Análisis II
Matemática 3
Análisis Matemático II

FCEyN, Universidad de Buenos Aires, Argentina

Clase teórica 3, 2do. cuatrimestre 2020

Integrales curvilíneas, trabajo

Consideramos el siguiente problema: dada una fuerza $\boldsymbol{F}$ que actúa sobre una partícula que se desplaza por una trayectoria $\sigma(t)$ (es decir, $\sigma(t)$ es la posición de la partícula en el instante t), ¿cuál es el trabajo que ejerce $\boldsymbol{F}$?

Si la partícula se mueve sobre una recta, la fuerza es constante, sólo tiene componente en la dirección de esa recta y actúa en el sentido del recorrido $\Rightarrow$

trabajo resultante = magnitud de la fuerza $\|\boldsymbol{F}\| \times$ distancia.

Si actúa en sentido contrario, el trabajo será $-$ la magnitud de la fuerza:

trabajo resultante $= -\|\boldsymbol{F}\| \times$ distancia recorrida.

Integrales curvilíneas, trabajo

Supongamos ahora que la partícula se mueve en línea recta y la fuerza es constante, pero actúa en otra dirección.

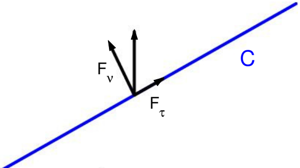
La fuerza $\boldsymbol{F}$ es suma de dos fuerzas:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\tau + \boldsymbol{F}_\nu,$$

donde $\boldsymbol{F}_\tau$ actúa en la dirección del movimiento de la partícula y $\boldsymbol{F}_\nu$ actúa en la dirección perpendicular. Así,

$$\boldsymbol{F}_\tau = \left(\boldsymbol{F} \cdot \tau\right) \tau \ \text{ y } \ \boldsymbol{F}_\nu \perp \tau,$$

donde τ es un vector unitario que determina la dirección de la recta donde se mueve la partícula y da el sentido de recorrido.



Integrales curvilíneas, trabajo

Por lo tanto, en este caso,

$$\text{trabajo ejercido por } \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F} \cdot \tau \times \text{distancia recorrida},$$

ya que la fuerza $\boldsymbol{F}_\nu$ que actúa perpendicularmente al movimiento no ejerce ningún trabajo ya que no modifica la trayectoria de la partícula.

Integrales curvilíneas, trabajo

Finalmente, supongamos que la partícula recorre una trayectoria de dirección variable –una curva suave $\mathcal{C}$– y la fuerza $\boldsymbol{F}$ es continua.

Si $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ es una parametrización regular y

$$\pi : t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$$

es una partición de $[a, b]$ "suficientemente fina", cuando la partícula varía de $\sigma(t_{i-1})$ a $\sigma(t_i)$ tenemos el desplazamiento

$$\Delta s_i = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) \sim \sigma'(t_i)\,(t_i - t_{i-1}).$$

Integrales curvilíneas, trabajo

Pensando que la fuerza $\boldsymbol{F}$ es constante en el arco de curva entre $\sigma(t_{i-1})$ y $\sigma(t_i)$, el trabajo total resulta aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s_i \sim \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i)\,(t_i - t_{i-1}).$$

Cuando n tiende a infinito, esta suma tiende a

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt.$$

Orientación, integral curvilínea

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva abierta, simple, suave. Si $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$, decimos que $\mathcal{C}$ está orientada por la parametrización σ.

Definición: Sea $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Definimos la integral curvilínea del campo $\boldsymbol{F}$ sobre la curva orientada $\mathcal{C}$ como

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} := \int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt.$$

Ejemplo

Si H es la hélice de parametrización

$$\sigma : [0, 4\pi] \to H, \quad \sigma(t) = (cos(t), sen(t), t),$$

y

$$\boldsymbol{F} : H \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, z),$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{4\pi} \boldsymbol{F}(cos(t), sen(t), t) \cdot \sigma'(t)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (cos(t), sen(t), t) \cdot (-sen(t), cos(t), 1)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} t\, dt = \frac{(4\pi)^2}{2}.\end{aligned}$$

Integrales curvilíneas, trabajo

Notación: Otra forma de escribir $\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}$ es

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\sigma P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

donde $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$. La idea de esta última notación es que

$$\begin{aligned}
&\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \big(P(x,y,z)(t)\,x'(t) + Q(x,y,z)(t)\,y'(t) + R(x,y,z)(t)\,z'(t)\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Integrales curvilíneas y parametrizaciones

Una cuestión importante es que la integral curvilínea depende de la parametrización. ¿De qué manera?

Recordamos que si $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ y $\gamma : [c, d] \to \mathcal{C}$ son dos parametrizaciones regulares de una curva abierta, simple, suave $\Rightarrow$ una es una reparametrización de la otra:

$$\gamma = \sigma \circ h, \;\; \text{con } h : [a, b] \to [c, d] \text{ de clase } C^1, \; h'(t) \neq 0 \; \forall t.$$

Decimos que γ preserva la orientación de σ si

$$\gamma(c) = \sigma(a) \;\text{ y }\; \gamma(d) = \sigma(b).$$

En caso contrario, decimos que γ invierte la orientación.

Integrales curvilíneas, trabajo

Teorema: Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, simple, abierta y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ y $\gamma : [c, d] \to \mathcal{C}$ dos parametrizaciones regulares. Si $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo y γ preserva la orientación de σ, entonces

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por otro lado, si γ invierte la orientación de σ, entonces

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Integrales curvilíneas, trabajo

Demostración: Dado que $\gamma = \sigma \circ h$, con $h : [a, b] \to [c, d]$ de clase C^1 y $h'(t) \neq 0$ para $t \in [a, b] \Rightarrow \gamma'(t) = \sigma'(h(t))\, h'(t) \Rightarrow$

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_c^d \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_c^d \boldsymbol{F}(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t))\, h'(t)\, dt.$$

Si γ preserva la orientación de σ, entonces

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Por otro lado, si γ invierte la orientación de σ, entonces

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_b^a \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = -\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}. \qquad \blacksquare$$

Integral de longitud de arco

Por el contrario, la integral de longitud de arco no depende de la parametrización.

Teorema: Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, simple, abierta y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ y $\gamma : [c, d] \to \mathcal{C}$ dos parametrizaciones regulares. Si $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ es continua,

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\gamma f\, ds.$$

Integral de longitud de arco

Demostración: Dado que $\gamma = \sigma \circ h$, con $h : [a, b] \to [c, d]$ de clase C^1 y $h'(t) \neq 0 \ \forall \ t \in [a, b] \Rightarrow \gamma'(t) = \sigma'(h(t))\, h'(t) \Rightarrow$

$$\int_\gamma f\, d\mathbf{s} = \int_c^d f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_c^d f(\sigma(h(t))) \|\sigma'(h(t))\|\, |h'(t)|\, dt.$$

Dado que $h'(t) \neq 0$ para cada $t \in [a, b]$,

$$|h'(t)| = \begin{cases} h'(t) & \text{si } \gamma \text{ preserva la orientación de } \sigma, \\ -h'(t) & \text{si } \gamma \text{ invierte la orientación de } \sigma. \end{cases}$$

Por lo tanto, si γ preserva la orientación de σ, entonces

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_\sigma f\, ds.$$

Por otro lado, si γ invierte la orientación de σ, entonces

$$\int_\gamma f\, ds = -\int_b^a f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_\sigma f\, ds. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo

Sea $\mathcal{C}$ la curva orientada definida por la parametrización

$$\sigma : [0,1] \to \mathcal{C}, \qquad \sigma(t) = (t, t^2).$$

Sea $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^2$ el campo de fuerzas

$$\boldsymbol{F}(x,y) = -(x,y).$$

Supongamos que una partícula se desplaza por la curva $\mathcal{C}$ siguiendo la trayectoria σ. El trabajo efectuado por la fuerza sobre la partícula es

$$\begin{aligned}\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 -(t, t^2) \cdot (1, 2t)\, dt = -\int_0^1 (t + 2t^3)\, dt = -1.\end{aligned}$$

Integrales curvilíneas, campos gradientes

Por último, vale la pena mencionar una técnica útil para evaluar integrales curvilíneas. Decimos que $\boldsymbol{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ es un campo gradiente si existe $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

Teorema: Sea $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $\sigma : [a, b] \to \mathcal{C}$ una parametrización regular de una curva simple, suave. Entonces

$$\int_\sigma \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

Demostración: Dado que $(f \circ \sigma)'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\sigma \nabla f \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt \\ &= \int_a^b (f \circ \sigma)'(t)\, dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$