Clase Práctico

Tema: Repaso de integración (Práctico 0).

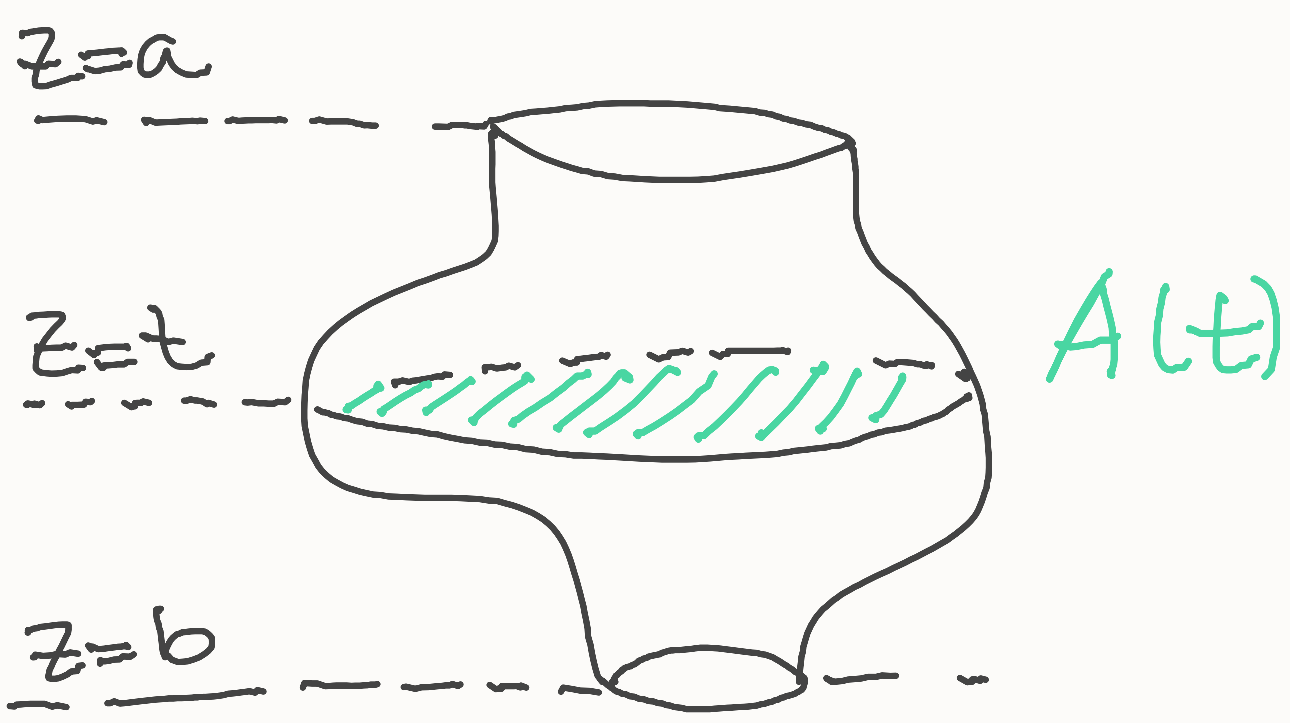
Principio de Cavalieri

Si tenemos un cuerpo W comprendido entre los planos horizontales $z=a$ y $z=b$

$\Rightarrow$ su volumen se puede calcular como

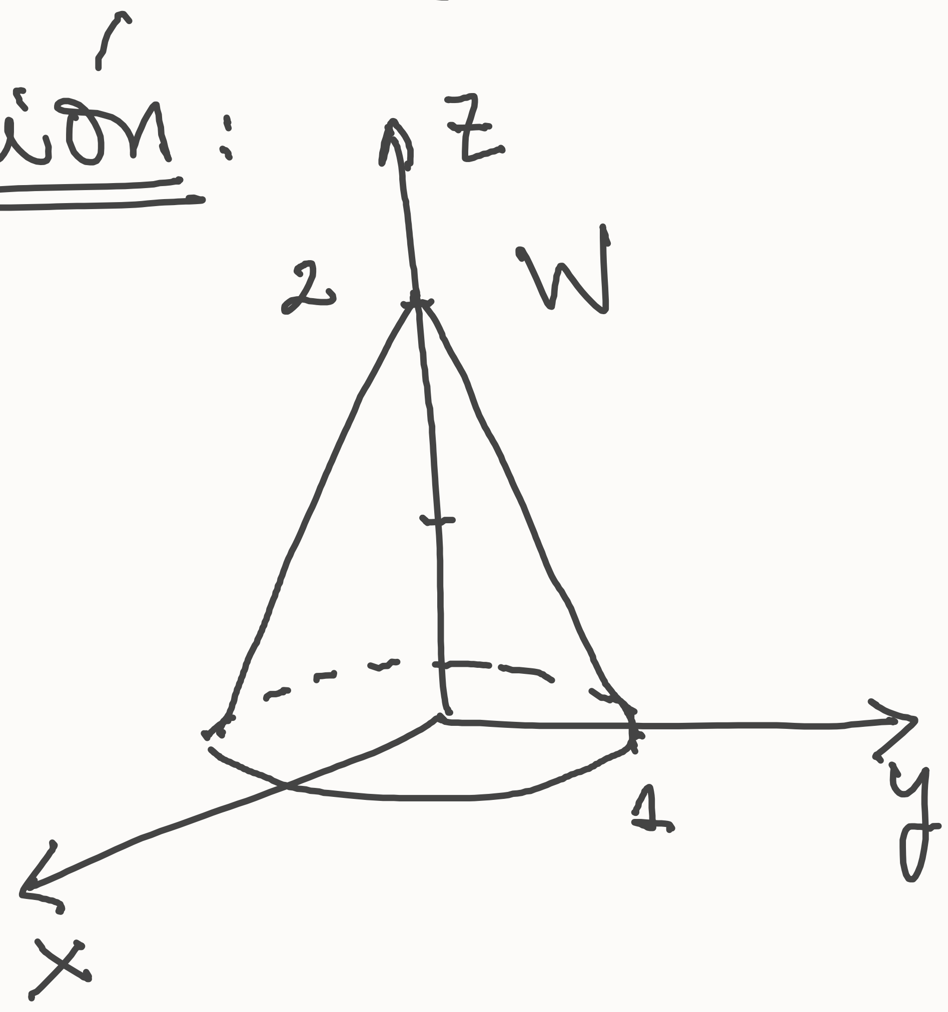
$$\boxed{\mathrm{Vol}(W) = \int_a^b A(t)\,dt}$$

donde $A(t)$ es el área de la sección que se obtiene al cortar W con el plano $z=t$.



Ejemplo: Calcular el volumen del cono circular de altura 2 y base de radio 1.

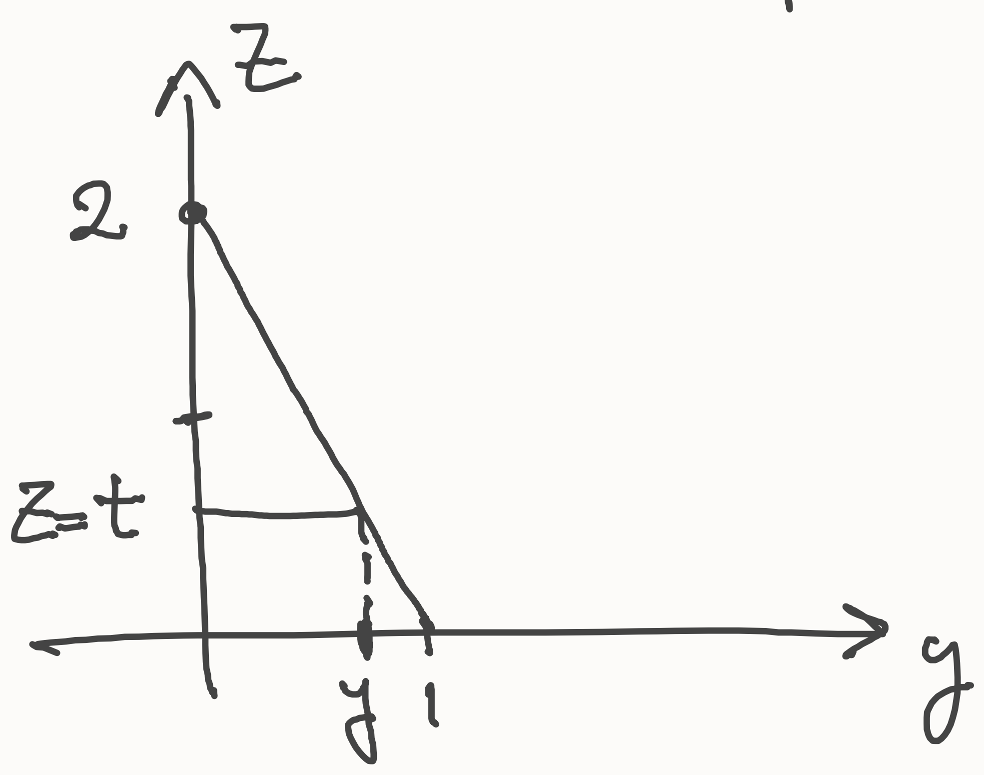
Solución:



$$\mathrm{Vol}(W) = \int_0^2 A(t)\,dt$$

¿$A(t)$?

miramos el plano yz



radio de la circunf. que obtengo al cortar el cono c/ plano $z=t$

ecuación de la recta:

$$z=-2y+2$$

si $z=t \Rightarrow t=-2y+2$

$$y=\frac{2-t}{2}$$

$$\Rightarrow A(t)=\pi\cdot\left(\frac{2-t}{2}\right)^2.$$

Luego, $\displaystyle Vol(W)=\int_0^2 \pi\left(1-\frac{t}{2}\right)^2 dt$

$$=\pi\int_0^2 1-t+\frac{t^2}{4}\,dt$$

$$=\pi\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{12}\Big|_0^2\right)=\pi\cdot\left(2-\frac{4}{2}+\frac{8}{12}\right)$$

$$=\pi\cdot\frac{2}{3}$$

<u>Recordemos</u>: $Vol(W)=\dfrac{\pi\cdot r^2 h}{3}=\dfrac{\pi\cdot 1^2\cdot 2}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$ ✓

- <u>Teorema de Fubini</u>

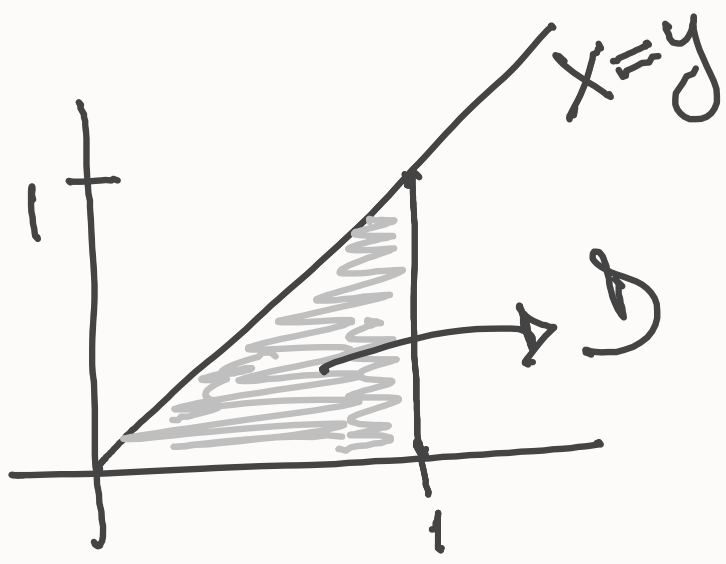
$D=[a,b]\times[c,d]$ y $f:D\to\mathbb{R}$ integrable $\Rightarrow$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Observación: El teorema vale sobre regiones D un poco más generales.

Ejemplo: Supongamos que $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /$ $0\leq x\leq 1 \wedge 0\leq y\leq x\}$.



Si f es continua en $D \Rightarrow$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^x f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(\int_y^1 f(x,y)\,dx\right)dy.$$

- **Comentario:** Para decidir en qué orden integrar miramos 2 cosas:

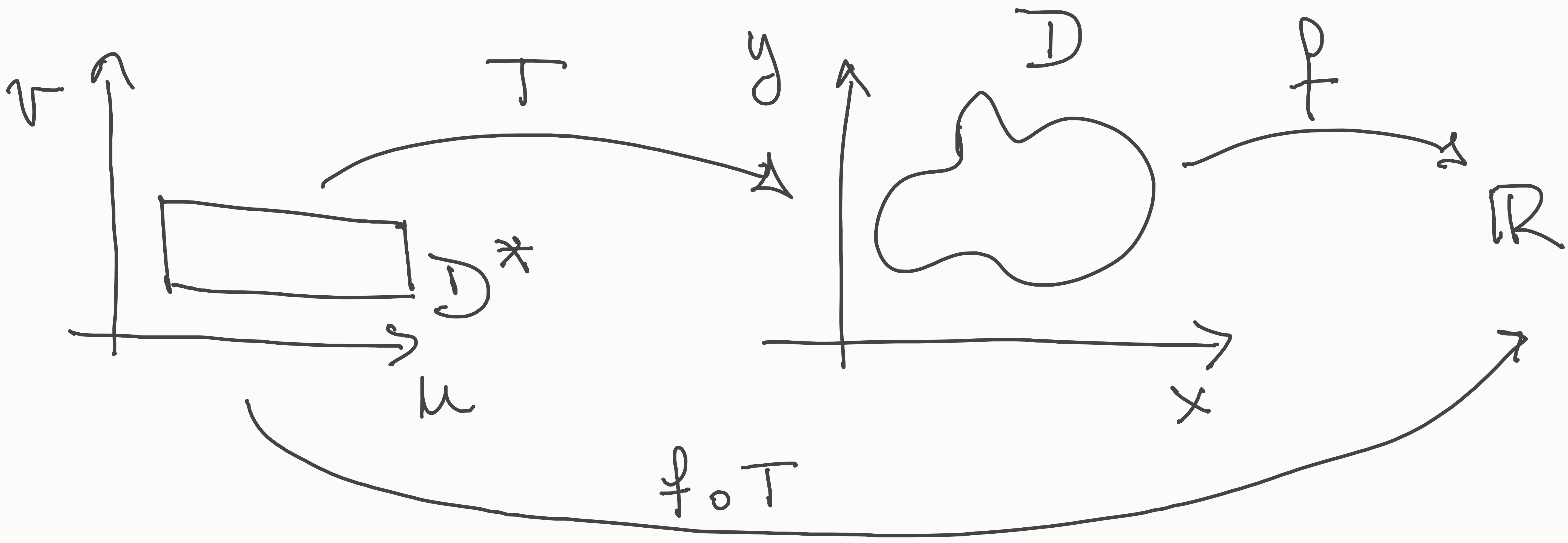
  1. Si f es más fácil de integrar respecto a una variable que a otra
  2. Si la región es más fácil de describir en un sentido que en otro.

- **Teorema de cambio de variables.**

  - Sea $D\subseteq\mathbb{R}^2$ y $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable.
  - Sea $T: D^*\longrightarrow D$ de clase $\mathcal{C}^1$, inyectiva en D^* salvo quizás en ∂D^*, $D^*\subseteq\mathbb{R}^2$ acotada.

Si DT es inversible en D^* $\Rightarrow$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(T(u,v))\cdot \underbrace{|\det DT(u,v)|}_{J = \text{Jacobiano}}\,du\,dv.$$



⊛ Resultado que vamos a usar mucho!

Proposición:

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región simétrica respecto al eje y y $f: D \to \mathbb{R}$ una función impar e integrable en D. Entonces,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Dem: . D simétrico respecto al eje y:

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow (-x,y) \in D.$$

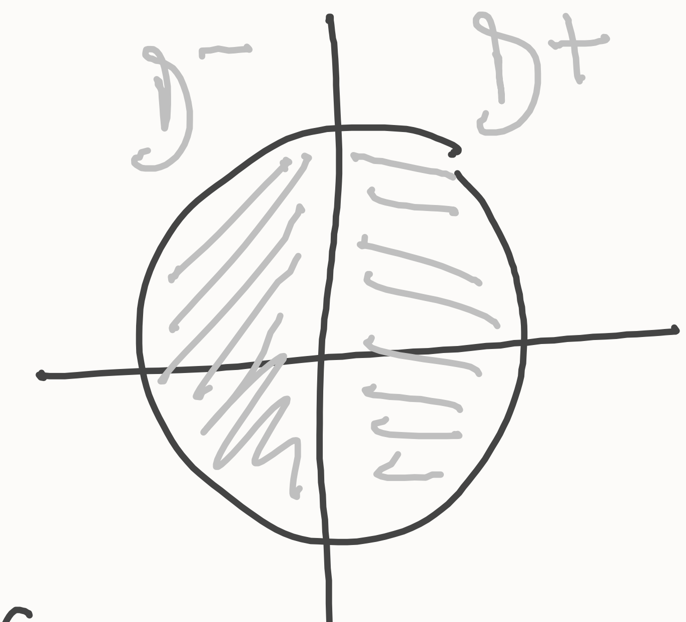
. f impar: $f(-x,y) = -f(x,y)$

queremos ver que $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D^-} f(x,y)\,dx\,dy$$

con $D^+ = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

$D^- = D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$



$$\iint_{D^-} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^+} f(-x,y)\,dx\,dy = -\iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy$$

$T(x,y) = (-x,y)$

$T : D^+ \longrightarrow D^- \quad (D^* = D^+)$

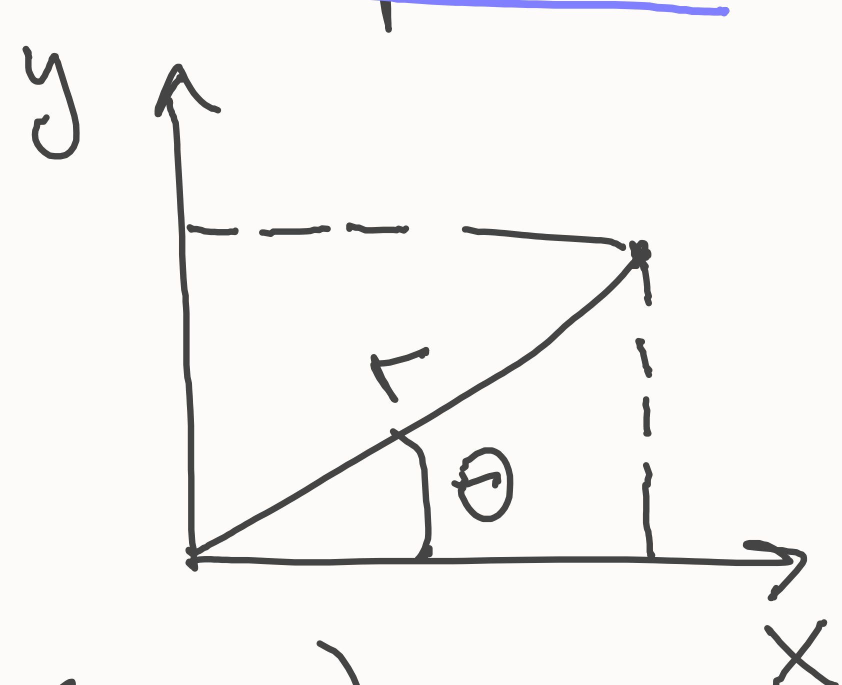
$J_T = 1$

f impar

$$\Rightarrow \iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy - \iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad \boxtimes$$

• Cambio de coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$J = |\det DT| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Ejemplo Hallar el centro de masa del semicírculo $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ si la densidad está dada por $\rho(x,y) = |x|$.

Solución: Primero recordamos:

• masa de D $= \iint_D \rho\,dx\,dy$

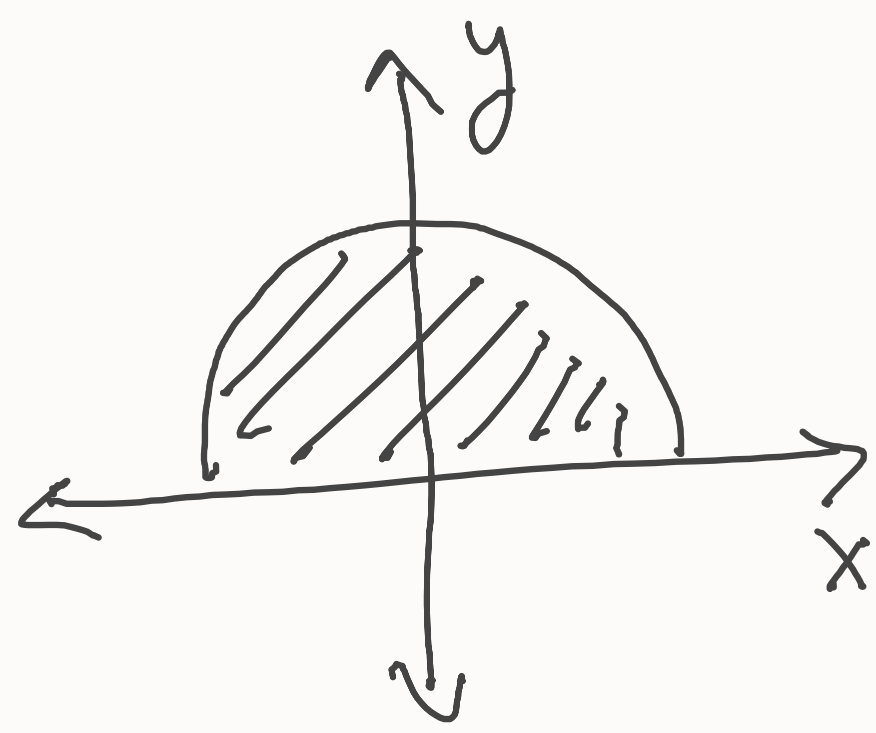
(si la densidad es ρ)

centro de masa $(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy}{\text{masa}}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\text{masa}}.$$

Entonces:

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\ y\geq 0\}$$



$$\text{masa}(D) = \iint_D |x|\,dx\,dy$$

Usamos polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad D^* = [0,1]\times[0,\pi]$

$$\Rightarrow \text{masa}(D) = \int_0^{\pi}\int_0^1 |r\cos\theta|\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} |\cos(\theta)| \underbrace{\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)}_{\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\text{sen}\,\theta\Big|_0^{\pi/2} - \text{sen}\,\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2.$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x|x|\,dx\,dy}{2/3} = 0$$ por la prop. anterior.

$$\bar{y} = \frac{3}{2} \iint_D y|x|\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r\,\text{sen}\,\theta\, |r\cos\theta|\, r\,dr\,d\theta$$

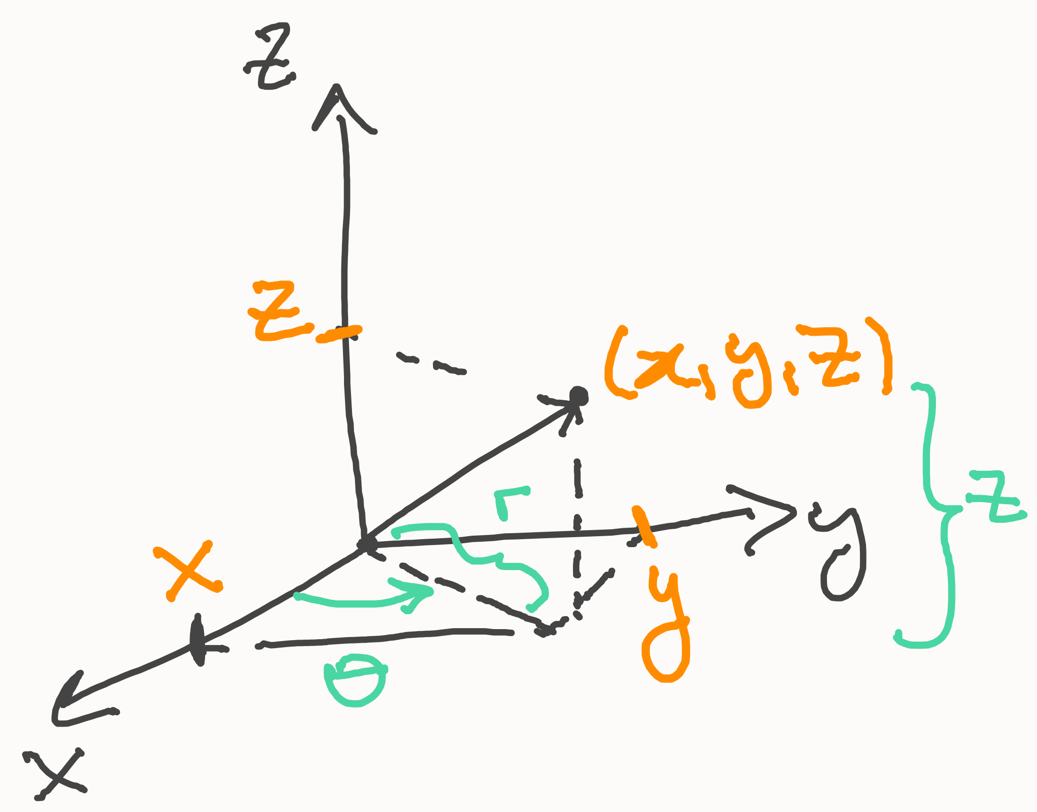
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,|\cos\theta| \underbrace{\int_0^1 r^3\,dr}_{\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{8}\underbrace{\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,|\cos\theta|\,d\theta}_{1} = \frac{3}{8}$$

$\Rightarrow$ centro de masa es $(\bar{x},\bar{y}) = (0, 3/8)$.

Coordenadas cilíndricas:

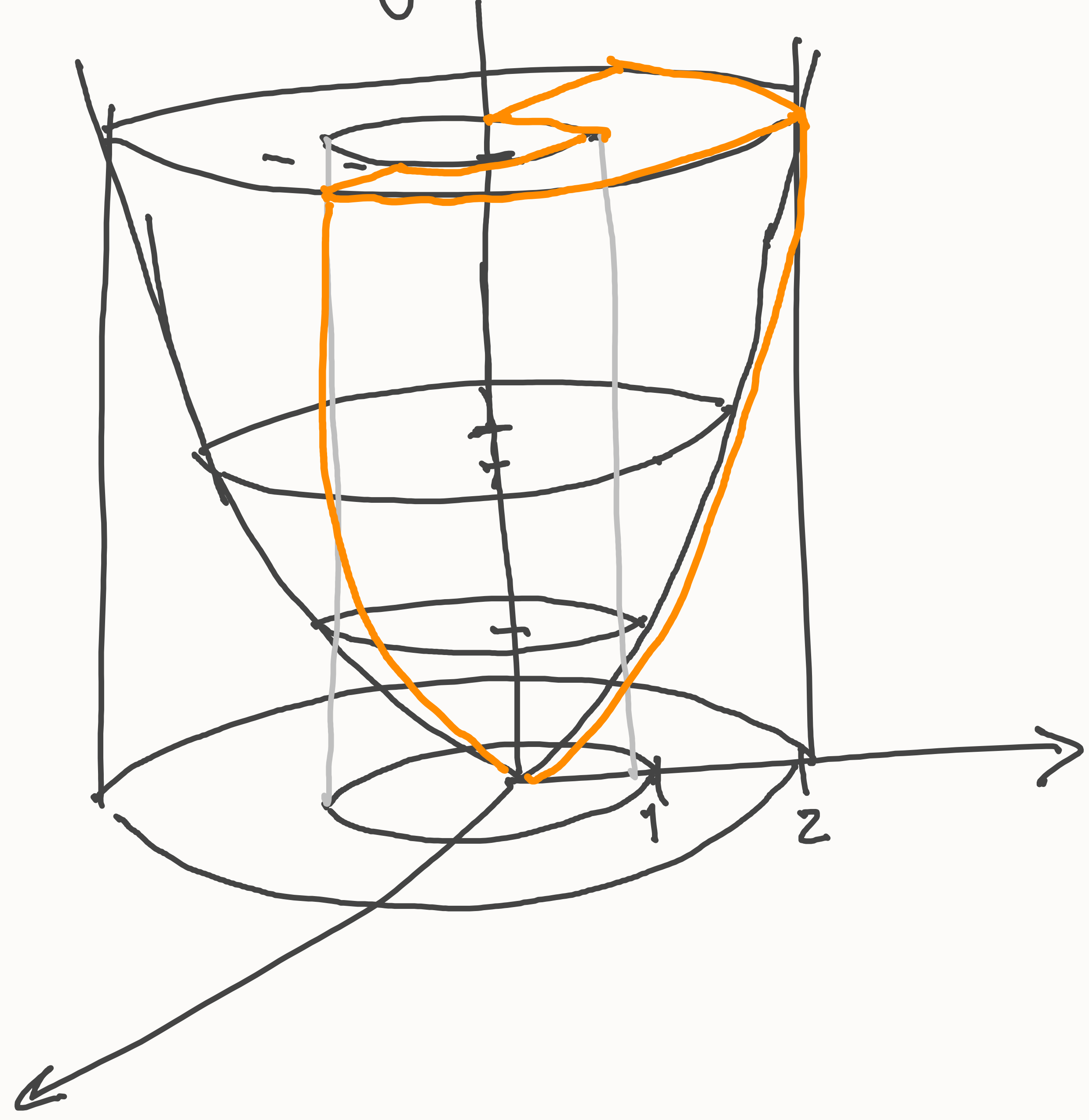
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$



$$J = \left| \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = r$$

Ejemplo: Calcular el volumen de

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0 \le y,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le x^2+y^2\}$$



Solución:

- $z = x^2+y^2$ paraboloide
- $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$ $\to$ cilindros

$$\mathrm{Vol}(S) = \iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz.$$

Describimos S en coord. cilíndricas.

$x = r\cos\theta$
$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$
$z = z$

S^*:
- $1 \leq r \leq 2 \rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{1} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{4}$
- $0 \leq \theta \leq \pi \rightarrow y \geq 0.$
- $0 \leq z \leq r^2 \rightarrow r^2 = x^2+y^2$

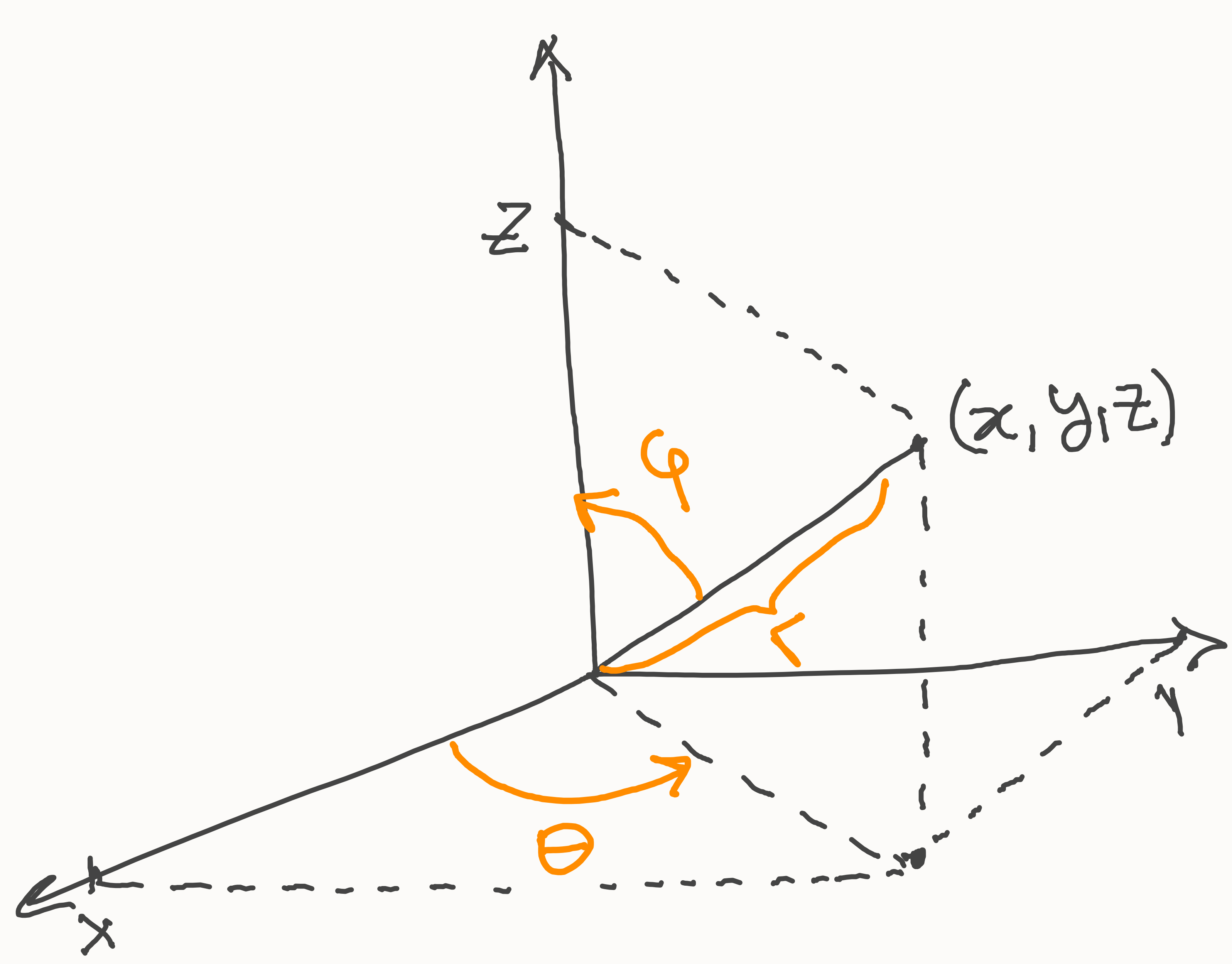
$$\Rightarrow \mathrm{Vol}(S) = \iiint_{S^*} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{\pi}\int_1^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_1^2 r\,r^2\,dr\,d\theta = \pi \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2$$

$$= \pi\left(\frac{16}{4} - 1/4\right) = \frac{15}{4}\pi.$$

Cambio de coord. esféricas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



$r \in [0, +\infty)$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$\varphi \in [0, \pi]$

$J = r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi.$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\iiint_{B_1(0,0,0)} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$

Solución:

$$\iiint_{B_1(0,0,0)} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\downarrow \\ \text{esféricos}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{(r^2)^{3/2}}\cdot r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \underbrace{\left(\int_0^1 e^{r^3} r^2\, dr\right)}_{\text{justificación}} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{3}(e-1)\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$$

$$\int_0^1 e^{r^3} r^2\, dr \underset{\substack{\downarrow \\ u=r^3 \\ du = 3r^2 dr}}{=} \frac{1}{3}\int_0^1 e^u\, du = \frac{1}{3}(e-1)$$

$$= \frac{2\pi}{3}(e-1)\cdot\left(-\cos\varphi\,\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2\pi}{3}(e-1)\,2 = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$

$\boxtimes$