ANÁLISIS II - ANÁLISIS MATEMÁTICO II - MATEMÁTICA 3

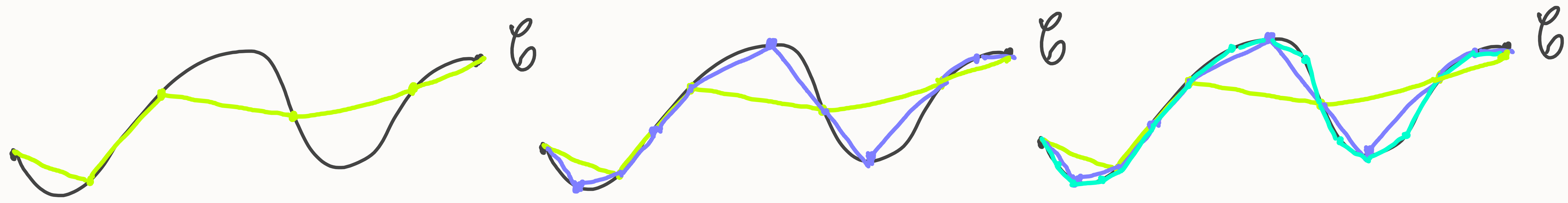
TEÓRICA 2

* Clase anterior:
- Definición de curvas
- parametrizaciones
- recta tangente
- suavidad.

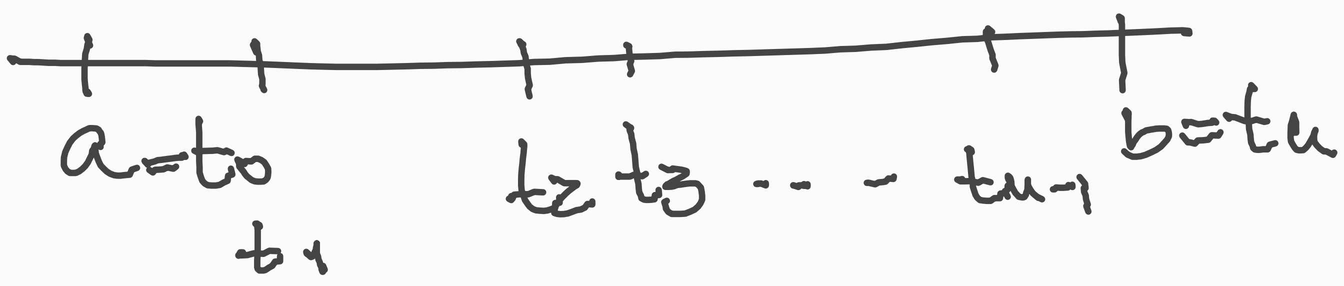
* Objetivos:
- Calcular longitudes de curvas.
- Integrar funciones escalares sobre curvas.

Longitud de curva

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^n$) una curva abierta y simple. Como sólo sabemos medir segmentos, la idea es aproximar $\mathcal{C}$ por poligonales:



Consideremos $\sigma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Tomemos $\Pi := a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición del $[a,b]$



Entonces Π induce una partición $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}$ en puntos $P_i = \sigma(t_i)$.

$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{P})}$ = longitud de la poligonal con puntos en $\mathcal{P}$

$$= \|p_1 - p_0\| + \|p_2 - p_1\| + \dots + \|p_n - p_{n-1}\|$$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \|p_{i+1} - p_i\|}$$

Observación: Si $\mathcal{P}'$ es una partición más fina que $\mathcal{P}$ (ie: los puntos de $\mathcal{P}$ son puntos de $\mathcal{P}'$), entonces
$\mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(\mathcal{P}')$.

Dem: Si tengo $s_1, \dots, s_r$ puntos de $\mathcal{P}'$ entre dos puntos consecutivos p_1 y p_2 de $\mathcal{P}$ $\Rightarrow$

$$\|p_2 - p_1\| \leq \|p_2 - s_r\| + \|s_r - s_{r-1}\| + \dots + \|s_1 - p_1\| \quad \boxtimes$$

Definición: Decimos que una curva $\mathcal{C}$ es rectificable si $\exists M > 0 \,/\, \mathcal{L}(\mathcal{P}) \leq M \quad \forall \mathcal{P}$ partición de $\mathcal{C}$.
En tal caso, existe el supremo del conjunto

$$\{\mathcal{L}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } \mathcal{C}\}$$

y definimos $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \sup\{\mathcal{L}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partición de } \mathcal{C}\}$

Pregunta: ¿cómo calculamos $\text{long}(\mathcal{C})$ en la práctica?

Idea: Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$.
Si $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ partición del $[a,b]$ y $\mathcal{P}$ es la partición inducida por Π en $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|p_{i+1} - p_i\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\|.$$

Como

$$\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i) \sim \sigma'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{P}) \sim \sum_{i=0}^{n-1} \|\sigma'(t_i)\| (t_{i+1} - t_i)$$

suma de Riemann de la función $\|\sigma'(t)\|$ asociada a la partición Π.

Proposición:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt$$

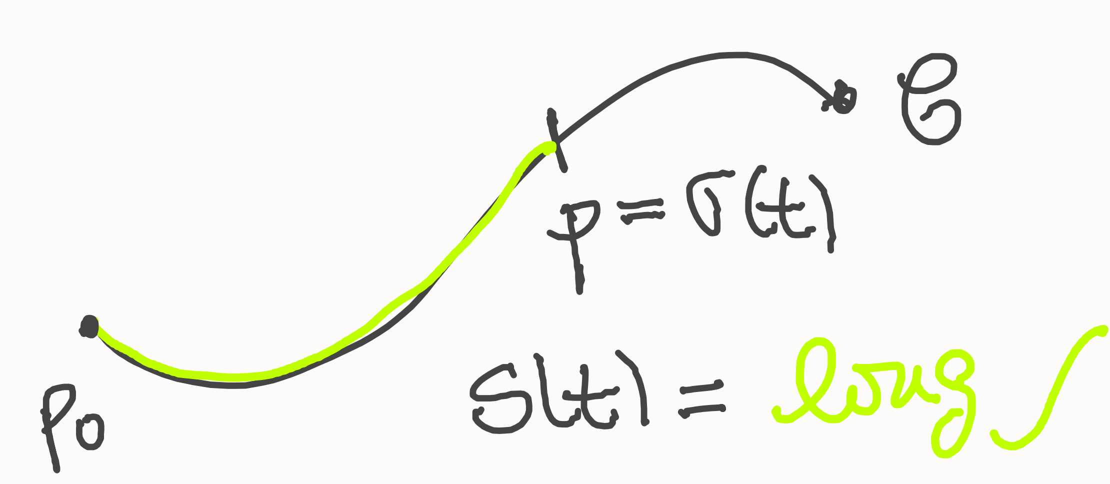
Dem: en el apunte (Cap. 1 sección 5)

Parámetro de longitud de arco

Sea $\mathcal{C}$ una curva simple, abierta y suave, y sea $\sigma: [a,b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Para cada $t \in [a,b]$

$$s(t) := \int_a^t \|\sigma'(r)\|\, dr$$

mide la longitud entre $p_0 = \sigma(a)$ ∧ $P = \sigma(t)$



$\Rightarrow$ $s: [a,b] \to [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$ se llama función longitud de arco.

Tiene las siguientes propiedades:

$\boxed{1}$ Por el Teorema fundamental del cálculo,

$s'(t) = \|\sigma'(t)\|$. Luego s es $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$.

$\boxed{2}$ Como $\sigma'(t) \neq (0,0,0)$ en $[a,b]$, $s'(t) \neq (0)$ $\forall t \in [a,b]$.

$\boxed{3}$ s es una función estrictamente creciente y $\therefore$ es biyectiva.

Consecuencia:

$s(t)$ admite una inversa $t(s)$, $t : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \to [a,b]$ de clase $\mathcal{C}^1$ en $[0, \mathcal{L}(\mathcal{C})]$. Además,

$$t'(s) = \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}.$$

Con todo esto, podemos considerar la reparametrización de $\mathcal{C}$ dada por:

$$\boxed{\tilde{\sigma}(s) := \sigma(t(s))} \qquad \tilde{\sigma} : [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}.$$

· Decimos que $\tilde{\sigma}$ es la parametrización por longitud de arco.

Notemos que, como

$$\tilde{\sigma}'(s) = \sigma'(t(s)) . t'(s) = \sigma'(t(s)) . \frac{1}{\|\sigma'(t(s))\|}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{\sigma}'(s)\| = 1 \quad \forall s \in [0, \mathcal{L}(\mathcal{C})].$$

Integral de longitud de arco

Supongamos que tenemos un alambre representado por una curva $\mathcal{C}$ suave. Si el alambre está formado por un material inhomogéneo, la densidad de masa será una función $f(x,y,z)$ definida sobre $\mathcal{C}$ que suponemos continua.

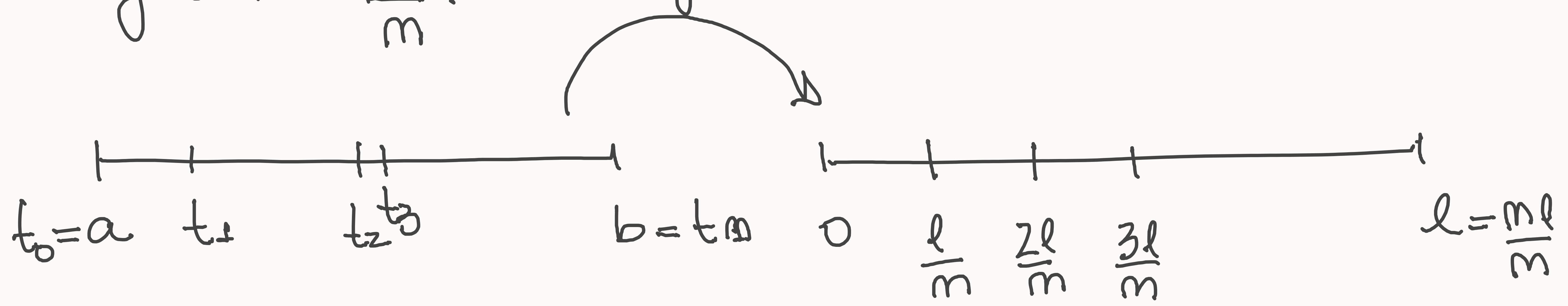
Pregunta: ¿cómo calculamos la masa total del alambre?

- Si ρ fuera constante (caso homogéneo) $\Rightarrow$ masa $= \rho \cdot \text{long}(\mathcal{C}) = \rho \cdot \mathcal{L}(\mathcal{C})$.

- Si no, pensamos lo siguiente: sea $l = \mathcal{L}(\mathcal{C})$ y $m \in \mathbb{N}$.

Partimos el alambre (o sea $\mathcal{C}$) en m pedacitos de longitud l/m. Para esto, consideramos $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathcal{C}$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$ y $g(t)$ la función longitud de arco.

Para cada $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ $\exists\, t_k \in [a,b] /$ $g(t_k) = \frac{kl}{m}$.



Como g es estrictamente creciente,

$\Pi: t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$ es una partición del $[a b]$. Si llamamos $p_k = \sigma(t_k) \Rightarrow$ tenemos $p_0, p_1, \dots, p_m$ puntos en $\mathcal{C}$ / la longitud de $\mathcal{C}$ entre p_k y p_{k+1} es

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_{\frac{kl}{m}}^{\frac{(k+1)l}{m}} \|\sigma'(g^{-1}(s))\| \cdot \frac{1}{\|\sigma'(g^{-1}(s))\|}\, ds = \frac{l}{m}.$$

$t = g^{-1}(s)$

$dt = \frac{1}{g'(g^{-1}(s))} ds$

$\frac{1}{g'(g^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\sigma'(g^{-1}(s))\|}$

Como ρ es continua, la aproximamos por el valor que toma en el punto $p_k^* = \sigma(t_k^*)$ con $t_k^* \in [t_k, t_{k+1}] \Rightarrow$ la masa del alambre entre p_k y p_{k+1} es aproximadamente

$$\rho(p_k^*) \cdot \ell/m$$

$$\Rightarrow \text{masa total } M = \sum_{k=0}^{m-1} \rho(p_k^*) \ell/m$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \rho(p_k^*) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int_a^b \rho(\overset{\sigma(t)}{t}) \|\sigma'(t)\| dt = \sum_{k=0}^{m-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

para ciertos $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

__Dem__: $M_k = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \rho(\sigma(t))$ y $m_k = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \rho(\sigma(t))$

$$\Rightarrow m_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \leq M_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

y entonces

$$\frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\| dt} \in [m_k, M_k] = \operatorname{Im}(\rho(\sigma(t))) \text{ en } [t_k, t_{k+1}].$$

Como $f \wedge \sigma$ son cont. $\exists\ \tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$ /

$$\rho(\sigma(\tilde{t}_k)) = \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \rho(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\|\,dt}.$$

Entonces tenemos:

$$M \sim \sum_{k=0}^{m-1} \rho(\sigma(t_k^*)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\|\,dt$$

y

$$\int_a^b \rho(\overset{\sigma(t)}{t})\|\sigma'(t)\|\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} \rho(\sigma(\tilde{t}_k)) \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\sigma'(t)\|\,dt.$$

Con esto se tiene que la masa de $\mathcal{C}$ es

$$\int_a^b \rho(\overset{\sigma(t)}{t})\|\sigma'(t)\|\,dt.$$

Definición: Sea $\mathcal{C}$ una curva simple abierta y suave y $\sigma : [a,b] \to \mathcal{C}$ una param. regular de $\mathcal{C}$. Si f es una función continua en $\mathcal{C}$ llamamos integral de f en $\mathcal{C}$ respecto a la long. de arco a

$$\int_a^b f(\underset{\sigma(t)}{t})\|\sigma'(t)\|\,dt.$$

$$\int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt$$

Observación importante:

Si $\tilde{\sigma}: [c,d] \longrightarrow \mathcal{C}$ es otra parametrización regular de $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(\overset{\sigma(t)}{t}) \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_c^d f(\overset{\tilde{\sigma}(s)}{s}) \|\tilde{\sigma}'(s)\| \, ds}$$

Esto da lugar a la notación

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds$$

para la integral de f a lo largo de $\mathcal{C}$.

__Dem:__ $\exists\, h: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ biyectiva, $\mathcal{C}^1$ / $h' \neq 0$ y $\tilde{\sigma} = \sigma \circ h^{-1}$. (Ver video complementario 1).

$$\Rightarrow \int_c^d f(\tilde{\sigma}(s)) \|\tilde{\sigma}'(s)\| \, ds = \int_c^d f(\sigma(h^{-1}(s))) \|\sigma'(h^{-1}(s))\| \cdot |(h^{-1})'(s)| \, ds$$

$$= \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \|\sigma'(t)\| \, dt. \quad \boxtimes$$

$t = h^{-1}(s)$

$dt = (h^{-1})'(s) \, ds$

sup $h^{-1}(c) = a$
$\quad h^{-1}(d) = b$ $\Rightarrow (h^{-1})' > 0$

$\hookrightarrow$ h resulta estrictamente creciente y $\therefore$ h^{-1} también.