ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

INTRODUCCIÓN

<u>EJEMPLO</u> Si una partícula se mueve siguiendo una trayectoria σ, es decir, si su posición en un instante t es

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

entonces $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es el vector velocidad de la partícula en el instante t.

Si anotamos con $V(t,x,y,z)$ al vector velocidad de la partícula en el instante t en la posición (x,y,z) entonces $V(t,x,y,z) = V(t,\sigma(t))$. Luego

$$\sigma'(t) = V(t, \sigma(t))$$

Si $V = (V_1, V_2, V_3)$ entonces

$$\begin{cases} x'(t) = V_1(t, x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = V_2(t, x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = V_3(t, x(t), y(t), z(t)) \end{cases} \qquad (*)$$

A partir de esto vemos que si queremos averiguar la trayectoria de una partícula que se mueve con campo de velocidad V, para la cual conocemos su posición en algún instante t_0, digamos $\sigma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, entonces basta hallar funciones x, y, z que verifiquen $(*)$ junto con

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \qquad (***)$$

<u>EJEMPLO</u> Vamos a determinar la trayectoria de una partícula que se mueve con campo de velocidad

$$V(t, x(t)) = x(t)$$

y que está en la posición $x = 1$ si $t = 0$.

Razonando como en el ejemplo anterior (ahora para una partícula que sigue una trayectoria unidimensional dada por $\sigma(t) = x(t)$), planteamos

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) & (*) \\ x(0) = 1 & (**) \end{cases}$$

A continuación veremos una estrategia para hallar una función x que verifique (*) y (**). La idea básica es hallar una "candidata" y luego verificar si esta candidata cumple lo que queremos.

- **Búsqueda de una candidata**

Supongamos que x cumple (*),

$$x'(t) = x(t)$$

A partir de ahora razonamos "formalmente" (ignoramos varios aspectos que deberían tenerse en cuenta en un cálculo riguroso, como asegurarnos que no estamos dividiendo por cero, etc.) Luego,

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 1$$

Integrando miembro a miembro con respecto a t, queda

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = t + c$$

para $c \in \mathbb{R}$. Haciendo la sustitución $u = x(t)$, obtenemos

$$\ln(x(t)) = t + c$$

para $c \in \mathbb{R}$. Luego,

$$x(t) = A e^{t}$$

donde hemos anotado $A = e^{c}$.

Si, además, x satisface (**),

$$x(0) = 1$$

entonces debe ser $A = 1$.

Nuestra candidata es $x(t) = e^{t}$, $t \in \mathbb{R}$.

- La candidata, satisface lo que queremos?
  - $x'(t) = e^t = x(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$ ✓
  - $x(0) = 1$ ✓

Concluimos que "la" trayectoria de la partícula está dada por

$$x(t) = e^t \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (***)$$

<u>OBSERVACIÓN</u> La estrategia anterior no asegura que la función x dada (***) sea la única que cumple (*) y (**). No obstante, en este caso sí se puede demostrar que es la única.

<u>OBSERVACIÓN</u> Si una partícula se mueve con el mismo campo de velocidad que en

el ejemplo anterior pero en el instante $t_0=0$ se encuentra en la posición $a \in \mathbb{R}$ entonces su trayectoria satisface

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = a \end{cases}$$

a partir de lo cual se deduce que

$$x(t) = a e^t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Notar que si dos partículas se mueven con el mismo campo de velocidad y en el instante $t_0 = 0$ están en posiciones distintas entonces sus trayectorias no se cortan.

<u>OBSERVACIÓN</u> En el ejemplo anterior resolvimos

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) & (*) \\ x(t_0) = a & (**) \end{cases}$$

con $t_0 = 0$, $a = 1$ y F dado por

$$F(t, x) = x,$$

y encontramos una única (no probamos unicidad, pero vale) solución, la cual está definida en $\mathbb{R}$. La existencia, unicidad y dominio de definición de solución de $(*)$ y $(**)$ depende del lado derecho F de $(*)$.
Por ejemplo, cuando F depende de manera no lineal de x, muchas veces se pierde la unicidad de solución o la posibilidad de tenerla definida en toda la recta real $\mathbb{R}$. A continuación veremos dos ejem-

plos en esta dirección.

EJEMPLO Buscamos una solución de

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t))^2 & (*) \\ x(0) = 1 & (**) \end{cases}$$

con el método descripto en el ejemplo anterior. Supongamos que (*) admite una solución x. Procediendo formalmente, encontramos lo siguiente:

$$x'(t) = (x(t))^2 \Rightarrow \frac{x'(t)}{(x(t))^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\int \frac{x'(t)}{(x(t))^2}\,dt = \int 1\,dt \Rightarrow \frac{-1}{x(t)} = t + c \Rightarrow$$

sustitución $u = x(t)$ en el lado izquierdo

$$x(t) = \frac{-1}{t+c} \quad \text{para } c \in \mathbb{R}.$$

Si, además, x cumple (**) entonces

$$x(0) = -\frac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1.$$

Entonces proponemos como solución a

$$x(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{con } t \in (-\infty, 1)$$

La función $t \mapsto 1/1-t$ está definida en $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. Al resolver problemas como (*) y (**), interesa hallar soluciones definidas en intervalos (no daremos ahora las razones de esto, pero una idea al respecto se puede tener pensando a t como una variable temporal, tal como en el ejemplo anterior). Como buscamos que $t=0$ esté en el dominio de x, elegimos definir a x en $(-\infty, 1)$.

Es sencillo comprobar que x cumple (*)

y (**), así que encontramos una solución.

<u>OBSERVACIÓN</u> La solución que encontramos no sólo no está definida en todo $\mathbb{R}$ sino que no se puede extender con continuidad para $x \geq 1$ ya que $\lim_{x \to 1^-} x(t) = +\infty$.

<u>EJEMPLO</u> Buscamos una solución de

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)} & (*) \\ x(0) = 0 & (**) \end{cases}$$

Es directo que la función nula,

$$x(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

es solución de (*) y (**). ¿Hay alguna solución no nula definida en $\mathbb{R}$?

Siguiendo las mismas ideas que antes se deduce que

$$x(t) = \frac{t^2}{4} \quad \text{con} \quad t \in [0, +\infty)$$

es solución de (*) y (**). Observar que si definimos x con $t \in \mathbb{R}$ ya no se verifica (*) para $t < 0$. No obstante podemos extender x a una solución en $\mathbb{R}$ definiendo

$$x(t) = \begin{cases} t^2/4 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La verificación de que esta función es solución de (*) y (*) se deja como ejercicio.

<u>OBSERVACIÓN</u> A diferencia de lo que pasó con el problema $x'(t) = (x(t))^2$, $x(0) = 1$, ahora fue posible extender una solución (no nula) a $\mathbb{R}$.

EJEMPLO Consideremos una partícula que sigue una trayectoria σ, sobre la

cual actúa una fuerza $F=(F_1,F_2,F_3)$. Supongamos, por comodidad que la partícula tiene masa igual a 1. Usando que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, deducimos que

$\sigma''(t) = F(t,\sigma(t))$. Si $\sigma=(x,y,z)$ entonces

$$\begin{cases} x''(t) = F_1(t, x(t), y(t), z(t)) \\ y''(t) = F_2(t, x(t), y(t), z(t)) \\ z''(t) = F_3(t, x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

Si anotamos $x_0 = x$; $x_1 = x'$;

$y_0 = y$; $y_1 = y'$; $z_0 = z$; $z_1 = z'$

entonces lo anterior se expresa como

$$\begin{cases} x_0'(t) = x_1(t) \\ x_1(t) = F_1(t, x(t), y(t), z(t)) \\ y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1(t) = F_2(t, x(t), y(t), z(t)) \\ z_0'(t) = z_1(t) \\ z_1(t) = F_3(t, x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

Más adelante veremos que la ventaja de esta reescritura radica en que el mayor orden de derivación que aparece en cada ecuación es 1.

<u>EJEMPLO</u> Si en el ejemplo anterior suponemos que la fuerza F no sólo depende del instante t y de la posición (x, y, z) sino que también

depende de la velocidad (x', y', z') entonces un razonamiento análogo conduce a

$$\begin{cases} x_0'(t) = x_1(t) \\ y_0'(t) = y_1(t) \\ z_0'(t) = z_1(t) \\ x_1(t) = F_1(t, x(t), y(t), z(t), x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \\ y_1(t) = F_2(t, x(t), y(t), z(t), x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \\ z_1(t) = F_3(t, x(t), y(t), z(t), x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \end{cases}$$

lo cual tiene la forma

$$\varphi'(t) = G(t, \varphi(t))$$

si anotamos $\varphi = (\sigma, \sigma')$ y G es la función que corresponde al lado derecho. El par (σ, σ') se denomina "fase".

<u>OBSERVACIÓN</u> Notar que φ es una trayectoria del campo G. Si queremos determinar la trayectoria σ de la partícula a partir de la trayectoria φ en el espacio de fases entonces necesitamos conocer φ en algún instante t_0. Es decir, necesitamos conocer la posición y la velocidad de la partícula en dicho instante.

En todos los ejemplos anteriores aparecieron ecuaciones o sistemas de ecuaciones donde la o las incógnitas son funciones dependientes de una única variable real, y en los cuales aparece al menos una derivada de la o las funciones incógnita. Se tratan de "problemas diferenciales ordinarios". En lo que sigue estudiaremos ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.