Cálculo Avanzado - 1° Cuatrimestre 2019
2° Parcial (05/07/2019)

1. Sean X e Y espacios métricos arcoconexos, $A \subset X$ y $B \subset Y$.

   a) Probar que si A y B son propios $(A \times B)^c$ es un subconjunto arcoconexo de $X \times Y$.

   b) Probar que $\{(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)\}^c$ es un subconjunto arcoconexo de $X \times Y$.

2. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ una sucesión de funciones dos veces derivables que cumplen que $f_n(0) = f_m(0)$ y $f_n'(0) = f_m'(0)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Si además existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|f_n''\|_\infty \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.

3. Para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ definimos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2x^2)^{-1}$.

   a) Probar que f está bien definida, es continua, derivable y no acotada.

   b) Probar que la sucesión de sumas parciales no converge uniformemente en $\mathbb{R} - \{0\}$.

4. Definimos en $\mathbb{R}[x]$ la norma $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la función $ev_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $ev_a(P) = P(a)$. Probar que ev_a es lineal para todo a y resulta continua si y sólo si $a \in [0,1]$. Calcular su norma en este último caso.

5. Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función expansiva, es decir que cumple que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$.

   a) Probar que la imagen de f es densa en X.

   b) Probar que no existen $x, y \in X$ tales que $d(f(x), f(y)) > d(x, y)$ y por lo tanto f es un homeomorfismo (continua, biyectiva y de inversa continua).

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Para aprobar el examen es suficiente resolver correctamente tres ejercicios.
Si desea citar un resultado de la guía práctica consulte o incluya una demostración.