Práctica 6, Ejercicio 11, inciso iv)

Análisis 2 - Mate 3

2do Cuatrimestre - 2020

Índice

1. Enunciado del problema

Hallar la solución de la siguiente ecuación empleando la solución dada:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad I = (-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty) \qquad y_1(x) = x$$

Esta ecuación es un caso particular de la llamada *Ecuación de Leggendre*, esto es:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

correspondiente al caso $p = 1$, en los intervalos en que la ecuación es normal.

2. Comprobación de la solución

Antes de arrancar a resolver el problema, es una buena costumbre comprobar que la solucion que nos aportaron efectivamente es solución de la ecuación diferencial. Imagínense que hubo un problema y esa solución está mal escrita. Nunca voy a llegar a encontrar la otra solución del problema, porque partí de algo que no era solución.
Calculemos entonces la primera y segunda derivada de mi solución.

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= C_1 x \\
y_1'(x) &= C_1 \\
y_1''(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Fíjense que agregué una constante. Esto es porque si $y_1(x)$ es una solución, una constante por mi solución sigue siendo solución. De esta manera considero el caso más general de la solución. Reemplacemos esto en la ecuación.

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)\cdot 0 - 2x\cdot C_1 + 2\cdot C_1 x \\
-2xC_1 + 2C_1 x = 0
\end{aligned}
$$

Perfecto, la solución cumple la ecuación para todo valor de x.

3. Planteo de la ecuación a resolver

Para resolver este ejercicio vamos a plantear que podemos escribir la segunda solución $y_2(x)$ como:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)$$

Donde $v(x)$ es una función que tenemos que hallar. Si $y_2(x)$ es una solución de la ecuación, entonces si la reemplazo debe cumplirla. De allí obtendremos una ecuación diferencial que nos permitirá hallar la $v(x)$. Este método que vamos a utilizar se llama Método de Reducción del orden, ya que al proponer este tipo de solución, transformaremos la Ecuación Diferencial de Segundo Orden en una de Primer Orden para la $v'(x)$. Es importante recordar que este método es aplicable en la medida de que primero conozca una solución de la ecuación diferencial. Sin mi $y_1(x)$ no podría arrancar a resolver esto.
Calculemos la derivada primera y segunda de $y_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= v(x)x \\
y_2'(x) &= v'(x)x + v(x) \\
y_2''(x) &= v''(x)x + 2v'(x)
\end{aligned}
$$

Luego, reemplazando en la ecuación nos queda:

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)(v''(x)x+2v'(x))-2x(v'(x)x+v(x))+2v(x)x&=0\\
v''(x)\cdot x(1-x^2)+2v'(x)(1-x^2)-2v'(x)x^2-\cancel{2xv(x)}+\cancel{2xv(x)}&=0\\
v''(x)\cdot x(1-x^2)+2v'(x)(1-x^2-x^2)&=0\\
v''(x)\cdot x(1-x^2)&=-2v'(x)(1-2x^2)\\
v''(x)=-2\frac{v'(x)(1-2x^2)}{x(1-x^2)}, &\quad \text{Considero } x\neq 0\\
\frac{v''(x)}{v'(x)}&=-2\frac{1-2x^2}{x(1-x^2)}
\end{aligned}
$$

Cabe mencionar, en la línea en que paso el término $x(1-x^2)$ dividiendo, no aclaro que x deba ser distinto a 1 o -1, debido a que ya el enunciado me pide estudiar las soluciones a la ecuación diferencial en conjuntos que no contienen a estos números. Por tanto, no es ningún problema pasar el $1-x^2$ dividiendo, ya que esa expresión no se anula en los intervalos que estoy analizando.
Observen que llegamos a una expresión de variables separadas para la función $v'(x)$. Por una simple cuestión visual, para no confundirnos, voy a renombrar a la $v'(x)=z(x)$. Por tanto, esto me modifica la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$
\frac{z'(x)}{z(x)}=-2\frac{1-2x^2}{x(1-x^2)}
$$

Del lado de la izquierda de la ecuación la integral me queda $ln|z|+K$, con K una constante de integración y que después puedo desestimar. Lo interesante va a ser resolver el lado derecho de la ecuación.

4. Cálculo de z(x)

Para resolver el lado derecho de mi ecuación, utilizo fracciones simples.

$$
\begin{aligned}
\frac{1-2x^2}{x(1-x^2)}&=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{x}\\
1-2x^2&=x(1-x)A+x(1+x)B+(1-x^2)C\\
\text{Si x = 0:}\quad 1&=C\\
\text{Si x = 1:}\quad -\frac{1}{2}&=B\\
\text{Si x = -1:}\quad \frac{1}{2}&=A
\end{aligned}
$$

Luego coloco esto en la integral:

$$
\begin{aligned}
\int -2\frac{1-2x^2}{(1-x^2)x}\,dx &= -2\left[\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x} + \int\frac{dx}{x}\right] = \\
&= -\int\frac{dx}{1+x} + \int\frac{dx}{1-x} - 2\int\frac{dx}{x} = -ln|1+x| - ln|1-x| - 2\,ln|x| = \\
&= -ln(|1+x||1-x|) - 2\,ln|x| = \boxed{-ln(|1-x^2|) - 2\,ln|x|}
\end{aligned}
$$

Resuelta la integral, ahora puedo hallar la función $z(x)$.

$$
\begin{aligned}
ln|z| &= -ln(|1-x^2|) - 2\,ln|x| + K \\
|z| &= e^{-ln(|1-x^2|)-2\,ln|x|+K} \\
|z| &= e^{ln\left(\frac{1}{|1-x^2|}\right)+ln\left(\frac{1}{|x^2|}\right)+K} \\
|z| &= \frac{1}{|1-x^2|x^2}\cdot\underbrace{e^K}_{D}, \quad D\in\mathbb{R} \\
z(x) &= D\frac{1}{|1-x^2|x^2}, \quad \text{Elijo D} = 1 \\
z(x) &= \frac{1}{|1-x^2|x^2}
\end{aligned}
$$

Ahora que obtuvimos la $z(x)$, nuestro siguiente objetivo es hallar la $v(x)$. Para esto, recordemos que $v'(x) = z(x)$.

5. Cáculo de v(x)

De la condición anterior, podemos plantear:

$$
\begin{aligned}
v'(x) = z(x) &= \frac{1}{|1-x^2|x^2} \\
\int v'(x)\,dx &= \int\frac{1}{|1-x^2|x^2}\,dx \\
v(x) &= \int\frac{1}{|1-x^2|x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

Ahora debemos resolver una segunda integral. Hecho esto, habremos conseguido la segunda solución que queríamos buscar. Antes de continuar, esta es una buena ocasión para observar que nuevamente se vuelve a cumplir esa vieja ley de la conservación de la complejidad de un problema. Nótese que nuestra ecuación original era una de Orden dos, y nosotros la redujimos a una de Orden uno. En este paso, redujimos la dificultad del problema, pero esta ganancia que obtuvimos se trasladó a la cantidad de integrales que debemos resolver, ya que ahora se nos plantean dos integrales, una para $v'(x)$ y otra para $v(x)$. Es decir, lo que ganamos de un lado, lo perdimos del otro. A fin de cuentas, como en todo problema, es una cuestión de trasladar la dificultad al área donde nos resulte más fácil resolverla, pero el problema sigue teniendo su misma dificultad. Es decir, hay una conservación de la dificultad. (*Este es un discurso un poco informal para darles un punto de respiro en estas cuentas, antes de lo que sigue. Sin embargo estas ideas de trasladar la dificultad de un problema son ilustrativas del efecto que tiene un método en la resolución de un problema y espero les ayuden a visualizar mejor las transformaciones que realizan.*)

En el lado derecho de la integral, tenemos un término en el denominador que se encuentra dentro de un módulo. Este módulo es positivo y negativo en los siguientes intervalos:

$$\begin{cases} |1-x^2| = x^2-1\,, & \text{si } x \in (-\infty,-1) \text{ o } (1,\infty) \\ |1-x^2| = 1-x^2\,, & \text{si } x \in (-1,1) \end{cases}$$

Casualmente resulta que se divide en los intervalos que el enunciado me pide considerar. No olvidemos que me surgió como condición que $x \neq 0$. Tomando esto en cuenta, vamos a tener que considerar varios casos para hallar $v(x)$.

5.1. Caso $\mathbf{x} \in (-\infty,-1)$ o $(1,+\infty)$

En este caso $|1-x^2| = x^2-1$. Vuelvo a utilizar el método de fracciones simples para resolver esta integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2-1)x^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} \\ 1 = (x-1)x^2A + (x+1)x^2B + (x^2-1)xC &+ (x^2-1)D \\ \text{Si x = 0:} \quad -1 &= D \\ \text{Si x = 1:} \quad \frac{1}{2} &= B \\ \text{Si x = -1:} \quad -\frac{1}{2} &= A \\ \text{Si x = 2:} \quad 0 &= C \end{aligned}$$

Utilizando esto calculo la integral de $v(x)$:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int \frac{1}{(x^2-1)x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x^2} = \\ &= -\frac{1}{2}ln|x+1| + \frac{1}{2}ln|x-1| + \frac{1}{x} + \underbrace{K}_{=0} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{x} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{x}}, \quad \frac{x-1}{x+1} > 0\,\forall\, x \in (-\infty,-1) \end{aligned}$$

Fíjense que el cálculo para el caso $(1,+\infty)$ sale de manera muy similar.

Luego, nuestra solución $y_2(x)$ se escribe de la siguiente manera:

$$y_2(x) = \left[\frac{1}{2}\, ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{x}\right] \cdot x = \frac{1}{2} x\, ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 1$$

Donde esta solución vive en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$

Comprobemos que efectivamente esto es solución de la ecuación. Calculemos las derivadas de $y_2(x)$.

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= C_2\, \frac{1}{2}\, x\, ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C_2 \\
y_2'(x) &= C_2\, \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + x \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}\right] = C_2\, \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{2x}{(x^2-1)}\right] \\
y_2''(x) &= C_2\, \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2 \cdot (x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2}\right] = C_2\, \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(x^2-1)} + \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}\right] = \\
&= C_2\, \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(x^2-1)} - \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right] = C_2\, \frac{1}{2}\, \frac{\cancel{2x^2} - 2 - \cancel{2x^2} - 2}{(x^2-1)^2} = -\frac{2\, C_2}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Reemplacemos en la ecuación:

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\left(-\frac{2\, C_2}{(x^2-1)^2}\right) - \cancel{2}\, x\, C_2\, \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left[ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{2x}{(x^2-1)}\right] + 2\left[C_2\, \frac{1}{2}\, x\, ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C_2\right] = \\
=&\frac{2\, C_2}{x^2-1} - \cancel{C_2\, x\, ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} - C_2 \frac{2x^2}{x^2-1} + \cancel{C_2\, x\, ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} + 2C_2 = \\
=&C_2\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{2x^2}{x^2-1} + 2\right) = C_2\left(\frac{2-2x^2}{x^2-1} + 2\right) = \\
=&C_2\left(-2\, \frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{x^2-1}} + 2\right) = C_2(-2+2) = 0
\end{aligned}$$

Efectivamente la solución hallada cumple con la ecuación, por lo que el resultado al que arribamos es correcto. Ahora nos queda analizar el otro caso.

5.2. Caso $\mathbf{x} \in (-1, 1)$

En este caso $|1-x^2| = 1-x^2$. Si bien esto vale en todo el intervalo $(-1, 1)$, es importante notar que habíamos pedido como condición que x no valiera cero. Por lo que vamos a tener que separar este intervalo en dos, $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Contándoles el final de la película, las cuentas hechas en un intervalo son muy similares a la otra, y vamos a probar al final que la función puede ser definida en cero, lo cual nos permitiría armar una única función definida en TODO el intervalo. Empecemos trabajando en el intervalo $(-1, 0)$

$$v(x) = \int \frac{1}{(1-x^2)\, x^2}\, dx$$

Otra vez vamos a usar fracciones simples. Esta vez voy a usar directamente los resultados, les dejo a ustedes el hacer las cuentas.

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int \frac{1}{(1-x^2)\,x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{x^2} = \\
&= \frac{1}{2}ln|1+x| - \frac{1}{2}ln|1-x| - \frac{1}{x} + \underbrace{K}_{=0} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x} = \\
&= \boxed{\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{x}}, \quad \frac{1+x}{1-x} > 0\,\forall\, x \in (-1,0)
\end{aligned}$$

El cálculo para el caso (0,1) sale de manera muy similar.
Luego, nuestra solución $y_2(x)$ se escribe de la siguiente manera:

$$y_2(x) = \frac{1}{2}\,x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

Recordemos que nosotros habíamos partido de considerar dos intervalos separados, el (-1,0) y el (0,1). Pero la función en ambas regiones es la misma. Entonces si podemos definir la función en el cero, podemos considerar una única función para todo el intervalo (-1,1). Y efectivamente, si yo tomo el límite de $y_2(x)$ cuando x tiende a cero, el resultado que obtengo es el siguiente:

$$\lim_{x\to 0} y_2(x) = \lim_{x\to 0} C_2\,\frac{1}{2}\,\underbrace{x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}_{\to 0} - C_2 = -C_2$$

Es decir, puedo perfectamente definir la función en $x=0$. Además, como y_2 es resta, producto, división y composición de funciones C^∞, entonces y_2 es también C^∞.
Finalmente, me queda probar que la solución hallada efectivamente cumple con la ecuación diferencial. Veamos eso y habremos terminado.

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= C_2\,\frac{1}{2}\,x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - C_2 \\
y_2'(x) &= \frac{C_2}{2}\left[ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x\cdot\frac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^{\cancel{2}}}\right] = \frac{C_2}{2}\left[ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2x}{1-x^2}\right] \\
y_2''(x) &= \frac{C_2}{2}\left[\frac{2}{1-x^2} + \frac{2\cdot(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2}\right] = \frac{C_2}{2}\left[\frac{2}{1-x^2} + \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}\right] = \\
&= \frac{C_2}{2}\left[\frac{2(1-\cancel{x^2}) + 2 + \cancel{2x^2}}{(1-x^2)^2}\right] = \frac{C_2}{2}\left[\frac{4}{(1-x^2)^2}\right] = \frac{2\,C_2}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

Reemplazo esto en la ecuación diferencial:

$$\cancel{(1-x^2)}\frac{2\,C_2}{(1-x^2)^{\cancel{2}}} - \cancel{2}\,x\,\frac{C_2}{\cancel{2}}\left[ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{2x}{1-x^2}\right]+2\,C_2\,\left[\frac{1}{2}\,x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\right]=$$

$$=\frac{2\,C_2}{1-x^2} - \cancel{C_2\,x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} + C_2\,\frac{2x^2}{1-x^2} + \cancel{C_2\,x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - 2\,C_2 =$$

$$=C_2\left[\frac{2+2x^2-2\cdot(1-x^2)}{1-x^2}\right]=C_2\left[\frac{\cancel{2}+\cancel{2x^2}-\cancel{2}-\cancel{2x^2})}{1-x^2}\right]=0$$

Genial, esta función hallada también es solución de mi ecuación diferencial.

6. Resultado final

Por prolijidad, enunciemos la solución total del problema para terminemar definitivamente con este ejercicio. Despues vamos a tomar un café y estiramos un poco.
La solución general de mi ecuación diferencial se escribe de la siguiente manera:

$$y_G(x)=\begin{cases} C_1\,x+C_2\left[\frac{1}{2}\,x\,ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1\right]\,, & \text{si } x\in(-\infty,-1) \text{ o } (1,+\infty) \\ \\ C_1\,x+C_2\left[\frac{1}{2}\,x\,ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1\right]\,, & \text{si } x\in(-1,1) \end{cases}$$