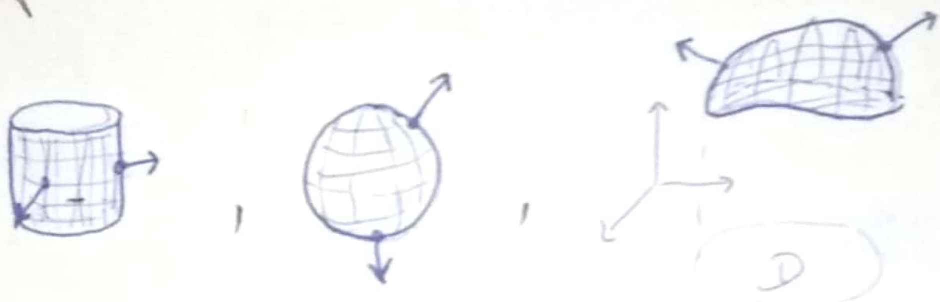
Orientaciones

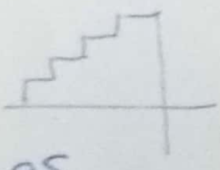
Recuerdo: Decimos que S es orientable si existe un campo continuo de vectores unitarios $N: S \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(p)$ es normal al plano tangente a S en p.

¿En qué se diferencia esto de la definición de superficie suave?

Ej.:  $Gr(f)$; $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

No ej.: cinta de Moebius

Vimos: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es C^1, $S = \{f = 0\}$ y $\nabla f(p) \neq \vec{0}$ para todo $p \in S \Rightarrow S$ es una superficie suave.

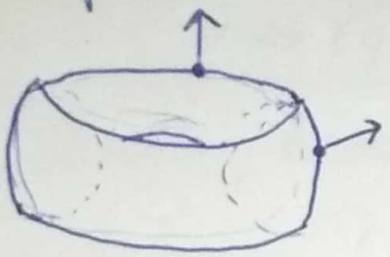


Ej.: Además, S es orientable.
En cada $p \in S$, la recta perpendicular $L(p)$ es

$L(p) = p + \langle \nabla f(p) \rangle$.

$$N(p) := \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \quad ✓$$

Ej.: Probar que el toro T es orientable. Dar una parametrización de T que lo oriente "hacia afuera".



[Ej. 2 b) $a=2$, $b=1$.

$$T=\{z^2 = 1-(2-\sqrt{x^2+y^2})^2\}$$

$\Phi:[0,2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \Phi(u,v)=((2+\cos u)\,\mathrm{sen}\, v,(2+\cos u)\cos v, \mathrm{sen}\, u)$

es una parametrización de T.]

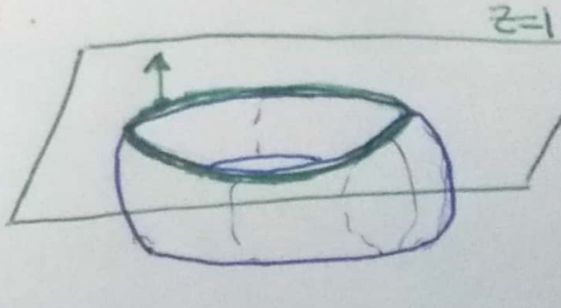
Si $f(x,y,z)=1-z^2-(2-\sqrt{x^2+y^2})^2$, entonces $T=\{f=0\}$.

- f es C^1 en T.
- $\nabla f = \left(\dfrac{2x(2-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{2y(2-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, -2z\right)$ no se anula en T.

$\Rightarrow T$ es orientable.

- $\Phi:[0,2\pi)^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva
- $\Phi_u \times \Phi_v(u,v) = \underbrace{(2+\cos u)}_{\neq 0}(\cos u\,\mathrm{sen}\, v, -\cos u \cos v, \mathrm{sen}\, u)$

$\neq \vec{0}$ para todo u, v.



Obs.: $T \subseteq \{z \leq 1\}$.

$\Phi(\frac{\pi}{2}, v_0) = (2\,\mathrm{sen}(v_0), 2\cos v_0, 1)$

$\Phi_u \times \Phi_v(\frac{\pi}{2}, v_0) = 2(0,0,1)$

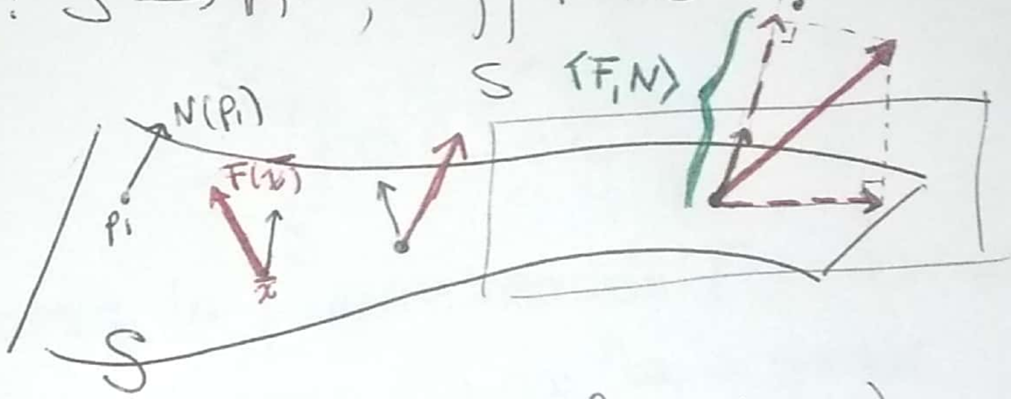
$\Rightarrow \Phi$ orienta a T hacia afuera.

Flujo:

Recuerdo: S superficie, $T: D \to S$ parametrización regular - salvo tal vez en un conjunto de medida cero -, entonces para cada $g: S \to \mathbb{R}$ cont.

$$\iint_S g\, dS = \iint_D g \circ T \cdot \|T_u \times T_v\| \, dA.$$

Si $F: S \to \mathbb{R}^3$, $\iint_S F \cdot dS = ?$



$N: S \to \mathbb{R}^3$ vector normal (unitario).

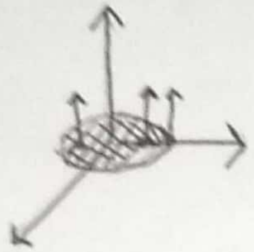
$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S \langle F, N\rangle \, dS$$

$(\langle F, N\rangle : S \to \mathbb{R})$.

Si $T: D \to S$ es regular y satisface $\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = N$ - salvo tal vez en un conjunto de medida cero - entonces

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S \langle F, N\rangle dS = \iint_D \left\langle F \circ T, \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \right\rangle \|T_u \times T_v\| \, dA$$

Ej.: $S = \{x^2+y^2 \leq 1 \,;\, z=0\}$ orientada "hacia arriba",
$F(x,y,z) = (x+y, e^y, z)$.



$N(x,y,z) = (0,0,1)$ es una normal para S (con la orient. correcta).

- Si $p=(x,y,z)\in S$, entonces $F(p) = (x+y, e^y, 0) \perp N$.

$$\Rightarrow \iint_S F \cdot dS = \iint_S \langle F, N\rangle dS = \iint_S \langle (x+y, e^y, 0), (0,0,1)\rangle dS$$

$$= \iint_S 0 \, dS = 0.$$

(Si usábamos la parametrización $T: [0,2\pi]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$ /
$T(\theta, r) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)$ nos iba a quedar

$$\iint_S F\cdot dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} 0 \, dr\, d\theta \;\Big).$$

Ej.: Misma S, orientada "hacia abajo",
$F(x,y,z) = (\mathrm{sen}(x), \cos(y), 1)$.

$N = (0,0,-1)$

$$\iint_S F\cdot dS = \iint_S \langle F, (0,0,-1)\rangle dS = -\iint_S 1 \, dS = -\text{Área}(S) = -\pi.$$

Ej.: Probar que la integral del campo $F(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$ a lo largo de $S_r = \{x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ (orientada hacia afuera) es independiente del radio.

- $N(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$ es una normal unit. en S_r.

$$\Rightarrow \iint_{S_r} F \cdot dS = \iint_{S_r} \left\langle \frac{1}{\underbrace{\|(x,y,z)\|^3}_{r^3}}(x,y,z), \frac{1}{r}(x,y,z) \right\rangle dS$$

$$= \iint_{S_r} \frac{r^2}{r^4}\, dS = \frac{1}{r^2} \underbrace{\iint_{S_r} 1\, dS}_{\text{Área}(S_r)} = \frac{1}{\cancel{r^2}} 4\pi \cancel{r^2}.$$