Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 19, 2do. cuatrimestre 2020

Casos con matrices no diagonalizables

En dimensión 2, el único caso que nos queda por analizar es el de un autovalor real de multiplicidad 2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ este autovalor. Si una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores, estamos en el caso que sabemos resolver: $A = \lambda I$ y por lo tanto, tenemos un sistema desacoplado

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \lambda x_1\,,\\
x_2' &= \lambda x_2,
\end{aligned}
$$

cuya solución general es $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Si no hay una base de autovectores, sólo tenemos una solución de la forma $X(t) = e^{\lambda t}\xi$. ¿Cómo encontrar otra solución linealmente independiente?

Casos con matrices no diagonalizables

Ejemplo: se trata de determinar una base de soluciones de

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}}_{A} X.$$

La matriz A tiene un sólo autovalor λ, pero $\lambda I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene núcleo $\langle (0,1) \rangle \Rightarrow$ A no es diagonalizable.

Sin embargo, podemos "desacoplar" las variables: por la 1era ecuación,

$$x_1' = \lambda x_1 \Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}.$$

Además,

$$x_2' = x_1 + \lambda x_2 = c_1 e^{\lambda t} + \lambda x_2,$$

que es una ecuación lineal no homogénea de orden 1.

Casos con matrices no diagonalizables

Es fácil hallar la forma general para x_2:

$$x_2 = (c_1 t + c_2)e^{\lambda t}.$$

Así, la solución general es de la forma

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ (c_1 t + c_2)e^{\lambda t} \end{pmatrix} = c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{\lambda t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particular, tenemos la siguiente base de soluciones:

$$\left\{ e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; e^{\lambda t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\}.$$

Casos con matrices no diagonalizables

Consideramos ahora el caso general 2×2 con A no diagonalizable: supongamos que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene un único autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ doble y $\dim \mathrm{Nu}(A - \lambda I) = 1$. Si $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es autovector de A de autovalor $\lambda \Rightarrow X(t) = \xi e^{\lambda t}$ es solución de $X' = AX$.

Teniendo en cuenta el ejemplo, buscamos una segunda solución de la forma

$$X(t) = e^{\lambda t}(\xi_1 t + \xi_2), \text{ con } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Derivando, tenemos

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lambda e^{\lambda t}(\xi_1 t + \xi_2) + e^{\lambda t}\xi_1 \\ &= AX(t) = e^{\lambda t}(A\xi_1 t + A\xi_2). \end{aligned}$$

Casos con matrices no diagonalizables

Por lo tanto, debe ser

$$\begin{aligned} A\xi_1 &= \lambda\xi_1, \\ A\xi_2 &= \lambda\xi_2 + \xi_1. \end{aligned}$$

Dado que $\xi \in \mathbb{R}^2$ es autovector de A, podemos elegir $\xi_1 = \xi$. Luego, tenemos el sistema lineal:

$$(A - \lambda I)\,\xi_2 = \xi.$$

Como $A - \lambda I$ es singular, no es claro que el sistema tenga solución.

Casos con matrices no diagonalizables

Veamos que sí: sea $\eta \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{\eta, \xi\}$ es linealmente independiente ($\Rightarrow$ es una base de $\mathbb{R}^2$). Si $A\eta = c_1\eta + c_2\xi$, la matriz de A en la base $\mathcal{B} = \{\eta, \xi\}$ es

$$|A|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Como λ es el único autovalor de $A \Rightarrow c_1 = \lambda \Rightarrow A\eta = \lambda\eta + c_2\xi$ $\Rightarrow (A - \lambda I)\eta = c_2\xi$. Así, tomando $\xi_2 = \eta/c_2$, tenemos que

$$(A - \lambda I)\xi_2 = \xi.$$

(observamos que $c_2 \neq 0$, porque si no, A sería diagonalizable).

Casos con matrices no diagonalizables

Así, demostramos el siguiente resultado:

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que su polinomio característico es $p(T) = (T - \lambda)^2$. Supongamos que $\mathrm{Nu}(\lambda I - A) = \langle \xi \rangle$. Existe una base de soluciones del sistema

$$X' = A\,X$$

de la forma $x_1 = \xi e^{\lambda t}$, $x_2 = e^{\lambda t}(\xi\, t + \xi_1)$, siendo ξ_1 cualquier solución del sistema

$$(A - \lambda I)x = \xi.$$

Casos con matrices no diagonalizables

Ejemplo: Consideramos el sistema

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X.$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) + 1 = (\lambda - 2)^2.$$

Además,

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{Nu}(2I - A) = \langle (1, -1) \rangle.$$

Por lo tanto, tenemos la solución

$$X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Casos con matrices no diagonalizables

Buscamos otra solución de la forma $X_2(t) = e^{2t}(\xi_1 t + \xi_2)$, donde ξ_1 es el autovector encontrado y ξ_2 es solución del sistema $(A - 2I)\xi_2 = \xi_1$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si elegimos $\xi_2 = (0, -1)$, la solución general es entonces

$$X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Estudiamos ahora ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes, es decir, dados $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ continua, estudiamos las soluciones de la ecuación

$$x^{(n)} + a_{n-1}\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x = f(t). \tag{1}$$

Como vimos, comenzamos con el caso homogéneo:

$$x^{(n)} + a_{n-1}\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x' + a_0\, x = 0. \tag{2}$$

Podemos reducir la cuestión al análisis del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0' & = & x_1\,, \\ x_1' & = & x_2, \\ & \vdots & \\ x_{n-2}' & = & x_{n-1}\,, \\ x_{n-1}' & = & -a_0 x_0 - \cdots - a_{n-1} x_{n-1}. \end{array}\right.$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} X.$$

Se trata entonces de determinar el polinomio característico $p(\lambda)$ de A.

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

El polinomio característico de A es el polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

que se obtiene reemplazando en la ecuación diferencial la derivación por la correspondiente potencia de λ. Lo llamamos el polinomio característico de la ecuación.

Si $p(\lambda)$ tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, y $\xi_1, \dots, \xi_n$ son autovectores que forman una base de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t}\xi_1, \dots, X_n(t) = e^{\lambda_n t}\xi_n$$

es base de soluciones del sistema. Por lo tanto,

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

es una base de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Si existen n raíces complejas distintas, digamos $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow n - r$ es par y podemos agrupar $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ en la forma $\lambda_{r+1}, \overline{\lambda}_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}, \overline{\lambda}_{r+s}$ $(s = \frac{n-r}{2})$.

Como antes,

$$\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_r t}, e^{\lambda_{r+1} t}, e^{\overline{\lambda}_{r+1} t}, \dots, e^{\lambda_{r+s} t}, e^{\overline{\lambda}_{r+s} t}\}$$

es una base de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Si $\lambda_{r+j} = \alpha_{r+j} + i\beta_{r+j}$ $(\beta_{r+j} \neq 0)$, entonces

$$e^{\lambda_{r+j} t} = e^{\alpha_{r+j} t}(\cos(\beta_{r+j} t) + i \sin(\beta_{r+j} t)),$$
$$e^{\overline{\lambda}_{r+j} t} = e^{\alpha_{r+j} t}(\cos(\beta_{r+j} t) - i \sin(\beta_{r+j} t)),$$

$$\Rightarrow e^{\alpha_{r+j} t} \cos(\beta_{r+j} t), \quad e^{\alpha_{r+j} t} \sin(\beta_{r+j} t),$$

son soluciones (definidas en $\mathbb{R}$) para $1 \leq j \leq s$.

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

En resumen, tenemos:

Teorema: Sean $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ y $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Si p posee n raíces distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{R}$ ($s = \frac{n-r}{2}$), entonces

$$\big\{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_r t}, e^{\alpha_{r+1} t}\cos(\beta_{r+1} t), e^{\alpha_{r+1} t}\sin(\beta_{r+1} t), \\ \dots, e^{\alpha_{r+s} t}\cos(\beta_{r+s} t), e^{\alpha_{r+s} t}\sin(\beta_{r+s} t) \big\},$$

con $\lambda_{r+j} = \alpha_{r+j} + i\beta_{r+j}$, forman una base de soluciones de la ecuación homogénea (2).

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Ejemplo: Consideramos la ecuación

$$x'' - 2x' + 2x = 0.$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, cuyas raíces son $\lambda = 1 \pm i$. Por lo tanto,

$$\left\{ e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i \sin t), e^{(1-i)t} = e^t(\cos t - i \sin t) \right\}$$

es base de soluciones, y

$$\left\{ e^t \cos t, e^t \sin t \right\}$$

es base de soluciones definida en $\mathbb{R}$. La solución general es

$$c_1\, e^t \cos t + c_2\, e^t \sin t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Consideramos ahora el caso en que $p(\lambda)$ tiene raíces múltiples. La ecuación homogénea (2) se puede expresar de la siguiente manera:

$$Lx := (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)\, x = 0.$$

Supongamos que

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ para } i \neq j).$$

La misma factorización es válida para el operador L, a saber:

$$Lx = (D - \lambda_1)^{n_1} \cdots (D - \lambda_k)^{n_k} x.$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Tenemos el siguiente resultado:

Lema: Si $p = q \cdot r$, con $q, r \in \mathbb{R}[\lambda]$ con $\text{mcd}(q, r) = 1 \Rightarrow$ $p(D) = q(D) \circ r(D)$ y

$$\mathrm{Nu}(p(D)) = \mathrm{Nu}(q(D)) \bigoplus \mathrm{Nu}(r(D)).$$

Por el lema, basta encontrar una base de soluciones de $(D - \lambda_j)^{n_j} = 0$ para $1 \leq i \leq k$.

Lema: Si $p(D) = (D - \lambda)^n \Rightarrow \{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{n-1}e^{\lambda t}\}$ es una base de soluciones de la ecuación $p(D) = 0$.

Demostración: Es claro que $e^{\lambda t}$ es solución:

$$(D-\lambda)^n e^{\lambda t} = (D-\lambda)^{n-1}(D-\lambda)e^{\lambda t} = (D-\lambda)^{n-1}(\lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t}) = 0.$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Asimismo,

$$\begin{aligned}(D-\lambda)^{k+1}(t^k e^{\lambda t}) &= (D-\lambda)^k (D-\lambda)(t^k e^{\lambda t}) \\ &= (D-\lambda)^k (kt^{k-1}e^{\lambda t} + \lambda t^k e^{\lambda t} - \lambda t^k e^{\lambda t}) \\ &= k(D-\lambda)^k (t^{k-1}e^{\lambda t}) = \cdots = k!(D-\lambda)e^{\lambda t} = 0.\end{aligned}$$

Concluimos que $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{n-1}e^{\lambda t}$ son soluciones.

Además, son linealmente independientes:

$$\begin{aligned}& c_0 e^{\lambda t} + c_1 te^{\lambda t} + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}e^{\lambda t} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1}t^{n-1} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Concluimos que forman una base de soluciones $\blacksquare$

Ecuación de orden *n* con coeficientes constantes

Por último, si $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$, entonces $\overline{\lambda}$ también es raíz del polinomio característico, y tenemos las soluciones

$$\{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t), t\,e^{\alpha t}\cos(\beta t), t\,e^{\alpha t}\sin(\beta t),$$
$$t^2 e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \ldots, t^{n-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^{n-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}.$$

En definitiva, tenemos:

Teorema: Si

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$
$$(\lambda - \lambda_{r+1})^{n_{r+1}}(\lambda - \overline{\lambda}_{r+1})^{n_{r+1}}\cdots(\lambda - \lambda_{r+1})^{n_{r+1}}(\lambda - \overline{\lambda}_{r+s})^{n_{r+s}},$$

con $\lambda_{r+j} = \alpha_{r+j} + i\beta_{r+j}$ con $\beta_{r+j} \neq 0$ para $1 \leq j \leq s$, la ecuación $p(D) = 0$ tiene la siguiente base de soluciones:

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

$$
\begin{gathered}
\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_r t}, te^{\lambda_r t}, \ldots, t^{n_r-1}e^{\lambda_r t}, \\
e^{\alpha_{r+1}t}\cos(\beta_{r+1}t), e^{\alpha_{r+1}t}\sin(\beta_{r+1}t), t\,e^{\alpha_{r+1}t}\cos(\beta_{r+1}t), t\,e^{\alpha_{r+1}t}\sin(\beta_{r+1}t), \\
\ldots, t^{n_{r+1}-1}e^{\alpha_{r+1}t}\cos(\beta_{r+1}t), t^{n_{r+1}-1}e^{\alpha_{r+1}t}\sin(\beta_{r+1}t), \ldots, \\
e^{\alpha_{r+s}t}\cos(\beta_{r+s}t), e^{\alpha_{r+s}t}\sin(\beta_{r+s}t), t\,e^{\alpha_{r+s}t}\cos(\beta_{r+s}t), t\,e^{\alpha_{r+s}t}\sin(\beta_{r+s}t), \\
\ldots, t^{n_{r+s}-1}e^{\alpha_{r+s}t}\cos(\beta_{r+s}t), t^{n_{r+s}-1}e^{\alpha_{r+s}t}\sin(\beta_{r+s}t)\}.
\end{gathered}
$$

Ecuación de orden n con coeficientes constantes

Ejemplo: Hallamos la solución general de la ecuación

$$x^{(5)} - x^{(4)} + 2x''' - 2x'' + x' - x = 0.$$

El polinomio característico de la ecuación es

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 1 &= (\lambda - 1)(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)^2, \end{aligned}$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \pm i$ (con multiplicidad 2).

Por lo tanto, una base de soluciones es

$$\{e^t, \cos t,\ \operatorname{sen} t, t\cos t, t\ \operatorname{sen} t\},$$

y la solución general es

$$x(t) = c_1 e^t + (c_2 + c_3 t)\cos t + (c_4 + c_5 t)\operatorname{sen} t.$$