Integrales de longitud de arco/ Integrales curvilíneas

24 de marzo de 2021

Contenidos

Tabla de Contenidos

Introducción

Sea $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ con $d = 2$ o $d = 3$ una curva suave y simple (o cerrada). Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una parametrización regular y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua (en realidad basta con que f esté definida sobre $\boldsymbol{C}$). Definimos la integral de longitud de arco de f sobre $\boldsymbol{C}$ por

Introducción

Sea $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ con $d = 2$ o $d = 3$ una curva suave y simple (o cerrada). Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una parametrización regular y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua (en realidad basta con que f esté definida sobre $\boldsymbol{C}$). Definimos la integral de longitud de arco de f sobre $\boldsymbol{C}$ por

Definición

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds := \int_a^b f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt$$

Introducción

Sea $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ con $d = 2$ o $d = 3$ una curva suave y simple (o cerrada). Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ una parametrización regular y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua (en realidad basta con que f esté definida sobre $\boldsymbol{C}$). Definimos la integral de longitud de arco de f sobre $\boldsymbol{C}$ por

Definición

$$\int_{\boldsymbol{C}} f \, ds := \int_a^b f(\sigma(t))||\sigma'(t)|| \, dt$$

Observación

¡La definición anterior no depende de la parametrización!

- Si la curva $\boldsymbol{C}$ es suave a trozos o $f \circ \sigma$ es continua a trozos, definimos $\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds$ en cada uno de los pedazos y sumamos.

- Si la curva $\boldsymbol{C}$ es suave a trozos o $f \circ \sigma$ es continua a trozos, definimos $\int_{\boldsymbol{C}} f \, ds$ en cada uno de los pedazos y sumamos.
- Si $f \equiv 1$, entonces

$$\int_{\boldsymbol{C}} ds = \int_a^b ||\sigma'(t)|| \, dt = \text{Long}(\boldsymbol{C}).$$

Posibles interpretaciones

Posible interpretación física:
Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ describe un alambre en el espacio y $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ describe la densidad de masa del alambre, es decir, si para cada $(x, y, z) \in \boldsymbol{C}$ la cantidad $\rho(x, y, z)$ representa la densidad de masa en dicho punto, entonces podemos calcular la masa total $\boldsymbol{M}$ del alambre de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{M} = \int_{\boldsymbol{C}} \rho \, ds.$$

Posibles interpretaciones

Posible interpretación física:
Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ describe un alambre en el espacio y $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ describe la densidad de masa del alambre, es decir, si para cada $(x, y, z) \in \boldsymbol{C}$ la cantidad $\rho(x, y, z)$ representa la densidad de masa en dicho punto, entonces podemos calcular la masa total $\boldsymbol{M}$ del alambre de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{M} = \int_{\boldsymbol{C}} \rho \, ds.$$

Recordar que debemos parametrizar la curva.

Interpretación geométrica:
Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una curva plana, podemos pensar $\boldsymbol{C} \subseteq \{z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es no negativa y $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización regular, entonces

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}\, dt$$

representa el área de la pared cuya base está dada por la curva $\boldsymbol{C}$ y en cada punto $(x, y) \in \boldsymbol{C}$ la altura de la pared está dada por $f(x, y)$.

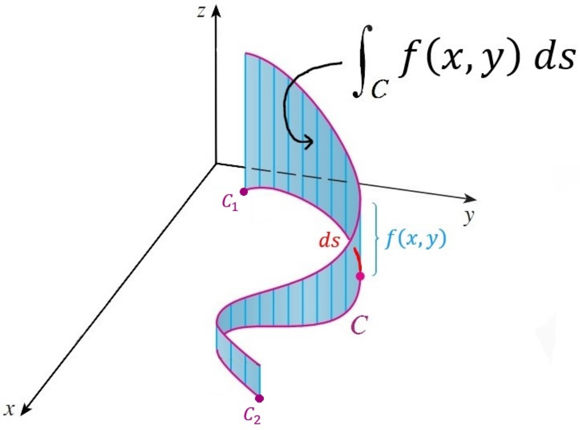

z
$\int_C f(x,y)\,ds$
C_1
y
ds
$f(x,y)$
C
x
C_2

Tabla de Contenidos

Ejercicio 1

Sea $\boldsymbol{C}$ la hélice, que se puede parametrizar por $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, donde $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular

$$\int_{\boldsymbol{C}} f \, ds.$$

Solución:

Solución: Recordemos que

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt.$$

Solución: Recordemos que

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt.$$

Para esto, necesitamos calcular primero $f(\sigma(t))$ y $||\sigma'(t)||$.

Solución: Recordemos que

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t)) ||\sigma'(t)||\, dt.$$

Para esto, necesitamos calcular primero $f(\sigma(t))$ y $||\sigma'(t)||$. Como $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, entonces $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ (notar que nunca se anula).

Solución: Recordemos que

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt.$$

Para esto, necesitamos calcular primero $f(\sigma(t))$ y $||\sigma'(t)||$. Como $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, entonces $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ (notar que nunca se anula). Luego,

$$||\sigma'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Solución: Recordemos que

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\,dt.$$

Para esto, necesitamos calcular primero $f(\sigma(t))$ y $||\sigma'(t)||$. Como $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, entonces $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ (notar que nunca se anula). Luego,

$$||\sigma'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Por otro lado,

$$f \circ \sigma(t) = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2.$$

Con esto ya estamos en condiciones de calcular $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$:

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t)) ||\sigma'(t)||\, dt =$$

Con esto ya estamos en condiciones de calcular $\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds$:

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2)\, dt$$

Con esto ya estamos en condiciones de calcular $\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds$:

$$\int_{\boldsymbol{C}} f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2)\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi\left(1 + \frac{4}{3}\pi\right).$$

Tabla de Contenidos

Ejercicio 2

Supongamos que la curva que resulta de intersecar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con el plano $4x = 3y$ está hecha de un alambre que tiene densidad de masa dada por $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$. Hallar M la masa total del alambre.

Solución:

Solución:

Recordemos que podemos calcular la masa de la siguiente manera:

$$M = \int_{\boldsymbol{C}} \rho \, ds,$$

donde

$$\boldsymbol{C} = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = & 25 \\ 4x = & 3y \end{cases}$$

Solución:
Recordemos que podemos calcular la masa de la siguiente manera:

$$M = \int_{\boldsymbol{C}} \rho \, ds,$$

donde

$$\boldsymbol{C} = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = & 25 \\ 4x = & 3y \end{cases}$$

¿Cómo parametrizamos $\boldsymbol{C}$?

Solución:
Recordemos que podemos calcular la masa de la siguiente manera:

$$M = \int_{\boldsymbol{C}} \rho \, ds,$$

donde

$$\boldsymbol{C} = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = & 25 \\ 4x = & 3y \end{cases}$$

¿Cómo parametrizamos $\boldsymbol{C}$? Enumeremos las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \tag{1}$$

$$4x = 3y. \tag{2}$$

De la ecuación (2) tenemos que $y = \frac{4}{3}x$.

De la ecuación (2) tenemos que $y = \frac{4}{3}x$. Reemplazando en (1) obtenemos que:

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + z^2 = 25$$

y la podemos reescribir como

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 = 1.$$

De la ecuación (2) tenemos que $y = \frac{4}{3}x$. Reemplazando en (1) obtenemos que:

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + z^2 = 25$$

y la podemos reescribir como

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 = 1.$$

Notemos que es una elipse en el plano xz, por lo que la podemos parametrizar como $x(t) = 3\cos t$ y $z(t) = 5\sin(t)$.

De la ecuación (2) tenemos que $y = \frac{4}{3}x$. Reemplazando en (1) obtenemos que:

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + z^2 = 25$$

y la podemos reescribir como

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{5}\right)^2 = 1.$$

Notemos que es una elipse en el plano xz, por lo que la podemos parametrizar como $x(t) = 3\cos t$ y $z(t) = 5\sin(t)$. Como $y = \frac{4}{3}x$, nos queda

$$\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$.

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

- Es claro que todas las coordenadas son suaves. ✓

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

- Es claro que todas las coordenadas son suaves. ✓
- Veamos que la derivada no se anula.

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

- Es claro que todas las coordenadas son suaves. ✓
- Veamos que la derivada no se anula. Una técnica posible es la siguiente: recordando que $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, tenemos que $\sigma'(t) = (-3\sin t, -4\sin t, 5\cos t)$.

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

- Es claro que todas las coordenadas son suaves. ✓
- Veamos que la derivada no se anula. Una técnica posible es la siguiente: recordando que $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, tenemos que $\sigma'(t) = (-3\sin t, -4\sin t, 5\cos t)$.¿Cómo vemos que esa expresión horrible nunca es cero?

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

- Es claro que todas las coordenadas son suaves. ✓
- Veamos que la derivada no se anula. Una técnica posible es la siguiente: recordando que $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, tenemos que $\sigma'(t) = (-3\sin t, -4\sin t, 5\cos t)$.¿Cómo vemos que esa expresión horrible nunca es cero? Bueno, una forma es calculando la norma y ver que nunca es cero:

$$||\sigma'(t)|| = \sqrt{9\sin^2 t + 16\sin^2 t + 25\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \sqrt{25} = 5.$$

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

- Es claro que todas las coordenadas son suaves. ✓
- Veamos que la derivada no se anula. Una técnica posible es la siguiente: recordando que $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, tenemos que $\sigma'(t) = (-3\sin t, -4\sin t, 5\cos t)$.¿Cómo vemos que esa expresión horrible nunca es cero? Bueno, una forma es calculando la norma y ver que nunca es cero:

$$||\sigma'(t)|| = \sqrt{9\sin^2 t + 16\sin^2 t + 25\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \sqrt{25} = 5.$$

Como la derivada tiene norma 5 para todo valor de t, nunca puede ser $\sigma'(t) = 0$.

Habría que ver que es una parametrización regular de $\boldsymbol{C}$. Por única vez vamos a hacer todas las cuentas.

- Es claro que todas las coordenadas son suaves. ✓
- Veamos que la derivada no se anula. Una técnica posible es la siguiente: recordando que $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, tenemos que $\sigma'(t) = (-3\sin t, -4\sin t, 5\cos t)$.¿Cómo vemos que esa expresión horrible nunca es cero? Bueno, una forma es calculando la norma y ver que nunca es cero:

$$||\sigma'(t)|| = \sqrt{9\sin^2 t + 16\sin^2 t + 25\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{25\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \sqrt{25} = 5.$$

Como la derivada tiene norma 5 para todo valor de t, nunca puede ser $\sigma'(t) = 0$. Además esta cuenta la vamos a necesitar más adelante.

Ejercicio 2

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$).

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$). Notemos también que ninguna de las coordenadas de $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$ es inyectiva, así que vamos a tener que proceder de otra manera.

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$). Notemos también que ninguna de las coordenadas de $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$ es inyectiva, así que vamos a tener que proceder de otra manera. Sean $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ tales que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$.

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$). Notemos también que ninguna de las coordenadas de $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$ es inyectiva, así que vamos a tener que proceder de otra manera. Sean $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ tales que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. Todas las coordenadas de σ deben ser iguales, con lo cual

$$\begin{cases} 3\cos t_1 = 3\cos t_2 \\ 4\cos t_1 = 4\cos t_2 \\ 5\sin t_1 = 5\sin t_2 \end{cases}.$$

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$). Notemos también que ninguna de las coordenadas de $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$ es inyectiva, así que vamos a tener que proceder de otra manera. Sean $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ tales que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. Todas las coordenadas de σ deben ser iguales, con lo cual

$$\begin{cases} 3\cos t_1 = 3\cos t_2 \\ 4\cos t_1 = 4\cos t_2 \\ 5\sin t_1 = 5\sin t_2 \end{cases}.$$

Luego, debe ser $\cos t_1 = \cos t_2$ y $\sin t_1 = \sin t_2$.

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$). Notemos también que ninguna de las coordenadas de $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$ es inyectiva, así que vamos a tener que proceder de otra manera. Sean $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ tales que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. Todas las coordenadas de σ deben ser iguales, con lo cual

$$\begin{cases} 3\cos t_1 = 3\cos t_2 \\ 4\cos t_1 = 4\cos t_2 \\ 5\sin t_1 = 5\sin t_2 \end{cases}.$$

Luego, debe ser $\cos t_1 = \cos t_2$ y $\sin t_1 = \sin t_2$. Nuevamente, ni el seno ni el coseno son inyectivos en $[0, 2\pi)$; pero si $\cos t_1 = \cos t_2$, entonces $t_1 = t_2$ o $t_1 = 2\pi - t_2$.

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$). Notemos también que ninguna de las coordenadas de $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$ es inyectiva, así que vamos a tener que proceder de otra manera. Sean $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ tales que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. Todas las coordenadas de σ deben ser iguales, con lo cual

$$\begin{cases} 3\cos t_1 = 3\cos t_2 \\ 4\cos t_1 = 4\cos t_2 \\ 5\sin t_1 = 5\sin t_2 \end{cases}.$$

Luego, debe ser $\cos t_1 = \cos t_2$ y $\sin t_1 = \sin t_2$. Nuevamente, ni el seno ni el coseno son inyectivos en $[0, 2\pi)$; pero si $\cos t_1 = \cos t_2$, entonces $t_1 = t_2$ o $t_1 = 2\pi - t_2$. Similarmente si $\sin t_1 = \sin t_2$, entonces $t_1 = t_2$ o $t_1 = \pi - t_2$.

- Veamos la inyectividad en $[0, 2\pi)$ (notar que es una curva cerrada ya que $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$). Notemos también que ninguna de las coordenadas de $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$ es inyectiva, así que vamos a tener que proceder de otra manera. Sean $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ tales que $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. Todas las coordenadas de σ deben ser iguales, con lo cual

$$\begin{cases} 3\cos t_1 = 3\cos t_2 \\ 4\cos t_1 = 4\cos t_2 \\ 5\sin t_1 = 5\sin t_2 \end{cases}.$$

Luego, debe ser $\cos t_1 = \cos t_2$ y $\sin t_1 = \sin t_2$. Nuevamente, ni el seno ni el coseno son inyectivos en $[0, 2\pi)$; pero si $\cos t_1 = \cos t_2$, entonces $t_1 = t_2$ o $t_1 = 2\pi - t_2$. Similarmente si $\sin t_1 = \sin t_2$, entonces $t_1 = t_2$ o $t_1 = \pi - t_2$. En cualquier caso, la única combinación posible es que $t_1 = t_2$.

- Únicamente falta ver que $\mathrm{Im}(\sigma) = \boldsymbol{C}$.

- Únicamente falta ver que $\mathrm{Im}(\sigma) = \boldsymbol{C}$. Acá hay que ver tanto que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq \boldsymbol{C}$ como que $\boldsymbol{C} \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$.

- Únicamente falta ver que $\mathrm{Im}(\sigma) = \boldsymbol{C}$. Acá hay que ver tanto que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq \boldsymbol{C}$ como que $\boldsymbol{C} \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$. La parte más difícil, que es la segunda inclusión, ya la hicimos cuando obtuvimos la parametrización.

- Únicamente falta ver que $\text{Im}(\sigma) = \boldsymbol{C}$. Acá hay que ver tanto que $\text{Im}(\sigma) \subseteq \boldsymbol{C}$ como que $\boldsymbol{C} \subseteq \text{Im}(\sigma)$. La parte más difícil, que es la segunda inclusión, ya la hicimos cuando obtuvimos la parametrización. Efectivamente vimos que todos los $(x, y, z) \in \boldsymbol{C}$ son de la forma $(x, y, z) = \sigma(t)$ para algún $t \in [0, 2\pi]$.

- Únicamente falta ver que $\mathrm{Im}(\sigma) = \boldsymbol{C}$. Acá hay que ver tanto que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq \boldsymbol{C}$ como que $\boldsymbol{C} \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$. La parte más difícil, que es la segunda inclusión, ya la hicimos cuando obtuvimos la parametrización. Efectivamente vimos que todos los $(x, y, z) \in \boldsymbol{C}$ son de la forma $(x, y, z) = \sigma(t)$ para algún $t \in [0, 2\pi]$. Solamente nos falta ver la otra inclusión que es más fácil: si $(x, y, z) \in \mathrm{Im}(\sigma)$, entonces existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que $(x, y, z) = \sigma(t)$.

- Únicamente falta ver que $\mathrm{Im}(\sigma) = \boldsymbol{C}$. Acá hay que ver tanto que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq \boldsymbol{C}$ como que $\boldsymbol{C} \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$. La parte más difícil, que es la segunda inclusión, ya la hicimos cuando obtuvimos la parametrización. Efectivamente vimos que todos los $(x, y, z) \in \boldsymbol{C}$ son de la forma $(x, y, z) = \sigma(t)$ para algún $t \in [0, 2\pi]$. Solamente nos falta ver la otra inclusión que es más fácil: si $(x, y, z) \in \mathrm{Im}(\sigma)$, entonces existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que $(x, y, z) = \sigma(t)$. Habría que ver que en ese caso, dicho punto satisface las ecuaciones de $\boldsymbol{C}$, lo cual es muy sencillo por lo que se los dejo de tarea.

- Únicamente falta ver que $\mathrm{Im}(\sigma) = \boldsymbol{C}$. Acá hay que ver tanto que $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq \boldsymbol{C}$ como que $\boldsymbol{C} \subseteq \mathrm{Im}(\sigma)$. La parte más difícil, que es la segunda inclusión, ya la hicimos cuando obtuvimos la parametrización. Efectivamente vimos que todos los $(x, y, z) \in \boldsymbol{C}$ son de la forma $(x, y, z) = \sigma(t)$ para algún $t \in [0, 2\pi]$. Solamente nos falta ver la otra inclusión que es más fácil: si $(x, y, z) \in \mathrm{Im}(\sigma)$, entonces existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que $(x, y, z) = \sigma(t)$. Habría que ver que en ese caso, dicho punto satisface las ecuaciones de $\boldsymbol{C}$, lo cual es muy sencillo por lo que se los dejo de tarea.

Ahora nos queda únicamente calcular

$$\int_C \rho \, ds = \int_0^{2\pi} \rho(\sigma(t)) ||\sigma'(t)|| \, dt.$$

Por suerte ya calculamos $||\sigma'(t)||$ y vimos que da 5.

Por suerte ya calculamos $||\sigma'(t)||$ y vimos que da 5. Calculemos $\rho(\sigma(t))$.

Por suerte ya calculamos $||\sigma'(t)||$ y vimos que da 5. Calculemos $\rho(\sigma(t))$. Recordemos que $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$ y $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, con lo cual

$$\rho(\sigma(t)) = 1 + x(t)^2 + y(t)^2 = 1 + 9\cos^2 t + 16\cos^2 t = 1 + 25\cos^2 t.$$

Por suerte ya calculamos $||\sigma'(t)||$ y vimos que da 5. Calculemos $\rho(\sigma(t))$. Recordemos que $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$ y $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, con lo cual

$$\rho(\sigma(t)) = 1+x(t)^2+y(t)^2 = 1+9\cos^2 t+16\cos^2 t = 1+25\cos^2 t.$$

Luego,

$$\int_0^{2\pi} \rho(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} 5(1 + 25\cos^2 t)\, dt$$

Por suerte ya calculamos $||\sigma'(t)||$ y vimos que da 5. Calculemos $\rho(\sigma(t))$. Recordemos que $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2$ y $\sigma(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\sin t)$, con lo cual

$$\rho(\sigma(t)) = 1 + x(t)^2 + y(t)^2 = 1 + 9\cos^2 t + 16\cos^2 t = 1 + 25\cos^2 t.$$

Luego,

$$\int_0^{2\pi} \rho(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} 5(1 + 25\cos^2 t)\, dt$$

Para calcular dichas integrales vamos a necesitar $\int \cos^2 t\, dt$, que suele traer problemas. La vamos a resolver con partes (otra gente usa identidades trigonométricas).

Notemos que

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t}_{v'} \, dt =$$

Notemos que

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t}_{v'} \, dt = \cos t \, \sin t - \int \sin t(-\sin t) \, dt$$

$$=$$

Notemos que

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t}_{v'} \, dt = \cos t \; \sin t - \int \sin t(-\sin t) \, dt$$

$$= \cos t \; \sin t + \int \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} \; dt =$$

Notemos que

$$\int \cos^2 t\, dt = \int \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t}_{v'}\, dt = \cos t\, \sin t - \int \sin t(-\sin t)\, dt$$

$$= \cos t\, \sin t + \int \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\, dt = \cos t\, \sin t + \int 1\, dt - \int \cos^2 t\, dt.$$

Notemos que

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t}_{v'}\,dt = \cos t\,\sin t - \int \sin t(-\sin t)\,dt$$

$$= \cos t\,\sin t + \int \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\,dt = \cos t\,\sin t + \int 1\,dt - \int \cos^2 t\,dt.$$

Con lo cual,

$$\int \cos^2 t\,dt = \cos t\,\sin t + t - \int \cos^2 t\,dt$$

Notemos que

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{\cos t}_{v'}\,dt = \cos t\,\sin t - \int \sin t(-\sin t)\,dt$$

$$= \cos t\,\sin t + \int \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\,dt = \cos t\,\sin t + \int 1\,dt - \int \cos^2 t\,dt.$$

Con lo cual,

$$\int \cos^2 t\,dt = \cos t\,\sin t + t - \int \cos^2 t\,dt$$

y despejando $\int \cos^2 t\,dt$ obtenemos

$$\int \cos^2 t\,dt = \frac{\cos t\,\sin t + t}{2} + K.$$

Luego, la masa M está dada por

$$M = \int_0^{2\pi} 5(1+25\cos^2 t)\,dt = 5\left[t + 25\left(\frac{\cos t\ \sin t + t}{2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi} = 5{\cdot}27\pi.$$

Tabla de Contenidos

Integrales de Línea

Hagamos un breve repaso.

Integrales de Línea

Hagamos un breve repaso. Sean $I_1 := [a_1, b_1]$ e $I_2 := [a_2, b_2]$ dos intervalos y $h : I_1 \to I_2$ una biyección C^1 con derivada nunca nula.

Integrales de Línea

Hagamos un breve repaso. Sean $I_1 := [a_1, b_1]$ e $I_2 := [a_2, b_2]$ dos intervalos y $h : I_1 \to I_2$ una biyección C^1 con derivada nunca nula. Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una curva suave y $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ es una parametrización regular, entonces $\sigma_2 := \sigma_1 \circ h$ también es una parametrización regular.

Integrales de Línea

Hagamos un breve repaso. Sean $I_1 := [a_1, b_1]$ e $I_2 := [a_2, b_2]$ dos intervalos y $h : I_1 \to I_2$ una biyección C^1 con derivada nunca nula. Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una curva suave y $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ es una parametrización regular, entonces $\sigma_2 := \sigma_1 \circ h$ también es una parametrización regular. De hecho, se puede ver que todas las parametrizaciones se pueden obtener a partir de una parametrización fija de esta manera.

Integrales de Línea

Hagamos un breve repaso. Sean $I_1 := [a_1, b_1]$ e $I_2 := [a_2, b_2]$ dos intervalos y $h : I_1 \to I_2$ una biyección C^1 con derivada nunca nula. Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una curva suave y $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ es una parametrización regular, entonces $\sigma_2 := \sigma_1 \circ h$ también es una parametrización regular. De hecho, se puede ver que todas las parametrizaciones se pueden obtener a partir de una parametrización fija de esta manera.

- Si $\sigma_2(a_2) = \sigma_1(a_1)$ y $\sigma_2(b_2) = \sigma_1(b_1)$, decimos que σ_2 preserva la orientación dada por σ_1.

Integrales de Línea

Hagamos un breve repaso. Sean $I_1 := [a_1, b_1]$ e $I_2 := [a_2, b_2]$ dos intervalos y $h : I_1 \to I_2$ una biyección C^1 con derivada nunca nula. Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una curva suave y $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ es una parametrización regular, entonces $\sigma_2 := \sigma_1 \circ h$ también es una parametrización regular. De hecho, se puede ver que todas las parametrizaciones se pueden obtener a partir de una parametrización fija de esta manera.

- Si $\sigma_2(a_2) = \sigma_1(a_1)$ y $\sigma_2(b_2) = \sigma_1(b_1)$, decimos que σ_2 preserva la orientación dada por σ_1.
- Si $\sigma_2(a_2) = \sigma_1(b_1)$ y $\sigma_2(b_2) = \sigma_1(a_1)$ decimos que σ_2 invierte la orientación.

Integrales de Línea

Hagamos un breve repaso. Sean $I_1 := [a_1, b_1]$ e $I_2 := [a_2, b_2]$ dos intervalos y $h : I_1 \to I_2$ una biyección C^1 con derivada nunca nula. Si $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una curva suave y $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ es una parametrización regular, entonces $\sigma_2 := \sigma_1 \circ h$ también es una parametrización regular. De hecho, se puede ver que todas las parametrizaciones se pueden obtener a partir de una parametrización fija de esta manera.

- Si $\sigma_2(a_2) = \sigma_1(a_1)$ y $\sigma_2(b_2) = \sigma_1(b_1)$, decimos que σ_2 preserva la orientación dada por σ_1.
- Si $\sigma_2(a_2) = \sigma_1(b_1)$ y $\sigma_2(b_2) = \sigma_1(a_1)$ decimos que σ_2 invierte la orientación.

Cuando la curva es cerrada, tomar un punto en el medio.

Sea $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ una curva simple y suave (puede ser cerrada), orientada por una parametrización regular $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ y sea $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo continuo (podría estar definido únicamente sobre la curva $\boldsymbol{C}$), definimos la integral de línea de F sobre $\boldsymbol{C}$ (orientada por σ) por

Definición

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} := \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt.$$

Observación

En este caso no tenemos que la integral no depende de la parametrización, pero sí tenemos lo siguiente: Sea $\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ *una reparametrización de* $\boldsymbol{C}$*.*

- *Si* $\tilde{\sigma}$ *preserva la orientación de* σ*, entonces*

$$\int_c^d F(\tilde{\sigma}(s)) \cdot \tilde{\sigma}'(s)\, ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds}$$

Observación

En este caso no tenemos que la integral no depende de la parametrización, pero sí tenemos lo siguiente: Sea $\tilde{\sigma} : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ *una reparametrización de* $\boldsymbol{C}$*.*

- *Si* $\tilde{\sigma}$ *preserva la orientación de* σ*, entonces*

$$\int_c^d F(\tilde{\sigma}(s)) \cdot \tilde{\sigma}'(s)\, ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds}$$

- *Si* $\tilde{\sigma}$ *invierte la orientación de* σ*, entonces*

$$\int_c^d F(\tilde{\sigma}(s)) \cdot \tilde{\sigma}'(s)\, ds = -\int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = -\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds}$$

Observación

Si $\boldsymbol{C}$ *es suave a trozos, calculamos la integral sobre cada uno de los pedazos y sumamos.*

Observación

*Si **C** es suave a trozos, calculamos la integral sobre cada uno de los pedazos y sumamos.*

Una interpretación posible es que la integral

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

representa el trabajo realizado realizado por una fuerza F sobre una partícula que recorre una trayectoria $\boldsymbol{C}$ en el sentido indicado.

Observación

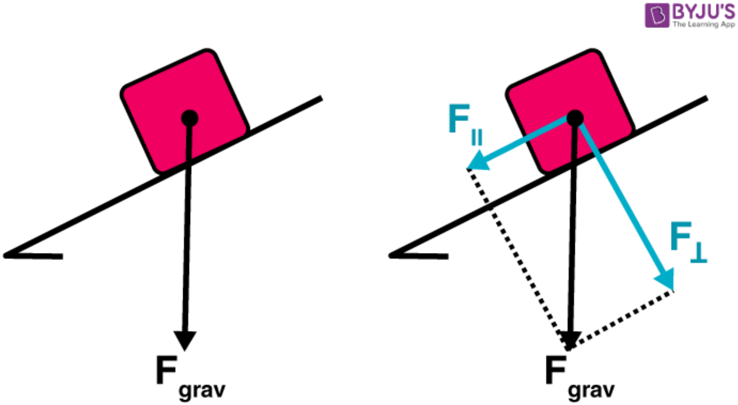
*Si **C** es suave a trozos, calculamos la integral sobre cada uno de los pedazos y sumamos.*

Una interpretación posible es que la integral

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

representa el trabajo realizado realizado por una fuerza F sobre una partícula que recorre una trayectoria $\boldsymbol{C}$ en el sentido indicado. Notar que para el trabajo únicamente importa la componente de la fuerza paralela a la dirección del desplazamiento (es decir, la componente tangencial).

Integrales de Línea



Por último, una cuestión de notación:

Por último, una cuestión de notación:
Supongamos que estamos en $\mathbb{R}^3$. Si escribimos el campo F de la siguiente forma

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

entonces notamos

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\boldsymbol{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Por último, una cuestión de notación:
Supongamos que estamos en $\mathbb{R}^3$. Si escribimos el campo F de la siguiente forma

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

entonces notamos

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\boldsymbol{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Así, si $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$ y $dz = z'(t)\,dt$, con lo cual

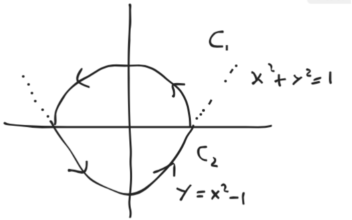
$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t)$$

$$+Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt.$$

Tabla de Contenidos

Ejercicio 3

Sea $\boldsymbol{C}$ la curva de la figura



Es decir, $\boldsymbol{C} = C_1 \cup C_2$ con
$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ y
$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1\}$ con la orientación del dibujo.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo $F(x, y) = (x - y, x + y)$. Calcular

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot ds = \int_{\boldsymbol{C}} (x - y)\, dx + (x + y)\, dy.$$

Solución:

Solución:

Notemos que va a ser difícil buscar una única parametrización para C.

Solución:

Notemos que va a ser difícil buscar una única parametrización para $\boldsymbol{C}$. Además, aunque en el dibujo queda claro que C_1 y C_2 son suaves, no queda tan claro si $\boldsymbol{C}$ lo es.

Solución:

Notemos que va a ser difícil buscar una única parametrización para $\boldsymbol{C}$. Además, aunque en el dibujo queda claro que C_1 y C_2 son suaves, no queda tan claro si $\boldsymbol{C}$ lo es. Pero no importa, porque si encontramos parametrizaciones regulares para C_1 y C_2, queda claro que $\boldsymbol{C}$ es suave a trozos y podemos calcular la integral del campo de la siguiente manera:

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \underbrace{\int_{C_1} F \cdot \boldsymbol{ds}}_{(A)} + \underbrace{\int_{C_2} F \cdot \boldsymbol{ds}}_{(B)}.$$

(A) Busquemos una parametrización para C_1.

(A) Busquemos una parametrización para C_1. C_1 es el hemisferio superior del círculo unitario con centro en el origen, así que tenemos que $\sigma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ es una parametrización regular de C_1.

(A) Busquemos una parametrización para C_1. C_1 es el hemisferio superior del círculo unitario con centro en el origen, así que tenemos que $\sigma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ es una parametrización regular de C_1.
¿Pero respeta la orientación del dibujo?

(A) Busquemos una parametrización para C_1. C_1 es el hemisferio superior del círculo unitario con centro en el origen, así que tenemos que $\sigma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ es una parametrización regular de C_1.

¿Pero respeta la orientación del dibujo? Sí, pues

- $\sigma_1(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$.
- $\sigma_1(\pi) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$.

(A) Busquemos una parametrización para C_1. C_1 es el hemisferio superior del círculo unitario con centro en el origen, así que tenemos que $\sigma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ es una parametrización regular de C_1.

¿Pero respeta la orientación del dibujo? Sí, pues

- $\sigma_1(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$.
- $\sigma_1(\pi) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$.

Juntemos la información necesaria para calcular (A):

- Como $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, entonces $\sigma_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

(A) Busquemos una parametrización para C_1. C_1 es el hemisferio superior del círculo unitario con centro en el origen, así que tenemos que $\sigma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ es una parametrización regular de C_1.

¿Pero respeta la orientación del dibujo? Sí, pues

- $\sigma_1(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$.
- $\sigma_1(\pi) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$.

Juntemos la información necesaria para calcular (A):

- Como $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, entonces $\sigma_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$.
- $F(x, y) = (x - y, x + y)$, con lo cual

$$F(\sigma_1(t)) = F(\cos t, \sin t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t).$$

Luego,

$$F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)$$

Luego,

$$F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)$$

$$= (\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t) \cos t$$

Luego,

$$F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)$$

$$= (\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t) \cos t$$

$$= -\sin t\ \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t\ \cos t = 1.$$

Luego,

$$F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t) = (\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)$$

$$= (\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t) \cos t$$

$$= -\sin t\ \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t\ \cos t = 1.$$

Luego,

$$(A) = \int_{C_1} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_0^{\pi} F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t)\, dt = \int_0^{\pi} 1\, dt = \pi$$

(B) Busquemos parametrización para C_2.

(B) Busquemos parametrización para C_2. Notemos que, como $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1\}$ describe el gráfico de una función en un intervalo, podemos parametrizarla de la siguiente manera:

(B) Busquemos parametrización para C_2. Notemos que, como $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1\}$ describe el gráfico de una función en un intervalo, podemos parametrizarla de la siguiente manera:
$\sigma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t) = (t, t^2 - 1)$.

(B) Busquemos parametrización para C_2. Notemos que, como $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1\}$ describe el gráfico de una función en un intervalo, podemos parametrizarla de la siguiente manera:
$\sigma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t) = (t, t^2 - 1)$. ¿Esta parametrización respeta la orientación del dibuo?

(B) Busquemos parametrización para C_2. Notemos que, como $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1\}$ describe el gráfico de una función en un intervalo, podemos parametrizarla de la siguiente manera:
$\sigma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t) = (t, t^2 - 1)$. ¿Esta parametrización respeta la orientación del dibuo? Sí, pues

- $\sigma_2(-1) = (-1, 0)$.
- $\sigma_2(1) = (1, 0)$.

(B) Busquemos parametrización para C_2. Notemos que, como $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1\}$ describe el gráfico de una función en un intervalo, podemos parametrizarla de la siguiente manera:
$\sigma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t) = (t, t^2 - 1)$. ¿Esta parametrización respeta la orientación del dibuo? Sí, pues

- $\sigma_2(-1) = (-1, 0)$.
- $\sigma_2(1) = (1, 0)$.

Calculemos todo lo necesario para obtener (B):
- $\sigma_2(t) = (t, t^2 - 1)$, con lo cual $\sigma_2'(t) = (1, 2t)$ (notar que es regular).

(B) Busquemos parametrización para C_2. Notemos que, como $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1\}$ describe el gráfico de una función en un intervalo, podemos parametrizarla de la siguiente manera:
$\sigma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_2(t) = (t, t^2 - 1)$. ¿Esta parametrización respeta la orientación del dibuo? Sí, pues

- $\sigma_2(-1) = (-1, 0)$.
- $\sigma_2(1) = (1, 0)$.

Calculemos todo lo necesario para obtener (B):

- $\sigma_2(t) = (t, t^2 - 1)$, con lo cual $\sigma_2'(t) = (1, 2t)$ (notar que es regular).
- $F(x, y) = (x - y, x + y)$, con lo cual

$$F(\sigma_2(t)) = F(t, t^2-1) = (t-(t^2-1), t+(t^2-1)) = (t-t^2+1, t+t^2+1).$$

- Luego,

$$F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) = (t - t^2 + 1, t + t^2 + 1) \cdot (1, 2t)$$

- Luego,

$$F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) = (t - t^2 + 1, t + t^2 + 1) \cdot (1, 2t)$$

$$= t - t^2 + 1 + 2t(t + t^2 + 1) = 2t^3 + t^2 - t + 1.$$

- Luego,

$$F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) = (t - t^2 + 1, t + t^2 + 1) \cdot (1, 2t)$$

$$= t - t^2 + 1 + 2t(t + t^2 + 1) = 2t^3 + t^2 - t + 1.$$

- Con lo cual,

$$(B) = \int_{C_2} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2 - t + 1) = \frac{8}{3}$$

- Luego,

$$F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t) = (t - t^2 + 1, t + t^2 + 1) \cdot (1, 2t)$$

$$= t - t^2 + 1 + 2t(t + t^2 + 1) = 2t^3 + t^2 - t + 1.$$

- Con lo cual,

$$(B) = \int_{C_2} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2 - t + 1) = \frac{8}{3}$$

- Por lo tanto,

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = (A) + (B) = \pi + \frac{8}{3}$$

Tabla de Contenidos

Campos gradientes

Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ para mover una partícula desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$ a lo largo de los siguientes caminos:

1. $C_1 = \text{Im}(\sigma_1)$, donde $\sigma_1(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.
2. $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$.

Solución:

Solución:

Para la primer curva directamente nos dieron la parametrización $\sigma_1(t) = (t, t)$, con $0 \leq t \leq 1$ que claramente empieza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 1)$.

Solución:
Para la primer curva directamente nos dieron la parametrización $\sigma_1(t) = (t, t)$, con $0 \leq t \leq 1$ que claramente empieza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 1)$. Como $\sigma_1'(t) = (1, 1)$, tenemos que

$$\int_{C_1} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_0^1 F(\sigma_1(t)) \cdot \sigma_1'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (4t^2, 2t^2) \cdot (1, 1)\, dt = \int_0^1 6t^2\, dt = 2.$$

Para la segunda curva $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ es fácil encontrar una parametrización: $\sigma_2(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Para la segunda curva $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ es fácil encontrar una parametrización: $\sigma_2(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$. También es claro que empieza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 1)$.

Para la segunda curva $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ es fácil encontrar una parametrización: $\sigma_2(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$. También es claro que empieza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 1)$. Como $\sigma_2'(t) = (2t, 1)$, tenemos que

$$\int_{C_2} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_0^1 F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)\, dt = \int_0^1 (4t^3, 2t^4) \cdot (2t, 1)\, dt$$

Para la segunda curva $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ es fácil encontrar una parametrización: $\sigma_2(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$. También es claro que empieza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 1)$. Como $\sigma_2'(t) = (2t, 1)$, tenemos que

$$\int_{C_2} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_0^1 F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)\, dt = \int_0^1 (4t^3, 2t^4) \cdot (2t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^1 (8t^4 + 2t^4)\, dt = 2.$$

Para la segunda curva $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ es fácil encontrar una parametrización: $\sigma_2(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$. También es claro que empieza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 1)$. Como $\sigma_2'(t) = (2t, 1)$, tenemos que

$$\int_{C_2} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_0^1 F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)\, dt = \int_0^1 (4t^3, 2t^4) \cdot (2t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^1 (8t^4 + 2t^4)\, dt = 2.$$

¿Es casualidad que con los caminos obtengamos el mismo resultado?

Para la segunda curva $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ es fácil encontrar una parametrización: $\sigma_2(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$. También es claro que empieza en $(0, 0)$ y termina en $(1, 1)$. Como $\sigma_2'(t) = (2t, 1)$, tenemos que

$$\int_{C_2} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_0^1 F(\sigma_2(t)) \cdot \sigma_2'(t)\, dt = \int_0^1 (4t^3, 2t^4) \cdot (2t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^1 (8t^4 + 2t^4)\, dt = 2.$$

¿Es casualidad que con los caminos obtengamos el mismo resultado? Para este tipo de campos, bajo ciertas hipótesis, siempre que consideremos dos curvas que empiecen y terminen en el mismo lugar vamos a obtener el mismo resultado.

Definición

Un campo continuo $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *se dice campo gradiente si existe* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que* $F = \nabla f$.

Definición

Un campo continuo $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ se dice campo gradiente si existe $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F = \nabla f$.

Si $\boldsymbol{C}$ es una curva suave, $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es una parametrización regular y $F = \nabla f$, entonces

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = (*)$$

Definición

Un campo continuo $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *se dice campo gradiente si existe* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *tal que* $F = \nabla f$.

Si $\boldsymbol{C}$ es una curva suave, $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ es una parametrización regular y $F = \nabla f$, entonces

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = (*)$$

Por la regla de la cadena, lo anterior es igual a

$$(*) = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f(\sigma(t))\right)\, dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)),$$

donde en la última igualdad usamos el Teorema Fundamental del Cálculo, ya que $f \circ \sigma$ es una función suave con dominio en los reales y a valores reales.

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente?

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (4xy, 2x^2)$.

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (4xy, 2x^2)$. Como $\nabla f = (f_x, f_y)$, debe ser $f_x = 4xy$ y $f_y = 2x^2$.

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x,y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (4xy, 2x^2)$. Como $\nabla f = (f_x, f_y)$, debe ser $f_x = 4xy$ y $f_y = 2x^2$.
De la primer condición tenemos que

$$f_x = 4xy \implies f(x,y) = \int 4xy\,dx = \frac{4x^2y}{2} + h(y) = 2x^2y + h(y).$$

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (4xy, 2x^2)$. Como $\nabla f = (f_x, f_y)$, debe ser $f_x = 4xy$ y $f_y = 2x^2$.
De la primer condición tenemos que

$$f_x = 4xy \implies f(x, y) = \int 4xy\, dx = \frac{4x^2y}{2} + h(y) = 2x^2y + h(y).$$

Para obtener $f(x, y)$ únicamente nos falta determinar $h(y)$.

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (4xy, 2x^2)$. Como $\nabla f = (f_x, f_y)$, debe ser $f_x = 4xy$ y $f_y = 2x^2$.
De la primer condición tenemos que

$$f_x = 4xy \implies f(x, y) = \int 4xy\, dx = \frac{4x^2y}{2} + h(y) = 2x^2y + h(y).$$

Para obtener $f(x, y)$ únicamente nos falta determinar $h(y)$. ¿Cómo hacemos?

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x,y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (4xy, 2x^2)$. Como $\nabla f = (f_x, f_y)$, debe ser $f_x = 4xy$ y $f_y = 2x^2$.
De la primer condición tenemos que

$$f_x = 4xy \implies f(x,y) = \int 4xy\,dx = \frac{4x^2y}{2} + h(y) = 2x^2y + h(y).$$

Para obtener $f(x,y)$ únicamente nos falta determinar $h(y)$. ¿Cómo hacemos?
Por un lado, ya sabemos que $f_y = 2x^2$.

¿Pero cómo vemos que nuestro campo $F(x,y) = (4xy, 2x^2)$ es un campo gradiente? Busquemos una función f a valores reales tal que $F = \nabla f$.
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = (4xy, 2x^2)$. Como $\nabla f = (f_x, f_y)$, debe ser $f_x = 4xy$ y $f_y = 2x^2$.
De la primer condición tenemos que

$$f_x = 4xy \implies f(x,y) = \int 4xy\, dx = \frac{4x^2y}{2} + h(y) = 2x^2y + h(y).$$

Para obtener $f(x,y)$ únicamente nos falta determinar $h(y)$. ¿Cómo hacemos?
Por un lado, ya sabemos que $f_y = 2x^2$. Luego, si derivamos la expresión anterior de $f(x,y)$ con respecto a y, podríamos obtener una ecuación para h.

Luego, como $f(x,y) = 2x^2y + h(y)$, tenemos que

$$f_y = 2x^2 + h'(y).$$

Luego, como $f(x, y) = 2x^2y + h(y)$, tenemos que

$$f_y = 2x^2 + h'(y).$$

Así, juntando que $f_y = 2x^2$ y que $f_y = 2x^2 + h'(y)$, tenemos que

$$2x^2 = 2x^2 + h'(y),$$

con lo cual $h'(y) = 0$.

Luego, como $f(x,y) = 2x^2y + h(y)$, tenemos que

$$f_y = 2x^2 + h'(y).$$

Así, juntando que $f_y = 2x^2$ y que $f_y = 2x^2 + h'(y)$, tenemos que

$$2x^2 = 2x^2 + h'(y),$$

con lo cual $h'(y) = 0$. Luego, h debe ser constante. Es decir

$$f(x,y) = 2x^2y + c.$$

Luego, como $f(x,y) = 2x^2y + h(y)$, tenemos que

$$f_y = 2x^2 + h'(y).$$

Así, juntando que $f_y = 2x^2$ y que $f_y = 2x^2 + h'(y)$, tenemos que

$$2x^2 = 2x^2 + h'(y),$$

con lo cual $h'(y) = 0$. Luego, h debe ser constante. Es decir

$$f(x,y) = 2x^2y + c.$$

Tomando $c = 0$ tenemos el potencial $f = 2x^2y$ $(c = 0)$.

Luego, como $f(x,y) = 2x^2y + h(y)$, tenemos que

$$f_y = 2x^2 + h'(y).$$

Así, juntando que $f_y = 2x^2$ y que $f_y = 2x^2 + h'(y)$, tenemos que

$$2x^2 = 2x^2 + h'(y),$$

con lo cual $h'(y) = 0$. Luego, h debe ser constante. Es decir

$$f(x,y) = 2x^2y + c.$$

Tomando $c = 0$ tenemos el potencial $f = 2x^2y$ $(c = 0)$. Notar que

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) = f(1,1) - f(0,0) = 2.$$

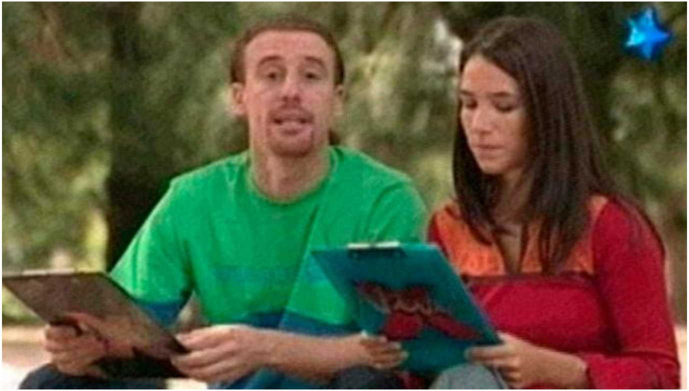
Tarea: Sea $F(x,y,z) = (y\,e^z, x\,e^z - e^y, xy\,e^z + 2z)$ y sea $\boldsymbol{C}$ la curva dada (y orientada) por $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, donde

$$\sigma(t) := \left(\frac{\ln(t+1)}{\ln 2}, \sqrt{t}, \frac{\cos(2\pi t)+1}{2}\sqrt{t} \right).$$

Calcular

$$\int_{\boldsymbol{C}} F \cdot \boldsymbol{ds}$$

Bueno, eso es todo por hoy. Espero que les haya gustado.



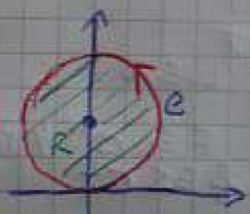
TEOREMA DE GREEN

TEOREMA DE GREEN: SEA $D \subseteq \mathbb{R}^2$ UNA REGIÓN ELEMENTAL Y ∂D SU BORDE ORIENTADO POSITIVAMENTE. SI $P, Q : D \to \mathbb{R}$ SON DE CLASE C^1, ENTONCES

$$\int_{\partial D^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

EJEMPLOS: 1) SEA C EL CÍRCULO CERRADO DE RADIO 2 CENTRADO EN $(0,2)$, RECORRIDO EN SENTIDO ANTIHORARIO.

HALLAR $\int_C F\,ds$ DONDE $F(x,y) = (y \operatorname{senh}(x), \frac{1}{2}x^2 y + \cosh(x))$



C SE PARAMETRIZA COMO:

$\sigma(t) = (2\cos t, 2 + 2\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\sigma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$

$$\int_C F\,ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle ((2+2\operatorname{sen} t)\operatorname{senh}(2\cos t), 2\cos^2 t(2+2\operatorname{sen} t) + \cosh(2\cos t)), (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t) \rangle\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -2(2+2\operatorname{sen} t)\operatorname{sen} t \operatorname{senh}(2\cos t) + 4\cos^3 t(2+2\operatorname{sen} t) + 2\cos t \cosh(2\cos t)\,dt$$

MUY DIFÍCIL Y LARGO!!! USEMOS EL TEOREMA DE GREEN

F ES C^1, R ES DE TIPO III Y C ESTÁ ORIENTADA POSITIVAMENTE

$P = y \operatorname{senh}(x)$ $\qquad P_y = \operatorname{senh}(x)$

$Q = \frac{1}{2}x^2 y + \cosh(x)$ $\qquad Q_x = xy + \operatorname{senh}(x)$

$$Q_x - P_y = xy + \operatorname{senh}(x) - \operatorname{senh}(x) = xy$$

LUEGO, $\left(T: \begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq r \leq 2 \\ y = 2 + r\,\text{sen}\,\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad |JT| = r \right)$

$$\int_C F\,ds = \iint_R xy\,dxdy \overset{T}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\cos\theta(2+r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (2r^2\cos\theta + r^3\cos\theta\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2r^3}{3}\cos\theta + \frac{r^4}{4}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \Big|_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}\cos\theta + 4\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{16}{3}\text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}^2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

2) PROBAR QUE SI F ES DE CLASE C^1, CON $F = \nabla f$ PARA ALGUNA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Y SI D ES UNA REGIÓN DONDE PUEDO APLICAR EL TEOREMA DE GREEN, ENTONCES

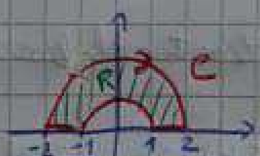
$$\int_{\partial D} F\,ds = 0$$

NOTAR QUE SI $F = \nabla f$, $P = f_x$ Y $Q = f_y$, LUEGO

$$Q_x - P_y = f_{yx} - f_{xy} = 0$$, PUES F ES C^1 Y POR LO TANTO f ES C^2

LUEGO, $\int_{\partial D} F\,ds = \int_D 0\,dxdy = 0$

3) SEA $F(x,y) = (y + \text{sen}(x^2), 2x + e^{\cos(y^2)})$ Y SEA C LA CURVA INDICADA EN EL GRÁFICO:



CALCULAR $\int_C F\,ds$ $\quad (R = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\})$

USEMOS EL TEOREMA DE GREEN:

- PROBLEMA: C NO ESTÁ ORIENTADA POSITIVAMENTE!

  SOLUCIÓN: $\int_{C^-} F\,ds = -\int_{C^+} F\,ds$

- F ES C^1 ✓

• PROBLEMA: R NO ES DE TIPO III

SOLUCIÓN:

R_1 Y R_2 DE TIPO III

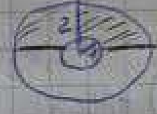
$$\int_{C} F ds = \int_{C_1} F ds + \int_{C_2} F ds$$

$$\int_{R} (Q_x - P_y) dA = \int_{R_1} (Q_x - P_y) dA + \int_{R_2} (Q_x - P_y) dA$$

POR LO TANTO, VALE GREEN EN ESTA REGIÓN

$$\int_{C^-} F ds = -\int_{C^+} F ds = -\iint_R Q_x - P_y \, dA = -\iint_R (2-1) dA = -\iint_R dA = -\text{AREA}(R)$$

$$\text{AREA}(R) = \frac{1}{2}\left(\pi 2^2 - \pi 1^2\right) = \frac{3}{2}\pi$$



LUEGO, $\int_{C^-} F ds = -\frac{3}{2}\pi$

4) ES IMPORTANTE QUE EL CAMPO F SEA C^1 EN TODA LA REGIÓN:

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$P_y = \frac{-(x^2+y^2) - (-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \; ; \; Q_x = \frac{x^2+y^2 - x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

SEA $D = B_1(0,0)$, LUEGO $\iint_D (Q_x - P_y) dA = \iint_D 0 \, dA = 0$

SI $C = \partial D^+$, UNA PARAMETRIZACIÓN ES $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_C F ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin t}{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}}, \frac{\cos t}{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}}\right), (-\sin t, \cos t)\right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

ESTO NO CONTRADICE EL TEOREMA DE GREEN PUES F NO ES C^1 EN TODO D.

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GREEN PARA CALCULAR AREAS

SI TOMAMOS $F(x,y)=(0,x) \rightsquigarrow Q_x - P_y =$

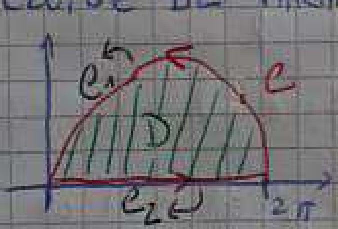
POR LO TANTO, $\int_{\partial D^+} F\,ds = \iint_D dA = AREA(D)$

SI TOMAMOS $G(x,y)=(-y,0) \rightsquigarrow Q_x - P_y = 1$

POR LO TANTO, $\int_{\partial D^+} G\,ds = \iint_D dA = AREA(D)$

EN RESUMEN, $AREA(D) = \int_{\partial D^+} x\,dy = \int_{\partial D^+} -y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -y\,dx + x\,dy$

EJEMPLOS: 1) HALLAR EL AREA LIMITADA POR EL EJE X Y UN ARCO DE CICLOIDE DE PARAMETRIZACIÓN $C(t)=(t-\text{sen}\,t, 1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$



POR LO ANTERIOR,

$AREA(D) = \int_{C^+} x\,dy = \int_{C^+} -y\,dx$

NOS CONVIENE USAR $\int_{C^+} x\,dy$ (YA VEREMOS POR QUE), PERO AMBAS FUNCIONAN.

$$\int_C x\,dy = \int_{C_1} x\,dy + \int_{C_2} x\,dy$$

C_1: $\sigma(t) = (t - \text{sen}\,t, 1-\cos t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi \longrightarrow$ SENTIDO CONTRARIO (*)

$\sigma'(t) = (1-\cos t, \text{sen}\,t)$

$$\int_{C_1} x\,dy \overset{(*)}{=} -\int_0^{2\pi} \langle (0, t-\text{sen}\,t), (1-\cos t, \text{sen}\,t)\rangle dt = -\int_0^{2\pi} (t-\text{sen}\,t)\,\text{sen}\,t\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} t\,\text{sen}\,t - \text{sen}^2 t\,dt = -\int_0^{2\pi} t\,\text{sen}\,t - \frac{(1-\cos 2t)}{2}\,dt = -\int_0^{2\pi} t\,\text{sen}\,t + \frac{\cos 2t}{2} - \frac{1}{2}\,dt$$

$$= -\left(-t\cos t + \text{sen}\,t + \frac{\text{sen}\,2t}{4} - \frac{1}{2}t \Big|_0^{2\pi}\right) = 3\pi.$$

$\underline{C_2}$: $\sigma(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$\sigma'(t) = (1, 0)$

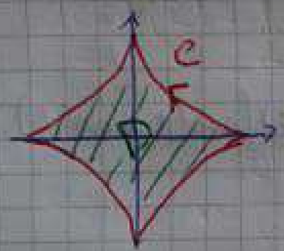
$$\int_{C_2^+} x\,dy = \int_0^{2\pi} t \cdot 0\,dt = 0$$

LUEGO, $AREA(D) = \int_{C^+} x\,dy = 3\pi + 0 = 3\pi$

2) HALLAR EL AREA DEL HIPOCICLOIDE, LA REGIÓN CONTENIDA DENTRO DE LA CURVA DE PARAMETRIZACIÓN $\sigma(t) = (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\rightarrow$ BIEN ORIENTADA



$\sigma(t) = (\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t))$

$\sigma'(t) = (-3\cos^2(t)\operatorname{sen} t, 3\operatorname{sen}^2(t)\cos t)$

$$AREA(D) = \int_{C^+} x\,dy = \int_{C^+} -y\,dx$$

$$\int_{C^+} -y\,dx = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3(t)(-3)\cos^2 t \operatorname{sen} t\,dt = \int_0^{2\pi} 3\operatorname{sen}^4(t)\cos^2(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt \qquad \left(\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2} \\ \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\end{array}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3}{8}\left(1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)\right)\left(1 + \cos(2t)\right)dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t) + \cos(2t) - 2\cos^2(2t) + \cos^3(2t)\,dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2t) - \cos^2(2t) + \cos^3(2t)\,dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2t) - \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) + \left(1 - \operatorname{sen}^2(2t)\right)\cos(2t)\,dt$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2} - \operatorname{sen}^2(2t)\cos(2t)\,dt = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}t - \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} - \frac{\operatorname{sen}^3(2t)}{6}\Bigg|_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\pi$$

3) SUPONGAMOS QUE LA CURVA C ESTÁ PARAMETRIZADA EN POLARES, ES DECIR,

$$\Gamma:[\sigma_1,\sigma_2]\to\mathbb{R}^2, \quad \Gamma(t)=(r(t)\cos t,\ r(t)\sin t), \quad r>0$$

RECORRIDA EN SENTIDO POSITIVO

PROBAR QUE $A(D)=\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} r^2(t)\,dt$

DEM: $A(D)=\int_{C^+} x\,dy=\int_{C^+} -y\,dx$

$\Gamma(t)=r(t)(\cos t,\sin t)$

$\Gamma'(t)=r'(t)(\cos t,\sin t)+r(t)(-\sin t,\cos t)$

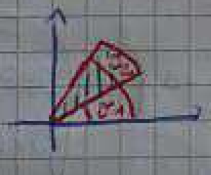
LUEGO, $A(D)=\frac{1}{2}\left(\int_{C^+} -y\,dx+x\,dy\right)$

$$=\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} r(t)(-\sin t,\cos t)\cdot\big(r'(t)(\cos t,\sin t)+r(t)(-\sin t,\cos t)\big)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} r(t)r'(t)(-\sin t\cos t+\sin t\cos t)+r^2(t)\overbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}^{1}\,dt$$

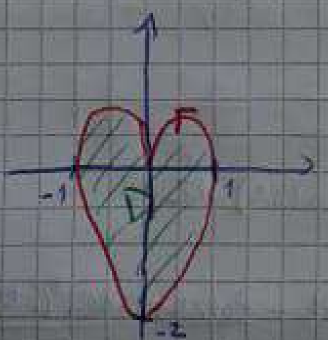
$$=\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} r^2(t)\,dt$$

4) $r=cte$ $\longrightarrow$ TROZO DE CÍRCULO $\sigma_1\le t\le\sigma_2$



$$A(D)=\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} r^2\,dt=r^2\frac{(\sigma_2-\sigma_1)}{2}$$

5) $r(t)=1-\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ "CARDIOIDE"



$$A(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\sin t)^2\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1-2\sin t+\sin^2 t\,dt$$

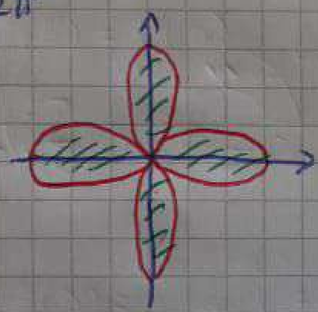
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1-2\sin t+\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}-2\sin t-\frac{\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}t+2\cos t-\frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{3}{2}\pi$$

6) $r(t) = \cos(2t)$ "ROSA POLAR"

$0 \leq t \leq 2\pi$



$$A(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(4t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin(4t)}{8}\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$