1

Sistemas lineales de ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Problema: Encontrar **TODOS** los pares $(x_1(t), x_2(t))$ tal que

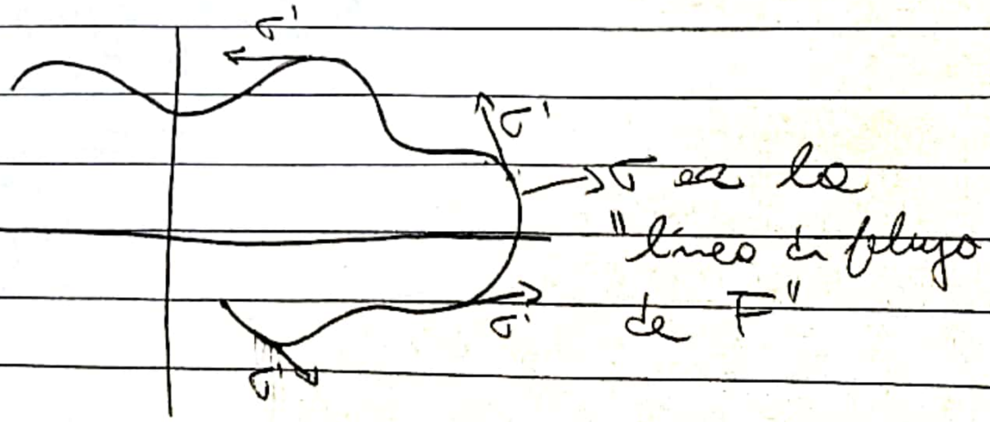
$$\begin{cases} x_1' = a x_1 + b x_2 \\ x_2' = c x_1 + d x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{X'(t)}$$

Interpretación geométrica

Sea $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo tal que $F(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
El problema a resolver es el siguiente:

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t)), \quad \text{con } \sigma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

O sea, pensamos las soluciones a mi sistema de ecuaciones diferenciales como curvas en $\mathbb{R}^2$.



Obs Las soluciones dependen de autovectores y autovalores de A. Como $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, los autovalores son raíces de un polinomio de grado 2. El polinomio es el dado por

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda Id)$$

~~[illegible]~~

¿Por qué los autovalores y autovectores de A tienen que ver con las soluciones de $X'=AX$?

Supongamos que $X(t)=v.e^{\lambda t}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}^{n}$, $v\neq 0$ es solución.

$$X'=v.\lambda e^{\lambda t} \qquad AX=(Av)e^{\lambda t}.$$

Como queremos que $AX=X'$, obtenemos que $Av=\lambda v$

↳ v es autovector de A con autovalor λ.

Si existe $\{v_1,\dots,v_n\}$ ~~base~~ autovectores que formen una base de $\mathbb{R}^n$, se tiene una base de soluciones del sistema $X'=AX$ dado por $X_i(t)=v_i e^{\lambda_i t}$

↳ la solución general es $X(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v_i$ con $c_i\in\mathbb{R}$.

Veamos diversos casos que podemos encontrar al resolver problemas y cómo encararlos.

Escaneado con CamScanner

Caso 1: Todos los autovalores de A son reales y distintos.

Ejemplo: $X' = AX$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1ER PASO: Autovalores de A.

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -3 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-5-\lambda)+12 = -15+2\lambda+\lambda^2+12$$
$$= \lambda^2+2\lambda-3$$
$$= (\lambda-1)(\lambda+3)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -3$$

2do PASO: Autovectores:

Para $\lambda_1 = 1$: $A - 1.Id = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Ker(A-1.Id) = \langle (2,-1) \rangle$$
$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -3$: $A + 3Id = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Ker(A+3Id) = \langle (2,-3) \rangle$$
$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tengo 2 soluciones: $X_1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$X_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Sol general: $X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Escaneado con CamScanner

4

Veamos ahora cómo varían las soluciones en base a las condiciones iniciales que les damos.

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = p \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Obs 1: Si ~~es~~ $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1$, ¿quién es $X(t)$?

$$v_1 = X(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 0$$

$$\Rightarrow X(t) = e^t \cdot v_1 \quad y \quad \lim_{x \to -\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obs 2. Si $X(0) = -v_1 \Rightarrow X(t) = -e^t v_1$

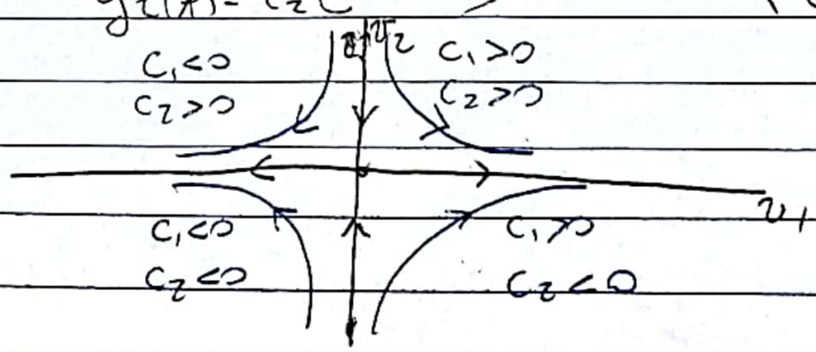
Obs 3: Si $X(0) = v_2 \Rightarrow X(t) = e^{-3t} \cdot v_2$

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obs 4: ¿Qué pasa si $X(0) = p$ no cae en las rectas de los autovectores?

$$X(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{-3t} v_2 = y_1(t) v_1 + y_2(t) v_2$$

con $\left.\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^t \\ y_2(t) &= c_2 e^{-3t} \end{aligned}\right\} \; y_2 = c_2 \left(\dfrac{y_1}{c_1}\right)^{-3}$



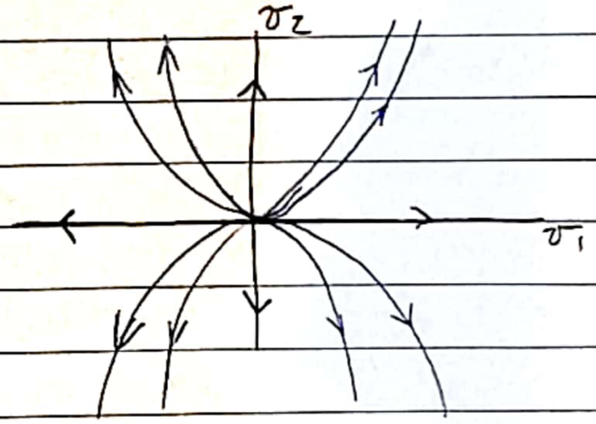
Otro ejemplo $X' = AX$, $A = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (15-\lambda)(20-\lambda) - 6$$
$$= (\lambda - 14)(\lambda - 21)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 14 \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = 21 \longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X(t) = c_1 e^{14t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{21t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$$= y_1(t) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_2 = \left(\frac{y_1}{c_1} \right)^{3/2}$$



Caso 2: Las ~~raíces~~ autovalores de A están en $\mathbb{C}$ con componente imaginaria no nula

Ejemplo: $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X.$

Paso 1: Autovalores

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

6

Paso 2 Autovectores

$\lambda_1 = 1+i$: $A - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

$Ker(A - \lambda_1 Id) = \langle (i \;\; 1) \rangle$

$\lambda_2 = 1-i$: $A - \lambda_2 Id = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

$Ker(A - \lambda_2 Id) = \langle (-i \;\; 1) \rangle$

Una solución es $X(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{(1+i)t} \binom{i}{1}$

↳ ~~Vaya~~, la solución está en $\mathbb{C}^2$!

¡Veamos cómo podemos extraer una solución en $\mathbb{R}^2$.

$$X(t) = e^{(1+i)t} \binom{i}{1} = e^{t} \cdot e^{it} \binom{i}{1}$$

$$= e^{t} (\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) \binom{i}{1}$$

$$= e^{t} \begin{pmatrix} i\cos(t) - \mathrm{sen}\, t \\ i\,\mathrm{sen}(t) + \cos(t) \end{pmatrix} = \underbrace{e^{t} \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}_{} + i \underbrace{e^{t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}}_{}$$

$$= X_R(t) + i\, X_I(t)$$

$\Rightarrow \{X_R(t), X_I(t)\}$ es base de soluciones en $\mathbb{R}^2$.

Solución general: $X(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\, t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}$

Caso 3: Autovalor real doble, pero un sólo autovector
↳ no tenemos base de autovectores

Ej: $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X$

1) Autovalores: $\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \lambda = 2$

2) Autovectores: $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,-1) \rangle$

↳ Tengo una sola solución: $X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

¿Cómo resolvemos?

Siempre hay otra solución de la forma

$X_2(t) = e^{2t}(tv + w)$ con $v =$ autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$w =$ solución de $(A - \lambda I)w = v$

Encontremos w: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego

$$X(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (c_1 + tc_2)e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

8

Sistema no homogéneo

$$X'(t) = A\,X(t) + B(t)$$

Método de variación de constantes:

si $\{X_1(t), X_2(t)\}$ es base de soluciones de $X' = AX$

⇒ buscamos solución particular de la forma

$$X_p(t) = C_1(t)\,X_1(t) + C_2(t)\,X_2(t)$$

La condición que deben satisfacer C_1 y C_2 es:

$$\left(X_1 \;\middle|\; X_2 \right) \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

Ej. $\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 + t \end{cases} \Rightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$

1) Buscamos base de soluciones del problema homogéneo

- $\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1) \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$

- v_1: $\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,-2) \rangle \Rightarrow X_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

v_2: $\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \langle (1,-1) \rangle \Rightarrow X_2(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Escaneado con CamScanner

9

Busco $X_p(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + C_2(t)\, e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{t} & 2 \\ -2e^{2t} & -e^{t} & t \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{t} & 2 \\ 0 & e^{t} & t+4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C_2' = (t+4)\, e^{-t}$$
$$\Rightarrow C_2 = \int t e^{-t} dt + 4\int e^{-t} dt$$
$$= -te^{-t} + \int e^{-t} dt - 4e^{-t}$$
$$= -te^{-t} - e^{-t} - 4e^{-t} = -e^{-t}(t+5)$$

$$\Rightarrow e^{2t} \cdot C_1' + e^{t}(t+4)\, e^{-t} = 2$$
$$\Rightarrow e^{2t} \cdot C_1' = -2 - t$$
$$\Rightarrow C_1' = -(t+2)\, e^{-2t}$$

$$\Rightarrow C_1 = -\int (t+2)\, e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{4}(2t+5)$$

Luego, $X_p = \frac{e^{-2t}}{4}(2t+5) \cdot e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - e^{-t}(t+5)\, e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$= \frac{2t+5}{4}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - (t+5)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2t-15\\10\end{pmatrix}$$

Solución. $X(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2t-15\\10\end{pmatrix}$

Escaneado con CamScanner