# Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática 3

## 1° Cuatrimestre 2012 – Primer Parcial – 12/05/12

| 1 | 2 | 3 | 4 | CALIFICACIÓN |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Nombre: Carrera: L.U.:

1) Sea $C$ la curva que es imagen de la función $\sigma: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(x) = \left(x, \sqrt{9-36x^2}\right)$.
   a) Esbozar un diagrama de $C$.
   b) Dar una parametrización regular de $C$.
   c) ¿Es suave $C$?

2) Considerar la siguiente curva $C$ dada como intersección de superficies:
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$
orientada de modo que al ser vista desde arriba gire en sentido antihoraio o, equivalentemente, de modo que en el punto $(1,0,0)$ el vector tangente unitario sea $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Considerar los campos $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ y $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z) + \nabla\varphi(x,y,z)$$
   a) Dar una parametrización de $C$.
   b) Calcular $\int_C \mathbf{F}.d\boldsymbol{s}$.

3) Sea $C$ la curva en el plano $xy$ que es imagen de $\sigma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$. Considerar la superficie $S$ que se obtiene al girar la curva $C$ alrededor del eje $x$.
   a) Dar una parametrización de la superficie $S$.
   b) Calcular el área de la superficie $S$.

   *Sugerencia:* $1 - \cos(t) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$

4) Considerar la función $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - |x|$. Sea la curva $C$ dada por el gráfico de $f$ (en $\mathbb{R}^2$) orientada desde $(-1,0)$ a $(1,0)$. Calcular:
$$\int_C (xy^2 - y + 1)dx + \left(x^2y + e^{y^2}\right)dy$$

**JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.**

# RESPUESTAS

## 1er PARCIAL 2012 1er Cuatrimestre

### PROBLEMA 1:

a) $\mathcal{C}\colon \left(\frac{x}{1/2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1, y \geq 0$ es una semielipse de centro $c = (0,0)$ y semiejes $a = \frac{1}{2}, b = 3$.

b) $\sigma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \sigma(t) = \left(\frac{1}{2}\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t)\right)$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

c) Sí, $\mathcal{C}$ es suave porque admite una parametrización regular.

***Extra:*** Hay infinitas posibles parametrizaciones regulares para la curva $\mathcal{C}$. Por ejemplo, dado $k \in \mathbb{R}_{>0}$, considero $\sigma_k\colon \left[0, \frac{\pi}{k}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma_k(t) = \left(\frac{1}{2}\cos(kt), 3\,\mathrm{sen}(kt)\right)$.

### PROBLEMA 2:

a) $\sigma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \sigma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), \cos(t)\,\mathrm{sen}(t))$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

b) $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\boldsymbol{s} = 0$

***Extra:*** Si te das cuenta, $\mathbf{F}$ es suma de dos campos gradientes (USÁ ESO).

## PROBLEMA 3:

a) $T: [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $T(\theta, \varphi) = (\theta - \operatorname{sen}(\theta), (1 - \cos(\theta))\cos(\varphi), (1 - \cos(\theta))\operatorname{sen}(\varphi))$ es una parametrización regular de $S$.

b) $\text{Área}(S) = \iint_S \; dl = \frac{64}{3}\pi.$

## PROBLEMA 4:

$$\boxed{\int_C (xy^2 - y + 1)dx + \left(x^2y + e^{y^2}\right)dy = 1}$$