ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

LINEALIZACIÓN

Retomamos ahora el estudio de

$$x'(t) = F(x(t)) \qquad (*)$$

donde $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Recordemos que un punto crítico (también llamado "punto de equilibrio") de $(*)$ es cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x_0) = 0$; y que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sea un punto de equilibrio de $(*)$ es equivalente a que la función constante dada por $x(t) = x_0$ sea la solución de $(*)$ que satisface $x(0) = x_0$.

Ya mencionamos que "cerca" de los puntos de equilibrio, el diagrama de fases de (*) es "parecido" al de un sistema lineal con coeficientes constantes, para los cuales ya sabemos dar con presición el diagrama de fases. A continuación estudiaremos esto con más detalle.

Diremos que un punto de equilibrio x_0 es "estable" si cualquier curva solución que inicia "cerca" de x_0, permanece "cerca" para todo t; y diremos que x_0 es "inestable" si existen curvas solución que se inician arbitrariamente "cerca" de x_0 pero se "alejan" de x_0 conforme aumenta t. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

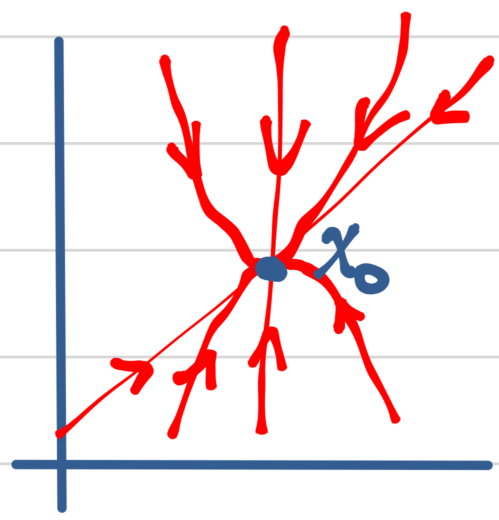
DEFINICIÓN Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto de equilibrio de $(*)$.

a) Decimos que x_0 es "estable" si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$ entonces la solución de $(*)$ que cumple $x(0) = \tilde{x}_0$ satisface $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.

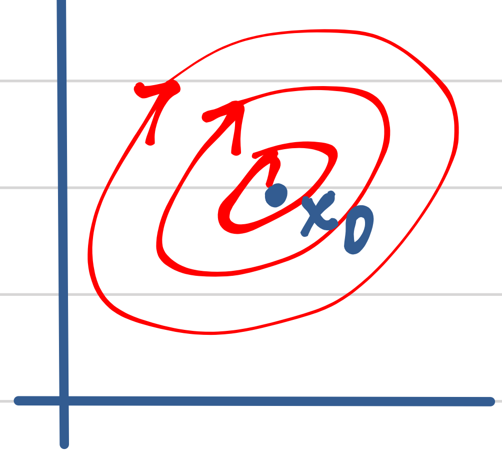
b) Decimos que x_0 es "asintóticamente estable" si x_0 es estable y existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta_0$ entonces la solución de $(*)$ que cumple $x(0) = \tilde{x}_0$ satisface $x(t) \to x_0$ si $t \to \infty$.

c) Decimos que x_0 es "inestable" si no es estable.

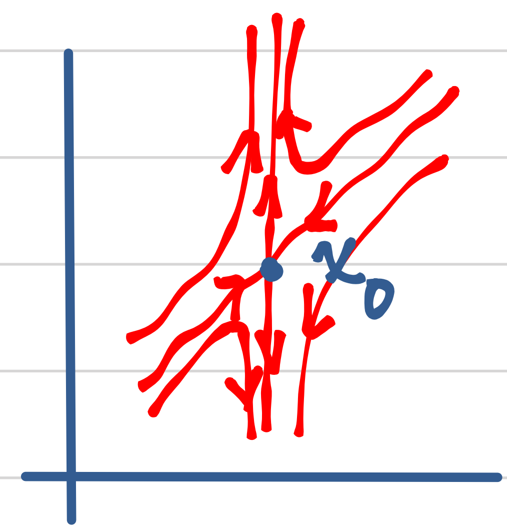
EJEMPLO



x_0 es asintóticamente estable



x_0 es estable pero no asintóticamente estable



x_0 es inestable

Ahora observemos lo siguiente. Si x_0 es un punto de equilibrio de $(*)$ entonces, para x "cercano" a x_0 se tiene

$$F(x) \simeq \underbrace{F(x_0)}_{=0} + DF(x_0)(x - x_0) = DF(x_0)(x - x_0)$$

donde $DF(x_0)$ es la matriz Jacobiana de F en x_0. Luego, si x es solución de $(*)$ y anotamos $y(t) = x(t) - x_0$, vemos que

$$y'(t) = (x(t) - x_0)' = x'(t) = F(x(t))$$
$$\simeq DF(x_0)(x(t) - x_0) = DF(x_0)y(t)$$

si $y(t) \simeq 0$. A partir de esto parece que, para $x(t)$ "cercano" a x_0, $x(t) - x_0$ se comporta como $y(t)$ "cerca" de 0, siendo y solución de

$$y'(t) = DF(x_0)\, y(t) \qquad (**)$$

Notar que este último sistema es lineal y tiene coeficientes constantes. El siguiente teorema asegura que nuestra impresión es correcta si los autovalores de $DF(x_0)$ no son imaginarios puros.

<u>TEOREMA</u> (Estabilidad lineal) Sea $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

es un conjunto abierto, y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(x_0) = 0$.

a) Si $DF(x_0)$ no tiene autovalores con parte real nula entonces el diagrama de fases de (*) "cerca" de x_0 es "parecido" al diagrama de fases de (**) "cerca" de $y_0 = 0$. Más precisamente, existe una biyección continuamente diferenciable con inversa continuamente diferenciable entre un entorno de x_0 y un entorno de $y_0 = 0$ que mapea curvas solución de (*) en curvas solución de (**), preservando su orientación.

b) Si todos los autovalores de $DF(x_0)$

tienen parte real negativa, entonces x_0 es asintóticamente estable.

c) Si todos los autovalores de $DF(x_0)$ tienen parte real positiva, entonces x_0 es inestable. Más aún, todas las curvas solución tienden a x_0 si $t \to -\infty$ y se alejan si $t \to +\infty$.

d) Si alguno de los autovalores de $DF(x_0)$ tiene parte real positiva y ninguno tiene parte real nula, entonces x_0 es inestable. Más aún, si $n=2$ y $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ son los autovalores de $DF(x_0)$ entonces hay dos curvas solución que tienden a x_0 cuando $t \to +\infty$, las cuales son tangentes en x_0 a la recta de autovectores de λ_2; y hay dos curvas solución que tienden a x_0 cuando $t \to -\infty$, las cuales son tangentes en x_0 a la recta de autovectores de λ_1. Todas las demás curvas solución que pasan cerca de x_0, se alejan de x_0 tanto si $t \to +\infty$ como si $t \to -\infty$.

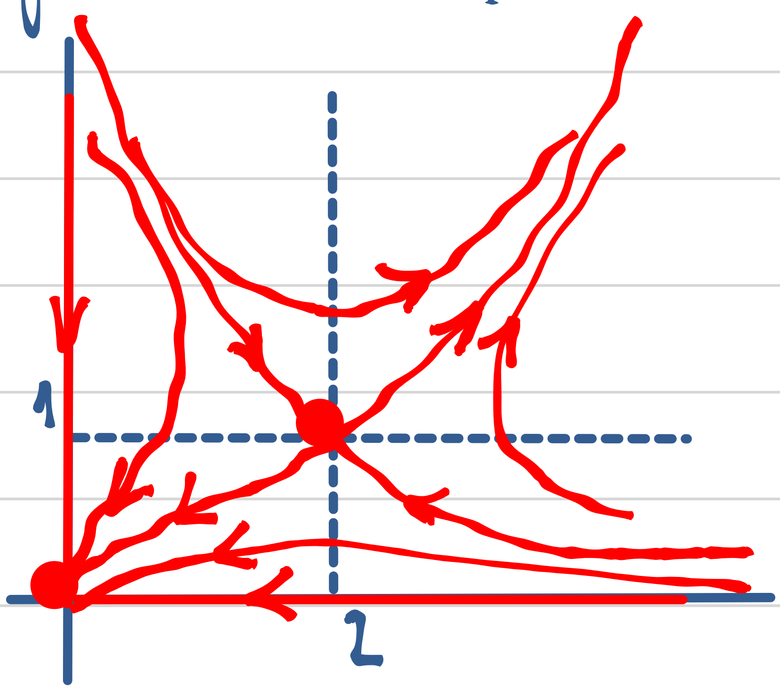
<u>DEMOSTRACION</u> No la hacemos. $\blacksquare$

En el siguiente ejemplo vamos a aplicar el teorema anterior para determinar el diagrama de fases de un sistema no lineal cerca de sus puntos de equilibrio.

<u>EJEMPLO</u> Consideremos, nuevamente, el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = (-1+y(t))\,x(t) \\ y'(t) = (-2+x(t))\,y(t) \end{cases}$$

Ya habíamos visto que los únicos puntos de equilibrio de este sistema son $(0,0)$ y $(2,1)$; y habíamos conjeturado que el diagrama de fases es de la forma



Veamos que, cerca de los puntos de equilibrio, el diagrama es efectivamente así.

Para ello, definimos F por

$$F(x,y) = \big((-1+y)x,\ (-2+x)y\big)$$

y calculamos su matriz Jacobiana:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left((-1+y)x\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left((-1+y)x\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left((-2+x)y\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left((-2+x)y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+y & x \\ y & -2+x \end{pmatrix}$$

Analicemos qué ocurre en las cercanías de $(0,0)$. Como los autovalores de

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$, vemos que $DF(0,0)$ tiene todos sus autovalores con parte real negativa. Por lo tanto, $(0,0)$ es un equilibrio asintóticamente estable, tal como habíamos conjeturado.

Veamos ahora qué ocurre en las cercanías de $(2,1)$. Como los autovalores de

$$DF(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = \sqrt{2}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ (raíces de $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$)

vemos que $DF(2,1)$ tiene un autovalor con parte real positiva y otro con parte real negativa. Luego, $(2,1)$ es un equilibrio inestable. Más aún, sabemos que hay dos trayectorias que tienden a $(2,1)$ cuando $t \to +\infty$ y que éstas son tangentes en $(2,1)$ a la recta de autovectores de $\lambda_2 = -\sqrt{2}$; que hay dos trayectorias que tienden a $(2,1)$ si $t \to -\infty$ y que estas son tangentes en $(2,1)$ a la recta de autovectores de $\lambda_1 = \sqrt{2}$; y que todas las demás curvas se alejan de $(2,1)$ tanto si $t \to +\infty$

como si $t \to -\infty$. Se deja como ejercicio deducir que la recta de autovectores asociados a $\lambda_1 = \sqrt{2}$ está dada por $y = \frac{\sqrt{2}}{2} x$, y que la recta de autovectores asociados a $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ tiene por ecuación $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} x$. Por lo tanto, el diagrama de fases del sistema en las cercanías de $(2,1)$ es de la forma que habíamos conjeturado.

Así obtenemos