Rocío Bernardini

HOJA N° 1

FECHA

① $A = \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \,/\, a_n \neq a_m \ \forall n \neq m\}$

Llamo $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ el conjunto de partes numerables de $\mathbb{R}$.

Por el ejercicio ㉘ de la práctica 1: $\boxed{\#\mathcal{N}(\mathbb{R}) = c}$

Por un lado $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, luego $\# A \leq \# \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y

$\# \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \underset{\text{ej (24) iii) P.1}}{=} 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} \underset{\#\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \#\mathbb{N}}{=} 2^{\aleph_0} = c$

Luego $\boxed{\# A \leq c}$. Por otro lado, si $X \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists\, \varphi_X : \mathbb{N} \longrightarrow X$ biyectiva $(\Rightarrow x_n = x_m \Leftrightarrow n = m)$

$n \longmapsto x_n$

Luego $\mathcal{N}(\mathbb{R}) \hookrightarrow A$ es inyectiva pues

$X \longmapsto (x_n)_n$

si $X, Y \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$ son tq $x_n = y_n \ \forall n \Rightarrow X = Y$

y por lo tanto $\# \mathcal{N}(\mathbb{R}) = \boxed{c \leq \# A}$

$\therefore \boxed{\# A = c}$

NOTA

② X e.m. y $A, B \subseteq X$ pqf

$A \cap \overline{B} = \phi = B \cap \overline{A} \iff \exists U, V \subseteq X$ abiertos / $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \phi$

$\Leftarrow$) hip: $\exists U, V \subseteq X$ ab. tq $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \phi$

Sup $A \cap \overline{B} \neq \phi$ (análogo para $B \cap \overline{A}$)

$\Rightarrow \exists x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A$ y $x \in \overline{B}$

$\Rightarrow x \in A$ y $\forall r > 0$ $B(x, r) \cap B \neq \phi$ ⊛

Pero $x \in A \subseteq U \underset{U \text{ abierto}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \subseteq U$, para ese ε

se tiene $B(x, \varepsilon) \cap B \neq \phi$ (por ⊛) $\Rightarrow \exists y \in B(x, \varepsilon) \cap B$

$\Rightarrow y \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$ $(y \in U)$ y $y \in B \subseteq V$ $(y \in V)$

$\Rightarrow y \in U \cap V$ $\therefore$ $\boxed{U \cap V \neq \phi}$

$\Rightarrow$) hip: $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A} = \phi$ pvq $\exists U, V \subseteq X$ ab. / $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ $U \cap V = \phi$

Sea $x \in A \Rightarrow x \notin \overline{B}$ si $A = \{x\} \Rightarrow d_{\overline{B}}(x) > 0 \Rightarrow B(x, \frac{d_{\overline{B}}(x)}{2})$ $= U$

es un abierto que contiene a A y si $r = \frac{d_{\overline{B}}(x)}{2}$ tomo

$V = B_{\overline{B}}(r) \supseteq B$ y $U \cap V = \phi$ ambos son abiertos

→como en el ej (24) iv) de la P. 2

↳ es abierto por el ej (24) iv) de la P. 2

Para A con más de un punto, tomo $r = \frac{\inf_{x \in A} d_{\overline{B}}(x)}{2}$

→ r puede ser 0 si $d(A,B)=0$ (en ese caso no sé qué hacer)

y $U = \bigcup_{x \in A} B(x, r)$ el abierto (es ab. por ser unión de abiertos)

y $V = B_{\overline{B}}(r)$ que es ab. igual que antes (algo en ⊛)

Tomalo $U = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{d_{\overline{B}}(a)}{2})$ y lo mismo con V

Rocío Bernardini

HOJA N° 2

FECHA

③ Sea $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}_{\geq 1}$, en l_∞ defino

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{a_n}$$

$l_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} / \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$

a) Pdq si $a_n = n$, (l_∞, d) es separable, es decir

(l_∞, d) con $d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{n}$ es separable

Sea $D = \{(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q} / \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $q_n = 0 \ \forall n > n_0\} \subseteq l_\infty$

Afirmo que es denso numerable. Veamos que es numerable: $D = \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} D_{n_0}$ donde $D_{n_0} = \{(q_n) \in D / q_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$

$q_n = 0 \ \forall n > n_0$

Veo que $\# D_{n_0} = \aleph_0$

La función $\mathbb{Q}^{n_0} \longrightarrow D_{n_0}$

$(q_1, \dots, q_{n_0}) \longmapsto (q_1, \dots, q_{n_0}, 0, 0, \dots)$

es biyectiva y $\# \mathbb{Q}^{n_0} = \aleph_0$ luego $\boxed{\# D_{n_0} = \aleph_0}$

Y como D es unión numerable de conj numerables

$\Rightarrow$ $\boxed{D \text{ es numerable}}$

Veamos que es denso: sea $x = (x_n)_n \in l_\infty$

$\Rightarrow \exists M > 0 / |x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = M < \infty \ \forall n\in\mathbb{N}$

Luego, por Arquim, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} / n_0 \varepsilon > M$

$\varepsilon > \frac{M}{n_0}$

Así, si $n \geq n_0 \Rightarrow \varepsilon > \frac{M}{n_0} \geq \frac{M}{n} \Rightarrow |x_n - a| = |x_n| \leq \frac{M}{n} < \varepsilon$ ⊛ $\forall n \geq n_0$

~~Entonces, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que~~

Por otro lado, para $\boxed{n < n_0}$, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ se tiene que: dado $\varepsilon > 0$ $\exists q_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$|x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, pero entonces

$\frac{|x_n - q_n|}{n} < |x_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ⊛

$\Rightarrow$ la sucesión dada por $\underbrace{(q_1, \ldots, q_{n_0}, 0, 0, \ldots)}_{q} \in D$

$d(q, x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_n - q_n|}{n} < \varepsilon$ (por ⊛ y ⊛)

y por lo tanto $\boxed{D \text{ es denso en } l_\infty}$

b) qvq si $a_n = \frac{n+1}{n} \Rightarrow (l_\infty, d)$ no es separable, es decir, (l_∞, d) con $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n|x_n - y_n|}{n+1}$

Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, a_A la sucesión dada por

$a_n = 0$ si $n \notin A$ y $a_n = 1$ si $n \in A$

$\Rightarrow \{a_A \,/\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ es un conjunto no numerable (ya que es coordinable con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) y por otro lado

$d(a_A, a_B) \overset{A \neq B}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n\,|\overbrace{a_A^n - a_B^n}^{=1}|}{n+1} = 1$ luego,

Puede que sean distintos sólo para $n = 1$ — 1/2

$\hookrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1} = 1$

Rocío Bernardini

HOJA N° 3

Existe un subconjunto no numerable y discreto, por lo que el cubrimiento por abiertos dado por $B(a_A, \frac{1}{2}) = \{a_A\}$ $(A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ no tiene subcubrimiento numerable.

$\therefore$ $\boxed{(l_\infty, d) \text{ no es separable}}$

(4) $d_\phi(x,y) = |e^x - e^y|$ distancia en $\mathbb{R}$

a) pvq d_ϕ es topo-equiv. a $d(x,y) = |x-y|$

Sea $f(x) = e^x$ que es continua (con d)

$\Rightarrow d_\phi(x,y) = d(f(x), f(y))$

Veo que $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_\phi} x$

$\Rightarrow)$ $x_n \xrightarrow{d} x$ y como f es continua se tiene que

$f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$ $\left(\begin{matrix} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq} \\ |e^{x_n} - e^x| < \varepsilon \Leftrightarrow d_\phi(x_n, x) < \varepsilon \end{matrix} \right)$. trivial

/ $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d_\phi} x$

$\Leftarrow)$ $x_n \xrightarrow{d_\phi} x$ y $f^{-1}(x) = \ln(x)$ es continua

Luego, $f^{-1}(x_n) \xrightarrow{d_\phi} f^{-1}(x)$ $\left(\begin{matrix} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \text{ tq} \\ d_\phi(\ln(x_n), \ln(x)) < \varepsilon \\ \Leftrightarrow |e^{\ln(x_n)} - e^{\ln(x)}| < \varepsilon \\ \parallel \\ |x_n - x| < \varepsilon \end{matrix} \right)$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$

$\therefore$ $\boxed{d \text{ y } d_\phi \text{ son topo-equiv.}}$

$\ln(e^{x_n}) - \ln(e^x)$

↳ Querés esto

b) $f \cup f$ $(\mathbb{R}, d_\varphi)$ no es completo

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ dada por $x_n = -n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ es de Cauchy pues dado $\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N} / \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$

Sea $\varepsilon > 0$, $n, m \geq n_0$

$$d_\varphi(x_n, x_m) = d_\varphi(-n, -m) = \left|\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^m}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{e^n}\right| + \left|\frac{1}{e^m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

pero no converge pues si lo hiciera $\exists M$ tq $d_\varphi(x_n, M) < \varepsilon$ pero

$$d_\varphi(x_n, M) = \left|\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^M}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e^M}$$

(★) $U \supseteq A$ por definición y $V \supseteq \overline{B} \supseteq B$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$

Sea $x \in V = B_{\overline{B}}(r) \Rightarrow d_{\overline{B}}(x) < r$

$\Rightarrow d_{\overline{B}}(x) < r = \inf_{x\in A} \frac{d_{\overline{B}}(x)}{2} \Rightarrow x \notin A$ (sino r no sería ínfimo)

y $x \in B(x_0, r)$ para ningún $x_0 \in A$. Si $d(A,B) = 0$ no sirve.

Nota: Gracias por todo! se disfrutó con mucho las clases.

:) Muchas gracias!