
Cálculo Avanzado - 2º Cuatrimestre 2020
Recuperatorio del 1º Parcial (14/12/2020)

1. Calcular el cardinal de

$$\mathcal{A} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : a_n \neq a_m \forall n \neq m\}.$$

2. Sea X un espacio métrico y $A, B \subset X$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \emptyset$,

ii) existen U, V abiertos de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

3. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{\geq 1}$. Definimos en ℓ_∞ la distancia

$$\tilde{d}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x - y|}{a_n}.$$

a) Probar que si $a_n = n$, (ℓ_∞, \tilde{d}) es separable.

b) Probar que si $a_n = \frac{n+1}{n}$, (ℓ_∞, \tilde{d}) no es separable.

4. Definimos en \mathbb{R} la distancia $d_\spadesuit(x, y) = |e^x - e^y|$. Probar que:

a) d_\spadesuit es topológicamente equivalente a la distancia usual.

b) $(\mathbb{R}, d_\spadesuit)$ no es completo.

Puede usar como ciertos los resultados de las guías prácticas o los vistos en la teórica.