Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 15, 2do. cuatrimestre 2020

Campos localmente Lipschitz

Estudiamos existencia y unicidad local de soluciones para un sistema de 1er. orden de la forma

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}).$$

Para poder establecer resultados, necesitamos propiedades del campo $\boldsymbol{F}$. El concepto fundamental es el siguiente:

Definición: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $\boldsymbol{F} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X})$. Decimos que $\boldsymbol{F}$ es Lipschitz en $\boldsymbol{X}$ si $\boldsymbol{F}$ es continuo y existe $L > 0$ tal que

$$\|\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{Y})\| \leq L\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\|,$$

para todo $t \in I$ y $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \Omega$.

Asimismo, decimos que $\boldsymbol{F}$ es localmente Lipschitz en $\boldsymbol{X}$ si para todo $J = [a, b] \subset I$ y todo conjunto cerrado y acotado $\Omega' \subset \Omega$, $\boldsymbol{F}$ es Lipschitz en $J \times \Omega'$.

Campos localmente Lipschitz

Observación: Que $\boldsymbol{F}$ sea localmente Lipschitz no implica que sea Lipschitz: la constante L puede variar con cada par $J \times \Omega' \subset I \times \Omega$.

Ejemplo: Sean $I, \Omega \subset \mathbb{R}$ intervalos. Si $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial x} : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ existe y es continua, entonces f es localmente Lipschitz.

De hecho, si $J \subset I$ y $\Omega' \subset \Omega$ son intervalos cerrados y acotados $\Rightarrow$ la función continua $\frac{\partial f}{\partial x} : J \times \Omega' \to \mathbb{R}$ es acotada $\Rightarrow$ existe $L = \text{máx}\{|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| : \ t \in J, \ x \in \Omega'\}$. Afirmamos que L es una constante Lipschitz para f en $J \times \Omega'$:

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,\theta)\,(x-y) \right| \leq L\,|x-y|,$$

ya que θ es un punto en el intervalo de extremos $x, y \in \Omega'$ y por lo tanto pertenece a Ω'.

Campos localmente Lipschitz

Ejemplo: Sea $\boldsymbol{F} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}) = A(t)\,\boldsymbol{X} + b(t)$, con $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$ para cada $t \in I$. Si los coeficientes $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ de la matriz $A(t)$ y el vector $b(t)$ son funciones continuas en I, entonces $\boldsymbol{F}$ es localmente Lipschitz. Más aun, si I es cerrado y acotado, $\boldsymbol{F}$ es Lipschitz.

Basta ver esta última afirmación. Sea $K > 0$ tal que $|a_{ij}(t)| \leq K$ para todo $t \in I$ y todo $i, j = 1, \ldots, n$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{Y})\|^2 = \|A(t)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y})\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(x_j - y_j)\right)^2 \\ &\leq C_n \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|^2 (x_j - y_j)^2 \leq C_n K^2 n \,\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{Y})\| \leq L\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\|$ con $L^2 = C_n K^2 n$.

Existencia de soluciones

Enunciamos con toda generalidad el resultado de existencia de soluciones para un sistema de 1er. orden.

Teorema: Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $\boldsymbol{F} : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo localmente Lipschitz en $\boldsymbol{X}$. Sean $(\tau, \xi) \in I \times \Omega$. Si τ es interior a I, existen $\lambda > 0$ y una función $\boldsymbol{X} : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \Omega$ de clase C^1 tales que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{X}'(t) & = & \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}(t)), \quad \text{para todo } t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda], \\ \boldsymbol{X}(\tau) & = & \xi. \end{array} \right.$$

Si τ es el extremo izquierdo de I, existen $\lambda > 0$ y una función $\boldsymbol{X} : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \Omega$ de clase C^1 tales que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{X}'(t) & = & \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}(t)), \quad \text{para todo } t \in [\tau, \tau + \lambda], \\ \boldsymbol{X}(\tau) & = & \xi. \end{array} \right.$$

Idem si τ es el extremo derecho de I.

Existencia de soluciones

Si bien vamos a usar esta versión general, solo vamos a demostrar una versión simplificada para el caso $n = 1$ y $\Omega = \mathbb{R}$.

Teorema: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz y $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}$. Si τ es interior a I, existen $\lambda > 0$ y una función $x : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{para todo } t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda], \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Si τ es el extremo izquierdo de I, existen $\lambda > 0$ y una función $x : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que

$$\begin{cases} x'(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{X}(t)), & \text{para todo } t \in [\tau, \tau + \lambda], \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Idem si τ es el extremo derecho de I.

Existencia de soluciones

Demostración: Supongamos que $x(t)$ es una solución del problema. Integrando la ecuación diferencial a partir de τ, y usando la condición inicial, tenemos

$$\int_\tau^t x'(s)\,ds = x(t) - x(\tau) = x(t) - \xi = \int_\tau^t f(s, x(s))\,ds.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\,ds, \qquad \text{para } t \text{ en } [\tau - \lambda, \tau + \lambda].$$

Recíprocamente, si $x : [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \to \mathbb{R}$ es solución de esta ecuación integral, entonces x es de clase C^1,

$$x' = f(t, x) \quad \text{y} \quad x(\tau) = \xi.$$

Por lo tanto, x es solución del problema de valores iniciales.

Existencia de soluciones

Así, vamos a demostrar que la ecuación integral tiene soluciones, usando un método iterativo: definimos

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \xi, \\ x_1(t) &= \xi + \int_\tau^t f(s, x_0(s))\, ds, \\ &\vdots \\ x_{k+1}(t) &= \xi + \int_\tau^t f(s, x_k(s))\, ds. \end{aligned}$$

Vamos a probar que la sucesión (de funciones continuas) $(x_k(t))_{k\geq 0}$ converge uniformemente, en un intervalo $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$, a una función $x = x(t)$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \max\{|x_k(t) - x(t)| : t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda]\} = 0.$$

Existencia de soluciones

En tal caso, tendremos que:

- x es continua en $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$,
- $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_\tau^t f(s, x_k(s))\, ds = \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds.$

Por lo tanto,

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1}(t) = \xi + \lim_{k\to\infty} \int_\tau^t f(s, x_k(s))\, ds = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds,$$

lo cual implica que x será una solución de la ecuación integral.

Existencia de soluciones

Para ver que la sucesión de funciones $(x_k(t))_{k\geq 0}$ converge uniformemente en un intervalo $[\tau-\lambda, \tau+\lambda]$, basta ver que la sucesión es uniformemente de Cauchy en $[\tau-\lambda, \tau+\lambda]$: para todo $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que

$$|x_k(t) - x_j(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in [\tau-\lambda, \tau+\lambda]$ y $k, j \geq k_0$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) - x_k(t) &= \int_\tau^t f(s, x_k(s))\, ds - \int_\tau^t f(s, x_{k-1}(s))\, ds \\ &= \int_\tau^t \left(f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))\right)\, ds. \end{aligned}$$

Existencia de soluciones

Por lo tanto, para $t \geq \tau$,

$$\begin{aligned}
|x_{k+1}(t) - x_k(t)| &\leq \int_\tau^t |f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s))| \, ds \\
&\leq L \int_\tau^t |x_k(s) - x_{k-1}(s)| \, ds.
\end{aligned}$$

Sea $\lambda \leq \dfrac{1}{2L}$ tal que $I_\lambda := [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset I$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\text{máx}\{|x_{k+1}(t) - x_k(t)| : \ t \in [\tau, \tau + \lambda]\} \\
&\qquad \leq L\,|t - \tau| \ \text{máx}\{|x_k(t) - x_{k-1}(t)| : \ t \in [\tau, \tau + \lambda]\} \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\,\text{máx}\{|x_k(t) - x_{k-1}(t)| : \ t \in [\tau, \tau + \lambda]\}.
\end{aligned}$$

Asimismo, se llega a una desigualdad análoga en el intervalo $[\tau - \lambda, \tau]$.

Existencia de soluciones

Sea $m_k := \max\{|x_k(t) - x_{k-1}(t)| : t \in I_\lambda\}$. Demostramos que

$$m_{k+1} \leq \frac{1}{2} m_k \Rightarrow m_k \leq \frac{1}{2^{k-1}} m_1 .$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |x_{m+k}(t) - x_k(t)| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} \left(x_{k+i+1}(t) - x_{k+i}(t) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} m_{k+i+1} \leq m_1 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{m_1}{2^k} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^i} \leq \frac{m_1}{2^{k-1}} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, si elegimos k_0 tal que $\frac{m_1}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$, concluimos que

$$|x_{m+k}(t) - x_k(t)| < \varepsilon$$

para todo $t \in [\tau - \lambda, \tau + \lambda]$ y $k \geq k_0$. Esto concluye la demostración del teorema.

Continuidad de las soluciones

El siguiente paso es demostrar la unicidad de las soluciones. Para esto, vemos primero un resultado de continuidad de las soluciones respecto del dato inicial.

Teorema: Con I y f como antes, sean $\tau \in I$ y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Si $x_1, x_2 : [\tau, \eta] \subset I \to \mathbb{R}$ son soluciones de

$$x' = f(t, x) \quad \text{en } [\tau, \eta],$$

con $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2$, entonces existe $C = C(\eta)$ tal que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(\eta)\,|\xi_1 - \xi_2| \quad \text{para todo } t \in [\tau, \eta].$$

Vale lo mismo si $x_1, x_2 : [\eta, \tau] \to \mathbb{R}$ son soluciones con $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2$.

Continuidad de las soluciones

Demostración: Lo demostramos en el caso que $\eta > \tau$. La demostración del otro caso es enteramente análoga.

Sea L la constante de Lipschitz de f en $I \times \mathbb{R}$. Tenemos que

$$x_1(t) = \xi_1 + \int_\tau^t f(s, x_1(s))\, ds, \quad x_2(t) = \xi_2 + \int_\tau^t f(s, x_2(s))\, ds.$$

Restando ambas ecuaciones,

$$x_1(t) - x_2(t) = \xi_1 - \xi_2 + \int_\tau^t \big(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\big)\, ds.$$

Por lo tanto,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |\xi_1 - \xi_2| + L \int_\tau^t |x_1(s) - x_2(s)|\, ds.$$

Continuidad de las soluciones

Para obtener una desigualdad para $|x_1(t) - x_2(t)|$ usamos:

Lema de Gronwall: Sea $g : J \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua en un intervalo J con $\tau \in J$. Si

$$g(t) \leq A + B \left| \int_\tau^t g(s)\, ds \right|, \tag{1}$$

entonces

$$g(t) \leq Ae^{B|t-\tau|}.$$

Suponiendo probado el Lema de Gronwall, lo aplicamos a $g(t) := |x_1(t) - x_2(t)|$, y obtenemos que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |\xi_1 - \xi_2| e^{L(t-\tau)} \leq C(\eta)\, |\xi_1 - \xi_2|$$

para todo $t \in [\tau, \eta]$, donde $C(\eta) = e^{L(\eta-\tau)}$. Esto concluye la demostración del teorema. $\blacksquare$

Continuidad de las soluciones

Demostración del Lema de Gronwall: Lo hacemos en el caso $t \geq \tau$. La demostración en el otro caso es totalmente análoga.

Sea $G(t) = \displaystyle\int_\tau^t g(s)\,ds$. En términos de G, (1) dice que

$$G'(t) \leq A + B\,G(t) \Leftrightarrow G'(t) - B\,G(t) \leq A.$$

Multiplicando por $e^{-B(t-\tau)}$, tenemos

$$\left(e^{-B(t-\tau)}\,G(t)\right)' = e^{-B(t-\tau)}\left(G'(t) - B\,G(t)\right) \leq A\,e^{-B(t-\tau)}.$$

Integrando de τ a t y usando que $G(\tau) = 0$, vemos que

$$e^{-B(t-\tau)}\,G(t) \leq A\int_\tau^t e^{-B(s-\tau)}\,ds = -\frac{A}{B}\left(e^{-B(t-\tau)} - 1\right).$$

Continuidad de las soluciones

En consecuencia,

$$G(t) \le \frac{A}{B}\left(e^{B(t-\tau)} - 1\right).$$

Como la desigualdad (1) dice que $g(t) \le A + B\,G(t)$, se sigue que

$$g(t) \le A + B\,\frac{A}{B}\left(e^{B(t-\tau)} - 1\right) = Ae^{B(t-\tau)},$$

que es lo que queríamos demostrar. $\blacksquare$

Unicidad de la solución

Como corolario del resultado anterior, obtenemos el siguiente:

Teorema: Sean I y f como en el Teorema. Sean $\tau \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$, y sean $J_1, J_2 \subset I$ dos intervalos tales que $\tau \in J_1 \cap J_2 \subset I$ y existen funciones $x_i : J_i \to \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$ tales que

$$\begin{cases} x_i' = f(t, x_i) & \text{en } J_i, \\ x_i(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Entonces $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in J_1 \cap J_2$.

Demostración: Sea $\tau \in [t_1, t_2] \subset J_1 \cap J_2$. Probamos que $x_1 = x_2$ en $[t_1, t_2]$. Como $[t_1, t_2]$ es arbitrario, resulta $x_1 = x_2$ en $J_1 \cap J_2$.

Por la continuidad respecto de los datos iniciales,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(t_2)\,|\xi - \xi| = 0 \quad \text{en } [\tau, t_2]$$
$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq C(t_1)\,|\xi - \xi| = 0 \quad \text{en } [t_1, \tau].$$

Así, el teorema queda demostrado. ∎