1) $T: [-1,1]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3 / T(\theta,\varphi) = (\cosh\theta\cos\varphi, \cosh\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{senh}\theta)$

a. Para probar que T es regular debemos mostrar que es inyectiva, C^1 y $T_\theta \times T_\varphi \neq \vec{0}$ en todos los puntos.

- T es C^1 ✓
- Veamos que T es inyectiva:

Siguiendo la ayuda, vamos a probar primero que $f(x) = \operatorname{senh} x$ es inyectiva.

$$f'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

$\Rightarrow f$ es creciente (e inyectiva).

Supongamos ahora que $T(\theta_1,\varphi_1) = T(\theta_2,\varphi_2)$

La tercer coordenada nos dice que $\operatorname{senh}\theta_1 = \operatorname{senh}\theta_2$ y por lo tanto $\theta_1 = \theta_2$. Pero entonces

$$\begin{cases} \cancel{\cosh\theta_1}\cos\varphi_1 = \cancel{\cosh\theta_2}\cos\varphi_2 \\ \cancel{\cosh\theta_1}\operatorname{sen}\varphi_1 = \cancel{\cosh\theta_2}\operatorname{sen}\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

$\Rightarrow (\theta_1,\varphi_1) = (\theta_2,\varphi_2)$. ✓

- $T_\theta \times T_\varphi(\theta,\varphi) = (\underbrace{-\cosh^2\theta}_{\neq 0}\cos\varphi, \underbrace{-\cosh^2\theta}_{\neq 0}\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{senh}\theta\cosh\theta)$

Como $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$ no se anulan simultáneamente, $T_\theta \times T_\varphi(\theta,\varphi) \neq \vec{0}\ \forall(\theta,\varphi)$.

- Para calcular el plano tangente en $(1,0,0)$ Observemos que

$$T(0,0) = (1,0,0).$$

$$N(0,0) = \frac{T_\theta \times T_\varphi (0,0)}{\| T_\theta \times T_\varphi (0,0) \|} = (-1,0,0)$$

Entonces el plano tangente a S es $\{x=1\}$.

b_ Queremos calcular $\iint_S \rho(x,y,z)\, dS$. Como T es regular, podemos utilizarla:

$$\iint_S \rho(x,y,z)\, dS = \int_0^{\pi}\int_{-1}^{1} \rho \circ T(\theta,\varphi)\, \|T_\theta \times T_\varphi\|\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2\theta + \operatorname{senh}^2\theta}\ \cosh\theta \sqrt{\cosh^2\theta + \operatorname{senh}^2\theta}\, d\theta\, d\varphi$$

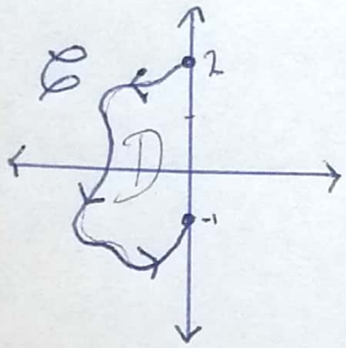
$$= \pi \int_{-1}^{1} \cosh\theta\, (1 + 2\operatorname{senh}^2\theta)\, d\theta \qquad \begin{array}{l} u = 1+2\operatorname{senh}^2\theta \\ du = 2\cosh\theta \end{array}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{(1+2\operatorname{senh}^2\theta)^2}{2} \right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

2) $\mathcal{C}$ es la curva parametrizada por

$\sigma : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2 / \sigma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\,\text{sen}(t))$,

Con $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ una función C^1 tal que $r(\frac{\pi}{2}) = 2$ y $r(\frac{3\pi}{2}) = 1$.



Sabemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \underbrace{(\tfrac{1}{2}e^{y^2} + \cos(x^3),\ x + e^{y^2}y(x+1))}_{F = (P,Q)} \cdot ds = \frac{e}{2}.$$

Área $(D) = ?$

D es la región encerrada por $\mathcal{C}$ y $L = \{x = 0;\ -1 \leq y \leq 2\}$.

Observemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Como $\mathcal{C} \cup L$ es suave a trozos, F es C^1 y D es unión de regiones de tipo III, podemos aplicar el teo. de Green:

$$\int_{\mathcal{C} \cup L^+} F \cdot ds = \iint_D \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{1} dA = \text{Área}(D)$$

$$\int_{\mathcal{C} \cup L^+} F \cdot ds = \underbrace{\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds}_{\frac{e}{2}} + \int_{\uparrow} F \cdot ds$$

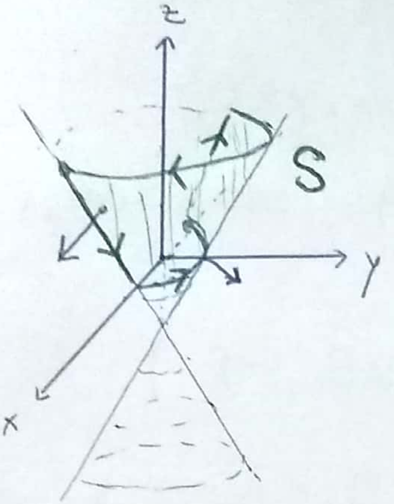
Uso la param. $\gamma : [-1,2] \to \mathbb{R}^2 / \gamma(t) = (0,t)$.

$$\int_{-1}^{2} \langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle dt = \int_{-1}^{2} t e^{t^2} dt = \frac{e^{t^2}}{2}\Big|_{-1}^{2} = \frac{e^4}{2} - \frac{e}{2}.$$

$$\Rightarrow \text{Área}(D) = \frac{e}{2} + \frac{e^4}{2} - \frac{e}{2} = \frac{e^4}{2}.$$

3) $S = \{ (z+1)^2 = x^2+y^2 \; ; \; 0 \le z \le 1, \; y \geq 0 \}$

a_



El borde de S es la unión de las curvas

$\mathcal{C}_1 = \{ x^2+y^2=1, \; z=0, \; y \geq 0 \}$,

$\mathcal{C}_2 = \{ x^2+y^2=4, \; z=1, \; y \geq 0 \}$,

$L_1 = \{ x=z+1, \; y=0, \; 0 \le z \le 1 \}$ y

$L_2 = \{ -x=z+1, \; y=0, \; 0 \le z \le 1 \}$.

Para parametrizarlo como en la figura (respetando la orientación de S) podemos tomar

$\sigma_1(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$; $0 \le \theta \le \pi$ (param. $\mathcal{C}_1$)

$\sigma_2(\theta) = (-2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 1)$; $0 \le \theta \le \pi$ (param. $\mathcal{C}_2$)

$\gamma_1(t) = (2-t, 0, 1-t)$; $0 \le t \le 1$ (param. L_1)

$\gamma_2(t) = (-1-t, 0, t)$; $0 \le t \le 1$ (param. L_2).

b_ Queremos calcular $\int_{\partial S} F \cdot ds$. Como F es C^1 en S y S es suave, el teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot dS$$ (con las orientaciones del ej. (a)).

• $\operatorname{rot}(F) = (0,0,1)$.

Sabemos que $T:[0,\pi]\times[1,2] / T(\theta,r)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$
es una param. regular del pedazo de cono

$$C=\{x^2+y^2=z^2 \; ; \; 1\leq z\leq 2, \; y\geq 0\}.$$

Entonces $T:[0,\pi]\times[1,2] / T(\theta,r)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r-1)$
es una param. regular de S.

$$T_\theta \times T_r\,(\theta,r) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -r)$$

$$\left.\begin{aligned} &T\left(\tfrac{\pi}{2},1\right)=(0,1,0)\\ &T_\theta\times T_r\left(\tfrac{\pi}{2},1\right)=(0,1,-1)\end{aligned}\right\} \text{T define la orientación correcta en S.}$$

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{rot}(F)\cdot dS = \int_0^\pi\int_1^2 (0,0,1)\cdot(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -r)\,dr\,d\theta$$

$$= -\pi\int_1^2 r\,dr = -\pi\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}.$$

$$\int_{\partial S} F\cdot ds = -\frac{3\pi}{2}.$$

4) $S = \left\{ x^2+y^2+z^2=1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ orient. con normal interior

$F = \left(\frac{xz^2}{x^2+y^2}, \frac{yz^2}{x^2+y^2}, e^{x^2y}\cos(x^2+y) \right)$

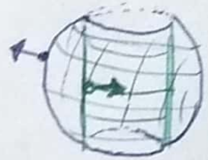
Queremos calcular $\iint_S F \cdot dS$. Observemos que

$$\operatorname{div}(F) = \frac{z^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2z^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2z^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\left(\frac{z^2}{x^2+y^2} - \frac{(x^2+y^2)z^2}{(x^2+y^2)^2} \right) = 0$$

Consideremos el cilindro $C = \left\{ x^2+y^2 = \frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ y el volumen Ω encerrado por $S \cup C$, que es una sup. suave a trozos.

Como Ω es unión de regiones de tipo IV y F es C^1 en Ω, podemos aplicar el teo. de Gauss:

$$\iint_{S \cup C^+} F \cdot dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}(F)\, dV = 0.$$



$S \cup C^+$: or. hacia afuera de Ω.

Entonces $\iint_S F \cdot dS = \iint_C F \cdot dS$

S: orient. como en el enunciado

C: orient. hacia adentro del cilindro.

Para calcular $\iint_C F \cdot dS$ vamos a usar la parametrización

$$T : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 \,/\, T(\theta, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta, z\right).$$

$$T_\theta(\theta, z) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, 0\right)$$

$$T_z(\theta, z) = (0, 0, 1)$$

$$T_\theta \times T_z(\theta, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta, 0\right) \rightsquigarrow$$ apunta hacia afuera del cilindro.

$$(x, y, 0)$$

$$\iint_C F \cdot dS = -\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \langle F \circ T, T_\theta \times T_z \rangle \, dz\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} z^2 \, dz\, d\theta = -2\pi \cdot \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot ds = -\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$