ANÁLISIS II. REPASO

PARCIAL (1° CUAT 2020)

1) CONSIDEREMOS LA EC. DIF.

$$(y^2-3x)\,dx+(6y^3-2xy)\,dy=0$$

PROBAR QUE ADMITE UN FACTOR INTEGRANTE $\mu(x,y)=f(x+y^2)$ CON $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, Y HALLAR UNA SOLUCIÓN (IMPLÍCITA).

LLAMO $P(x,y)=y^2-3x$ Y $Q(x,y)=6y^3-2xy$.

LUEGO:

$$\left.\begin{aligned} P_y &= 2y \\ Q_x &= -2y \end{aligned}\right\} \neq \text{ LA EC. } \underline{\text{NO}} \text{ ES EXACTA}$$

BUSCO $\mu=\mu(x+y^2)$ PARA QUE LA ECUACIÓN $\mu P\,dx+\mu Q\,dy=0$ SEA EXACTA. ESTO SUCEDE SI Y SOLO SI:

$$(\mu P)_y=(\mu Q)_x$$

LLAMO $z=x+y^2$. LUEGO:

$$\mu' z_y P+\mu P_y=\mu' z_x Q+\mu Q_x$$

$$\mu'\,2y(y^2-3x)+\mu\,2y=\mu'.1.(6y^3-2xy)+\mu(-2y)$$

$$\mu'(2y^3-6xy)-\mu'(6y^3-2xy)=-2y\mu-2y\mu$$

$$\mu'(-4y^3-4xy)=-4y\mu$$

$$\mu'(-4y)\underbrace{(y^2+x)}_{z} = -4y\,\mu$$

$$\mu' z = \mu \Longrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{z} \xrightarrow{\text{integrando}}$$

$$\ln|\mu| = \ln|z| + C \quad , C \in \mathbb{R}.$$

$$|\mu| = |z| e^{C} \Longrightarrow \mu = K\, z \quad , K \in \mathbb{R}.$$

(CASO $K=0$ NO INTERESA).

$\xRightarrow{\text{puedo tomar}}$ $\boxed{\mu(x,y) = x + y^2}$

Verificamos:

$$(\mu P)_y = \left[(x+y^2)(y^2-3x)\right]_y = \left[xy^2 - 3x^2 + y^4 - 3xy^2\right]_y =$$

$$= 2xy + 4y^3 - 6xy = 4y^3 - 4xy.$$

$$(\mu Q)_x = \left[(x+y^2)(6y^3-2xy)\right]_x = \left[6y^3x - 2x^2y + 6y^5 - 2xy^3\right]_x =$$

$$= 6y^3 - 4xy - 2y^3 = 4y^3 - 4xy.$$

$$\Longrightarrow (\mu P)_y = (\mu Q)_x \quad \checkmark$$

Busco $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, \nabla f = (\mu P, \mu Q)$

$$f(x\,y) = \int \mu P\, dx = \int -3x^2 + y^4 - 2xy^2\, dx =$$

$$= -x^3 + y^4 x - x^2 y^2 + g(y).$$

ADEMÁS

$$f_y(x\,y) = 4y^3 x - 2x^2 y + g'(y) = \mu Q =$$

$$= 4y^3x - 2x^2y + 6y^5$$

$$\Longrightarrow \quad g'(y) = 6y^5 \Longrightarrow g(y) = y^6 + cte.$$

FINALMENTE:

$$f(x,y) = -x^3 + y^4x - x^2y^2 + y^6 + cte.$$

LAS SOLUCIONES A LA ECUACIÓN SON LAS CURVAS DE NIVEL DE f:

$$\underline{-x^3 + y^4x - x^2y^2 + y^6 = k \quad , k \in \mathbb{R}.}$$

2) CONSIDEREMOS LA EC. DIF.

$$x'' - kx' + (k-1)x = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) PARA c/ $k \in \mathbb{R}$, HALLAR TODAS LAS SOL. REALES

b). DETERMINAR LOS VALORES DE $k \in \mathbb{R}$ PARA LOS CUALES EXISTEN SOLUCIONES $X(t)$ QUE VERIFICAN $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$, Y DESCRIBIR DICHAS SOLUCIONES

a) CONSIDERO EL POLINOMIO ASOCIADO Y BUSCO SUS RAÍCES:

$$\lambda^2 - k\lambda + (k-1) = 0$$

$$\lambda = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$\lambda = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4k + 4}}{2} = \frac{k \pm \sqrt{(k-2)^2}}{2} =$$

$$= \frac{k \pm |k-2|}{2}.$$

CASOS $\boxed{k>2} \longrightarrow |k-2| = k-2$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{k \pm (k-2)}{2}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2k-2}{2} = k-1} \qquad \boxed{\lambda = 1}.$$

LA MATRIZ ASOCIADA AL PROBLEMA ES $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-k & k \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda = k-1}$ $\ker \begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ k-1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boxed{\lambda = 1}$ $\ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ k-1 & 1-k \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\mathbb{X}(t) = C_1 e^{(k-1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = C_1 e^{(k-1)t} + C_2 e^t. \; //$$

$\boxed{k<2} \longrightarrow |k-2| = 2-k$

$$\lambda = \frac{k \pm (2-k)}{2} \to \boxed{\lambda = 1}, \; \boxed{\lambda = k-1}$$

$\underbrace{\text{ÍDEM CASO } k>2}$

$\boxed{k=2}$ $\boxed{\lambda = \frac{2}{2} = 1}$. $\ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$$\Longrightarrow \mathbb{X}_1(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}_2(t) = c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \right), \text{ con}$$

$$\xi \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomo $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow \mathbb{X}_2(t) = c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathbb{X}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^t (t+1). \quad //$$

b) CASO $k>2$ $\quad x(t) = C_1 e^{(k-1)t} + C_2 e^t$

$(k-1>0) \quad (1>0)$

LA ÚNICA FORMA DE QUE $x \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ES QUE $C_1 = C_2 = 0$, i.e $x \equiv 0$.

CASO $k=2$ $\quad x(t) = C_1 e^t + C_2 e^t (t+1)$

ÍD. ANTERIOR $C_1 = C_2 = 0$; $x \equiv 0$.

CASO $k<2$ $\longrightarrow$ $k>1$ ÍD. CASO $k>2$.

$\longrightarrow$ $k<1$ AHORA $k-1<0$, POR LO QUE C_1 PUEDE SER CUALQUIER REAL; C_2 DEBE SER 0. $\quad x(t) = C_1 e^{(k-1)t}$

$\longrightarrow$ $k=1$ $\quad x(t) = C_1 + C_2 e^t$.

$\Longrightarrow$ DEBEN SER $C_1 = C_2 = 0$; $x \equiv 0$.

3) LA EC. DIF. $xy'' - y' - (1+x)y = 0$, $x > 0$, ADMITE UNA SOLUCIÓN DE LA FORMA $y_1(x) = e^{mx}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) HALLAR m.

b) HALLAR LA SOLUCIÓN GRAL. DE LA ECUACIÓN.

a) DERIVO:

$$y_1'(x) = m e^{mx}$$

$$y_1''(x) = m^2 e^{mx}$$

ENTONCES, COMO y_1 ES SOLUCIÓN:

$$x m^2 e^{mx} - m e^{mx} - (1+x)\, e^{mx} = 0$$

$$x m^2 - m - (1+x) = 0$$

$$x(m^2 - 1) + (-1 - m) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -1 - m = 0 \\ m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{m = -1}$$

$$\boxed{y_1(x) = e^{-x}}$$

b) PROPONGO COMO SOLUCIÓN $y_2 = v(x)\, y_1$.

DERIVO: $y_2' = v' y_1 + v y_1'$

$$y_2' = v'' y_1 + v' y_1' + v' y_1' + v\, y_1''$$

$$= v'' y_1 + 2 v' y_1' + v y_1''.$$

DEBE SER:

$$x\left(v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''\right) - \left(v' y_1 + v y_1'\right) - (1+x)\, v y_1 = 0$$

$$x v'' y_1 + 2x v' y_1' + x v y_1'' - v' y_1 - v y_1' - v y_1 - x v y_1 = 0$$

$$x v'' e^{-x} - 2x v' e^{-x} + \underbrace{x v e^{-x}} - v' e^{-x} \underbrace{+ v e^{-x}} \underbrace{- v e^{-x}} \underbrace{- x v e^{-x}} = 0$$

$$x v'' e^{-x} - 2x v' e^{-x} - v' e^{-x} = 0$$

$$x v'' - 2x v' - v' = 0$$

$$x v'' + v' (-2x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} w = v' \\ w' = v'' \end{cases} \qquad x w' + w(-2x - 1) = 0$$

$$xw' = (2x+1)w$$

$$\frac{w'}{w} = 2 + \frac{1}{x} \Longrightarrow \text{integrando}$$

$$\ln|w| = 2x + \ln|x| + C. \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$|w| = e^{2x}|x|e^{C} \Longrightarrow$$

$$w = k\,x\,e^{2x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$v' = k\,x\,e^{2x} \Longrightarrow v = k\int x e^{2x} =$$

$$= k\left[x\frac{e^{2x}}{2} - \int 1\, 2e^{2x}\,dx\right] =$$

$$= k\left[\frac{xe^{2x}}{2} - 2\,\frac{e^{2x}}{2}\right] + C =$$

$$= k\left(\frac{xe^{2x}}{2} - e^{2x}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

TOMO $v(x) = \frac{xe^{2x}}{2} - e^{2x}$

$$\Longrightarrow y_2(x) = \frac{xe^{x}}{2} - e^{x} = e^{x}\left(\frac{x}{2} - 1\right).$$

SOL. GRAL:

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

4) CONSIDEREMOS LA ECUACIÓN

$$x'' - \cos(2x)\,x' = 6\operatorname{sen}(x).$$

a) TRANSFORMAR LA EC. EN UN SISTEMA DE ORDEN 1

b) HALLAR TODOS LOS PTOS. DE EQ., Y ANALIZAR SU ESTABILIDAD.

c) ESBOZAR EL DIAGRAMA DE FASE ALREDEDOR DEL ORIGEN.

a) LLAMO $w = x' \Longrightarrow w' = x'' = \cos(2x)\,x' + 6\,\mathrm{sen}(x) \longrightarrow \begin{cases} x' = w \\ w' = \cos(2x)\,\overbrace{x'}^{=w} + 6\,\mathrm{sen}(x). \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \cos(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6\,\mathrm{sen}(x) \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} x' = 0 \\ w' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \cos(2x)\,w + 6\,\mathrm{sen}(x) = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \mathrm{sen}(x) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} w = 0 \\ x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$DF(x, w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\,\mathrm{sen}(2x)\,w + 6\cos(x) & \cos(2x) \end{pmatrix}$$

$DF(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 6 & 1 \end{pmatrix}$, DE ACUERDO A LA PARIDAD DE k. (+ PAR, − IMPAR)

HOJA N°

FECHA

k PAR $DF(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) - 6 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ sii

$\boxed{\lambda = 3}$ $\boxed{\lambda = -2}$

k IMPAR $DF(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + 6 = \lambda^2 - \lambda + 6 = 0$ sii

$\boxed{\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{23}\, i}{2}}$

COMO $Re(\lambda) > 0$ EN LOS DOS CASOS, VALE EL TEO. DE LINEALIZACIÓN.

k PAR: $-2 < 0 < 3 \longrightarrow$ TODOS INESTABLES

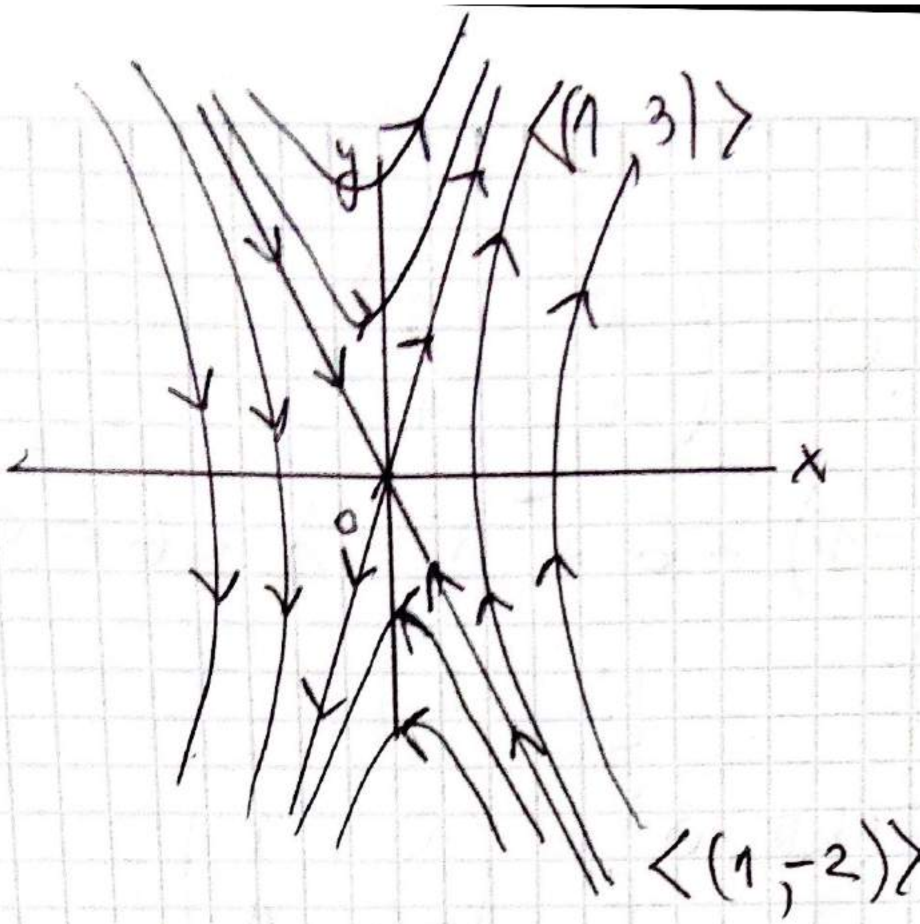
k IMPAR $Re(\lambda) = \frac{1}{2} > 0 \longrightarrow$ TODOS INESTABLES

c) k = 0 $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = -2$ $\lambda = 3$

$\ker \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \langle (1, -2) \rangle$ $(\lambda = -2)$

$\ker \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \langle (1, 3) \rangle$ $(\lambda = 3)$

ENTONCES:



CERCA DEL ORIGEN.