Práctica 1 – AII / AMII / M3

Integrales de campos escalares sobre curvas

- $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$ en la mayoría de los casos) una curva simple, abierta y suave. (puede ser cerrada)
- $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ parametrización **regular** de $\mathcal{C}$.
- f un campo escalar **continuo** sobre $\mathcal{C}$ ($f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ cont)

Entonces

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}} f\, ds}_{\text{Notación}} = \underbrace{\int_a^b f(\sigma(t))\, \|\sigma'(t)\|\, dt}_{\text{fórmula de cálculo}}$$

Ejemplos

1) Si $f \equiv 1$ (la función que vale siempre uno)

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} 1 . ds = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt = \text{Long}(\mathcal{C})$$

2) Si $d = 1$ tenemos la integral ya conocida (Análisis I / CBC)

En efecto,

- $\mathcal{C}$ es el intervalo $[a,b]$
- $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ es simplemente $\sigma(t) = t \rightsquigarrow \sigma'(t) = 1 \ \forall t$ (regular)
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

<u>obs</u> $d=1$, la norma $\|\cdot\|$ es simplemente el módulo $|\cdot|$

Entonces
$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_a^b f(\sigma(t))\,\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_a^b f(t)\,|1|\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \quad (\text{la integral usual})$$

3) Aplicaciones físicas

$\mathcal{C}$ curva suave en $\mathbb{R}^3$ (idem para $\mathbb{R}^2$) que suponemos que modela un alambre.

$\delta(x,y,z)$ continua sobre $\mathcal{C}$ la cual modela la densidad del alambre (es decir la distribución de la masa a lo largo de la curva $\mathcal{C}$).

i) "Masa total del alambre" $= \int_{\mathcal{C}} \delta(x,y,z)\,ds$ "M"

ii) "Densidad media del alambre" $= \dfrac{\text{"Masa total"}}{\text{"Longitud"}} = \dfrac{\int_{\mathcal{C}} \delta(x,y,z)\,ds}{\int_{\mathcal{C}} 1.ds}$

iii) "Centro de masa de un alambre" $= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\underbrace{\int_{\mathcal{C}} x\,\delta(x,y,z)\,ds}_{\text{"Momento estático"}}, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} y\,\delta(x,y,z)\,ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\int_{\mathcal{C}} z\,\delta(x,y,z)\,ds$$

iv) "Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados"

$$I_x = \int_{\mathcal{C}} (y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,ds, \quad I_y = \int_{\mathcal{C}} (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,ds, \quad I_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,ds$$

Vamos a calcular la densidad media de un alambre en forma de hélice, parametrizado por

$$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

sabiendo que la densidad en cada punto (x,y,z) de $\mathcal{C}$ viene dado por la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Calculamos primero la longitud del alambre:

$$\underset{\sim}{\mathrm{Long}(\mathcal{C})} = \int_0^{2\pi} \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \|(-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1)^{1/2} dt$$

$$= \sqrt{2} \cdot t \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \underset{\sim}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}$$

Calculamos ahora la masa total del alambre:

$$\underset{\sim}{M} = \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z) ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2) \cdot \sqrt{2}\, dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1+t^2) dt$$

$$= \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \underset{\sim}{2\sqrt{2}\pi\left(1 + \frac{4}{3}\pi^2\right)}.$$

Así, la densidad media del alambre es:

$$D_M = \frac{M}{\mathrm{Long}(\mathcal{C})} = \frac{2\sqrt{2}\pi\left(1 + \frac{4}{3}\pi^2\right)}{2\sqrt{2} \cdot \pi} = 1 + \frac{4}{3}\pi^2$$

<u>Ejercicio</u> Calcular D_M de la hélice si ahora $\gamma : [0,2\pi] \to \mathcal{C}$ es $\gamma(t) = \sigma_{op}(t) = \sigma(2\pi - t)$. Pensar antes de actuar!!

Integrales de campos vectoriales sobre curvas

- $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$ usualmente)
  una curva simple, abierta, suave y orientada.
- $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ parametrización regular de $\mathcal{C}$ (que respeta la orientación)
- F un campo vectorial continuo (una "transformación") sobre $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} d=2 \rightsquigarrow F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ d=3 \rightsquigarrow F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Entonces:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds}_{\text{Notación}} = \overbrace{\int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt}^{\text{fórmula de cálculo}}$$

$\cdot$ producto interno canónico de $\mathbb{R}^d$

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$

se llama integral de línea de F a lo largo de $\mathcal{C}$
(" curvilínea " " " " " " ") otros nombres
(circulación de F " " " " ")

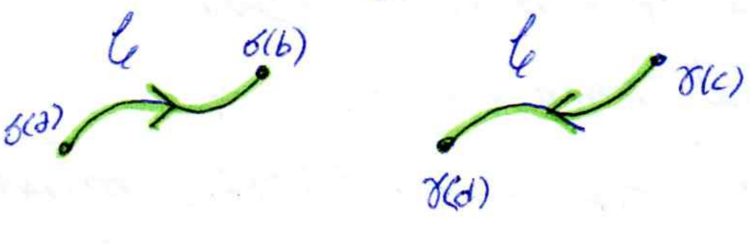
También existe otra notación (diferencial) para esta integral

$\underline{d=2}$ $F = (P, Q) \rightsquigarrow \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy$

$\underline{d=3}$ $F = (P, Q, R) \rightsquigarrow \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

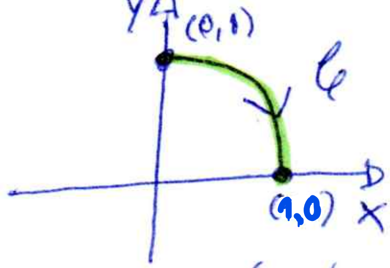
OBS Si $\gamma : [c,d] \to \mathcal{C}$ es otra parametrización de $\mathcal{C}$ que no respeta la orientación entonces

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = -\int_c^d F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$



Ejemplos

1) Sea $\mathcal{C}$ la porción de circunferencia orientada como



Queremos calcular la circulación de $F(x,y)=(-y,x)$ a lo largo de $\mathcal{C}$

Usualmente parametrizamos ese arco de circunferencia con $\sigma(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$ para $0\le t\le \pi/2$. Notemos que la estamos recorriendo en sentido contrario al especificado, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = -\int_0^{\pi/2} F(\sigma(t))\cdot \sigma'(t)\,dt$$

$$= -\int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t, \cos t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt$$

$$= -\int_0^{\pi/2} (\underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{=1})\,dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Cálculos con la notación diferencial

$$\begin{cases} P(x,y) = -y \\ Q(x,y) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = dx(t) = x'(t)\,dt = -\operatorname{sen} t\,dt \\ dy = dy(t) = y'(t)\,dt = \cos t\,dt \end{cases}$$

Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy$$

$$= -\int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\,dt) + \cos t(\cos t\,dt)$$

reemplazamos por funciones de "t"

$$= -\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = -\frac{\pi}{2}$$

2) Aplicación física - Trabajo de una fuerza

Calcular el trabajo que realiza una fuerza constante y de magnitud $F_0 > 0$ con dirección y sentido del versor $\vec{j} = (0,1)$ sobre una partícula puntual que sigue la trayectoria $\mathcal{C}$

$$(0,-R) \mapsto (R,0) \mapsto (0,R)$$

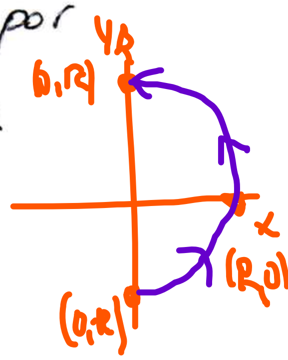
a lo largo de la semicircunferencia de radio $R > 0$ y centro $(0,0)$

La fuerza que actúa es $F(x,y) = (0, F_0) \ (= 0.\vec{i} + F_0.\vec{j})$

La trayectoria de la partícula se puede parametrizar por

$$\sigma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t) \qquad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$$

(la cual respeta la orientación)



El trabajo de F sobre la partícula es:

$$\underset{\sim}{L} := \int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (0, F_0) \cdot (-R\,\mathrm{sen}\, t, R\cos t)\, dt$$

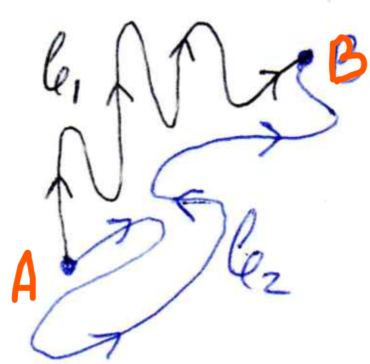
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F_0 . R \cos t \, dt$$

$$= F_0 . R . \mathrm{sen}\, t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \underset{\sim}{2 F_0 . R}$$

3) ¿Qué campos vectoriales F tienen integrales de línea independiente del camino? (Supongamos $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ó $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

Si A y B son dos puntos distintos y $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son dos curvas cualesquiera (suaves) que empiezan en A y terminan en B. ¿Existirán condiciones necesarias y suficientes sobre un campo vectorial F tal que

$$(*) \quad \int_{\mathcal{C}_1} F \cdot ds = \int_{\mathcal{C}_2} F \cdot ds \quad ?$$



$\forall\, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ que unen A y B. $(A \neq B)$

RTA Existen tales campos y se los denomina
CAMPOS CONSERVATIVOS

Por ejemplo si F es un campo de gradientes, es decir, F continuo / existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ satisfaciendo

$$\nabla\varphi(x,y,z) = F(x,y,z) \quad \forall (x,y,z),$$

entonces F es un campo conservativo

Además, en tal caso, si $\mathcal{C}$ es una curva suave con $\sigma:[a,b]\to\mathcal{C}$ param. (regular) de $\mathcal{C}$ tal que $\sigma(a)=A$ y $\sigma(b)=B$ entonces

$$(*) \quad \int_{\mathcal{C}} F\cdot ds = \int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi\cdot ds = \varphi(\sigma(b)) - \varphi(\sigma(a)) = \varphi(B)-\varphi(A)$$

OBS lo interesante es que vale al revés, que Todo campo conservativo es un campo de gradientes (MÁS ADELANTE)

Usando el TFC para integrales de línea $(*)$ podemos probar una fórmula de "integración por partes":

$$\int_{\mathcal{C}} (f\nabla g + g\nabla f)\cdot ds = (f\cdot g)(B) - (f\cdot g)(A)$$

$\forall\, f,g \in C^1$, $A,B \in \mathcal{C}$ suave

En efecto, por cálculo directo tenemos que

$$\nabla(f\cdot g) = g\nabla f + f\nabla g$$

y aplicamos $(*)$ al campo escalar $\varphi = f\cdot g$