BRUNO SIVILOTTI LIC. CIENCIAS FÍSICAS
LIBRETA: 477/20


# 2$^{do}$ Parcial MATEMÁTICA 3

1) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} (y^3 - x^2 y + x)\,dx + (-x^3 + xy^2 - y)\,dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sugerencia: la ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = F(x^2 - y^2)$ para alguna función derivable $F$.

Rta: Para resolver el problema de valores iniciales primero debo encontrar la solución general de la ecuación diferencial:

$$(y^3 - x^2 y + x)\,dx + (-x^3 + xy^2 - y)\,dy = 0$$

Primero analizo si es una ecuación diferencial exacta. Para que lo sea debe cumplir que:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Verifico si eso sucede. $P(x,y) = y^3 - x^2 y + x \qquad Q(x,y) = -x^3 + xy^2 - y$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - x^2 \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 + y^2 \end{array}\right\} \text{son distintas} \Rightarrow \text{no es una ecuación diferencial exacta}$$

Para poder resolverla la quiero llevar a una ec diferencial exacta. Para eso multiplico de ambos lados por un factor integrante $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y)(y^3 - x^2 y + x)\,dx + \mu(x,y)(-x^3 + xy^2 - y)\,dy = 0$$

En el enunciado me sugieren que la ~~ecuació~~ ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = F(x^2 - y^2)$ para alguna función derivable $F$

Entonces pruebo con eso y busco una función $F$ que lo haga:

$$\underbrace{F(x^2 - y^2)(y^3 - x^2 y + x)}_{\tilde{P}}\,dx + \underbrace{F(x^2 - y^2)(-x^3 + xy^2 - y)}_{\tilde{Q}}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = -F'(x^2 - y^2)\,2y\,(y^3 - x^2 y + x) + F(x^2 - y^2)(3y^2 - x^2)$$

NOTA

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = -F'(x^2-y^2)(2y^4-2x^2y^2+2xy)+F(x^2-y^2)(3y^2-x^2)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = F'(x^2-y^2)\,2x(-x^3+xy^2-y)+F(x^2-y^2)(-3x^2+y^2)$$

$$= F'(x^2-y^2)(-2x^4+2x^2y^2-2xy)+F(x^2-y^2)(-3x^2+y^2)$$

Como quiero que $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}$:

$$-F'(x^2-y^2)(2y^4-2x^2y^2+2xy)+F(x^2-y^2)(3y^2-x^2) = F'(x^2-y^2)(-2x^4+2x^2y^2-2xy)+F(x^2-y^2)(-3x^2+y^2)$$

$$F'(x^2-y^2)[-2y^4+\cancel{2x^2y^2}-\cancel{2xy}+2x^4-\cancel{2x^2y^2}+\cancel{2xy}] = F(x^2-y^2)[-3x^2+y^2-3y^2+x^2]$$

$$F'(x^2-y^2)(2x^4-2y^4) = F(x^2-y^2)(-2x^2-2y^2)$$

$$\frac{F'(x^2-y^2)}{F(x^2-y^2)} = \frac{-2x^2-2y^2}{2x^4-2y^4} = -\frac{x^2+y^2}{x^4-y^4} = -\frac{\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{(x^2+y^2)}(x^2-y^2)}$$

$$\frac{F'(x^2-y^2)}{F(x^2-y^2)} = -\frac{1}{(x^2-y^2)}$$

Si llamo $x^2+y^2=z$:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = -\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \int -\frac{1}{z}\,dz$$

$$\ln|F(z)| = -\ln|z|+C$$

$$\Rightarrow |F(z)| = |z|^{-1}K$$

Como solo necesito un factor integrante elijo $K=1$

$$F(z) = \frac{1}{|z|}$$

$$F(x^2-y^2) = \frac{1}{x^2-y^2}$$

(Como en el enunciado me dice que $y(0)=1$ $\Rightarrow$ me quedo con el factor integrante definido en $x^2-y^2<0$)

Entonces, con este factor integrante, la ecuación diferencial original me queda:

$$\frac{(y^3-x^2y+x)}{x^2-y^2}dx + \frac{(-x^3+xy^2-y)}{x^2-y^2}dy = 0$$

$$\left[\frac{-y(x^2-y^2)+x}{x^2-y^2}\right]dx + \left[\frac{-x(x^2-y^2)-y}{x^2-y^2}\right]dy = 0$$

NOTA

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-y+\frac{x}{x^2-y^2}\right)}_{\tilde{P}}dx+\underbrace{\left(-x-\frac{y}{x^2-y^2}\right)}_{\tilde{Q}}dy=0$$

Corroboro que sea exacta:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}=-1+\frac{(-2y)x}{(x^2-y^2)^2}=-1+\frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}=-1+\frac{2xy}{(x^2-y^2)^2}$$

Son iguales $\Rightarrow$ es exacta

Ahora, teniendo la ecuación exacta busco una función $\phi(x,y) / \phi_x=\tilde{P}$, $\phi_y=\tilde{Q}$

$$\Rightarrow \phi_x(x,y)=-y+\frac{x}{x^2-y^2} \Rightarrow \phi(x,y)=\int\left(-y+\frac{x}{x^2-y^2}\right)dx$$

$$\phi(x,y)=-yx+\int\frac{x}{x^2-y^2}dx=-yx+\int\frac{1}{2u}du=-yx+\frac{1}{2}\ln|u|+C$$

$u=x^2-y^2$
$du=2x\,dx$

$$\phi(x,y)=-xy+\frac{\ln|x^2-y^2|}{2}+C(y)$$

y $$\phi_y(x,y)=-x-\frac{y}{x^2-y^2} \Rightarrow \phi(x,y)=\int\left(-x-\frac{y}{x^2-y^2}\right)dy$$

$$\phi(x,y)=-xy+\int\frac{-y}{x^2-y^2}dy=-xy+\int\frac{1}{2u}du=-xy+\frac{1}{2}\ln|x^2-y^2|+C(x)$$

$u=x^2-y^2$
$du=-2y\,dy$

$\Rightarrow$ Juntando todo me queda que la solución general de la ecuación diferencial es de la forma:

$$\boxed{-xy+\frac{\ln|x^2-y^2|}{2}=C}$$

Pero quiero encontrar la solución que cumple $y(0)=1$

$$\Rightarrow -0.1+\frac{\ln|0-1|}{2}=C$$

$$\frac{\ln|-1|}{2}=C \Rightarrow C=0$$

NOTA

Entonces, la solución al problema de valores iniciales es:

$$\boxed{-xy + \frac{\ln|x^2 - y^2|}{2} = 0}$$

con $x^2 - y^2 < 0$ (por el factor integrante)

además, para que en $x=0$ $y$ sea 1 pido $y > 0$, porque sino $y=-1$ también cumple

$$\Rightarrow \boxed{-xy + \frac{\ln|x^2 - y^2|}{2} = 0 \quad \text{con } x^2 - y^2 < 0, \; y > 0}$$

2) Encuentre la solución al siguiente sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

cuya condición inicial es

$$X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rta:

La solución general del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

será de la forma $X_g = X_h + X_p$ con $X_h$ la solución del sistema homogéneo asociado y $X_p$ una solución particular del sistema.

Obtengo primero $X_h$.

$$X_h' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} X_h$$

Busco los autovalores de A:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{16} = 1 \pm \frac{4}{2} = 1 \pm 2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ , $\lambda_2 = 3$

Busco los autovectores asociados a los autovalores:

$\lambda = -1$ – $Nu\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ : $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_1 \to F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \to F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ autovec: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ – $Nu\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ : $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 + F_1 \to F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \to F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ autovec: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $\boxed{X_h = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}}$ con $a, b \in \mathbb{R}$

Ahora, debo obtener una solución particular del sistema

$$X' = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$$

Para esto uso el método de variación de las constantes,

$$\text{Propongo} \quad X_p = a(t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + b(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$$

$$\Rightarrow X_p'(t) = a'(t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + b'(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t} - a(t)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + 3b(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t}$$

Entonces, si reemplazo en la ec diferencial:

$$\begin{pmatrix}a'(t)e^{-t}+b'(t)e^{3t}\\-a'(t)e^{-t}+b'(t)e^{3t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a(t)e^{-t}+3b(t)e^{3t}\\a(t)e^{-t}+3b(t)e^{3t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(t)e^{-t}+b(t)e^{3t}\\-a(t)e^{-t}+b(t)e^{3t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a'(t)e^{-t}+b'(t)e^{3t}\\-a'(t)e^{-t}+b'(t)e^{3t}\end{pmatrix} + \cancel{\begin{pmatrix}-a(t)e^{-t}+3b(t)e^{3t}\\a(t)e^{-t}+3b(t)e^{3t}\end{pmatrix}} = \cancel{\begin{pmatrix}-a(t)e^{-t}+3b(t)e^{3t}\\a(t)e^{-t}+3b(t)e^{3t}\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a'(t)e^{-t}+b'(t)e^{3t}\\-a'(t)e^{-t}+b'(t)e^{3t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}e^{-t}&e^{3t}\\-e^{-t}&e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'(t)\\b'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$$

Entonces $a(t)$ y $b(t)$ deben ser tales que cumplan dicho sistema.

Resuelvo el sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c}e^{-t}&e^{3t}&t\\-e^{-t}&e^{3t}&2\end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_1\to F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c}e^{-t}&e^{3t}&t\\0&2e^{3t}&t+2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2\left(\frac{1}{2}\right)\to F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c}e^{-t}&e^{3t}&t\\0&e^{3t}&\frac{t}{2}+1\end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_2\to F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c}e^{-t}&0&\frac{t}{2}-1\\0&e^{3t}&\frac{t}{2}+1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a'(t)e^{-t} = \frac{t}{2}-1 \quad \Rightarrow \quad a'(t) = e^{t}\left(\frac{t}{2}-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad a(t) = \int\left(e^{t}\frac{t}{2} - e^{t}\right)dt = -e^{t} + \frac{1}{2}\int \underbrace{e^{t}}_{dv}\underbrace{t}_{u}\,dt = -e^{t} + \frac{1}{2}\left[te^{t} - \int e^{t}dt\right]$$

$$a(t) = -e^{t} + \frac{1}{2}te^{t} - \frac{e^{t}}{2} = \boxed{\frac{te^{t}}{2} - \frac{3e^{t}}{2}}$$

$$\text{y} \quad b'(t)e^{3t} = \frac{t}{2}+1 \quad \Rightarrow \quad b'(t) = e^{-3t}\frac{t}{2} + e^{-3t} \quad \Rightarrow \quad b(t) = \int e^{-3t}\frac{t}{2}dt + \int e^{-3t}dt$$

$$b(t) = -\frac{e^{-3t}}{3} + \frac{1}{2}\left[\int \underbrace{e^{-3t}}_{dv}\underbrace{t}_{u}\,dt\right] = -\frac{e^{-3t}}{3} + \frac{1}{2}\left[-\frac{te^{-3t}}{3} + \int\frac{e^{-3t}}{3}dt\right] = -\frac{e^{-3t}}{3} - \frac{te^{-3t}}{6} - \frac{e^{-3t}}{18}$$

$$\boxed{b(t) = -\frac{7}{18}e^{-3t} - \frac{t}{6}e^{-3t}}$$

NOTA

$$\Rightarrow X_p(t) = \left(\frac{te^{t}}{2} - \frac{3e^{t}}{2}\right)e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \left(-\frac{7}{18}e^{-3t} - \frac{t}{6}e^{-3t}\right)e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \left(-\frac{7}{18} - \frac{t}{6}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{t}{2} - \frac{3}{2} - \frac{7}{18} - \frac{t}{6}\\ -\frac{t}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{18} - \frac{t}{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{t}{3} - \frac{17}{9}\\ -\frac{2}{3}t + \frac{10}{9}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_p(t) = \begin{pmatrix}t/3 - 17/9\\ -2t/3 + 10/9\end{pmatrix}}$$

Corroboro: $X_p'(t) = \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t/3 - 17/9\\ -2t/3 + 10/9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t/3 - 4t/3 - 17/9 + 20/9\\ 2t/3 - 2t/3 - 34/9 + 10/9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t + 1/3\\ -24/9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\ -24+18/9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\-2/3\end{pmatrix} \checkmark$$

Entonces, la solución general es:

$$\boxed{X = a\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix}t/3 - 17/9\\ -2t/3 + 10/9\end{pmatrix}}$$

Pero también quiero que cumpla $X(0) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X(0) = \begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-17/9\\10/9\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a + b - \frac{17}{9} = 3\\ -a + b + 10/9 = 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}1)\ a + b = \frac{44}{9}\\ 2)\ -a + b = \frac{8}{9}\end{cases} \Rightarrow 1) + 2) - 2b = \frac{52}{9} \Rightarrow b = \frac{26}{9}$$

$$a = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = 2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + \frac{26}{9}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3t} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}t - 17/3\\ -2t + 10/3\end{pmatrix}}$$

NOTA

3) La ecuación diferencial

$$2ty'' + (4t+1)y' + (2t+1)y = 0$$

tiene una solución de la forma $y = e^{-t}$. Halle todas las soluciones de la ecuación tales que

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

Rta: Quiero encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$2ty'' + (4t+1)y' + (2t+1)y = 0$$

Al ser una ecuación diferencial de segundo orden, sé que tendrá un espacio vectorial de soluciones de dimensión 2. Como me dicen que $y(t) = e^{-t}$ es solución, debo encontrar otra solución linealmente independiente a esta.

Primero corroboro que $y_1(t) = e^{-t}$ sea solución. $y_1(t) = e^{-t}$, $y_1'(t) = -e^{-t}$, $y_1'' = e^{-t}$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2te^{-t}} - \cancel{4te^{-t}} - \cancel{e^{-t}} + \cancel{2te^{-t}} + \cancel{e^{-t}} = 0 \quad \checkmark$$

Ahora busco otra solución de la forma $y_2(t) = V(t)\,y_1(t)$ con $V(t)$ una función derivable en un intervalo.

$$\Rightarrow \quad y_2(t) = V(t)\,y_1(t) \quad , \quad y_2'(t) = V'(t)\,y_1(t) + V(t)\,y_1'(t)$$

$$y_2''(t) = V''(t)\,y_1(t) + 2V'(t)\,y_1'(t) + V(t)\,y_1''(t)$$

Reemplazo en la ecuación:

$$2t\left[V''(t)y_1(t) + 2V'(t)y_1'(t) + V(t)y_1''(t)\right] + (4t+1)\left[V'(t)y_1(t) + V(t)y_1'(t)\right] + (2t+1)V(t)y_1(t) = 0$$

$$V''(t)\left[2t\,y_1(t)\right] + V'(t)\left[4t\,y_1'(t) + 4t\,y_1(t) + y_1(t)\right] + V(t)\underbrace{\left[2t\,y_1''(t) + (4t+1)y_1'(t) + (2t+1)y_1(t)\right]}_{=0}= 0$$

$=0$ Porque $y_1$ es solución de $2t\,y_1''(t) + (4t+1)y_1'(t) + (2t+1)y_1(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad V''(t)\left[2te^{-t}\right] + V'(t)\left[\cancel{-4te^{-t}} + \cancel{4te^{-t}} + e^{-t}\right] = 0$$

$$V''(t)\,2te^{-t} = -V'(t)\,e^{-t}$$

$$\frac{V''(t)}{V'(t)} = -\frac{1}{2t}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|V'(t)| = -\frac{1}{2}\ln|t|$$

$$\Rightarrow \quad V'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad t > 0$$

(elijo el intervalo $t > 0$ porque después debo analizar qué pasa cuando $t \to +\infty$)

NOTA

BRUNO SIVILOTTI
LIBRETA: 477/20
LIC. CIENCIAS FÍSICAS


$$\Rightarrow v(t) = \int t^{-1/2}\,dt = 2\sqrt{t} + C$$ Como solo necesito una función, elijo $C = 0$

$$\Rightarrow v(t) = 2\sqrt{t} \quad \Rightarrow \boxed{y_2(t) = 2\sqrt{t}\,e^{-t}}$$

Corroboro $y_2(t) = 2\sqrt{t}\,e^{-t}$

$$y_2'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t} - 2\sqrt{t}\,e^{-t}$$

$$y_2''(t) = -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-t} - \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} - \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t}\,e^{-t}$$

$$= -\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-t} - \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t}\,e^{-t}$$

Reemplazo en la ec:

$$2t\left(-\frac{1}{2t^{3/2}}e^{-t} - \frac{2e^{-t}}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t}\,e^{-t}\right) + (4t+1)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t} - 2\sqrt{t}\,e^{-t}\right) + (2t+1)\,2\sqrt{t}\,e^{-t}$$

$$= -t^{-1/2}e^{-t} - 4\sqrt{t}\,e^{-t} + 4t^{3/2}e^{-t} + 4\sqrt{t}\,e^{-t} + \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} - 8t^{3/2}e^{-t} - 2\sqrt{t}\,e^{-t} + 4t^{3/2}e^{-t} + 2\sqrt{t}\,e^{-t}$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

Entonces la solución general es

$$y(t) = a\,e^{-t} + \underbrace{\tilde{b}\,2}_{b}\sqrt{t}\,e^{-t}$$

$$\boxed{y(t) = a\,e^{-t} + b\sqrt{t}\,e^{-t}} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Pero quiero las soluciones que cumplan $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} a\,e^{-t} + b\sqrt{t}\,e^{-t} = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} a\,e^{-t}}_{\to 0} + \lim_{t\to+\infty} b\underbrace{\sqrt{t}}_{\to\infty}\underbrace{e^{-t}}_{\to 0}$$

~~Como quiero que la solución tienda a cero, debo fijar $b = 0$ ya que para cualquier otro número real la solución diverge~~

$$\cancel{\Rightarrow \boxed{y(t) = a\,e^{-t}} \quad a \in \mathbb{R}}$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to+\infty} a\,e^{-t}}_{\to 0} + \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{b\sqrt{t}}{e^{t}}}_{\text{luego l'Hôpital de ahí}}^{\text{“}\infty/\infty\text{”}} = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} a\,e^{-t}}_{\to 0\ \forall a} + \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{b\,1}{2\sqrt{t}\,e^{t}}}_{\to 0\ \forall b}$$

Entonces todas las soluciones que convergen al cero cuando $t \to +\infty$ son:

$$\boxed{y(t) = a e^{-t} + b \sqrt{t} e^{-t} \qquad a, b \in \mathbb{R}}$$

BRUNO SIVILOTTI — LIC CIENCIAS FÍSICAS — HOJA N°

LIBRETA: 477/20 — HOJA: 11/13 — FECHA

4) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = (a-1)\,\text{sen}\,x + 2y \\ y' = -x + (a+1)\,\text{sen}\,y \end{cases}$$

a- Halle infinitos valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema admita una solución no trivial que converge al punto $(0,0)$ cuando $t$ tiende a $+\infty$

b- Para los valores hallados en el ítem anterior, esboce un diagrama de fase de las trayectorias del sistema en un entorno del origen.

Rta: a- Primero que nada, si quiero soluciones que converjan al $(0,0)$, el $(0,0)$ debe ser un punto de equilibrio. Verifico eso

$$\begin{cases} x' = (a-1)\,\text{sen}\,0 + 2.0 = 0 \\ y' = -0 + (a+1)\,\text{sen}\,0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ el $(0,0)$ es un punto de equilibrio $\forall a \in \mathbb{R}$.

Como quiero que existan soluciones no triviales que converjan al punto $(0,0)$ cuando $t$ tiende a $+\infty$ Debo analizar la estabilidad del punto.

El teorema de estabilidad lineal me dice que sea $x^* \in \Omega$ un punto de eq del sistema $X' = F(X)$ con $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1$, si todos los autovalores de $DF(x^*)$ tienen parte real negativa $\Rightarrow x^*$ es un punto asintóticamente estable y si $DF(x^*)$ tiene algún autovalor con parte real ~~negativa~~ positiva, entonces $x^*$ es inestable.

Entonces, si consigo $a \in \mathbb{R}$ / $D_F(0,0)$ tenga todos sus autovalores con parte real negativa garantizo que existan soluciones no triviales que converjan al $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$

Calculo $D_F(x,y)$ -

$$D_F(x,y) = \begin{pmatrix} (a-1)\cos x & 2 \\ -1 & (a+1)\cos y \end{pmatrix}$$

$$D_F(0,0) = \begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$$ Busco autovalores:

$$\det\left(\lambda I - D_F(0,0)\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda-(a-1) & -2 \\ 1 & \lambda-(a+1) \end{pmatrix} = [\lambda-(a-1)][\lambda-(a+1)] + 2$$

$$= \lambda^2 - \lambda(a+1) - \lambda(a-1) + a^2 - 1 + 2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 4a^2 - 4} = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4} = a \pm i$$

Entonces, para que el punto $(0,0)$ sea asintóticamente estable, y por lo tanto existan soluciones no triviales que converjan al $(0,0)$ cuando $t \to +\infty$ tengo que pedir $\boxed{a < 0}$

NOTA

b_ Ahora, sabiendo que $a<0$ y que los autovalores de $D_F(0,0)$ son $a \pm i$ tengo que graficar un diagrama de fases en un entorno del origen

Busco las soluciones del sistema lineal dado por

$$X' = D_F(0,0)\, X$$

autovalores: $\lambda = a \pm i$ con $a<0$

Busco autovector. $\lambda = a+i$

$$Nu\begin{pmatrix} a+i-a+1 & -2 \\ 1 & a+i-a-1 \end{pmatrix} : \left(\begin{array}{cc|c} i+1 & -2 & 0 \\ 1 & i-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 - F_2 \to F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} i & -i-1 & 0 \\ 1 & i-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - iF_2 \to F_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i-1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ autovector asociado a $\lambda = a+i$ : $\begin{pmatrix} -i+1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X_a(t) = \begin{pmatrix} -i+1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(a+i)t}$$

$$X_a(t) = \begin{pmatrix} -i+1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{at} e^{it} = \begin{pmatrix} -i+1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{at} (\cos t + i \sin t)$$

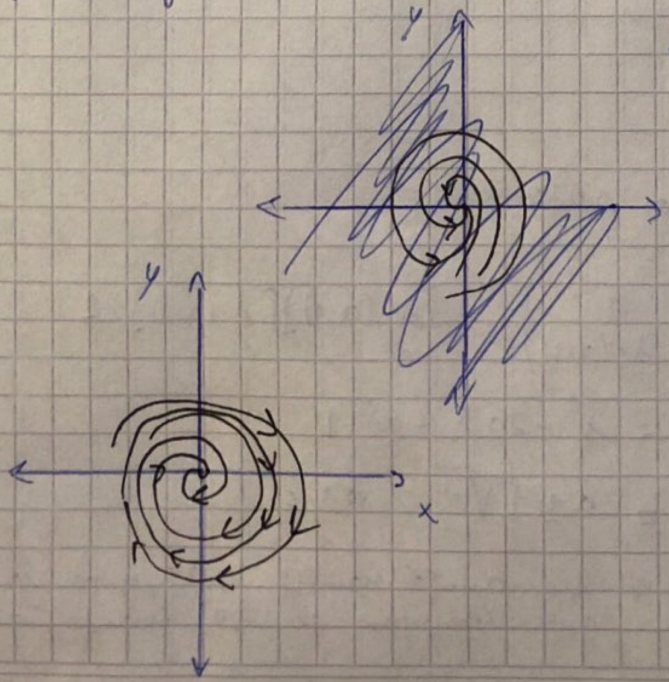
$$X_a(t) = e^{at} \begin{pmatrix} -i\cos t + \sin t + \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}$$

$$= e^{at} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i e^{at} \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general es:

$$X(t) = e^{at} \left[ C_1 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right] \qquad a<0, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

El diagrama de fases de este sistema lineal es:



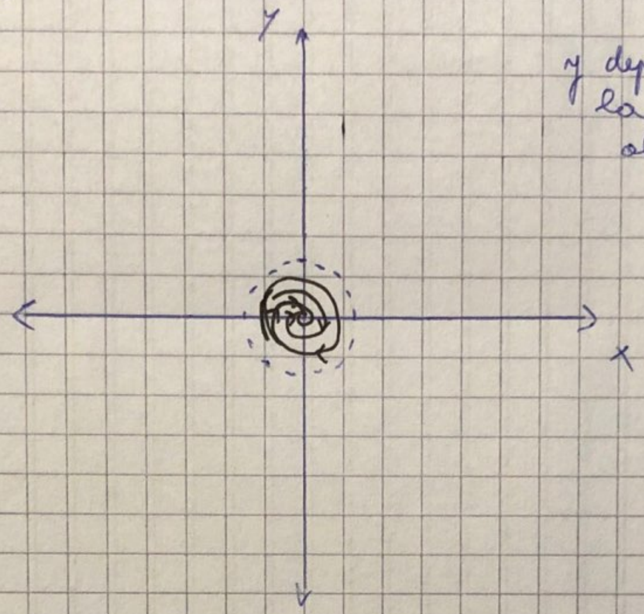

se que gira en ese sentido ya que si por ejemplo agarro el punto $(1,0)$ y lo multiplico por $D_F(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

el cual tiene su 2da componente negativa. Es decir que la trayectoria que pasa por ese punto debe "bajar" e ir hacia la izquierda

NOTA

Por lo tanto, el diagrama de fase del sistema no lineal en un entorno del (0,0) con $a<0$ es:




y dependiendo del $|a|$ cambia la "rapidez" con la que converge al (0,0)