Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 23, 2do. cuatrimestre 2020

Diagramas de fases de sistemas lineales a coeficientes constantes

Consideramos el sistema

$$\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X},$$

con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Queremos dibujar aproximadamente las trayectorias del sistema en función de los autovalores λ_1 y λ_2 de A.

Supongamos que 0 no es autovalor. Por lo tanto, $A\boldsymbol{X} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = (0,0)$, es decir, $(0,0)$ es el único punto de equilibrio del sistema.

Caso I: $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$ que forman una base de autovectores de A, correspondientes a λ_1, λ_2. La solución general es

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\xi_2.$$

Si $\boldsymbol{X}(0) = c\xi_1$ (estoy en la recta de autovectores asociados a λ_1) $\Rightarrow c_1 = c$ y $c_2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{X}(t) = ce^{\lambda_1 t}\xi_1$. Como $\lambda_1 > 0$,

$$\boldsymbol{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \infty \ \text{ y } \ \boldsymbol{X}(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0.$$

Si $\boldsymbol{X}(0) = c\xi_2 \Rightarrow \boldsymbol{X}(t) = ce^{\lambda_2 t}\xi_2$, y como $\lambda_2 < 0$,

$$\boldsymbol{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \ \text{ y } \ \boldsymbol{X}(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \infty.$$

Por último, si $\boldsymbol{X}(0) \neq c\xi_1$ y $\boldsymbol{X}(0) \neq c\xi_2 \Rightarrow c_1 c_2 \neq 0$.
Escribamos a $\boldsymbol{X}(t)$ en la base $\{\xi_1, \xi_2\}$:

$$\boldsymbol{X}(t) = y_1(t)\xi_1 + y_2(t)\xi_2.$$

Caso I: $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

Tenemos que

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \infty, \quad y_1(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0,$$
$$y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \quad y_2(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \infty.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{X}(t)$ se acerca a la recta $\langle \xi_1 \rangle$ cuando $t \to +\infty$ y a la recta $\langle \xi_2 \rangle$ cuando $t \to -\infty$.

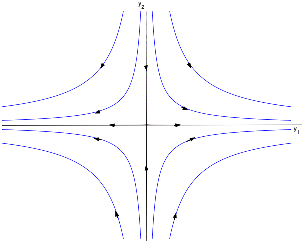
Para dibujar el diagrama de fases, dibujamos primero las curvas $(y_1(t), y_2(t))$: como $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow$

$$\left(\frac{y_1(t)}{c_1}\right)^{1/\lambda_1} = e^t = \left(\frac{y_2(t)}{c_2}\right)^{1/\lambda_2}$$

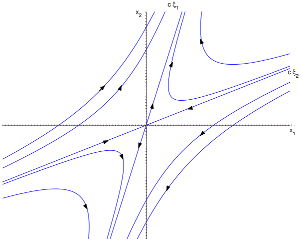
$$\Rightarrow y_2(t) = c_2 \left(\frac{y_1(t)}{c_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} = k|y_1(t)|^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Caso I: $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$

Como $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, las curvas tienen la forma:



Por lo tanto, el diagrama de fases tiene el siguiente aspecto:



Caso II: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

Si escribimos como antes $\boldsymbol{X}(t) = y_1(t)\xi_1 + y_2(t)\xi_2$, entonces

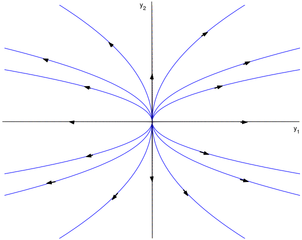
$$y_2 = k|y_1|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \text{con} \quad 0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1.$$

En este caso, dado el signo de λ_1 y λ_2,

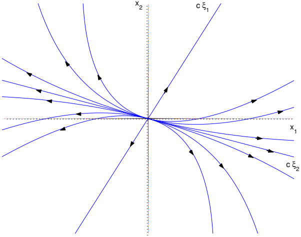
$$y_1(t), y_2(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \infty \quad \text{e} \quad y_1(t), y_2(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0.$$

Caso II: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

Por lo tanto, las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ tienen la forma



y el diagrama de fases es



Caso III: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Este caso es exactamente como el anterior:

$$y_2 = k|y_1|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \text{con } 0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1.$$

Así, este caso es como el Caso II con las flechas con sentido invertido.

Caso IV: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$

Supongamos que $A \neq \lambda I$ (el caso $A = \lambda I$ queda como ejercicio). La solución general es

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 e^{\lambda t}\xi_1 + c_2 e^{\lambda t}(\xi_1 t + \xi_2) = y_1(t)\xi_1 + y_2(t)\xi_2,$$

$$\text{con } \; y_1(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Tenemos que $y_1(0) = c_1$, $y_2(0) = c_2$. Si $\boldsymbol{X}(0) = c\xi_1 \Rightarrow c_1 = c$ y $c_2 = 0 \Rightarrow X(t) = c_1 e^{\lambda t}\xi_1$. Es decir, si comenzamos en $\langle \xi_1 \rangle$, $\boldsymbol{X}(t) \in \langle \xi_1 \rangle$ para todo t. No ocurre lo mismo con $\langle \xi_2 \rangle$. Tenemos

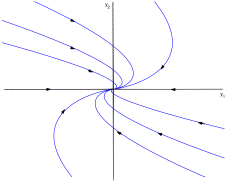
$$\frac{y_2}{c_2} = e^{\lambda t} \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda}\log\left|\frac{y_2}{c_2}\right| \Rightarrow$$

$$y_1(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) = \frac{y_2(t)}{c_2}\left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda}\log\left|\frac{y_2(t)}{c_2}\right|\right) = y_2(t)\left(k_1 + \frac{1}{\lambda}\log|y_2(t)|\right).$$

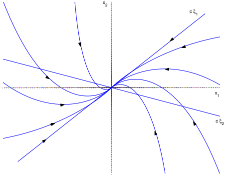
$y_2(t)$ no cambia de signo, pero $y_1(t) = y_2(t)\left(k_1 + \frac{1}{\lambda}\log|y_2(t)|\right)$ sí porque $\log|y_2(t)| \xrightarrow[y_2(t)\to\infty]{} +\infty$ y $\log|y_2(t)| \xrightarrow[y_2(t)\to 0]{} -\infty$.

Caso IV: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Dibujamos las curvas $(y_1(t), y_2(t))$ en el caso en que $\lambda < 0$:



Así, el correspondiente diagrama de fases resulta



Caso V: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta < 0$

La solución real es

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1 \operatorname{Re}\big(e^{(\alpha+i\beta)t}\xi_1\big) + c_2 \operatorname{Im}\big(e^{(\alpha+i\beta)t}\xi_1\big),$$

donde $\xi_1 = \boldsymbol{v}_1 + i\boldsymbol{v}_2$ es un autovector asociado a $\lambda_1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(t) &= c_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t\, \boldsymbol{v}_1 - \operatorname{sen}\beta t\, \boldsymbol{v}_2) + c_2 e^{\alpha t}(\operatorname{sen}\beta t\, \boldsymbol{v}_1 + \cos\beta t\, \boldsymbol{v}_2)\\ &= e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t + c_2 \operatorname{sen}\beta t)\boldsymbol{v}_1 + e^{\alpha t}(-c_1\operatorname{sen}\beta t + c_2\cos\beta t)\boldsymbol{v}_2.\end{aligned}$$

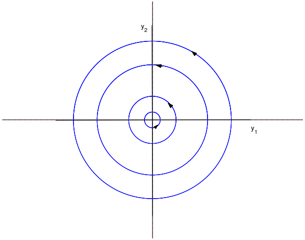
Consideremos (c_1, c_2) de la forma $(c_1, c_2) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{\alpha t} r(\cos\theta\cos\beta t + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\beta t) = e^{\alpha t} r\cos(\theta - \beta t)\\ y_2(t) &= e^{\alpha t} r(-\cos\theta\ \operatorname{sen}\beta t + \operatorname{sen}\theta\cos\beta t) = e^{\alpha t} r\ \operatorname{sen}(\theta - \beta t).\end{aligned}$$

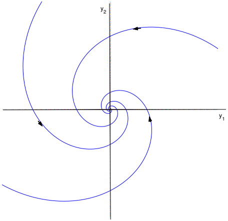
Luego, la curva $(y_1(t), y_2(t))$ se obtiene rotando el punto (c_1, c_2) un ángulo $-\beta t > 0$ y expandiendo (o contrayendo) su módulo por un factor $e^{\alpha t}$. Esto da los siguientes diagramas dependiendo de α.

Caso V: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta < 0$

$\alpha = 0$

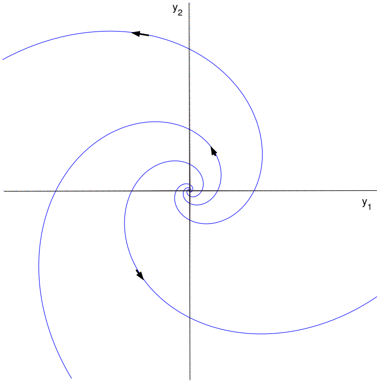


$\alpha < 0$



Caso V: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta < 0$

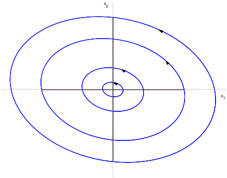
$\underline{\alpha > 0}$



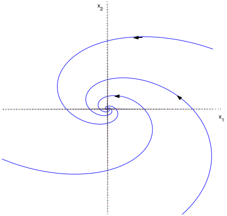
Caso V: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta < 0$

Así, los diagramas de fases son los siguientes:

$\underline{\alpha = 0}$

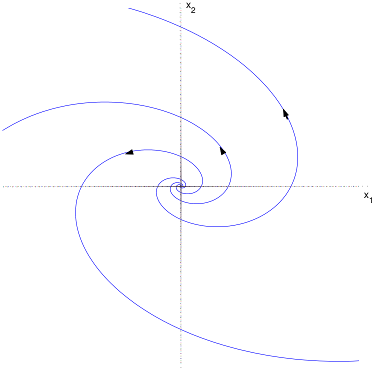


$\underline{\alpha < 0}$



Caso V: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta < 0$

$\underline{\alpha > 0}$



Comportamientos

A modo de resumen, si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, todas las trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$.

Si todos los autovalores de A tienen parte real positiva, todas las trayectorias tienden a $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$.

Si un autovalor es positivo y el otro negativo, hay exactamente dos trayectorias $\boldsymbol{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,0)$: las que corresponden a la recta de autovectores asociados al autovalor negativo.

También hay exactamente dos trayectorias que se acercan a $(0,0)$ cuando $t \to -\infty$: las que corresponden a la recta de autovectores asociados al autovalor positivo.

Todas las demás trayectorias se alejan del origen cuando $t \to +\infty$.

Linealización

Retomamos el estudio del sistema autónomo de primer orden

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}),$$

donde $\boldsymbol{X} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en el abierto Ω.

Recordamos que $\boldsymbol{X}^* \in \Omega$ es un punto de equilibrio del sistema si $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*) = \boldsymbol{0}$. Equivalentemente, la trayectoria $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}^*$ para todo $t \in I$ es solución del sistema.

Hablamos de equilibrios estables (cuando trayectorias que pasan “cerca” de $\boldsymbol{X}^*$ tienden a $\boldsymbol{X}^*$) e inestables (existen trayectorias con condiciones iniciales arbitrariamente cerca de $\boldsymbol{X}^*$ que se “alejan” de $\boldsymbol{X}^*$).

Desde un punto de vista físico, solo “se ven” los equilibrios estables; los inestables “desaparecen” frente a la menor perturbación de las condiciones (ejemplo: el péndulo).

Linealización

Determinar los puntos de equilibrios es solo "la mitad del problema"; es necesario analizar su estabilidad para caracterizar aquellos que ocurren en situaciones "normales".

Definición: Un punto de equilibrio $\boldsymbol{X}^* \in \Omega$ es

1. estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $\|\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}^*\| < \delta$, entonces la solución de $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0$, satisface $\|\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}^*\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.
2. asintóticamente estable si es estable y además existe $\delta_0 > 0$ tal que, si $\|\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}^*\| < \delta_0$, entonces la trayectoria $\boldsymbol{X}(t)$ tal que $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0$ satisface $\boldsymbol{X}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \boldsymbol{X}^*$.

Ejemplo: Para $\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X}$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible, $(0,0)$ es el único punto de equilibrio. Vimos que $\boldsymbol{X}(t) \to (0,0)$ para toda trayectoria $\Leftrightarrow$ los dos autovalores de A son reales negativos ($(0,0)$ es asintóticamente estable).

Linealización

Usando el hecho de que conocemos las trayectorias de sistemas lineales con coeficientes constantes, estudiamos el sistema autónomo no lineal

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}).$$

El punto clave es linealizar: si $\boldsymbol{X}^*$ es un punto de equilibrio, para $\boldsymbol{X}$ cerca de $\boldsymbol{X}^*$ tenemos que

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \simeq \underbrace{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)}_{=\boldsymbol{0}} + D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^*) = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^*),$$

donde $A = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{X}^*$. Por lo tanto, si llamamos $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^*$, tenemos que

$$\boldsymbol{Y}' = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^*)' = \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \simeq D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^*) = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)\boldsymbol{Y}$$

para $\boldsymbol{Y} \simeq 0$.

Linealización

El sistema

$$\boldsymbol{Y}' = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)\boldsymbol{Y}$$

tiene a $\mathbf{0}$ como punto de equilibrio asintóticamente estable $\Leftrightarrow$ todos los autovalores tiene parte real negativa. Por otro lado, si algún autovalor tiene parte real negativa $\Rightarrow$ $\mathbf{0}$ es inestable.

Estas condiciones también son suficientes para el caso no lineal:

Teorema (Estabilidad lineal): Sea $\boldsymbol{X}^* \in \Omega$ un punto de equilibrio del sistema $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, con $\boldsymbol{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Si todos los autovalores de $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)$ tienen parte real negativa, $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, entonces $\boldsymbol{X}^*$ es asintóticamente estable. Si $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}^*)$ tiene algún autovalor con parte real positiva, $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$, entonces $\boldsymbol{X}^*$ es inestable.

Linealización

Ejemplo: Retomamos el ejemplo del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & (-\alpha + \beta y)x, \\ y' & = & (-\gamma + \delta x)y, \end{array} \right.$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. En este caso, el sistema es

$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, con $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{F}(x, y) = ((-\alpha + \beta y)x, (-\gamma + \delta x)y)$.

Los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$. Tenemos que

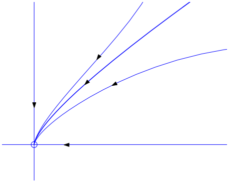
$$D\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta y & \beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$

Linealización

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{DF}(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = -\alpha$, $\lambda_2 = -\gamma$. En consecuencia, $(0,0)$ es un equilibrio asintóticamente estable.



Por otro lado,

$$A = \boldsymbol{DF}(\gamma/\delta, \alpha/\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta\gamma/\delta \\ \delta\alpha/\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha\gamma \Rightarrow$ los autovalores son $\lambda_1 = \sqrt{\alpha\gamma}$, $\lambda_2 = -\sqrt{\alpha\gamma} \Rightarrow$ $(\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ es inestable.

Más aun, podemos ver las trayectorias que "salen" o "entran" al punto de equilibrio: son tangentes a las rectas autovectores de A. Para encontrarlas, hacemos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\lambda_1 I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha\gamma} & -\beta\gamma/\delta \\ -\delta\alpha/\beta & \sqrt{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha\gamma}\, x = \beta\frac{\gamma}{\delta}\, y \Leftrightarrow y = \frac{\delta}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\, x.$$

Linealización

En el otro caso,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\lambda_2 I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha\gamma} & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ -\frac{\delta\alpha}{\beta} & -\sqrt{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -\frac{\delta}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\, x.$$