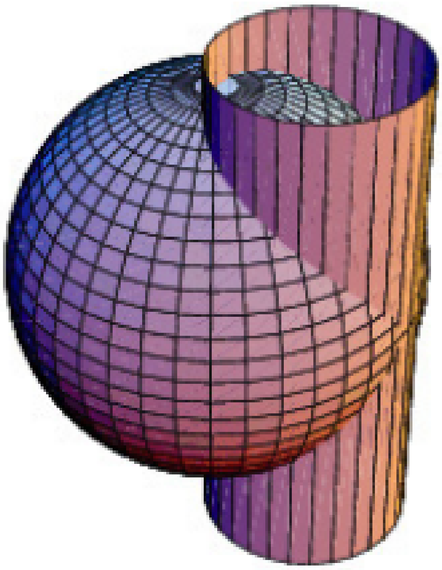
Práctica 2

Ejercicio 9.

Sea $R > 0$. Calcular el área de la superficie que se obtiene de intersecar la esfera $x^2+y^2+z^2 = R^2$ con el cilindro (relleno) $(x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2$.



Esta superficie se conoce como *bóveda de Viviani*.

Solución:

Por la simetría de esta superficie respecto al plano xy, para calcular su área, podemos considerar solamente la parte superior (es decir, $z \geq 0$) y luego multiplicar por 2 el área de esta sección de la bóveda de Viviani, que podemos llamar S.

Notemos que S es el gráfico de la función $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ con dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2\}$ y que f es de clase C^1 en el interior de D, D°.

Las derivadas parciales de f no están definidas en el punto $(R, 0) \in D$, pero dado que el borde de la superficie S no aporta a su área, podemos trabajar con D°.

De esta manera, obtenemos la siguiente parametrización C^1 de S:

$$T(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad \text{con } (x, y) \in D^\circ.$$

Por las primeras dos coordenadas, ya tenemos garantizada la inyectividad de esta parametrización.

Calculemos ahora las derivadas parciales de T y su producto vectorial:

$$\begin{aligned} T_x(x, y) &= (1, 0, f_x(x, y)) \\ T_y(x, y) &= (0, 1, f_y(x, y)) \\ (T_x \times T_y)(x, y) &= (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) \end{aligned}$$

Puesto que la tercera coordenada es siempre 1, se cumple que $T_x \times T_y \neq 0$ para todo $(x, y) \in D^\circ$. Por lo tanto, T es una parametrización regular de S y tenemos que

$$\acute{A}rea(S) = \int_{D^\circ} \|(T_x \times T_y)(x,y)\| \, dA = \int_{D^\circ} \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1} \, dA \tag{1}$$

Necesitamos entonces las derivadas parciales de f:

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$
$$f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (1), tenemos que

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea(S) &= \int_{D^\circ} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dA \\
&= \int_{D^\circ} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dA \\
&= \int_{D^\circ} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dA \qquad (2)
\end{aligned}$$

Para resolver esta integral, hagamos un cambio de variables, utilizando coordenadas polares para describir la región D°:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Veamos entre qué valores se mueven r y θ:

Sabemos que la descripción de la región D° es $(x - R/2)^2 + y^2 < (R/2)^2$; esto es, un círculo (sin el borde) de radio $R/2$ centrado en el punto $(R/2, 0)$. Dado que con nuestra parametrización estamos describiendo a D° desde el origen de coordenadas, el ángulo θ debe moverse entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Por otra parte, r se moverá desde 0 hasta la circunferencia de radio $R/2$, centrado en el punto $(R/2, 0)$, de manera que r dependerá del valor de θ. Para ver esta relación, observemos que

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(r\cos\theta - \frac{R}{2}\right)^2 + (r\sin\theta)^2 \\
&= r^2\cos^2\theta + \frac{R^2}{4} - rR\cos\theta + r^2\sin^2\theta \\
&= r^2 + \frac{R^2}{4} - rR\cos\theta
\end{aligned}$$

Ahora bien, si nos encontramos sobre la circunferencia, esta expresión es igual a $\left(\frac{R}{2}\right)^2$. Por lo tanto,

$$r^2 + \frac{R^2}{4} - rR\cos\theta = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Equivalentemente,

$$r^2 - rR\cos\theta = 0$$

De donde se desprende que

$$r = R\cos\theta$$

Tenemos entonces que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $0 < r < R\cos\theta$. Utilicemos esto para calcular la integral (2), recordando que el jacobiano de la transformación en coordenadas polares es r:

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea(S) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{R\cos\theta} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta \\
&= R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\sqrt{R^2 - r^2}\right)\Bigg|_0^{R\cos\theta} d\theta \\
&= R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R - R|\sin\theta|\, d\theta \\
&= R^2\left(\theta\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin\theta|\, d\theta\right) \\
&= R^2\left(\pi + \int_{-\pi/2}^{0}\sin\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta\right) \\
&= R^2\left(\pi - 2\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la bóveda de Viviani es igual a $2R^2\left(\pi - 2\right)$.