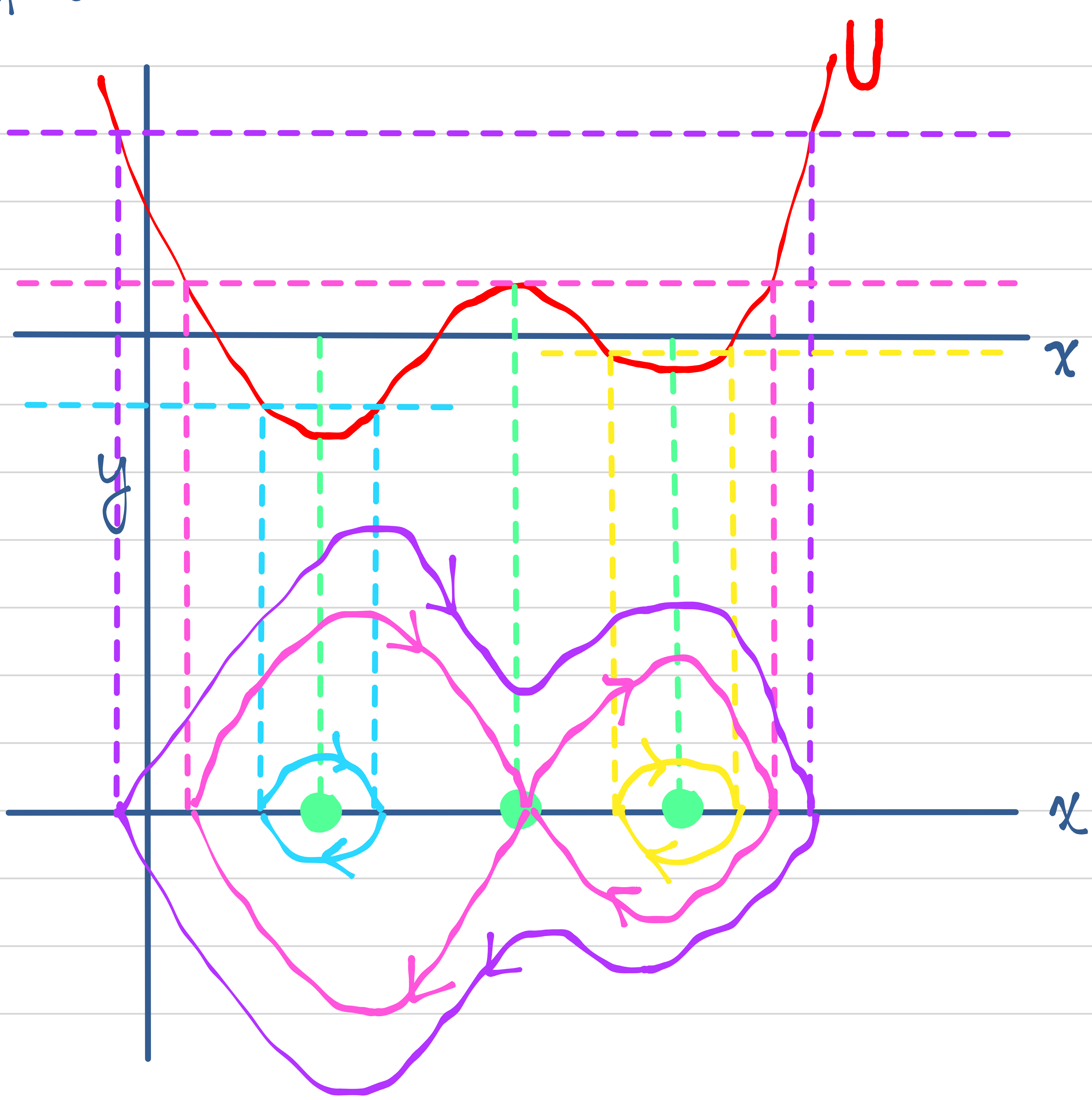
Con toda esta información ya es posible hacer un bosquejo del diagrama de fases de (**), aproximado ya que no conocemos los conjuntos de nivel de E.

Veamos algunos ejemplos.

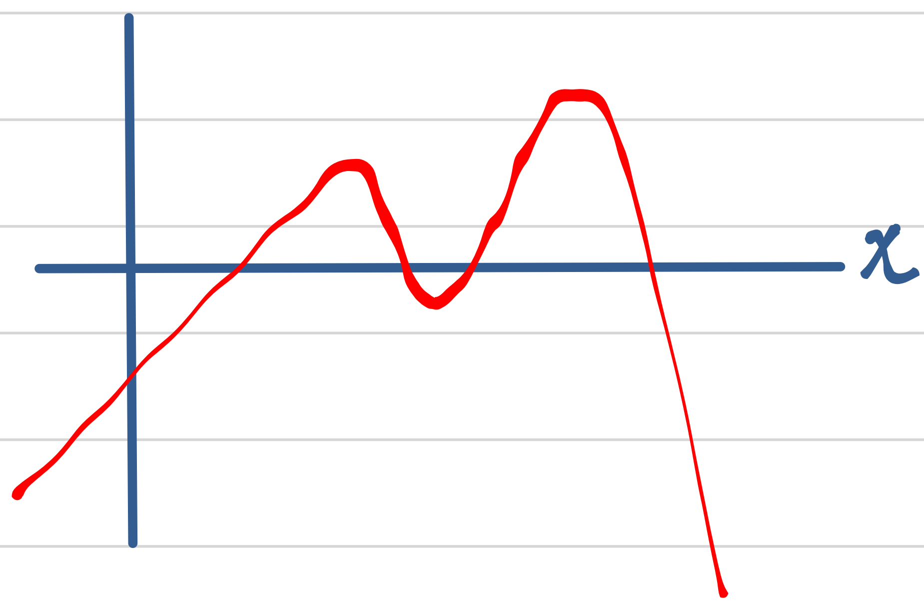
<u>EJEMPLO</u> Vamos a bosquejar el diagrama de fases de $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -U'(x(t)) \end{cases}$ donde el potencial U tiene el siguiente gráfico



Para esbozar el diagrama de fases conviene dibujar "simultáneamente" el potencial U y el diagrama, dada la estrecha relación que existe entre ambos.



EJEMPLO Repetimos el ejemplo anterior, ahora para un potencial con gráfico



Tenemos lo siguiente.