DEVIA DARIO
425/93

## Ejercicio 1

Sea $g(x) = d(x, f(x))$

$$g : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

g es continua por ser una distancia y como X es compacto, g alcanza máx y mínimo en X

qvq $\exists$ único $x \in X$ / $f(x) = x$

o lo que es equivalente que

$d(x, f(x)) = 0$ lo que es equivalente

que existe un único $x \in X$ / $g(x) = 0$

Sea $x_0 \in X$ tal que

$$g(x_0) = \min_{x \in X} g(x)$$

Como $\underbrace{g(x) \geq 0}_{\text{por ser distancia}} \Rightarrow g(x_0) \geq 0$

NOTA

Supongamos que $g(x_0) > 0$

$\Rightarrow d(x_0, f(x_0)) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0) \neq x_0$, pues $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Como $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ (enunciado)

$\Rightarrow d(f(x_0), f(f(x_0))) < \underbrace{d(x_0, f(x_0))}_{= g(x_0)}$

$\Rightarrow \exists k \in X \,/\, d(k, f(k)) < g(x_0)$

Pero $g(x_0)$ era el mínimo

ESTE ABSURDO SALE DE SUPONER $g(x_0) > 0$

y como sabemos que $g(x_0) \geq 0$

$\therefore g(x_0) = 0$

HOJA DANIO DENIA

FECHA 4/25/93

HASTA ACÁ PROBÉ

que $\exists\, x_0 \in X$

$/ \; g(x_0) = 0 \Rightarrow d(x_0, f(x_0)) = 0$

$\Leftrightarrow f(x_0) = x_0$

VEAMOS que es único.

Sea $x_0' \neq x_0 \; / \; f(x_0') = x_0'$

Por hipótesis

$$d(f(x_0), f(x_0')) < d(x_0, x_0') \quad (1)$$

Pero $f(x_0') = x_0'$

y también $f(x_0) = x_0$

$$\Rightarrow d(f(x_0), f(x_0')) = d(x_0, x_0') \quad (2)$$

NOTA

De ① y ② tenemos que

$$d(x_0, x_0') < d(x_0, x_0')$$

lo que es absurdo, y proviene de suponer que $x_0$ no es único

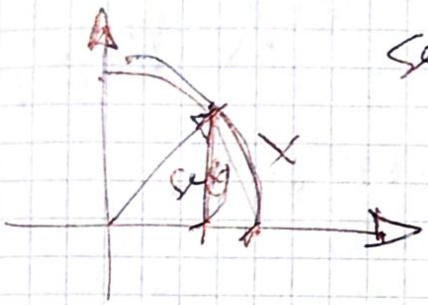
$\therefore$ existe único $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$

NOTA

# EJERCICIO 4

DARIO DEVIA
425/93

$x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2^n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right)}_{f_n(x)}$




$\operatorname{sen}(x) \leq x$

Sea $S_N = \sum_{n=1}^{N} 2^n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right)$

x fijo

$\left| f_n(x) \right| = \left| 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right) \right| \leq \left| 2^n \cdot \frac{1}{3^n x} \right|$

$x > 0$

Sea $r > 0$, fijo $x \geq r$

$\Rightarrow$ como $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{3^n x} = \frac{1}{x} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

CTE FIJA

CONVERGE POR SER GEOMÉTRICA DE RAZÓN MENOR A 1

$\therefore$ Por el teorema de Weierstrass podemos afirmar que $S_N = \sum_{n=1}^{N} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right)$ converge uniformemente en $[r, +\infty)$

Pasemos ahora con la sucesión

$x_n = \boxed{\frac{2}{\pi \cdot 3^n}}$ y $f_n(x_n) =$

$= 2^n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n \cdot \frac{2}{\pi \cdot 3^n}}\right) = 2^n \longrightarrow \infty$

$\geq 2 \quad \forall n \geq 1$

Por el problema 1) de la Guía

$f_n(x)$ no puede converger

uniformemente $\therefore \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ tampoco

puede converger uniformemente

en $(0, +\infty)$

DENIA DARIO
425/93

EN EL ITEM a)

VIMOS QUE $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right)$

CONVERGE UNIFORMEMENTE EN $[r, +\infty)$, $r>0$,

ESTO IMPLICA QUE

PUNTUALMENTE CONVERGE EN CADA $x \geq r$ y LA CONVERGENCIA PUNTUAL ES A $f=0$ YA QUE

La convergencia puntual de las $f_n$ es a la cero

$$f_n(x) = 2^n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right) =$$

$$= 2^n \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right)}{\frac{1}{3^n \cdot x}} \cdot \frac{1}{3^n x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3^n x}\right)}{\frac{1}{3^n \cdot x}} \xrightarrow{n} 1$, $\frac{1}{3^n x} \longrightarrow 0$

$\therefore$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_N(x)$, ES CONTINUA EN CADA $x \in (0, +\infty)$

Por la conv unif en $[r, +\infty)$

Para ver que es derivable, derivemos término a término.

$$\left| f_n'(x) \right| = \left| 2^n \underbrace{\cos\left(\frac{1}{3^n x}\right)}_{\leq 1} \cdot \frac{1}{x^2 3^n} \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{x^2}$$

Sea $r > 0$, considero $[r, +\infty)$, $x \geq r$

Por Weierstrass, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

converge absoluta y uniformemente para $[r, +\infty)$

Por teo de la teórica

como $(S_N) \rightarrow f$ y $S_N' \rightrightarrows \sum f_n'(x)$

HOJA N° DARÍO DELIA

FECHA 425/153

Podemos afirmar que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad , \ x > 0$$

y como la derivabilidad es

local como la continuidad

esto nos alcanza para afirmar que

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua

y derivable.

NOTA

DE VITA DARIO

425/93

EJERCICIO 3

$P_{(x)} \in \mathbb{R}[x]$ , $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$\|P\|_{♣} = \max_{i \in \mathbb{N}_0} |a_i|$ , $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$

♣ TRÉBOL

$b \in \mathbb{R}$, $ev_b(P) = P(b)$ OPERADOR LINEAL

$$ev_b : \underbrace{\mathbb{R}[x]}_{E} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{F}$$

Sabemos de la teórica que el operador lineal $ev_b$ es continuo.

ES EQUIVALENTE A PROBAR QUE EXISTE UNA CONSTANTE $c \in \mathbb{R}$ TAL QUE

$$\|ev_b(P)\|_{\underbrace{\mathbb{R}}_{F}} \leq c \underbrace{\|P\|_{\underbrace{\mathbb{R}[x]}_{E}}}_{\|P\|_{♣}}$$

♣ TRÉBOL

Acotamos:

$$\| e_{V_b}(p) \|_{\mathbb{R}} = \sup_{b \in \mathbb{R}} | p(b) | =$$

Suponemos que hay algún $a_i \neq 0$

$$= \sup_{b \in \mathbb{R}} | a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n | =$$

$$= \sup_{b \in \mathbb{R}} \left| \max_{i \in \mathbb{N}_0} |a_i| \left( \frac{a_0}{\max |a_i|} + \frac{a_1 b}{\max |a_i|} + \dots + \frac{a_n b^n}{\max |a_i|} \right) \right|$$

$$= \underbrace{\max_{i \in \mathbb{N}_0} |a_i|}_{\|p\|_{?}} \left( \underbrace{\sup_{b \in \mathbb{R}} \left( \frac{a_0}{\max |a_i|} + \frac{a_1 b}{\max |a_i|} + \dots + \frac{a_n b^n}{\max |a_i|} \right)}_{} \right)$$

Si $b \geq 1$ la suma diverge cuando $n \to \infty$ y por lo tanto el supremo no existe

Depende, pero podría llegar a pasar.

Si $b < 1$ puedo acotar esa suma por una geométrica

DARIO DENIA

4/25/93

$$\frac{a_0}{MAX|a_i|} + \frac{a_1 b}{MAX|a_i|} + \dots + \frac{a_n b^n}{MAX|a_i|} \leq$$

$$\leq a_0 + a_1 b + \dots + a_n b^n \leq \underset{i \in \mathbb{N}_0}{MAX|a_i|} \sum_{n=0}^{n} b^n$$

$$\leq \underbrace{\underset{i \in \mathbb{N}_0}{MAX|a_i|}}^{\|P\|_\infty} \underbrace{\frac{1}{1-b}}_{cte}$$

$|b|<1$ y $n \to \infty$

$\therefore$ Si $|b| \geq 1$ $\|e_p(P)\|$ NO ES ACOTADO

$\Rightarrow$ EL OPERADOR $e_{N_b}$ NO ES CONTINUO

Si $|b|<$ $\|e_p(P)\|_{\mathbb{F}} \leq C\|P\|_E$

$\Rightarrow$ EL OPERADOR ES CONTINUO

Calculamos su norma para $b=0$

$\le \max|a_i| \left(\frac{1}{1-0}\right)$

$$\|e_{r_0}\| = \sup_{P\in\mathbb{R}[x]} \frac{\|e_{r_0}(P)\|}{\|P\|_{\clubsuit}} =$$

$\clubsuit \to$ trébol

$= \max|a_i|$

$\le 1$

y por otro lado

Si evaluamos en $b=0$

$$\Rightarrow \underbrace{\|e_{r_0}\|}_{\text{la norma del operador}} = \frac{a_0}{a_0} \le 1$$

$a_0 \le \|P\|_{\clubsuit}$

Podríos tomar $P=1$ para ver que la norma era 1

Ejercicio 2

DARÍO DEVIA

425/93

~~Sea A, B~~

(X, d) conexo

$A, B \subset X$ . prob $\exists\, x \in X$ tal que

$$d(x, A) = d(x, B)$$

Si $A \cap B \neq \phi$

es trivial, basta tomar $x \in A \cap B$

Como $x \in A \Rightarrow d(x, A) = 0$

Como $x \in B \Rightarrow d(x, B) = 0$

Sean $A, B$ / ~~[illegible]~~ $A \cap B = \phi$

~~[illegible]~~

Es claro que buscamos $x \in X \setminus A \cup B$

Supongamos que ~~[illegible]~~ no existe $x$

tal que $d(x, A) = d(x, B)$.

Esto nos dice que el

$\inf\{d(x,b) : b \in B\} \neq$

$\neq \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ con $x \in X \setminus A \cup B$.

~~[illegible]~~

esto nos dice X tiene que

sea no conexo. Recuerda porqué.