Práctica 0, ejercicio 14. Hallar el área acotada por la *lemniscata*, esto es, la curva dada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

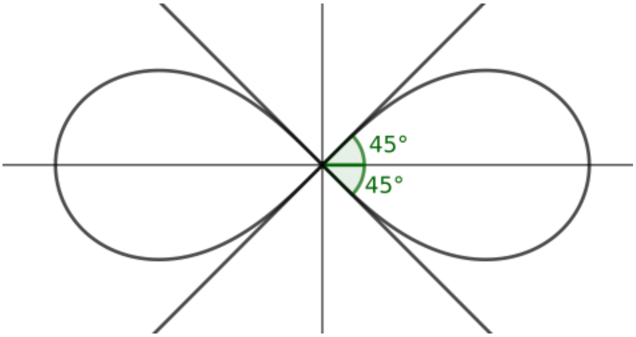
Solución. Si comenzamos parametrizando la curva en coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ entonces:

$$(r^2\cos^2(\theta) + r^2\mathrm{sen}^2(\theta))^2 = 2a^2(r^2\cos^2(\theta) - r^2\mathrm{sen}^2(\theta))$$

Como sabemos, $\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta) = 1$ y $\cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) = \cos(2\theta)$, por lo tanto la igualdad anterior es equivalente a:

$$r^4 = 2a^2r^2\cos(2\theta)$$

Luego la curva en coordenadas polares cumple que $r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$ y además $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$.



Si parametrizamos el interior de la *lemniscata* con polares

$$\begin{cases} x = t\cos(\theta) \\ y = t\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

con $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ y $t \in \left[0, \sqrt{2a^2\cos(2\theta)}\right]$, por el teorema de cambio de variables, como el Jacobiano de la parametrízación es t, el área del interior de la *lemniscata* es:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2a^2\cos(2\theta)}} t\,dt\,d\theta + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \int_0^{\sqrt{2a^2\cos(2\theta)}} t\,dt\,d\theta$$

Comencemos calculando la primera de las integrales:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{\sqrt{2a^2\cos\,(2\theta)}} t\,dt\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{\sqrt{2a^2\cos\,(2\theta)}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos\,(2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2}\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Analogamente, la segunda integral es:

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \int_{0}^{\sqrt{2a^2\cos\,(2\theta)}} t\,dt\,d\theta = a^2.$$

Concluimos que el área es $2a^2$.