ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES DE ORDEN n HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

A continuación vamos a estudiar cómo determinar el conjunto solución de EDOs lineales de orden n homogeneas con coeficientes constantes, es decir, de ecuaciones de la forma

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \qquad (*)$$

para $t \in \mathbb{R}$, donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (los coeficientes no dependen de t). De acuerdo con la teoría que ya vimos, sabemos que $(*)$ admite soluciones definidas en todo $\mathbb{R}$ y que el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ de $(*)$ es un espacio vectorial de dimensión n. Bastará entonces determinar un conjunto de n soluciones li de $(*)$.

Ya hemos visto que x es solución de $(*)$ si y sólo si $y = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ es solución del sistema

$$\begin{cases} y_0'(t) = y_1(t) \\ y_1'(t) = y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) = -a_{n-1}y_{n-1}(t) - \dots - a_1 y_1(t) - a_0 y_0(t) \end{cases} \qquad (**)$$

Dado que $(**)$ es un sistema lineal de primer orden homogeneo con coeficientes constantes, en algunos casos, sabemos resolverlo. En tales casos, por lo tanto, quedará resuelta $(*)$.

La estrategia que hemos visto para determinar una base de soluciones de

(**) requiere conocer los autovalores de la matriz de coeficientes de (**).

Esta matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son las raíces del polinomio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Si $n=2$ entonces (*) queda

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \qquad (***)$$

y la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(a_1 + \lambda) + a_0$$

Es decir,

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

Notar que este polinomio se corresponde con (***) reemplazando $x(t)$, $x'(t)$ y $x''(t)$ por $\lambda^0 = 1$, $\lambda^1 = \lambda$ y λ^2 respectivamente; es decir, reemplazando la derivación de x por la correspondiente potencia de λ.

Esta particularidad entre la EDO y el polinomio característico de la matriz de coeficientes del sistema asociado no es exclusiva del caso $n=2$ sino que se cumple en general: El polinomio característico de la matriz de coeficientes del sistema asociado a (*) es

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

(no lo vamos a demostrar aquí). Este polinomio se denomina "polinomio característico de la EDO (*)".

Si, por ejemplo, este polinomio tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sabemos que las funciones $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definidas por $x_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ donde v_i es un autovector asociado a λ_i, $i = 1, \ldots, n$, forman una base de soluciones del sistema asociado a (*). Luego, como la solución general x de (*) es la primera componente de la solución general $y = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ de

(**), vemos que $x(t)$ es de la forma

$$x(t) = c_1 v_{11} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n v_{n1} e^{\lambda_n t}$$

para $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, donde v_{j1} es la primer componente de v_j para $j=1,\dots,n$. Poniendo $\alpha_j = c_j v_{j1}$, $j=1,\dots,n$, la solución general x de (*) queda dada por

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t}$$

para $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Notar que las funciones $z_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $z_i(t) = e^{\lambda_i t}$, $i = 1, \dots, n$, forman una base de soluciones para (*).

Otra situación donde es posible determinar con facilidad la solución general de $(*)$ es aquella en la cual el polinomio característico $p(\lambda)$ tiene n raíces distintas pero no todas reales. En este caso, las funciones $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por $x_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ donde v_i es un autovector asociado a λ_i, $i = 1, \dots, n$, forman una base de soluciones a valores complejos del sistema asociado a $(*)$. Como $p(\lambda)$ tiene coeficientes reales, sus raíces complejas aparecen como pares de complejos conjugados. Si para cada par de raíces conjugadas $\lambda_i = a+bi$ y $\lambda_j = a-bi$ reemplazamos x_i por $\mathrm{Re}(x_i)$ y x_j por $\mathrm{Im}(x_i)$, obtenemos una base de soluciones a valores reales (no lo vamos a demostrar aquí).

A partir de esta base se ve, en forma análoga a lo que hicimos en el caso que $p(\lambda)$ tiene n raíces reales distintas, que la solución general x de $(*)$ está dada por

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \alpha_k e^{\lambda_k t}$$
$$+ \beta_1 e^{a_1 t} \cos(b_1 t) + \gamma_1 e^{a_1 t} \operatorname{sen}(b_1 t)$$
$$+ \dots$$
$$+ \beta_n e^{a_n t} \cos(b_n t) + \gamma_n e^{a_n t} \operatorname{sen}(b_n t)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ son todas las raíces reales de $p(\lambda)$ y $a_1 + b_1 i, \dots, a_n + b_n i \in \mathbb{C}$ son las raíces complejas (no reales) de $p(\lambda)$ que no son conjugadas entre sí. Notar que las funciones $z_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defini-

das por $z_i(t) = e^{\lambda_i t}$ para $i = 1, \dots, k$;
$z_i(t) = e^{a_i t} \cos(b_i t)$ para $i = 1, \dots, r$ y
$\tilde{z}_i(t) = e^{a_i t} \operatorname{sen}(b_i t)$ para $i = 1, \dots, r$,
forman una base de soluciones de (*).

El caso en el que el polinomio característico $p(\lambda)$ no tiene todas sus raíces distintas requiere un desarrollo especial que sólo presentaremos en detalle si $n = 2$.

La determinación de una base de soluciones de (*) si $n \geq 3$ (y su polinomio característico tiene raíces múltiples) se puede conseguir combinando las ideas de los casos en que $p(\lambda)$ tiene n raíces distintas y en que $p(\lambda)$ tiene una raíz doble y $n=2$.

A continuación estudiamos cómo determinar el conjunto solución de $(*)$ si $n=2$.

• **Conjunto solución de $x''(t)+a_1x'(t)+a_0x(t)=0,\ t\in\mathbb{R}$**

El polinomio característico de la ecuación $x''(t)+a_1x'(t)+a_0x(t)=0,\ t\in\mathbb{R}$, es

$$p(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_0$$

Las raices de $p(\lambda)$ pueden ser reales y distintas, complejas conjugadas o reales e iguales. A continuación estudiamos cada uno de estos casos.

•• **Raices reales distintas: $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\ \lambda_1\neq\lambda_2$**

En este caso sabemos que las funciones $x_1,x_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

forman una base de soluciones de (*).

Luego, la solución general $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (*) está dada por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

.. Raíces complejas conjugadas: $\lambda = a+bi$, $\bar{\lambda} = a-bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

En este caso sabemos que las funciones $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$x_1(t) = e^{at}\cos(bt) \quad \text{y} \quad x_2(t) = e^{at}\operatorname{sen}(bt)$$

forman una base de soluciones de (*).

Luego, la solución general $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (*) está dada por

$$x(t) = e^{at}\left(c_1 \cos(bt) + c_2 \operatorname{sen}(bt)\right)$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

.. Raíces reales iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

Motivados en el estudio que hicimos para determinar una base de soluciones para un sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes, consideramos las funciones $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$x_1(t) = e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad x_2(t) = te^{\lambda t}.$$

Es sencillo comprobar que tanto x_1 como x_2 son solución de la EDO (ejercicio). Además son li ya que

$$W(x_1,x_2)(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t}(1+\lambda t) \end{pmatrix} = e^{2\lambda t}$$

no se anula para, por ejemplo $t=0$ (más aún, en este caso $W(x_1, x_2)$ no se anula en ningún $t \in \mathbb{R}$). Por lo tanto, x_1 y x_2 forman una base de soluciones de (*). Luego, la solución general $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (*) está dada por

$$x(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.