Clase práctica

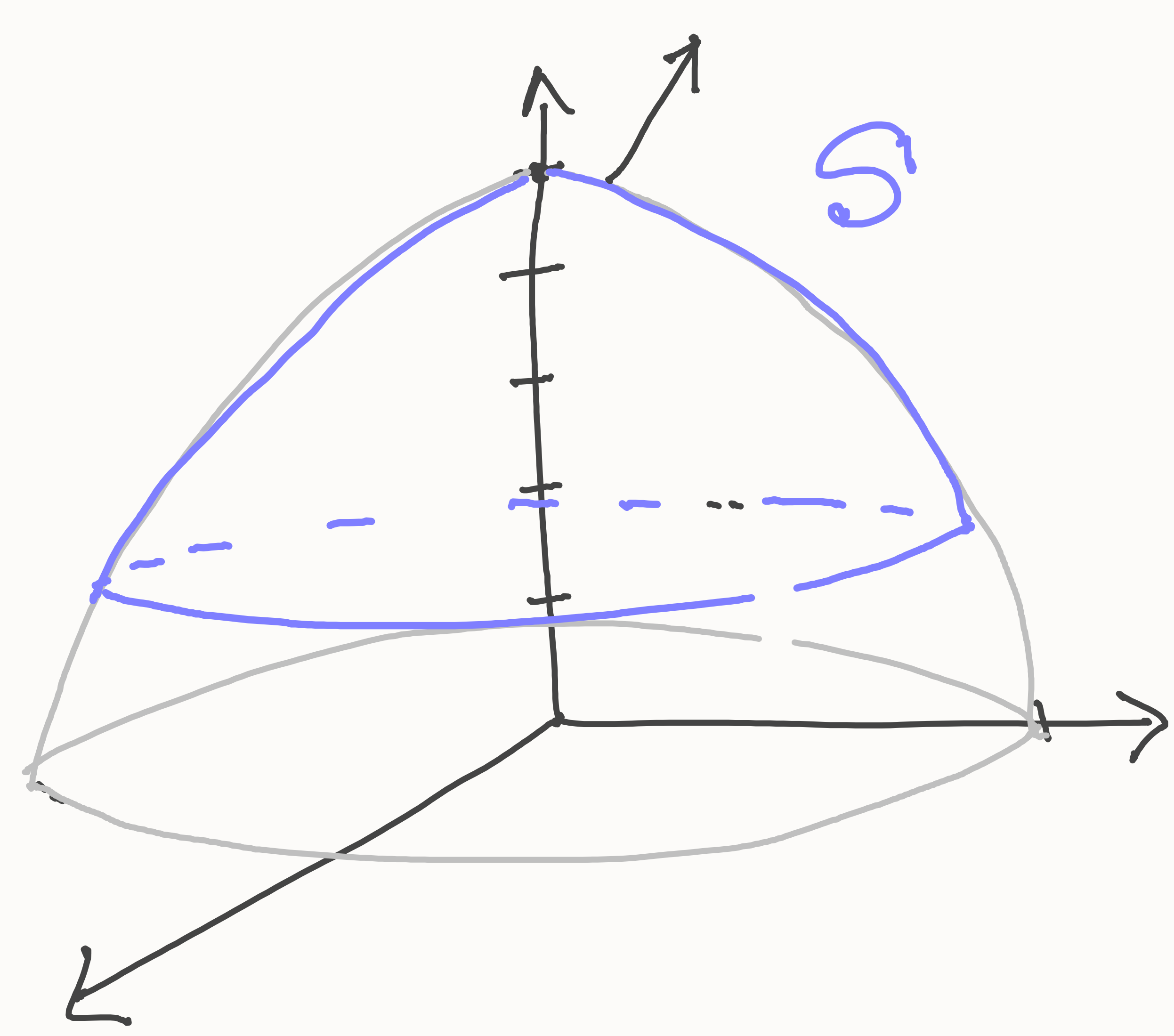
Práctica 4 – Teorema de Stokes

Ejemplo 1

Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5 - x^2 - y^2, z \geq 1\}$ orientada de manera tal que la normal tiene coord z positiva.

Si $F(x,y,z) = (3y, 4z, -6x)$, comprobar que vale el teorema de Stokes.

Solución:



- F es C^1 ✓
- $\int_S \nabla \times F . ds = \int_{\partial S^+} F . ds$

Recordemos:

Si caminamos por ∂S con la cabeza apuntando en el sentido de la normal, S queda a nuestra izquierda.

Calculemos 1º $\int_S \nabla \times F \, ds$.

Por un lado, $\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = (-4, 6, -3)$

Por otro, parametrizamos S:

Usamos $T(x,y) = (x, y, 5 - x^2 - y^2)$ con

$T: D \to \mathbb{R}^3$ siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$

Buscamos el campo normal que induce T en S:

$T_x = (1, 0, -2x)$

$T_y = (0, 1, -2y)$ $\Rightarrow T_x \times T_y = (2x, 2y, 1)$

Como $(T_x \times T_y)_z = 1 > 0 \Rightarrow T$ respeta la orientación de S.

$$\Rightarrow \int_S \nabla \times F . ds = \iint_D \langle \nabla \times F(T(x,y)), T_x \times T_y(x,y) \rangle \, dx dy$$

$$= \iint_D \langle (-4, 6, -3), (2x, 2y, 1) \rangle \, dx dy$$

$$= \iint_D -8x + 12y - 3 \, dx dy$$

$$\underset{\text{Polares}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-8r\cos\theta + 12r\operatorname{sen}\theta - 3) r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^2 -3r \cdot 2\pi \, dr = -6\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^2 = -12\pi.$$

Para calcular $\int_{\partial S^+} F . ds$ parametrizamos ∂S con la orientación correcta.

$$\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{1 = 5 - x^2 - y^2}_{x^2+y^2=4}, \; z = 1\}$$

$\Rightarrow$ una param. de ∂S es $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

Dada por $\sigma(\theta) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 1)$ y la orientación que induce es la correcta.

Luego,

$$\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta) \rangle d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (3 \cdot 2\operatorname{sen}\theta, 4, -6 \cdot 2\cos\theta), (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0) \rangle d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -12\operatorname{sen}^2\theta + 8\cos\theta \, d\theta = \dots = -12\pi,$$

comprobamos el teorema.

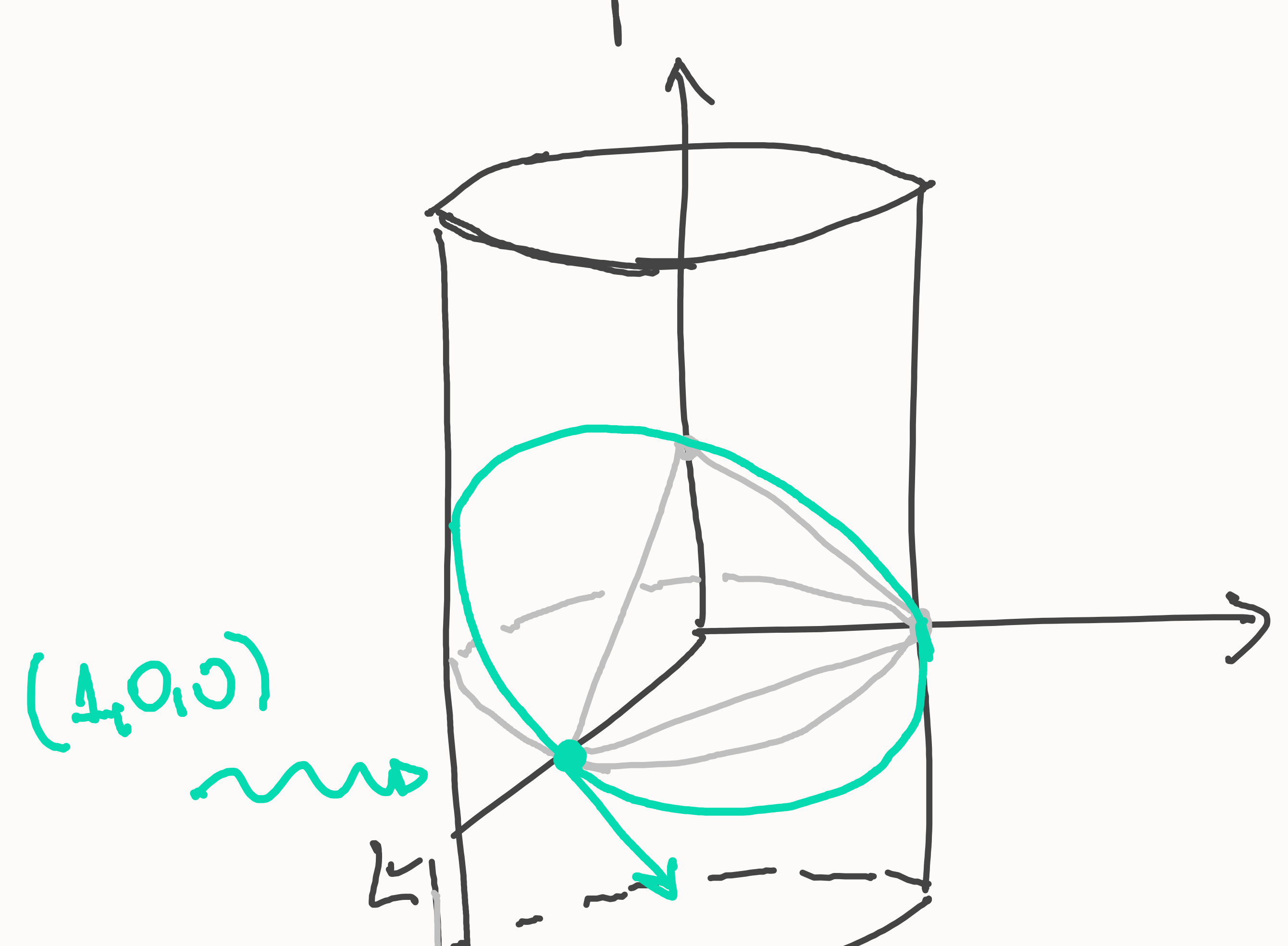
Ejemplo 2

Sea $F(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ y $\mathcal{C}$ la curva dada por $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ orientada tal que la tangente en el punto $(1,0,0)$ es $(0,1,-1)$.

Hallar $\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$.

Solución:

Veamos primero cómo es $\mathcal{C}$:



Parametrizamos $\mathcal{C}$:

$\sigma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$

Como $\sigma'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$

y $\sigma(0) = (1, 0, 0)$, si miro $\sigma'(0) = (0, 1, -1)$

concluimos que σ respeta la orientación de $\mathcal{C}$.

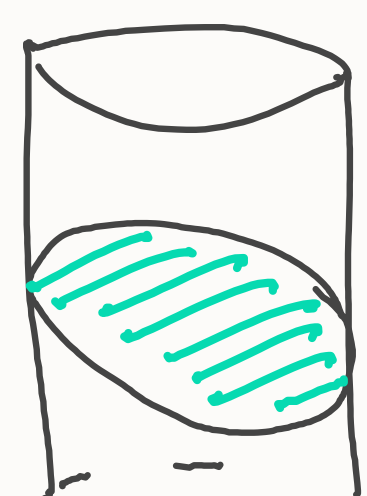
$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} F\,ds = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(\theta)), \sigma'(\theta) \rangle \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (-\operatorname{sen}^3\theta, \cos^3\theta, -(1 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^3), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \rangle d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta - (1 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^3 (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) \, d\theta \ \ldots$$

Probemos usando Stokes.

- F es $\mathcal{C}^1$ ✓.
- $\nabla \times F = (0, 0, 3x^2 + 3y^2)$ (cuenta)
- ¿quién es S?



Tomamos $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x + y + z = 1\}$

Ahora ¿cómo orientamos S para que $\partial S^+ = \mathcal{C}$? Tenemos que considerar la normal hacia arriba!

Para calcular $\int_S \nabla \times F \, ds$, parametrizamos S.

$T(x,y) = (x, y, 1-x-y)$, $(x,y) \in D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$T_x \times T_y = (1,1,1) \longrightarrow$ apunta hacia arriba

$\Rightarrow$ da la orientación correcta.

Entonces,

$$\int_S \nabla \times F \, dS = \iint_D \langle (0,0,3x^2+3y^2), (1,1,1) \rangle \, dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 3(x^2+y^2) \, dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polares}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 3 \cdot r^2 \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot 3 \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Finalmente, por el Teorema de Stokes,

$$\int_C F = \int_S \nabla \times F = \frac{3\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{Ejercicio 3}}$

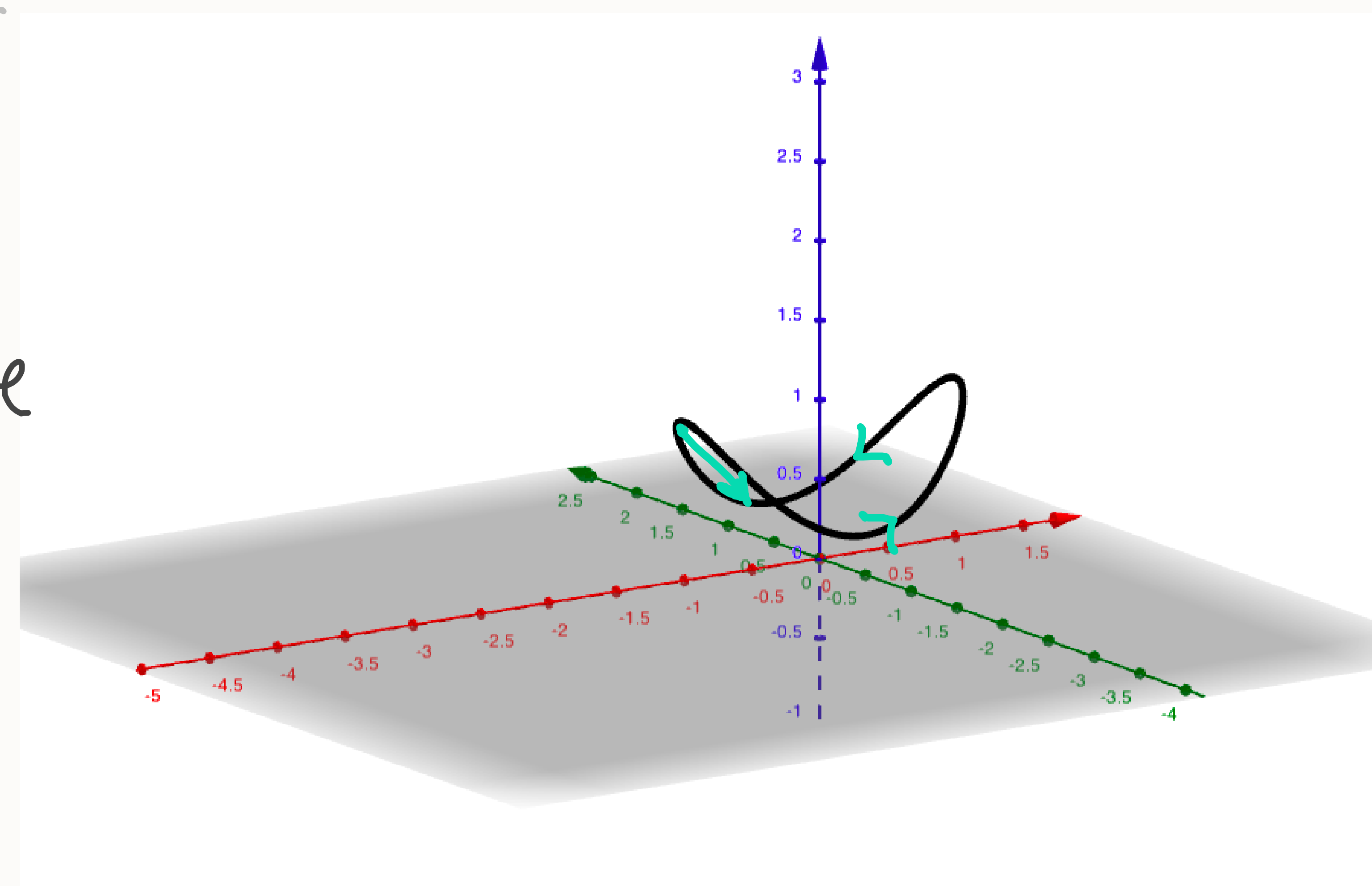
Calcular $\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$ siendo C la curva $\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$ orientada tal que en $(1,0,1)$ la tangente es $(0,\frac{1}{2},0)$.

a) directamente

b) usando Stokes.

Solución: Primero graficamos $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} x^2+4y^2=1 \longrightarrow x^2+\frac{y^2}{(1/2)^2}=1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$



Para resolver directamente parametrizamos $\mathcal{C}$

$\sigma:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^3$

$\sigma(\theta)=\left(\cos\theta,\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta,\ \cos^2\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta\right)$

¿σ respeta la orientación?

$\sigma'(\theta)=\left(-\operatorname{sen}\theta,\ \frac{1}{2}\cos\theta,\ -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)$

$\sigma(0)=(1,0,1)\ \wedge\ \sigma'(0)=(0,\frac{1}{2},0)\Rightarrow\checkmark.$

$\Rightarrow$ Calculamos usando σ:

$$\int_{\mathcal{C}}F\,ds=\int_0^{2\pi}\left\langle\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta-\cos^2\theta-\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta,\ \cos^2\theta+\tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2\theta-\cos\theta,\ \cos\theta-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right),\left(-\operatorname{sen}\theta,\ \tfrac{1}{2}\cos\theta,\ -\tfrac{3}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right)\right\rangle d\theta$$

$F=(y-z,\ z-x,\ x-y)$

$=\dots=-\pi.$

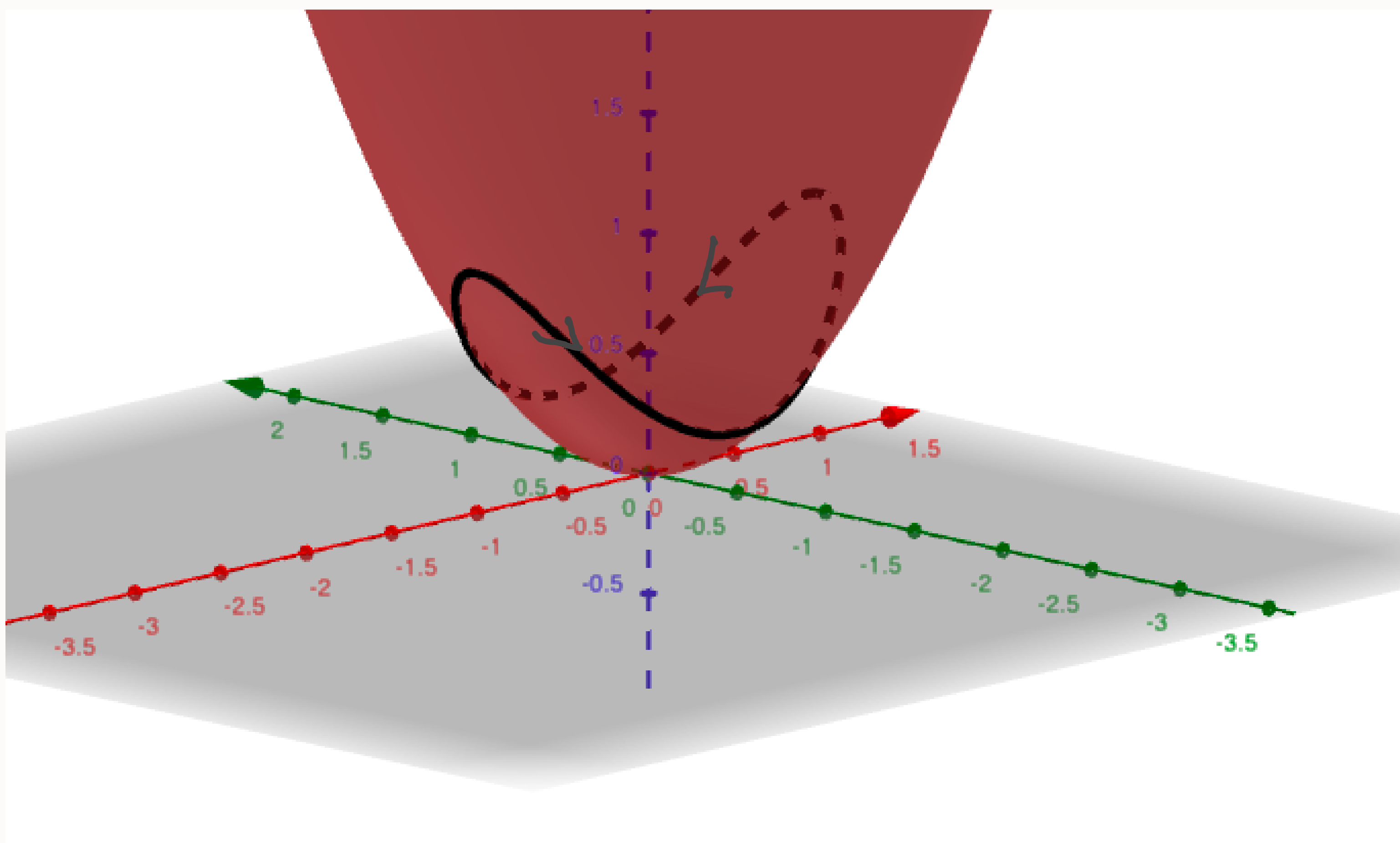
Ahora resolvemos usando Stokes:

F es $\mathcal{C}^1$ ✓. $\quad\operatorname{rot}(F)=\det\begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ y-z & z-x & x-y\end{bmatrix}=$

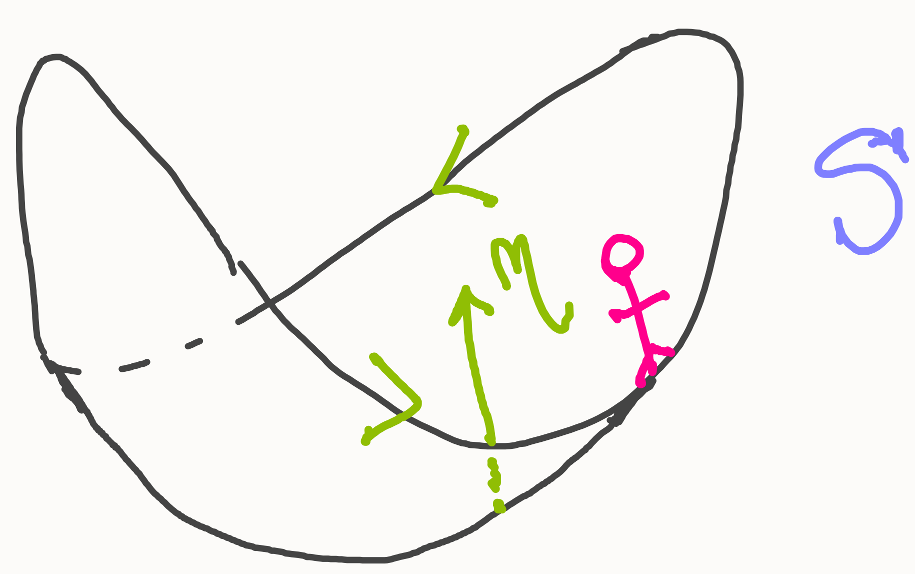
$=(-1-1,\ -(1+1),\ -1-1)=(-2,-2,-2)$

Tenemos que buscar $S \,/\, \partial S = \mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad S = \begin{cases} x^2+4y^2 \leq 1 \\ z = x^2+y^2 \end{cases}$$



¿Cómo orientamos S para que podamos aplicar Stokes? ie $\partial S^+ = \mathcal{C}$



La normal apunta hacia adentro del paraboloide.

$\Rightarrow$ Stokes nos dice que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds = \int_S \nabla \times F \cdot dS$

Calculemos $\displaystyle\int_S \nabla \times F \cdot dS$:

Para esto, parametrizamos S.

$$S = \begin{cases} x^2+4y^2 \leq 1 \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad T(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$$

$$(x,y) \in D = \{ x^2+4y^2 \leq 1 \}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} T_x = (1,0,2x) \\ T_y = (0,1,2y) \end{array} \Rightarrow T_x \times T_y = \underbrace{(-2x, -2y, 1)}_{\text{apunta hacia arriba}}$$

γ :. T respeta la orientación de S.

$$\Rightarrow \int_S \nabla \times F \cdot dS = \iint_D \langle (-2,-2,-2), (-2x,-2y,1) \rangle \, dx\,dy$$

$$= \iint_D 4x + 4y - 2 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(4r\cos\theta + 2r\,\text{sen}\,\theta - 2\right) \tfrac{1}{2} r \, dr\, d\theta$$

Polares
$x = r\cos\theta$
$y = \frac{1}{2} r\,\text{sen}\,\theta$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2\cos\theta + r^2\,\text{sen}\,\theta - r \; d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1 -2\pi r \, dr = -\pi r^2 \Big|_0^1 = -\pi \quad \boxtimes$$