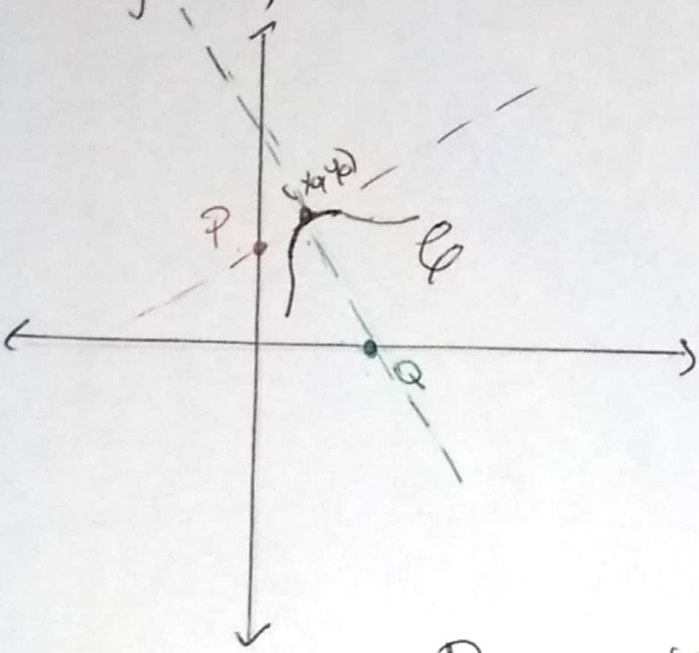
• Encontrar una curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ que pase por $(1;1)$ y verifique que para todo punto (x_0, y_0), al considerar el punto P dado por la intersección de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en (x_0,y_0) y el eje y y el punto Q, la intersección de la recta normal a $\mathcal{C}$ en (x_0,y_0) y el eje x, se tiene $\|P\| = \|Q\|$.



Propongo una parametrización $\gamma: I \to \mathbb{R}^2 \,/\, \gamma(x) = (x, f(x))$.

Recuerdo:

$$T(t) = t(1, f'(x_0)) + (x_0, y_0)$$
$$N(t) = t(-f'(x_0), 1) + (x_0, y_0)$$

$$\longrightarrow P = -x_0(1, f'(x_0)) + (x_0, y_0) = (0, -x_0 f'(x_0) + y_0)$$
$$Q = -y_0(-f'(x_0), 1) + (x_0, y_0) = (y_0 f'(x_0) + x_0, 0)$$

Quiero:
$$\|P\| = \|Q\|$$
$$|y_0 f'(x_0) + x_0| = |-x_0 f'(x_0) + y_0| \ \left(\text{para todo } (x_0,y_0)\right).$$

Tengo que resolver:
$$\begin{cases} |f(x) f'(x) + x| = |-x f'(x) + f(x)| \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

$$(1) \begin{cases} f(x) f'(x) + x = -x f'(x) + f(x) \\ f(1) = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} f \cdot f' + x = x f' - f \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

(1) $f' = \dfrac{f-x}{f+x}$

→ Es una ecuación homogénea.

$(xu = f \quad u = \frac{f}{x}) \qquad (x \neq 0)$

$$u + xu' = \frac{xu - x}{xu + x} = \frac{u-1}{u+1}$$

$$xu' = \frac{u - 1 - u^2 - u}{u+1} = -\frac{u^2+1}{u+1}$$

$$\frac{(u+1)\,u'}{u^2+1} = -\frac{1}{x}$$

⋮ ⊛

$$\boxed{2\operatorname{arctg}\left(\frac{f}{x}\right) + \ln(x^2+f^2) = \frac{\pi}{2} + \ln(2)}$$

(2) $$\boxed{2\operatorname{arctg}\left(\frac{f}{x}\right) - \ln(x^2+f^2) = \frac{\pi}{2} - \ln(2)}$$

Si me olvido de la condición inicial, las soluciones son las curvas de nivel de

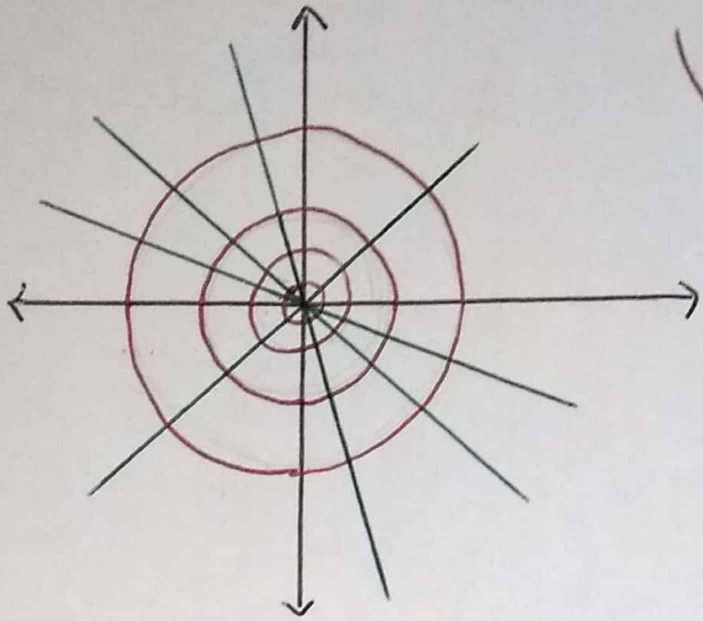
$$f(x,y) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \ln(x^2+y^2).$$

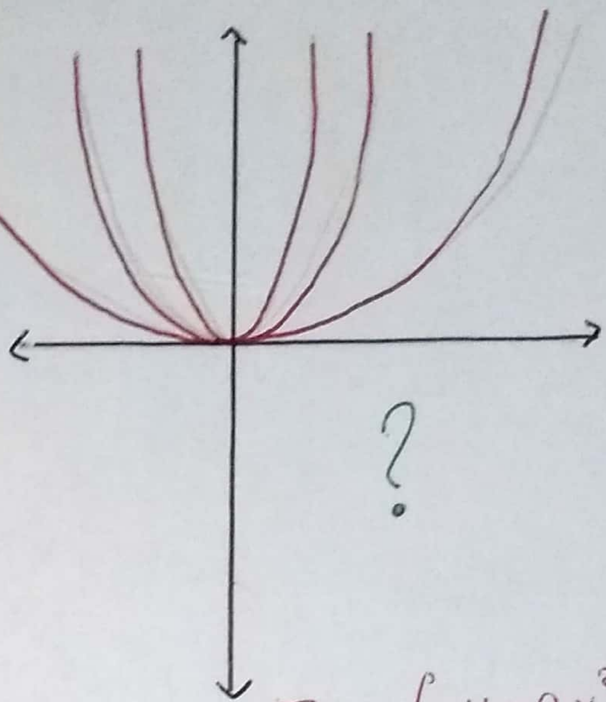
⊛ $$\int \frac{u+1}{u^2+1}\,du = \int \frac{u}{u^2+1}\,du + \underbrace{\int \frac{1}{u^2+1}\,du}_{\operatorname{arctg}(u)}$$

$z = u^2+1$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2}\ln(z) = \frac{1}{2}\ln(u^2+1)$$

Trayectorias ortogonales





$C_r = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=r^2\}$

$\perp\downarrow$ $L_\lambda = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=\lambda x\}$

$\mathcal{C}_a = \{y=ax^2\}$

$\mathcal{C}'_b = ?$

Problema: Dada una familia de curvas $\mathcal{C}_a$, quiero hallar una curva (o muchas) $\mathcal{C}'$ que interse-que a cada $\mathcal{C}_a$ de forma ortogonal.

- Si la familia $\mathcal{C}_a$ está dada por las curvas de nivel de una función $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{C}_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=a\}$$

→ sabemos: $\nabla f(x_0,y_0) \perp \mathcal{C}_a$ en el punto (x_0,y_0).

$\Longrightarrow$ Quiero que la recta tg a $\mathcal{C}'$ en (x_0,y_0) tenga la dirección $\nabla f(x_0,y_0)$.

Si supongo que puedo parametrizar a $\mathcal{E}'$ como $(x_0, y(x_0))$, entonces quiero

$$(1, y'(x_0)) \parallel \nabla f(x_0, y_0) \quad \text{en cada punto } (x_0, y_0)$$

Ej: $\mathcal{E}_a = \{ \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)} = a \}$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

Quiero $(2x, 2y) \parallel (1, y'(x))$

$$(2x, 2y) = \lambda (1, y'(x)).$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda y'(x) \end{cases}$$

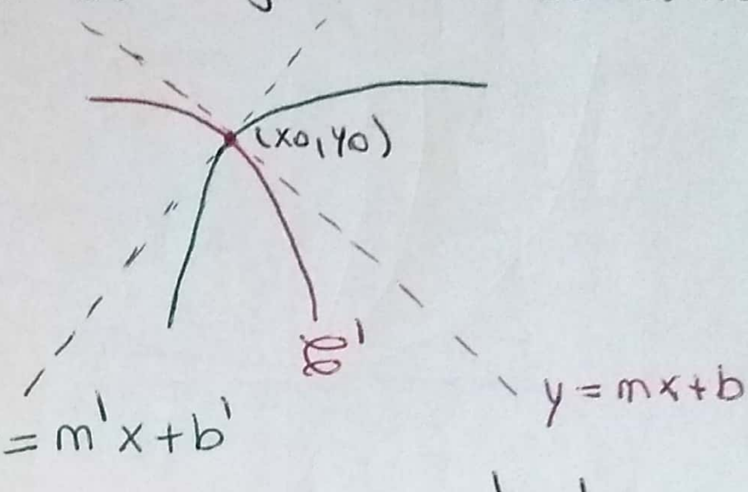
→ Tengo que resolver $2y = 2x\, y'(x)$

$$\frac{1}{x} = \frac{y'}{y}$$

$\vdots$

$$y(x) = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

- Si la familia $\mathcal{C}_a$ es el conjunto de soluciones de una EDO



$\star \quad y' = f(x, y).$

Son $\perp$ si $m' = \frac{-1}{m}$.

En nuestro caso, $m = y'(x_0) \underset{\star}{=} f(x_0, y_0)$.

Entonces si $(x, y(x))$ es una parametrización de $\mathcal{C}'$, debe satisfacer

$$y'(x_0) = \frac{-1}{y'(x_0)} = \frac{-1}{f(x_0, y_0)} \quad (\text{para todo } (x_0, y_0))$$

$$\longrightarrow \blacksquare \quad y' = \frac{-1}{f(x, y)}.$$

Ej: $\mathcal{C}_a = \{ y = ax^n \} \quad (n \in \mathbb{Z})$

Las curvas de $\mathcal{C}_a$ satisfacen $y' = n a x^{n-1}$

$$y' = n \frac{y}{x^n} x^{n-1}$$

$$\star \quad y' = \frac{ny}{x}$$

Luego, si $(x, y(x))$ es ortogonal a todas las curvas en $\mathcal{C}_a$ debe cumplir

$$\blacksquare \quad y' = \frac{-x}{ny}.$$

$$n y y' = -x$$

$$n \int y \, dy = -\int x \, dx$$

$$n \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + b$$

$$\boxed{x^2 + n y^2 = 2b}$$ (elipses)

$$x^2 + \left(\frac{y}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}\right)^2 = 2b$$

- Consideremos una ecuación homogénea de grado cero

$$\star \quad y'_{(x)} = f(x, y_{(x)}). \qquad f \in C^2.$$

(a) Pruebe que si $y(x)$ es solución, entonces para cada λ se tiene que la función

$$y(x) = \lambda\, y\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

también lo es.

(b) Muestre que una recta que pasa por el origen interseca a todos los gráficos de las soluciones de $\star$ con el mismo ángulo.

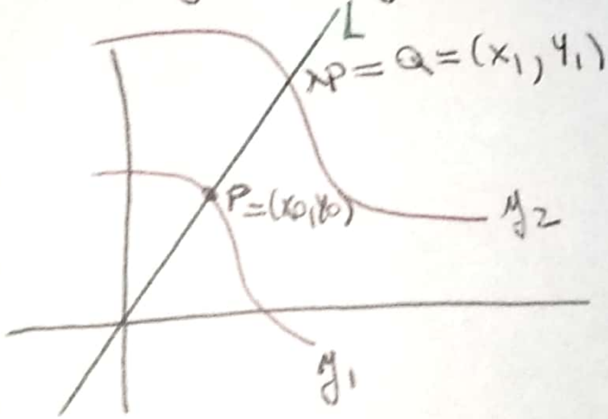
Solución: (a) veamos que $y(x)$ es sol. de $\star$:

$$\underline{y'(x)} = \lambda y'\left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\lambda} = y'\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\overset{\star}{=} f\left(\frac{x}{\lambda}, y\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$$\underset{f\ \text{hom.}}{\overset{\text{mult. por } \lambda}{=}} f\left(x, \lambda y\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = \underline{f(x, y(x))}. \checkmark$$

(b) Sea $L = \langle v \rangle$ una recta que pasa por el origen e y_1, y_2 dos soluciones de $\star$.



Supongamos que L interseca al gráfico de y_1 en el punto P y al gráfico de y_2 en el punto Q.

$$\Rightarrow \lambda P = Q.$$

veamos que $y_2(x) = \lambda\, y_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$:

- $\lambda y_1(\frac{x}{\lambda})$ es sol $\star$ ✓ (a).
- $\lambda y_1(\frac{x_1}{\lambda}) = \lambda y_1(x_0) = \lambda y_0 = y_1$ (cond. inicial)

Luego, por unicidad de la solución debe ser

$$y_2(x) = \lambda y_1(\frac{x}{\lambda}).$$

Así, la recta tangente al gráfico de y_2 en (x_1, y_1) tiene dirección $(1, y_2'(x_1)) = (1, \lambda y_1'(\frac{x_1}{\lambda}) \cdot \frac{1}{\lambda})$

$$= (1, y_1'(x_0)),$$

que es la dirección de la recta tangente al gráfico de y_1 en (x_0, y_0).