Complemento a clases teóricas 18 y 19

Análisis II - Análisis Matemático II - Matemática III.

⊛ Repaso.

- $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo
- $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas
- $A(t) := (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Sistema lineal Homogeneo

$\hookrightarrow$ $X'(t) = A(t)\,X(t)$

$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Vieron: ① $X' = A(t)X$ tiene solución y las soluciones son globales.
Es decir: $X : I \to \mathbb{R}^n$.

② el conjunto de soluciones de $X' = A(t)X$ es un espacio vectorial de dim $\underline{\underline{n}}$.

Proposición:

Sean $\{X_1, \dots, X_n\}$ soluciones de $X' = A(t)X$ con $A(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ con entradas continuas y sea $r \in I$ (cualquiera). Entonces:

$\{X_1, \dots, X_n\}$ es li $\iff$ $\{X_1(r), \dots, X_n(r)\}$ es li

• ¿qué quiere decir "$\{X_1, \ldots, X_n\}$ es li"?

$X_j : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones a valores en $\mathbb{R}^n$

Son li $\Leftrightarrow$ cada vez que para $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_m = 0$ se tiene que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha_1 X_1(t) + \cdots + \alpha_n X_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$

• $\{X_1(r), \ldots, X_m(r)\}$ es li $\Leftrightarrow$ cada vez que para $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 X_1(r) + \cdots + \alpha_n X_n(r) = 0$ se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ejemplo:

Sean $X_1(t) = (t, 0)$ y $X_2(t) = (0, t)$ con $t \in \mathbb{R}$ $(I = \mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ ⊛ $\{X_1, X_2\}$ es li pues si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ /

$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0 \Rightarrow (\alpha_1 t, \alpha_2 t) = (0,0) \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\underset{t=1}{\Rightarrow} (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$ y $\therefore \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

⊛ $\{X_1(0), X_2(0)\}$ no es li (ambos son $(0,0)$).

En particular, $\{X_1, X_2\}$ no puede ser una base de soluciones de un sistema de 2×2 de la forma $X' = A(t)X$ con $A(t)$ cont.

Ejemplo:

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t+1}{t^2+1}\, x(t) + \dfrac{2}{t^2+1}\, y(t) \\[2ex] y'(t) = \dfrac{-1}{t^2+1}\, x(t) + \dfrac{t-1}{t^2+1}\, y(t) \end{cases}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t+1}{t^2+1} & \dfrac{2}{t^2+1} \\[2ex] \dfrac{-1}{t^2+1} & \dfrac{t-1}{t^2+1} \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow X' = A(t)X.$$

Sean $X_1(t) = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ t+1 \end{pmatrix}$.

Veamos que X_1 y X_2 son soluciones:

- $X_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $A(t)X_1(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2-1}{t^2+1} + \dfrac{2}{t^2+1} \\[2ex] \dfrac{1-t}{t^2+1} \quad \dfrac{t-1}{t^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $X_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $A(t)X_2(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2(t+1)}{t^2+1} + \dfrac{2(t+1)}{t^2+1} \\[2ex] \dfrac{2}{t^2+1} + \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

¿son base? veo si son li usando la prop.

$\{X_1, X_2\}$ son li $\Leftrightarrow$ $\{X_1(0), X_2(0)\}$ son li en $\mathbb{R}^2$.

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad X_2(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son li: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ son li.

En particular, todas las soluciones del sistema son de la forma

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$$

$$= \begin{pmatrix} C_1(t-1) + C_2(-2) \\ C_1 \cdot 1 + C_2(t+1) \end{pmatrix}.$$

Recordar:

$\boxed{\text{Sistemas de orden 1 de } m \times m} \longleftrightarrow \boxed{\text{ecuaciones de orden } m}$

$\boxed{\text{Sistemas lineales homogeneos de orden 1 de } m \times m} \longleftrightarrow \boxed{\text{ecuaciones dif. homogéneas de orden } m}$

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \\ x_2' = a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ x_m' = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m \end{cases}$$

$$\boxed{x^{(m)} + a_{m-1}(t)x^{(m-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0}$$

Sistema asociado a una ecuac. dif. de orden n

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2}' = x_{n-1} \\ x_{n-1}' = -a_0 x_0 - a_1 x_1 - \dots - a_{n-1} x_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(*) Si $a_0, \dots, a_{n-1} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas

$\Rightarrow$ sabemos que $X' = A(t)X$ tiene solución.

(*) Si $X = (x_0, \dots, x_{n-1})$ es solución $\Rightarrow$

$x = x_0$ es solución de la ecu. de orden n.

(*) Además <u>todas</u> las soluciones son un EV de dim. n.

Si $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de soluciones

$\Rightarrow$ la 1º coord de cada $X_j = (x_0^j, \dots, x_{n-1}^j)$,

x_0^j es solución de la ecu. de orden n.

$\Rightarrow$ tenemos $\{x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\}$ n soluciones de la ec. de orden n.

Vimos que son li y que cualquier sol. es combinación lineal de ellas. Luego forman una base de soluciones.