ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

TEÓRICA 6

Orientación de superficies

Definición: Decimos que una superficie S es **orientable** si existe una manera de elegir en cada punto $p \in S$ un único versor normal $\nu(p)$ / la función $p \longmapsto \nu(p)$ resulte continua.

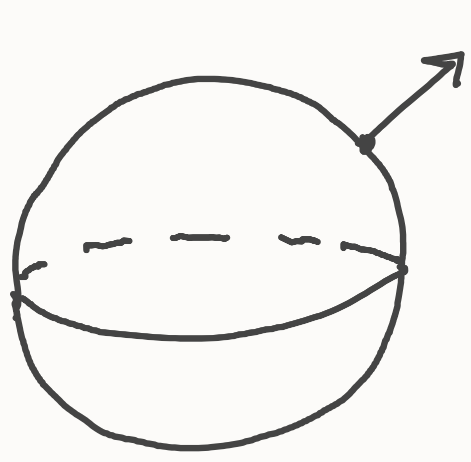
Ejemplos

1. Si $S = \text{graf}(f) = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in D\}$ y $f \in C^1 \Rightarrow S$ es orientable pues

$$\nu(x,y,f(x,y)) = \frac{(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)}{\sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y) + 1}}$$

es continua ($f \in C^1$).

2. Si S es la esfera de radio 1 y centro $(0,0,0)$



consideremos el campo normal

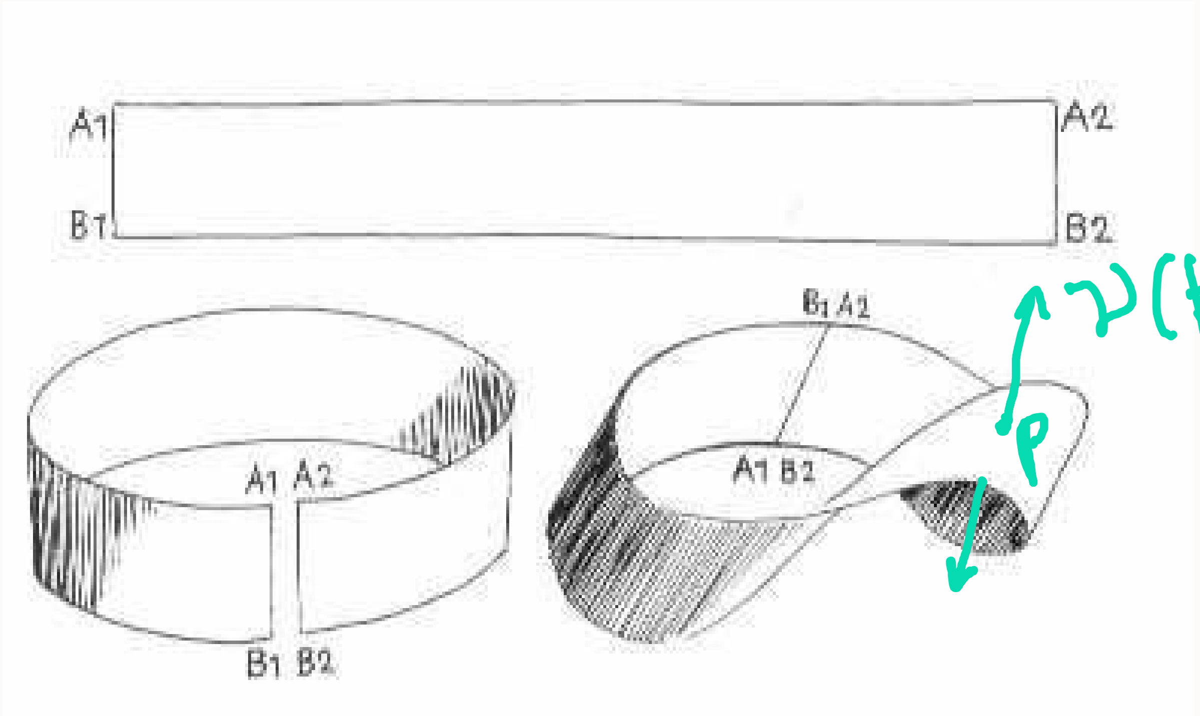
$\nu(p) = p \qquad p = (x,y,z) \in S \quad [\|p\| = 1]$.

$\Rightarrow$ como $p \longmapsto \nu(p)$ es continuo $\Rightarrow S$ es orientable. Decimos que S está orientada con normal exterior.

También podemos tomar $\tilde{\nu}(p) = -p$ y entonces orientamos a S con normal interior.

$\boxed{3}$ S es la cinta de Moebius. Entonces S No es orientable.

Idea:



(*) ¿Cómo podemos saber si una superficie es orientable?

Proposición: Sea S una superficie suave y $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S. Para cada $p \in S$ definimos

$$\vec{\nu}_T(p) = \frac{T_u(u,v) \times T_v(u,v)}{\|T_u(u,v) \times T_v(u,v)\|} \quad \text{donde } (u,v) \in D$$

y es tal que $T(u,v) = p$.

Entonces $p \longmapsto \vec{\nu}_T(p)$ es continua y por lo tanto S es orientable. En este caso decimos que S está orientada por T.

Observación: En el ejemplo $\boxed{1}$ tomamos la orientación inducida por la parametrización $T(x,y) = (x, y, f(x,y))$.

¡Cuidado! Es muy importante que la parametrización sea regular. En particular, que sea inyectiva.

Ejemplo:

$\boxed{1}$ Cinta de Moebius

$$T(t,\theta): \begin{cases} x = \cos\theta(1+t\,\text{sen}(\theta/2)) \\ y = \text{sen}\,\theta(1+t\,\text{sen}(\theta/2)) \\ z = t\cos(\theta/2) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \theta\in[0,2\pi] \\ t\in[-1,1]. \end{matrix}$$

T no es inyectiva: $T(0,0)=T(0,2\pi)=(1,0,0)$.

Consideremos $\nu_T(T(t,\theta)) = \dfrac{T_t(t,\theta)\times T_\theta(t,\theta)}{\|T_t(t,\theta)\times T_\theta(t,\theta)\|}$

y veamos que no es cont.

Haciendo los cálculos obtenemos:

$T_t(0,\theta)\times T_\theta(0,\theta) = \left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\frac{\theta}{2}, \text{sen}\,\theta/2\right)$

que tiene norma $=1$.

$\Rightarrow \nu_T(T(0,\theta)) = \left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}, -\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\frac{\theta}{2}, \text{sen}\,\theta/2\right)$

$$\lim_{\theta\to 0}\nu_T(T(0,\theta)) = (1,0,0)$$

$$\lim_{\theta\to 2\pi}\nu_T(T(0,\theta)) = (\cos(2\pi)\cos(\pi),0,0) = (-1,0,0)$$

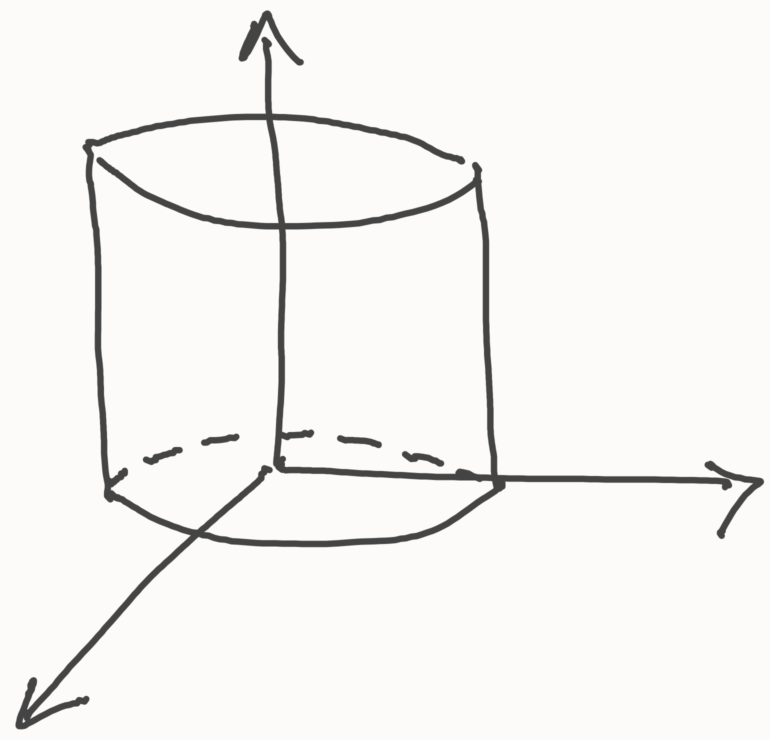
y $\therefore$ ν_T no es continua en $p=(1,0,0)$.

$\boxed{2}$ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ z\in[0,1]\}$

Cilindro.

Una parametrización de S es

$T(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$ $\quad \theta \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$.



- T no es inyectiva y $\therefore$ no es regular. $\quad T(0,z)=T(2\pi,z) = (1,0,z)$.
- $T_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

  $T_z = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow T_\theta \times T_z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ define un vector normal en cada punto de S.

Sea $\nu(p) = \nu(T(\theta,z)) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$

¿ $p \longmapsto \nu(p)$ es continuo?

Sea $p_0 \in S$. Si $p_0 = T(\theta_0, z_0)$ con $\theta_0 \neq 0 \wedge \theta_0 \neq 2\pi$

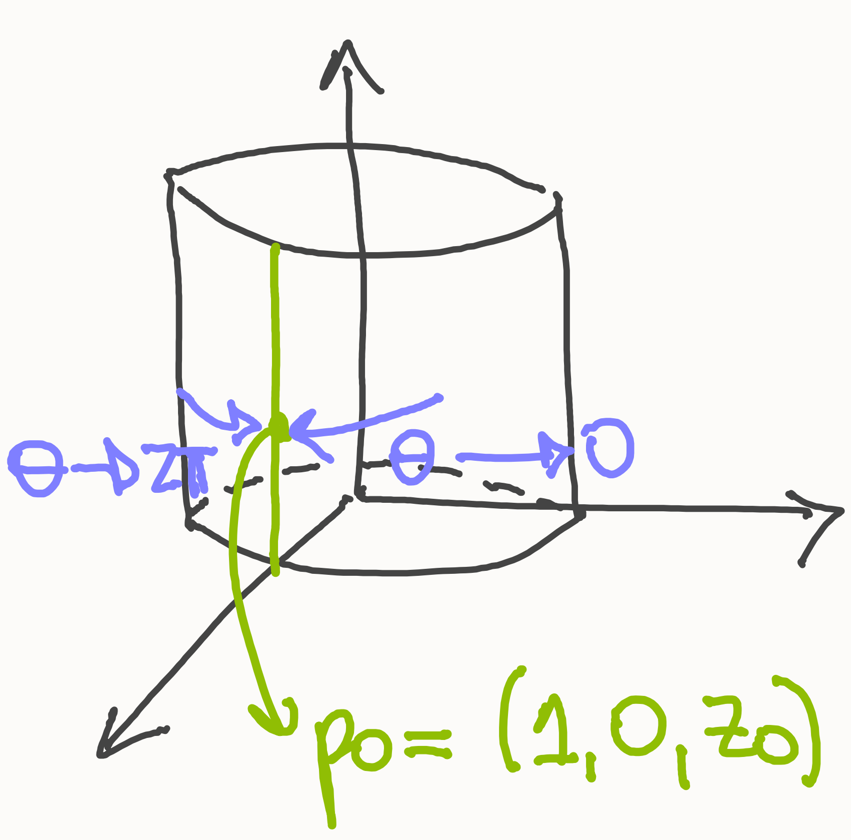
$\Rightarrow$ $p = T(\theta,z) \longrightarrow p_0 = T(\theta_0,z_0)$ cuando $z \to z_0$ y $\theta \to \theta_0$.

para únicos $(\theta,z) \wedge (\theta_0,z_0)$

$\Rightarrow \nu(p) \longrightarrow \nu(p_0)$

Hay que mirar con cuidado los puntos

$p_0 = T(0,z_0) = T(2\pi,z_0)$ (donde T no es inyectiva)



$$\lim_{\theta\to 0} (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0) = (1,0,0) = \nu(1,0,z_0)$$

$$\lim_{\theta\to 2\pi} (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) = (1,0,0) = \nu(1,0,z_0)$$

$\Rightarrow \nu$ resulta continua y $\therefore$ el cilindro es orientable.

Observación: Sea S una superficie suave orientada según el campo normal ν. Sea $T: D \to S$ una parametrización regular de S.
Entonces pueden pasar sólo 2 cosas:

1. $\nu(p) = \nu_T(p) \quad \forall p \in S$

$\longrightarrow$ decimos que T preserva la orientación.

2. $\nu(p) = -\nu_T(p) \quad \forall p \in S$

$\longrightarrow$ decimos que T invierte la orientación.

Flujo:

Definición: Sea S una superficie orientada según el campo normal ν. Sea F un campo vectorial continuo definido en S.
Llamamos flujo de F a través de S a la integral

$$\boxed{\int_S \langle F, \nu \rangle \, ds = \int_S F \cdot dS.}$$

(*) F continuo $\wedge$ ν también $\Rightarrow$
$(x,y,z) \longmapsto \langle F(x,y,z), \nu(x,y,z) \rangle$ es una función escalar y $\therefore$ $\int_S \langle F, \nu \rangle ds$ es una

integral de superficie.

→ Sea $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S.

Entonces: • Si T preserva la orientación de S

$$\Rightarrow \int_S F \cdot dS = \int_S \langle F, \nu \rangle \, dS$$

$$= \iint_D \left\langle F(T(u,v)), \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}(u,v) \right\rangle \|T_u \times T_v\|(u,v) \, du\, dv$$

$$= \iint_D \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v (u,v) \rangle \, du\, dv.$$

• Si T invierte la orientación de S

$$\Rightarrow \int_S F \cdot dS = \int_S \langle F, \nu \rangle \, dS$$

$$= \iint_D \left\langle F(T(u,v)), -\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}(u,v) \right\rangle \|T_u \times T_v\|(u,v) \, du\, dv$$

$$= -\iint_D \langle F(T(u,v)), T_u \times T_v (u,v) \rangle \, du\, dv.$$

$\boxed{\text{Recordemos}}$:

Sean T y $\tilde{T}$ parametrizaciones regulares de una superficie S. Entonces existe $G: \tilde{D} \to D$ biyección C^1 con $d_G \neq 0$ en $\tilde{D}$ /

$$\tilde{T}(z,w) = T(G(z,w)).$$

Como

$$\tilde{T}_z \times \tilde{T}_w(z,w) = \left(T_u(G(z,w)) \times T_v(G(z,w))\right) \cdot J_G(z,w)$$

tenemos que T y $\tilde{T}$ inducen la misma orientación en S si $J_G(z,w) > 0$ en $\tilde{D}$ e inducen orientaciones contrarias si $J_G(z,w) < 0$ en $\tilde{D}$.

Proposición: Sea S una superficie suave orientada por la parametrización regular $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Sea $\tilde{T}: \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ otra parametrización regular de S. Si F es un campo continuo definido en S, entonces:

- Si $\tilde{T}$ preserva la orientación de S,

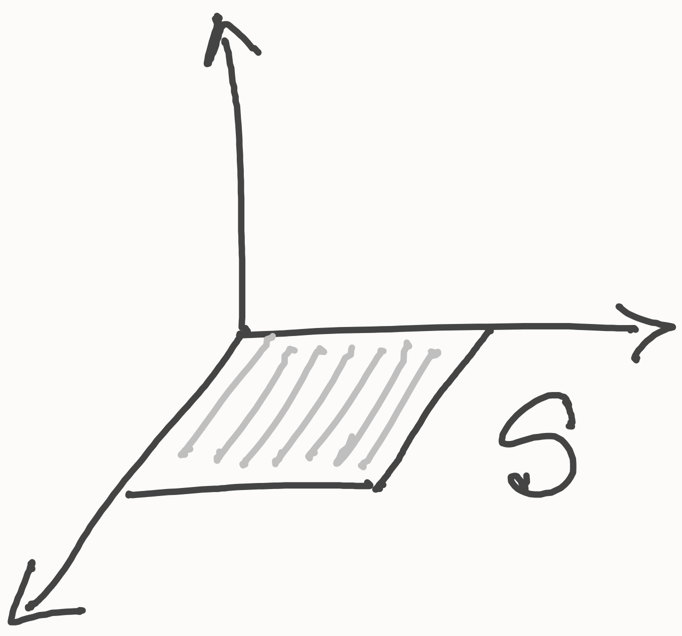
$$\int_S F \cdot dS = \iint_{\tilde{D}} \langle F(\tilde{T}(z,w)), \tilde{T}_z \times \tilde{T}_w(z,w) \rangle \, dz\, dw.$$

- Si $\tilde{T}$ invierte la orientación de S,

$$\int_S F\, dS = -\iint_{\tilde{D}} \langle F(\tilde{T}(z,w)), \tilde{T}_z \times \tilde{T}_w(z,w) \rangle \, dz\, dw$$

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (x, x^2, yx^2)$ que representa el campo de velocidad de un fluido (velocidad medida en metros por seg.).

Calcular la cantidad de metros cúbicos de fluido que cruzan el plano xy a través del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ por segundo.



• $\left| \int_S F\cdot dS \right|$

Como nos interesa el módulo, orientamos a S de alguna manera.

$T:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(u,v)=(u,v,0)$

$\Rightarrow T$ es regular y $\therefore$ orienta a S:

$$\int_S F\cdot dS = \int_0^1\int_0^1 \langle F(T(u,v)), T_u\times T_v(u,v)\rangle \, du\,dv.$$

$T_u=(1,0,1) \quad , \quad T_v=(0,1,0) \Rightarrow T_u\times T_v=(0,0,1)$

$$\Rightarrow \int_S F\,dS = \int_0^1\int_0^1 \langle (u,u^2,vu^2),(0,0,1)\rangle \, du\,dv$$

$$= \int_0^1\int_0^1 vu^2 \, du\,dv$$

$$= \int_0^1 v \left[\frac{u^3}{3}\Big|_0^1 \right] dv = \frac{1}{3}\int_0^1 v\,dv = \frac{1}{3}\,\frac{v^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6} \boxtimes$$