Práctica 1 Ejercicio 16 b)

Pablo Aguila

2do Cuatrimestre 2020

1 Resolución

En este ejercicio se nos pide calcular la longitud de arco del gráfico de la función $y = ln(x)$ entre $a = 1$ y $b = 2$. Para eso utilizamos la propiedad $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$ y obtenemos

$$\int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt. \tag{1}$$

Usando la sustitución $t = senh(\theta)$ y $dt = cosh(\theta)d\theta$ la integral se vuelve

$$\int_{arsenh(a)}^{arsenh(b)} cosh(\theta)\sqrt{1 + \frac{1}{senh^2(\theta)}} d\theta. \tag{2}$$

Observar que se modificaron los límites de integración por la sustitución. En este caso vamos a obtener la primitiva de la primer integral en función de t así que no vamos a usar los límites de integración en esta deducción. La constante la obviamos en las cuentas pero la agregamos en la expresión final de la primitiva. Partiendo la ecuación de abajo (que es muy similar a la identidad pitagórica de las funciones trigonométricas)

$$cosh^2(\theta) = 1 + senh^2(\theta). \tag{3}$$

y dividiendo de ambos lados por $senh^2(\theta)$, como $coth(\theta) = \frac{cosh(\theta)}{senh(\theta)}$, obtenemos

$$coth^2(\theta) = 1 + \frac{1}{senh^2(\theta)}. \tag{4}$$

Ahora podemos remplazar esta expresión en la integral.

$$\int cosh(\theta)coth(\theta)d\theta \tag{5}$$

Podemos integrar por partes definiendo $g'(\theta) = cosh(\theta)$ y $f(\theta) = coth(\theta)$

$$cosh(\theta) - \int senh(\theta)\frac{-1}{senh^2(\theta)} d\theta. \tag{6}$$

Simplificando obtenemos

$$cosh(\theta) + \int \frac{d\theta}{senh(\theta)}. \tag{7}$$

Planteamos $u = tanh(\frac{\theta}{2})$ y $du = \frac{d\theta}{2cosh^2(\frac{\theta}{2})}$. Entonces $d\theta = 2cosh^2(\frac{\theta}{2})du$ y

$$cosh(\theta) + \int \frac{2cosh^2(\frac{\theta}{2})du}{senh(\theta)}. \tag{8}$$

Usando que $senh(\theta) = 2cosh(\frac{\theta}{2})senh(\frac{\theta}{2})$

$$cosh(\theta) + \int \frac{2cosh^2(\frac{\theta}{2})du}{2cosh(\frac{\theta}{2})senh(\frac{\theta}{2})}. \tag{9}$$

Viendo que $tanh(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)}$ y que $u = tanh(\frac{\theta}{2})$

$$cosh(\theta) + \int \frac{du}{u} \tag{10}$$

$$cosh(\theta) + ln(u) \tag{11}$$

$$cosh(\theta) + ln(tanh(\frac{\theta}{2})) \tag{12}$$

Como $\theta = arsenh(t) = ln(t+\sqrt{1+t^2})$, $tanh(\frac{\theta}{2}) = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1}$ y $cosh(arsenh(t)) = \sqrt{1+t^2}$ se deduce que

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}dt = \sqrt{1+t^2} + ln\left(\frac{t+\sqrt{1+t^2}-1}{t+\sqrt{1+t^2}+1}\right) + C. \tag{13}$$

Evaluando la integral en sus bordes el resultado final es

$$L = \sqrt{5} + ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right) - \sqrt{2} - ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right). \tag{14}$$