Terminando superficies, empezando Stokes... de Análisis 2-Mate 3

Supongamos que tengo un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y tengo una superficie S que es subconjunto de $\{(x, y, z) : z = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$, parametrizada por $T(u, v) = (ucos(v), usin(v), 0)$ con $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ (Notar que $\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v} = (cos(v), sin(v), 0) \times (-usin(v), ucos(v), 0) = (0, 0, u)$, por lo que la normal dada por esta parametrización es $\frac{(0,0,u)}{||(0,0,u)||} = (0, 0, 1)$).

Digamos que por algún motivo nos pinta tener algo como una integral de $\vec{F}$ en la superficie S que nos devuelva un número. La integral tendría que ser algo como

$$\iint L_T(u, v) \cdot \vec{F}(T(u, v))||\frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u, v)}{\partial v}||dudv$$

.

Querríamos que esta integral tenga un significado geométrico claro, por lo que sería bueno que se lleve bien con las simetrías del espacio $\mathbb{R}^3$ (como la simetría de rotación respecto al eje z). Al rotar en un ángulo α en el eje z a $\vec{F}$ van a cambiar sus componentes F_1 y F_2, pero no su componente F_3. Si D es un disco, la superficie S no cambia tras la rotación. Si L_T tuviera componentes no nulos en las direcciones x, y entonces la integral antes y después de la rotación sería distinta, entonces si queremos que la integral no cambie por esto y además sea no nula, L_T debe ser proporcional a $(0, 0, 1)$. Entonces para un disco la integral debería ser

$$\iint \frac{\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}}{||\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}||} \cdot \vec{F}||\frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u, v)}{\partial v}||dudv$$

Esto es la integral de flujo sobre esta superficie. Como la fórmula $\iint \frac{\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}}{||\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}||} \cdot \vec{F}||\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}||dudv$ no depende de cantidades específicas de la superficie utilizada, podemos decir que nos da una noción natural de cómo integrar campos vectoriales para obtener magnitudes escalares.

Otro modo de verlo, es que si $\vec{F}$ es un campo de velocidad de un fluido, esta integral nos da una noción de cuanto fluido pasa por unidad de tiempo a travez de la superficie, por lo que nos dice cuanto entra y cuanto sale por la pared estudiada.

1. Stokes

Bueno, hoy empezamos con teorema de Stokes, que es algo así como querer hacer Green pero te encontraste que estabas en $\mathbb{R}^3$, y en lugar de llorar trataste de parchar la situación, y salió re bien. La idea es que una superficie es de a cachitos como un cachito del plano $\mathbb{R}^2$, o al menos se puede aproximar así, y que entonces la integral de superficie sobre la misma y la integral de curva sobre su borde deberían ser algo parecido a lo que teníamos en $\mathbb{R}^2$. Lo único que hay que asegurarse es tener una noción como la de $\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial x}$ para el caso de $\mathbb{R}^3$.

Si pensamos que $\mathbb{R}^2$ es asimilable a $\{(x, y, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (se embebe, sería la palabra matematicosa correspondiente) parametrizada por medio de $T(x, y) = (x, y, 0)$, la normal asociada a la parametrización será $(0, 0, 1)$. Entonces la integral de Green toma la forma $\iint (A, B, \frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1)\cdot(0,0,1)||T_u \times T_v||dudv$... Notamos que $\frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1$ tiene una forma parecida a $v_1F_2 - v_2F_1 = (\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix})_3$. Justo el producto vectorial sabíamos que se llevaba bien con rotaciones, de álgebra del CBC. Y también de análisis 1 sabíamos que lo mismo ocurría con el gradiente. Así que lo que reemplazará en $\mathbb{R}^3$ a la integral en área de Green será la integral de flujo $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot dS$. La integral de linea suponemos que será la misma. Esto es con los dedos y requeriría bastante trabajo probarlo a partir de un análisis de este estilo, pero por suerte el teorema este ya lo probaron en la teórica y en el apunte teórico, así que puedo decir el teorema como viene enunciado en la materia y nos vendrá a servir:

(Stokes) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $T : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S donde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región donde vale el teorema de Green. Supongamos que T es de clase C^2 y que ∂S^+ es la orientación del borde de S dada por $T(\partial D^+)$. Si $\vec{F}$ es un campo de clase C^1 definido en S, entonces
$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S^+} \vec{F}\cdot \sigma'(t)dt$

Leamos el ejercicio 1 de la práctica 4...
Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

El conjunto $\{(x, y, z) : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \wedge z \geq 0\}$ es una superficie de $\mathbb{R}^3$, propongo como parametrización a $T(u, v) = (cos(u)cos(v), cos(u)sin(v), sin(u))$ con $u \in [0, \frac{\pi}{2}], v \in [-\pi, \pi]$. $[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$ es una región en la que en principio puedo usar el teorema de Green, porque es una región de tipo III. Podemos verificar que $sin(u) \geq 0$ en el dominio de la parametrización, que $\sqrt{1 - (cos(u)cos(v))^2 + (cos(u)sin(v))^2} = \sqrt{1 - ((cos(v)^2 + sin(v)^2)cos(u)^2))} = \sqrt{1 - cos(u)^2} = |sin(u)| = sin(u)$. Dejo como taréa verificar que si (x, y, z) pertenecen a la superficie, existen u, v tales que $T(u, v) = (x, y, z)$.

Verifiquemos ahora que T es regular. $\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} = (-sin(u)cos(v), -sin(u)sin(v), cos(u))$ es continuo, y $\frac{\partial T(u,v)}{\partial v} = (cos(u)sin(v), cos(u)cos(v), 0)$ también es continuo. Entonces T es C^1. Ahora, calculemos la normal: $\frac{\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}}{||\frac{\partial T(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial T(u,v)}{\partial v}||} = (-cos(u)cos(v), -cos(u)sin(v), -sin(u$
0... Esto quiere decir que la normal no se anula. Acá estamos haciendo un poco de trampa, porque no estamos usando una parametrización regular de la esfera, pero es suficiente para el teorema que la superficie tenga normal continua y unívocamente definida por la parametrización, y eso es lo que estamos consiguiendo (implícitamente tomamos límite cuando la norma de los vectores daría cero). De última, el problema que tiene la regularidad de esta parametrización es en un punto donde el campo F no es singular, por lo que la contribución a la integral de flujo en donde hay problemas con la parametrización es de área cero, y al F ser regular allí la contribución es cero (si F divergiera allí, o tuviera algún problema serio de otro tipo, podría fallar esto que menciono).

Pueden verificar que las derivadas segundas son continuas e incluso las derivadas cruzadas coinciden. Entonces T es C^2.

El borde se puede parametrizar con $\sigma(v) = T(0,v) = (cos(v), sin(v), 0)$. Esta parametrización ya hemos visto en clase que es regular y orientada positivamente.

El campo vectorial (x, y, z) es C^1, como facilmente pueden comprobar. Entonces puedo usar el teorema de Stokes.

Ahora calculemos las dos integrales y chequeémos que está todo bien.

$$\iint_S \nabla \times (x,y,z) \cdot d\vec{S} = \iint_S (0,0,0) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_C (xdx + ydy + zdz) = \int_{-\pi}^{\pi} (cos(v)\frac{dcos(v)}{dv} + sin(v)\frac{dsin(v)}{dv})dv = 0$$

Así que las integrales coinciden, por lo que la lógica y la matemática siguen funcionando en este aula. Por ahora, por lo menos.

El ejercicio 3, salvo por el tip que tiro para el punto c, no es muy complicado, y da un conocimiento útil en varias instancias.

Ejercicio 3. (a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dubujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot dS$$

Suponiendo que para F y sobre ambas superficies vale el teorema de Stokes.

(b) Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = 0$$

(c) Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS$ donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $F = (\sin(xy), e^x, -yz)$. Tip: usar el item (b) de este ejercicio, luego de verificar las hipótesis del teorema de Stokes.

Ejercicio 4. En este ejercicio, nos piden estudiar la aplicabilidad de Stokes al campo $F = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$. Este campo es similar a el campo $(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ que ya conocíamos, pero mientras que ese campo era singular en un punto este lo es en una línea (porque lo es para todo z cuando $(x, y) = (0, 0)$). Si el campo fuera singular en un sólo punto y queremos aplicar stokes en una curva que no toca al punto, como una curva no puede encerrar a un punto en $\mathbb{R}^3$, porque siempre se puede deformar una superficie para esquivar un punto, sólo habría que tener cuidado en la elección de superficie. En cambio, una curva cerrada puede encerrar a una recta infinita (o a una curva cerrada), y eso impediría armarse una superficie en que Stokes nos pueda llegar a servir para esa curva, si el campo tiene una singularidad que forma una linea y etc.

El item (a) del ejercicio nos pregunta si se puede aplicar para este campo (que era singular en $(0, 0, z) \forall z \in \mathbb{R}$) en un círculo de un radio a y que está centrado en el origen... ¿Se puede aplicar?

Entre tanto, el item (b) (dependiendo de como interpretemos lo que nos dan) nos da una región en que si se puede aplicar Stokes (porque no cruza el $(0, 0, z)$).

Ulises Wainstein Haimovichi