Clase 20 de Análisis 2-Mate 3

Otro modo de resolver $y'' + y = 0$...

$y_1 = y, y_2 = y'$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Obtengo los autovalores de la matriz, que pueden chequear que son $-i, +i$, y que nos dan $y = ae^{ix} + be^{-ix}$ (pueden ver que con plantear $y_1 = y, y_2 = y'$ se soluciona la ecuación con esto de forma general ante condiciones iniciales).

Recomiendo hacer, si tienen pendientes, los ejercicios (1.a y 4.a), 1.d, uno o dos items del 3, los items del 5, el 6.c, el 7. Traten de hacer el ejercicio 9. Ahora les voy a dar el 12 y el 13. Luego veremos el 11.

Veamos ahora el **Ejercicio 12**

Sabiendo que $y_1(x) = e^{x^2}$ es solución de la ecuación homogénea asociada, hallar todas las soluciones de $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$.

Resolución. Primero confirmemos que es cierto que $y_1(x)$ es solución de la ecuación... $y_1'(x) = e^{x^2}2x = y_1(x)2x$, $y_1''(x) = (y_1(x)')' = (y_1(x)2x)' = (y_1(x))'2x + 2y_1(x) = y_1(x)4x^2 + 2y_1(x)$...

$\underbrace{xy_1(x)'' - y_1(x)' - 4x^3y_1(x) = 0}_{\texttt{Homogénea asociada con } y(x)=y_1(x)}$

$x(y_1(x)4x^2 + 2y_1(x)) - y_1(x)2x - 4x^3y_1(x) = 0$

$y_1(x)4x^3 + \underbrace{y_1(x)2x - y_1(x)2x}_{=0} - 4x^3y_1(x) = 0.$

$y_1(x)4x^3 - 4x^3y_1(x) = 0.$

Ok, entonces está bien el dato que nos dijeron. Procedamos...

Vamos a tomar $y = y_1(x)c(x)$ de la homogénea con $c(x)$ una función a determinar. Veamos de que nos sirve esto, insertandolo en la ecuación... Primero calculamos y_2' y y_2'',

$y(x) = e^{x^2}c(x)e^{x^2}(4x^3c(x) + 2xc(x) + 4x^2c'(x) + xc''(x))$

$y'(x) = e^{x^2}(2xc(x) + c'(x))$

$y''(x) = e^{x^2}(4x^2c(x) + 2c(x) + 4xc'(x) + c''(x))$

Ahora, insertando esto en la ecuación homogénea,

$y''(x)x - y'(x) - 4x^3y(x) = 0$

$e^{x^2}((4x^2 - 1)c'(x) + xc''(x)) = 0$

$$(4x^2 - 1)c'(x) + xc''(x) = 0$$

$$log(c'(x)) = log(x) - 2x^2 + C$$

$$c'(x) = Kxe^{-2x^2}$$

$$c(x) = K\int xe^{-2x^2}dx = K\int e^{-2x^2}d(2x^2)\frac{1}{4}$$

$$c(x) = -Ke^{-2x^2}\frac{1}{4} + C$$

Así que $y(x) = Ce^{x^2} + Ke^{-x^2}$ (si miran la respuesta en Wolfram Alpha para la homogénea, les va a decir $acosh(x^2) + bsinh(x^2)$, ¿por qué?)

Como la ecuación con que estamos trabajando es diferencial lineal no homogénea, sus soluciones son una particular más solución de la homogénea. Soluciónes de la homogénea ya tenemos, con hallar una particular estámos.

$xy'' - y' - 4x^3y = x^3$

Ahora vamos a usar el método de variación de constantes para tratar de hallar una solución particular. El método consiste en tomar la solución genérica de la homogénea $y_H(x) = C_1e^{x^2} + C_2e^{-x^2}$ y proponer que la particular va a ser $y_p(x) = f_1(x)e^{x^2} + f_2(x)e^{-x^2}$ con $f_1(x), f_2(x)$ funciones a determinar...

$y_p'(x) = f_1(x)2xe^{x^2} - f_2(x)2xe^{-x^2} + f_1'(x)e^{x^2} + f_2'(x)e^{-x^2}$

$y_p''(x) = f_1(x)4x^2e^{x^2} + f_2(x)4x^2e^{-x^2} + f_1(x)2xe^{x^2} - f_2(x)2xe^{-x^2} + f_1'(x)4xe^{x^2} - f_2'(x)4xe^{-x^2} + f_1''(x)e^{x^2} + f_2''(x)e^{-x^2}$

Ahora, lo insertamos esto en la ecuación $xy'' - y' - 4x^3y = x^3$

$+f_1''(x)xe^{x^2} + f_2''(x)xe^{-x^2}$
$+f_1'(x)4x^2e^{x^2} - f_2'(x)4x^2e^{-x^2}$
$-f_1'(x)e^{x^2} - f_2'(x)e^{-x^2}$
$+f_1(x)2xe^{x^2} - f_2(x)2xe^{-x^2}$
$-f_1(x)2xe^{x^2} + f_2(x)2xe^{-x^2}$
$+f_1(x)4x^3e^{x^2} + f_2(x)4x^3e^{-x^2}$
$-f_1(x)4x^3e^{x^2} - f_2(x)4x^3e^{-x^2}$
$= x^3$

Cancelando cosas

$+f_1''(x)xe^{x^2} + f_2''(x)xe^{-x^2}$
$+f_1'(x)4x^2e^{x^2} - f_2'(x)4x^2e^{-x^2}$
$-f_1'(x)e^{x^2} - f_2'(x)e^{-x^2}$
$= x^3$

Agrupando ingeniosamente...

$+(f_1'(x)xe^{x^2} + f_2'(x)xe^{-x^2})'$
$-f_1'(x)(xe^{x^2})' + f_2'(x)(xe^{-x^2})'$
$+(f_1'(x)e^{x^2} - f_2'(x)e^{-x^2})(4x^2 - 1)$
$= x^3$

... continúo...

$+(f_1'(x)xe^{x^2} + f_2'(x)xe^{-x^2})'$
$-2x^2(f_1'(x)e^{x^2} - f_2'(x)e^{-x^2})$
$-f_1'(x)e^{x^2} + f_2'(x)e^{-x^2}$
$+(f_1'(x)e^{x^2} - f_2'(x)e^{-x^2})(4x^2 - 1)$
$= x^3$

$+(f_1'(x)xe^{x^2} + f_2'(x)xe^{-x^2})'$

$$+2(f_1'(x)e^{x^2} - f_2'(x)e^{-x^2})(x^2 - 1)$$

$= x^3$

Pruebo pedir que

$f_1'(x)xe^{x^2} + f_2'(x)xe^{-x^2} = 0,$
$+2(f_1'(x)e^{x^2} - f_2'(x)e^{-x^2})(x^2 - 1) = x^3$

Esto implica
$2(f_1'(x)xe^{x^2} + f_2'(x)xe^{-x^2})(x^2-1) = 0,$
$2(f_1'(x)xe^{x^2} - f_2'(x)xe^{-x^2})(x^2-1) = x^4$
Sumando abajo
$2(f_1'(x)xe^{x^2} + f_2'(x)xe^{-x^2})(x^2-1) = 0,$
$4f_1'(x)xe^{x^2}(x^2-1) = x^4 \Rightarrow$
(Ulises Wainstein Haimovichi)