Análisis 2 / Análisis Matemático II / Matemática 3

Recuperatorio del Primer Parcial

Segundo cuatrimestre - 23/12/2020

Justificar todas las respuestas y escribir prolijo. Duración 4 horas.

Ejercicio 1 Considere un alambre cuya forma se puede describir como la curva $\mathcal{C}$ que es intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+z=0$.

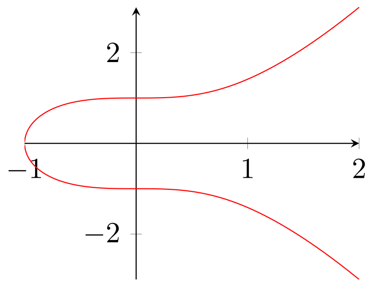
a) De una parametrización regular de la curva $\mathcal{C}$. Justifique que es parametrización y que es regular.

b) Si la densidad de masa del alambre es $\rho(x,y,z)=x^2|y|$, halle la longitud del alambre y su masa total.

Ejercicio 2 Sea $\mathcal{C}=\{x^3-y^2+1=0; x\leq 2\}$ recorrida desde $(2,-3)$ hacia $(2,3)$. Calcule el valor de la integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Un gráfico aproximado de $\mathcal{C}$ es el siguiente:



Ejercicio 3 Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z)=((x+y)e^{z^2},(y+z)e^{x^2},(z+x)e^{y^2})$$

y sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}\cap[0,1]^3$ orientada de tal forma que la normal en el punto $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ tiene componente z positiva.

Calcule $\displaystyle\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$.

Ejercicio 4 Sean las superficies

$$S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 4z^2=x^2+y^2, 1\leq z\leq 2, y\geq 0\}.$$
$$S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=4, 1\leq z\leq 2, y\geq 0\}.$$
$$S_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=0, 2\leq x\leq 2z, 1\leq z\leq 2\}.$$
$$S_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=0, -2z\leq x\leq -2, 1\leq z\leq 2\}.$$

Sea S la unión de estas cuatro superficies orientada de tal forma que la normal en $(0,2,2)$ es igual a $(0,-1,0)$. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función C^1 tal que

$$f(x)f'(x)=e^{x^2},$$

consideremos el campo vectorial

$$F(x,y,z)=(xf(z), zf^2(\sqrt{x^2+y^2})-yf(z), z).$$

Calcular

$$\int_S \mathbf{F}.d\mathbf{S}.$$