REDUCCIÓN DE ORDEN

PROBLEMA: RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

TEOREMA: $\{y \text{ SOLUCIONES DE } (1)\}$ ES UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN 2

LUEGO, BASTA HALLAR DOS SOLUCIONES L.I.

SUPONGAMOS QUE TENEMOS UNA SOLUCIÓN $y_1(x)$

PROPONEMOS COMO SEGUNDA SOLUCIÓN $y_2(x) = v(x)y_1(x)$, PARA ALGUNA FUNCIÓN $v(x)$ QUE DEBEMOS ENCONTRAR

$$y_2 = v y_1$$
$$y_2' = v' y_1 + v y_1'$$
$$y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$$

LUEGO, TENEMOS QUE

$$y_2'' + P(x)y_2' + q(x)y_2 =$$
$$= v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' + P(x)v' y_1 + P(x) v y_1' + q(x) v y_1$$
$$= v'' y_1 + (2y_1' + P(x)y_1)v' + \underbrace{(y_1'' + P(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0 \text{ POR SER } y_1 \text{ SOLUCIÓN}} v$$
$$= y_1 v'' + (2y_1' + P(x)y_1)v'$$

SI y_2 ES SOLUCIÓN, ESTO DEBE SER 0

$$\rightsquigarrow y_1 v'' + (2y_1' + P(x)y_1)v' = 0$$

SI LLAMAMOS $z(x) = v'(x)$, LA ECUACIÓN SE CONVIERTE EN:

$$y_1 z' + (2y_1' + P(x) y_1) z = 0$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{-(2y_1' + P(x)y_1)}{y_1}$$

$$\ln z = \int -\frac{(2y_1' + P(x)y_1)}{y_1}$$

$$v' = z = e^{\int -\frac{(2y_1' + P(x)y_1)}{y_1}}$$

$$v = \int e^{\int -\frac{(2y_1' + P(x)y_1)}{y_1}}$$

→ OBTUVIMOS LA SEGUNDA SOLUCIÓN!!

<u>EJEMPLOS</u>: 1) LA FUNCIÓN $y_1 = x^2$ ES SOLUCIÓN DE

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

DETERMINAR LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA EC. DIF EN $(0, +\infty)$

SOLUCIÓN: COMPROBEMOS QUE y_1 ES SOLUCIÓN

$$y_1 = x^2 \qquad y_1' = 2x \qquad y_1'' = 2$$

$$x^2 y_1'' - 3x y_1' + 4y_1 = 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0 \quad ✓$$

PROPONEMOS $y_2 = v y_1$ COMO SEGUNDA SOLUCIÓN

$$y_2' = v' y_1 + v y_1'$$

$$y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$$

$$x^2 y_2'' - 3x y_2' + 4y_2 =$$

$$= x^2 (v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'') - 3x(v' y_1 + v y_1') + 4 v y_1$$

$$= x^2 y_1 v'' + v'(2x^2 y_1' - 3x y_1) + v(\underbrace{\cancel{x^2 y_1'' - 3x y_1' + 4y_1}}_{0})$$

$$= v'' x^2 y_1 + v'(2x^2 y_1' - 3x y_1) = 0$$

$\underline{z = v'} \rightarrow z' x^2 y_1 + z(2x^2 y_1' - 3x y_1) = 0$

$$\frac{z'}{z} = \frac{-2x^2 y_1' + 3x y_1}{x^2 y_1} = \frac{-2x^2 \cdot 2x + 3x \cdot x^2}{x^2 \cdot x^2} = \frac{-4}{x} + \frac{3}{x} = \frac{-1}{x}$$

$$\ln|z| = -\ln|x| + c \overset{(0,+\infty)}{=} -\ln x + c$$

$$z = ce^{-\ln x} = \frac{c}{x} \rightarrow \text{ELIJO } c = 1$$

$$z = \frac{1}{x}$$

$$v' = \frac{1}{x} \rightarrow v = \ln|x| \overset{(0,+\infty)}{=} \ln x$$

$$\rightarrow y_2(x) = v \cdot y_1 = x^2 \ln(x)$$

SOLUCIÓN GENERAL: $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$

2) HALLAR LA SOLUCIÓN GENERAL DE

$$(1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0$$

SABIENDO QUE $y_1 = x+1$ ES SOLUCIÓN, EN $(1, +\infty)$

SOLUCIÓN: COMPROBEMOS QUE y_1 ES SOLUCIÓN:

$$y_1 = x+1 \qquad y_1' = 1 \qquad y_1'' = 0$$

$$(1-2x-x^2)y_1'' + 2(1+x)y_1' - 2y_1 = 2(1+x) - 2(x+1) = 0 \checkmark$$

PROPONEMOS $y_2 = v y_1$ COMO 2° SOLUCIÓN

$$y_2' = v' y_1 + v y_1'$$

$$y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$$

$$(1-2x-x^2)y_2'' + 2(1+x)y_2' - 2y_2 =$$

$$= (1-2x-x^2)(v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'') + 2(1+x)(v' y_1 + v y_1') - 2v y_1$$

$$= v''(1-2x-x^2)y_1 + v'((1-2x-x^2) \cdot 2y_1' + 2(1+x)y_1) + v\underbrace{\cancel{((1-2x-x^2)y_1'' + 2(1+x)y_1' - 2y_1)}}_{0}$$

$$= v''(1-2x-x^2)y_1 + v'(2y_1'(1-2x-x^2) + 2(1+x)y_1) = 0$$

$\underline{z = v'} \longrightarrow z'(1-2x-x^2)y_1 + z(2y_1'(1-2x-x^2) + 2(1+x)(y_1)) = 0$

$$z'(1-2x-x^2)(1+x) + z(2 - \cancel{4x} - \cancel{2x^2} + 2 + \cancel{4x} + \cancel{2x^2}) = 0$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{+4}{(1+x)(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{x-(-1-\sqrt{2})} + \frac{1}{x-(-1+\sqrt{2})}$$

FRACCIONES SIMPLES

$$\ln|z| = -2\ln|x+1| + \ln|x-(-1-\sqrt{2})| + \ln|x-(-1+\sqrt{2})| + C$$

$$= -2\ln(x+1) + \ln(x-(-1-\sqrt{2})) + \ln(x-(-1+\sqrt{2})) + C$$

$\hookrightarrow (1, +\infty)$

$$z = C\frac{1}{(x+1)^2}\cdot(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))$$

$$= C\,\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$

$\rightsquigarrow$ ELIJO $C = 1$

$$v' = \frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{-2}{x^2+2x+1} = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$v = x + \frac{2}{x+1}$$

$$y_2(x) = v\,y_1 = \left(x + \frac{2}{x+1}\right)(x+1) = x(x+1) + 2 = x^2 + x + 2$$

SOLUCIÓN GENERAL:

$$y(x) = C_1(x+1) + C_2(x^2+x+2)$$

3) HALLAR LAS SOLUCIONES DE

$$4x^2y'' + y = 0 \qquad \text{EN } (1, +\infty)$$

SABIENDO QUE $y_1 = x^{1/2}\ln(x)$ ES SOLUCIÓN

SOLUCIÓN: COMPROBEMOS QUE y_1 ES SOLUCIÓN:

$$y_1 = x^{1/2}\ln x \qquad y_1' = \frac{1}{2}x^{-1/2}\ln x + x^{1/2}\cdot\frac{1}{x} = x^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)$$

$$y_1'' = \frac{-1}{2}x^{-3/2}\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right) + x^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{-3/2}\left(\frac{-1}{4}\ln x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4}x^{-3/2}\ln x$$

$$4x^2y_1'' + y_1 = 4x^2\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)\cdot x^{-3/2}\ln x + x^{1/2}\ln x = 0 \checkmark$$

PROPONEMOS $y_2 = v\,y_1$ COMO 2° SOLUCIÓN

$$y_2' = v'y_1 + vy_1'$$

$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

$$4x^2y_2'' + y_2 = 4x^2(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + vy_1$$

$$= v''\cdot 4x^2y_1 + v'(8x^2y_1') + v(\cancel{4x^2y_1''+y_1}^{\,0})$$

$$= 4x^2y_1\,v'' + 8x^2y_1'\,v' = 0$$

$$z = v' \longrightarrow 4x^2y_1z' + 8x^2y_1'z = 0$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{-8x^2y_1'}{4x^2y_1} = \frac{-2x^{-1/2}\left(1/2\ln x + 1\right)}{x^{1/2}\ln x}$$

$$= \frac{-\ln x - 2}{x\ln x} = \frac{-1}{x} - \frac{2}{x\ln x}$$

$$\ln|z| = -\ln|x| - 2\ln(|\ln|x||) + c$$

$$= -\ln(x) - 2\ln(\ln(x)) + c$$

$\hookrightarrow (1, +\infty)$

$$z = C\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2(x)} \longrightarrow \text{ELIJO } C = 1$$

$$v' = \frac{1}{x \ln^2(x)}$$

$$v = \frac{-1}{\ln(x)}$$

$$y_2 = v\, y_1 = \frac{-1}{\ln x} \cdot x^{1/2} \ln x = -x^{1/2}$$

SOLUCIÓN GENERAL: $y(x) = C_1 x^{1/2} \ln x + C_2 x^{1/2}$