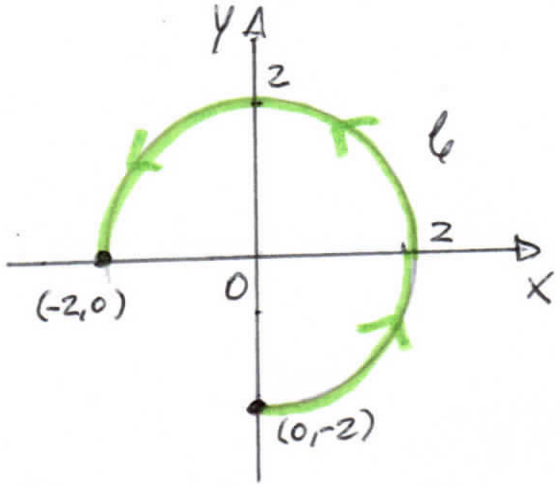
Ejemplo Calcule la circulación del campo F dado por

$$F(x,y) = \left(xy^3e^{x^2} + \operatorname{sen} x \,,\, \tfrac{3}{2}y^2e^{x^2} - y\cos\pi x\right)$$

a lo largo del arco de circunferencia de centro en el origen y radio dos recorrido en sentido antihorario desde el punto $(0,-2)$ hasta el punto $(-2,0)$.

Notemos que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Llamemos $\begin{cases} P(x,y) = xy^3e^{x^2} + \operatorname{sen} x \\ Q(x,y) = \frac{3}{2}y^2e^{x^2} - y\cos\pi x \end{cases}$

La curva está recorrida como se muestra a continuación:



Si parametrizamos $\mathcal{C}$ por medio de

$$\sigma(t) = (2\cos t \,,\, 2\operatorname{sen} t) \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

debemos calcular la siguiente integral

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = \int_{-\pi/2}^{\pi} F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi} \left(16\cos t\operatorname{sen}^3 t\, e^{4\cos^2 t} + \operatorname{sen}(4\cos t),\ 6\operatorname{sen}^2 t\, e^{4\cos^2 t} - \underset{2\operatorname{sen} t}{\cos}(\pi.2\cos t)\right)\cdot\sigma'(t)\,dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi} \left(-32\cos t\operatorname{sen}^4 t\, e^{4\cos^2 t} - \operatorname{sen} t\operatorname{sen}(4\cos t) + 12\cos t\operatorname{sen}^2 t\, e^{4\cos^2 t} - 2\operatorname{sen} t\cos(\pi.2\cos t).2\cos t\right)dt$$

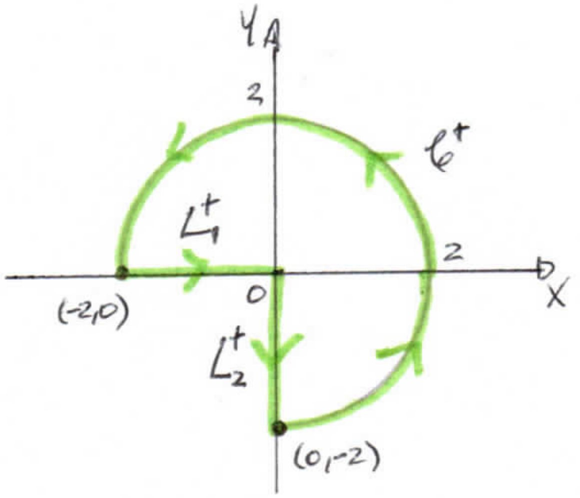
Haciendo el cambio $u = \operatorname{sen} t$, quizás con mucho esfuerzo se pueda calcular esta integral (Ejercicio)

Una técnica muy importante será forzar las condiciones para aplicar algún teorema integral.

En este caso quisiéramos aplicar el Teorema de Green, pero la curva $\mathcal{C}$ NO es cerrada.

Lo que vamos a hacer es cerrarla para poder aplicar el teorema.

Como $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ podemos cerrarla de la manera que más nos convenga, por ejemplo:



L_1^+ segmento horizontal

$\sigma_1(t) = (t, 0) \quad -2 \leq t \leq 0$

L_2^+ segmento vertical

$\sigma_2(t) = (0, -t) \quad 0 \leq t \leq 2$

$\mathcal{C}^+ \cup L_1^+ \cup L_2^+ = \partial D^+$ D "Pac-man relleno"

Por el Teorema de Green, podemos plantear que

$$\underbrace{\left(\int_{\mathcal{C}^+} + \int_{L_1^+} + \int_{L_2^+} \right)}_{\int_{\partial D^+}} F \cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

y "despejando"

$$\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA - \int_{L_1^+} F \cdot ds - \int_{L_2^+} F \cdot ds$$

Así, para obtener la integral de la izquierda, calcularemos las tres integrales de la derecha.

Empezamos calculando las integrales curvilíneas sobre ambos segmentos.

$$F(x,y) = \left(xy^3e^{x^2} + \operatorname{sen} x \,,\, \tfrac{3}{2}y^2e^{x^2} - y\cos \pi x \right)$$

$$\sigma_1(t) = (t, 0) \quad -2 \le t \le 0 \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_1'(t) = (1, 0)$$

$$\sigma_2(t) = (0, -t) \quad 0 \le t \le 2 \quad \rightsquigarrow \quad \sigma_2'(t) = (0, -1)$$

$$F(\sigma_1(t)) = (\operatorname{sen} t \,,\, 0) \quad \rightsquigarrow \quad F(\sigma_1(t))\cdot\sigma_1'(t) = \operatorname{sen} t$$

$$F(\sigma_2(t)) = \left(0 \,,\, \tfrac{3}{2}t^2 - t \right) \quad \rightsquigarrow \quad F(\sigma_2(t))\cdot\sigma_2'(t) = t - \tfrac{3}{2}t^2$$

Notemos que las funciones a integrar son sencillas. Entonces

$$\boxed{\int_{L_1^+} F\cdot ds} = \int_{-2}^{0} \operatorname{sen} t \, dt = -\cos t \Big|_{-2}^{0} = \boxed{-1+\cos(-2)}$$

$$\boxed{\int_{L_2^+} F\cdot ds} = \int_{0}^{2} \left(t - \tfrac{3}{2}t^2\right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} \Big|_{0}^{2} = \boxed{-2}$$

Ahora calculamos la integral doble.

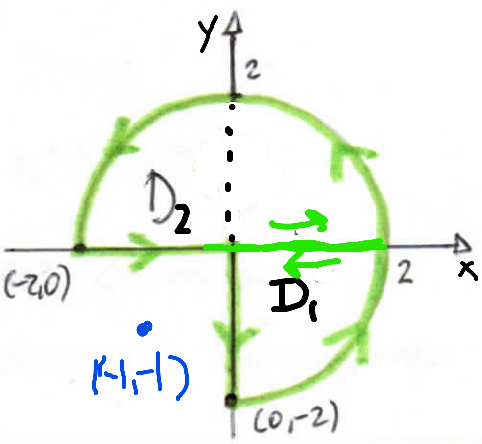
$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}} = 3xy^2e^{x^2} + \pi y \operatorname{sen} \pi x - \left(3xy^2e^{x^2} + 0 \right) = \boxed{\pi y \operatorname{sen} \pi x}$$

Entonces partiendo en dos al dominio D, por ejemplo como

$$D = D_1 \cup D_2$$

(tipo I) $\quad D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 2 \,,\, -\sqrt{2-x^2} \le y \le 0 \right\}$

(Tipo II) $\quad D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le 2 \,,\, -\sqrt{2-y^2} \le x \le \sqrt{2-y^2} \right\}$



Observación

Notemos que orientando de esa manera vale el Teorema de Green en D_1 y en D_2

ya podemos calcular la integral doble

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \pi y \operatorname{sen}\pi x \, dy\, dx}_{①} + \underbrace{\int_0^2 \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \pi y \operatorname{sen}\pi x \, dx\, dy}_{②}$$

C.A)

$$② = \int_0^2 \left[-y\cos\pi x \Big|_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \right] dy = \int_0^2 -y \Big[\underbrace{\cos(\pi\sqrt{2-y^2}) - \cos(-\pi\sqrt{2-y^2})}_{=0} \Big] dy = 0$$

$$① = \int_0^2 \pi \operatorname{sen}\pi x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} dx = \int_0^2 -(2-x^2)\cdot\pi \operatorname{sen}\pi x \, dx$$

$$= -2\pi \underbrace{\int_0^2 \operatorname{sen}\pi x\, dx}_{=0} + \pi \underbrace{\int_0^2 x^2 \operatorname{sen}\pi x \, dx}_{\text{partes } \times 2}$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = \pi \operatorname{sen}\pi x \end{cases}$$

$$= -x^2\cos\pi x \Big|_0^2 + 2\Big[\underbrace{x\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi}\Big|_0^2}_{=0} + \underbrace{\frac{\cos\pi x}{\pi^2}\Big|_0^2}_{=0} \Big]$$

$$= -4$$

Así $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \boxed{-4}$

Finalmente

$$\int_{\mathcal{C}^+} F\cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA - \int_{L_1^+} F\cdot ds - \int_{L_2^+} F\cdot ds$$

$$= -4 - (-1+\cos(-2)) - (-2)$$

$$= -1-\cos 2 .$$

<u>Ejercicio</u> ¿Como cerraría la curva anterior si ahora el campo es:

i) $G(x,y) = F(x,y) + \left(\sqrt{x^2+y^2}, 0\right)$

ii) $H(x,y) = F(x,y) + \left(0, \dfrac{1}{(x+1)^2+(y+1)^2}\right)$?

Note que ahora los campos G y H ya no son de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$, incluso H tiene un punto donde No está definido.

Ejemplo Sea $F=(P,Q):\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ de clase C^1 satisfaciendo:

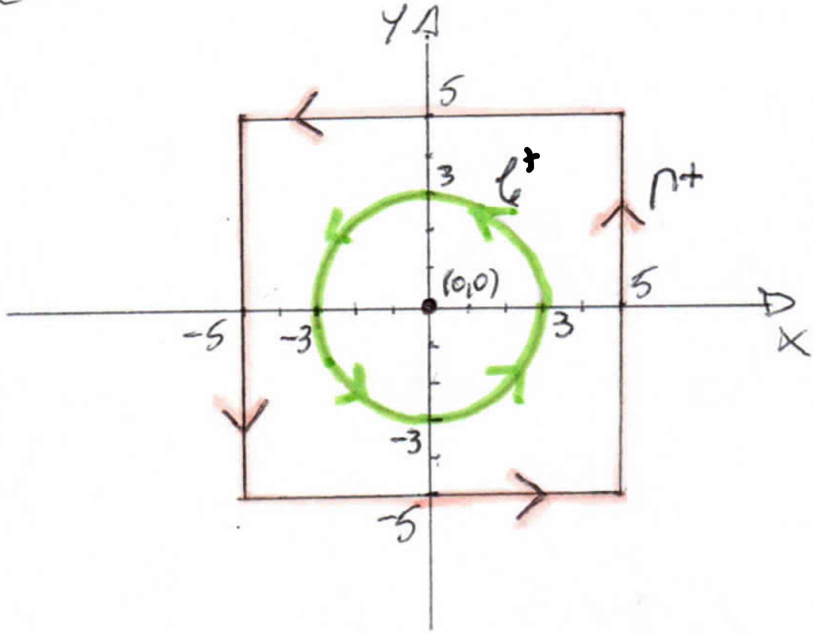
(i) $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=10 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(ii) $\oint_{\mathcal{C}} F\cdot ds = 7\pi$ con $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 3.

Calcule $\oint_{\Gamma^+} F\cdot ds$ siendo $\Gamma^+=\partial D^+$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \max(|x|,|y|)\leq 5\}$

Notemos que $D=[-5,5]\times[-5,5]$.



Como $(0,0)\notin \mathrm{Dom}\,F$ No podemos usar el Teorema de Green en

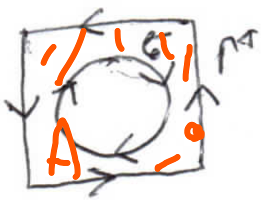
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 9\}$$

ni en D. Pero sí en

$$A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\geq 9,\ \max(|x|,|y|)\leq 5\}$$

(se puede unir el borde del cuadrado con la circunferencia con cuatro segmentos al igual de lo que se hizo con un anillo).

Ahora bien $\partial A^+=\Gamma^+\cup\mathcal{C}^-$.



Así

$$\oint_{\Gamma^+} F\cdot ds + \oint_{\mathcal{C}^-} F\cdot ds = \oint_{\partial A^+} F\cdot ds \overset{\text{Teo de Green}}{=} \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy .$$

Por hipótesis obtenemos :

- $$\oint_{\mathcal{C}^-} F\cdot ds = -\int_{\mathcal{C}^+} F\cdot ds = -7\pi .$$
- $$\iint_A \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=10} dx\,dy = 10 \text{ Área}(A) = 10\left(100 - 9\pi\right) .$$

Entonces

$$\oint_{\Gamma^+} F\cdot ds = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy - \oint_{\mathcal{C}^-} F\cdot ds$$

$$= 1000 - 90\pi + 7\pi$$

$$= 1000 - 83\pi$$

Ejercicio (Primer parcial 2°C 2015) (Enunciado retocado)

Sea $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\} \to \mathbb{R}$ de clase C^1

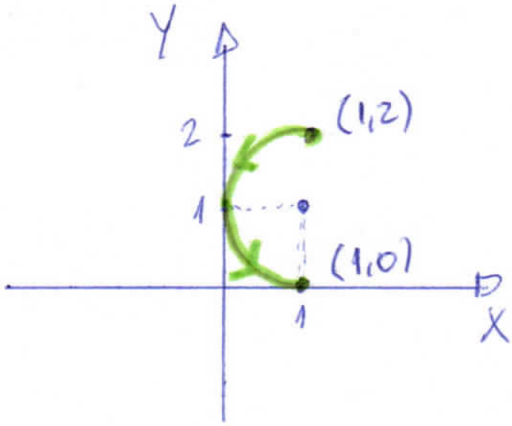
tal que:

(i) $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \quad \forall (x,y) \neq (1,1)$.

(ii) $\int_{H_b} F \cdot ds = -bL$ para cualquier segmento horizontal de longitud L y ordenada "b" que no pase por el $(1,1)$ y esté orientado de manera tal que el vector tangente tenga dirección $(1,0)$

(iii) $\int_{V_a} F \cdot ds = aL$ para cualquier segmento vertical de longitud L y abscisa "a" que no pase por el $(1,1)$ y esté orientado de manera tal que el vector tangente tenga dirección $(0,1)$

Calcule $\int_{\mathcal{C}^+} F \cdot ds$ siendo $\mathcal{C}^+$ el arco de circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 1 que se muestra más abajo.



(Para pensar, lo resolveré, si todo va bien, para la clase del 19/10)

$\boxed{\text{RTA}: \pi - 2}$