1)
$$A = \{ f \in C(\mathbb{R}) : f \text{ es inyectiva y } f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \}$$

Por el ejercicio 27 de la PRACTICA 1, sabemos que $\# C(\mathbb{R}) = c$. Como $A \subseteq C(\mathbb{R})$ se tiene que $\# A \leq c$. (ver ★ en la siguiente hoja)

Notemos $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y consideremos la función
$\Phi : \mathbb{I} \longrightarrow A$ dada por
$\Phi(\alpha) \longmapsto f_\alpha$ donde $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$f_\alpha(x) = x + \alpha$$

Está bien definida ya que $\forall \alpha \in \mathbb{I}$, f_α es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es inyectiva (ya que si $x \neq x'$ entonces $x + \alpha \neq x' + \alpha$) y cumple que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{I}$)

Notar que la función Φ es inyectiva pues dados $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$, $\alpha \neq \beta$ tenemos que $f_\alpha(0) = \alpha \neq \beta = f_\beta(0)$ por lo que $\Phi(\alpha) \neq \Phi(\beta)$.

Como $\# \mathbb{I} = c$, se tiene que $c \leq \# A$

Luego, por Cantor-Bernstein se sigue que $\# A = c$.

★ Demostremos que $\# C(\mathbb{R}) = c$

Definamos la función $\phi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f_{|\mathbb{Q}}$. Veamos que ϕ es inyectiva.

Sean $f, g \in C(\mathbb{R})$ tales que $\phi(f) = \phi(g)$, es decir, $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y f, g son funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sigue que $f = g$ por Ejercicio 17, PRACTICA 3.

Entonces ϕ es inyectiva y $\# C(\mathbb{R}) \leq \# C(\mathbb{Q})$

A su vez, $C(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ por lo que

$\# C(\mathbb{Q}) \leq \# \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ y por aritmética de cardinales $\# \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

por lo tanto $\# C(\mathbb{Q}) \leq c$.

La relación "$\leq$" entre cardinales es una relación de orden (visto en la teórica) luego, por transitividad, tenemos que $\# C(\mathbb{R}) \leq c$

Ahora consideremos la función

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow C(\mathbb{R})$ dada por

$\varphi(x) = f_x$ con $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_x(a) = x \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Es claro que para cada $x \in \mathbb{R}$ f_x es continua, y que φ es inyectiva. Entonces $c \leq \# C(\mathbb{R})$

Por Cantor-Bernstein concluimos que

$\# C(\mathbb{R}) = c$.

2) a. Probar que una función $f: X \to Y$ es continua si y solo si $f|_{A_i} : A_i \to Y$ es continua para todo $i \in I$

Sabemos que si f es continua, entonces lo es restringiendo su dominio. puesto que si $V \subseteq Y$ es abierto, $f^{-1}_{|A_i}(V) = A_i \cap f^{-1}(V)$

y como f es continua, $f^{-1}(V)$ es abierto en X, entonces $f^{-1}_{|A_i}(V)$ es abierto en A_i (esto ocurre para cada $i \in I$). Como V era un abierto en Y arbitrario, resulta que $f^{-1}_{|A_i}$ es continua para cada $i \in I$.

Veamos la vuelta.

Queremos ver que f es continua en x_0 para todo $x_0 \in X$.

Sea $x_0 \in X$. Si x_0 es un punto aislado, entonces f es continua en x_0 (cualquiera sea $\varepsilon > 0$, tomando $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) = \{x_0\}$ se tiene que $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$).

Si x_0 no es un punto aislado, entonces existe $(x_n)_n \subseteq X$ tal que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$. Sea $i_0 \in I$ tal que $x_0 \in A_{i_0}$ y sea $\delta = \inf\{d(A_i, A_j) \mid i \neq j\} > 0$

Entonces, $d(A_{i_0}, A_j) \geq \delta > 0 \quad \forall j \in I, j \neq i_0$

recordemos que

$$d(A_{i_0}, A_j) = \inf\{d(a,b) : a \in A_{i_0}, b \in A_j\}$$

con lo cual $\delta \leq d(a,b) \quad \forall a \in A_{i_0}$ y $\forall b \in A_j$ con $j \in I \setminus \{i_0\}$.

Entonces, $B(x_0, \delta) \cap A_j = \emptyset \quad \forall j \in I \setminus \{i_0\}$.

Como $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ existe $N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N$ se tiene que $x_n \in B(x_0, \delta)$. Luego $\forall n \geq N$ $x_n \in A_{i_0}$ ya que $x_n \in \bigcup_{i \in I} A_i$ y $x_n \notin A_j$ para todo $j \in I \setminus \{i_0\}$.

Como $f|_{A_{i_0}}$ es continua y $(x_n)_{n \geq N}$ es una sucesión en A_{i_0} convergente a $x_0 \in A_{i_0}$ se tiene que $(f|_{A_{i_0}}(x_n))_{n \geq N}$ converge a $f|_{A_{i_0}}(x_0) = f(x_0)$

Esto por supuesto implica que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$. Por lo que f resulta continua en x_0. Como x_0 era arbitrario, f resulta continua.

b)

Probar que la afirmación anterior no es cierta si se cambia CONTINUA por uniformemente continua.

Sea $I = \{n \in \mathbb{N} / n$ es par$\}$. Para cada $i \in I$ consideramos $A_i = [i-1, i+\frac{1}{2}]$. Así,

$A_2 = [1, 2+\frac{1}{2}]$, $A_4 = [3, 4+\frac{1}{2}]$, ...

Notar que $\inf \{ d(A_i, A_j) \mid i \neq j \} = \frac{1}{2} > 0$

Sea $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ y consideremos

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

Para cada $i \in I$, $f_{|A_i} : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en un compacto, por lo que resulta uniformemente continua, (ver (*) HOJA SIGUIENTE)

sin embargo f no es uniformemente continua ya que las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$

$x_n = n + \frac{1}{n}$; $y_n = n$ satisfacen que

$d(x_n, y_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pero

$d(f(x_n), f(y_n)) = | n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2 | \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

por lo que tomando $\varepsilon = 1$ no es cierto que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x, y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ se verifica que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

(*) Como no vimos COMPACIDAD demostremos que para cada $i \in I$ $f|_{A_i} : A_i \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua. Bastará con ver que es Lipschitz.

Como $f|_{A_i}$ es derivable con derivada

$f'|_{A_i} : A_i \to \mathbb{R}$, $f'|_{A_i}(x) = 2x$ continua

tenemos que (por el TEOREMA DE VALOR MEDIO) dados $x, y \in A_i$ con $x \neq y$

$$|f|_{A_i}(x) - f|_{A_i}(y)| = |f'|_{A_i}(z)|\,|x-y|$$

para algún z entre x e y.

ie $|f|_{A_i}(x) - f|_{A_i}(y)| = |2z|\,|x-y| \leq 2(i+\frac{1}{2})|x-y|$

ya que $z \in A_i = [i-1, i+\frac{1}{2}]$.

Luego, $f|_{A_i}$ es Lipschitz con constante $2(i+\frac{1}{2}) \doteq L_i$

Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{L_i}$, luego para todo $x, y \in A_i$ tal que $d(x,y) < \delta$ se verifica que

$$d(f|_{A_i}(x) - f|_{A_i}(y)) \leq L_i|x-y| < L_i \cdot \delta = \varepsilon.$$

Luego $f|_{A_i}$ resulta uniformemente continua.

3) Notar que $d(s,t) = \frac{|s-t|}{1+|s-t|} \leq 1 \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

con lo cual, $\frac{d(x_n, y_n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ para cada

$n \in \mathbb{N}$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Sea $D = \{ (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : \exists n_0 / \forall n > n_0 \ q_n = 0 \}$

Notar que $\# D = \aleph_0$ ya que $D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$

con $D_k = \{ (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} / \forall n > k \ q_n = 0 \}$

y $D_k \sim \mathbb{Q}^k$ (una biyección posible es $(q_n)_n \longmapsto (q_1, q_2, \dots q_k)$)

Luego $\# D_k = \aleph_0$ y como unión numerable de conjuntos numerables es numerable, resulta que $\# D = \aleph_0$.

Veamos que D es denso. Sea $x = (x_n)_n$ y sea $r > 0$, veamos que $B(x,r) \cap D \neq \emptyset$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{r}{2}$, luego,

$\forall n > n_0 \quad \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. (i)

Sabemos que $\mathbb{Q}^{n_0}$ es denso en $\mathbb{R}^{n_0}$, luego $\exists y \in \mathbb{Q}^{n_0}$ $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_0})$ tal que

$\| (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}) - y \|_\infty < \frac{r}{2}$

entonces $|x_i - y_i| < \frac{r}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq n_0$

y como $d(s,t) \leq |s-t| \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

se sigue que para cada $1 \leq i \leq n_0$

$$d(x_i, y_i) \leq |x_i - y_i| < \frac{r}{2} \quad \text{(ii)}$$

Consideremos $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ dada por

$$q_n = \begin{cases} y_n & \forall\, 1 \leq n \leq n_0 \\ 0 & \text{si } n > n_0 \end{cases}$$

luego $(q_n)_n \in D$ y verifica que para cada

$n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d(x_n, q_n)}{n} < \dfrac{r}{2}$

ya que si $n \leq n_0$ entonces por (ii)

$$\frac{d(x_n, q_n)}{n} < \frac{r}{2n} < \frac{r}{2}$$

y si $n > n_0$ entonces por (i)

$$\frac{d(x_n, q_n)}{n} \leq \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$$

tomando supremo y llamando $q = (q_n)_n$

vemos que

$$\tilde{d}(x, q) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(x_n, q_n)}{n} \leq \frac{r}{2} < r$$

Luego $q \in B(x, r) \cap D$.

Como $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $r > 0$ eran arbitrarios, se sigue que D es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, como $\# D = \aleph_0$ concluimos que D es separable.

4) a- Probar que $\diamond$ y $d_{|U\times U}$ son topológicamente equivalentes.

En vista del ejercicio 5 ii) de la practica 3 Basta ver que $id : (U, \diamond) \longrightarrow (U, d_{|U\times U})$ es un HOMEOMORFISMO. Que es biyectiva es claro. Notar que dados $x, y \in U$, $d_{|U\times U}(x,y) =$
$= d(x,y) \leq d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^c)} - \frac{1}{d(y,U^c)} \right| = \diamond(x,y)$

por lo que $id : (U, \diamond) \longrightarrow (U, d_{|U\times U})$ es Lipschitz, entonces es continua. (dado $\varepsilon > 0$ tomar $\delta = \varepsilon$, luego si $x, y \in U$ con $\diamond(x,y) < \delta$ entonces $d_{|U\times U}(x,y) < \delta = \varepsilon$).

Para ver que la inversa es continua, hay que ver que $id : (U, d_{|U\times U}) \longrightarrow (U, \diamond)$ es continua.

Sea $\Phi : (U, d_{|U\times U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$\Phi(x) = \frac{1}{d(x,U^c)}$ que está bien definida porque U es abierto. Sabemos que la función $x \longmapsto d(x,U^c)$ es continua por ejercicio 11 de la practica 3, y para $x \in (0,+\infty)$ la función $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ es continua. Como composición de continuas es continua, Φ resulta continua.

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists \tilde{\delta} > 0$ tal que $\forall x, y \in U$ tal que $\underset{|U\times U}{d}(x,y) < \tilde{\delta}$ entonces $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Luego tomando $\delta < \min\{\tilde{\delta}, \frac{\varepsilon}{2}\}$ se verifica que

$$\Diamond(x,y) = d(x,y) + |\Phi(x) - \Phi(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego $id : (U, d_{|U\times U}) \longrightarrow (U, \Diamond)$ es continua

$\therefore$ $id\,(U, \Diamond) \longrightarrow (U, d_{|U\times U})$ es un HOMEOMORFISMO

b) Probar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ es de Cauchy para la metrica $\Diamond$ entonces $d(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, U^c) > 0$

$d(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, U^c) = \inf\{d(x_n, y) : n \in \mathbb{N},\ y \in U^c\}$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq n_0$

$\Diamond(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Supongamos que $d(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, U^c) = 0$

luego existe una subsucesión $(x_{n_j})_j$ y una sucesión $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq U^c$ tal que

$d(x_{n_j}, y_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Esto implica que

$d(x_{n_j}, U^c) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Pero entonces tomando

limite cuando $j \to +\infty$ vemos que

$$\Diamond(x_{n_j}, x_{n_0}) = \underbrace{d(x_{n_j}, x_{n_0})}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0} + \left|\frac{1}{\underbrace{d(x_{n_j}, U^c)}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} +\infty}} - \frac{1}{\underbrace{d(x_{n_0}, U^c)}_{\text{fijo}}}\right|$$

$$\Diamond(x_{n_j}, x_{n_0}) \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$$

en particular, tomando j grande y tal que $n_j \geq n_0$ se contradice que $\diamond(x_{n_j}, x_{n_0}) < \varepsilon$

$\therefore d(\{x_n\}_n, U^c) > 0$

c) Probar que $(U, \diamond)$ es completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ sucesión de Cauchy respecto de $\diamond$, entonces lo es con respecto de $d|_{U\times U}$ puesto que $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$d|_{U\times U}(x_n, x_m) \leq \diamond(x_n, x_m)$$

es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesion de Cauchy en $U \subseteq X$. Como X es completo, $\exists x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow{d} x$. Queremos ver que $x_n \xrightarrow{\diamond} x$. Si $x \in U$ entonces $\exists r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq U$. Como $x_n \xrightarrow{d} x$, $\exists n_0$ tal que $x_n \in B_d(x, r)$ $\forall n \geq n_0$

Como $d|_{U\times U}$ y $\diamond$ son topologicamente equivalentes, $B_d(x, r)$ es un abierto en $(U, \diamond)$

Más aún, para todo $\delta > 0$. la bola abierta relativa a $(U, \diamond)$ de centro x y radio δ $B_\diamond(x, \delta)$ satisface que es un abierto de $(U, d|_{U\times U})$ que contiene a x. Entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq N$ $x_n \in B_\diamond(x, \delta)$. Luego $x_n \xrightarrow{\diamond} x$.

Si en cambio $x \notin U$, $x \in U^c$. Sea $\alpha = d(\{x_n\}_n, U^c)$ por item b) $\alpha > 0$ entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(x_n, x) \geq \alpha$ contradiciendo que $x_n \xrightarrow{d} x$. $\blacksquare$