# Complemento a clases teóricas 16 y 17.

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3-

- Repaso
- Prolongación de soluciones.

---

→ **Recordemos:**

**Ecuaciones dif ordinarias** $\boxed{x(t)}$

orden 1 → $x' = f(t, x)$

orden 2 → $x'' = f(t, x, x')$

⋮

orden n → $x^{(n)} = f(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$

Para ecuaciones dif. ordinarias de orden 1 vieron existencia y unicidad.

**Existencia**

. $\exists L > 0 \,/\, |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$ $\forall t \in I$

**Teorema:**

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitz en la variable $x$, $r \in I$ y $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $r$ es interior a $I \Rightarrow \exists \lambda > 0$ y $x: [r-\lambda, r+\lambda] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ /

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in [r-\lambda, r+\lambda] \\ x(r) = \xi \end{cases}$$

CI

- El teorema vale para $F: I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo localmente lipschitz en $x$.

• Ejemplo importante: $F(t,X) = A(t)X + b(t)$
con $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continuos.

## UNICIDAD

**Teorema**
$I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, $f: I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitz en $x$, $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}$. Sea el sistema
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$
Si $x_1$ es solución del sistema en el intervalo $J_1 \subseteq I$ con $\tau \in J_1$ y
$x_2$ es sol. del sistema en el intervalo $J_2 \subseteq I$ con $\tau \in J_2$ $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$ en $J_1 \cap J_2$ y
$$x_3(t) := \begin{cases} x_1(t) & t \in J_1 \\ x_2(t) & t \in J_2 \end{cases}$$
es solución en $J_1 \cup J_2$.

**Observación importante:**

$\boxed{X' = F(t,X)}$ es un sistema de 1º orden

$F = (F_1, \dots, F_n)$ $\quad X = (X_1, \dots, X_n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1' = F_1(t, X_1, \dots, X_n) \\ X_2' = F_2(t, X_1, \dots, X_n) \\ \vdots \\ X_n' = F_n(t, X_1, \dots, X_n) \end{cases}$$

hay existencia y unicidad!

$\hookrightarrow$ podemos usarlos para resolver ecuaciones dif. de orden $n$.

Ejemplo:

- $\underbrace{x'' = f(t, x, x')}_{\text{orden 2}}$ ecuación de orden 2.

$\downarrow$

$\longrightarrow$ La transf. en sistema $2\times 2$ de orden 1.

$$\begin{cases} x_0(t) = x(t) \\ x_1(t) = x'(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1'(t) = f(t, x_0(t), x_1(t)) \\ x_0'(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\overline{X} = (x_0, x_1) \wedge F(t, \overline{X}) = (x_1, f(t, x_1, x_2))$$

- $x^{(3)} = f(t, x, x', x'')$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = x \\ x_1 = x' \\ x_2 = x'' \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_2' = f(t, x_0, x_1, x_2) \\ x_1' = x_2 \\ x_0' = x_1 \end{cases}$$

$$\overline{X} = (x_0, x_1, x_2) \wedge F(t, \overline{X}) = (x_1, x_2, f(t, x_0, x_1, x_2)).$$

$$\overline{X}' = F(t, \overline{X})$$

$\boxed{\text{Ecuaciones dif. ordinarias de orden sup.}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Sistemas de ecu. dif. de orden 1}}$

---

# Prolongación de soluciones

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ int, $f: I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitz en $x$, $\tau \in I \wedge \xi \in \mathbb{R}$ y (*) $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau)=\xi \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Si $x_1$ es solución de (*) en $J_1$ y $x_2$ es solución de (*) en $J_2$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_1 = x_2}$ en $J_1 \cap J_2$.


$\boxed{\rightarrow}$ Esto permite definir una solución de (*) en $J_1 \cup J_2$:

$$x_3(t) = \begin{cases} x_1(t) & t \in J_1 \\ x_2(t) & t \in J_2 \end{cases}.$$

Def: Sea $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau)=\xi \end{cases}$ con $f: I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitz en $x$. Definimos la $\boxed{\text{solución maximal}}$ del sistema como la solución definida en $J_0 := \bigcup\{J : J \subseteq I \text{ intervalo con } \tau \in J, \text{ hay solución}\}$.

$J' \supseteq J_0$
$\Downarrow$
$J' \subseteq J_0$.

Tenemos:

- Hay solución en $J_0$.
- La solución es única.
- No es posible extender la sol. más allá de $J_0$.

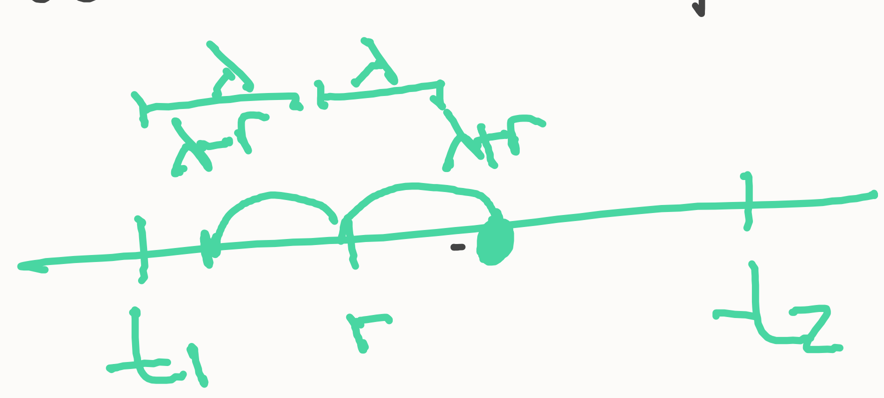
**Nombre:** Cuando $J_0 = I$, la solución se llama global.

> **Proposición:** Sea $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo / $\forall\, t_1, t_2$ / $[t_1,t_2] \subseteq I$, $f|_{[t_1,t_2]\times\mathbb{R}} : [t_1,t_2]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lipschitz en $x$.
> Entonces, la solución maximal de
> $$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(r) = \xi \end{cases}$$
> es global.

**Dem:** Sean $t_1, t_2$ / $[t_1,t_2] \subseteq I$ y $r \in [t_1,t_2]$.
Veamos que existe solución en $[t_1,t_2]$.

. Llamamos $L$ a la constante de lipschitz en $[t_1,t_2]$ $\left[\, |f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ t \in [t_1,t_2] \,\right]$

Sabemos (del teo. de existencia) que $\exists\ \lambda > 0$ y $x_1 : [r-\lambda, r+\lambda] \subseteq [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $C^1$, solución de
$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(r) = \xi \end{cases}$$
y recordemos que $\lambda < \frac{1}{2L}$.

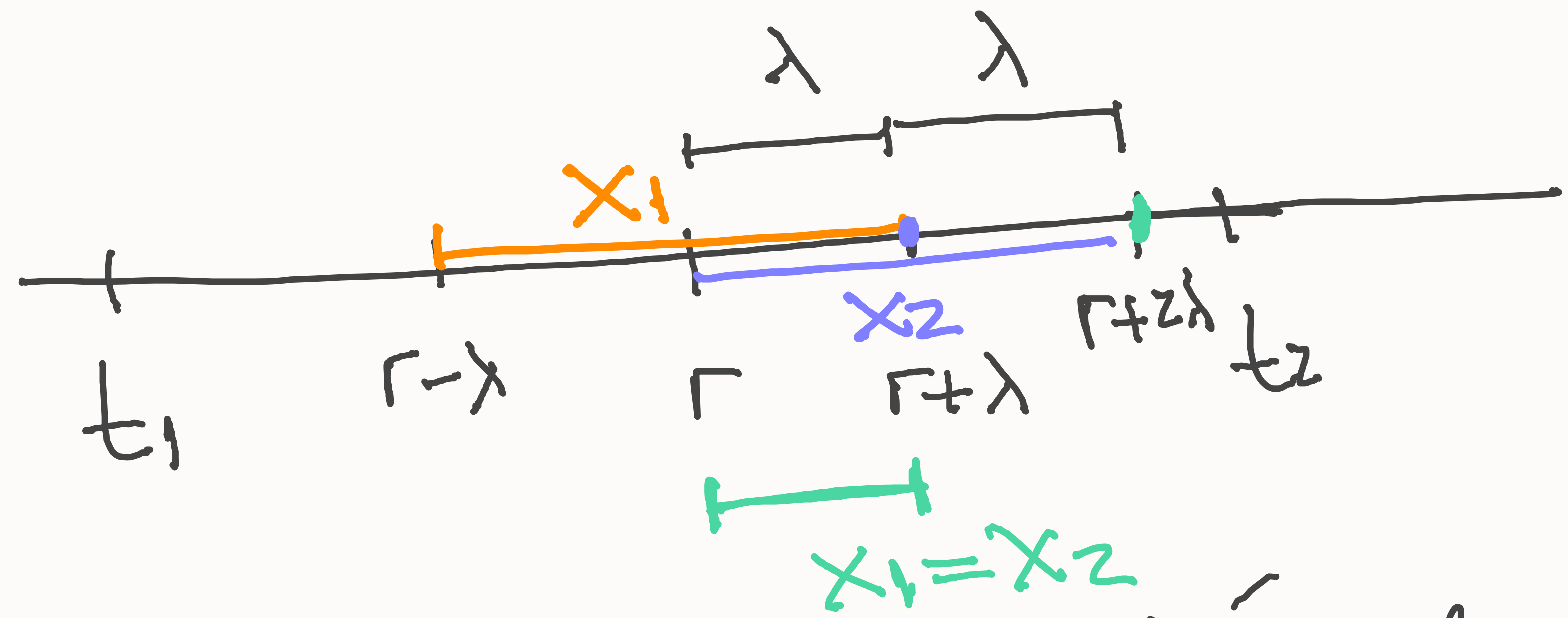



Si $r + \lambda < t_2 \underset{\exists}{\Rightarrow} \exists\ x_2 : [\underset{r+\lambda-\lambda}{r}, \underset{r+\lambda+\lambda}{r+2\lambda}] \subseteq [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$C^1$ solución de

$$(**)\ \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(r+\lambda) = x_1(r+\lambda) \end{cases}$$

$x_2(r+\lambda) = x_1(r+\lambda)$




Como $x_1$ es solución de $(**)$ en $\underbrace{[r, r+\lambda]}$

y $x_2$ es solución de $(**)$ en $\underbrace{[r, r+2\lambda]}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ en $[r, r+\lambda]$.

$\Rightarrow$ con $x_2$ extiendo $x_1$ al intervalo $[r, r+2\lambda]$

- Si $r+2\lambda < t_2$ repito el argumento. Si no, ya llegué a $t_2$.
- Hacemos lo mismo hacia la izq. de $r$ hasta llegar a $t_1$.

$\Rightarrow$ tengo solución def. en $\boxed{[t_1, t_2]}$. Como $t_1$ y $t_2$ son arbitrarios, tengo solución en $I$.

$\Rightarrow$ maximal = global $\boxtimes$