

1/19

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

DIAGRAMAS DE FASE - PARTE I

Ya hemos visto que el problema

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (*)$$

admite una única solución local si

$F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz

con respecto a la segunda variable, $I \subset \mathbb{R}$

es un intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto

abierto, $t_0 \in I$ y $x_0 \in \Omega$. Vimos, además,

que si F es continua y F_x existe y es

continua entonces F es localmente Lipschitz

con respecto a x . Así que, bajo condiciones bastante

generales, el problema admite una única

solución local. Más aún, vimos que esta

2/19

solución depende continuamente de los datos iniciales.

También vimos que, en algunas situaciones particulares, la solución de (*) se puede obtener de manera explícita.

A continuación nos concentraremos en estudiar la solución de (*) cuando no es posible obtenerla de manera explícita. Esto a menudo ocurre cuando F no es lineal con respecto a x . Nos ocuparemos aquí de estudiar ecuaciones de la forma

$$x'(t) = F(x(t)) \quad (**)$$

donde F es de clase C^1 (por lo tanto,

3/19

localmente Lipschitz con respecto a x).

Las ecuaciones de la forma (**), donde F no depende de la variable t , se denominan "ecuaciones autónomas". En particular,

estudiaremos el comportamiento de las soluciones de (*) cuando $t \rightarrow +\infty$

o $t \rightarrow -\infty$.

Los siguientes resultados serán de mucha utilidad.

TEOREMA Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo,

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y

$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Si $x_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$

y $x_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos soluciones máximas de (*) entonces

4/19

$$\{x_1(t) : t \in I_1\} \cap \{x_2(t) : t \in I_2\} = \emptyset$$

o bien

$$\{x_1(t) : t \in I_1\} = \{x_2(t) : t \in I_2\}$$

En otras palabras, las curvas parametrizadas

por x_1 y x_2 no se cruzan o bien coinciden.DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 como en el

enunciado. Basta demostrar que si

$$\{x_1(t) : t \in I_1\} \cap \{x_2(t) : t \in I_2\} \neq \emptyset$$

entonces

$$\{x_1(t) : t \in I_1\} = \{x_2(t) : t \in I_2\}.$$

Supongamos entonces que existen $t_1 \in I_1$,y $t_2 \in I_2$ tales que $x_1(t_1) = x_2(t_2) \stackrel{\text{notación}}{=} x_0$.Ahora definimos \tilde{x} como

$$\tilde{x}(t) = x_2(t - t_1 + t_2)$$

5/19

y observamos que tanto x_1 como \tilde{x} resuelven localmente el problema

$$\begin{cases} x'_1(t) = F(x_1(t)) \\ x_1(t_1) = x_0 \end{cases}$$

Combinando esto con el hecho que este problema admite única solución local y con que x_1 es solución maximal, se deduce

que

$$x_1(t) = \tilde{x}(t) \quad \forall t \in I_1.$$

Como, además, $\text{Im}(x_2) = \text{Im}(x_1)$,

concluimos que

$$\{x_1(t) : t \in I_1\} = \{x_2(t) : t \in I_2\}$$

OBSERVACIÓN Para resolver el problema □

6/19

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

basta resolver el mismo problema, pero

con dato inicial dado en $t_0 = 0$,

$$\begin{cases} x'(t) = F(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ya que si \tilde{x} es solución de este último problema entonces

$$x(t) = \tilde{x}(t - t_0)$$

define una solución del primero.

DEFINICIÓN Sean I y F como en el

teorema anterior.

a) Sea $x_0 \in \Omega$. Se dice que x_0 es un

"punto crítico" para la ecuación (**)

7/19

Si $F(x_0) = 0$.

b) Sea x una solución de (**). Se dice que x es "estacionaria" si x es constante.

OBSERVACIÓN Notar que si x es una solución estacionaria de $x'(t) = F(x(t))$, digamos $x(t) = x_0$ para todo t , entonces x_0 es un punto de equilibrio para la ecuación $x'(t) = F(x(t))$ ya que

$$0 = x'(t) \underset{x \text{ es const.}}{\underset{\uparrow}{=}} F(x(t)) \underset{x \text{ es solución}}{\underset{\uparrow}{=}} F(x_0) \underset{x \text{ es const.}}{\underset{\uparrow}{=}}$$

TEOREMA Sean I y F como en el teorema anterior y sea x una solución de (**).

a) Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ para algún

$t_0 \in \mathbb{R}$ y algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $F(x_0) \neq 0$.

8/19

En otras palabras, una solución puede tender a un punto crítico sólo en tiempo infinito (es decir, si $t \rightarrow +\infty$ o $t \rightarrow -\infty$).

b) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ o $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$,

para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $F(x_0) = 0$.

En otras palabras, si una solución tiene límite en \mathbb{R}^n cuando el tiempo tiende a infinito ($+\infty$ o $-\infty$) entonces el límite debe ser un punto crítico.

DEMOSTRACIÓN [Opcional], se la puede consultar en el apunte de Wolanski, pág. 61. 

A continuación vamos a utilizar estos resultados para analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de (**). Esto

9/19

lo haremos mediante lo que se conoce como "diagrama de fases".

• Diagrama de fases

El diagrama de fases consiste en graficar una colección de curvas parametrizadas

por soluciones de $(\ast\ast)$ con el objetivo de

tener una idea de lo que ocurre con

todas las soluciones de $(\ast\ast)$. Más

precisamente, con el esbozo del diagrama

de fases, la idea es poder predecir el

comportamiento asintótico de las solucio-

nnes dependiendo de dónde se encuentren

inicialmente. Por ejemplo, predecir

si las soluciones tienden a estabilizar

10/19

se en un cierto punto, si oscilan, si se hacen infinitamente grandes, etc.

Vamos a hacer diagramas de fases sólo en el caso $n=2$, para el cual (***) se expresa como

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Aquí $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Recordando que el vector $(x'(t_0), y'(t_0))$

es tangente a la curva dada por

$\tau(t) = (x(t), y(t))$ en el punto

$(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, y teniendo en cuenta que $(x'(t_0), y'(t_0)) =$

$(f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0))$; vemos que

11/19

graficando "muchas" flechas del campo $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$, podemos hacernos una idea de cómo será el diagrama de fases para (**).

EJEMPLO Vamos a esbozar el diagrama de fases para el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = (-1 + y(t))x(t) \\ y'(t) = (-2 + x(t))y(t) \end{cases}$$

Este sistema surge de modelar la evolución de dos poblaciones simbióticas, representadas por x e y , cada una de las cuales decrece con razón constante en ausencia de la otra especie y cuya razón de crecimiento es proporcional a la otra población. En base

12/19

a esta observación, haremos el diagrama de fases sólo en el primer cuadrante.

Primero observamos que el campo F para este sistema está dado por

$$F(x, y) = (-1+y)x, (-2+x)y).$$

A continuación vamos a recolectar algo de información para bosquejar el gráfico de F .

.. Se deja como ejercicio deducir que los

únicos puntos críticos del sistema (ceros de F) son $(0,0)$ y $(2,1)$.

.. Si $y=0$ entonces $F(x,y)=(-x,0)$. Así

que el gráfico de F sobre el eje x está dado por flechas horizontales que apuntan hacia $(0,0)$ y cuyos módulos

13/19

decrecen conforme se aproximan a $(0,0)$.

Algo similar ocurre sobre el eje y , ya

que si $x=0$ entonces $F(x,y) = (0, -2y)$.

.. Si $y=1$ entonces $F(x,y) = (0, -2+x)$.

Luego, si $0 < x < 2$ entonces el gráfico

de F sobre la recta de ecuación $y=1$

está dado por flechas verticales que

apuntan hacia el eje x con módulos

que decrecen conforme se acercan a $(2,1)$;

y si $x > 2$ entonces el gráfico

de F sobre la recta de ecuación $y=1$

está dado por flechas verticales que no

apuntan hacia el eje x con módulos

que decrecen conforme se acercan a $(2,1)$ y

14/19

y crecen indefinidamente a medida que se alejan de $(2,1)$. Algo similar ocurre sobre la recta de ecuación $x=2$

ya que allí $F(x,y) = ((-1+y)x, 2, 0)$.

.. En la región dada por $x \in (0,2)$ e

$y \in (1, +\infty)$ se tiene que $F(x,y) =$

$\underbrace{((-1+y)x)}_{>0}, \underbrace{(-2+x)y}_{>0} < 0$ tiene primera

componente positiva y segunda compo-

nente negativa. Luego, el gráfico de F en esta región está dado por flechas de

la forma " \nearrow ". En forma análoga

se puede ver que F asume la forma " \nearrow "

en la región dada por $x \in (2, +\infty)$ e

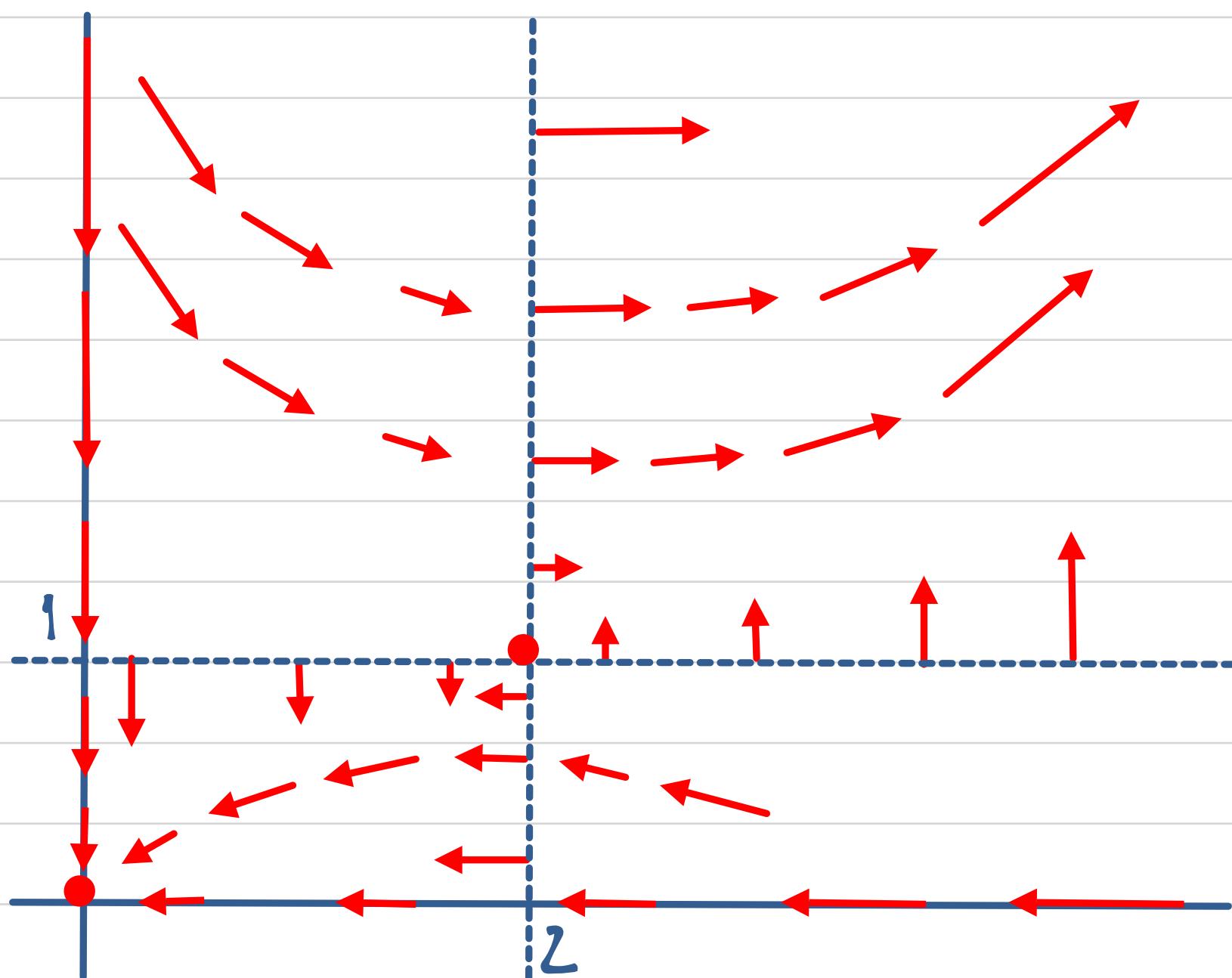
$y \in (1, +\infty)$; la forma " \nwarrow " si $x \in (0,2)$ e

15/19

$y \in (0,1)$; y la forma "Λ" si $x \in (2, +\infty)$ e $y \in (0,1)$.

Con toda esta información obtenemos

el siguiente bosquejo para F :



Veamos ahora cómo bosquejar el diagrama de fases a partir del esbozo del gráfico de F . Las siguientes observaciones serán de mucha ayuda.

16/19

.. Es directo que los campos dados por $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ y $(x(t), y(t)) = (2, 1)$ son soluciones estacionarias. Más aún, son las únicas con esta propiedad (ver la observación que sigue a la definición de solución estacionaria).

.. El campo dado por $(x(t), 0)$ con x solución de $x'(t) = -x(t)$ y tal que $x(0) = x_0$, es solución y representa una curva sobre el eje x en el diagrama de fases. Algo similar ocurre para soluciones que inicialmente están sobre el eje y . Además como curvas dadas por soluciones distintas no se cortan, se ve

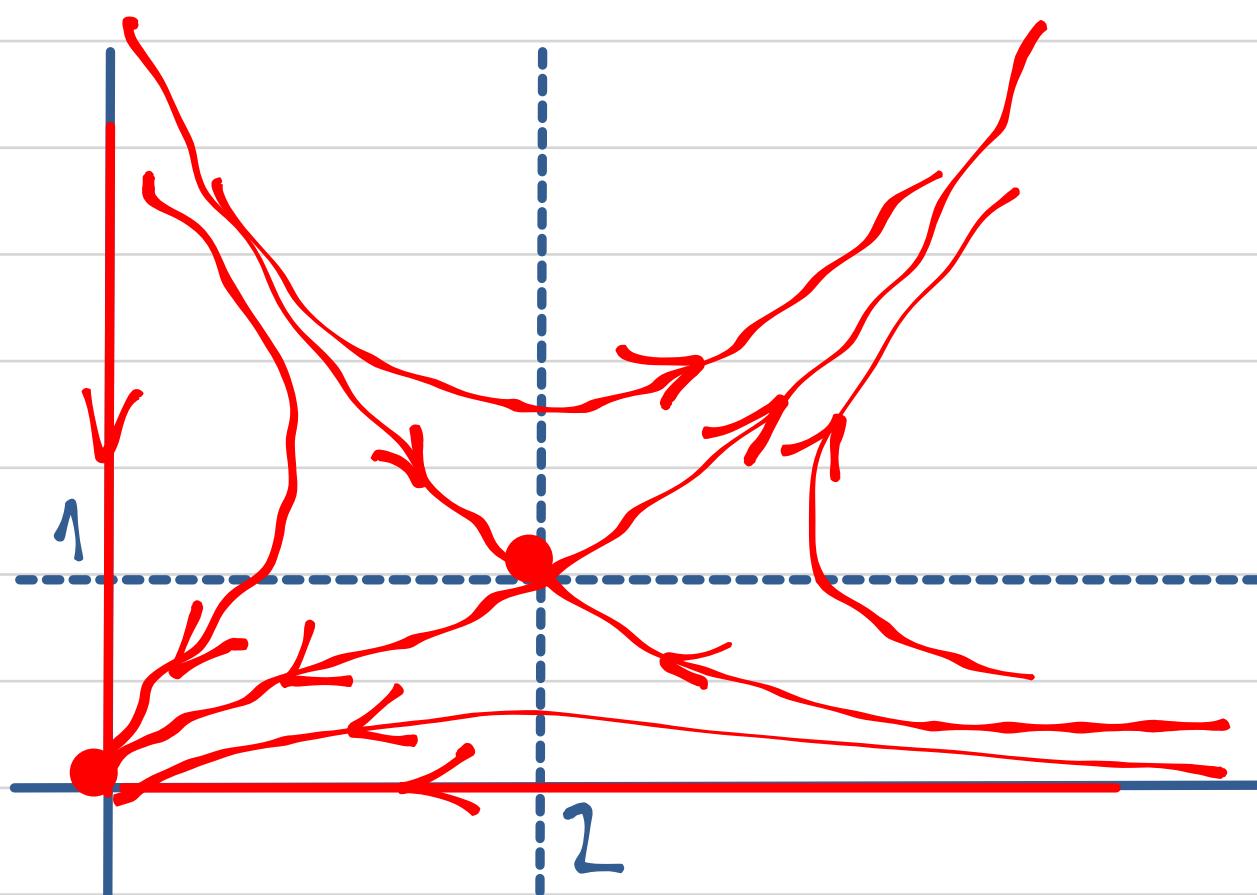
17/19

que curvas correspondientes a datos iniciales en el primer cuadrante permanecen en el primer cuadrante.

.. Pareciera que las curvas solución que están inicialmente cerca de $(0,0)$ tienden en tiempo infinito a $(0,0)$; y que entre aquellas que están inicialmente cerca de $(2,1)$, algunas tienden a $(2,1)$ en tiempo infinito aunque la mayoría parece alejarse de $(2,1)$.

En base a todo este análisis, conjeturamos que el diagrama de fases es de la forma

18/19



Pero, qué nos asegura que el diagrama de fases es de esta forma? Con algunos resultados que veremos en breve podremos asegurar la forma que toma el diagrama de fases en las cercanías de los puntos críticos, pero el diagrama completo sólo podremos conjeturarlo.

Vemos que, cerca de los puntos críticos, los sistemas no lineales tienen diagra-

19/19

mas de fase parecidos a los de un sistema lineal con coeficientes constantes, para los cuales podremos dar con precisión el diagrama de fases puesto que podremos calcular sus soluciones de manera explícita.