SUPERFICIES

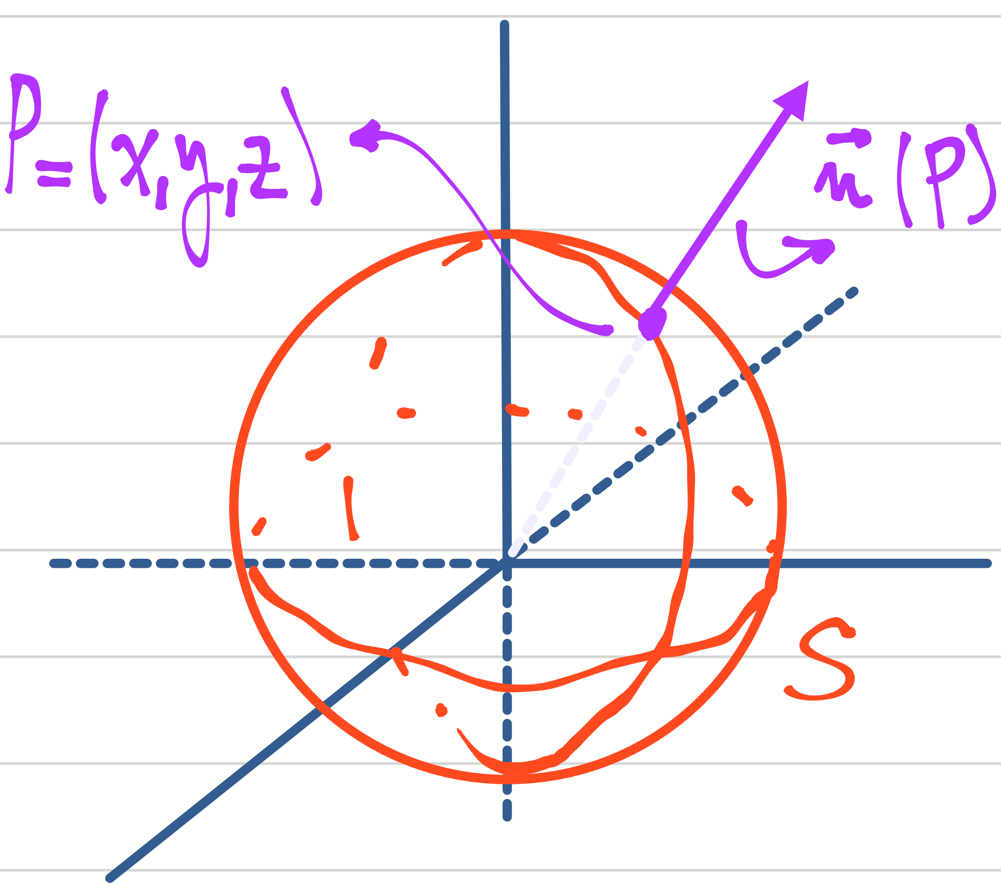
INTEGRAL DE CAMPOS VECTORIALES

Nos ocuparemos ahora de estudiar la integral de un campo vectorial sobre una superficie, y lo haremos siguiendo un desarrollo análogo al que hicimos para estudiar la integral de un campo escalar sobre una curva (integrales curvilíneas).

Para ello comenzamos con la definición de lo que entenderemos como "superficie orientable".

DEFINICIÓN Se dice que una superficie S es "orientable" si existe un campo vectorial $\vec{n}: S \to \mathbb{R}^3$ normal a S y continuo.

EJEMPLO Sea S la esfera de radio 1 centrada en el origen de coordenadas, dada por la ecuación $x^2+y^2+z^2=1$. El campo vectorial $\vec{n}: S \to \mathbb{R}^2$ definido como $\vec{n}(x,y,z)=(x,y,z)$ es normal a S y continuo. Por lo tanto, S es una superficie orientable.



Otra forma de ver que S es orientable es la siguiente: Consideramos la parametrización de S dada por la función $T:[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3$ definida como

$T(\theta,\varphi) = (\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi))$.

Ahora calculamos

$T_\theta(\theta,\varphi) = (-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), 0)$

$T_\varphi(\theta,\varphi) = (\cos(\theta)\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi))$

Luego

$T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi) =$

$(-\cos(\theta)\operatorname{sen}^2(\varphi), -\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}^2(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi))$

Ahora observamos que $\varphi \in [0,\pi]$

$|T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)| = |\operatorname{sen}(\varphi)| = \operatorname{sen}(\varphi)$,

así que $T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi) \neq (0,0,0)$ si $\varphi \neq 0$ y $\varphi \neq \pi$. Además, $T_\theta \times T_\varphi / |T_\theta \times T_\varphi|$ tiende a $(0,0,-1)$ si $\varphi \to 0^-$ y tiende a $(0,0,1)$ si $\varphi \to 0^+$. Es sencillo verificar que el campo $\vec{J} : S \to \mathbb{R}^3$ definido por

$\vec{\nu}(P) = T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi) / |T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)|$ para $P = T(\theta,\varphi)$ con $\varphi \neq 0$ y $\varphi \neq \pi$;

$\vec{\nu}(P) = (0,0,-1)$ para $P = T(\theta,0)$ y

$\vec{\nu}(P) = (0,0,1)$ para $P = T(\theta,\pi)$, es normal a S, continuo y unitario. Luego $\vec{\nu}$ orienta a S.

A partir de lo anterior cabe preguntarse qué relación hay entre $\vec{\nu}$ y $\vec{n}$. Es sencillo comprobar que son campos vectoriales opuestos.

<u>OBSERVACIÓN</u> Sea S una superficie orientable y suave. Sea $\vec{n}$ un campo unitario que orienta a S y sea T una parametrización regular de S. Como el

vector $T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)$ es normal a S en $P = T(\theta,\varphi)$, resulta que

$$\frac{T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)}{|T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)|} = \vec{n}(P)$$

o bien,

$$\frac{T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)}{|T_\theta(\theta,\varphi) \times T_\varphi(\theta,\varphi)|} = -\vec{n}(P).$$

A partir de esto se deduce que $T_\theta \times T_\varphi / |T_\theta \times T_\varphi| = \vec{n}$ o bien que $T_\theta \times T_\varphi / |T_\theta \times T_\varphi| = -\vec{n}$. En consecuencia, una superficie orientable y suave puede orientarse con campos unitarios de dos (y sólo dos) maneras: con un campo unitario $\vec{n}$ y con su opuesto.

EJEMPLO La cinta de Moebius no es una superficie orientable ya que es suave pero no admite la existencia de dos campos vectoriales normales y unitarios que la orienten.

DEFINICIÓN Sea S una superficie suave orientada por un campo vectorial unitario $\vec{n}$ y sea $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización regular de S. Se dice que T "preserva la orientación" de S si

$$\frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\| T_u(u,v) \times T_v(u,v) \|} = \vec{n}(P)$$

para $P = T(u,v)$ para todo $(u,v) \in D$.

Ya estamos en condiciones de dar la definición de la integral de un campo vectorial sobre una superficie S.

<u>DEFINICIÓN</u> Sea S una superficie suave orientada por un campo vectorial $\vec{n}$. Supongamos que S admite una parametrización $T: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que es C^1 e inyectiva, excepto quizás sobre el borde de D. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo sobre S, definimos la "integral del campo vectorial $\vec{F}$ sobre la superficie orientada S" como

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Es la integral de un campo escalar sobre una superficie.

y la anotamos como $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

OBSERVACIÓN Por definición, es:

$$\iint_S \vec{F} \cdot ds = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

OBSERVACIÓN La integral $\iint_S \vec{F} \cdot ds$ también recibe el nombre de "flujo de $\vec{F}$ a través de S". Esto se debe a que si $\vec{F}$ es el campo de velocidad de un fluido entonces $\iint_S \vec{F} \cdot ds$ representa la cantidad de fluido (medida en litros, por ejemplo) que atraviesa S por unidad de tiempo (medido en segundos, por ejemplo). Si S es una superficie cerrada orientada con normal exterior, la integral $\iint_S \vec{F} \cdot ds$ indica el flujo saliente. En cambio, si S está orientada con normal interior, la integral $\iint_S \vec{F} \cdot ds$ indica el flujo entrante.

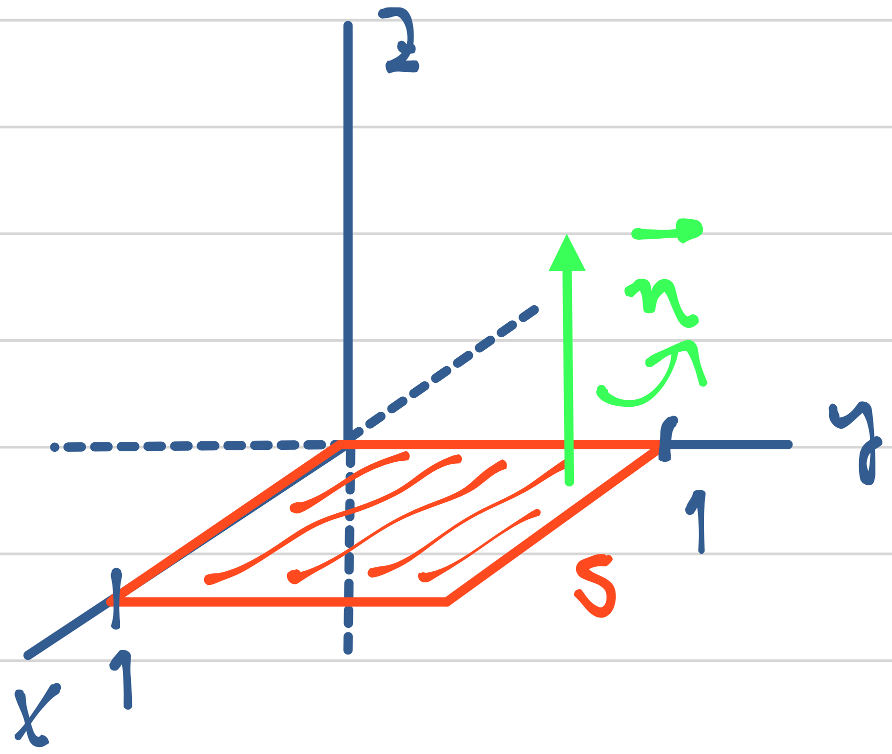
Lo anterior sugiere que el valor de $\iint_S \vec{F} \cdot ds$ depende de la orientación considerada sobre S y esto es efectivamente lo que ocurre: Se puede demostrar que si S es una superficie suave, orientada por una parametrización regular T, y $\tilde{T}$ es otra parametrización regular de S, la cual preserva la orientación que da T, entonces las integrales de $\vec{F}$ sobre S con la orientación de T y con la orientación de $\tilde{T}$ coinciden. Si, en cambio, $\tilde{T}$ no preserva la orientación de S que da T entonces las integrales de $\vec{F}$ sobre S con la orientación de T y con la orientación de $\tilde{T}$ son opuestas.

EJEMPLO Vamos a calcular cuántos metros cúbicos de fluido atraviesan el plano xy a través del cuadrado determinado por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, por segundo, suponiendo que la velocidad del fluido está dada por $\vec{F}(x,y,z) = (ax, bx^2, cxy^2)$ donde a, b y c son constantes reales.

Comenzamos observando que el cuadrado, al cual llamaremos S, dado por $0 \leq x \leq 1$,

$0 \leq y \leq 1$, es una superficie suave y orientable por el campo vectorial normal unitario constante dado por

$$\vec{n}(x,y,0) = (0,0,1).$$



Además, S puede parametrizarse por $T:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3$ definida por

$T(x,y) = (x,y,0)$. Es sencillo comprobar que T es regular. Luego, el flujo de fluido que atraviesa S en la dirección de $\vec{n}$ es

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \underset{\text{def.}}{=} \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

En este ejemplo sólo nos interesa conocer la cantidad de metros cúbicos de fluido que atraviezan S por segundo, independientemente de la dirección en la cual se atraviese S. Esto está dado por $\left| \iint_S \vec{F} \cdot ds \right|$. Lo calculamos.

Primero observamos que

$$\iint_S \vec{F} \cdot ds = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \vec{F}(T(x,y)) \cdot \vec{n}(T(x,y)) \, | T_x(x,y) \times T_y(x,y) | \, dx dy$$

Entonces calculamos

$T_x(x,y) = (1,0,0)$

$T_y(x,y) = (0,1,0)$

y obtenemos $T_x(x,y) \times T_y(x,y) = (0,0,1)$.

Luego,

$$\iint_S \vec{F}\cdot dS = \int_0^1\int_0^1 \overbrace{\vec{F}(x,y,0)}^{(ax,\,bx^2,\,cxy^2)}\cdot \underbrace{\vec{n}(x,y,0)}_{(0,0,1)}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 cxy^2\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{c}{2}y^2\,dy = \frac{c}{6}.$$

Concluimos que la cantidad de metros cúbicos de fluido que atraviesan S por segundo es $|c|/6$.

<u>OBSERVACIÓN</u> La definición de la integral de un campo vectorial $\vec{F}$ sobre una superficie S se extiende al caso en el que

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$$

donde cada S_j es suave, excepto quizás en finitos puntos; cada S_j es orientable y admite una parametrización $T_j : D_j \to \mathbb{R}^2$ en C^1 que es inyectiva, excepto quizás sobre el borde de D_j; y $S_i \cap S_j$ está contenido en la unión de los bordes de S_i y S_j para todo $i \neq j$. En este caso, la definición queda

$$\iint_S F \cdot dS = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_j} F \cdot dS.$$