ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 12

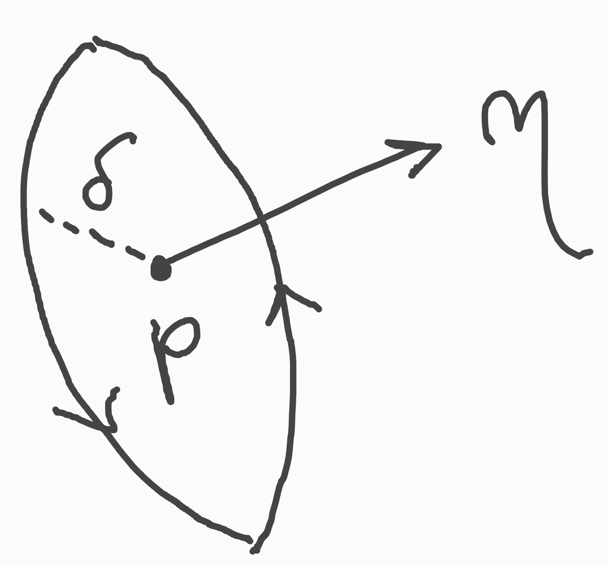
Aplicaciones

- Interpretación del rotor.
- Leyes de conservación.
- Entidades de Green.

Interpretación del rotor

Supongamos que F es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

- Sea $p \in \mathbb{R}^3$ un punto y $\eta = \eta(p)$ un vector unitario
- Sea $D_\delta(p)$ = disco de centro p y radio $\delta > 0$ perpendicular a η.



$\Rightarrow$ por Stokes tenemos que

$$\iint_{D_\delta(p)} \nabla \times F \, ds = \int_{\partial D_\delta(p)^+} F \, ds$$

Como $\displaystyle\iint_{D_\delta(p)} \nabla \times F \, ds = \iint_{D_\delta(p)} \langle \nabla \times F, \eta \rangle \, ds$, entonces

por el Teorema de valor medio, $\exists\, q \in D_\delta(p) /$

$$\iint_{D_\delta(p)} \langle \nabla \times F, \eta \rangle \, ds = \langle \nabla \times F(q), \eta(q) \rangle \cdot \text{área}(D_\delta(p)).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{área}(D_\delta(p))} \underbrace{\iint_{D_\delta(p)} \langle \nabla \times F, \eta \rangle \, dS}_{\int_{\partial D_\delta(p)^+} F\,ds} = \langle \nabla \times F(q), \eta(q) \rangle$$

Tomando límite con $\delta \to 0$

$$\underbrace{\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\text{área}(D_\delta(p))} \int_{\partial D_\delta(p)^+} F \, ds}_{\text{Da la circulación de } F \text{ por unidad de área}} = \langle \nabla \times F(p), \eta \rangle$$

$\Rightarrow \langle \nabla \times F(p), \eta \rangle$ es la circulación de F por unidad de área en p en una sup. $\perp \eta$.

Observación: Haciendo un razonamiento similar se le puede dar una interpretación a la $\text{div}(F)$ (ver aparte).

Leyes de conservación

Supongamos que $u : \mathbb{R}^3 \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $u(x,t)$.

Fijamos $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $t_0 \in (0,T)$.

Notamos $B_\delta(x_0)$ = bola de centro x_0 y radio $\delta > 0$

$$\Rightarrow \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0+h)\,dx - \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x, t_0)\,dx \quad \boxed{*}$$

dice cuanto hay de u dentro de $B_\delta(x_0)$ a tiempo t_0+h menos cuanto había a tiempo t_0.

Si $R(t) = \iiint_{B_\delta(x_0)} u(x,t)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{*} = R(t_0+h) - R(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+h} R'(t)\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx\,dt.$$

Sea $F(x,t)$ un campo vectorial que nos da el flujo de u a través de S, es decir

$$\iint_S F(\cdot,t)\,ds = \iint_S \langle F(\cdot,t), \eta\rangle\,ds$$

nos dice cuanto de u atraviesa la Sup. S en el sentido de su orientación en el instante t.

Entonces,

$$\underbrace{\iiint_{B_\delta(x_0)} u(x,t_0+h)\,dx}_{\text{cuanto hay de } u \text{ dentro de } B_\delta(x_0) \text{ a tiempo } t_0+h} - \underbrace{\iiint_{B_\delta(x_0)} u(x,t_0)\,dx}_{\text{cuanto hay de } u \text{ dentro de } B_\delta(x_0) \text{ a tiempo } t_0} = \underbrace{- \int_{t_0}^{t_0+h} \iint_{\partial B_\delta(x_0)} \langle F(\cdot,t), \eta_e \rangle \, d\sigma \, dt}_{\text{lo que entró a través de } \partial B_\delta(x_0) \text{ entre } t_0 \text{ a } t_0+h.} \quad \boxed{**}$$

Usando el teorema de Gauss,

$$\boxed{**} = - \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(F)(x,t)\,dx\,dt.$$

Juntando con lo anterior tenemos que:

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt = - \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(F)(x,t)\,dx\,dt.$$

$$\Rightarrow \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0)\,dx\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(F)(x,t)\,dx\,dt$$

$$= - \iiint_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(F)(x,t_0)\,dx.$$

Dividiendo por $vol(B_\delta(x_0))$ y tomando $\lim_{\delta \to 0}$ tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{vol(B_\delta(x_0))} \iiint_{B_\delta(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0)\, dx$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{-1}{vol(B_\delta(x_0))} \iiint_{B_\delta(x_0)} div\, F(x, t_0)\, dx$$

$$= -div(F)(x_0, t_0).$$

Como esto vale $\forall x_0$ y $\forall t_0 \Rightarrow$ obtenemos:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -div(F)(x,t)} \rightarrow \text{Ecuación diferencial.}$$

- Ecuación de transporte:

$u(x,t)$ = densidad de una sustancia que se mueve dentro de un fluido

$F(x,t) = u(x,t)V(x,t)$ con $V(x,t)$ campo de velocidades del fluido ($F \sim$ velocidad $\wedge$ densidad).

$$\Rightarrow div(F)(x,t) = \langle \nabla u(x,t), V(x,t) \rangle + u(x,t)\, div(V)(x,t).$$

Si asumimos que V no depende de t ∧ $\text{div}(V)(x)=0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\langle \nabla u(x,t), V(x)\rangle}$$

↳ ecuación de transporte.

Ley de Fourier:

↗ ley de Fourier.

Se toma $F(x,t) = -k\nabla u(x,t)$ k cte

$$\Rightarrow \text{div}(F)(x,t) = -k\,\text{div}(\nabla u)(x,t)$$

$$= -k\,\Delta u(x,t)$$

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\,\Delta u(x,t)}$$

→ ecuación dif que modela fenómenos de difusión (ej: de calor en un medio homogeneo).

Identidades de Green:

Sean $u,v:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ∧ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio.

$$\Rightarrow \text{div}(v.\nabla u) = \text{div}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}, v\frac{\partial u}{\partial y}, v\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$= \langle \nabla v, \nabla u \rangle + v \Delta u.$

$\Rightarrow$ aplicando Gauss tenemos:

$$\iiint_\Omega \langle \nabla v, \nabla u \rangle + v \Delta u \, dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega \operatorname{div}(v \nabla u)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \eta \rangle \, ds.$$

$$\Rightarrow \boxed{\iiint_\Omega v \Delta u \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \eta \rangle \, ds - \iiint_\Omega \langle \nabla v, \nabla u \rangle \, dx\,dy\,dz}$$

primera identidad de Green.

Intercambiando los roles de u y v tenemos

$$\iiint_\Omega u \Delta v \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} u \langle \nabla v, \eta \rangle \, ds - \iiint_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx\,dy\,dz$$

$\Rightarrow$ restando:

$$\boxed{\iiint_\Omega v \Delta u \, dx\,dy\,dz - \iiint_\Omega u \Delta v \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \eta \rangle \, ds - \iint_{\partial\Omega} u \langle \nabla v, \eta \rangle \, ds.}$$

Segunda Identidad de Gre