ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES DE PRIMER ORDEN NO HOMOGENEOS

Ya hemos visto que un sistema de la forma

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad t \in I \qquad (*)$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, $A = (a_{ij})$, $b = (b_j)$ y $a_{ij}, b_j : I \to \mathbb{R}$ son funciones continuas para $i, j: 1, \dots, n$; admite soluciones definidas en todo I.

También vimos que si $b(t) = 0$ para todo $t \in I$, es decir, si cada componente de b es la función nula, entonces el conjunto solución de $(*)$, que queda

$$x'(t) = A(t)x(t) \qquad t \in I \qquad (**)$$

es un espacio vectorial de dimensión n.

Luego, si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de soluciones de (**), la solución general de (*) será $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

para $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

A continuación estudiaremos cómo determinar la solución general de (*) a partir de conocer la solución general de (**) y una solución particular de (*).

TEOREMA Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $A = (a_{ij})$, $b = (b_j)$ y $a_{ij}, b_j : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas para $i, j = 1, \dots, n$. Entonces La solución general del sistema no homogeneo (*) está dada por

$$x = x_H + x_p$$

 donde x_H es la solución general del sistema homogeneo (**) asociado a (*) y x_p es una solución particular de (*).

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Sea x_p una Solución de (*). Hay que demostrar que si x es solución de (*) entonces x se expresa como la suma de x_p con una solución de (**), y que si x es la suma de x_p con una solución de (**) entonces x resuelve (*).

Veamos lo primero. Sea x solución de (*). Observamos que

$$x = x_p + (x - x_p)$$

y que $(x - x_p)$ resuelve (**) ya que

$$(x(t) - x_p(t))' = x'(t) - x_p'(t) =$$

x y x_p son soluciones de (*)

$A(t)x(t) + b(t) - (A(t)x_p(t) + b(t)) = A(t)(x(t) - x_p(t))$

para todo $t \in I$. Por lo tanto, x se puede escribir como la suma de x_p con una solución de (**).

Veamos ahora lo segundo. Sea $x = x_p + y$ donde y resuelve (**). Resulta

$x'(t) = x_p'(t) + y'(t) =$ x_p es solución de (*) e y lo es de (**)

$A(t)x_p(t) + b(t) + A(t)y(t) = A(t)x(t) + b(t)$

para todo $t \in I$. Por lo tanto, x es solución de (*). ▨

Dada una base de soluciones de (**), encontrar la solución general de (*) se reduce a encontrar una solución particular de (*). A continuación presentaremos un método para determinar una solución particular de un sistema no homogeneo.

- **Método de variación de las constantes**

La idea de este método consiste en buscar una solución particular de (*) en la forma

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t) \qquad (***)$$

donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de soluciones de (**) y $c_1, \ldots, c_n$ son funciones a determinar.

<u>OBSERVACIÓN</u> Notar que toda solución de (**) es de la forma

$$y(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t)$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Con el método de variación de las constantes se busca una solución de (*) en esta misma forma pero reemplazando las constantes $c_1, \dots, c_n$ por cantidades que varían con t, $c_1(t), \dots, c_n(t)$.

Veamos cómo aplicar este método en un ejemplo.

EJEMPLO Vamos a determinar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + \dfrac{e^t}{\cos(2t)} \end{cases}$$

para $t \in (0, \pi/4)$. Para ello vamos a determinar primero una base de soluciones del sistema homogeneo asociado

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

y luego vamos a buscar una solución particular del sistema no homogeneo con el método de variación de las constantes.

.. Base de soluciones del sistema homogeneo asociado

La matriz de coeficientes del sistema homogeneo asociado es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A no depende de t, sabemos cómo encontrar una base de soluciones a partir de conocer los autovalores y los autovectores de A. El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4,$$

de donde vemos que los autovalores de A son $\lambda = 1+2i$ y $\bar{\lambda} = 1-2i$ (raíces de $p(\lambda)$). Luego, las funciones x_1 y x_2 definidas como $x_1(t) = \mathrm{Re}(v e^{\lambda t})$ y $x_2(t) = \mathrm{Im}(v e^{\lambda t})$ forman una base de soluciones, donde v es un autovector de A asociado a λ.

Busquemos $v = (v_1, v_2)$:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2i v_1 - 2v_2 = 0$$

Elegimos $v = (1, i)$. Como

$$v e^{\lambda t} = (1,i) e^{(1+2i)t} = (1,i) e^t (\cos(2t) + i \,\mathrm{sen}(2t))$$

$$= \underbrace{e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}}_{\hookrightarrow \mathrm{Re}(v e^{\lambda t})} + i \underbrace{e^t \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}}_{\hookrightarrow \mathrm{Im}(v e^{\lambda t})}$$

resulta

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} \quad y \quad x_2(t) = e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

• Solución particular del sistema no homogeneo

De acuerdo con la idea del método de variación de las constantes, buscamos una solución particular de la forma

$$x_p(t) = c_1(t)\, x_1(t) + c_2(t)\, x_2(t)$$

donde c_1 y c_2 son funciones a determinar. Conviene aquí introducir la matriz fundamental para el sistema homogeneo,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t) \\ -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow x_1(t)$ $\hookrightarrow x_2(t)$

 y recordar que $Q'(t) = A\,Q(t)$. Luego, como $x_p(t) = Q(t)\,C(t)$ para $C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$, resulta

$$x_p'(t) = A\,x_p(t) + b(t) \iff$$

$$\underbrace{\cancel{Q'(t)\,C(t)}}_{\hookrightarrow A Q(t)} + Q(t)\,C'(t) = \cancel{A Q(t) C(t)} + b(t) \iff$$

$$Q(t)\,C'(t) = b(t)$$

donde $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t/\cos(2t) \end{pmatrix}$. Entonces, para determinar c_1 y c_2, buscamos primero $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$ resolviendo

$$Q(t)\,C'(t) = b(t)$$

para cada $t \in (0, \pi/4)$. Notar que este sistema se puede escribir como

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos(2t) + c_2'(t)\,\mathrm{sen}(2t) = 1 \\ -c_1'(t)\,\mathrm{sen}(2t) + c_2'(t)\cos(2t) = \dfrac{1}{\cos(2t)} \end{cases}$$

Dado $t \in (0, \pi/4)$, los valores de $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$ están dados por (ejercicio)

$$\begin{cases} c_1'(t) = \cos(2t) - \dfrac{\mathrm{sen}(2t)}{\cos(2t)} \\ c_2'(t) = \mathrm{sen}(2t) + 1 \end{cases}$$

Integrando miembro a miembro cada una de estas expresiones, obtenemos (ejercicio)

$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t) + \dfrac{1}{2}\ln(\cos(2t)) \\ c_2(t) = t - \dfrac{1}{2}\cos(2t) \end{cases}$$

(eligiendo la constante de integración igual a cero)

Se obtiene así la siguiente solución particular del sistema no homogeneo.

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

(ejercicio)

$$= e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(2t)\ln(\cos(2t)) \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)\ln(\cos(2t)) + t\cos(2t) \end{pmatrix}$$

para $t \in (0, \pi/4)$.

Ya estamos en condiciones de dar la solución general del sistema no homo-geneo,

$$x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{\text{Solución part. del sist. no hom.}} + \underbrace{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)}_{\text{solución general del sistema homogeneo}}$$

para $t \in (0, \pi/4)$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Luego (ejercicio),

$$x_1(t) = e^t\left(\frac{1}{2}\cos(2t)\ln(\cos(2t)) + c_1\cos(2t) + c_2\,\mathrm{sen}(2t)\right)$$

$$x_2(t) = -e^t\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)\ln(\cos(2t)) - t\cos(2t) + c_1\,\mathrm{sen}(2t) - c_2\cos(2t)\right).$$

 Bajo ciertas condiciones, el método de variación de las constantes permite obtener una solución particular de un sistema no homogeneo. De esto se trata el siguiente resultado.

<u>TEOREMA</u> Sean I, A y b como en el teorema anterior. Entonces existen funciones $c_1, \dots, c_n$ continuamente diferenciables en I tales que la función $x_p : I \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$x_p(t) = c_1(t)\, x_1(t) + \dots + c_n(t)\, x_n(t)$$

es solución de $x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$ para $t \in I$, donde $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de soluciones del sistema homogeneo asociado. Además, las funciones $c_1, \dots, c_n$ son primitivas de las funciones $c_1', \dots, c_n'$ respectivamente, que resuelven el sistema

$$Q(t)\, C'(t) = b(t)$$

para cada $t \in I$, donde $C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ y Q es la matriz fundamental del sistema homogeneo asociado, correspondiente a la base $\{x_1, \dots, x_n\}$.

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Opcional, se la puede consultar en el apunte de Wolanski, pág. 31 $\boxed{}$