MAS EJEMPLOS

1) RESOLVER $\begin{cases} x' = t\sqrt{1-x^2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN: NOTEMOS QUE $x \equiv 1$ Y $x \equiv -1$ SON SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

PERO NO CUMPLEN EL VALOR INICIAL $x(0) = 0$, POR LO QUE NO ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

AHORA, SI $x \not\equiv 1$, $x \not\equiv -1$, RESOLVEMOS USANDO EL METODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

$$x' = t\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{x'}{\sqrt{1-x^2}} = t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{x'}{\sqrt{1-x^2}} = \int t$$

$$\arcsen(x) = \frac{t^2}{2} + c$$

$$x = \sen\left(\frac{t^2}{2} + c\right)$$

SI $x(0) = 0$, $\sen\left(\frac{0^2}{2} + c\right) = 0$

$$\sen(c) = 0 \longrightarrow c = k\pi$$

TENEMOS DOS SOLUCIONES: $x_1(t) = \sen\left(\frac{t^2}{2}\right)$, $x_2(t) = \sen\left(\frac{t^2}{2} + \pi\right)$

CHEQUEAMOS EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

1) $x_1' = \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \cdot t$, $t\sqrt{1-x_1^2} = t\sqrt{1-\sen^2\left(\frac{t^2}{2}\right)} = t\sqrt{\cos^2\left(\frac{t^2}{2}\right)}$

$$= t\cos\left(\frac{t^2}{2}\right) \checkmark$$

2) $x_2' = \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) t$, $t\sqrt{1-x_2^2} = t\sqrt{1-\sen^2(t^2/2+\pi)} = t\sqrt{\cos^2(t^2/2+\pi)}$

$$= -t\cos(t^2/2+\pi) \quad \times$$

↳ ALREDEDOR DE $t=0$, $\cos(t^2/2+\pi)$ ES NEGATIVO.

LUEGO, x_1 ES LA ÚNICA SOLUCIÓN.

2) $\begin{cases} tx' + x + t = 0 \\ x(1) = 1/2 \end{cases}$

RESOLVEMOS: $x' = -\dfrac{x+t}{t}$

COMO $f(x,t) = -\dfrac{x+t}{t}$ ES HOMOGENEA DE GRADO 0, PUES

$$f(\lambda x, \lambda t) = -\frac{\lambda x + \lambda t}{\lambda t} = -\frac{\lambda(x+t)}{\lambda t} = -\frac{x+t}{t} = f(x,t)$$

PODEMOS USAR LA SUSTITUCIÓN $ty = x \rightsquigarrow x' = y + ty'$

$$y + ty' = -\frac{ty+t}{t} = -\frac{t(y+1)}{t} = -(y+1) = -y-1$$

$$ty' = -2y-1$$

Si $y \equiv -1/2$, $x(t) = -1/2\, t$, QUE NO CUMPLE LA CONDICIÓN INICIAL.

Si $y \neq -1/2$, $\dfrac{y'}{-2y-1} = \dfrac{1}{t}$

$$\frac{\ln|-2y-1|}{-2} = \ln|t| + c$$

$$\ln|2y+1| = -2\ln|t| + c \nearrow K>0$$

$$|2y+1| = e^{-2\ln|t|+c} = Ke^{\ln|t|^{-2}} = \frac{K}{|t|^2} = \frac{K}{t^2}$$

LUEGO, $2y+1 = \dfrac{K}{t^2}$ Ó $2y+1 = \dfrac{-K}{t^2}$, $K>0$

AGRUPANDO, $2y+1 = \dfrac{K}{t^2}$, $K \neq 0$

$$y = \frac{K}{t^2} - 1/2$$

$$\frac{x}{t} = \frac{K}{t^2} - 1/2 \rightsquigarrow x(t) = \frac{K}{t} - 1/2\, t, \quad K \neq 0$$

$x(1) = 1/2 \rightsquigarrow 1/2 = \frac{k}{1} - 1/2 \cdot 1$

$$1 = k$$

LUEGO, $x(t) = \frac{1}{t} - 1/2\, t$

3) $\begin{cases} -t^2 x' + x^2 + xt = 0 \\ x(1) = -1 \end{cases}$

$x' = \frac{x^2 + xt}{t^2}$, y $f(x,t) = \frac{x^2 + xt}{t^2}$ ES HOMOGENEA DE ORDEN 0

→ PUEDO USAR LA SUSTITUCIÓN $x = yt$

$$y + ty' = \frac{y^2 t^2 + yt^2}{t^2} = y^2 + y$$

$$ty' = y^2$$

Si $y \equiv 0$, $x \equiv 0$ QUE NO CUMPLE LA CONDICIÓN INICIAL

Si $y \not\equiv 0$: $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{t} \longrightarrow \int \frac{y'}{y^2} = \int \frac{1}{t}$

$$-\frac{1}{y} = \ln|t| + c$$

$$y = \frac{-1}{\ln|t| + c}$$

LUEGO, $x = \frac{-t}{\ln|t| + c}$

$x(1) = -1 \longrightarrow -1 = \frac{-1}{\ln(1) + c} = \frac{-1}{c} \longrightarrow c = 1$

$$x(t) = \frac{-t}{\ln|t| + 1}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

SUPONGAMOS QUE DADA $x(t)$ UNA FUNCIÓN DERIVABLE, EXISTE $F=F(t,x)$ DE CLASE C^2 TAL QUE

$$F(t,x) \equiv C \quad , \text{ CON } C \text{ CONSTANTE}$$

DERIVANDO EN FUNCION DE t, OBTENEMOS QUE

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \equiv 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0$$

ES DECIR, QUE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0 \quad \left(\text{o } \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \right)$$

TIENE SOLUCIÓN (EXPRESADA DE FORMA IMPLICITA)

$$F(t,x) \equiv C$$

TOMANDO EL CAMINO INVERSO, DADA UNA ECUACION DIFERENCIAL

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

QUEREMOS SABER SI ESTAMOS EN LA SITUACIÓN ANTERIOR

DEFINICIÓN: UNA EXPRESIÓN DIFERENCIAL

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

SE DICE EXACTA SI $M\,dx + N\,dy$ CORRESPONDE A LA DIFERENCIAL DE ALGUNA FUNCIÓN F.

TEOREMA: LA ECUACIÓN $M\,dx + N\,dy = 0$ CON M, N C^1 ES EXACTA SI Y SOLO SI

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (\text{ROT}(M,N) = 0)$$

EJEMPLOS: 1) $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$

$$\begin{cases} M(x,y) = e^y \\ N(x,y) = xe^y + 2y \end{cases}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \rightsquigarrow \text{ES EXACTA}$$

ENCONTREMOS F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \underbrace{e^y}_{M} \longrightarrow F(x,y) = xe^y + \varphi(y)$$

LUEGO, $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \varphi'(y)$. PERO $\frac{\partial F}{\partial y} = N = xe^y + \varphi'(y)$

$$\rightsquigarrow \varphi'(y) = 2y \rightsquigarrow \varphi(y) = y^2$$

ENTONCES, $F(x,y) = xe^y + y^2$

LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN ES $xe^y + y^2 = C$

<u>CORROBOREMOS</u>:

$$e^y + xe^y y' + 2yy' = 0$$
$$e^y + (xe^y + 2y)y' = 0$$
$$e^y + (xe^y + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$
$$e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0$$

2) $y' = \dfrac{xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x}{y(1-x^2)}$, $y(0) = 2$

PODEMOS ESCRIBIR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA FORMA

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\,dx + y(1-x^2)\,dy = 0$$

$$\begin{cases} M = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2 \\ N = y(1-x^2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x} \longrightarrow \text{ES EXACTA}$$

ENCONTREMOS F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \,\mathrm{sen}\, x - x y^2 \rightsquigarrow F(x,y) = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \ell(y)$$

$$\rightsquigarrow y(1-x^2) = \frac{\partial F}{\partial y} = -x^2 y + \ell'(y)$$

$$y = \ell'(y) \longrightarrow \ell(y) = y^2/2$$

LUEGO, $F(x,y) = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA EC DIFERENCIAL ES

$$\frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

COMO $y(0) = 2$, $\frac{\mathrm{sen}^2 0}{2} - \frac{0^2 2^2}{2} + \frac{2^2}{2} = C$

$$2 = C$$

LA SOLUCIÓN PARTICULAR ES $\frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2$

3) $y\,dx + (x^2 y - x)\,dy = 0$ (*)

$$\begin{cases} M = y \\ N = x^2 y - x \end{cases}$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1$ $\longrightarrow$ NO ES EXACTA.

NOTEMOS QUE PODEMOS MULTIPLICAR (*) POR CUALQUIER FUNCIÓN. ¿EXISTE ALGUNA FUNCIÓN TAL QUE SI LA MULTIPLICO, LA ECUACIÓN QUEDA EXACTA?

SI! $\frac{1}{x^2}$ $\longrightarrow$ FACTOR INTEGRANTE

$$\frac{1}{x^2}\left(y\,dx + (x^2 y - x)\,dy\right) = \frac{1}{x^2}\,0$$

$$\frac{y}{x^2}\,dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

$$\begin{cases} \tilde{M} = \frac{y}{x^2} \\ \tilde{N} = y - \frac{1}{x} \end{cases}$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$ $\longrightarrow$ ES EXACTA.

BUSCANDO F COMO ANTES, OBTENEMOS (VERIFICAR)

$$F(x,y) = \frac{-y}{x} + y^2$$

LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN SON $\frac{-y}{x} + y^2 = C$

FACTOR INTEGRANTE

SI $M\,dx + N\,dy = 0$ NO ES EXACTAS,

¿PUEDO ENCONTRAR $\mu(x,y)$ UNA FUNCIÓN TAL QUE

$\mu(x,y)(M\,dx + N\,dy) = 0$ SEA EXACTA?

A ESTA FUNCIÓN $\mu(x,y)$ SE LA LLAMA FACTOR INTEGRANTE

QUEREMOS QUE $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ SEA EXACTA

ENTONCES, $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ ⊛

$$\underline{\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_y}$$

↳ ECUACIÓN DIFERENCIAL EN DERIVADAS PARCIALES

↳ MAS DIFICIL QUE LA ORIGINAL

PODEMOS IMPONER CONDICIONES SOBRE μ (QUE NO NECESARIAMENTE FUNCIONARAN) PARA SIMPLIFICAR LA ECUACIÓN ANTERIOR.

1) SUPONGAMOS $\mu = \mu(x)$ (NO DEPENDE DE y)

EN ESTE CASO, LA CONDICIÓN ⊛ ES

$$\mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

$$\mu(M_y - N_x) = \mu_x N$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$$

→ NO DEBE DEPENDER DE y

ENTONCES, $\int \frac{\mu_x}{\mu} = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx$

$$\ln|\mu| = \int \frac{M_y - N_x}{N} dx$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

EJEMPLO: $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)\,dy = 0$

$\begin{cases} M = 2x^2 + y \\ N = x^2y - x \end{cases}$ $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 1 \longrightarrow$ NO ES EXACTA

BUSCAMOS FACTOR INTEGRANTE $\longrightarrow$ VEAMOS SI SIRVE LO ANTERIOR

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - 2xy + 1}{x^2y - x} = \frac{2 - 2xy}{-x(1 - xy)} = \frac{-2}{x}$$ $\longrightarrow$ NO DEPENDE DE y

TOMEMOS $\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$

MULTIPLICAMOS LA ECUACION ORIGINAL POR $1/x^2$

$$\left(2 + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

BUSCAMOS F: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + \frac{y}{x^2} \longrightarrow F(x,y) = 2x - \frac{y}{x} + \varphi(y)$

$$y - 1/x = \frac{\partial F}{\partial y} = -1/x + \varphi'(y) \longrightarrow \varphi'(y) = y$$

$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2}$$

$F(x,y) = 2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2}$, Y LA SOLUCIÓN ESTA DADA POR

$$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C$$

2) SUPONGAMOS $\mu = \mu(y) \longrightarrow$ NO DEPENDE DE x

LA CONDICIÓN (*) ES:

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu N_x$$

$$\mu_y M = \mu (N_x - M_y)$$

$$\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M} \longrightarrow \text{NO DEBE DEPENDER DE } x$$

COMO ANTES, LLEGAMOS A

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

EJEMPLO: $(e^{x+y} + y e^{y}) dx + (x e^{y} - 1) dy = 0$

$M_y = e^{x+y} + e^{y} + y e^{y}$

$N_x = e^{y}$ $\longrightarrow$ NO ES EXACTA

PROBEMOS LA PRIMERA SUGERENCIA:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{e^{x+y} + y e^{y}}{x e^{y} - 1} \longrightarrow \text{DEPENDE DE } y$$

$\longrightarrow$ NO SE PUEDE!

PROBEMOS LA SEGUNDA:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = -\frac{e^{x+y} + y e^{y}}{e^{x+y} + y e^{y}} = -1 \longrightarrow \text{NO DEPENDE DE } x$$

TOMEMOS $\mu(y) = e^{\int -1 dy} = e^{-y}$

MULTIPLICAMOS LA ECUACIÓN ORIGINAL POR e^{-y}:

$$(e^{x} + y) dx + (x - e^{-y}) dy = 0$$

PODEMOS ENCONTRAR F COMO ANTES (VERIFICAR!)

$F(x,y) = e^{x} + e^{-y} + xy$, Y LA SOLUCIÓN ES

$$e^{x} + e^{-y} + xy = c$$