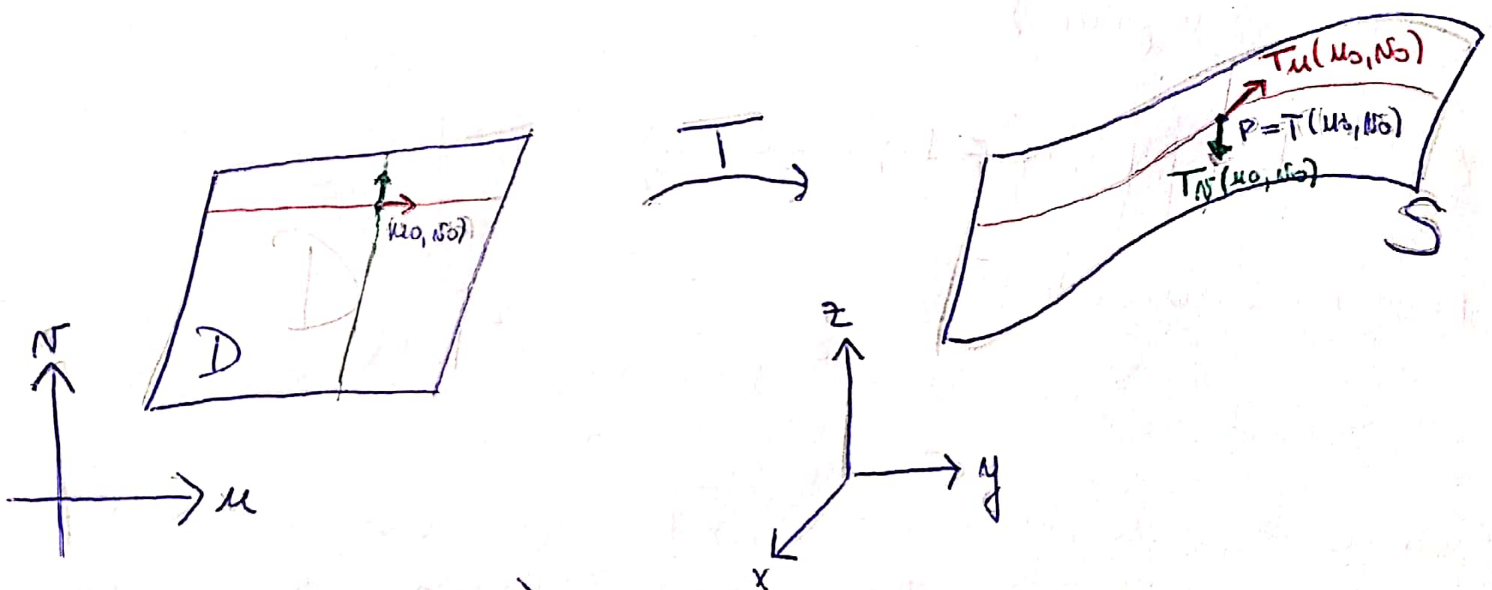
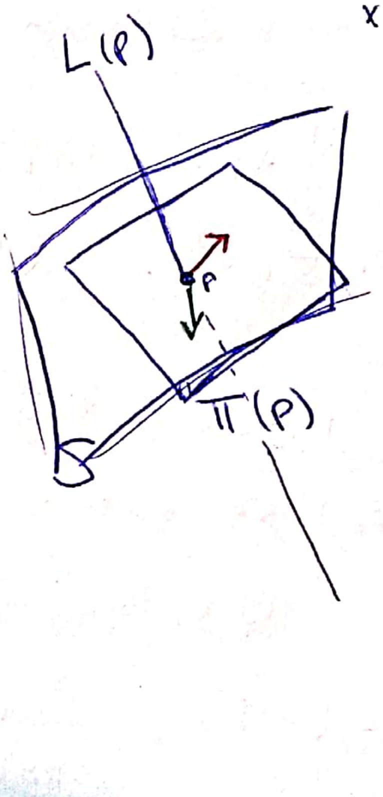
Superficies

Recuerdo: Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una **superficie** si existe una función continua $T: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (D dominio elemental) tal que $S = \operatorname{Im}(T)$. En este caso, decimos que T es una **parametrización** de S.

Decimos que S es **suave** si tiene **plano tangente** en todos sus puntos y la recta $L(p)$ perpendicular al plano tangente en $P \in S$ varía continuamente con P.





$L(p)$ tiene dirección

$$\vec{n}(u_0,v_0) = \frac{T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0)}{\| T_u(u_0,v_0) \times T_v(u_0,v_0) \|}$$

Ej. 1

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2-z=0 \;;\; (x-2)^2+y^2 \leq 1\}$

¿Es una superficie? ¿Es suave?

- $(x,y,z) \in S \iff (x,y) \in \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x-2)^2+y^2 \leq 1\} := D$
  y $z = x^2+y^2$.

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x,y) = x^2+y^2$. Entonces

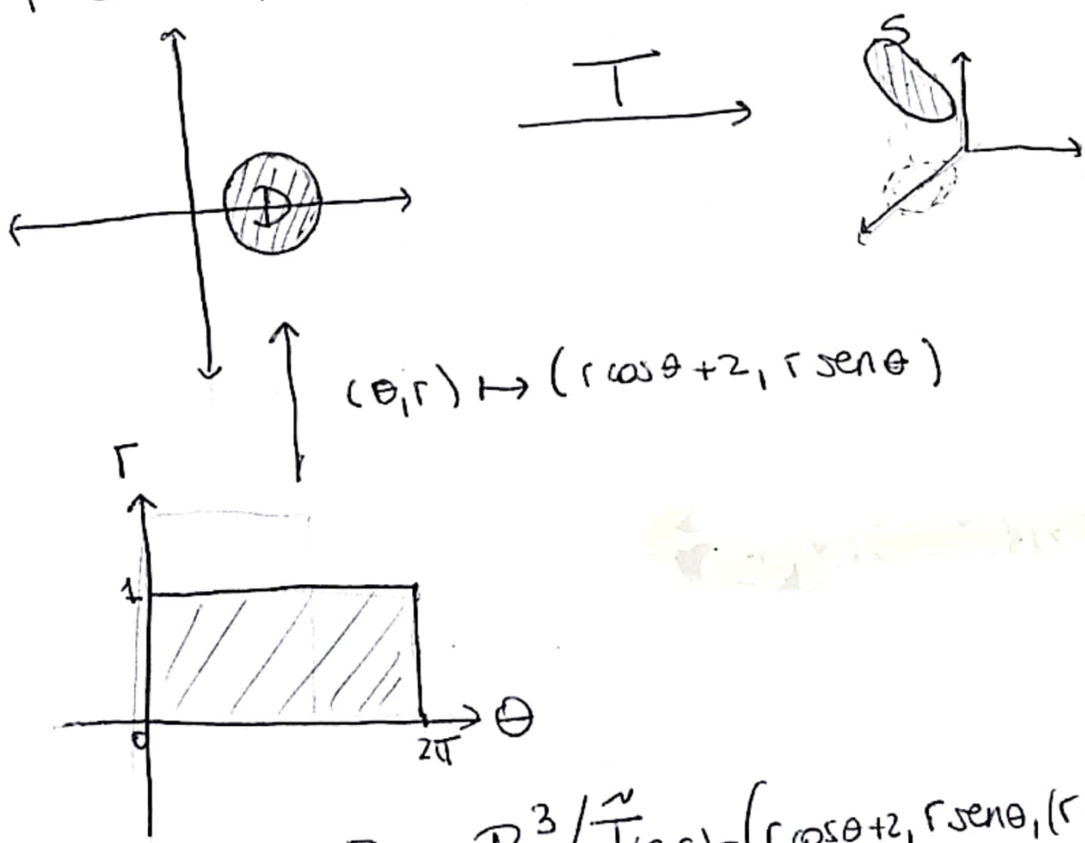
$$S = Gr(f)$$

Como f es de clase C^1

concluimos que S es una superficie suave.

Parametrización: $T: D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;/\; T(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$

T es una parametrización regular (justificar).



$\tilde{T}: [0,2\pi] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \;/\; \tilde{T}(\theta,r) = \left(r\cos\theta+2,\; r\,\text{sen}\,\theta,\; (r\cos\theta+2)^2 + (r\,\text{sen}\,\theta)^2\right)$

Ej. 2 $S = \{x^2+y^2=1 \,;\; 0 \leq z \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Considero $\overline{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y,z)} = 0\}$; $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

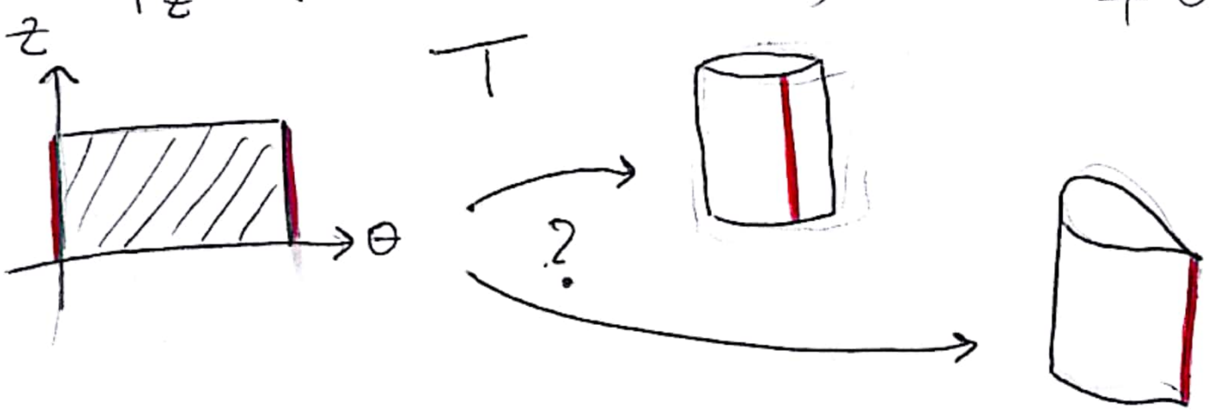
Como F es C^1 y $\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 0) \neq \vec{0}$ en $\overline{S}$, concluimos que $\overline{S}$ es una superficie suave.

Otra forma: $T: [0,2\pi] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$$

- $\operatorname{Im} T = S$ ✓
- T es C^1 ✓
- ¿Es inyectiva? Supongamos $T(\theta_1, z_1) = T(\theta_2, z_2)$.
  Entonces $z_1 = z_2$ y $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
  $\longrightarrow T: [0,2\pi) \times [0,2] \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva
  y $T(0,z) = T(2\pi, z)$ $\forall z \in [0,2]$.
  $= (1,0,z)$
- Calculemos la normal a S:

$$\left.\begin{aligned} T_\theta &= (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0) \\ T_z &= (0, 0, 1) \end{aligned}\right\} T_\theta \times T_z(\theta, z) = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0) \neq \vec{0} \;\; \forall (\theta, z).$$



Recuerdo: S es suave si tiene plano tangente en todos sus puntos y $L(p)$ (recta $\perp$) varía continuamente.

$$T(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) = (x, y, z) = P$$

$$T_\theta \times T_z(\theta, z) = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0)$$
$$= (-x, -y, 0)$$

$$\Rightarrow \perp(p) = \langle(-x, -y, 0)\rangle + (x, y, z).$$

Claramente L varía continuamente en S. Faltaría ver que es $\perp$ al plano tangente en los puntos de la forma $\underline{T(0, z)}$ ¿Cómo hago?

$\tilde{T} : [\pi, 3\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ /

$\tilde{T}(\theta, z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$.

(Las cuentas son iguales que con T).

$\tilde{T}$ es inyectiva en $[\pi, 3\pi) \times [0, 2\pi]$ y

$$\tilde{T}(\pi, z) = \tilde{T}(3\pi, z) \ \forall z.$$
$$= (-1, 0, z).$$

Puedo calcular el plano tangente en los puntos $\underline{(1, 0, z)}$ usando $\tilde{T}$ (y da lo mismo que antes) así que concluyo que S es suave porque L es una recta $\perp$ al plano tangente en cada punto que varía continuamente.

Ej 3: Sea S la superficie parametrizada por

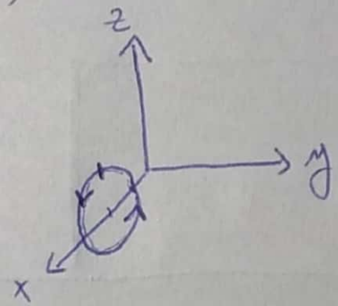
$T: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 /$

$T(a,b) = \left((2+\text{sen}(b))\cos(a), (2+\text{sen}(b))\,\text{sen}(a), a+\cos(b) \right)$

Analizar la regularidad de T y dar una normal a S en el punto $(3,0,0)$ que apunte "hacia adentro".

Dibujo aprox. de S:

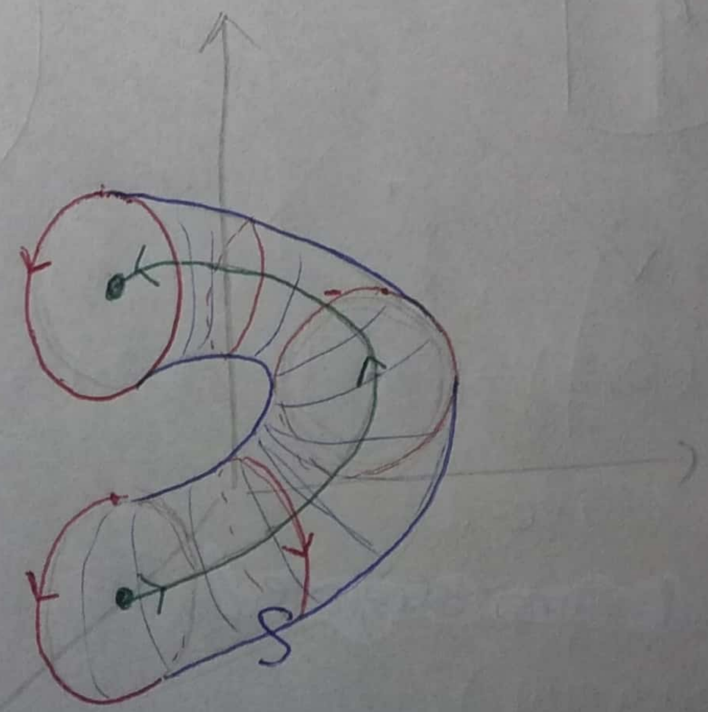
- Si fijo $a=0$, $T(0,b) = (2+\text{sen}(b), 0, \cos(b))$



- Si fijo $a=a_0$, $\underline{T(a_0,b)} = \overbrace{(2\cos(a_0), 2\,\text{sen}(a_0), a_0)}^{C(a_0)\ \to\ \text{"resorte"}}$

$+ (\cos(a_0), \text{sen}(a_0), 0)\,\text{sen}(b)$

$+ (0,0,1)\cos(b)$.



Veamos si T es regular:

- T es C^1 ✓.
- Inyectividad: Supongamos $T(a_1, b_1) = T(a_2, b_2)$.

$$\begin{cases} (2+\operatorname{sen}(b_1))\cos(a_1) = (2+\operatorname{sen}(b_2))\cos(a_2) & (1) \\ (2+\operatorname{sen}(b_1))\operatorname{sen}(a_1) = (2+\operatorname{sen}(b_2))\operatorname{sen}(a_2) & (2) \\ a_1 + \cos(b_1) = a_2 + \cos(b_2) & (3) \end{cases}$$

$\rightarrow (1)^2 + (2)^2$: $\underbrace{(2+\operatorname{sen}(b_1))}_{\geq 1}{}^2 = \underbrace{(2+\operatorname{sen}(b_2))}_{\geq 1}{}^2$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(b_1) = \operatorname{sen}(b_2).$$

$\rightarrow$ Volviendo a (1) y (2), tenemos $\begin{cases} \cos(a_1) = \cos(a_2) \\ \operatorname{sen}(a_1) = \operatorname{sen}(a_2) \end{cases}$,

es decir, $a_2 = a_1 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

$\rightarrow$ (3) : $\cancel{a_1} + \cos(b_1) = \cancel{a_1} + 2k\pi + \cos(b_2)$

$\underbrace{\cos(b_1) - \cos(b_2)}_{2 \geq \quad \geq -2} = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$ y $\underline{a_1 = a_2}$.

Recopilando, tenemos: $a_1 = a_2$ y $\begin{cases} \cos(b_1) = \cos(b_2) \\ \operatorname{sen}(b_1) = \operatorname{sen}(b_2) \end{cases}$

Al igual que en el ejemplo del cilindro, concluimos que T es inyectiva en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi)$ y

$$T(a, 0) = T(a, 2\pi) \quad \forall\ 0 \leq a \leq 2\pi.$$

- $T_a \times T_b = ?$

$$T_a(a,b) = \big((2+\text{sen}(b))\,\text{sen}(a)\,;\,(2+\text{sen}(b))\cos(a)\,,\ 1\big)$$
$$T_b(a,b) = \big(-\cos(b)\cos(a)\,,\,-\cos(b)\,\text{sen}(a)\,,\,\text{sen}(b)\big)$$

$$T_a \times T_b(a,b) = \big(-(2+\text{sen}(b))\cos(a)\,\text{sen}(b) + \cos(b)\,\text{sen}(a), \quad (1)$$
$$-\cos(b)\cos(a) - (2+\text{sen}(b))\,\text{sen}(a)\,\text{sen}(b), \quad (2)$$
$$-(2+\text{sen}(b))\cos(b)\big). \quad (3)$$

Supongamos $T_a \times T_b(a_0, b_0) = (0,0,0)$.

3er coord.

$$\Longrightarrow \quad -\underbrace{(2+\text{sen}(b_0))}_{>0}\cos(b_0) = 0 \Rightarrow \cos(b_0) = 0.$$

Es decir, $b_0 = \frac{\pi}{2}$ ó $b_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Reemplazando en (1) y (2), tenemos

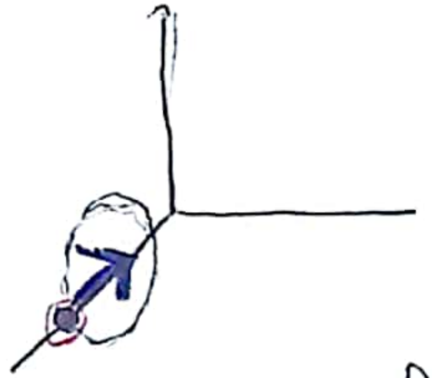
$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \cos(a_0) = 0 \\ (2) & \text{sen}(a_0) = 0 \end{array}\right\} \underline{\text{abs}}!$$

$$\Rightarrow T_a \times T_b(a,b) \neq (0,0,0) \quad \forall a,b.$$

• $(3,0,0) \stackrel{?}{=} T(a,b)$

$$= T\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Entonces $T_a \times T_b\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ es una normal a S en el punto $(3,0,0)$.



$$T_a \times T_b\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = (\underbrace{-3}_{<0},0,0)$$

$(-1,0,0)$ es una normal (unitaria) a S en el punto $(3,0,0)$ que apunta "hacia adentro".