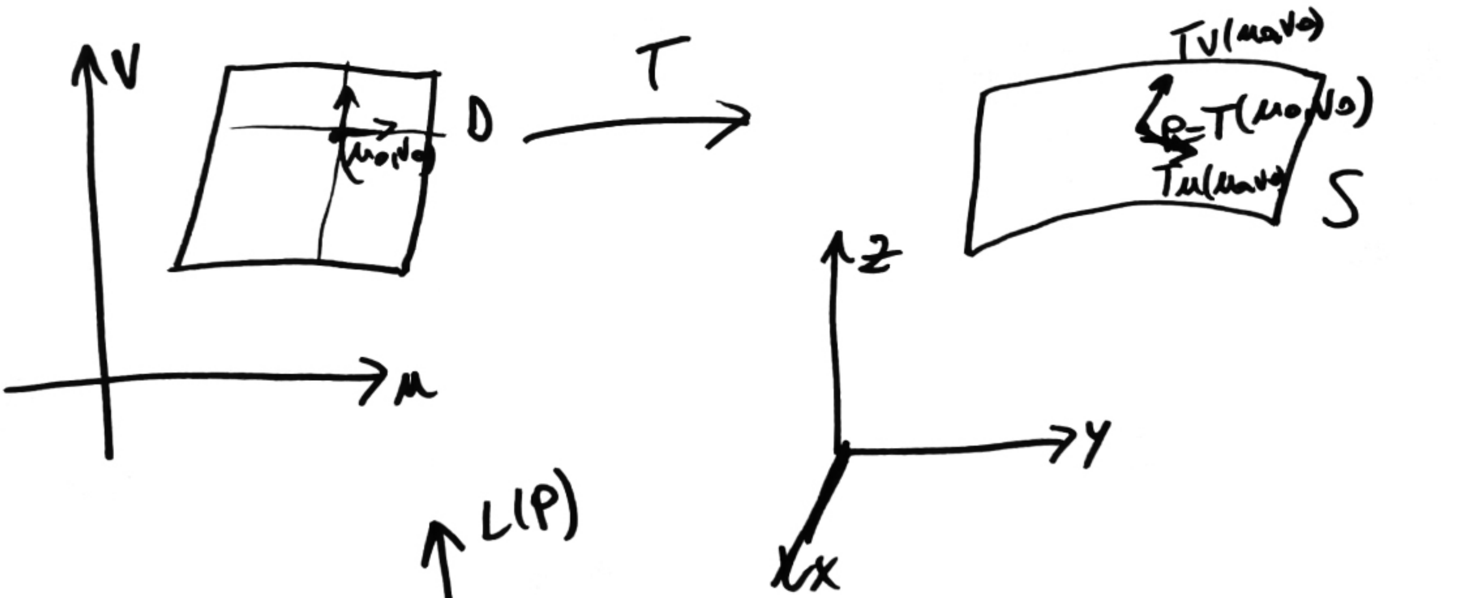
Práctica 2 (Superficies) (Análisis II - Análisis Mat 2 - Mate 3) I

. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una <u>superficie</u> si existe una función continua $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (D: dominio fundamental) tal que $S = \mathrm{Im}(T)$. En este caso decimos que T es una <u>parametrización</u> de S.

Decimos que S es <u>suave</u> si tiene <u>plano tangente</u> en todos los puntos y la recta $L(p)$ perpendicular al plano tangente en $P \in S$ varía continuamente con P.



$L(p)$ tiene dirección:

$$\vec{n}(u_0,v_0) = \frac{T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)}{\|T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)\|}$$

(también $-\vec{n}(u_0,v_0)$)

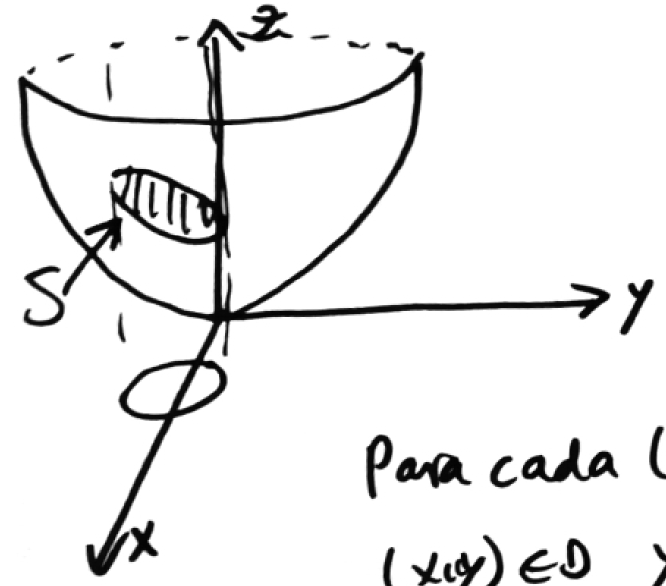
. T es regular si T es inyectiva, $T \in C^1$ y

$T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0) \neq (0,0,0)$.

($\rightarrow S$ suave)

1) Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z=0, (x-2)^2+y^2 \leq 1\}$

¿S es suave?



observar que si consideramos

$f: D = \{(x-2)^2+y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2+y^2$

Para cada $(x,y,z) \in S$ tenemos que

$(x,y) \in D$ y $f(x,y) = z$

$\Rightarrow S = Gr(f)$. Como $f \in C^1 \Rightarrow S$ es una superficie suave ✓

("a mano": Sea $T: D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$T(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$

ver que es regular ... (Ejercicio)

T iny ✓, $T \in C^1$ ✓

III

$T_x = (1, 0, 2x)$

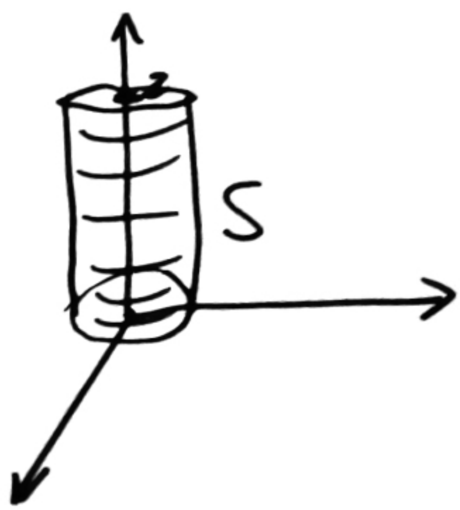
$T_y = (0, 1, 2y)$

$T_x \times T_y = (-2x, -2y, 1) \neq (0,0,0)$ ✓)

2) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 2\}$

cilindro

¿S es suave?



. A S lo podemos pensar como:

$$S = \{(x,y,z) \mid \overbrace{x^2+y^2-1}^{F(x,y,z)} = 0,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

Como F es C^1 y $\nabla F(x,y,z) = (-2x, 2y, 0) \neq (0,0,0)$

$\forall (x,y,z) \in S \Rightarrow$ S es una superficie suave ✓

. <u>Otra</u>: parametricemos S:

$T: [0, 2\pi] \times [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$T(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$

. $\operatorname{Im}(T) = S$ ✓

. $T \in C^1$ ✓

$\boxed{IV}$

· ¿Es inyectiva?

Si $T(\theta_1, z_1) = T(\theta_2, z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$ ✓

y $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ T es inyectiva en $[0, 2\pi) \times [0, 2]$ y

$T(0, z) = T(2\pi, z) \quad \forall\, 0 \leq z \leq 2$

$\Rightarrow$ T no es regular.

Veamos cómo justificar que S es suave.

¿$T_\theta \times T_z$? $T_\theta(\theta, z) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$

$T_z(\theta, z) = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow T_\theta \times T_z = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\|T_\theta \times T_z\| = 1$.

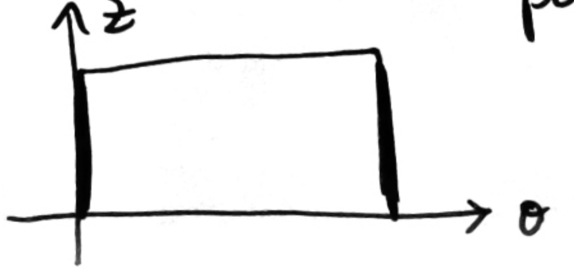
$\Rightarrow T_\theta \times T_z(\theta, z) \neq (0,0,0)$

$\forall\, \theta, z$ ✓

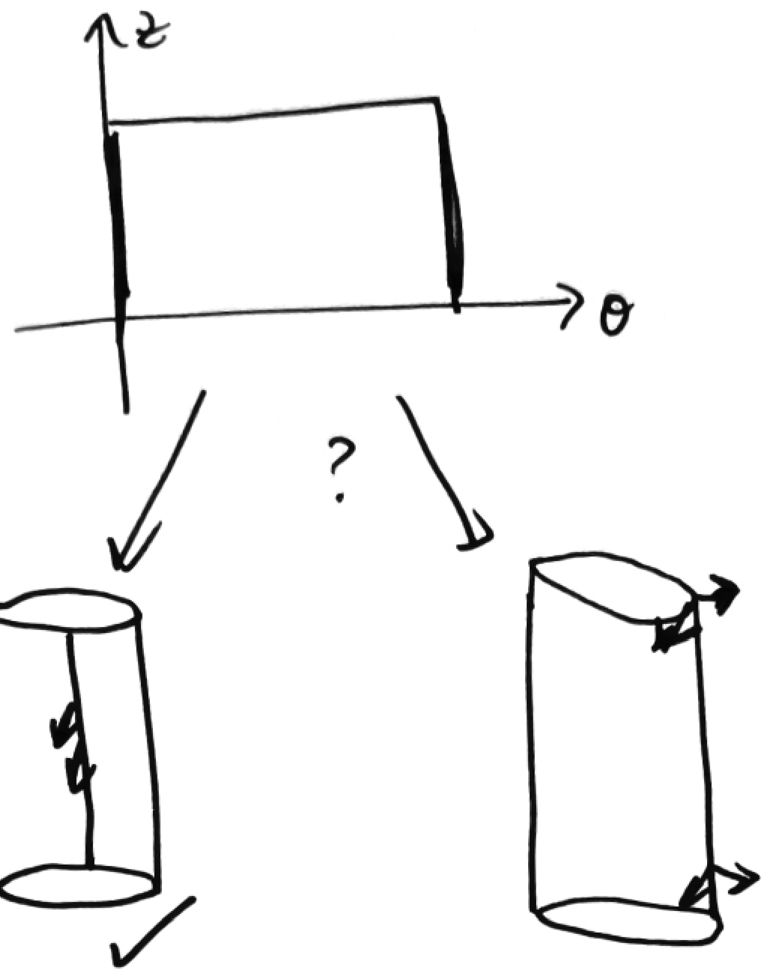
Obs: $T_\varepsilon : [0, 2\pi - \varepsilon] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ es regular

pero $T(0, z) = T(2\pi, z)$

$\forall z$



V



$T_\theta \times T_z(0,z) = T_\theta \times T_z(2\pi,z) = (1,0,0)$

$\Rightarrow$ Tenemos que S es <u>suave</u>

(si definimos $L(p)$ usando la parametrización T, queda continua)

3) Sea S la superficie parametrizada por la función

$$T : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$

$$T(a,b) = \big((2+\operatorname{sen}(b))\cos(a),\ (2+\operatorname{sen}(b))\operatorname{sen}(a),\ a+\cos(b) \big)$$

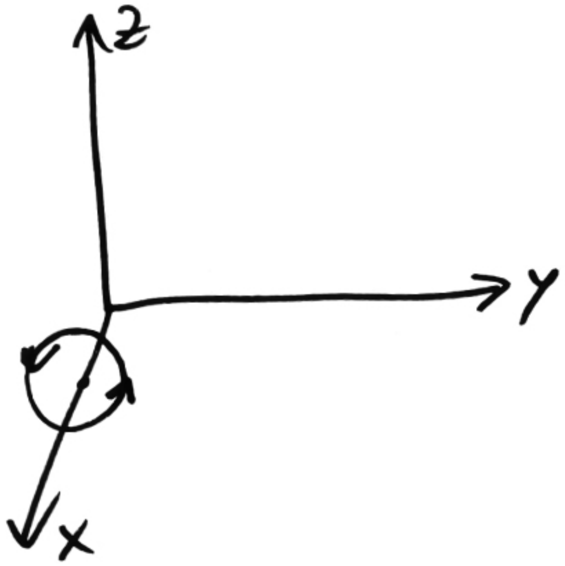
a) Decidir si S es una superficie suave

b) Dar una normal a S en el punto $P=(2,0,1)$.

¿Hacia dónde apunta?

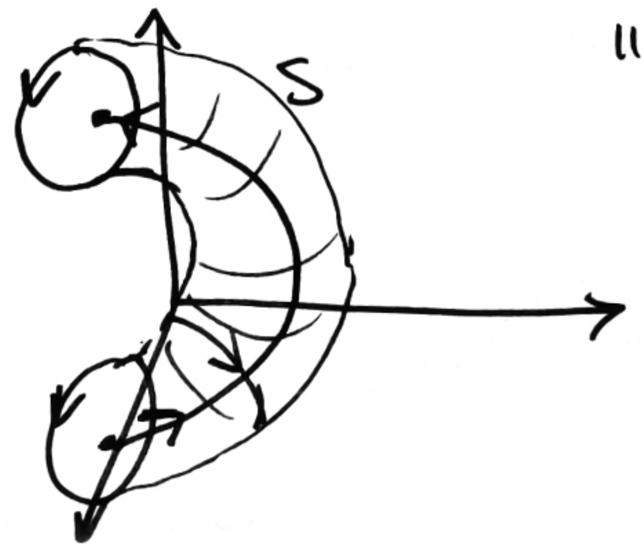
- Si fijamos $\underline{a=0}$

$\rightarrow T(0,b) = (2+\operatorname{sen}(b), 0, \cos(b))$



- Si fijamos $\underline{a=a_0}$,

$$T(a_0,b) = \overbrace{(2\cos(a_0), 2\operatorname{sen}(a_0), a_0)}^{C(a_0) \leftarrow \text{"resorte"}} + (\cos(a_0), \operatorname{sen}(a_0), 0)\cdot\operatorname{sen}(b) + (0,0,1)\cdot\cos(b)$$



"cilindro enrollado alrededor del eje z"

Veamos si T es regular:

- $T \in C^1$ ✓
- Inyectividad: supongamos que $T(a_1,b_1) = T(a_2,b_2)$

$$\begin{cases} (2+\operatorname{sen}(b_1))\cos(a_1) = (2+\operatorname{sen}(b_2)).\cos(a_2) & (1) \\ (2+\operatorname{sen}(b_1))\operatorname{sen}(a_1) = (2+\operatorname{sen}(b_2))\operatorname{sen}(a_2) & (2) \\ a_1+\cos(b_1) = a_2+\cos(b_2) & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1)^2+(2)^2 : \underbrace{(2+\operatorname{sen}(b_1))}_{\geqslant 1}{}^2 = \underbrace{(2+\operatorname{sen}(b_2))}_{\geqslant 1}{}^2$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(b_1) = \operatorname{sen}(b_2)$$

Volviendo a (1) y (2), $\begin{cases} \cos(a_1) = \cos(a_2) \\ \operatorname{sen}(a_1) = \operatorname{sen}(a_2) \end{cases}$

$$\Rightarrow a_2 = a_1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

En (3): $\cancel{a_1} + \cos(b_1) = \cancel{a_1} + 2k\pi + \cos(b_2)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{\cos(b_1) - \cos(b_2)}_{\in[-2,2]} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \underline{k=0} \text{ y } \boxed{a_1 = a_2}$$

$$\cdot \text{y } \begin{cases} \cos(b_1) = \cos(b_2) \\ \operatorname{sen}(b_1) = \operatorname{sen}(b_2) \end{cases}$$

Como hicimos en el ejemplo del cilindro, tenemos que T es inyectiva en $[0,2\pi]\times[0,2\pi)$ y

$$T(a,0)=T(a,2\pi)\ \forall\, 0\leq a\leq 2\pi$$

¿Cómo se pegan los bordes?

- $T_a \times T_b = ?$

$$T_a(a,b)=\left(-(2+\operatorname{sen}(b))\operatorname{sen}(a),\ (2+\operatorname{sen}(b))\cos(a),\ 1\right)$$

$$T_b(a,b)=\left(\cos(b)\cos(a),\ \cos(b)\operatorname{sen}(a),\ -\operatorname{sen}(b)\right)$$

$$T_a(a,b)\times T_b(a,b)=\Big(-(2+\operatorname{sen}(b))\cos(a)\operatorname{sen}(b)-\cos(b)\operatorname{sen}(a),$$
$$-\operatorname{sen}(b)(2+\operatorname{sen}(b))\operatorname{sen}(a)+\cos(b)\cos(a),$$
$$-(2+\operatorname{sen}(b))\operatorname{sen}^2(a)\cos(b)-(2+\operatorname{sen}(b))\cos(b)\cos^2(a)\Big)$$

$$=\Big((1),(2),\underbrace{-(2+\operatorname{sen}(b))\cos(b)\cdot 1}_{(3)}\Big)$$

Supongamos que $T_a\times T_b(a_0,b_0)=(0,0,0)$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} -\underbrace{(2+\operatorname{sen}(b_0))}_{>0}\cdot\cos(b_0)=0$$

$$\Rightarrow \cos(b_0)=0$$

$$\underset{b_0\in[0,2\pi)}{\Rightarrow} b_0=\pi/2 \text{ ó } b_0=\tfrac{3}{2}\pi$$

IX

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & -(2+\overbrace{\operatorname{sen}(b_0)}^{\pm 1}).\cos(a_0).\overbrace{\operatorname{sen}(b_0)}^{\pm 1} + 0 = 0 \\ (2) & -\underbrace{\operatorname{sen}(b_0)}_{\pm 1}.(2+\underbrace{\operatorname{sen}(b_0)}_{\pm 1}).\operatorname{sen}(a_0) + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(a_0)=0 \\ \operatorname{sen}(a_0)=0 \end{array}\right\} \underline{\text{Abs!}}$$

$\Rightarrow T_a \times T_b(a,b) \neq (0,0,0) \ \forall a,b.$

$T_a \times T_b(a,0) = T_a \times T_b(a,2\pi) = (-\operatorname{sen}(a), \cos(a), -2)$

$\Rightarrow$ las normales coinciden ✓

Luego S es suave ✓

b) $(2,0,1) = T(a,b)$

$T(0,0) = (2,0,1)$ (de antes ✓)

y $T_a \times T_b(0,0) = (0,1,\underbrace{-2}_{<0})$ es un vector normal a S en P.

apunta "hacia adentro".