Ejercicio Práctica 5 (de Final)

Análisis II - Matemática 3 - Análisis Matemático II

Jan Lamas

Enunciado: Sea $\alpha \in \mathbb{R}_{>0},\ U \subseteq \mathbb{R}$ intervalo / $0 \in U,\ x \in \mathcal{C}^1(U)$ / $\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^\alpha \ \forall\ t \in U \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Hallar todas las soluciones al sistema que cumplan las mismas hipótesis que x y tengan un dominio maximal.

Resolución: Para empezar, notemos que hemos de hallar intervalos U y soluciones x definidas en dichos intervalos para poder responder al problema. Para eso, comencemos con la ecuación que cumple x. Analicemos el caso de $\alpha = 1$ primero, y luego pasemos a los casos $\alpha > 1$ y $0 < \alpha < 1$.

- **Caso $\alpha = 1$:** En este caso, el problema se reduce a que $x'(t) = |x(t)|\ \forall\ t \in U$, en cuyo caso, supongamos $\exists\ t_1, t_0 \in U,\ t_0 \leq t_1$ / $x(s) \neq 0\ \forall\ s \in [t_0; t_1]$, entonces, gracias al **Teorema de Bolzano**, puesto que x es continua tenemos que en ese intervalo la función x es > 0 o < 0 pero no puede cambiar de signo, puesto que tendría una raíz, con lo que x tiene el signo constante en el intervalo $[t_0; t_1]$, lo llamaremos $\text{sgn}(x) = \pm 1$, con $|x| = \text{sgn}(x)x$. Así sea $t_1, t_0 \in U$ como mencionados recién y $t \in [t_0; t_1] \ \Rightarrow\ \dfrac{x'(s)}{x(s)} = \text{sgn}(x)\ \forall\ s \in [t_0; t_1] \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \text{sgn}(x) \int_{t_0}^{t} ds \ \Rightarrow\ \ln|x(t)| - \ln|x(t_0)| = \text{sgn}(x)(t - t_0) \ \Rightarrow\ \ln|x(t)| = \text{sgn}(x)t + \ln|x(t_0)| - \text{sgn}(x)t_0 = \text{sgn}(x)(t + C)$ donde $C = \text{sgn}(x)\ln|x(t_0)| - t_0 \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que: $|x(t)| = e^{\text{sgn}(x)(t+C)} \ \Rightarrow\ x(t) = \text{sgn}(x)e^{\text{sgn}(x)C}e^{\text{sgn}(x)t}$, por lo tanto, si llamamos $k = \text{sgn}(x)e^{\text{sgn}(x)C} \in \mathbb{R} - \{0\}$ tenemos que $x(t) = ke^{\text{sgn}(x)t}\ \forall\ t \in [t_0; t_1]$. Ahora que conseguimos una solución, prestémosle atención a quiénes eran t_0 y t_1. Notemos que ellos eran simples números reales que hacían que x no se anulara entre ellos, entonces busquemos candidatos a estos t_0 y t_1 con la x que encontramos. Para eso, basta notar que como $k \neq 0$ y $e^{\text{sgn}(x)t} > 0\ \forall\ t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ ke^{\text{sgn}(x)t} \neq 0\ \forall\ t \in \mathbb{R}$, lo cual nos dice que cualquier par de números t_0, t_1 sirven, ya que siempre entre esos números la función x no se anula, con lo que, ya que queremos tomar una solución con intervalo maximal, podemos tomar como dominio a todo $\mathbb{R}$. Ahora, analicemos la condición inicial. Notemos que $0 \in \mathbb{R}$, con lo que no hay problema en que el valor inicial esté en el dominio, pero, nosotros queremos que $x(0) = 0$, pero $x(0) = k \neq 0$, lo cual nos dice que de esta familia de funciones, ninguna es solución a nuestro sistema. Analicemos el último caso que nos queda, que es el caso donde la x no es distinta de 0 para ningún valor, es decir, $x = 0$, o, $x(t) = 0 \ \forall \ t \in U$. Es fácil notar que $x' = 0 = x$ y que $x(0) = 0$, así que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ x(t) = 0$ es solución a nuestro sistema, tiene dominio maximal, cumple las hipótesis del enunciado y es única, puesto que si vale distinta de 0 en algún lado, vimos que eso llevaría a un absurdo.

- **Caso $\alpha > 1$:** Para este caso comenzamos muy parecido a lo anterior, supongamos que $\exists \ t_0, t_1 \in U, \ t_0 \leq t_1 \ / \ x(s) \neq 0 \ \forall \ s \in [t_0; t_1] \ \Rightarrow \ \text{sgn}(x) = \pm 1$, alguno de los dos, ya que, igual que antes, al ser x continua, por el **Teorema de Bolzano** el signo de x es constante en el intervalo $[t_0; t_1]$. Similarmente, $|x| = \text{sgn}(x)x$ y la ecuación con la que tenemos que trabajar es $x'(t) = |x(t)|^\alpha \ \forall \ t \in U$. Para eso, tomemos un $t \in [t_0; t_1] \ \Rightarrow \ \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{|x(s)|^\alpha} ds = \int_{t_0}^{t} ds \ \Rightarrow \ \frac{\text{sgn}(x)}{1-\alpha}|x(t)|^{1-\alpha} - \frac{\text{sgn}(x)}{1-\alpha}|x(t_0)|^{1-\alpha} = t - t_0$. Notemos que acá estoy usando que la derivada de $\dfrac{\text{sgn}(x)}{1-\alpha}|x(s)|^{1-\alpha}$ está bien definida y es igual a $\dfrac{x'(s)}{|x(s)|^\alpha}$, todo gracias a que $x(s) \neq 0$ en $[t_0; t_1]$. Así, tenemos que:
$\dfrac{\text{sgn}(x)}{1-\alpha}|x(t)|^{1-\alpha} = t - t_0 + \dfrac{\text{sgn}(x)}{1-\alpha}|x(t_0)|^{1-\alpha} = t + C$, donde $C = \dfrac{\text{sgn}(x)}{1-\alpha}|x(t_0)|^{1-\alpha} - t_0 \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ |x(t)|^{1-\alpha} = \text{sgn}(x)(1-\alpha)(t+C) \ \forall \ t \in [t_0; t_1]$. Notemos que esto nos introduce una restricción a la constante C, y en esencia, a lo que puede valer x en t_0, pues como $|x(t)|^{1-\alpha} > 0$, entonces, ha de ser $\text{sgn}(x)(1-\alpha)(t+C) > 0$, y dado que $1 - \alpha < 0$ por hipótesis de este caso, debe ser $\text{sgn}(x)(t + C) < 0 \ \forall \ t \in [t_0; t_1]$. Así, podemos despejar x finalmente, elevando la ecuación de antes a la $\dfrac{1}{1-\alpha}$ tenemos:
$|x(t)| = (\text{sgn}(x)(1-\alpha)(t+C))^{\frac{1}{1-\alpha}} \ \Rightarrow \ x(t) = \text{sgn}(x)(\text{sgn}(x)(1-\alpha)(t+C))^{\frac{1}{1-\alpha}} \ \forall \ t \in [t_0; t_1]$. Ahora que tenemos un candidato a solución, veamos qué candidatos a t_0 y t_1 conseguimos. Dado que $\dfrac{1}{1-\alpha} < 0$ pues $\alpha > 1$, luego nuestro candidato a solución x nos resulta siempre no nulo, por lo que cualquier par de valores t_0, t_1 hace que se cumpla que x no se anula entre ellos. Pero nuestra condición inicial nos dice que $x(0) = 0$, con lo que no existen t_0, t_1 donde la solución pueda valer 0 en 0, podemos concluir que no hay soluciones que sean distintas de 0 en algún lado ya que no existe ningún par de valores t_0, t_1 que cumplieran lo que queríamos. Así, nos fijamos si $x = 0$ es una solución de nuestro problema, en cuyo caso,

$x' = 0 = x^\alpha$ y $x(0) = 0$, como queríamos, así, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ x(t) = 0$ es la única solución a nuestro problema definida en un intervalo maximal.

- **Caso $\mathbf{0} < \alpha < \mathbf{1}$:** Para este caso, el razonamiento es parecido al realizado anteriormente, sólo que cambia un poco, ya que esta vez no da todo 0 pues, bajo el mismo razonamiento que antes, si suponemos que $\exists \ t_0, t_1 \in U, \ t_0 \leq t_1 \ / \ x(s) \neq 0 \ \forall \ s \in [t_0; t_1]$ y tomamos un $t \in [t_0; t_1]$, siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior llegamos a que $x(t) = \text{sgn}(x)(\text{sgn}(x)(1-\alpha)(t+C))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ donde $C = \dfrac{\text{sgn}(x)}{1-\alpha}|x(t_0)|^{1-\alpha} - t_0$. Como ahora el exponente $\dfrac{1}{1-\alpha}$ es positivo, el único valor donde $x(t) = 0$ es en $t = -C$, y ya que queremos que $x(0) = 0$, ha de ser $C = 0$, con lo que cualesquiera sean t_0, t_1, mientras ambos tengan el mismo signo, podemos garanatizar que x no se anulará entre ellos. Como en el caso anterior, también tenemos una restricción en la C, que sale de realizar el procedimiento del caso anterior, esto nos dice que $\text{sgn}(x)(t + C) > 0 \ \forall \ t \in [t_0; t_1]$ (donde estoy tomando t_0, t_1 ambos con el mismo signo) $\Rightarrow \text{sgn}(x)t > 0$, luego, si $t_0, t_1 > 0 \ \Rightarrow \ t > 0$ y $\text{sgn}(x) = 1$ o si no, $t_0, t_1 < 0 \ \Rightarrow \ t < 0$ y $\text{sgn}(x) = -1$. Esto nos dice que podemos definir a x como la solución que conseguimos antes, siempre y cuando sea negativa en los reales negativos y sea positiva en los reales positivos. Así, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ x(t) = \begin{cases} ((1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } t \geq 0 \\ -((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ es una función bien definida, vale que $x(0) = 0$, es una función continua pues ambas partes son continuas y tienden a 0 en 0 y está definida en un intervalo maximal. Lo único que no queda evidentemente claro es que sea una función $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, ni siquiera es claro si es derivable. Veamos estas dos cosas. Primero, sabemos que x es derivable en $\mathbb{R}_{>0}$ y en $\mathbb{R}_{<0}$, así que veamos qué pasa en 0. Para eso, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{((1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{t} = (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = 0$ pues $\dfrac{1}{1-\alpha} - 1 > 0 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{1}{1-\alpha} > 1 \ \underset{1-\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \ 1 > 1 - \alpha \ \Leftrightarrow \ 0 > -\alpha \ \Leftrightarrow \ \alpha > 0$ que sabemos que vale. De la misma manera vemos el límite que falta, $\displaystyle\lim_{t \to 0^-} \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^-} \frac{-((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{t} = (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \lim_{t \to 0^-} (-t)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = 0$ con lo que conseguimos que x es derivable en 0, y por extensión, lo es en $\mathbb{R}$, donde además sabemos que $x'(0) = 0$. Nos resta ver si x' es continua en $\mathbb{R}$. Para eso, si derivamos x conseguimos que $x'(t) = \begin{cases} ((1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} & \text{si } t \geq 0 \\ ((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$, que sabemos que está bien definida en 0 por los límites de recién y nos resulta continua en el origen también, ya que, como los exponentes son positivos, todo tiende a 0 en 0. Así, ya que ambas componentes de x' son continuas en $\mathbb{R}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{<0}$ respectivamente, tenemos que x' es continua en $\mathbb{R}$ con lo que podemos afirmar finalmente $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Rápidamente podemos ver que es solución a nuestro problema ya que si le tomamos módulo a $x(t)$ el $-$ de la segunda guarda se desvanece y elevar $|x(t)|$ a la α multiplica los exponentes que tiene la x, dando $\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ en el exponente, que es igual al exponente de x', puesto que $\dfrac{1}{1-\alpha} - 1 = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, y es la única solución que no se anula en algún lado. Miremos ese último caso, cuando $x = 0$, este, como siempre, es solución, y así, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ x(t) = 0$ es solución al problema.

Conclusión: Hemos encontrado dos soluciones al problema, estas son:

- $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ x(t) = 0 \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$
- $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ x(t) = \begin{cases} ((1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } t \geq 0 \\ -((1-\alpha)|t|)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad \forall \ 0 < \alpha < 1$