Clase práctica:

- Abarco ejercicios 5 a 8 de la Práctica 6.
  - → Resolución de ecuaciones de orden 2 a coef. constantes.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Solución:

ED de orden 2 $\longrightarrow$ Sistemas de 2x2

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \Rightarrow \begin{matrix} y_0 = y \\ y_1 = y' \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -5y_0 + 2y_1 \end{cases}$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(2-\lambda) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

- raíces: $\lambda = 1 + 2i \;\wedge\; \bar{\lambda} = 1 - 2i$.
- autovectores: $A - (1+2i)I = \begin{pmatrix} -1-2i & 1 \\ -5 & 1-2i \end{pmatrix} \rightsquigarrow v = (1, 1+2i)$

$\Rightarrow$ Sabemos que $\vec{Y}(x) = v e^{\lambda x} = (1, 1+2i)\, e^{(1+2i)x}$

es una solución y que una base de soluciones se obtiene considerando

$$\operatorname{Re}(\vec{Y}(x)) \quad y \quad \operatorname{Im}(\vec{Y}(x))$$

$$\Rightarrow \vec{Y}(x) = e^{x}(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x))\,(1, 1+2i)$$

$= (e^x \cos(2x) + ie^x \operatorname{sen}(2x), (1+2i)(e^x\cos(2x) + ie^x\operatorname{sen}(2x)))$

$= (e^x\cos(2x), \ldots) + i\,(e^x \operatorname{sen}(2x), \ldots)$

Recordemos: $\vec{Y}(x) = (y_0(x), y_1(x)) \Rightarrow y_0(x)$ es sol de $y'' - 2y' + 5y = 0$.

$\Rightarrow$ Sol general de $y'' - 2y' + 5y = 0$

$$y(x) = C_1 e^x \cos(2x) + C_2 e^x \operatorname{sen}(2x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxtimes$

<u>Observación:</u> $y'' - 2y' + 5y = 0 \longrightarrow \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$

En general:

$$y'' + ay' + by = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -by_0 - ay_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \wedge \chi_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

- <u>Forma más directa de resolver</u> $y'' + ay' + by = 0$

Proponemos solución de la forma

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$\Rightarrow$ como $\quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \wedge \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

se tiene que:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}_{p(\lambda)} = 0$$

$p(\lambda) \to$ polinomio característico de la ecuación.

λ es raíz de $p(\lambda)$

Tenemos 3 casos:

$\boxed{1}$ $p(\lambda)$ tienes raíces en $\mathbb{R}$ distintas

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \text{ raíces de } p.$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ $p(\lambda)$ tiene raíces en $\mathbb{C}$: $\lambda = a+ib$, $\bar{\lambda} = a-ib$, $b \neq 0$.

$\Rightarrow y(x) = e^{(a+ib)x}$ es solución y sus partes real e imaginaria generan todas las sol:

$$y(x) = C_1 e^{ax}\cos(bx) + C_2 e^{ax}\operatorname{sen}(bx), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{3}$ $p(\lambda)$ tiene una raíz en $\mathbb{R}$ doble.

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x} \quad (\lambda \text{ raíz de } p)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

—o—

Volviendo al Ejemplo 1:

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

cuyas raíces son

$$\lambda = 1 + 2i$$
$$\bar{\lambda} = 1 - 2i$$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \operatorname{Re}\left(e^{(1+2i)x}\right) + c_2 \operatorname{Im}\left(e^{(1+2i)x}\right)$

$= c_1 e^{x} \cos(2x) + c_2 e^{x} \operatorname{sen}(2x), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Ejemplo ② Hallar todas las soluciones de $y'' - 5y' + 6y = x$ que verifican que $y(0) = 5/36$ $\wedge$ $y'(0) = 7/6$.

Solución: $y'' - 5y' + 6y = x$ Ecuación no homogenea

$\longrightarrow \vec{Y}' = AY + B(x)$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \wedge B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

Soluciones $\rightarrow y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$y_H(x)$: solución de la ecu homogénea

$y_p(x)$: solución particular.

Soluciones homogeneas: $y'' - 5y' + 6 = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \rightarrow$ raíces $\lambda = 2$ y $\lambda = 3$.

$\therefore \; y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$

Solución particular:

proponemos $y_p(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{3x}$

$\rightarrow$ método de variación de las constantes.

Si queremos que $y_p(x)$ sea sol de

$y'' - 5y' + 6y = 0$

Se concluye que $C_1(x)$ y $C_2(x)$ tienen que cumplir:

$$Q(x)\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}}_{B(x)}$$

donde $Q(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix}$.

Tenemos que resolver

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow Q^{-1}(x) = \frac{1}{\det(Q)}\begin{pmatrix} 3e^{3x} & -e^{3x} \\ -2e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}$$

$$\Rightarrow Q^{-1}(x) = e^{-5x}\begin{pmatrix} 3e^{3x} & -e^{3x} \\ -2e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & -e^{-2x} \\ -2e^{-3x} & e^{-3x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xe^{-2x} \\ xe^{-3x} \end{pmatrix}$$

$$C_1(x) = \int -x e^{-2x}\, dx = \frac{e^{-2x}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$C_2(x) = \int x e^{-3x}\, dx = -\frac{e^{-3x}}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right).$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{e^{-2x}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{2x} - \frac{e^{-3x}}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)e^{3x}$$

Sol general:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(x+1/3\right)}$$

Si $y(0) = \frac{5}{36} \Rightarrow C_1 + C_2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = 0}$$

$y'(0) = \frac{1}{6} \Rightarrow y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

$$y'(0) = 2C_1 + 3C_2 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\boxed{2C_1 + 3C_2 = 1}$$

$$\Rightarrow C_1 = -C_2 \ \wedge \ C_2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -e^{2x} + e^{3x} + \frac{1}{2}\left(x+1/2\right) - \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)}.$$

$\boxtimes$