Clase Práctica: Práctica 2 - Superficies

Área de superficies

Recuerdo: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, inyectiva, excepto, quizá en la frontera de D, C^1. Entonces

$$A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv,$$

siendo T_u y T_v las derivadas parciales de T.

Ejercicio: 1) Calcular el área del cono truncado

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, \ 2 \leq z \leq 6\}$$

Resolución: Parametrizamos S con $T(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta), r)$ y $D = [2, 6] \times [0, 2\pi]$

- $T(D) = S$: es claro que $T(D) \subseteq S$. Para ver $S \subseteq T(D)$

Dado $(x, y, z) \in S$ basta tomar $r = z \in [2, 6]$, luego $x^2 + y^2 = r^2$, como (x, y) está en una circunferencia de radio r, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$x = r\cos(\theta) \quad y = r\,\text{sen}(\theta)$.

- T es C^1
- T inyectiva (excepto en el borde)

$$T(r, \theta) = T(r', \theta') \iff r = r' \text{ y } \begin{cases} r\cos(\theta) = r'\cos(\theta') \\ r\,\text{sen}(\theta) = r'\,\text{sen}(\theta') \end{cases}$$

luego $\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\theta') \end{cases} \iff \theta = \theta' \quad \left(\begin{matrix}\theta = 0 \\ \theta' = 2\pi\end{matrix}\right)$

luego $$A(S) = \int_2^6 \int_0^{2\pi} \| T_r \times T_\theta \| \, d\theta \, dr$$

- $T_r(r,\theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 1)$
- $T_\theta(r,\theta) = (-r\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\theta), 0)$
- $T_r \times T_\theta (r,\theta) = (-r\cos(\theta), -r\operatorname{sen}(\theta), r)$
- $\| T_r \times T_\theta \| = (r^2\cos^2(\theta) + r^2\operatorname{sen}^2(\theta) + r^2)^{1/2}$
  $= (2r^2)^{1/2} = \sqrt{2}\, r \quad (r > 0)$
- $A(S) = \displaystyle\int_2^6 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, r \, d\theta \, dr = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_2^6 = 32\sqrt{2}\,\pi$

2) Calcular el área del toro dado por la ecuación: $z^2 = 4 - (4 - \sqrt{x^2+y^2})^2$

Resolución: Parametrizamos la superficie con

$\Phi(u,v) = ((4 + 2\cos(u))\operatorname{sen}(v), (4 + 2\cos(u))\cos(v), 2\operatorname{sen}(u))$

(Ver ejercicio 2.b)) $\qquad D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

- Φ es C^1,
- Φ es inyectiva (Excepto en el borde):

Si $\Phi(u,v) = \Phi(u',v')$ entonces:

$$\begin{cases} (4 + 2\cos(u))\operatorname{sen}(v) = (4 + 2\cos(u'))\operatorname{sen}(v') & (1) \\ (4 + 2\cos(u))\cos(v) = (4 + 2\cos(u'))\cos(v') & (2) \end{cases}$$

haciendo $(1)^2 + (2)^2$ obtenemos

$$(4+2\cos(u))^2 = (4+2\cos(u'))^2 \quad \text{luego}$$

$$\Rightarrow \quad 4+2\cos(u) = 4+2\cos(u') \Rightarrow \cos(u) = \cos(u')$$

Por la tercer coordenada: $\begin{cases} \cos(u) = \cos(u') \\ \operatorname{sen}(u) = \operatorname{sen}(u') \end{cases}$

Entonces: $u = u'$ (o bien $u=0$, $u'=2\pi$)

Volviendo a (1) y (2) y usando que $4+2\cos(u)>0$

$$\begin{cases} \cos(v) = \cos(v') \\ \operatorname{sen}(v) = \operatorname{sen}(v') \end{cases} \Rightarrow v = v' \text{ (o bien } v=0,\ v'=2\pi)$$

luego

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \| \Phi_u \times \Phi_v \| \, du\, dv$$

- $\Phi_u = (-2\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v), -2\operatorname{sen}(u)\cos(v), 2\cos(u))$

- $\Phi_v = ((4+2\cos(u))\cos(v); -(4+2\cos(u))\operatorname{sen}(v), 0)$

- $\Phi_u \times \Phi_v$:

1ra coordenada: $+2\cos(u)(4+2\cos(u))\operatorname{sen}(v)$ (1)

2da coordenada: $+2\cos(u)(4+2\cos(u))\cos(v)$ (2)

3ra coordenada: $2\operatorname{sen}(u)(4+2\cos(u))$ (3)

- $\| \Phi_u \times \Phi_v \| = ((1)^2 + (2)^2 + (3)^2)^{1/2}$

$(1)^2 = 4\cos^2(u)(4+2\cos(u))^2\operatorname{sen}^2(v)$

$(2)^2 = 4\cos^2(u)(4+2\cos(u))^2\cos^2(v)$

$\Big\} + = 4\cos^2(u)(4+2\cos(u))^2$

$(3)^2 = 4\operatorname{sen}^2(u)\,.\,(4+2\cos(u))^2$

Luego: $\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \left(4(4+2\cos(u))^2\right)^{1/2} = 2.(4+2\cos(u))$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 2.(4+2\cos(u))\,du\,dv$$

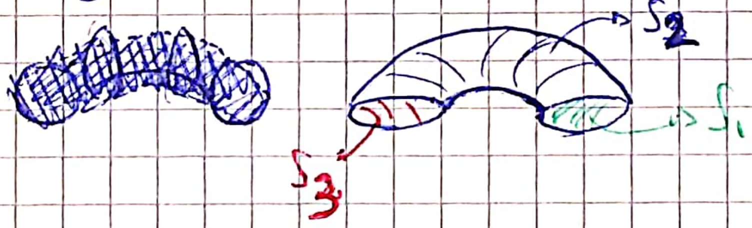
$$= 2.\,2\pi\,.\int_0^{2\pi} 4+2\cos(u)\,du = 4\pi.\left(4u+2\,\mathrm{sen}(u)\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 32\pi^2$$

3) Calcular el área de S, el borde de la región

$$R = \left\{(x,y,z) : z^2 \leq 4-\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 , \ x \leq 0\right\}$$

Resolución: La región R es media rosca y su borde S:



podemos escribirlo como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ siendo

S_2 el medio toro: $z^2 \leq 4-\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$, $x \leq 0$

S_1 la circunferencia: $z^2+(4-y)^2 \leq 4$ (si $y>0$)

S_3 la circunferencia: $z^2+(4+y)^2 \leq 4$ (si $y<0$)

Luego tenemos que

$$A(S) = A(S_1)+A(S_2)+A(S_3)$$

$$= \pi.4 + \frac{32}{2}\pi^2 + \pi.4 = 8\pi + 16\pi^2.$$

4) Dada la superficie

$$S = \{ (x, y, z) : z = x + y^2 , 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \}$$

a) Calcular el área de S

b) Integrar la función $g(x,y,z) = z - x$ sobre S

Observación: si $S = \text{Graf}(f) = \{ (x, y, f(x,y)) : (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \}$ con $f \in C^1$. Entonces:

$T(x, y) = (x, y, f(x,y))$ es una parametrización inyectiva, C^1, $T_x(x,y) = (1, 0, f_x(x,y))$, $T_y(x,y) = (0, 1, f_y(x,y))$

y $T_x \times T_y (x,y) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$.

Recuerdo: la integral de una función $g(x,y,z)$ sobre una superficie S, parametrizada por $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ se define:

$$\int_S g \, dS = \iint_D g \circ T(x,y) \cdot \| T_x \times T_y \| \, dx \, dy .$$

Resolución: si consideramos $f(x,y) = x + y^2$ (C^1)

y $D = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \}$

Entonces $S = \text{Graf}(f|_D)$.

Luego $T(x,y) = (x, y, x + y^2)$ es una parametrización de S. $T_x \times T_y (x,y) = (-1, -2y, 1)$ y por lo tanto

a) $A(S) = \iint_D \|(-1,-2y,1)\|\, dx\,dy$

$$= \int_0^1 \int_0^y \sqrt{2+4y^2}\, dx\,dy = \int_0^1 y\sqrt{2+4y^2}\, dy$$

$$\underset{\substack{u=4y^2+2 \\ du=8y\,dy}}{=} \frac{1}{8}\int_2^6 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_2^6 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

b) $\int_S g\, dS = \iint_D g\circ T(x,y)\, \|T_x \times T_y\|\, dx\,dy$

$$= \int_0^1 \int_0^y (x+y^2-x)\cdot\sqrt{2+4y^2}\, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y y^2\sqrt{2+4y^2}\, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 y^3\sqrt{2+4y^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{32}\int_2^6 (u-2)\sqrt{u}\, du$$

$u = 4y^2+2$

$du = 8y\,dy$

$\frac{1}{4}(u-2) = y^2$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - 2\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_2^6$$

$$= \frac{9}{20}\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{20} + \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{30}$$