ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

DEFINICIÓN Una "ecuación diferencial ordinaria" (EDO) es una ecuación de la forma

$$f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0$$

donde la incógnita es la función x y f está dada. El "orden" de una EDO es el mayor orden de derivación de la incógnita que aparece en la ecuación.

OBSERVACIÓN Una EDO de primer orden es de la forma

$$f(t, x(t), x'(t)) = 0$$

Cuando es posible despejar x', queda

$$x'(t) = F(t, x(t)).$$

 A continuación vamos a estudiar la existencia y unicidad de solución para ecuaciones de primer orden de la forma

$$x'(t) = F(t, x'(t))$$

<u>**DEFINICIÓN**</u> Sea $F : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Decimos que F es "Lipschitz en la variable x" en $I \times \Omega$ si F es continua y existe una constante $L > 0$ tal que

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x - y|$$

para todo $t \in I$, $x, y \in \Omega$. Además decimos que F es "Localmente Lipschitz en la variable x" en $I \times \Omega$ si F es Lipschitz en la variable x en $J \times \tilde{\Omega}$ para todo intervalo cerrado y acotado J contenido en I y todo conjunto cerrado y acotado $\tilde{\Omega}$ contenido en Ω.

<u>OBSERVACIÓN</u> Si F es localmente Lipschitz en la variable x en $I \times \Omega$ entonces las constantes L de Lipschitzianidad correspondientes a diferentes elecciones de $J \times \tilde{\Omega}$ pueden ser diferentes (lo son, en general).

<u>EJEMPLO</u> Sean I y Ω intervalos reales.

 Si $F: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ es continua y F_x existe y es continua en $I \times \Omega$ entonces F es Localmente Lipschitz en x en $I \times \Omega$. En efecto, sean J y $\tilde{\Omega}$ intervalos cerrados y acotados contenidos en I y en Ω, respectivamente. Como F_x es continua en $I \times \Omega$, también lo es en el compacto $J \times \tilde{\Omega}$ y por ende allí es acotada. Luego existe $L = \max\{|F_x(t,x)| : (t,x) \in J \times \tilde{\Omega}\}$. Entonces, si $t \in J$ y $x, y \in \tilde{\Omega}$, usando el teorema del valor medio del cálculo diferencial, obtenemos

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq |F_x(t,z)||x-y| \leq L|x-y|$$

 Así que F es localmente Lipschitz en x en $I \times \Omega$.

<u>EJEMPLO</u> Sea I un intervalo real. Si $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definida por

$$F(t, x) = A(t)x + b(t)$$

donde la matriz A y el vector b son continuos, entonces F es localmente Lipschitz en x en $I \times \mathbb{R}^n$. En el caso particular en que I es un intervalo cerrado, resulta que F es Lipschitz en x en $I \times \mathbb{R}^n$. La justificación de estas afirmaciones puede consultarse en el apunte de Wolanski, pág. 17.

Ya estamos en condiciones de enunciar

 Un primer teorema de existencia y unicidad.

<u>TEOREMA</u> (Teorema de existencia de solución para un sistema de EDOs de primer orden) Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea también $F: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función Localmente Lipschitz en la variable x en $I \times \Omega$; y sean $t_0 \in I$ y $x_0 \in \Omega$.

a) Si t_0 es interior a I entonces existen $\alpha > 0$ y una función continuamente diferenciable $x: [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \bar{\mathbb{R}}^n$ tal que

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

b) Si t_0 es el extremo izquierdo de I entonces existen $\alpha > 0$ y una función continuamente diferenciable $x : [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & t \in [t_0, t_0 + \alpha] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

c) Vale un resultado análogo si t_0 es el extremo derecho de I.

<u>DEMOSTRACIÓN</u> No la hacemos. ▨

A continuación vamos a enunciar (y dar las ideas principales de la demostración) una versión especial del teorema anterior.

TEOREMA (Teorema de existencia de solución para una EDO de primer orden)

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Sea también $F: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz en la variable x en $I \times \mathbb{R}$; y sean $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) Si t_0 es interior a I, entonces existen $\alpha > 0$ y una función continuamente diferenciable $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

b) Valen resultados análogos si t_0 es un extremo de I.

<u>DEMOSTRACIÓN</u> A continuación sólo presentaremos las ideas principales de la demostración de (a). La demostración completa puede consultarse en el apunte de Wolanski, pág. 18.

La demostración de (a) se basa en que es posible hallar un problema equivalente a

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \quad (*) \\ x(t_0) = x_0 & \quad (**) \end{cases}$$

cualquiera sea $\alpha > 0$ tal que $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset I$, para el cual es posible construir una solución para algún valor de $\alpha > 0$.

Veamos esto con algo más de detalle.

- Problema equivalente a (*) y (**).

Hallar una solución x continuamente diferenciable de (*) y (**) equivale a hallar una solución continua x de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\, ds, \qquad t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \quad (***)$$

En efecto, si x es una solución continuamente diferenciable de (*) y (**) entonces x es continua y satisface (***). Esto último se ve integrando miembro a miembro (*) y usando luego (**). Recíprocamente, si x es una solución continua de (**) entonces x es continuamen

 te diferenciable y cumple (*) y (**).
Esto último se ve derivando miembro a miembro (***) y evaluando (***) en $t=t_0$.

Aquí $\alpha>0$ es cualquier valor para el cual $[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \subset I$.

- La ecuación (***) admite una solución continua, para algún valor de α.

La idea de esta parte de la demostración se basa en construir una solución continua de (***) mediante un método iterativo. Más precisamente, se define una sucesión de funciones, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ como

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } k=0 \\ x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(s, x_{k-1}(s))\,ds & \text{si } k\geq 1 \end{cases}$$

y se prueba que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformemente a una función x definida en $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, para algún $\alpha>0$. En esta parte de la prueba se usa que F es Lipschitz en x en $I\times\mathbb{R}$. Finalmente, como x es límite uniforme de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, se ve que x es continua y cumple (***). $\boxtimes$

Una vez probada la existencia de solución para una EDO de primer orden, es razonable preguntarse acerca de su unicidad. Para demostrar el teorema de unicidad que enunciaremos más abajo necesitamos un resultado de acotación de funciones, conocido como "Lema de Gronwall" y un resultado de dependencia continua de la solución con respecto al dato inicial. A continuación presentamos estos dos resultados.

TEOREMA (Lema de Gronwall) Sea g una función continua definida en un intervalo I y sea $t_0 \in I$. Si existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$g(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds \right| \quad \forall t \in I$$

entonces

$$g(t) \leq a\, e^{b|t-t_0|} \qquad \forall\, t \in I.$$

DEMOSTRACIÓN Opcional, se la puede consultar en el apunte de Wolanski, pág. 21. ▨

TEOREMA (Teorema de dependencia continua de una solución de una EDO de primer orden con respecto al dato inicial) Sean I y F como en el teorema de existencia. Sean también $t_0 \in I$ y $x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \in \mathbb{R}$, y sean $x_1, x_2 : [t_0, T] \subset I \to \mathbb{R}$ soluciones continuamente diferenciables de

$$x'(t) = F(t, x(t)) \qquad t \in [t_0, T]$$

junto con la condición inicial

$$x(t_0) = x_0^{(1)} \qquad \text{y} \qquad x(t_0) = x_0^{(2)},$$

respectivamente. Entonces existe una

constante c dependiente de T tal que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq c(T)\,|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Se tiene el mismo resultado para soluciones de problemas planteados en intervalos de la forma $[T, t_0]$.

DEMOSTRACIÓN Se sugiere hacerla como ejercicio (usar el Lema de Gronwall). También se la puede consultar en el apunte de Wolanski, pág. 20. ■

Ya estamos en condiciones de presentar el resultado de unicidad.

TEOREMA (Teorema de unicidad de solución para una EDO de primer orden) Sean I, F, t_0 y x_0 como en el teorema de existencia. Sean también J_1 y J_2 intervalos tales que $t_0 \in J_1 \cap J_2 \subset I$. Si $x_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ y $x_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ son soluciones de

$$x'(t) = F(t, x(t)) \quad t \in J_1$$

y

$$x'(t) = F(t, x(t)) \quad t \in J_2$$

respectivamente, junto con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, entonces

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall\, t \in J_1 \cap J_2$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Sean x_1 y x_2 como en el enunciado. Vamos a demostrar que $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in [t_1, t_2] \subset J_1 \cap J_2$, siendo t_1 y t_2 arbitrarios. De esta arbitrariedad se tendrá que

$x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in J_1 \cap J_2$.

Veamos primero que $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in [t_0, t_2]$. Usando el teorema de dependencia continua de la solución respecto del dato inicial, vemos que

$|x_1(t) - x_2(t)| \leq c(t_2)|x_0 - x_0| = 0 \quad \forall t \in J_1 \cap J_2$.

Luego, $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in [t_0, t_2]$.

La prueba de que $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in [t_1, t_0]$ es análoga. $\blacksquare$

OBSERVACIÓN (Prolongación de soluciones y solución maximal) Supongamos que x_1 y x_2 son soluciones de

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & (*) \\ x(t_0) = x_0 & (**) \end{cases}$$

en intervalos $J_1 \subset I$ y $J_2 \subset I$, respectivamente. Entonces la función $x : J_1 \cup J_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{si } t \in J_1 \\ x_2(t) & \text{si } t \in J_2 \end{cases}$$

está bien definida (por el teorema de unicidad de solución) y satisface (*) y (**) en $J_1 \cup J_2$. Notar que x es una prolongación de x_1 al intervalo $J_1 \cup J_2$ (análogamente, x es una prolongación de x_2 a $J_1 \cup J_2$).

Lo anterior permite definir la "solución maximal" de (*) y (**) como aquella definida en el mayor intervalo J donde existe solución, a saber

$J = \bigcup \{ J : t_0 \in J \subset I$ y existe solución de (*) y (**) en $J \}$.

<u>OBSERVACIÓN</u> Se puede demostrar que si $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, es Lipschitz en la variable x en $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}$ para todo intervalo cerrado y acotado $[t_1, t_2] \subset I$ entonces la solución de

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & (*) \\ x(t_0) = x_0 & (**) \end{cases}$$

está definida en todo el intervalo I. La demostración se puede consultar en el apunte de Wolanski, pág. 23. Cuando la solución maximal está definida en todo el intervalo I, se dice que se tiene una "solución global". En caso contrario (sea o no x maximal) se dice que se tiene una "solución Local". Finalmente observamos que, en las condiciones del teorema de existencia, la solución maximal es global.

Para terminar, enunciamos un teorema de existencia y unicidad de solución global para un sistema lineal de EDOs de primer orden con coeficientes continuos en un intervalo abierto I.

<u>TEOREMA</u> (Teorema de existencia y unicidad de solución para un sistema lineal

 de EDOs de primer orden) Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sean a_{ij}, b_j funciones continuas en I para $i,j = 1, \dots, n$. Sean también $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe una única solución $x = (x_1, \dots, x_n)$ de

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \dots + a_{2n}(t)x(t) + b_2(t) \\ \\ x'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x(t) + b_n(t) \end{cases}$$

para $t \in I$, la cual verifica $x(t_0) = x_0$ (notar que x está definida en todo I)

<u>DEMOSTRACIÓN</u> No la hacemos. $\blacksquare$