Ejercicio 10 - Práctica 0

Análisis II, Análisis Matemático II, Matemática 3

Jan Lamas

Enunciado: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ acotado, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una densidad en Ω, $G \in \mathbb{R}_{>0}$, $M = \iiint_\Omega \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ constantes y las funciones:

- $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ E(\mathbf{r}) = -G \iiint_\Omega \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3}\rho(\mathbf{s})d\mathbf{s}$
- $E_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ E_0(\mathbf{r}) = -MG\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}$

Probar que $\lim\limits_{||\mathbf{r}|| \to +\infty} ||\mathbf{r}||^2||E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})|| = 0$

Demostración: Para comenzar, notemos que, como sucede con las integrales simples,

$$\left|\left| \iiint_A f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right|\right| \leq \iiint_A ||f(\mathbf{x})||||g(\mathbf{x})||d\mathbf{x} \leq \iiint_A ||f(\mathbf{x})||d\mathbf{x} \sup_{\mathbf{x}\in A}\{||g(\mathbf{x})||\} \quad (1)$$

para algunas $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $A \subseteq \mathbb{R}^3$.

Comencemos a acotar el límite usando (1)

$||\mathbf{r}||^2||E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})|| =$

$$||\mathbf{r}||^2 \left|\left| -G\iint_\Omega \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3}\rho(\mathbf{s})d\mathbf{s} + MG\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right|\right| =$$

$$||\mathbf{r}||^2 \left|\left| -G\iiint_\Omega \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3}\rho(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \left(\iiint_\Omega \rho(\mathbf{s})d\mathbf{s}\right)G\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right|\right| =$$

$$||\mathbf{r}||^2 \left|\left| -G\left(\iiint_\Omega \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3}\rho(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \iiint_\Omega \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\rho(\mathbf{s})d\mathbf{s}\right)\right|\right| =$$

$$||\mathbf{r}||^2 G\left|\left| \iiint_\Omega \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right)\rho(\mathbf{s})d\mathbf{s}\right|\right| \leq$$

$$||\mathbf{r}||^2 G\iiint_\Omega \left|\left| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right|\right|\rho(\mathbf{s})d\mathbf{s} \leq$$

$$||\mathbf{r}||^2 G\iiint_\Omega \rho(\mathbf{s})d\mathbf{s}\sup_{\mathbf{s}\in\Omega}\left\{\left|\left| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right|\right|\right\} = ||\mathbf{r}||^2 GM\sup_{\mathbf{s}\in\Omega}\left\{\left|\left| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right|\right|\right\}$$

Ahora que analizamos el límite, al tener algunas partes que no dependen de $\mathbf{r}$, nos enfocamos sólo en las que sí, e intentamos ver a qué tienden. Así, nos interesa analizar $||\mathbf{r}||^2 \sup_{\mathbf{s}\in\Omega}\left\{\left|\left| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right|\right|\right\}$

Para eso, notemos que al ser Ω acotado, $\exists K > 0 \ / \ \overline{\Omega} \subseteq B_K(\mathbf{0})$, luego, como $||\mathbf{r}|| \to +\infty$, podemos considerar a $\mathbf{r} \notin \overline{\Omega}$.

Para continuar, como $||\mathbf{r}||^2 \sup_{\mathbf{s}\in\Omega}\left\{\left|\left| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right|\right|\right\} = \sup_{\mathbf{s}\in\Omega}\left\{\left|\left| ||\mathbf{r}||^2\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right)\right|\right|\right\}$, luego

$$\left|\left| ||\mathbf{r}||^2\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3}\right)\right|\right| =$$

$$\left|\left| \frac{||\mathbf{r}||^2(\mathbf{r}-\mathbf{s})}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}\right|\right| =$$

$$\left|\left| \frac{||\mathbf{r}||^2\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} - \frac{||\mathbf{r}||^2\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3}\right|\right| =$$

$$\left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} - \frac{||\mathbf{r}||^2\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3}\right|\right| =$$

$$\left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} + \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} - \frac{||\mathbf{r}||^2\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3}\right|\right| \leq$$

$$\left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\left(\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} - 1\right)\right|\right| + \left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}\right|\right| + \left|\left| \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2}\frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\right|\right| \leq$$

$$\left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\right|\right|\left|\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2}-1\right|+\left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}\right|\right|+\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2}\left|\left|\frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\right|\right|$$

Ahora que llegamos a esta suma de tres cosas, ver que cada una tiende a 0 es relativamente fácil, para empezar, notemos que por la desigualdad triangular inversa y la común, $||\mathbf{r}||+||\mathbf{s}|| \geq ||\mathbf{r}-\mathbf{s}|| \geq \big|||\mathbf{r}||-||\mathbf{s}||\big|$, por lo que, invirtiendo ambos términos, elevando al cuadrado y multiplicando por $||\mathbf{r}||^2$, obtenemos que $\dfrac{||\mathbf{r}||^2}{(||\mathbf{r}||+||\mathbf{s}||)^2} \leq \dfrac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} \leq \dfrac{||\mathbf{r}||^2}{(||\mathbf{r}||-||\mathbf{s}||)^2}$ y como tanto el lado izquierdo como el derecho tienden a 1 cuando $||\mathbf{r}|| \to +\infty$, entonces:

$$1 = \lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \frac{||\mathbf{r}||^2}{(||\mathbf{r}||+||\mathbf{s}||)^2} \leq \lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} \leq \lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \frac{||\mathbf{r}||^2}{(||\mathbf{r}||-||\mathbf{s}||)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} = 1$$

Además, tomando raíz cuadrada a esa desigualdad con límites obtenemos que $\displaystyle\lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \frac{||\mathbf{r}||}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} = 1$, por lo que: $\displaystyle\lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\right|\right|\left|\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2}-1\right| = 1(1-1) = 0 \quad \forall\, \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$

Asimismo, por lo anterior y como $\displaystyle\lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} ||\mathbf{r}-\mathbf{s}|| = +\infty$, tenemos que:

$$\lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2}\left|\left|\frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\right|\right| = 1||\mathbf{s}||0 = 0 \quad \forall\, \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$$

Por último, como

$$\left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}\right|\right| = \left|\left|\mathbf{r}\left(\frac{1}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-\frac{1}{||\mathbf{r}||}\right)\right|\right| = \left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}\left(\frac{||\mathbf{r}||}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-\frac{\cancel{||\mathbf{r}||}}{\cancel{||\mathbf{r}||}}\right)\right|\right| = \frac{\cancel{||\mathbf{r}||}}{\cancel{||\mathbf{r}||}}\left|\frac{||\mathbf{r}||}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-1\right| =$$

$\left|\dfrac{||\mathbf{r}||}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-1\right|$, por lo que así concluimos que $\displaystyle\lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}\right|\right| = 1-1 = 0 \quad \forall\, \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$

Así, habiendo visto que estos tres límites dan 0 $\forall\, \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$, tenemos que:

$$\lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} \left(\left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\right|\right|\left|\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2}-1\right|+\left|\left|\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}-\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}\right|\right|+\frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2}\left|\left|\frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||}\right|\right|\right) = 0 \quad \forall\, \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$$

Y consecuentemente, como:

$$0 \leq \left|\left| ||\mathbf{r}||^2 \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3} \right) \right|\right| \leq \left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} \right|\right| \left| \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} - 1 \right| + \left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} \right|\right| + \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} \left|\left| \frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} \right|\right|$$

$\forall \;\; \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$

Entonces, tenemos que

$$0 \leq \sup_{\mathbf{s}\in\Omega} \left\{ \left|\left| ||\mathbf{r}||^2 \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3} \right) \right|\right| \right\} \leq \left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} \right|\right| \left| \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} - 1 \right| + \left|\left| \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} \right|\right| + \frac{||\mathbf{r}||^2}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^2} \left|\left| \frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||} \right|\right|$$

Así, tomando límite:

$$0 \leq \lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} ||\mathbf{r}||^2 \sup_{\mathbf{s}\in\Omega} \left\{ \left|\left| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3} \right|\right| \right\} \leq 0 \;\; \forall \;\; \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$$

Finalmente, como:

$0 \leq ||\mathbf{r}||^2 ||E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})|| \leq GM ||\mathbf{r}||^2 \sup_{\mathbf{s}\in\Omega} \left\{ \left|\left| \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{||\mathbf{r}-\mathbf{s}||^3} - \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||^3} \right|\right| \right\}$, por lo que tomando límite,

$$0 \leq \lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} ||\mathbf{r}||^2 ||E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})|| \leq GM0 = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{||\mathbf{r}||\to+\infty} ||\mathbf{r}||^2 ||E(\mathbf{r}) - E_0(\mathbf{r})|| = 0 \;\blacksquare$$