Cositas pre clase 6 de Análisis 2-Mate 3

Si tengo una densidad (densidad de carga) ρ, la masa asociada (carga asociada) va a ser igual la integral de ρ de volumen si es en un volumen, de superficie si es densidad de área, y de longitud de arco si es densidad sobre una curva (de un alambre de grosor nulo, por ejemplo). La "densidad de centro de masa.^{es} $\rho \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si es en un espacio de n dimensiones ($\mathbb{R}^n$ o localmente $\mathbb{R}^n$).

(Green) Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ y sea C una curva en el plano, cerrada, simple, orientada positivamente y diferenciable a trozos, que encierra a una región D de tipo III que queda contenida en Ω. Entonces,

$\int_{C^+}(Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

¿Cómo entendemos esto?

«**...Sea** $F = (P, Q)$ **un campo vectorial...**» Quiere decir que tenemos un hibrido entre vector y función// un vector de funciones.

«**...de clase** $\mathcal{C}^1$**...**» Quiere decir que P y Q son derivables en todas sus variables, y que las funciones que salen de derivar en sus variables son funciones continuas.

«**...definido en un abierto** Ω **de...**» $\mathbb{R}^2$. Primero recordemos que es un abierto de $\mathbb{R}^\ltimes$. En este tipo de espacios, un abierto es un conjunto en que cada punto se puede meter en una n-esferita sin borde (en $\mathbb{R}^2$ sería en el relleno de circulo, en $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ sería en un intervalo (a, b), en $\mathbb{R}^3$ sería una esferita común sin borde). En general es como si fuera un conjunto que es el relleno de una figura, pero sin el borde de la figura. En este caso sería en el plano $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ es un abierto, $B(0, R) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < R\right\}$ es otro abierto, etc. Que el campo vectorial esté definido en Ω quiere decir que $P : \Omega \to \mathbb{R}$ y $Q : \Omega \to \mathbb{R}$// $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$. O sea, que P y Q// que F parte de Ω/come elementos de Ω.

«**...y sea** C **una curva en el plano, cerrada, simple, orientada positivamente...**» C es una curva simple cerrada ya sabemos que quiere decir (que no se cruza consigo misma, y que termina donde empieza), orientada positivamente quiere decir que es como dibujar un círculo que va contra las agujas del reloj,

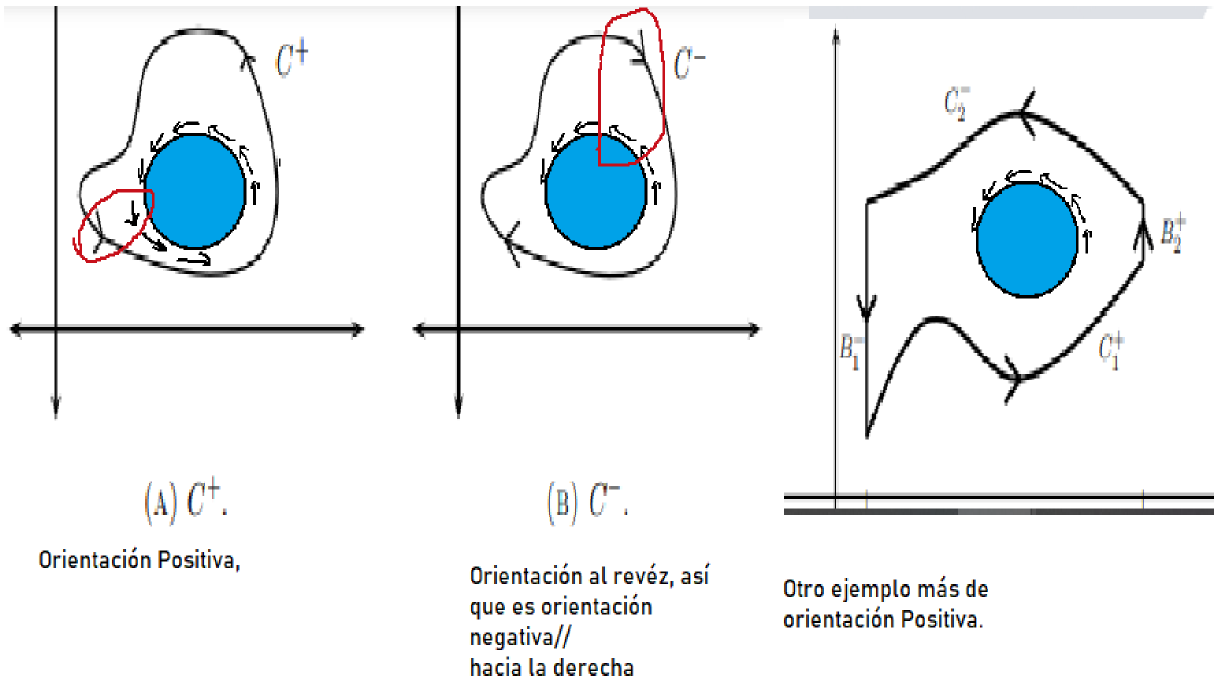


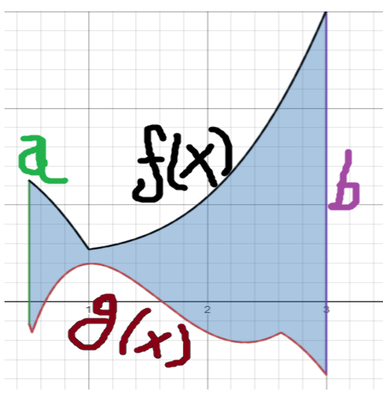
Imagen tomada del apunte de Victoria Paternostro y Julio Daniel Rossi, editada en Paint.

Que la curva debe ser **diferenciable a trozos** quiere decir que podemos parametrizarla con una $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ para la cual la función sólo falla en ser derivable o su derivada se anula en finitos (o ningún) puntos. O sea, salvo un número finito (que puede ser 0) de lugares con «ángulo», la curva va a parecer «regular».

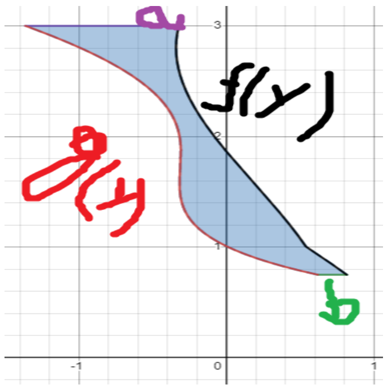
«**...Que encierra a una región** D**...**» lo que quiere decir es que el borde de la región D sea la curva C. Ahora, hagamos uan breve disgresión para ver lo de regiones tipo I, II y III.

Si estamos en $\mathbb{R}^2$, el plano real, decimos que un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^2$

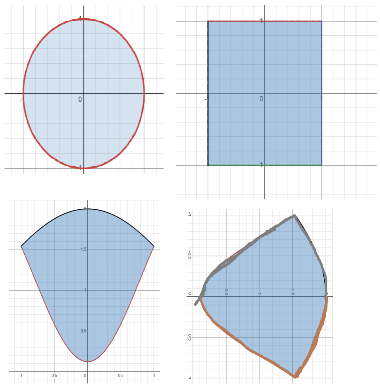
- es una región de tipo I si se puede escribir como si estuviera entre dos valores $a \leq x \leq b$ y entre dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$. O sea, si puede dibujarse cómo



- es una región de tipo II si se puede escribir como si estuviera entre dos valores $a \leq y \leq b$ y entre dos funciones $x = f(y)$, $x = g(y)$. O sea, si puede dibujarse cómo



- es una región de tipo III si es de tipo I y tipo II. Un ejemplo típico es un círculo, o un cuadrado.



La expresión $\int_{C^+}(Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ en algún sentido quiere decir algo como que calcular $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ te da cuanto «gira» al rededor de un punto (x, y) el campo $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

La integral $\int_{C^+}(Pdx + Qdy)$ se puede escribir también como
$\int_a^b \left(P(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\frac{d\sigma_1(t)}{dt} + Q(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\frac{d\sigma_2(t)}{dt}\right) dt$

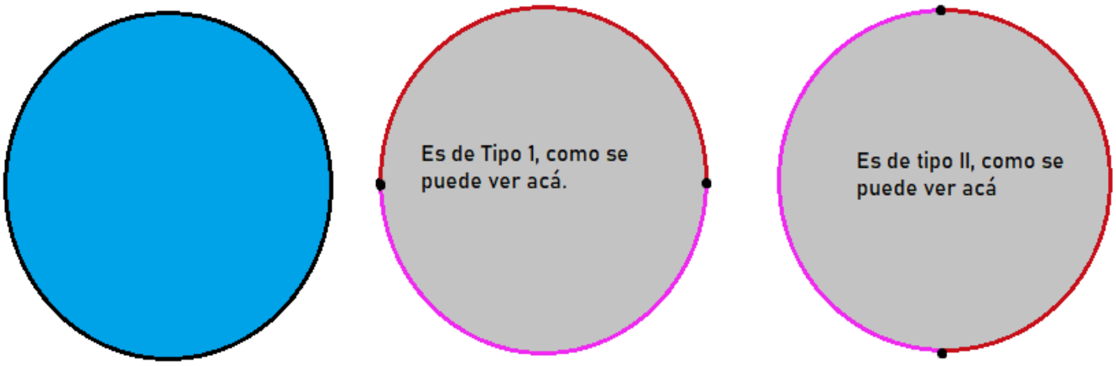
Ahora voy a dar ejemplos modificados de ejercicios de la guía, y luego daré un surtido tomado de la guía para que ejerciten durante la clase.

Ejercicio 1. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R y las siguientes funciones:

(a) $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = -yx^2$. (El valor de las integrales será 0)
(b) $P(x, y) = 2y$, $Q(x, y) = x$. (El valor de las integrales será $-\pi R^2$)
(c) $P(x, y) = xy$, $Q(x, y) = 1 + \frac{x}{\pi}$. (El valor de las integrales será R)

El ejercicio lo que nos pide es que calculemos las expresiones

$\int_{C^+}(Pdx + Qdy)$ y $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ para luego compararlas. Como un disco D es una región de tipo III



Y puede ser embebida (estar adentro) de un abierto Ω, como por ejemplo $\mathbb{R}^2$ (donde todas las funciones del ejercicio están bien definidas), y las funciones del ejercicio son polinómios en dos variables x, y, lo que es un tipo de función $\mathcal{C}^\infty$, así que son $\mathcal{C}^1$

El borde del círculo coincide con la imagen de la curva $\mathcal{C}$ con parametrización $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, que es una curva del plano cerrada, simple, diferenciable (y por lo tanto, diferenciable a trozos). Además, sabemos que esta parametrización es orientada positivamente. Así que si en cada item vale que el campo vectorial es $\mathcal{C}^1$, el teorema de Green debería valer.

Nos dan una región y campos vectoriales en que el teorema de Green vale.

Veamos cómo resolveríamos el punto (c), creado deliberadamente para esta clase.

$$
\begin{aligned}
&\int_{C^+} (Pdx + Qdy) = \int_{C^+} \left(xydx + \left(1 + \tfrac{x}{\pi}\right) dy \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(R\cos(t) R\sin(t) \frac{dx}{dt} + \left(1 + \frac{R\cos(t)}{\pi}\right) \frac{dy}{dt} \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(R\cos(t) R\sin(t) \frac{dR\cos(t)}{dt} + \left(1 + \frac{R\cos(t)}{\pi}\right) \frac{dR\sin(t)}{dt} \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(R^3 \cos(t)\sin(t) \frac{d\cos(t)}{dt} + R\left(1 + R\frac{\cos(t)}{\pi}\right) \frac{d\sin(t)}{dt} \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(R^3 \cos(t)\sin(t)(-\sin(t)) + R\left(1 + R\frac{\cos(t)}{\pi}\right) (\cos(t)) \right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-R^3 \cos(t)\sin^2(t) + R\cos(t) + \frac{\cos^2(t)}{\pi} R^2 \right) dt \\
&= -R^3 \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt - R\int_0^{2\pi} \cos(t)dt + R^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{\pi} \cos(t)dt \\
&= -R^3 \int_0^{\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt - R^3 \int_\pi^{2\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt + \underbrace{R\int_0^{2\pi} \cos(t)dt}_{\substack{\text{=0, porque es un} \\ \text{ciclo completo del coseno}}} \\
&+R^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t)}{\pi} dt \\
&= -R^3 \int_0^{\pi} \cos(t)\sin^2(t)dt - R^3 \int_0^{\pi} \cos(t+\pi)\sin^2(t)dt + 0 + R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2\pi} dt
\end{aligned}
$$

$$= \underbrace{-R^3\int_0^{\pi}\cos(t)\sin^2(t)dt - R^3\int_0^{\pi}(-\cos(t))\sin^2(t)dt}_{\substack{\text{Las dos integrales son iguales a menos del signo, y están sumadas.}\\ \text{Por lo tanto, esa suma va a dar cero.}}} + 0 + R^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi} + \frac{\cos(2t)}{2\pi}dt$$

$= 0 + 0 + R^2\left(\frac{1}{2\pi}2\pi + \frac{0}{2\pi}\right) = R^2$

Ahora calculemos $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial 1+\frac{x}{\pi}}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial y} = \frac{1}{\pi} - x$

$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \frac{1}{\pi} - xdxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \left(\frac{1}{\pi} - r\cos(\theta)\right) rdrd\theta$

$= \int_0^R\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi} - r\cos(\theta)\right) rd\theta dr = \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\pi}rd\theta - \int_0^{2\pi} r^2\cos(\theta)d\theta\right) dr$

$= \int_0^R\left(\frac{1}{\pi}r2\pi - r^2 0\right) dr = \int_0^R\left(\frac{1}{\pi}r2\pi - 0\right) dr = \int_0^R \frac{1}{\pi}r2\pi dr = 2\int_0^R rdr = 2\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{r=R}$

$= 2\frac{R^2}{2} = R^2$

Pueden ver que los dos valores coinciden, como podíamos esperar del teorema de Green.

Pendiente para ustedes es calcular uno de los siguientes, al menos.

$(1.a)$ $P(x,y) = xy^2$, $Q(x,y) = -yx^2$.
$(1.b)$ $P(x,y) = 2y$, $Q(x,y) = x$.

Ejercicio 2. Verificar el Teorema de Green y calcular $\int_C y^2dx + xdy$, siendo C la curva recorrida en sentido positivo:
(a) Cuadrado con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.
(b) Elipse dada por $x^2a^2 + y^2b^2 = 1$.
(c) $C = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 : y = x, x \in [0,1]$, y $C_2 : y = x^2, x \in [0,1]$.

El planteo de este ejercicio está escrito de modo algo extraño, pero lo que nos quiere decir es que para un campo $F = (y^2, x)$ hay que verificar que $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ y $\int_{C^+}(Pdx + Qdy)$ coinciden en valor, ya que las regiones que nos da son de regiones de tipo III cuya frontera puede ser imagen de curvas compatibles con las condiciones del teorema, y el campo es $\mathcal{C}^1$ (más todavía, como las funciones son polinómios es infinitamente diferenciable, por lo que es $\mathcal{C}^\infty$). Esto es similar al ejercicio anterior, pero la dificultad radica en parametrizar bien la curva y hacer bien la integral de linea.

En el ejercicio 3 vamos a utilizar algo muy útil, que es como el teorema de Green permite calcular áreas como integrales de linea **¿Cómo?** El teorema de Green (bajo las condiciones del teorema) nos da una relación para $\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, y calcular un área es calcular la integral $\iint_D 1dxdy$. Si elegimos .ªstutamente”(P,Q) de modo que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, entonces podremos calcular $Area = \int_{\partial D}(Pdx + Qdy)$. ¿Se les ocurre un par (P,Q) que sirva? $(P,Q) = (0,x)$ sirve, $(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$ también.

Por ejemplo, para el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, podemos tomar la parametrización

$$\sigma(t) = \begin{cases} (t,0), & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ (1,t-1), & \text{for } 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t,1), & \text{for } 2 \leq t \leq 3 \\ (0,4-t), & \text{for } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

$$\sigma'(t) = \begin{cases} (1,0), & \text{for } 0 \leq t \leq 1 \\ (0,1), & \text{for } 1 \leq t \leq 2 \\ (-1,0), & \text{for } 2 \leq t \leq 3 \\ (0,-1), & \text{for } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Si hacemos el dibujo podemos ver que esta parametrización es en sentido antihorario, o sea que está orientada positivamente.

Ahora, con $(P,Q) = (0,x)$ calculemos

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \int (P(\sigma(t))\sigma_x'(t) + Q(\sigma(t))\sigma_y'(t))dt$$

$$= \int (\sigma_x(t)\sigma_y'(t))dt$$

$$= \int_0^1 (\sigma_x(t)\sigma_y'(t))dt + \int_1^2 (\sigma_x(t)\sigma_y'(t))dt + \int_2^3 (\sigma_x(t)\sigma_y'(t))dt + \int_3^4 (\sigma_x(t)\sigma_y'(t))dt$$

$$= \int_0^1 t \cdot 0dt + \int_1^2 1 \cdot 1dt + \int_2^3 (3-t) \cdot 0dt + \int_3^4 0 \cdot (-1)dt$$

$$= 0 + \int_1^2 1dt + 0 + 0 = 1$$

Acá, con σ_x y σ_y me refiero a las componentes 1 y 2 de la parametrización σ.

Ejercicio 3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

(a) El disco D con centro $(0,0)$ y radio R

(b) La región dentro de la elipse $x^2a^2 + y^2b^2 = 1$.

Los ejercicios 4 y 5 son similares al ejercicio 3. Se puede disfrutar mucho ver que curvas raras son de las que calculás el área, así que sugiero fuertemente hacerlos (más allá de que es central para aprender bien para parciales el hacer ejercicios de la guía).

Ejercicio 6. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset R^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $n = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces $\iint_D uv_x dxdy = -\iint_D u_x v dxdy + \int_{\partial D} uvn_1 ds$, para todo par de funciones $u, v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

Acá con u_x se refieren a $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\iint_D u_x v dxdy = -\iint_D uv_x dxdy + \int_{\partial D} uvn_1 ds \Rightarrow$$

$$\iint_D u_x v dxdy + \iint_D uv_x dxdy = \int_{\partial D} uvn_1 ds \Rightarrow$$

$$\iint_D \frac{\partial(uv)}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D} uvn_1 ds$$

$$\iint_D \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D} uvn_1 ds$$

Notamos que la normal es ortogonal a $\sigma'(t)$ y tiene misma norma, por lo que $(n_1, n_2) \cdot (\sigma'_x(t), \sigma'_y(t)) = 0$, así que $(\sigma'_x(t), \sigma'_y(t)) \propto (-n_2, n_1)$, entonces $(\sigma'_x(t), \sigma'_y(t)) = \pm(-n_2, n_1)$. Si además queremos que la normal vaya para afuera cuando estamos en sentido antihorario, metemos esto en el círculo

$$((cos(t))', (sin(t))') = ((-sin(t)), (cos(t))) = \pm(-sin(t), cos(t))$$

, por lo que lo correcto es $(\sigma'_x(t), \sigma'_y(t)) = (-n_2, n_1)$. Aplicaremos el teorema de Green a $(0, uv)$, obteniendo que

$$\iint_D \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D} uvn_1 ds$$

es una afirmación cierta, lo que equivale a la verdad de la afirmación que queríamos probar en el ejercicio.

Ulises Wainstein Haimovichi