Cálculo Avanzado

Segundo Parcial - 06/07/21

$\boxed{1}$ Sea X un espacio métrico y sea $\mathscr{U}$ un cubrimento por abiertos de X. Dado $x \in X$ sea A_x el conjunto de todos los puntos $y \in X$ para los cuales existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$ tales que

$$x \in U_1, \quad y \in U_n, \quad U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing \text{ para todo } i < n. \qquad (*)$$

a) Probar que A_x es cerrado.

b) Probar que si X es conexo entonces para cualesquiera $x, y \in X$ existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$ que cumplen la condición $(*)$.

$\boxed{2}$ Sea X un espacio métrico y sean $A, B \subset X$ **cerrados** tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son arcoconexos. Probar que A es arcoconexo.

$\boxed{3}$ Sean X un espacio métrico y $x_0 \in X$. Consideramos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^X$ tal que:

- existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$;
- para todo $\delta > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $X - B(x_0, \delta)$.

Sea $g : X \to \mathbb{R}$ una función acotada, continua en x_0, tal que $g(x_0) = 0$. Probar que la sucesión $(f_n \cdot g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X.

$\boxed{4}$ Sea $C[0,1]$ el espacio de las funciones continuas del intervalo $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Consideramos el operador lineal $T : C[0,1] \to c_0$ definido por
$T(f) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(f(1) - f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{3}), f(\frac{1}{3}) - f(\frac{1}{4}), \ldots\right)$.
Calcular $\|T\|$:

a) si en c_0 se usa la norma usual $\|(x_n)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$;

b) si en c_0 se usa la norma $\|(x_n)\| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}$.

$\boxed{5}$ Consideramos la función $\phi : \ell^\infty \to C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ que a cada sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le asigna la función $\phi(a)$ definida por

$$(\phi(a))(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 \cdot x^n.$$

a) Probar que ϕ está bien definida.

b) Probar que ϕ es diferenciable en todo punto $a \in \ell^\infty$ y calcular su diferencial.

Nota. En ambos espacios se usa la norma infinito.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y escriba con claridad