Taller de Cálculo

Notas de clase

Mariano Suárez-Álvarez

Version: 13 de diciembre de 2023

Índice general

细节决定成败[1]

[1]Los detalles determinan el resultado. El pinyin de la frase es *xìjié juédìng chéngbài*.

Estas notas están dedicadas a María Susana Montelar y a Pedro Marangunic, los profesores de la primera materia de Análisis Matemático que hice como de estudiante de matemáticas. Muchos años y mucha matemática después de eso entiendo claramente que fueron ellos los que me enseñaron qué es la matemática.

Capítulo 1
El cuerpo de los números reales

Nuestro objetivo en este curso es establecer las bases del análisis de las funciones reales y para ello, por supuesto, necesitaremos trabajar con números reales. El primer paso que daremos, entonces, será dar una descripción precisa de qué entendemos exactamente por *números reales*.

Esta no es una tarea fácil. A lo largo de casi 3000 años el problema de precisar qué es exactamente un número ha sido encarado de diversas maneras por filósofos, por matemáticos, por psicólogos, por lingüistas, por biólogos, por neurocientíficos… y no se puede decir que en todo ese tiempo y después de tanto esfuerzo toda esta gente haya llegado a ningún acuerdo — al menos, un acuerdo que sirva a nuestros fines! La forma en que saldremos de este laberinto milenario será hacia arriba. Siguiendo a David Hilbert, cambiaremos el problema: en lugar de tratar de describir *qué* son los números reales nos propondremos el objetivo un poco más modesto de describir *cómo* son. Dicho de otra forma: en lugar de tratar de describir qué son los números reales intentaremos encontrar criterios que nos permitan decidir, cuando los tengamos enfrente, que se trata de ellos — es decir, reconocerlos. Por supuesto, hacer esto no es lo mismo que lo que nos propusimos hacer originalmente: explicaremos más tarde por qué es de todas formas suficiente para nuestros fines.

Ahora bien: ¿qué significa describir *cómo* son los números reales? Siguiendo a Hilbert, entenderemos por esto describir, en primer lugar, *qué podemos hacer con ellos* y, en segundo lugar, *qué podemos esperar del resultado de hacerlo*. Así, esperamos poder realizar operaciones aritméticas con los números reales y compararlos — por ejemplo, poder decidir cuál es el más grande entre dos de ellos — entre muchas otras cosas. Por otro lado, necesitamos que esas operaciones y comparaciones tengan ciertas propiedades específicas, como que la suma sea una operación conmutativa.

En este primer capítulo nos dedicaremos a establecer un lenguaje preciso en el que podamos describir lo que queremos poder hacer con los números y las propiedades que esperamos tengan.

1.1. Cuerpos

Empezaremos por dar la definición de qué es un *cuerpo*. Como la intención de esta definición es capturar la idea intuitiva de las operaciones aritméticas y sus propiedades — tal como las aprendimos de niños — todo debería resultar muy familiar al lector. De todas formas, y en vista de que nuestro objetivo es sentar bases formales para lo que queremos hacer, iremos presentando la definición por partes y en detalle.

1.1.1. Operaciones asociativas

Supongamos que tenemos un conjunto K y una operación binaria $\star$ definida en K o, lo que es lo mismo, una función $\star : K \times K \to K$.

Definición 1.1.1.1. Decimos que la operación $\star : K \times K \to K$ es ***asociativa*** si siempre que x, y y z son elementos de K se tiene que $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.

Es fácil dar ejemplos de operaciones asociativas, porque las operaciones aritméticas elementales tienen esa propiedad.

Ejemplo 1.1.1.2. La operación $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobre el conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos dada por la suma ordinaria es asociativa, como aprendimos todos en la escuela primaria. Otra operación asociativa es la dada por la función

$$(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mapsto 17 \in \mathbb{Q}$$

que toma el valor 17 independientemente de cuáles sean sus argumentos, y otras — un poco más interesantes — son las funciones

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \text{máx}\{x, y\} \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, no toda operación es asociativa — si ese fuera el caso la Definición 1.1.1.1 no tendría mucho interés!

Ejemplo 1.1.1.3. La función

$$\star : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto x^y \in \mathbb{N}$$

no es una operación asociativa sobre el conjunto $\mathbb{N}$: para verlo es suficiente observar que

$$3 \star (3 \star 3) = 3 \star 3^3 = 3 \star 27 = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

mientras que

$$(3 \star 3) \star 3 = 3^3 \star 3 = 27 \star 3 = 27^3 = 19\,683,$$

y que estos dos números son manifiestamente diferentes. Notemos que en este ejemplo no es cierto que $a \star (b \star c)$ sea diferente de $(a \star b) \star c$ para *toda* elección de a, b y c en $\mathbb{N}$, ya que, por ejemplo, $1 \star (1 \star 1) = (1 \star 1) \star 1$ y $2 \star (2 \star 2) = (2 \star 2) \star 2$.

Otro ejemplo familiar de una operación que no es asociativa es la resta: la función

$$\star : (x, y) \in \mathbb{Z} \mapsto x - y \in \mathbb{Z}$$

no es asociativa, ya que, por caso,

$$1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1 \neq -1 = 0 - 1 = (1 - 1) - 1.$$

Supongamos que $\star : K \times K \times K$ es una operación sobre un conjunto K, y sean x, y y z tres elementos de K. La expresión

$$x \star y \star z \tag{1.1}$$

no tiene sentido, ya que $\star$ es una operación binaria. Las que sí tienen sentido son las dos expresiones

$$x \star (y \star z), \qquad (x \star y) \star z, \tag{1.2}$$

que son las dos formas de poner paréntesis en (1.1) de manera que quede determinado el orden de las operaciones a realizar. Si la operación $\star$ es asociativa, entonces sabemos que estas dos expresiones denotan al mismo elemento de K: cuando ese es el caso, *hacemos la convención* de escribir $x \star y \star z$ al valor común de las dos expresiones.

Es importante no olvidar esto: cuando escribimos un producto con tres factores como $x \star y \star z$ con respecto a una operación asociativa, lo que estamos escribiendo es el resultado de evaluar la expresión que se obtiene poniendo paréntesis de manera de que el orden de las operaciones quede bien determinado — esto puede hacerse de dos maneras distintas, pero la condición de asociatividad implica que el resultado final que obtengamos evaluando cualquiera de las dos es independiente de cuál de las dos hayamos elegido. Al momento de evaluar la expresión $x \star y \star z$, claro, nos vemos forzados a elegir una de las expresiones de (1.2), ya que la operación $\star$ es binaria.

¿Qué ocurre si tenemos *cuatro* elementos de K? Si x, y, z y u son elementos de K, entonces, como antes, la expresión

$$x \star y \star z \star u$$

no tiene, en principio, ningún sentido, y si queremos darle alguno tenemos que insertar paréntesis para dejar en claro un orden específico en el que realizar las operaciones. A diferencia de lo que ocurre cuando tenemos tres factores, ahora tenemos *cinco* formas de hacerlo:

$$\begin{gathered} ((x \star y) \star z) \star u, \qquad (x \star (y \star z)) \star u, \qquad (x \star y) \star (z \star u), \\ x \star ((y \star z) \star u), \qquad x \star (y \star (z \star u)). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Si $\star$ es una operación cualquiera, no hay ninguna razón para pensar que estas cinco expresiones denotan algo siquiera parecido.

Ejemplo 1.1.1.4. Si en el conjunto $\mathbb{N}$ consideramos la operación

$$\star : (x, y) \mapsto 2^x 3^y \in \mathbb{N},$$

entonces las cinco expresiones

$$((1 \star 1) \star 1) \star 1, \quad (1 \star (1 \star 1)) \star 1, \quad (1 \star 1) \star (1 \star 1), \quad 1 \star ((1 \star 1) \star 1), \quad 1 \star (1 \star (1 \star 1))$$

denotan enteros distintos. Verificarlo directamente es un poco laborioso, de todas maneras: por ejemplo, el valor de la expresión $((1 \star 1) \star 1) \star 1$ es el entero

$$18\,831\,305\,206\,160\,042\,291\,507\,368\,269\,622\,999\,248\,307\,066\,333\,392\,103\,538\,688,$$

y el entero $1 \star (1 \star (1 \star 1))$ tiene 696 dígitos… Dejamos al lector la tarea de encontrar una prueba de esto que no requiera calcular explícitamente los valores de las cinco expresiones de arriba.

De todas formas, si suponemos que la operación $\star$ es asociativa, entonces podemos mostrar que las cinco expresiones listadas en (1.3) denotan el mismo valor. En efecto, es consecuencia de la condición de asociatividad que tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&(\underline{x} \star (\underline{y} \star \underline{z})) \star u = ((\underline{x} \star \underline{y}) \star \underline{z}) \star u, &\qquad& \underline{x} \star (\underline{(y \star z)} \star \underline{u}) = (\underline{x} \star \underline{(y \star z)}) \star \underline{u}, \\
&x \star (\underline{y} \star (\underline{z} \star \underline{u})) = x \star ((\underline{y} \star \underline{z}) \star \underline{u}), && \underline{(x \star y)} \star (\underline{z} \star \underline{u}) = (\underline{(x \star y)} \star \underline{z}) \star \underline{u}.
\end{aligned}$$

Cada una de estas cuatro igualdades resulta de usar la igualdad $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ garantizada por la condición de asociatividad reemplazando a, b y c por las expresiones que aparecen subrayadas en el lado izquierdo. Así, en la última tomamos $a = x \star y$, $b = z$ y $c = u$.

Esta observación — de que si la operación $\star$ es asociativa, entonces las cinco expresiones de (1.3) denotan el mismo valor — nos permite hacer, como antes, la convención de que cuando escribamos

$$x \star y \star z \star u$$

nos estaremos refiriendo a su valor común. En otras palabras, siempre que estemos operando con una operación asociativa, un producto de cuatro factores como este último denotará el resultado de evaluar la expresión que se obtiene insertando en la expresión paréntesis de alguna forma hasta determinar completamente el orden de las operaciones — podemos hacer esto porque, como dijimos, el resultado final no depende de la forma específica en que insertemos los paréntesis.

Por supuesto, la pregunta natural ahora es: ¿qué ocurre si tenemos *cinco* factores? Bueno, si x, y, z, u y v son elementos de K hay 14 formas de insertar paréntesis en la expresión

$$x \star y \star z \star u \star v \tag{1.4}$$

de manera que el orden de las operaciones quede completamente determinado:

$$
\begin{aligned}
&x \star (y \star (z \star (u \star v))), && x \star (y \star ((z \star u) \star v)),\\
&(x \star y) \star ((z \star u) \star v), && x \star ((y \star z) \star (u \star v)),\\
&x \star (((y \star z) \star u) \star v), && x \star ((((y \star z) \star u) \star v),\\
&(x \star y) \star ((z \star u) \star v), && (x \star (y \star z)) \star (u \star v),\\
&(x \star (y \star (z \star u))) \star v, && (x \star ((y \star z) \star u)) \star v,\\
&((x \star y) \star (z \star u)) \star v, && ((x \star y) \star z) \star (u \star v),\\
&((x \star (y \star z)) \star u) \star v, && (((x \star y) \star z) \star u) \star v.
\end{aligned}
$$

En general, si $\star$ es una operación cualquiera, estas expresiones pueden denotar elementos distintos de K — eso ocurre, de hecho, con la operación descripta en el Ejemplo 1.1.1.4 — pero si suponemos que la operación es asociativa entonces es posible mostrar que todas tienen el mismo valor. Como en los casos anteriores, hacemos la convención de denotar ese valor común por el producto (1.4).

Claro, ahora deberíamos preguntarnos qué ocurre cuando tenemos seis factores, y siete, y ocho… La respuesta es que siempre ocurre lo mismo: ese es el contenido del siguiente resultado, que podríamos llamar la *ley de asociatividad generalizada*.

Proposición 1.1.1.5. *Sea K un conjunto y sea $\star$ una operación binaria en K que es asociativa. Si n es un entero positivo y x_1, x_2, …, x_n son elementos de K, entonces todas las expresiones que se obtienen insertando paréntesis en el producto*

$$x_1 \star x_2 \star \cdots \star x_n \tag{1.5}$$

hasta determinar completamente el orden de las operaciones denotan el mismo elemento de K. □

En vista de esto, desde ahora haremos la convención de que siempre que escribamos un producto como el de (1.5) refiriéndonos a una operación asociativa $\star$ nos estaremos refiriendo al valor común de todas las expresiones que se obtienen de él insertando paréntesis hasta determinar completamente el orden de las operaciones. Que esto no produce ninguna ambigüedad es precisamente lo que afirma la proposición.

No probaremos aquí esta proposición, aunque su demostración no es especialmente difícil. Tampoco es trivial, de todas formas! No es posible verificar igualdad por igualdad como hicimos arriba en los casos en que el número n de factores es pequeño, ya que el número de expresiones a considerar crece muy rápidamente con n: cuando n es 20 hay 1 767 263 190 expresiones a considerar. La demostración de la proposición, entonces, requiere de una nueva idea.

1.1.2. Elementos neutros

Supongamos otra vez que K es un conjunto y que $\star : K \times K \to K$ es una operación binaria en K.

Definición 1.1.2.1. Un elemento e de K es ***neutro*** para la operación $\star$ si se tiene que

$$x \star e = x, \qquad e \star x = x$$

cualquiera sea x en K.

Así, el entero 0 es neutro para la operación $+$ dada por la suma usual en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, y el número 1 es neutro para la operación $\cdot$ dada por la multiplicación usual en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Es importante observar que no toda operación admite algún elemento neutro: la suma usual $+$ en el conjunto $\mathbb{N}$ de los enteros positivos no posee ninguno, por ejemplo. Por otro lado, una operación no puede nunca admitir más que *un* elemento neutro — ese es el contenido del siguiente resultado.

Proposición 1.1.2.2. *Sea K un conjunto y sea $\star$ una operación binaria en K. Si hay en K un elemento neutro para $\star$, entonces hay exactamente uno.*

Demostración. Si e y e' son dos elementos de K que son neutros para $\star$, entonces tenemos que

$$e = e \star e' = e'.$$

La primera de estas dos igualdades es consecuencia de que e' es un elemento neutro para $\star$, mientras que la segunda es consecuencia de que e lo es. □

Gracias a esta proposición, cada vez que tengamos una operación en un conjunto que admite un elemento neutro podremos hablar de «*el* elemento neutro» de esa operación, sin ninguna ambigüedad. La notación que usaremos para denotarlo, de todas formas, dependerá del contexto.

1.1.3. Elementos inversos

Como siempre, supongamos que tenemos un conjunto K y una operación binaria $\star : K \times K \to K$ sobre K. Haremos ahora además la hipótesis de que hay en K un elemento neutro para $\star$, al que escribiremos e.

Definición 1.1.3.1. Un elemento x de K es ***inversible*** con respecto a la operación $\star$ si existe otro elemento y en K tal que $x \star y = e$ e $y \star x = e$, y en ese caso decimos que este elemento y es un ***elemento inverso*** de x.

En el conjunto $\mathbb{Z}$ dotado de la operación $+$ de la suma usual hay un elemento neutro, el cero 0, y todo elemento de $\mathbb{Z}$ es inversible con respecto a $+$: en efecto, si x es un entero, entonces el entero opuesto $-x$ tiene la propiedad de que $x + (-x) = 0$ y $(-x) + x = 0$, así que, de acuerdo a la definición que acabamos de dar, este opuesto $-x$ es un elemento inverso de x con respecto a $+$. De manera similar, en el conjunto $(0, +\infty)$ de todos los números reales positivos la operación $\cdot$ de la multiplicación usual admite un elemento neutro, el número 1, y todo elemento de $(0, +\infty)$ es inversible con respecto a esa operación: si x es un elemento de $(0, +\infty)$, entonces el número $1/x$ es un elemento inverso de x con respecto a $\cdot$ ya que, por supuesto, $x \cdot 1/x = 1$ y $1/x \cdot x = 1$.

Por otro lado, podemos considerar al conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros dotado de la operación $\cdot$ de la multiplicación usual. El número 1 es claramente un elemento neutro para $\cdot$. El número 2, por su parte, no es inversible con respecto a esta operación: no hay ningún número entero $y \in \mathbb{Z}$ tal que $2 \cdot y = 1$. De hecho, los únicos elementos de $\mathbb{Z}$ que son inversibles con respecto a esta operación $\cdot$ son 1 y -1: hay en este ejemplo exactamente dos elementos inversibles.

Es fácil dar un ejemplo en el que hay uno solo: con respecto a la operación

$$\vee : (x, y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \mapsto \max\{x, y\} \in [0, +\infty),$$

sobre el conjunto $[0, +\infty)$ el número 0 es un elemento neutro y es el único elemento del conjunto que es inversible. Notemos que no puede no haber *ningún* elemento inversible en K, ya que el elemento neutro de K siempre es inversible.

De acuerdo a la definición de arriba, un elemento de K es inversible si posee algún inverso. En general puede ser que posea varios — daremos un ejemplo de esto más abajo en el Ejercicio 1.1.3.5 — pero el siguiente resultado nos dice que esto no ocurre si la operación es asociativa, lo que es afortunado porque este es el caso que más nos interesa.

Proposición 1.1.3.2. *Sea K un conjunto, y sea $\star : K \times K \to K$ una operación en K que admite un elemento neutro e. Si esta operación $\star$ es asociativa, entonces todo elemento de K que es inversible admite exactamente un elemento inverso.*

Demostración. Supongamos que la operación $\star$ es asociativa y que x es un elemento de K que es inversible. Si y e y' son dos elementos inversos de x con respecto a $\star$, entonces

$$\begin{aligned}
y &= y \star e && \text{porque } e \text{ es un elemento neutro para } \star \\
&= y \star (x \star y') && \text{porque } y' \text{ es un elemento inverso de } x \\
&= (y \star x) \star y' && \text{porque la operación } \star \text{ es asociativa} \\
&= e \star y' && \text{porque } y \text{ es un elemento inverso de } x \\
&= y' && \text{porque } e \text{ es un elemento neutro para } \star.
\end{aligned}$$

Esto prueba lo que afirma la proposición. □

Gracias a esta proposición, siempre que tengamos una operación asociativa sobre un conjunto que admite un elemento neutro y un elemento x del conjunto que es inversible podremos hablar sin ambigüedades de «*el* elemento inverso» de x y denotarlo de alguna manera específica. La notación que usamos para denotarlo, sin embargo, normalmente depende del contexto. Así, cuando trabajamos con el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ dotado de la operación $+$ de suma usual, escribimos $-x$ al elemento inverso de un entero x, mientras que cuando trabajamos con el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales dotado de la operación $\cdot$ de multiplicación usual escribimos x^{-1} al elemento inverso de un elemento x de $\mathbb{Q}$ que es inversible.

El siguiente resultado nos da algunas propiedades básicas de los elementos inversibles con respecto a una operación asociativa que admite un elemento neutro.

Proposición 1.1.3.3. *Sea K un conjunto, y sea $\star : K \times K \to K$ una operación en K que admite un elemento neutro e.*

(*i*) *Si x es un elemento de K que es inversible y x' es un inverso de x, entonces x' es también inversible y x es un elemento inverso de x'.*

(*ii*) *Si x e y son dos elementos de K que son inversibles y x' e y' son sus elementos inversos, entonces el producto $x \star y$ también es inversible y su elemento inverso es $y' \star x'$.*

Demostración. (*i*) Sea x un elemento de K que es inversible y sea x' su elemento inverso. Esto significa que $x \star x' = e$ y $x' \star x = e$, y estas igualdades nos dicen que x' es inversible y que x un su elemento inverso.

(*ii*) Sean ahora x e y dos elementos de K que son inversibles y sean x' e y' sus correspondientes elementos inversos. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
(x \star y) \star (y' \star x') &= x \star (y \star (y' \star x')) && \text{porque la operación } \star \text{ es asociativa} \\
&= x \star ((y \star y') \star x') && \text{por la misma razón} \\
&= x \star (e \star x') && \text{porque } y' \text{ es un elemento inverso de } x \\
&= x \star x' && \text{porque } e \text{ es un elemento neutro para } \star \\
&= e && \text{porque } x' \text{ es un elemento inverso de } x.
\end{aligned}$$

Por razones similares tenemos también que

$$\begin{aligned}
(y' \star x') \star (x \star y) &= y' \star (x' \star (x \star y)) \\
&= y' \star ((x' \star x) \star y) \\
&= y' \star (e \star y) \\
&= y' \star y \\
&= e,
\end{aligned}$$

y estas dos igualdades nos permiten concluir que el elemento $x \star y$ es inversible y que $y' \star x'$ es su elemento inverso, como afirma la proposición. □

Ejercicio 1.1.3.4. Pruebe que en la misma situación que en la proposición vale que

> *si x, y y z son tres elementos inversibles de K y x', y' y z' son sus elementos inversos, entonces el producto $x \star y \star z$ es inversible y $z' \star y' \star x'$ es su inverso.*

Generalice este resultado a productos de un número cualquiera de elementos inversibles y pruebe la afirmación correspondiente.

Ejercicio 1.1.3.5. Considere el conjunto $K \coloneqq \{1, 2, 3\}$ y la operación $\star : K \times K \to K$ cuya *tabla de multiplicar* es

$\star$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	1
3	3	1	1

Muestre que hay un elemento neutro para $\star$ y que todo elemento de K es inversible, pero que hay elementos que tienen más de un elemento inverso. ¿Por qué esto no contradice la Proposición 1.1.3.2?

1.1.4. Operaciones conmutativas

Otra vez, supongamos que tenemos un conjunto K dotado de una operación binaria $\star : K \times K \to K$.

Definición 1.1.4.1. Decimos que la operación $\star$ es ***conmutativa*** si siempre que x e y son dos elementos de K se tiene que $x \star y = y \star x$.

Las operaciones dadas por la suma usual y el producto usual sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros son conmutativas, como lo es la operación

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \text{máx}\{x, y\} \in \mathbb{R}.$$

En cambio, la operación

$$(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mapsto y \in [0, 1]$$

sobre el conjunto $[0, 1]$ no es conmutativa.

La condición de conmutatividad sobre la operación $\star$ pide que el valor de un producto de dos factores $x \star y$ no dependa del orden en que esos dos factores aparecen. ¿Qué ocurre si tenemos un producto de tres factores? Discutiremos esto bajo la hipótesis de que la operación $\star$ es asociativa, de manera que una expresión como $x \star y \star z$ tenga sentido.

Supongamos que x, y y z son tres elementos de K. De acuerdo a nuestras convenciones, el valor de la expresión $x \star y \star z$ es el de $(x \star y) \star z$. Si la operación $\star$ es conmutativa, entonces $x \star y = y \star x$ y, por lo tanto, $(x \star y) \star z = (y \star x) \star z$. Esta última expresión tiene el mismo valor que $y \star x \star z$, y esto muestra que si $\star$ es asociativa y conmutativa, entonces

$$x \star y \star z = y \star y \star z \tag{1.6}$$

cualesquiera sean x, y y z en K. De manera similar, el valor de $x \star y \star z$ es el de $x \star (y \star z)$ y si la operación $\star$ es conmutativa tenemos que $y \star z = z \star y$, así que $x \star (y \star z) = x \star (z \star y)$ y, por lo tanto, vale que

$$x \star y \star z = x \star z \star y \tag{1.7}$$

cualesquiera sean x, y y z en K.

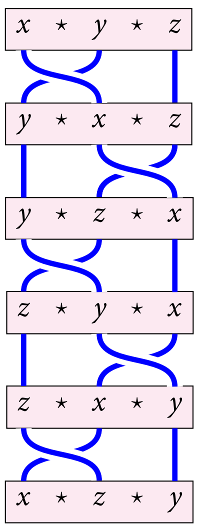
Ahora bien, usando las dos igualdades (1.6) y (1.7) podemos probar que las seis expresiones

$$x \star y \star z, \quad y \star x \star z, \quad y \star z \star x, \quad z \star y \star x, \quad z \star x \star y, \quad x \star z \star y$$

que pueden obtenerse permutando los factores en la primera de ellas tienen todas el mismo valor. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} x \star y \star z &= y \star x \star z && \text{por (1.6)} \\ &= y \star z \star x && \text{por (1.7)} \\ &= z \star y \star x && \text{por (1.6)} \\ &= z \star x \star y && \text{por (1.7)} \\ &= x \star z \star y && \text{por (1.6).} \end{aligned}$$

Notemos que en cada paso de esta cadena de igualdades intercambiamos dos de los factores. Una forma de visualizar lo que hicimos es con el siguiente diagrama:



Un argumento similar sirve para probar que si x, y, z y u son cuatro elementos de K y la operación $\star$ es asociativa y conmutativa entonces las 24 expresiones

$$\begin{aligned}
&x\star y\star z\star u, \quad x\star y\star u\star z, \quad x\star u\star y\star z, \quad u\star x\star y\star z,\\
&u\star x\star z\star y, \quad x\star u\star z\star y, \quad x\star z\star u\star y, \quad x\star z\star y\star u,\\
&z\star x\star y\star u, \quad z\star x\star u\star y, \quad z\star u\star x\star y, \quad u\star z\star x\star y,\\
&u\star z\star y\star x, \quad z\star u\star y\star x, \quad z\star y\star u\star x, \quad z\star y\star x\star u,\\
&y\star z\star x\star u, \quad y\star z\star u\star x, \quad y\star u\star z\star x, \quad u\star y\star z\star x,\\
&u\star y\star x\star z, \quad y\star u\star x\star z, \quad y\star x\star u\star z, \quad y\star x\star z\star u
\end{aligned} \tag{1.8}$$

que se obtienen al permutar los factores de la primera de ellas denotan todas al mismo elemento de K. En efecto, gracias a la asociatividad y la conmutatividad de $\star$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&x\star y\star z\star u = (x\star y)\star(z\star u) = (y\star x)\star(z\star u) = y\star x\star z\star u,\\
&x\star y\star z\star u = x\star((y\star z)\star u) = x\star((z\star y)\star u) = x\star z\star y\star u,
\end{aligned}$$

y

$$x\star y\star z\star u = (x\star y)\star(z\star u) = (x\star y)\star(u\star z) = x\star y\star u\star z.$$

Estas tres cadenas de igualdades nos dicen que en un producto con cuatro factores podemos intercambiar dos factores *consecutivos* sin cambiar el valor de la expresión completa. Con esta observación a mano, basta ahora notar que podemos pasar de cualquiera de las 24 expresiones listadas en (1.8) a cualquier otra haciendo ese tipo de intercambios. Una forma de hacer esto está indicada en la Figura 1.1 de la página 12.

Por supuesto, razonando de la misma manera podemos probar la siguiente *ley de conmutatividad generalizada*:

Proposición 1.1.4.2. *Sea K un conjunto y sea $\star$ una operación binaria en K que es asociativa y conmutativa. Si n es un entero positivo y $x_1, x_2, \dots, x_n$ son elementos de K, entonces el valor de la expresión*

$$x_1\star x_2\star\cdots\star x_n \tag{1.9}$$

no depende del orden de los n factores. □

No daremos aquí una demostración de este resultado. La idea que usamos para ver que es cierta cuando n es 3 o 4 ciertamente funciona para establecer la afirmación general[1].

[1] Observemos que no es necesario mostrar explícitamente cómo es posible ir de cada expresión obtenida permutando los factores del producto (1.9) a cualquier otra haciendo intercambios de factores consecutivos, sino que es suficiente con probar que es posible hacerlo. De todas formas, cualquiera sea el entero positivo n es posible construir de manera explícita un diagrama exactamente igual que el de la Figura 1.1. ¡Esto no es para nada evidente! Para construir esa figura usamos el algoritmo de Johnson [Joh1963], Steinhaus [Ste1964] y Trotter [Tro1962], que da lo que se llama un *código de Gray* para las permutaciones, aunque hay muchos otros.

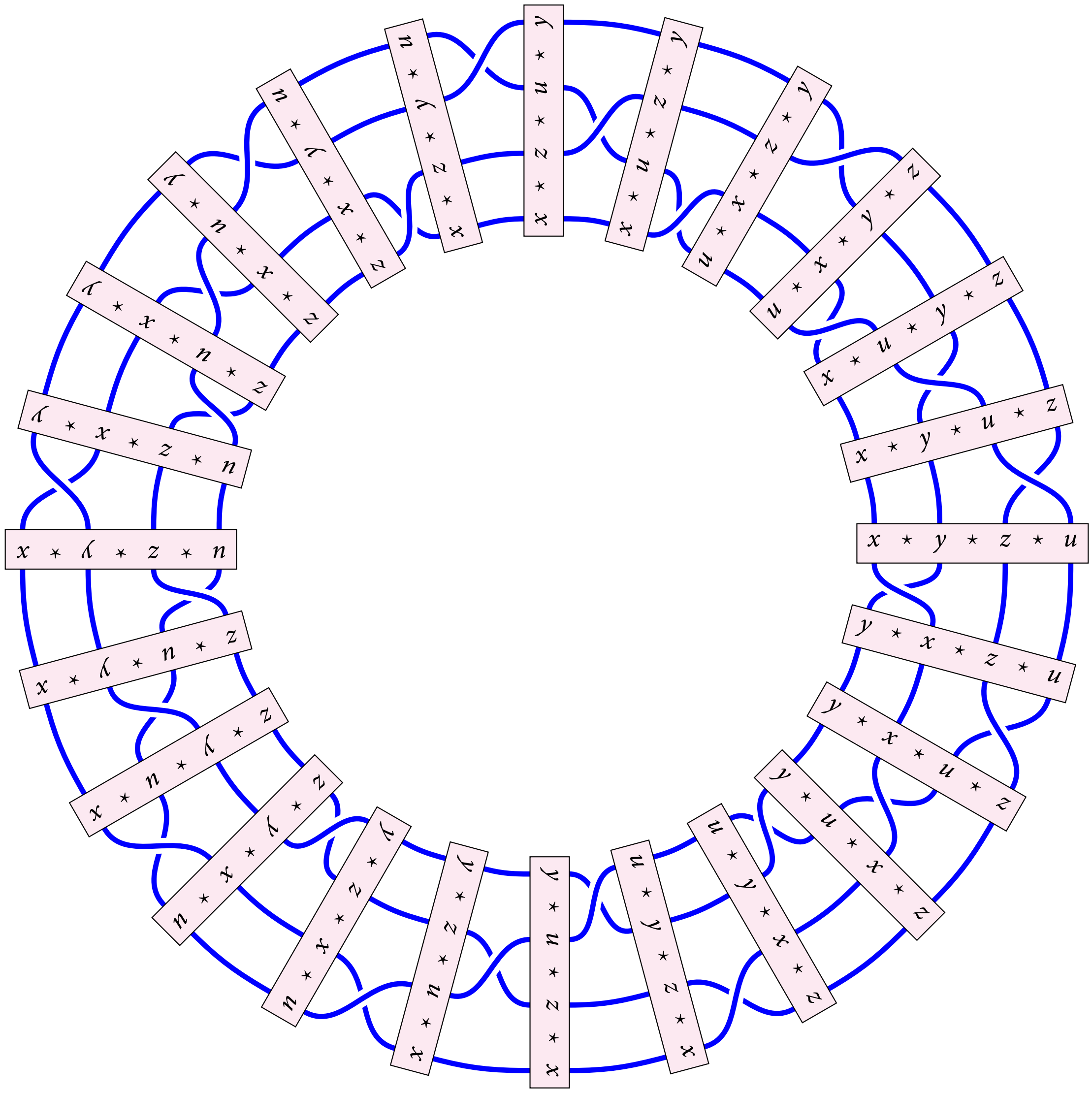


Figura 1.1. Los 24 posibles productos de cuatro factores.

1.1.5. Cuerpos

Podemos por fin dar la definición de qué es un cuerpo, ya que ya tenemos todas las partes necesarias a nuestra disposición.

Definición 1.1.5.1. Un ***cuerpo*** es un conjunto K dotado de dos operaciones binarias $+, \cdot : K \times K \to K$, la ***suma*** y el ***producto*** de K, que satisfacen las siguientes condiciones:

(*i*) La suma $+$ es asociativa y conmutativa, y admite un elemento neutro, al que escribimos 0 y llamamos el ***cero*** de K. Todo todo elemento x de K posee un elemento inverso, al que llamamos el ***elemento opuesto*** de x y escribimos $-x$.

(*ii*) El producto $\cdot$ es asociativo y conmutativo, y admite un elemento neutro, al que escribimos 1 y llamamos el ***uno*** de K. Todo elemento x de $K \setminus \{0\}$ posee un elemento inverso con respecto a $\cdot$, al que llamamos el ***elemento inverso*** de x y escribimos x^{-1}.

(*iii*) Siempre que x, y y z son elementos de K vale que

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(*iv*) Es $0 \neq 1$.

La primera de estas condiciones se refiere solamente a la suma de K, mientras que la segunda lo hace solamente a su producto. La tercera de estas condiciones impone una cierta forma de compatibilidad entre esas dos operaciones: nos dice que el producto de K se «distribuye» sobre la suma de K, y nos referimos a ella como la ***ley de distributividad***. Finalmente, la cuarta condición sirve para eliminar ciertos casos triviales que no tienen interés, como veremos abajo.

Para simplificar el trabajo con cuerpos hacemos las siguientes convenciones de lenguaje y notación:

- Salvo en situaciones excepcionales, siempre escribiremos a las operaciones de suma y producto de un cuerpo usando los signos $+$ y $\cdot$. Esto nos permite decir simplemente cosas como «sea K un cuerpo» sin hacer mención alguna a las operaciones. De la misma forma, siempre escribiremos 0 y 1 a los elementos cero y uno de un cuerpo.
- Por otro lado, como dijimos en la definición, al elemento inverso de un elemento x de K con respecto a la suma $+$ lo escribiremos siempre $-x$ y, si x es distinto de 0, al elemento inverso de x con respecto al producto $\cdot$ lo escribiremos siempre x^{-1}. Usando estas notaciones, el resultado de la Proposición 1.1.3.3 nos dice que siempre que x e y son elementos de K se tiene que

$$-(-x) = x, \qquad -(x + y) = (-y) + (-x), \tag{1.10}$$

y que si x e y son distintos de 0, entonces $x \cdot y$ es inversible con respecto al producto y

$$(x^{-1})^{-1} = x, \qquad (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

En mucho de lo que sigue usaremos estas igualdades sin mencionarlas explícitamente.

- Finalmente, cuando trabajamos con un cuerpo escribiremos generalmente $x - y$ y x/y en lugar de $x + (-y)$ y de $x \cdot y^{-1}$. Por supuesto, nos referimos a las operaciones $- : K \times K \to K$ y $/ : K \times (K \setminus \{0\}) \to K$ que obtenemos de esta forma como la ***substracción*** y la ***división*** de K.

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales dotado de sus operaciones usuales $+$ y $\cdot$ de suma y producto es un cuerpo. Para probarlo hay que verificar una a una las condiciones de la definición se satisface, y que esto es así es algo que aprendimos de niños. De la misma forma, el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales dotado de sus operaciones usuales de suma y producto es un cuerpo, y lo mismo es cierto del conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos dotado de sus operaciones usuales.

Estos ejemplos «familiares» de cuerpos no agotan ni de lejos la clase de los cuerpos que existen. Demos algunos ejemplos menos familiares para entrever las posibilidades.

Ejemplo 1.1.5.2. Consideremos el subconjunto

$$K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

de $\mathbb{R}$ de todos los números reales que pueden escribirse en la forma $a + b\sqrt{2}$ con a y b en $\mathbb{Q}$. Si x e y son dos elementos de K, de manera que hay números racionales a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$ tales que $x = a + b\sqrt{2}$ e $y = c + d\sqrt{2}$, entonces operando en $\mathbb{R}$ tenemos que

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \qquad x \cdot y = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2},$$

y, como los números $a + c$, $b + d$, $ac + 2bd$ y $ad + bc$ son todos racionales, esto nos dice que $x + y$ y $x \cdot y$ son elementos de K. Podemos entonces definir dos funciones

$$\oplus : (x, y) \in K \times K \mapsto x + y \in K, \qquad \odot : (x, y) \in K \times K \mapsto x \cdot y \in K$$

usando las operaciones de $\mathbb{R}$. Mostraremos que el conjunto K dotado de estas dos operaciones $\oplus$ y $\odot$ como suma y producto es un cuerpo.

Que se satisfacen todas las condiciones de la parte *(i)* de la Definición 1.1.5.1 es consecuencia inmediata de que la operación $+$ del cuerpo $\mathbb{R}$ las satisface. Así, si x, y y z son elementos cualesquiera de K tenemos que

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x + (y + z) && \text{por la definición de la operación } \oplus \\ &= (x + y) + z && \text{porque la operación } + \text{ de } \mathbb{R} \text{ es asociativa} \\ &= (x \oplus y) \oplus z && \text{otra vez por la definición de la operación } \oplus \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x + y && \text{por la definición de la operación } \oplus \\ &= y + x && \text{porque la operación } + \text{ en } \mathbb{R} \text{ es conmutativa} \\ &= y \oplus x && \text{por la definición de la operación } \oplus, \end{aligned}$$

y esto nos dice que la operación $\oplus$ en K es asociativa y conmutativa. El número real 0 claramente pertenece a K, y si x es un elemento cualquiera de K tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \oplus x &= 0 + x && \text{por la definición de la operación } \oplus \\ &= x && \text{porque 0 es un elemento neutro para } + \text{ en } \mathbb{R} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x \oplus 0 &= x + 0 && \text{por la definición de la operación } \oplus \\ &= x && \text{porque 0 es un elemento neutro para } + \text{ en } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

así que 0 es un elemento neutro para la operación $\oplus$ en K. Finalmente, si x es un elemento de K, de manera que hay dos números racionales a y b tales que $x = a + b\sqrt{2}$, entonces ciertamente $-a$ y $-b$ son números racionales, así que $y \coloneqq (-a) + (-b)\sqrt{2}$ es un elemento de K, y es

$$x \oplus y = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right) = (a + (-a)) + (b + (-b))\sqrt{2} = 0$$

y

$$y \oplus x = \left((-a) + (-b)\sqrt{2}\right) + \left(a + b\sqrt{2}\right) = ((-a) + a) + ((-b) + b)\sqrt{2} = 0,$$

así que y es un elemento opuesto de x con respecto a $\oplus$. Con esto hemos verificado que K dotado de la operación $\oplus$ satisface la condición *(i)* de la Definición 1.1.5.1.

Exactamente de la misma forma podemos verificar que la operación $\odot$ satisface casi todas las partes de la condición *(ii)* de esa definición: que es asociativa, que es conmutativa, y que el número 1, que ciertamente pertenece al conjunto K, es un elemento neutro para $\odot$ — otra vez, todo esto es consecuencia de que la operación $\cdot$ de $\mathbb{R}$ satisface esas condiciones. Para terminar de verificar que K y $\odot$ satisfacen la condición *(ii)* tenemos que mostrar que todo elemento de $K \setminus \{0\}$ posee un inverso con respecto a $\odot$. Hagamos eso.

Sea x un elemento del conjunto $K \setminus \{0\}$. Como x pertenece a K, sabemos que hay dos números racionales a y b tales que $x = a + b\sqrt{2}$ y, como x no es nulo, alguno al menos de a o b es no nulo. El número $c \coloneqq a^2 - 2b^2$ es claramente racional. Supongamos por un momento que $c = 0$, de manera que $a^2 = 2b^2$. Si fuera $b = 0$, esta igualdad nos diría que también es $a = 0$, y esto es absurdo. Debe ser entonces $b \neq 0$ y, por lo tanto, $2 = a^2/b^2 = (a/b)^2$: como el número a/b es racional, esto es imposible, ya que sabemos que 2 no posee una raíz cuadrada racional. Esta contradicción nos permite concluir que el número c no es nulo y considerar el número real

$$y \coloneqq \frac{a}{c} + \left(-\frac{b}{c}\right)\sqrt{2}.$$

Como a/c y $-b/c$ son claramente números racionales, tenemos que y es un elemento de K. Por otro lado, usando la definición de la operación $\odot$ y calculando directamente vemos que

$$x \odot y = (a + b\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{a}{c} + \left(-\frac{b}{c}\right)\sqrt{2}\right) = \frac{a^2 - 2b^2}{c} = 1$$

y, de manera similar, que $y \odot x = 1$. Podemos concluir entonces que y es un elemento inverso para x en K con respecto a la operación $\odot$, que, por lo tanto, el elemento x es inversible con respecto a esa operación y, con ello, que la operación $\odot$ satisface la condición *(ii)* de la Definición 1.1.5.1.

Que la condición *(iii)* se satisface en K es consecuencia de que se satisface en $\mathbb{R}$: usando dos veces las definiciones de $\oplus$ y $\odot$ y una el hecho de que $\mathbb{R}$ es un cuerpo podemos ver que si x, y y z son tres elementos de K, entonces

$$x \odot (y \oplus z) = x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z = x \odot y \oplus x \odot z.$$

Finalmente, es claro que 0 y 1 son elementos distintos de K, simplemente porque se trata de elementos distintos de $\mathbb{R}$. Esto completa la verificación de que el conjunto K dotado de las operaciones de suma $\oplus$ y producto $\odot$ es un cuerpo. Casi siempre escribimos $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ al conjunto K, y $+$ y $\cdot$ en lugar de $\oplus$ y $\odot$ cuando trabajamos con él.

La construcción que hicimos en este ejemplo puede modificarse para obtener muchos ejemplos de cuerpos — dejaremos dos instancias de esto como ejercicios para el lector.

Ejercicio 1.1.5.3. Sea d un número entero que no es el cuadrado de un número entero, y consideremos el subconjunto

$$K \coloneqq \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

de $\mathbb{C}$. Notemos que si d es positivo, este conjunto K está contenido en $\mathbb{R}$, pero que en general contiene números complejos que no son reales.

(a) Pruebe que si x e y son dos elementos de K, entonces su suma $x + y$ y su producto $x \cdot y$ calculados en $\mathbb{C}$ pertenecen a K, y que hay, por lo tanto, dos operaciones

$$\oplus : (x, y) \in K \times K \mapsto x + y \in K, \qquad \odot : (x, y) \in K \times K \mapsto x \cdot y \in K$$

en el conjunto K.

(b) Pruebe que el conjunto K dotado de estas dos operaciones como suma y como producto, respectivamente, es un cuerpo.

Normalmente escribimos $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ al cuerpo que construimos en este ejercicio.

Ejercicio 1.1.5.4. Escribamos α al número $\sqrt[3]{2}$ y consideremos el subconjunto

$$K \coloneqq \{a + b\alpha + c\alpha^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

de $\mathbb{R}$. Muestre, usando las mismas ideas que en el Ejemplo 1.1.5.2 y en el Ejercicio 1.1.5.3, que es posible hacer de K un cuerpo usando las operaciones de suma y producto que hereda de $\mathbb{R}$. La notación usual para este cuerpo es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Para construir los próximos dos ejemplos de cuerpos que queremos dar usaremos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.5.5. *Sea K un conjunto, y sean $+, \cdot : K \times K \to K$ dos operaciones binarias sobre K que hacen de él un cuerpo.*

(*i*) *Para todo elemento x de K se tiene que $x \cdot 0 = 0$.*

(*ii*) *Si x, x' e y son elementos de K tales que $x + y = x' + y$, entonces $x = x'$.*

Demostración. (*i*) Si x es un elemento cualquiera de K, entonces

$$\begin{aligned}
x \cdot 0 &= x \cdot 0 + 0 && \text{porque 0 es neutro para la suma } + \\
&= x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-(x \cdot 0))) && \text{porque } -(x \cdot 0) \text{ es opuesto de } x \cdot 0 \\
&= (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)) && \text{porque la suma } + \text{ es asociativa} \\
&= x \cdot (0 + 0) + (-(x \cdot 0)) && \text{por la ley distributiva} \\
&= x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) && \text{porque 0 es neutro para la suma } + \\
&= 0 && \text{porque } -(x \cdot 0) \text{ es opuesto de } x \cdot 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba la primera afirmación de la proposición. Para ver la segunda, supongamos que x, x' e y son elementos de K tales que $x + y = x' + y'$, y calculemos que

$$\begin{aligned}
x &= x + 0 && \text{porque 0 es neutro para la suma } + \\
&= x + (y + (-y)) && \text{porque } -y \text{ es opuesto a } y \text{ con respecto a } + \\
&= (x + y) + (-y) && \text{porque la suma } + \text{ es asociativa} \\
&= (x' + y) + (-y) && \text{por la hipótesis de que } x + y = x' + y' \\
&= x' + (y + (-y)) && \text{porque la suma } + \text{ es asociativa} \\
&= x' + 0 && \text{porque } -y \text{ es opuesto a } y \text{ con respecto a } + \\
&= x' && \text{porque 0 es neutro para la suma } +.
\end{aligned}$$

□

Antes de dar nuestros ejemplos, notemos que usando esto podemos ver por qué incluimos en la Definición 1.1.5.1 la cuarta condición:

Proposición 1.1.5.6. *Sea K un conjunto, y sean $+, \cdot : K \times K \to K$ dos operaciones. Si estas dos operaciones satisfacen las tres primeras condiciones de la Definición 1.1.5.1 y es $0 = 1$, entonces K tiene exactamente un elemento.*

Demostración. En efecto, en esas condiciones, si x es un elemento cualquiera de K tenemos que

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x && \text{porque 1 es neutro para el producto} \\ &= 0 \cdot x && \text{por la hipótesis hecha sobre } K \\ &= 0 && \text{por la primera parte de la Proposición 1.1.5.5,} \end{aligned}$$

y esto muestra que $K = \{0\}$. □

Esta proposición nos dice que la cuarta condición de la Definición 1.1.5.1 hace que no haya cuerpos de un solo elemento. La motivación para hacer eso es práctica: no hay nada muy interesante en considerar cuerpos con un sólo elemento. Por el contrario, los cuerpos con dos elementos son extremadamente útiles e interesantes — nuestro siguiente ejemplo los describe.

Ejemplo 1.1.5.7. Sea K un conjunto con *dos* elementos, y supongamos que tenemos dos operaciones binarias $+, \cdot : K \times K \to K$ que hacen de K un cuerpo. Tiene que haber en K un elemento cero y un elemento uno, y estos dos tienen que ser distintos: si los escribimos 0 y 1, respectivamente, entonces claramente es $K = \{0, 1\}$. Como el elemento 0 es neutro para la suma $+$, debe ser

$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 0 = 1. \tag{1.11}$$

De manera similar, el elemento 1 es neutro para el producto $\cdot$, así que debe ser

$$1 \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot 1 = 0, \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

El elemento 1 tiene que tener un opuesto: esto es, tiene que existir en K un elemento y tal que $1 + y = 0$ y $y + 1 = 0$, y de acuerdo a las dos últimas igualdades de (1.11) no puede ser que y sea igual a 0, así que no hay otra alternativa que que sea igual a 1. Esto nos dice que $1 + 1 = 0$. Por otro lado, sabemos de la primera parte de la Proposición 1.1.5.5 que $0 \cdot 0 = 0$. Toda esta información determina completamente las dos operaciones $+$ y $\cdot$, cuyas tablas tienen que ser necesariamente las siguientes:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Esto nos dice que *si es que hay un cuerpo con exactamente dos elementos*, entonces hay esencialmente uno solo, ya que sus elementos son necesariamente su cero y su uno y sus operaciones están completamente determinadas.

Es importante observar que esto no prueba, de todas formas, que exista algún cuerpo con exactamente dos elementos! De todas formas, sí existe. De hecho, si consideramos un conjunto K con dos elementos, a los que escribimos 0 y 1, y *definimos* sobre K dos operaciones $+, \cdot : K \times K \to K$ de manera que sus tablas sean precisamente las dos que encontramos arriba, entonces K es un cuerpo. Lamentablemente, la única forma de verificar esto en este punto — con la información que tenemos disponible — es verificar una a una las muchas condiciones implícitas en la Definición 1.1.5.1.

Hagamos primero una pequeña observación general que nos simplificará la verificación de que las dos operaciones son asociativas:

> *si L es un conjunto y $\star : L \times L \to L$ es una operación que admite un elemento neutro e, entonces siempre que x, y y z son tres elementos de K tales que $e \in \{x, y, z\}$ vale que $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.*

Probarla es fácil: si x, y y z son elemento de L, entonces

- si $x = e$, es $x \star (y \star z) = e \star (y \star z) = y \star z = (e \star y) \star z = (x \star y) \star z$,
- si $y = e$, es $x \star (y \star z) = x \star (e \star z) = x \star z = (x \star e) \star z = (x \star y) \star z$,
- y si $z = e$, es $x \star (y \star z) = x \star (y \star e) = x \star y = (x \star y) \star e = (x \star y) \star z$.

Probemos ahora que el conjunto K dotado de las operaciones descriptas arriba es un cuerpo.

- Mirando la tabla se hace evidente que 0 es un elemento neutro para la operación $+$. Queremos ver que esta operación es asociativa, y para ello tenemos que mostrar que $x + (y + z) = (x + y) + z$ cualesquiera sean x, y y z en K. Nuestra observación implica que esta igualdad vale si alguno de los tres elementos es igual a 0, así que es suficiente considerar el caso en el que ninguno de los tres lo es, esto es, el caso en el que $x = y = z = 1$. Podemos calcular en ese caso que

  $$1 + (1 + 1) = 1 + 0 = 1 = 0 + 1 = (1 + 1) + 1.$$

  La operación $+$ es, por lo tanto, asociativa. Para ver que también es conmutativa es suficiente con observar que su tabla es simétrica con respecto a su diagonal principal. Finalmente, como $0 + 0 = 0$ y $1 + 1 = 0$, los elementos 0 y 1 tienen inversos con respecto a $+$, y estos son respectivamente, 0 y 1. Concluimos así que la primera condición de la Definición 1.1.5.1 se satisface.
- Otra vez, viendo la tabla de la operación $\cdot$ es claro que 1 es un elemento neutro para $\cdot$ y que $\cdot$ es una operación conmutativa y, gracias a la observación que hicimos arriba, para ver que se trata de una operación asociativa es suficiente con calcular que

  $$0 \cdot (0 \cdot 0) = 0 \cdot 0 = (0 \cdot 0) \cdot 0.$$

  El único elemento de K distinto de 0 es 1, que es el elemento neutro para la operación $\cdot$, así que ciertamente es inversible con respecto a esa operación. Esto prueba que la segunda condición de la definición se cumple.

- Tenemos que probar ahora que se satisface la ley distributiva en K, esto es, que siempre que x, y y z son elementos de K vale que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Ahora bien, si el elemento x es 0, entonces

  $$x \cdot (y + z) = 0 \cdot (y + z) = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot y + 0 \cdot z = x \cdot y + x \cdot z$$

  así que la igualdad vale en ese caso. Si, en cambio, es $x = 1$, entonces

  $$x \cdot (y + z) = 1 \cdot (y + z) = y + z = 1 \cdot y + 1 \cdot z = x \cdot y + x \cdot z.$$

- Finalmente, es evidente que en K los elementos 0 y 1 son distintos.

Esto prueba que, como dijimos, K dotado de las dos operaciones descriptas arriba es un cuerpo con exactamente dos elementos.

Razonando de manera similar podemos describir los cuerpos de tres elementos.

Ejemplo 1.1.5.8. Supongamos ahora que K es, con respecto a dos operaciones $+, \cdot : K \times K \to K$ un cuerpo y que tiene exactamente *tres* elementos. De acuerdo a la Definición 1.1.5.1, hay en K un elemento cero 0 y un elemento uno 1, y estos dos elementos son distintos. Como K tiene tres elementos, hay entonces en K un tercer elemento distinto de 0 y de 1, al que escribiremos α, y es $K = \{0, 1, \alpha\}$. Nuestro objetivo es determinar, si es que esto es posible, las dos operaciones $+$ y $\cdot$.

Como el cero 0 es un elemento neutro para la suma $+$, la tabla de esta operación tiene que tener las siguientes entradas:

$+$	0	1	α
0	0	1	α
1	1		
α	α		

¿Qué valor tiene la expresión $1 + \alpha$? No puede ser igual a 1, porque en ese caso tendríamos que

$$1 + \alpha = 1 = 1 + 0,$$

y usando la segunda parte de la Proposición 1.1.5.5 podríamos concluir que $\alpha = 0$, lo que es absurdo. De manera similar, el valor de $1 + \alpha$ no puede ser α, ya que en ese caso tendríamos que

$$\alpha + 1 = 1 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$$

y usando la misma proposición podríamos concluir que $1 = 0$, lo que otra vez es absurdo. Vemos así que necesariamente debe ser $1 + \alpha = 0$ y, como la suma $+$ es conmutativa, también $\alpha + 1 = 0$. La tabla de la suma es entonces de la forma

$+$	0	1	α
0	0	1	α
1	1		0
α	α	0	

¿Qué valor tiene $1+1$? Si fuera 1, tendríamos que $1+1=1=1+0$ y, por lo tanto, gracias a la segunda parte de la Proposición 1.1.5.5, que $1=0$, lo que no es cierto, y si fuera 0 tendríamos que $1+1=0=1+\alpha$, de manera que $1=\alpha$, lo que tampoco es cierto: debe ser, entonces $1+1=\alpha$. De manera similar, el valor de $\alpha+\alpha$ no es α, ya que en ese caso tendríamos que $\alpha+\alpha=\alpha=\alpha+0$ y, por lo tanto, que $\alpha=0$, y tampoco es 0, porque en ese caso sería $\alpha+\alpha=0=\alpha+1$ y, por lo tanto, que $\alpha=1$. Juntando todo, vemos que la tabla de la suma $+$ está completamente determinada: es necesariamente

$+$	0	1	α
0	0	1	α
1	1	α	0
α	α	0	1

¿Qué podemos decir de la multiplicación? De acuerdo a la primera parte de la Proposición 1.1.5.5, es $x\cdot 0=0$ y $0\cdot x=0$ para todo $x\in K$, y el elemento 1 es neutro para el producto $\cdot$. Esto determina todas las entradas de la tabla de multiplicar de K salvo por una: debe ser

$\cdot$	0	1	α
0	0	0	0
1	0	1	α
α	0	α	

Si fuera $\alpha\cdot\alpha=0$, tendríamos que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha\cdot 1 && \text{porque 1 es neutro para el producto} \\
&= \alpha\cdot 1+0 && \text{porque 0 es neutro para la suma} \\
&= \alpha\cdot 1+\alpha\cdot\alpha && \text{por la hipótesis de que } \alpha\cdot\alpha=0 \\
&= \alpha\cdot(1+\alpha) && \text{por la ley distributiva} \\
&= \alpha\cdot 0 && \text{porque sabemos que } 1+\alpha=0 \\
&= 0, && \text{por la primera parte de la Proposición 1.1.5.5,}
\end{aligned}
$$

lo que es absurdo. Por otro lado, si fuera $\alpha \cdot \alpha = \alpha$, tendríamos que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha \cdot 1 && \text{porque 1 es neutro para el producto} \\
&= \alpha \cdot (\alpha \cdot \alpha^{-1}) && \text{porque } \alpha^{-1} \text{ es inverso de } \alpha \\
&= (\alpha \cdot \alpha) \cdot \alpha^{-1} && \text{porque el producto es asociativo} \\
&= \alpha \cdot \alpha^{-1} && \text{por la hipótesis de que } \alpha \cdot \alpha = \alpha \\
&= 1 && \text{porque } \alpha^{-1} \text{ es inverso de } \alpha,
\end{aligned}$$

y esto es otra vez imposible. Debe ser entonces $\alpha \cdot \alpha = 1$. Vemos así que la tabla de la multiplicación $\cdot$ también está completamente determinada: debe ser necesariamente la siguiente.

$\cdot$	0	1	α
0	0	0	0
1	0	1	α
α	0	α	1

Exactamente de la misma forma que en el Ejemplo 1.1.5.7, este razonamiento nos dice que si es que existe algún cuerpo con tres elementos, entonces hay esencialmente uno solo, ya que sus operaciones quedan completamente determinadas por las condiciones de la Definición 1.1.5.1. De la misma forma que allí, también, todo esto que hemos hecho no prueba que existe algún cuerpo con tres elementos. Para hacer esto es suficiente, de todas maneras, verificar que si usamos las dos tablas que acabamos de encontrar para *definir* operaciones de suma y producto en un conjunto de tres elementos efectivamente obtenemos un cuerpo. Dejamos esta tarea al lector.

Ejercicio 1.1.5.9. Muestre que existen cuerpos con cuatro elementos y que esencialmente hay uno solo, en el mismo sentido que en los dos ejemplos anteriores.

Observación 1.1.5.10. Es posible probar que

> *el cardinal de un cuerpo finito es de la forma p^r con p un número primo y r un entero positivo*

y que, más aún,

> *si p es un número primo y r es un entero positivo, entonces existe un cuerpo finito de cardinal p^r y, de hecho, esencialmente uno solo.*

Escribimos a ese cuerpo $\mathbb{F}_{p^r}$ o $\mathsf{GF}(p^r)$ y lo llamamos el ***cuerpo de Galois*** de orden p^r, porque este tipo de cuerpos fue considerado por primera vez por Évariste Galois [BA1962]. Los cuerpos descriptos en los Ejemplos 1.1.5.7 y 1.1.5.8 y en Ejercicio 1.1.5.9 son, por lo tanto, los cuerpos de Galois $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_4$.

Como dijimos, el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales dotado de sus operaciones usuales de suma y producto es un cuerpo. Esto, de todas maneras, no lo caracteriza ni mucho menos: esto es claro en vista de los ejemplos que acabamos de ver de cuerpos que son distintos de $\mathbb{R}$. Necesitamos entonces imponer condiciones más estrictas que la de ser simplemente un cuerpo si queremos encontrar una caracterización de $\mathbb{R}$. Daremos un paso más en esta dirección en la siguiente sección.

1.2. Cuerpos ordenados

Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto. Una relación $R \subseteq X \times X$ sobre el conjunto X es una ***relación de orden*** si satisface las siguientes tres condiciones.

- Es *reflexiva*: para cada $x \in X$ se tiene que xRx.
- Es *transitiva*: si x, y y z son elementos de X tales que xRy e yRz, entonces también xRz.
- Es *antisimétrica*: si x e y son elementos de X tales que xRy e yRx, entonces es $x = y$.

Si además se cumple la siguiente condición, entonces decimos que es una ***relación de orden total***:

- Cada vez que x e y son elementos de X se tiene que xRy o yRx.

Si dos elementos x e y de X son tales que xRy o yRx decimos que son ***comparables*** con respecto a R, y usando este lenguaje podemos decir que una relación de orden en X es total si todos los elementos de X son comparables con respecto a R.

Cuando tenemos un conjunto X dotado de una relación de orden que escribimos $\leq$, normalmente escribimos $<$ a la relación en X tal que

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y,$$

y la llamamos la relación de ***orden estricto*** asociada a $\leq$. Es fácil verificar que esta relación satisface las siguientes condiciones:

- Es ***irreflexiva***: para todo x de X no vale que $x < x$.
- Es ***asimétrica***: si x e y son elementos de X tales que $x < y$, entonces no vale que $y < x$.
- Es ***transitiva***: si x, y y z son elementos de X tales que $x < y$ e $y < z$, entonces también $x < z$.

Ejercicio 1.2.2. Pruebe en detalle que estas tres condiciones se satisfacen.

Las relaciones $\leq$ y $<$ son transitivas, y además tienen la siguiente propiedad útil:

Proposición 1.2.3. *Sea X un conjunto, sea $\leq$ una relación de orden total sobre X, y sea $<$ la correspondiente relación de orden estricto. Si x, y y z son elementos de K, entonces*

$$x < y \wedge y \leq z \implies x < z, \qquad x \leq y \wedge y < z \implies x < z,$$

Demostración. Supongamos que $x < y$ e $y \leq z$. Como es $x \leq y$, la transitividad de $\leq$ implica que $x \leq z$. Ahora bien, si fuera $x = z$ tendríamos que $x < y$ y que $y \leq z$, lo que es absurdo, así que debe ser, de hecho, $x < z$. Esto prueba la primera implicación del enunciado, y la segunda puede probarse de exactamente la misma forma. □

Es fácil dar ejemplos de relaciones de orden. La relación de orden usual $\leq$ en el conjunto $\mathbb{N}$ es una relación de orden total. Las relaciones de orden usuales en los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{R}$ también lo son. La relación $\mid$ de divisibilidad en $\mathbb{N}$, que para cada x e y en $\mathbb{Z}$ satisface la condición

$$x \mid y \iff x \text{ divide a } y,$$

es una relación de orden sobre $\mathbb{N}$ que no es total: por ejemplo, tenemos que $2 \nmid 3$ y $3 \nmid 2$. De manera similar, la relación R sobre el conjunto $\mathbb{R}^2$ que para cada par de elementos (x, y) y (x', y') de $\mathbb{R}^2$ satisface la condición

$$(x, y) \mathrel{R} (x', y') \iff x \leq x' \wedge y \leq y'$$

es una relación de orden sobre $\mathbb{R}^2$ que no es total: por ejemplo, los elementos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ no son comparables con respecto a R.

La razón por la que nos interesan aquí las relaciones de orden es que nos permiten hacer la siguiente definición:

Definición 1.2.4. Sea K un cuerpo. Una relación de orden $\leq$ sobre K hace de K un ***cuerpo ordenado*** si es total y se satisfacen las siguientes condiciones:

(*i*) Si x, y y z son elementos de K tales que $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.

(*ii*) Si x e y son elementos de K tales que $0 < x$ y $0 < y$, entonces también $0 < x \cdot y$.

Las relaciones de orden usuales sobre los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ hacen de esos cuerpos cuerpos ordenados. El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ del Ejemplo 1.1.5.2 está contenido en $\mathbb{R}$, así que podemos considerar en él la relación de orden $\leq$ evidente: con respecto a ella es también un cuerpo ordenado.

Ejercicio 1.2.5. Muestre que un elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ puede escribirse en la forma $a + b\sqrt{2}$ con a y b dos números racionales de exactamente una forma y, usando esto, que hay una relación de orden $\leq$ sobre el conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tal que

$$a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2} \iff a - b\sqrt{2} \leq c - d\sqrt{2}$$

que hace del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ un cuerpo ordenado. Esta relación de orden es distinta de la que este conjunto hereda de $\mathbb{R}$, y esto muestra que un cuerpo puede admitir más de un orden con respecto al cual sea un cuerpo ordenado.

Este ejemplo muestra, como dijimos, que hay cuerpos que pueden ordenarse de muchas formas. Hay, por otro lado, cuerpos que no pueden ordenarse de ninguna. Un ejemplo de esto es el cuerpo de los números complejos:

Proposición 1.2.6. *No hay ninguna relación de orden sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos que haga de él un cuerpo ordenado.*

Demostración. Supongamos que $\leq$ es una relación de orden sobre el conjunto $\mathbb{C}$ que hace de él un cuerpo ordenado. Como 0 e i son elementos distintos de $\mathbb{C}$, debe ser o bien $0 < i$ o bien $i < 0$.

Supongamos que es $0 < i$. Usando la segunda condición de la Definición 1.2.4 vemos que $0 < i \cdot i = -1$ y, usándola una vez más, que $0 < (-1) \cdot (-1) = 1$. Por otro lado, como $0 < -1$, de la primera condición de la definición tenemos que $1 = 0 + 1 \leq (-1) + 1 = 0$ y, por lo tanto, que simultáneamente es $0 < 1$ y $1 \leq 0$, lo que es absurdo.

Debe ser entonces $i < 0$, así que $0 = i + (-i) \leq 0 + (-i) = -i$ de acuerdo a la primera condición. Como $0 \neq -i$, es de hecho $0 < -i$ y la segunda condición implica entonces que $0 < (-i) \cdot (-i) = -1$. A partir de esta desigualdad la primera condición nos permite deducir que que $1 = 0 + 1 \leq (-1) + 1 = 0$, mientras que la segunda nos dice que $0 < (-1) \cdot (-1) = 1$. Otra vez tenemos que $1 \leq 0$ y $0 < 1$ al mismo tiempo, lo que es imposible.

En cualquier caso llegamos a una contradicción, y esto proviene de haber supuesto que hay en $\mathbb{C}$ una relación de orden que hace de él un cuerpo ordenado. Esto debe ser, por lo tanto, falso, y la proposición verdadera. □

Una familia importante de cuerpos que no pueden ordenarse es la de los cuerpos finitos. Esto es consecuencia del siguiente resultado:

Proposición 1.2.7. *Un cuerpo ordenado es infinito.*

Demostración. Supongamos que K es un cuerpo finito y que $\leq$ es una relación de orden sobre K que hace de él un cuerpo ordenado. Los elementos 0 y 1 de K son distintos, así que o bien $0 < 1$ o bien $1 < 0$, y en este segundo caso tenemos que $0 = 1 + (-1) \leq 0 + (-1) = -1$. Más aún, en este último caso es $0 \neq -1$, ya que de lo contrario tendríamos que $0 = 1 + (-1) = 1 + 0 = 1$, así que $0 < -1$.

Vemos así que hay un elemento x de K tal que $0 < x$.

Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ de elementos de K que tiene $a_1 = x$ y $a_n = x + a_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$, de manera que

$$a_1 = x, \qquad a_2 = x + x, \qquad a_3 = x + x + x, \qquad a_4 = x + x + x + x, \qquad \ldots$$

Como el conjunto K es finito, no puede ser que todos los elementos de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ sean distintos y existe, por lo tanto, dos enteros positivos r y s tales que $r < s$ y $a_r = a_s$.

Afirmamos que

$$\textit{para todo } i \in \mathbb{N} \textit{ vale que } a_r < a_{r+i}. \tag{1.12}$$

Que esto es cierto cuando $i = 1$ es claro: como $0 < x$, la primera condición de la Definición 1.2.4 implica que $a_r = a_r + 0 \leq a_r + x = a_{r+1}$, y debe ser $a_r < a_{r+1}$, ya que en caso contrario tendríamos que $a_r + 0 = a_r = a_{r+1} = a_r + x$ y, de acuerdo a la segunda parte de la Proposición 1.1.5.5, que $x = 0$. Por otro lado, si $i \in \mathbb{N}$ es tal que vale que $a_r < a_{r+i}$, entonces también tenemos que

$$a_r < a_{r+i} = a_{r+i} + 0 \leq a_{r+i} + x = a_{r+i+1},$$

gracias a la primera condición de la Definición 1.2.4, y, de acuerdo a la Proposición 1.2.3, esto implica que $a_r < a_{r+i+1}$. Nuestra afirmación sigue entonces por inducción.

Ahora bien, como $s - r \in \mathbb{N}$, esa afirmación (1.12) nos dice que $a_r < a_{r+(s-r)} = a_s$, y esto es absurdo en vista de la forma en que elegimos los enteros r y s. Esto prueba la proposición. □

El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales es un cuerpo ordenado con respecto a su relación de orden usual, y acabamos de mostrar que no todo cuerpo puede ordenarse. Esto nos dice que la condición de ser un cuerpo ordenado nos permite distinguir a $\mathbb{R}$ de otros cuerpos. Por supuesto, no lo distingue de todos — por ejemplo, los cuerpos $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ son también cuerpos ordenados con respecto a sus órdenes usuales. En la próxima sección mejoraremos esta situación.

1.3. Completitud

Supongamos que tenemos un conjunto X dotado de una relación de orden total $\leq$.

Definición 1.3.1. Sea A un subconjunto de X.

- Un elemento c de X es una ***cota superior*** para A en X si $a \leq c$ cualquiera sea $a \in A$.
- El conjunto A es ***acotado superiormente en X*** si hay una cota superior para A en X.
- Un elemento c de X es un ***máximo*** para A si es una cota superior para A en X y pertenece a A.

- Un elemento c de X es un ***supremo*** para A en X si
  - c es una cota superior para A en X, y
  - cada vez que $d \in X$ es una cota superior para A en X se tiene que $c \leq d$.

Un conjunto acotado superiormente posee en general muchas cotas superiores. Por ejemplo, en el conjunto $\mathbb{R}$ con su orden usual, los números 2 y 3 son cotas superiores para el subconjunto $[0,1]$. Por el contrario, un subconjunto posee a lo sumo un supremo:

Proposición 1.3.2. *Sea X un conjunto y sea $\leq$ una relación de orden total en X. Si A es un subconjunto de X que posee un supremo en X, entonces posee exactamente uno.*

Siempre que A sea un subconjunto de un conjunto totalmente ordenado X que admite un supremo en X, escribiremos a este $\sup A$ y nos referiremos a él como *el* supremo de A. Notemos que el conjunto X queda implícito en esta notación.

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto de X y que c y c' son dos supremos para A en X. Como c es una cota superior para A y c' es un supremo para A, tenemos que $c' \leq c$. De manera similar, como c' es una cota superior para A y c es un supremo para A, tenemos que $c \leq c'$. Juntando estas dos desigualdades vemos que $c = c'$, y esto prueba la proposición. □

El siguiente resultado, que es inmediato, da una caracterización útil del supremo de un conjunto que usaremos muy frecuentemente.

Proposición 1.3.3. *Sea X un conjunto, sea $\leq$ una relación de orden total en X, sea A un subconjunto de X. Un elemento c de X es el supremo de A en X si y solamente si*

- *c es una cota superior para A y*
- *si d es un elemento de X tal que $d < c$, entonces d no es una cota superior para A.* □

Las nociones de máximo y de supremo están íntimamente relacionadas: ese es el punto del siguiente resultado.

Proposición 1.3.4. *Sea X un conjunto, sea $\leq$ una relación de orden total en X, y sea A un subconjunto de A. Un elemento c de X es un máximo para A si y solamente sí es un supremo para A en X y pertenece a él.*

Una consecuencia inmediata de esto y de la Proposición 1.3.2, claro, es que un subconjunto de A posee a lo sumo un máximo — y cuando posee uno podemos escribirlo $\max A$ sin ambigüedad.

Demostración. Sea c un elemento de X y supongamos primero que c es un máximo para A. De esto se sigue, claro, que c es una cota superior para A. Por otro lado, si d es un elemento de X tal que $d < c$, entonces d no es una cota superior para A, porque c pertenece a A. Esto muestra que c es un supremo para A en X que pertenece a A.

Por otro lado, si c es un supremo para A en X que pertenece a A, entonces es una cota superior para A que pertenece a A y, por lo tanto, es un máximo para A. □

Demos algunos ejemplos de las nociones presentadas en esta sección.

Ejemplo 1.3.5. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ ordenado con su orden usual.

- El conjunto $[0,1]$ tiene a 1 como supremo. En efecto, es claro que $x \leq 1$ siempre que $x \in [0,1]$, así que 1 es una cota superior para $[0,1]$. Como además pertenece a $[0,1]$, se trata de un máximo de ese conjunto y, en particular, de un supremo de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.
- El conjunto $[0,1)$ también tiene a 1 como supremo en $\mathbb{R}$. Otra vez es claro que $x \leq 1$ para todo $x \in [0,1)$. Ahora, si d es un elemento de $\mathbb{R}$ tal que $d < 1$, entonces el número $a \coloneqq \text{máx}\{1/2, (1+d)/2\}$ pertenece a $[0,1)$ y es $d < a$, de manera que d no es una cota superior para $[0,1)$. Esto prueba que $\sup[0,1) = 1$, como dijimos. Notemos que como 1 no pertenece al conjunto $[0,1)$, no es un máximo suyo y, por lo tanto, que este conjunto no posee ningún máximo.
- El conjunto $S \coloneqq \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ también tiene a 1 como supremo en $\mathbb{R}$. En efecto, 1 es una cota superior de S, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $1 - \frac{1}{n} < 1$. Sea, por otro lado, d un número real tal que $d < 1$. Como $1 - d > 0$, es $1/(1-d) > 0$ y sabemos que hay un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/(1-d) < n$: en ese caso tenemos que $d < 1 - \frac{1}{n} \in S$ y, por lo tanto, el número d no es una cota superior para S. Usando la proposición podemos concluir de esto que $\sup S = 1$.

Es claro que un conjunto que posee supremo es acotado superiormente, ya que su supremo es una de sus cotas superiores. Sin embargo, esta condición no es en general suficiente.

Ejemplo 1.3.6. Consideremos el conjunto $\mathbb{Q}$ dotado de su orden usual, y su subconjunto

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}.$$

Este conjunto esta acotado superiormente en $\mathbb{Q}$. En efecto, si x es un número real tal que $x > 2$, entonces $x^2 > 4 > 2$ y $x \notin A$: esto nos dice que $x \leq 2$ siempre que $x \in A$ y, por lo tanto, que 2 es una cota superior para A en $\mathbb{Q}$.

Supongamos ahora que el conjunto A posee un supremo $s \coloneqq \sup A$ en $\mathbb{Q}$. Como $1 \in A$, sabemos que $1 \leq s$. Por otro lado, como 2 no es el cuadrado de un número racional, sabemos que $s^2 - 2 \neq 0$, así que o bien es $s^2 < 2$ o bien $s^2 > 2$. Consideraremos estas dos posibilidades separadamente.

- Supongamos primero que $s^2 < 2$. Como $s > 1$, el número $s + 2$ es estrictamente positivo y podemos considerar el número

$$t \coloneqq \frac{2s+2}{s+2}.$$

Como s es un número racional, t también lo es, y es

$$t^2 - 2 = \frac{(2s+2)^2}{(s+2)^2} - 2 = 2\frac{s^2-2}{(s+2)^2} < 0,$$

así que $t^2 < 2$ y, en definitiva, es $t \in A$. Como s es una cota superior para A, es entonces $t \le s$ y, por lo tanto,

$$0 \ge t - s = \frac{2s+2}{s+2} - s = \frac{2s+2-s^2-2s}{s+2} = \frac{2-s^2}{s+2} > 0,$$

ya que $s > s^2$ y $s + 2 > 0$. Esto es, por supuesto, absurdo.

- Debe ser entonces $s^2 > 2$. Como $s > 0$, podemos considerar el número

  $$u \coloneqq \frac{s^2+2}{2s},$$

  que otra vez es racional y positivo. Este número es estrictamente menor que s, ya que $s^2 > 2$ y, por lo tanto,

  $$u - s = \frac{s^2+2}{2s} - s = \frac{2-s^2}{2s} < 0.$$

  Además, es

  $$u^2 - 2 = \frac{(s^2-2)^2}{4s^2} > 0,$$

  de manera que $2 < u^2$.

  Sea a es un elemento de A. Si $a \le 0$, entonces claramente $a \le u$. Supongamos que, por el contrario, es $a > 0$. Como $a^2 < 2 < u^2$, tenemos que $0 < u^2 - a^2 = (u-a)(u+a)$ y, dado que $u + a > 0$, esto implica que $0 < u - a$, es decir, que $a < u$. Vemos así que, en cualquier caso se tiene que $a \le u$: esto muestra que u es una cota superior para el conjunto A. Esto es absurdo, ya que es menor que s y s es el supremo de A.

Como ninguna de estas dos posibilidades puede ocurrir, llegamos a una contradicción. La conclusión de esto es que el conjunto A no posee un supremo en $\mathbb{Q}$.

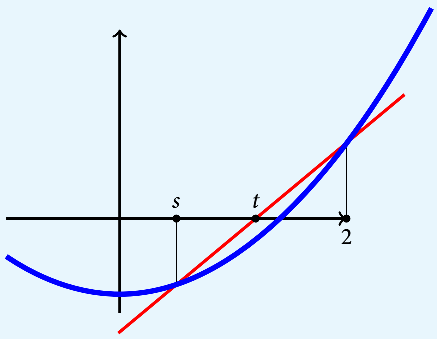
Observación 1.3.7. Esta demostración parece un poco mágica porque no explicamos de dónde sacamos los números t y u que usamos en ella. Revelemos el secreto. Consideremos la función

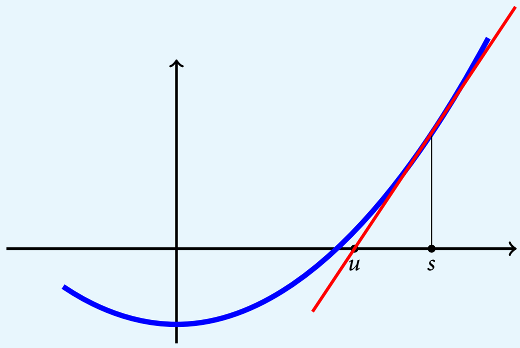
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar el número t hicimos un paso del *método de la secante* para aproximar los ceros de la función f: en general, si a y b son dos aproximaciones para un cero de esa función, el método nos propone usar a

$$c \coloneqq a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

como una mejor aproximación. Si aquí tomamos $a = s$ y $b = 2$, entonces x resulta igual a t, y las propiedades de este número son consecuencia de propiedades generales del método de la secante y de que la función f es convexa.





De manera similar, para encontrar el número u hicimos un paso del *método de Newton–Raphson* para encontrar aproximar los ceros de f: si a es una aproximación de un cero de f, este método nos propone usar a

$$c \coloneqq a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

como una mejor aproximación. Si empezamos con $a = s$, entonces esta aproximación c es precisamente el numero u que usamos arriba, y otra vez las propiedades útiles de este número son consecuencia de propiedades generales del método de Newton–Raphson.

La situación en la que todo conjunto acotado superiormente posee un supremo es extremadamente importante, y le ponemos un nombre:

Definición 1.3.8. Sea X un conjunto dotado de una relación de orden total $\leq$. Decimos que X es ***completo*** con respecto a $\leq$ si todo subconjunto no vacío de X que es acotado superiormente posee un supremo en X.

El Ejemplo 1.3.6 muestra que el conjunto $\mathbb{Q}$ dotado de su orden usual no es completo. Por otro lado, el conjunto $\mathbb{R}$ dotado de su orden usual sí es completo — esta es la razón por que nos interesa esa noción de completitud, de hecho. Con las herramientas que tenemos a nuestra disposición en este momento no podemos describir exactamente qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ son completos con respecto al orden que heredan de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.3.9. Muestre que el subconjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ de $\mathbb{R}$ descripto en el Ejemplo 1.1.5.2 no es completo con respecto al orden que hereda de $\mathbb{R}$. Una forma de hacer esto es probar que su subconjunto $\{x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) : x^2 < 3\}$ es acotado en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y no posee supremo allí.

Hemos dado ejemplos de conjuntos ordenados que *no* son completos, pero ninguno de conjuntos ordenados que sí lo son. Demos algunos.

Proposición 1.3.10. *Un conjunto totalmente ordenado y finito es completo.*

Demostración. Sea X un conjunto finito, sea $\leq$ una relación de orden total en X, y sea A un subconjunto no vacío de X. Para probar la proposición tenemos que mostrar que A posee un supremo en X. Ahora bien, como X es finito y A es un subconjunto de X, es claro que A mismo es un conjunto finito. Escribamos n a su cardinal, que es un elemento de $\mathbb{N}$. Probaremos que A posee un supremo en X haciendo inducción con respecto a este entero n.

Supongamos primero que A tiene exactamente un elemento y escribamos a ese elemento a, de manera que $A = \{a\}$. Como $a \leq a$, es claro que a es una cota superior para A. Como además pertenece a A, se trata, de hecho, de un máximo para A y, en particular, de un supremo para A. Lo que queremos es, por lo tanto, cierto en este caso.

Supongamos ahora que el cardinal n de A es mayor que 1 y sea a un elemento cualquiera de A. El conjunto $B \coloneqq A \setminus \{a\}$ es entonces un subconjunto de A, así que se trata de un subconjunto finito de X, y su cardinal es $n - 1$, así que no es vacío. Inductivamente, entonces, podemos suponer que B admite un supremo en X, al que escribiremos b. Tenemos ahora que considerar dos casos, dependiendo de la relación de orden entre a y b.

- En primer lugar, supongamos que $a \leq b$. Si c es un elemento de A, entonces o bien c pertenece a B, y en ese caso $c \leq b$ porque b es una cota superior para B, o bien c es a, y en ese caso $c \leq b$ por nuestra hipótesis. Vemos así que b es una cota superior para A. Por otro lado, sea d un elemento de X tal que $d < b$. Como b es el supremo de B, hay un elemento e de B tal que $d < e$: como $e \in A$, esto nos dice que d no es una cota superior para A. De acuerdo a la Proposición 1.3.3, b es un supremo para A en X.
- En segundo lugar, supongamos que $b \leq a$. Si c es un elemento de A, entonces bien c pertence a B y, como b es una cota superior para B, es $c \leq b \leq a$, o bien c es a y, por lo tanto, $c \leq a$. Vemos así que a es una cota superior para A. Por otro lado, es claro que un elemento d

menor que a no es una cota superior para A, ya que a pertence a A, y otra vez gracias a la Proposición 1.3.3 podemos concluir que a es un supremo para A en X.

En cualquiera de los dos casos, entonces, el conjunto A posee un supremo en X. □

Hasta ahora estuvimos hablando de cotas superiores, máximos y supremos, pero hay también versiones «inferiores» de estas nociones:

Definición 1.3.11. Sea A un subconjunto de X.

- Un elemento c de X es una ***cota inferior*** para A en X si $a \geq c$ cualquiera sea $a \in A$
- El conjunto A es ***acotado inferiormente*** en X si existe una cota inferior para A en X.
- Un elemento c de X es un ***mínimo*** para A si es una cota inferior para A en X y pertenece a A.
- Un elemento c de X es un ***ínfimo*** para A si
  - c es una cota inferior para A en X, y
  - cada vez que $d \in X$ es una cota inferior para A en X e tiene que $c \geq d$.

Exactamente de la misma forma que probamos la Proposición 1.3.2 podemos probar que un conjunto posee a lo sumo un ínfimo:

Proposición 1.3.12. *Sea X un conjunto y sea $\leq$ una relación de orden total sobre X. Un subconjunto A de X que posee un ínfimo posee exactamente uno.* □

En vista de este resultado, siempre que un subconjunto A de X posea ínfimo podemos escribirlo sin ambigüedades $\inf A$. Por otro lado, así como la Proposición 1.3.3 nos da una una condición útil para verificar que elemento de X es el supremo de un conjunto, el siguiente resultado lo hace para el ínfimo.

Proposición 1.3.13. *Sea X un conjunto, sea $\leq$ una relación de orden total en X, y sea A un subconjunto de X. Un elemento c de X es el ínfimo de A si y solamente si*

- *c es una cota inferior para A y*
- *si d es un elemento de X tal que $d > c$, entonces d no es una cota inferior para A.* □

Ejercicio 1.3.14. Pruebe en detalle las Proposiciónes 1.3.12 y 1.3.13.

Tenemos la siguiente versión de la Proposición 1.3.4:

Proposición 1.3.15. *Sea X un conjunto, sea $\leq$ una relación de orden total en X, y sea A un subconjunto de A. Un elemento c de X es un mínimo para A si y solamente sí es un ínfimo para A en X y pertenece* *a él.* □

Se sigue de esto que un conjunto A posee como mucho un mínimo, por supuesto, y cuando posee uno podemos escribirlo $\min A$ sin ambigüedad alguna.

No damos una versión de la noción de completitud para ínfimos, ya que no es necesario, como muestran el siguiente resultado y, de manera más evidente, el del Ejercicio 1.3.17 que lo sigue.

Proposición 1.3.16. *Sea X un conjunto dotado de una relación de orden total $\leq$. Si X es completo, entonces todo subconjunto no vacío de X que es acotado inferiormente posee un ínfimo.*

Demostración. Supongamos que X es completo y sea A un subconjunto no vacío de A que es acotado inferiormente. Escribamos B al conjunto de todas las cotas inferiores de A. Como A es acotado inferiormente, el conjunto B no es vacío. Por otro lado, como A no es vacío, podemos elegir un elemento a de A: este elemento es una cota superior para B, ya que todo $b \in B$ es una cota inferior de A y, en particular, es tal que $b \leq a$. Vemos así que el subconjunto B de X es no vacío y acotado superiormente: como estamos suponiendo que X es completo, sabemos entonces que existe en X un supremo para B. Escribamos $c \coloneqq \sup B$ a ese supremo. Mostraremos que c es también un ínfimo para el conjunto A y esto probara la proposición.

- Supongamos por un momento que c no es una cota inferior para el conjunto A, de manera que hay un elemento a de A tal que $a < c$. Como c es el supremo de B, por su parte, esto implica que a no es una cota superior para B y que existe entonces un elemento b de B tal que $a < b$: esto es absurdo, porque b, por pertenecer a B, es una cota superior para A. Vemos así que c es una cota inferior para el conjunto A.
- Sea ahora d un elemento de X tal que $d > c$. Si d es una cota inferior para el conjunto A, entonces d pertenece a B y, por lo tanto, como c es una cota superior para B, tenemos que $d \leq c$: esto es imposible, ya que $d > c$. Esta contradicción nos permite concluir que d no es una cota superior para A.

Hemos probado que el elemento c de X satisface las dos condiciones de la Proposición 1.3.13, así que se trata del ínfimo de A. □

Esta proposición resuelve la mitad del siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.3.17. Pruebe que un conjunto totalmente ordenado X es completo si y solamente si todo subconjunto no vacío de X que es inferiormente acotado posee un ínfimo.

Antes de continuar en la siguiente sección con nuestro estudio de los cuerpos, demos un resultado que establece una relación entre los ínfimos y supremos en un conjunto ordenado.

Proposición 1.3.18. *Sea X un conjunto dotado de una relación de orden total $\leq$, y sea A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de X. Un elemento c de X es el supremo de A en X. si y solamente si es el mínimo del conjunto de cotas superiores de A.*

Demostración. Escribamos $\mathscr{C}$ al conjunto de todas las cotas superiores el conjunto A. Como A es acotado superiormente, claro, tenemos que $\mathscr{C} \neq \varnothing$.

Supongamos primero que c es el supremo de A en X. Como c es una cota superior para A, tenemos que $c \in \mathscr{C}$. Por otro lado, si d es un elemento de $\mathscr{C}$, entonces d es una cota superior para A en X y, como c es el supremo de A en X, tenemos que $c \leq d$: esto nos dice que c es una cota inferior para el conjunto $\mathscr{C}$. Juntando todo, hemos probado que c es el mínimo del conjunto $\mathscr{C}$ y, por lo tanto, que la condición que da la proposición es necesaria.

Probemos ahora que también es suficiente. Supongamos que c es el mínimo del conjunto $\mathscr{C}$. Como c pertenece entonces a $\mathscr{C}$, se trata de una cota superior para A en X. Por otro lado, si d es una cota superior para A en X, entonces d pertenece a $\mathscr{C}$ y, como c es el mínimo de $\mathscr{C}$, tenemos que $c \leq d$. Esto muestra que c es el ínfimo de A en C, como queremos. □

Por supuesto, hay un resultado análogo al de la proposición que acabamos de probar: en la misma situación, un elemento de X es el ínfimo de un conjunto A que es no vacío y acotado inferiormente si y solamente si es el máximo del conjunto de cotas inferiores de A.

1.4. El cuerpo de los números reales

Después del trabajo de las tres secciones anteriores tenemos por fin todas las definiciones que necesitamos para nuestro propósito original de describir qué entendemos por *número real*.

Como observamos arriba, sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tenemos definidas dos operaciones $+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de suma y producto que hacen de él un cuerpo en el sentido de la Definición 1.1.5.1. Esto significa, simplemente, que estas operaciones tienen las propiedades básicas que aprendimos todos de niños. Más aún, hay en $\mathbb{R}$ una relación de orden $\leq$ que hace de ese cuerpo un cuerpo ordenado en el sentido de la Definición 1.2.4 y, otra vez, esto significa simplemente que esa relación de orden interactúa con las dos operaciones aritméticas de $\mathbb{R}$ de la manera esperada.

Es mucho menos claro que todo esto que el conjunto $\mathbb{R}$, cuando lo dotamos de esa relación de orden $\leq$, es un conjunto ordenado completo en el sentido de la Definición 1.3.8. ¡Ciertamente no es esto algo que nos hayan enseñado cuando éramos niños! La observación de que el conjunto de los números reales es completo con respecto a su orden usual es el resultado final de un largo trabajo de reflexión sobre los fundamentos del análisis por parte de muchos matemáticos. Los historiadores de la matemática identifican el inicio de ese largo proceso en el trabajo de 1585 de Simon Stevin sobre la representación vía fracciones decimales de los números reales, pero el primero en enunciar explícitamente ese hecho fue David Hilbert. Lo hizo en un célebre trabajo publicado en 1900 titulado *Über den Zahlbegriff* [Hil1900][2] y en esencialmente la misma forma que lo hacemos hoy, motivado por su proyecto de dar bases rigurosas para la geometría.

Sea como fuere, juntando toda esta información podemos afirmar que, cuando dotamos al conjunto $\mathbb{R}$ de sus operaciones usuales de suma y producto y de su orden usual,

$$\mathbb{R} \textit{ es un cuerpo ordenado completo.} \tag{1.13}$$

Ahora bien, ¿cómo podemos *probar* esta afirmación? La respuesta a esta pregunta es simple: no podemos. El problema reside en que para probar algo al respecto del conjunto de los números reales y su estructura necesitamos tener una descripción precisa de qué es el conjunto de los números reales y, recordemos, no tenemos ninguna: ¡encontrar alguna es precisamente lo que estamos tratando de hacer! No podemos probar nada sobre algo que no conocemos.

Expliquemos la idea de Hilbert para salir de este atolladero. Primero, probamos el siguiente resultado:

Proposición 1.4.1. *Existen cuerpos ordenados completos.* □

La forma en que esto se hace es directa: construimos un ejemplo de un cuerpo ordenado completo. Por supuesto, al hacerlo no podemos usar de ninguna forma al cuerpo de los números reales, ya que en este punto seguimos sin saber qué es. De hecho, lo único que necesitamos para hacer esa construcción es tener a nuestra disposición el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y saber que satisfacen los llamados *axiomas de Peano*. Esto puede hacerse de varias formas, pero la más usual consiste en varios pasos:

- A partir de $\mathbb{N}$ construimos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros dotado de sus operaciones usuales.
- A partir de $\mathbb{Z}$ construimos el conjunto $\mathbb{Q}$, sus operaciones aritméticas y su orden usual, y probamos que de esta forma obtenemos un cuerpo ordenado.
- Finalmente, a partir del cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ que acabamos de construir llevamos a cabo un procedimiento de *completación* cuyo resultado es un cuerpo ordenado completo. Hay varias formas de hacer esto — la más directa, e históricamente la primera, es la de usar los llamados *cortaduras de Dedekind*, una idea usada por Richard Dedekind por primera vez en su trabajo *Stetigkeit und irrationale Zahlen*[3] [Ded1960].

Ninguno de estos pasos es particularmente difícil, pero son todos considerablemente laboriosos. El hecho de que es posible hacer todo esto empezando con nada más que el conjunto de los números naturales es la motivación de la célebre frase de Leopold Kronecker «Dios hizo a los enteros, todo lo demás es obra del hombre»[4].

[2]«*Sobre el concepto de número*» en alemán.

[3]«*Continuidad y números irracionales*» en alemán.

[4]La frase original es «Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwer», de acuerdo a Heinrich Martin Weber [Web1893].

Una vez que sabemos que existen cuerpos ordenados completos, el segundo paso del plan de Hilbert es establecer el siguiente resultado:

Proposición 1.4.2. *Hay esencialmente un único cuerpo ordenado completo.* □

Precisemos que significa exactamente esto. Lo que afirma esta proposición es que siempre que tenemos dos cuerpos ordenados y completos K y L, con operaciones $+_K$, $\cdot_K$ y orden $\leq_K$ el primero, y $+_L$, $\cdot_L$ y $\leq_L$ el segundo, hay una y solo una función biyectiva $\phi : K \to L$ tal que para toda elección de x e y en K se tiene que

$$\begin{aligned} &\phi(x +_K y) = \phi(x) +_L \phi(y), \\ &\phi(x \cdot_K y) = \phi(x) \cdot_L \phi(y), \\ &x \leq_K y \iff \phi(x) \leq_L \phi(y). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Llamamos a una función con esa propiedad un ***isomorfismo*** de cuerpos ordenados.

En la práctica, la existencia de un isomorfismo entre los cuerpos K y L nos dice que, mientras nos limitemos a hacer en ellos las cosas que la estructura de cuerpo ordenado completo nos permite hacer — operaciones aritméticas, comparaciones de orden, cálculo de supremos de conjuntos no vacíos y acotados — obtendremos los mismos resultados y que, en particular, no podremos distinguirlos. Es por eso que la Proposición 1.4.2 no dice que hay un único cuerpo ordenado completo sino solamente que hay *esencialmente* un único cuerpo ordenado completo: la palabra *esencialmente* refiere al hecho de que entre dos cuerpos ordenados completos hay un isomorfismo de cuerpos ordenados completos. Que además exista exactamente un tal isomorfismo es algo todavía más fuerte, por supuesto.

Observación 1.4.3. Mostremos que es falso que exista un único cuerpo ordenado completo. Supongamos que K es un cuerpo ordenado completo, con operaciones $+$ y $\cdot$ y relación de orden $\leq$, y consideremos el conjunto $L \coloneqq K \times \{K\}$, cuyos elementos son los pares ordenados (x, K) cuyas primeras componentes son elementos de K y cuya segunda componente es el conjunto K. Usando las operaciones $+$ y $\cdot$ de K podemos definir operaciones $\oplus$ y $\odot$ en L: para cada elección de x e y en K ponemos

$$(x, K) \oplus (y, K) \coloneqq (x + y, K), \qquad (x, K) \odot (y, K) \coloneqq (x \cdot y, K).$$

De manera similar, usando la relación de orden $\leq$ de K definimos una relación $\leq$ sobre L de manera que sea

$$(x, K) \leq (y, K) \iff x \leq y$$

cualesquiera sean x e y en K. Dejamos al lector la verificación de que el conjunto L, con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como suma y producto, respectivamente, y con la relación $\leq$, es un cuerpo ordenado completo. Esto prueba lo que queremos, ya que este cuerpo L es manifiestamente distinto que el cuerpo K. De todas maneras, el lector podrá apreciar que K y L no son significativamente distintos.

De hecho, de acuerdo a la Proposición 1.4.2 tiene que existir un isomorfismo de cuerpos ordenados completos $K \to L$, y es fácil exhibir uno: el lector puede verificar que la función

$$\phi : x \in K \mapsto (x, K) \in L$$

es una biyección que satisface las condiciones de (1.14).

Finalmente, con las Proposiciónes 1.4.1 y 1.4.2, con Hilbert hacemos la siguiente definición:

Definición 1.4.4. $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo.

Lo que queremos decir con esto es que, desde ahora en adelante, denotaremos con $\mathbb{R}$ al conjunto subyacente a algún cuerpo ordenado y completo — sabemos que existe alguno por la Proposición 1.4.1 y que, si bien hay muchos, la Proposición 1.4.2 nos dice que cuál elijamos no tiene ninguna consecuencia, ya que entra cada dos de ellos hay un isomorfismo de cuerpos ordenados que garantiza que no haya entre ellos ninguna diferencia sustancial.

Es importante entender qué hicimos aquí. Empezamos haciendo la observación (1.13) de que el conjunto de los números reales, dotado de sus operaciones aritméticas y su relación de orden usuales, es un cuerpo ordenado y completo, observamos que esta afirmación no tiene, de hecho, ningún sentido hasta tener una definición precisa de qué es exactamente el conjunto $\mathbb{R}$ y cuáles son esas operaciones y esa relación de orden, y terminamos por *definir* a $\mathbb{R}$ y sus operaciones y relación de orden de manera — de la única manera posible — de manera que la afirmación (1.13) sea cierta. Transformamos la afirmación que queríamos que fuera cierta en una tautología.

Finalmente, notemos que esta definición del cuerpo de los números reales no da una respuesta a la pregunta de qué es un número real. Por el contrario, la idea de Hilbert es, precisamente, qué no importa qué son los números reales — que alcanza con saber qué podemos hacer con ellos con qué garantías, ya que eso los determina en todos los aspectos que son importantes.

Capítulo 2

Primeras propiedades

En el capítulo anterior definimos a $\mathbb{R}$ como el (esencialmente único) cuerpo ordenado completo. Esta definición es sorprendentemente compacta: lo único que nos dice es que en $\mathbb{R}$ tenemos definidas operaciones de suma y producto y una relación de orden, y que estas satisfacen unas pocas condiciones bastante sencillas — conmutatividad, asociatividad, compatibilidad entre la suma y la relación de orden, etc. En la práctica, sin embargo, cuando trabajamos con los números reales necesitamos tener mucha más información sobre esas operaciones y esa relación de orden que la que está incluída en las Definiciones 1.1.5.1, 1.2.4 y 1.3.8.

Ahora bien, si la idea de Hilbert de definir a $\mathbb{R}$ como hicimos en la Definición 1.4.4 es correcta, entonces *todo* lo que queramos saber sobre $\mathbb{R}$ tiene que ser consecuencia de que se trata de un cuerpo ordenado completo. En este capítulo mostraremos cómo hacer esto para algunas propiedades que usamos todo el tiempo al trabajar con los números reales.

2.1. Propiedades aritméticas

Empecemos estableciendo las llamadas *leyes de cancelación*:

Proposición 2.1.1. *Sean x, x' e y elementos de $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Si $x + y = x' + y$, entonces $x = x'$.*

(*ii*) *Si $x \cdot y = x' \cdot y$ e $y \neq 0$, entonces $x = x'$.*

Demostración. La primera de las dos afirmaciones es una de las de la Proposición 1.1.5.5, así que bastará que probemos la segunda. Supongamos que $x \cdot y = x' \cdot y'$ e $y \neq 0$. Como y no es 0 admite un elemento inverso y^{-1} con respecto al producto y tenemos que

$$\begin{aligned}
x &= x \cdot 1 && \text{porque 1 es neutro para el producto } \cdot \\
&= x \cdot y \cdot y^{-1} && \text{porque } y^{-1} \text{ es inverso a } y \text{ con respecto al producto} \\
&= x' \cdot y \cdot y^{-1} && \text{por la hipótesis de que } x \cdot y = x' \cdot y \\
&= x' \cdot 1 && \text{porque } y^{-1} \text{ es inverso a } y \text{ con respecto al producto} \\
&= x' && \text{porque 1 es neutro para el producto } \cdot.
\end{aligned}$$

Esto prueba la segunda afirmación de la proposición. □

El segundo resultado que probaremos describe dos propiedades básicas del elemento cero.

Proposición 2.1.2.

(*i*) *Para todo elemento x de $\mathbb{R}$ se tiene que $x \cdot 0 = 0$.*

(*ii*) *Si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$ tales que $x \cdot y = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.*

Demostración. La primera de las dos afirmaciones es una de las de la Proposición 1.1.5.5. Por otro lado, si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$ tales que $x \cdot y = 0$ y x es distinto de 0, entonces, como $\mathbb{R}$ es un cuerpo, x posee un elemento inverso x^{-1} y

$$\begin{aligned}
0 &= x^{-1} \cdot 0 && \text{por la primera parte de la proposición} \\
&= x^{-1} \cdot x \cdot y && \text{por la hipótesis} \\
&= 1 \cdot y && \text{porque } x^{-1} \text{ es un elemento inverso de } x \\
&= y && \text{porque 1 es neutro para el producto.}
\end{aligned}$$

Esto prueba la segunda afirmación de la proposición. □

En tercer lugar podemos describir la forma en que el producto interactúa con la función $x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.1.3.

(*i*) *Para todo elemento x de $\mathbb{R}$ se tiene que $-x = (-1) \cdot x$.*

(*ii*) *Si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$, entonces*

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y), \qquad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Demostración. (i) Sea x un elemento de $\mathbb{R}$. Queremos probar que $-x = (-1) \cdot x$ y esta igualdad significa, explícitamente, que el elemento $y \coloneqq (-1) \cdot x$ es opuesto a x: para probarla, entonces, tenemos que mostrar que $x + y = 0$. Podemos hacer esto por un cálculo directo:

$$\begin{aligned}
x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{porque 1 es neutro para el producto } \cdot \\
&= (1 + (-1)) \cdot x && \text{porque vale la ley distributiva en } \mathbb{R} \\
&= 0 \cdot x && \text{porque } -1 \text{ es opuesto a } 1 \\
&= 0 && \text{por la primera parte de la Proposición 2.1.2.}
\end{aligned}$$

(ii) Sean x e y dos elementos de $\mathbb{R}$. Es

$$\begin{aligned}
(-x) \cdot y &= (-1) \cdot x \cdot y && \text{por la parte } (i) \\
&= -(x \cdot y) && \text{otra vez por la parte } (i). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Por otro lado, es

$$\begin{aligned}
x \cdot (-y) &= (-y) \cdot x && \text{porque el producto es conmutativo} \\
&= -(y \cdot x) && \text{por lo que ya probamos} \\
&= -(x \cdot y) && \text{otra vez porque el producto es conmutativo} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(-x) \cdot (-y) &= -(x \cdot (-y)) && \text{por la igualdad (2.1)} \\
&= -\big(-(x \cdot y)\big) && \text{por la igualdad (2.2)} \\
&= x \cdot y && \text{por la primera igualdad de (1.10).}
\end{aligned}$$

Con esto hemos probado todas las afirmaciones de (ii). □

2.2. Propiedades de monotonía

La Definición 1.2.4 que dimos para los cuerpos orientados impone una condición de compatibilidad entre la suma y la relación de orden. En esta sección mostraremos que valen otras.

En primer lugar, la primera condición de esa definición está enunciada en términos de la relación $\leq$, pero tiene como consecuencia una completamente similar en términos de la relación $<$ de orden estricto que es útil.

Proposición 2.2.1. *Si x, y y z son elementos de $\mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces $x + z < y + z$.*

Demostración. Sean x, y y z tres elementos de $\mathbb{R}$ tales que $x < y$. Como es $x \le y$, de la primera condición de la definición tenemos que $x + z \le y + z$. Si fuera $x + z = y + z$, entonces tendríamos que

$$\begin{aligned}
x &= x + 0 && \text{porque } 0 \text{ es neutro para la suma} \\
&= x + z + (-z) && \text{porque } -z \text{ es opuesto a } z \\
&= y + z + (-z) && \text{por la hipótesis} \\
&= y + 0 && \text{porque } -z \text{ es opuesto a } z \\
&= y && \text{porque } 0 \text{ es neutro para la suma,}
\end{aligned}$$

y esto es absurdo ya que $x < y$. Tenemos entonces que $x + z \le y + z$ y que $x + z \neq y + z$, así que $x + z < y + z$, como afirma la proposición. □

En segundo lugar, la primera condición de la Definición 1.2.4 y la proposición que acabamos de probar nos dicen que sumar un elemento de $\mathbb{R}$ a ambos lados de una desigualdad preserva la desigualdad. Nuestro siguiente resultado generaliza esto:

Proposición 2.2.2. *Sean x, y, z y u cuatro elementos de $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Si $x \le y$ y $z \le u$, entonces $x + z \le y + u$.*

(*ii*) *Si $x < y$ y $z \le u$, entonces $x + z < y + u$.*

Demostración. (*i*) Si $x \le y$ y que $z \le u$, entonces usando dos veces la primera condición de la Definición 1.2.4 vemos que $x + z \le y + z \le y + u$, así que $x + z \le y + u$ porque la relación $\le$ es transitiva.

(*ii*) Supongamos ahora que $x < y$ y que $z \le u$. Esto implica que

$$0 = z + (-z) \le u + (-z). \tag{2.3}$$

Ahora bien, como $x \le y$, de la primera parte sabemos que $x + z \le y + u$. Si fuera $x + z = y + u$, tendríamos que

$$\begin{aligned}
y &= y + 0 && \text{porque } 0 \text{ es neutro para la suma} \\
&\le y + u + (-z) && \text{por la desigualdad (2.3)} \\
&= x + z + (-z) && \text{por la hipótesis} \\
&= x + 0 && \text{porque } -z \text{ es opuesto a } z \\
&= x && \text{porque } 0 \text{ es neutro para la suma,}
\end{aligned}$$

de manera que $y \le x$: esto es absurdo, ya que estamos suponiendo que $x < y$. Vemos así que debe ser $x + z \neq y + u$ y, por lo tanto, que $x + z < y + u$, como afirma la proposición. □

Combinando las afirmaciones de esta proposición podemos probar el siguiente resultado que es muchas veces útil al comprar elementos de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.2.3. Muestre que si x, y, z y u son elementos de $\mathbb{R}$ tales que $x \leq y$, $z \leq u$ y, más aún, $x + z = y + u$, entonces vale que, de hecho, $x = y$ y $z = u$.

Finalmente, mostremos que la compatibilidad entre la suma y la relación de orden de $\mathbb{R}$ implica una compatibilidad entre esa relación de orden y la función $x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$:

Proposición 2.2.4. *Sean x e y dos elementos de $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Si $x < y$, entonces $-y < -x$.*

(*ii*) *Si $x \leq y$, entonces $-y \leq -x$.*

Demostración. Si $x < y$, entonces

$$\begin{aligned}
-y &= (-y) + 0 && \text{porque } 0 \text{ es neutro para la suma} \\
&= (-y) + (-x) + x && \text{porque } -x \text{ es opuesto a } x \\
&= (-x) + (-y) + x && \text{porque la suma es conmutativa} \\
&< (-x) + (-y) + y && \text{por la hipótesis de que } x < y \text{ y la Definición 1.2.4} \\
&= (-x) + 0 && \text{porque } -y \text{ es opuesto a } y \\
&= -x && \text{porque } 0 \text{ es neutro para la suma,}
\end{aligned}$$

y esto es lo que afirma la primera parte de la proposición. Por otro lado, si $x \leq y$, entonces o bien $x < y$ y en ese caso lo que ya hicimos muestra que $-y < -x$, o bien $x = y$ y en ese caso vale, claro que $-y = -x$: en cualquiera de los dos casos tenemos que $-y \leq -x$ y, por lo tanto, también es cierta la segunda afirmación de la proposición. □

Ejercicio 2.2.5. Muestre que si a y b son dos elementos de $\mathbb{R}$ tales que $a < b$ entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$.

2.3. Elementos positivos y negativos

Usando la relación de orden de $\mathbb{R}$ podemos hacer la siguiente definición bien familiar:

Definición 2.3.1. Un elemento x de $\mathbb{R}$ es ***positivo*** si $0 < x$, es ***negativo*** si $x < 0$, y es ***nulo*** si $x = 0$.

Decimos además que un elemento de $\mathbb{R}$ es ***no negativo*** si no es negativo, y que es ***no positivo*** si no es positivo. Aunque estas expresiones son menos que felices, forman parte de nuestra jerga usual.

Una consecuencia inmediata de que el orden de $\mathbb{R}$ es total es la siguiente *ley de tricotomía*:

Proposición 2.3.2. *Si x es un elemento de $\mathbb{R}$, entonces exactamente una de las siguientes tres afirmaciones es verdadera:*
(*a*) *x es negativo.*
(*b*) *x es nulo.*
(*c*) *x es positivo.*

Demostración. Sea x un elemento de $\mathbb{R}$. El hecho de que la relación de orden $\leq$ de $\mathbb{R}$ es una relación de orden total nos dice que $0 \leq x$ o $x \leq 0$, y esto implica que alguna de las tres afirmaciones del enunciado es cierta.

Si x es negativo, de manera que $x < 0$, entonces de la definición de $<$ sabemos que $x \neq 0$, así que x no es nulo, y de la asimetría de la relación de orden estricto $<$ que no vale que $x > 0$, esto es, que x no es positivo. De manera simétrica, si x es positivo, de manera que $x > 0$, entonces la definición de $>$ implica que $x \neq 0$ y la asimetría de esta relación que no vale que $x < 0$, esto es, que x no es negativo. Finalmente, si x es nulo, de manera que $x = 0$, entonces la definición de la relación $<$ implica que ni $0 < x$ ni $x < 0$ valen, así que x no es ni positivo ni negativo. Esto prueba que no puede haber dos de las tres afirmaciones del enunciado que sean ciertas. □

La función $x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$ intercambia los números positivos y negativos:

Proposición 2.3.3. *Un elemento x de $\mathbb{R}$ es positivo si y solamente si su opuesto $-x$ es negativo.*

Demostración. Sea x un elemento de $\mathbb{R}$. Si x es positivo, entonces $0 < x$ y la Proposición 2.2.4 nos dice que $-x < -0 = 0$, esto es, que x es negativo. Recíprocamente, si $-x$ es negativo, de manera que $-x < 0$, entonces esa proposición nos dice que $0 = -0 < -(-x) = x$, esto es, que x es positivo. □

La multiplicación por un elemento positivo preserva las desigualdades:

Proposición 2.3.4. *Sean x, y, y z tres elementos de $\mathbb{R}$.*
(*i*) *Si $x < y$ y z es positivo, entonces $x \cdot z < y \cdot z$.*
(*ii*) *Si $x \leq y$ y z es no negativo, entonces $x \cdot z \leq y \cdot z$.*

Notemos que en la primera parte no podemos cambiar la hipótesis de que z sea positivo por la de que sea no negativo: si $x < y$ y $z = 0$, ciertamente no vale que $x \cdot z < y \cdot z$, ya que ambos miembros de la desigualdad son nulos y, por lo tanto, iguales.

Demostración. Supongamos primero que $x < y$ y que $0 < z$. De la primera desigualdad y de la Proposición 2.2.1 podemos deducir que $0 = x + (-x) < y + (-x)$ y, como $0 < z$ y vale la segunda condición de la Definición 1.2.4, que además

$$0 < \big(y + (-x)\big) \cdot z. \tag{2.4}$$

Podemos calcular entonces que

$$\begin{aligned}
y \cdot z &= y \cdot z + 0 && \text{porque 0 es neutro para la suma} \\
&= y \cdot z + \big(-(x \cdot z)\big) + x \cdot z && \text{porque } -(x \cdot z) \text{ es opuesto de } x \cdot z \\
&= y \cdot z + (-x) \cdot z + x \cdot z && \text{por la segunda parte de la Proposición 2.1.3} \\
&= \big(y + (-x)\big) \cdot z + x \cdot z && \text{porque vale la ley distributiva.} \\
&> 0 + x \cdot z && \text{por la desigualdad (2.4) y la Definición 1.2.4} \\
&= x \cdot z && \text{porque 0 es neutro para la suma.}
\end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación (i) de la proposición.

Probemos ahora la afirmación (ii). Supongamos que $x \leq y$ y que $z \geq 0$. Cuando $z = 0$ es $x \cdot z = 0 = y \cdot z$, así que por supuesto vale que $x \cdot z \leq y \cdot z$. Supongamos entonces que $z > 0$.

Si $x < y$, entonces lo que ya probamos nos dice que $x \cdot z < y \cdot z$, así que también $x \cdot z \leq y \cdot z$. Si, en cambio, es $x = y$, entonces por supuesto tenemos que $x \cdot z < y \cdot z$ y otra vez que $x \cdot z \leq y \cdot z$. Esto prueba que en cualquier caso es $x \cdot z \leq y \cdot z$, y esto es lo que queríamos probar. □

La multiplicación por elementos negativos, por el contrario, invierte las desigualdades.

Proposición 2.3.5. *Sea K un cuerpo ordenado y sean x, y, y z tres elementos de K.*

(i) *Si $x < y$ y z es negativo, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.*

(ii) *Si $x \leq y$ y z es negativo, entonces $x \cdot z \geq y \cdot z$.*

Demostración. (i) Supongamos que $x < y$ y que z es negativo. De la Proposición 2.3.3 sabemos entonces que $-z$ es positivo y podemos calcular que

$$\begin{aligned}
-(x \cdot z) &= x \cdot (-z) && \text{de acuerdo a la Proposición 2.1.3} \\
&< y \cdot (-z) && \text{porque } -z \text{ es positivo y vale la Proposición 2.3.4} \\
&= -(y \cdot z) && \text{otra vez por la Proposición 2.1.3.}
\end{aligned}$$

Usando ahora la Proposición 2.2.4 podemos concluir que $y \cdot z < x \cdot z$, como queremos.

(ii) Supongamos ahora que $x \leq y$ y que z es negativo. Si $x < y$, entonces de la parte (i) sabemos que $y \cdot z < x \cdot z$ y, por lo tanto, que $y \cdot z \leq x \cdot z$. Si en cambio es $x = y$, entonces por supuesto es $y \cdot z = x \cdot z$ y, otra vez, $y \cdot z \leq x \cdot z$. Esta última desigualdad vale entonces en cualquier caso, y esto es lo que afirma la proposición. □

Proposición 2.3.6. *Si x es un elemento cualquiera de $\mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$ y, más aún, es $x^2 = 0$ si y solamente si $x = 0$.*

Demostración. Sea x un elemento de $\mathbb{R}$. Si $x > 0$, entonces de la segunda condición de la Definición 1.2.4 sabemos que $x^2 = x \cdot x > 0$, y su $x = 0$ tenemos, por supuesto, que $x^2 = 0 \geq 0$. Finalmente, si $x < 0$, entonces $-x > 0$ por la Proposición 2.3.3 y entonces otra vez la segunda condición de la Definición 1.2.4 y la Proposición 2.1.3 nos permiten concluir que $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) > 0$.

Esto prueba que $x^2 \geq 0$. Por otro lado, que $x^2 = 0$ si y solamente si $x = 0$ es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.2. □

Esta proposición tiene un corolario importante:

Corolario 2.3.7. *En $\mathbb{R}$ es $0 < 1$.*

Demostración. En efecto, 1 no es cero y es igual a 1^2. □

Ejercicio 2.3.8. Pruebe que si $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n elementos de $\mathbb{R}$, entonces vale que $x_1^2 + x_2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ y que la igualdad vale si y solamente si cada uno de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es nulo,

Un cuerpo K es ***formalmente real*** si tiene la propiedad de que

> *cada vez que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos de K tales que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ se tiene que cada uno de esos elementos es nulo,*

y es fácil ver que esto ocurre exactamente cuando

> -1 *no es igual a una suma de cuadrados en K.*

Es un teorema de Emil Artin y Otto Schreier [AS1927a, AS1927b] que un cuerpo es formalmente real si y solamente si admite un orden con respecto al cual es un cuerpo ordenado. Se puede encontrar una demostración de esto en la sección III.§2 del libro [MH1973] de John Milnor y Dale Husemoller.

En la Proposición 2.2.4 describimos cómo interactúa la función $x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$ con las desigualdades. Nuestras siguientes proposición da resultados análogos pero para la función $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposición 2.3.9. *Sean x e y dos elementos de $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Si $0 < x$, entonces $0 < x^{-1}$.*

(*ii*) *Si $0 < x < y$, entonces $0 < y^{-1} < x^{-1}$.*

(*iii*) *Si* $0 < x \leq y$, *entonces* $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.

Notemos que en estas tres afirmaciones las hipótesis implican que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, de manera que x e y tienen elementos inversos en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, podemos hablar de x^{-1} y de y^{-1}.

Demostración. (*i*) Supongamos que $0 < x$. Si fuera $x^{-1} \leq 0$, como x es positivo tendríamos de la Proposición 2.3.4 que $1 = x^{-1} \cdot x \leq 0 \cdot x = 0$, lo que contradice al Corolario 2.3.7: esto implica que debe ser $0 < x^{-1}$.

(*ii*) Supongamos ahora que $0 < x < y$. Como $0 < x$ y $0 < y$, de la Definición 1.2.4 sabemos que

$$0 < x \cdot y. \tag{2.5}$$

Si fuera $x^{-1} \leq y^{-1}$, tendríamos que

$$\begin{aligned}
y &= 1 \cdot y && \text{porque 1 es neutro para el producto} \\
&= x^{-1} \cdot x \cdot y && \text{porque } x^{-1} \text{ es inverso de } x \\
&\leq y^{-1} \cdot x \cdot y && \text{por la hipótesis, la desigualdad (2.5) y la Proposición 2.3.4} \\
&= x \cdot y^{-1} \cdot y && \text{porque el producto es conmutativo} \\
&= x \cdot 1 && \text{porque } y^{-1} \text{ es inverso de } y \\
&= x && \text{porque 1 es neutro para el producto,}
\end{aligned}$$

y esto es absurdo, ya que estamos suponiendo que $x < y$. Debe ser entonces $y^{-1} < x^{-1}$, como afirma la proposición.

(*iii*) Supongamos finalmente que es $0 < x \leq y$. Si $x < y$, entonces la hipótesis de (*ii*) se cumple, así que sabemos que $0 < y^{-1} < x^{-1}$. Si, en cambio, es $x = y$, entonces usando (*i*) sabemos que $0 < y^{-1} = x^{-1}$. En cualquiera de los dos casos tenemos que $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$, como queremos. □

La segunda condición de la Definición 1.2.4 dice que el producto de dos elementos positivos de $\mathbb{R}$ es positivo. De hecho, podemos caracterizar exactamente cuándo el producto de dos elementos de $\mathbb{R}$ es positivo.

Proposición 2.3.10. *El producto de dos elementos de* $\mathbb{R}$ *es positivo si y solamente si ambos factores son positivos o ambos son negativos.*

Demostración. Sean x e y dos elementos de $\mathbb{R}$. Si $x > 0$ e $y > 0$, la Definición 1.2.4 nos dice que que $x \cdot y > 0$. Si, por otro lado, $x < 0$ e $y < 0$, entonces de acuerdo a la Proposición 2.3.3 es $0 < -x$ y $0 < -y$, así que usando la Definición 1.2.4 y la segunda parte de la Proposición 2.1.3 vemos que otra vez $0 < (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. Esto prueba la suficiencia de la condición del enunciado.

Supongamos ahora que $x \cdot y > 0$. No puede ser $x = 0$, porque sabemos que $x \cdot y$ no es nulo. Si

x es positivo, entonces x^{-1} también lo es, de acuerdo a la Proposición 2.3.9, y entonces

$$\begin{aligned}
y &= 1 \cdot y && \text{porque 1 es neutro para el producto} \\
&= x^{-1} \cdot x \cdot y && \text{porque } x^{-1} \text{ es inverso de } x \\
&> x^{-1} \cdot 0 && \text{porque } x \cdot y > 0 \text{ y vale la segunda condición de la Definición 1.2.4} \\
&= 0 && \text{por la Proposición 2.1.2.}
\end{aligned}$$

Por otro lado, si x es negativo, entonces $-x$ es positivo, como sabemos, y es $(-x)\cdot(-y) = x \cdot y > 0$, así que lo que ya hicimos nos dice que $-y$ es positivo y, por lo tanto, que y es negativo. Vemos así que si $x \cdot y > 0$ entonces y es positivo si x lo es positivo, y que es negativo si x lo es. Esto prueba la necesidad de la condición del enunciado. □

Ejercicio 2.3.11. Determine condiciones necesarias y suficientes sobre dos elementos x e y de $\mathbb{R}$ para que sea el producto $x \cdot y$ sea no negativo.

Terminemos esta sección construyendo la función *valor absoluto*:

Definición 2.3.12. Si x es un elemento de $\mathbb{R}$, entonces el ***valor absoluto*** o el ***módulo*** de x es

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como veremos, esta función cumple un rol fundamental en todo lo que haremos más tarde. Demos, por ahora, sus propiedades básicas.

Proposición 2.3.13. *Si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$, entonces*

$$|x| \geq 0, \tag{2.6}$$
$$|x| = |-x|, \tag{2.7}$$
$$|x| = \text{máx}\{x, -x\}, \tag{2.8}$$
$$|x| = 0 \iff x = 0, \tag{2.9}$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \tag{2.10}$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|. \tag{2.11}$$

Esta última desigualdad es conocida como la ***desigualdad triangular***. Notemos que la igualdad (2.8) implica inmediatamente que $x \leq |x|$ y que $-x \leq |x|$ cualquiera sea x en $\mathbb{R}$.

Demostración. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ es positivo, y si en cambio $x < 0$, entonces $|x| = -x$ es positivo, de acuerdo a la Proposición 2.3.3. En cualquiera de los dos casos vemos que $|x|$ es positivo, y esto prueba la desigualdad (2.6).

Si $x > 0$, entonces $-x < 0$ y tenemos que $|x| = x = -(-x) = |-x|$. De manera simétrica, si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y es $|x| = -x = |-x|$. Finalmente, si $x = 0$, entonces $x = -x$ y, por supuesto, también en este caso tenemos que $|x| = |-x|$. Esto prueba la igualdad (2.7).

Si $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$, así que $-x \leq x$ y, por lo tanto, $|x| = x = \max\{x, -x\}$. Si en cambio es $x < 0$, entonces $-x > 0$, así que $-x > x$ y $|x| = -x = \max\{x, -x\}$. Esto prueba (2.8).

Si $x = 0$, entonces ciertamente es $x \geq 0$ y, por lo tanto, $|x| = x = 0$. Por otro lado, si $x \neq 0$, entonces o bien $x > 0$ o bien $x < 0$, y entonces tenemos que o bien $|x| = x > 0$ o bien $|x| = -x > 0$: en cualquera de los dos casos es $|x| \neq 0$. Esto prueba la equivalencia (2.9).

Para probar la igualdad (2.10) consideramos tres casos.

- Si $x \cdot y$ es positivo, entonces $|x \cdot y| = x \cdot y$ y la Proposición 2.3.10 nos dice que x e y son o bien los dos positivos, o bien los dos negativos. En el primer caso tenemos que $|x| = x$, $|y| = y$ y, por lo tanto, que $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$. En el segundo caso, tenemos que $|x| = -x$, $|y| = -y$ y, en consecuencia, que $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.
- Si $x \cdot y$ es nulo, entonces la Proposición 2.1.2 nos dice que alguno de x o y es nulo y, entonces, usando (2.7) sabemos que alguno de $|x|$ o $|y|$ es nulo, así que también lo es el producto $|x| \cdot |y|$. Es entonces $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
- Finalmente, supongamos que $x \cdot y$ es negativo. Entonces $(-x) \cdot y$ es positivo, porque es igual a $-(x \cdot y)$, y lo que ya probamos implica que $|x \cdot y| = |-(x \cdot y)| = |(-x) \cdot y| = |-x| \cdot |y| = |x| \cdot |y|$.

Probemos, para terminar, la desigualdad (2.11). Como $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$, es $x + y \leq |x| + |y|$. De manera similar, como $-x \leq |x|$ y $-y \leq |y|$, tenemos que $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$. Estas dos desigualdades nos dicen que $|x| + |y|$ es una cota superior para el conjunto $\{x + y, -(x + y)\}$, así que es $|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|$, como queremos. $\square$

El siguiente resultado nos da criterios útiles para acotar el valor absoluto de un elemento de $\mathbb{R}$:

Proposición 2.3.14. *Si x e y son dos elementos de $\mathbb{R}$, entonces*

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y, \qquad |x| \geq y \iff x \geq y \text{ o } x \leq -y, \tag{2.12}$$

$$|x| < y \iff -y < x < y, \qquad |x| > y \iff x < -y \text{ o } x > y. \tag{2.13}$$

Demostración. Supongamos primero que $|x| \leq y$. Como $x \leq |x|$, tenemos que $x \leq y$, y como $-x \leq |x|$, tenemos que que $-x \leq y$ y, por lo tanto, que $-y \leq x$. Vemos así que $-y \leq x \leq y$. Recíprocamente, si suponemos que $-y \leq x \leq y$, entonces tenemos que $x \leq y$ y que $-x \leq y$, así que y es una cota superior para el conjunto $\{x, -x\}$ y, en consecuencia, $|x| = \max\{x, -x\} \leq y$. Esto prueba la primera equivalencia de (2.12).

Supongamos ahora que $|x| < y$. Como $x \leq |x|$, es $x < y$, y como $-x \leq |x|$, es $-x < y$, así que $-y < x$: esto prueba que $-y < x < y$. Por otro lado, si $-y < x < y$, entonces es $-y \leq x \leq y$, así que por lo que ya probamos es $|x| \leq y$. Si fuera $|x| = y$ tendríamos que y pertenece a $\{x, -x\}$ y que, entonces, es igual a x o a $-x$, lo que es absurdo. Vemos así que debe ser $|x| < y$. Esto pruba la primera equivalencia de (2.13).

Para probar las segundas equivalencias de (2.12) y (2.13) es suficiente observar ahora que se trata de las afirmaciones contrarrecíprocas de las primeras equivalencias de (2.13) y de (2.12). □

Ejercicio 2.3.15. Pruebe que cualesquiera sean los elementos x, y y z de $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\big||x|\big| = |x|, \\
&|x-y| = 0 \iff x = y, \\
&|x-z| \leq |x-y| + |y-z|, \\
&|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.3.16. Si x es un elemento de $\mathbb{R}$, el ***signo*** es

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que $x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$ y $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$, y que si x no es nulo se tiene entonces que

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x},$$

2.4. Propiedades del supremo y el ínfimo

Usando los elementos positivos de $\mathbb{R}$ podemos dar una caracterización del supremo e ínfimo de un conjunto:

Proposición 2.4.1. *Sea A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$. Un elemento α de $\mathbb{R}$ es el supremo de A en $\mathbb{R}$ si y solamente si*

- *es una cota superior para A en $\mathbb{R}$ y*
- *para todo elemento positivo ε de $\mathbb{R}$ existe hay un elemento a en A tal que $\alpha - \varepsilon < a$.*

Demostración. Sea α un elemento de $\mathbb{R}$. Supongamos primero que α es el supremo de A en $\mathbb{R}$. Se trata entonces ciertamente de una cota superior para A en $\mathbb{R}$. Por otro lado, si ε es un elemento positivo de $\mathbb{R}$, de manera que $\varepsilon > 0$, entonces $\alpha - \varepsilon < \alpha$ y, por lo tanto, $\alpha - \varepsilon$ no es una cota superior para A: esto es, hay un elemento a en A tal que $\alpha - \varepsilon < a$. Esto prueba que las dos condiciones de la proposición son necesarias.

Veamos que son suficientes. Supongamos que α es un elemento de $\mathbb{R}$ que satisface esas dos condiciones. Si β es un elemento de $\mathbb{R}$ tal que $\beta < \alpha$, entonces $\alpha - \beta$ es un elemento positivo de $\mathbb{R}$ y, por lo tanto la hipótesis nos dice que hay un elemento a en A tal que $\beta = \alpha - (\alpha - \beta) < a$: así, β no es una cota superior para A. Esto prueba que α es el supremo de A en $\mathbb{R}$, ya que, por hipótesis, es una cota superior para él. □

Ejercicio 2.4.2. Dé una caracterización similar para el ínfimo de un subconjunto no vacío y acotado inferiormente de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.4.3. *Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y sea*

$$C \coloneqq \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}.$$

(*i*) *Si A y B son acotados superiormente, entonces tanto A y B como C tienen supremo y*

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

(*ii*) *Si A y B son acotados inferiormente, entonces tanto A y B como C tienen ínfimo y*

$$\operatorname{ínf} C = \operatorname{ínf} A + \operatorname{ínf} B.$$

Llamamos al conjunto C de esta proposición la ***suma de Minkowski*** de los conjuntos A y B, y generalmente escribimos en la forma $A + B$. El nombre recuerda a Hermann Minkowski.

Demostración. Probaremos solo la primera parte — la segunda, cuya prueba es similar, quedará a cargo del lector. Supongamos entonces que A y B son acotados superiormente. Como son ambos no vacíos, podemos considerar sus supremos $\alpha \coloneqq \sup A$ y $\beta \coloneqq \sup B$. Si c es un elemento de C, entonces hay elementos a y b de A y de B tales $c = a + b$ y, por lo tanto, tenemos que

$$c = a + b \leq \alpha + \beta,$$

ya que α y β son cotas superiores para A y para B. Esto nos dice que $\alpha + \beta$ es una cota superior para C. Para probar la afirmación (*i*) mostraremos que $\alpha + \beta$ es, de hecho, el supremo de C.

Sea k un elemento de $\mathbb{R}$ menor que $\alpha + \beta$, de manera que el número $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2}(\alpha + \beta - k)$ es positivo. Como α y β son el supremo de A y de B, respectivamente, Proposición 2.4.1 nos dice que hay elementos a de A y b de B tales que $\alpha - \varepsilon < a$ y $\beta - \varepsilon < b$. Se sigue de esto, entonces, que

$$k = \alpha + \beta - 2\varepsilon = (\alpha - \varepsilon) + (\beta - \varepsilon) < a + b.$$

Como $a + b$ es un elemento de C, vemos con esto que k no es una cota superior para C. Así, ningún número menor que $\alpha + \beta$ es una cota superior para C, así que $\alpha + \beta$ es precisamente el supremo de C. □

Ejercicio 2.4.4. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son todos positivos y sea

$$C \coloneqq \{a \cdot b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}.$$

(a) Muestre que si A y B son acotados superiormente, entonces tanto A y B como C tienen supremo y $\sup C = \sup A \cdot \sup B$.
(b) Pruebe que tanto A y B como C tienen ínfimo y que $\inf C = \inf A \cdot \inf B$.

2.5. Números naturales, enteros y racionales

2.5.1. Números naturales

Por el principio de recurrencia, sabemos que hay exactamente una función $\nu : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(0) = 0$ y que satisface, para cada $n \in \mathbb{N}$, la condición.

$$\nu(n+1) = \nu(n) + 1$$

Notemos que cuando aquí escribimos «$\nu(0) = 0$» el 0 que aparece a la izquierda del signo igual es el elemento 0 de $\mathbb{N}_0$, mientras que el que está a la derecha es el elemento 0 de $\mathbb{R}$. De manera similar en la igualdad «$\nu(n+1) = \nu(n) + 1$» el 1 y la operación + que aparecen a la izquierda son los de $\mathbb{N}_0$, mientras que los que están a la derecha son los de nuestro cuerpo ordenado y completo $\mathbb{R}$.

Proposición 2.5.1.1. *Siempre que n y m son elementos de $\mathbb{N}_0$ se tiene que*

$$\nu(n+m) = \nu(n) + \nu(m), \qquad \nu(n \cdot m) = \nu(n) \cdot \nu(m).$$

Demostración. Para cada elemento m de $\mathbb{N}_0$ sean $\mathscr{P}(m)$ y $\mathscr{Q}(n)$ las afirmaciones

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ es $\nu(n+m) = \nu(n) + \nu(m)$

y

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ es $\nu(n \cdot m) = \nu(n) \cdot \nu(m)$.

Para probar la proposición mostraremos que cualquiera sea n en $\mathbb{N}_0$ las afirmaciones $\mathscr{P}(n)$ y $\mathscr{Q}(n)$ valen, y haremos esto por inducción.

Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$v(n+m) = v(n+0) = v(n) = v(n) + 0 = v(n) + v(m),$$

y esto nos dice que la afirmación $\mathscr{P}(0)$ vale. Supongamos, por otro lado, que m es un elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que la afirmación $\mathscr{P}(m)$ vale. En ese caso, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} v(n+m+1) &= v(n+m)+1 && \text{por la definición de } v \\ &= v(n)+v(m)+1 && \text{porque vale la afirmación } \mathscr{P}(m) \\ &= v(n)+v(m+1) && \text{por la definición de } v \end{aligned}$$

y, por lo tanto, vale la afirmación $\mathscr{P}(m+1)$. El principio de inducción, entonces, nos dice que vale la afirmación $\mathscr{P}(m)$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}_0$: esto prueba la afirmación de la proposición que involucra sumas.

Si n es un elemento de $\mathbb{N}_0$, entonces

$$v(n \cdot 0) = v(0) = 0 = v(n) \cdot 0 = v(n) \cdot v(0),$$

así que vale la afirmación $\mathscr{Q}(0)$. Supongamos ahora que m es un elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que la afirmación $\mathscr{Q}(m)$ es cierta. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}_0$, entonces

$$\begin{aligned} v(n \cdot (m+1)) &= v(n \cdot m + n) \\ &= v(n \cdot m) + v(n) && \text{porque vale la afirmación } \mathscr{P}(n) \\ &= v(n) \cdot v(m) + v(n) \cdot 1 && \text{por vale la afirmación } \mathscr{Q}(m) \\ &= v(n) \cdot \big(v(m)+1\big) && \text{por la ley distributiva} \\ &= v(n) \cdot v(m+1) && \text{por la definición de } v, \end{aligned}$$

y estonos dice que vale la afirmación $\mathscr{Q}(m+1)$. Otra vez, por el principio de inducción podemos concluir que la afirmación $\mathscr{Q}(m)$ vale cualquiera sea $m \in \mathbb{N}_0$. Esto prueba la afirmación de la proposición que involucra productos. □

Esta proposición nos dice que la función v preserva sumas y productos. Usándola podemos probar que además preserva y refleja desigualdades.

Corolario 2.5.1.2. *La función $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente. Más aún, si n y m son dos* *elementos de $\mathbb{N}_0$, entonces vale que*

$$n < m \iff v(n) < v(m).$$

En particular, se tiene que $v(m) > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Notemos que esta última afirmación es en efecto un caso particular de la primera — basta tomar $n = 0$ en esta última para obtener aquella.

Demostración. Probemos, para empezar, la última afirmación del corolario, esto es, que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $v(m) > 0$. Esto es cierto si $m = 1$, ya que

$$v(1) = v(0+1) = v(0) + 1 = 0 + 1 = 1 > 0.$$

Por otro lado, si m es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $v(m) > 0$, entonces

$$v(m+1) = v(m) + 1 > 0 + 1 = 1 > 0.$$

Lo que queremos probar se sigue entonces de esto y del principio de inducción.

Probemos ahora la primera afirmación del corolario. Sean n y m dos elementos de $\mathbb{N}_0$. Si $n < m$, entonces $d := m - n \in \mathbb{N}$ y, en vista de lo que ya hicimos y del la Proposición 2.5.1.1, tenemos que

$$v(m) = v(n + (m - n)) = v(n + d) = v(n) + v(d) > v(n) + 0 = v(n).$$

Por otro lado, si $n \geq m$, entonces o bien $n = m$ y en ese caso por supuesto $v(n) = v(m)$, o bien $n > m$, y en ese caso sabemos que $v(n) > v(m)$: en cualquiera caso tenemos que $v(n) \geq v(m)$. Esto prueba la implicación contrarrecíproca de $v(n) < v(m) \implies n < m$, y completa la prueba del corolario. □

Podemos mejorar la última afirmación de este corolario:

Corolario 2.5.1.3. *Para todo elemento n de $\mathbb{N}$ se tiene que $v(n) \geq 1$.*

Demostración. En efecto, si n es un elemento de $\mathbb{N}$, entonces o bien $n = 1$, y en ese caso

$$v(n) = v(1) = v(0+1) = v(0) + 1 = 1 = 0 + 1,$$

o bien $n > 1$, y en ese caso el Corolario 2.5.1.2 implica que $v(n) > v(1) = 1$. En cualquiera de los dos casos tenemos que $v(n) \geq 1$. □

Por otro lado, el Corolario 2.5.1.2 tiene la siguiente consecuencia inmediata:

Corolario 2.5.1.4. *La función $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ es inyectiva.*

Demostración. En efecto, si n y m son dos elementos distintos de $\mathbb{N}_0$, entonces o bien $n < m$ o bien $m < n$, y entonces el corolario nos dice que o bien $v(n) < v(m)$ o bien $v(m) < v(m)$ y que, en cualquier caso, es $v(n) \neq v(m)$. □

Desde ahora haremos la convención de *identificar* a cada elemento n de $\mathbb{N}_0$ con su imagen $v(n)$ por la función $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, y tomaremos el punto de vista de que el conjunto $v(\mathbb{N}_0)$ *es* el conjunto $\mathbb{N}_0$. Notemos que el hecho de que la función v sea inyectiva hace que esto no introduzca ninguna ambigüedad, ya que garantiza que cada elemento de $v(\mathbb{N}_0)$ es la imagen por v de exactamente un elemento de $\mathbb{N}_0$. La Proposición 2.5.1.1 nos dice que esta identificación preserva las operaciones aritméticas: sumar o multiplicar dos elementos de $\mathbb{N}_0$ en $\mathbb{N}_0$ o, vía nuestra identificación, en $\mathbb{R}$ da el mismo resultado. De manera similar, el Corolario 2.5.1.2 nos dice que la relación de orden entre dos elementos de $\mathbb{N}_0$ es exactamente la misma que la relación de sus correspondientes elementos en $\mathbb{R}$.

2.5.2. La propiedad arquimediana

La propiedad más importante que tiene el subconjunto $\mathbb{N}_0$ de $\mathbb{R}$ es la siguiente:

Proposición 2.5.2.1. *Si x e y son elementos de $\mathbb{R}$ y x es positivo, entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $y < n \cdot x$.*

Llamamos a esto la ***propiedad arquimediana*** de $\mathbb{R}$. Para probarla haremos uso por primera vez del hecho de que $\mathbb{R}$ es completo como cuerpo ordenado.

Demostración. Sean x e y dos elementos de $\mathbb{R}$, supongamos que x es positivo, y supongamos que, por el contrario, tenemos que $y \geq n \cdot x$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Esto nos dice que el subconjunto $A \coloneqq \{n \cdot x : n \in \mathbb{N}_0\}$ de $\mathbb{R}$, que claramente no es vacío, tiene a y como cota superior en $\mathbb{R}$ y que es, por lo tanto, acotado superiormente. Como $\mathbb{R}$ es un completo con respecto a su relación de orden, el conjunto A admite un supremo. Sea $\alpha \coloneqq \sup A$.

Como x es positivo, tenemos que $-x < 0$ y por lo tanto, que $\alpha - x < \alpha + 0 = \alpha$. Como α es el supremo de A, sabemos que esto implica que $\alpha - x$ no es una cota superior para A en $\mathbb{R}$ y, en consecuencia, que existe un elemento de A estrictamente mayor que $\alpha - x$, esto es, que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha - x < n \cdot x$. Tenemos entonces que

$$\alpha = \alpha - x + x < n \cdot x + x = (n+1) \cdot x \in A,$$

y esto es absurdo, ya que α es una cota superior para A. Esta contradicción provino de haber supuesto que $y \geq n \cdot x$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y, por lo tanto, esta afirmación es falsa y la proposición es cierta. □

Observación 2.5.2.2. La propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ es una consecuencia de su completitud. No es cierto, sin embargo, que *implique* que $\mathbb{R}$ es completo como cuerpo ordenado. En efecto, el cuerpo $\mathbb{Q}$ con su orden usual también tiene la propiedad arquimediana pero ciertamente no es completo!

Un caso particular de la propiedad arquimediana que usamos con frecuencia es el siguiente:

Corolario 2.5.2.3. *Si y es un elemento de $\mathbb{R}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $y \leq n$.*

Demostración. En efecto, si y es un elemento de $\mathbb{R}$, entonces la Proposición 2.5.2.1 nos dice, ya que 1 es positivo, que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $y < n \cdot 1 = n$. □

A su vez, este corolario tiene la siguiente consecuencia:

Corolario 2.5.2.4. *El conjunto $\mathbb{R}$ no es acotado superiormente.*

Demostración. Si, por el contrario, hubiera una cota superior y para $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, el corolario nos diría que hay un elemento n de $\mathbb{N}_0$ tal que $y \leq n$ y, por lo tanto, tendríamos que $y \leq n = n + 0 < n + 1$: esto es absurdo, ya que si y es una cota superior para $\mathbb{R}$ debe ser $n + 1 \leq y$. □

Otra forma en la que usamos frecuentemente la propiedad arquimediana es la que da la siguiente proposición:

Proposición 2.5.2.5. *Si x es un elemento positivo de $\mathbb{R}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > 1/n$.*

Demostración. En efecto, si x es un elemento positivo de $\mathbb{R}$, entonces $1/x$ también lo es, y el Corolario 2.5.2.3 nos dice que hay un elemento n de $\mathbb{N}_0$ tal que $1/x < n$. Notemos que de esto y de $1/x > 0$ se deduce que $n > 0$ y, en particular, que n no es nulo, así que podemos considerar su inverso. De acuerdo a la Proposición 2.3.9, tenemos que $1/n < 1/(1/x) = x$. □

Usando esta proposición podemos dar una versión útil de la Proposición 2.4.1:

Ejercicio 2.5.2.6. Sea A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$. Muestre que un elemento α de $\mathbb{R}$ es el supremo de A en $\mathbb{R}$ si y solamente si

- es una cota superior para A en $\mathbb{R}$ y
- para todo elemento n de $\mathbb{N}$ hay un elemento a en A tal que $\alpha - 1/n < a$.

2.5.3. Números enteros

Si x es un elemento de $\mathbb{Z}$ entonces hay dos posibilidades: o bien es $x \geq 0$, de manera que x pertenece a $\mathbb{N}_0$ y podemos considerar su imagen $\nu(x)$ en $\mathbb{R}$, como en la sección anterior, o bien es $x < 0$, y en ese caso $-x$ es un elemento de $\mathbb{N}_0$ y podemos considerar el elemento $-\nu(-x)$ opuesto a la imagen de $-x$ por ν. Así, hay una función $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que en cada entero $x \in \mathbb{Z}$ toma el valor

$$\zeta(x) = \begin{cases} \nu(x) & \text{si } x \geq 0; \\ -\nu(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esta función tiene propiedades similares a las de la función ν de la sección anterior. Como ζ está definida «por partes», establecer esas propiedades directamente usando esa definición es un poco laborioso. Para evitar esto, usaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.5.3.1. *Sea x un elemento de $\mathbb{Z}$. Si a y b son dos elementos de $\mathbb{N}_0$ tales que $x = a - b$, entonces $\zeta(x) = \nu(a) - \nu(b)$.*

Demostración. Para cada elemento b de $\mathbb{N}_0$ sea $\mathscr{P}(b)$ la afirmación

> *para todo $a \in \mathbb{N}_0$ es $\zeta(a - b) = \nu(a) - \nu(b)$.*

Para probar la proposición es suficiente con que mostremos que la afirmación $\mathscr{P}(b)$ vale cualquiera sea $b \in \mathbb{N}_0$, y haremos esto por inducción.

- La afirmación $\mathscr{P}(0)$ vale: si a es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}_0$, entonces

  $$\zeta(a - 0) = \zeta(a) = \nu(a) = \nu(a) - 0 = \nu(a) - \nu(0).$$

- Probemos ahora que la afirmación $\mathscr{P}(1)$ también vale. Es

  $$\zeta(1 - 1) = \zeta(0) = \nu(0) = \nu(1) - \nu(1).$$

  Por otro lado, si a es un elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que $\zeta(a - 1) = \nu(a) - \nu(1)$, entonces

  $$\zeta((a + 1) - 1) = \zeta(a) = \nu(a) = \nu(a) + \nu(1) - \nu(1) = \nu(a + 1) - \nu(1)$$

  Esto implica, gracias al principio de inducción, que la afirmación $\mathscr{P}(1)$ vale.
- Finalmente, supongamos que b es un elemento de $\mathbb{N}_0$ tal que la afirmación $\mathscr{P}(b)$ vale, y sea a un elemento cualquiera de $\mathbb{N}_0$. Si es $a = 0$, entonces

  $$\zeta(a - (b + 1)) = \zeta(-(b + 1)) = -\nu(b + 1) = \nu(0) - \nu(b + 1),$$

  y si en cambio es $a \geq 1$, entonces $a - 1 \in \mathbb{N}_0$ y nuestra hipótesis implica que

  $$\zeta(a - (b + 1)) = \zeta((a - 1) - b) = \nu(a - 1) - \nu(b)$$

y, como la afirmación $\mathscr{P}(1)$ vale, esto es

$$= \nu(a) - \nu(1) - \nu(b) = \nu(a) - \nu(b+1).$$

Esto nos dice que la afirmación $\mathscr{P}(b+1)$ vale.

Como dijimos, esto prueba la proposición. □

La siguiente proposición es el análogo a la Proposición 2.5.1.1 para la función ζ.

Proposición 2.5.3.2. *Siempre que x e y son elementos de $\mathbb{Z}$ se tiene que*

$$\zeta(x+y) = \zeta(x) + \zeta(y), \qquad \zeta(x \cdot y) = \zeta(x) \cdot \zeta(y).$$

Demostración. Sean x e y dos elementos de $\mathbb{Z}$. Es claro que podemos elegir elementos a, b, c y d en $\mathbb{N}_0$ tales que $x = a - b$ e $y = c - d$, y por supuesto es

$$x + y = (a+c) - (b+d), \qquad x \cdot y = (a \cdot c + b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c).$$

La Proposición 2.5.3.1 nos dice que $\zeta(x) = \nu(a) - \nu(b)$ y $\zeta(y) = \nu(c) - \nu(d)$, y como $a + c$, $c + d$, $a \cdot c + b \cdot d$ y $a \cdot d + b \cdot c$ son elementos de $\mathbb{N}_0$, que además

$$\begin{aligned} \zeta(x+y) &= \nu(a+c) - \nu(b+d) \\ &= \nu(a) + \nu(c) - \nu(b) - \nu(d) \\ &= \big(\nu(a) - \nu(b)\big) + \big(\nu(c) - \nu(d)\big) \\ &= \zeta(x) + \zeta(y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \zeta(x \cdot y) &= \nu(a \cdot c + b \cdot d) - \nu(a \cdot d + b \cdot c) \\ &= \nu(a) \cdot \nu(c) + \nu(b) \cdot \nu(d) - \nu(a) \cdot \nu(d) - \nu(b) \cdot \nu(c) \\ &= \big(\nu(a) - \nu(b)\big) \cdot \big(\nu(c) - \nu(d)\big) \\ &= \zeta(x) \cdot \zeta(y). \end{aligned}$$

Esto prueba la proposición. □

Ahora nos ocupamos de la versión del Corolario 2.5.1.2 para la función ζ.

Proposición 2.5.3.3. *La función $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente. Más aún, si x y y son dos elementos de $\mathbb{Z}$, entonces vale que*

$$x < y \iff \zeta(x) < \zeta(y).$$

Demostración. Sean x e y dos elementos de $\mathbb{Z}$ y supongamos primero que $x < y$, de manera que el entero $y - x$ es positivo. En ese caso, de acuerdo a la Proposición 2.5.3.2, tenemos que

$$0 < \zeta(x - y) = \zeta(y) - \zeta(x)$$

y, por lo tanto, que $\zeta(x) < \zeta(y)$. Por otro lado, si $x \geq y$, de manera que el entero $x - y$ es un elemento de $\mathbb{N}_0$, entonces

$$\zeta(x) - \zeta(y) = \zeta(x - y) \geq 0,$$

con lo que ahora es $\zeta(x) \geq \zeta(y)$. Vemos así que vale la implicación $x \geq y \implies \zeta(x) \geq \zeta(y)$, que es la contrarrecíproca de la implicación $\zeta(x) < \zeta(y) \implies x < y$. □

La Proposición 2.5.3.3 tiene la siguiente consecuencia inmediata:

Corolario 2.5.3.4. *La función $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es inyectiva.*

Demostración. En efecto, si x e y son dos elementos de $\mathbb{Z}$ tales que $\zeta(x) = \zeta(y)$, entonces la proposición implica que ni $x < y$ ni $y < x$, así que necesariamente debe ser $x = y$. □

Gracias a este corolario, podemos hacer con $\mathbb{Z}$ lo mismo que hicimos con $\mathbb{N}$ en la sección anterior: desde ahora identificaremos a cada entero $x \in \mathbb{Z}$ con su imagen $\zeta(x)$ en $\mathbb{R}$ por la función ζ. Como la función ζ es inyectiva, esto no introduce ninguna ambigüedad en lo que hacemos, y de acuerdo a las Proposiciones 2.5.3.2 y 2.5.3.3 esta identificación es compatible con las operaciones aritméticas de $\mathbb{Z}$ y con la relación de orden usual sobre ese conjunto.

Una propiedad importante del subconjunto $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ es que para sus subconjuntos vale el siguiente resultado:

Proposición 2.5.3.5. *Un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ que es acotado superiormente en $\mathbb{R}$ posee máximo.*

Recordemos que que $\mathbb{R}$ sea un cuerpo ordenado completo nos dice que un tal subconjunto posee necesariamente supremo en $\mathbb{R}$. Aquí estamos agregando la información de que si el subconjunto está contenido en $\mathbb{Z}$ entonces ese supremo pertenece a él.

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ que es acotado en $\mathbb{R}$, de manera que podemos considerar su supremo $\alpha \coloneqq \sup A$ en $\mathbb{R}$. Como $\alpha - 1 < \alpha$, sabemos que $\alpha - 1$ no es una cota superior para A, así que hay un elemento a en A tal que $\alpha - 1 < a$.

Afirmamos que a es una cota superior para A en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, un máximo de A, ya que pertence a A. Para verlo, supongamos que, por el contreario, no lo es, de manera que existe un elemento b en A tal que $a < b$. En ese caso la diferencia $b - a$ es un elemento de $\mathbb{Z}$, ya que a y b

están en $\mathbb{Z}$, y es positivo, así que $1 \le b - a$: se sigue de esto y de que $\alpha - 1 < a$ que

$$\alpha = \alpha - 1 + 1 < a + b - a = b,$$

lo que es absurdo, ya que α es una cota superior para A. $\square$

Una aplicación de esta proposición es la construcción de la función *parte entera*.

Proposición 2.5.3.6. *Si x es un elemento de $\mathbb{R}$, entonces existe exactamente un elemento n de $\mathbb{Z}$ tal que $n \le x < n + 1$. De hecho, n es precisamente el supremo del conjunto $\{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$.*

Demostración. Sea x un elemento de $\mathbb{R}$ y consideremos el conjunto $S \coloneqq \{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$. Es claro que S está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ por x. Por otro lado, sabemos que hay un elemento k de $\mathbb{N}$ tal que $-x \le k$, así que $-k \le x$ y, por lo tanto $-k \in S$: esto muestra que el conjunto S no es vacío. De acuerdo a la Proposición 2.5.3.5, entonces, sabemos que el conjunto S tiene un máximo.

Escribámos n a ese máximo. Como n pertenece a S, es $n \le x$. Por otro lado, como $n + 1 > n$ y $n = \max S$, no puede ser que $n + 1$ pertenezca a S, así que $x \le n + 1$. Vemos así que el entero n tiene la propiedad descripta en el enunciado. Para completar la prueba tenemos que mostrar que es el único que la tiene.

Sea n' un elemento de $\mathbb{Z}$ tal que $n' \le x < n' + 1$. Supongamos que $n < n'$, de manera que $n' - n$ es un elemento de $\mathbb{N}$: como $n' \le x$ y $x < n + 1$, tenemos que $n' < n + 1$, así que $n' - n < 1$, y esto contradice el Corolario 2.5.1.3. De manera similar, si $n' < n$, entonces $n - n'$ es un elemento de $\mathbb{N}$ y, como $n \le x$ y $x < n' + 1$, es $n < n' + 1$ y $n - n' < 1$, lo que otra vez es absurdo. La única posibilidad, entonces, es que sea $n' = n$. Esto prueba lo que queremos. $\square$

En vista de esta proposición podemos hacer la siguiente definición:

Definición 2.5.3.7. Si x es un elemento de $\mathbb{R}$, entonces la ***parte entera*** de x es el único elemento $\lfloor x \rfloor$ de $\mathbb{Z}$ tal que $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Para trabajar con partes enteras es útil tener la siguiente caracterización alternativa.

Proposición 2.5.3.8. *Sean x un elemento de $\mathbb{R}$ y n uno de $\mathbb{Z}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) $n = \lfloor x \rfloor$.
(*b*) $n \le x < n + 1$.
(*c*) $x - 1 < n \le x$.

Demostración. La equivalencia entre (*a*) y (*b*) es consecuencia de la definición de $\lfloor x \rfloor$.

Supongamos que vale (*b*). Como $x < n + 1$, tenemos que $x - 1 < n$, así que $x - 1 < n \le x$i y vale (c). Recíprocamente, si vale (c), entonces $x-1<n$, así que $x<n+1$ y, por lo tanto, $n \leq x < n+1$, es decir, vale (b). □

Una consecuencia útil de la existencia de esta función es la siguiente observación.

Proposición 2.5.3.9. *Si x e y son elementos de $\mathbb{R}$ tales que $y-x>1$, entonces hay un elemento n de $\mathbb{Z}$ tal que $x<n<y$.*

Demostración. Sean x e y dos elementos de $\mathbb{R}$ y supongamos que $y-x>1$. Consideraremos dos casos, de acuerdo a que y pertenezca o no a $\mathbb{Z}$.

- Supongamos primero que $y \in \mathbb{Z}$ y sea $n \coloneqq y-1$, que también es un elemento de $\mathbb{Z}$ en ese caso. Como $0<1$, es $n=y-1<y$, y la hipótesis de que $y-x>1$ implica que $x<y-1=n$.
- Supongamos ahora que $y \notin \mathbb{Z}$, de manera que $n \coloneqq \lfloor y \rfloor < y$. Si fuera $x \geq \lfloor y \rfloor$, tendríamos que $-x \leq -\lfloor y \rfloor$ y, por lo tanto, $1 < y-x \leq y-\lfloor y \rfloor \leq 1$, lo que es absurdo. Debe ser entonces $x < \lfloor y \rfloor$

En cualquiera de los dos casos encontramos un entero n tal que $x<n<y$, y esto prueba la proposición. □

Como ejemplo de cómo manipular expresiones que involucran partes enteras, probemos sus propiedades elementales.

Proposición 2.5.3.10.

(*i*) *Para cada $n \in \mathbb{Z}$ es $\lfloor n \rfloor = n$, y para cada $x \in \mathbb{R}$ es $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$.*

(*ii*) *Si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor, \qquad x < n \iff \lfloor x \rfloor < n, \qquad \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

(*iii*) *Siempre que x e y son elementos de $\mathbb{R}$ vale que*

$$x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor, \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Demostración. (*i*) Si n es un elemento de $\mathbb{Z}$, entonces tenemos que $n \leq n < n+1$, porque $0<1$, así que la definición de $\lfloor n \rfloor$ implica inmediatamente que $\lfloor n \rfloor = n$. En particular, si x es un elemento cualquiera de $\mathbb{R}$, entonces $\lfloor x \rfloor$ es uno de $\mathbb{Z}$, así que tenemos que $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(*ii*) Sean x y n elementos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{Z}$, respectivamente. Si $n \leq x$, entonces n pertenece al conjunto $S \coloneqq \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ y, por lo tanto, es $n \leq \sup S = \lfloor x \rfloor$. Recíprocamente, si $n \leq \lfloor x \rfloor$, entonces, como $\lfloor x \rfloor \leq x$, es $n \leq x$. Esto prueba la equivalencia $n \leq \lfloor x \rfloor \iff n \leq x$, que es la primera que aparece en el enunciado, y tambien la segunda, ya que esta es la contrarrecíproca de aquella. Finalmente, como $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, la monotonía de la suma implica que $\lfloor x \rfloor + n \leq x+n < \lfloor x \rfloor + n + 1$

y, como $\lfloor x \rfloor + n$ es un elemento de $\mathbb{Z}$, esto nos dice que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

(*iii*) Sean ahora x e y dos elementos de $\mathbb{R}$. Si $x \leq y$, entonces y es una cota superior para el conjunto $S \coloneqq \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$, así que $\lfloor x \rfloor = \sup S \leq y$. Usando la primera parte de la afirmación (*ii*) que acabamos de probar, podemos concluir, entonces, que $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$, ya que $\lfloor x \rfloor$ pertenece a $\mathbb{Z}$. Esto prueba la primera parte de (*iii*).

Como $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ y $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$, tenemos que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Ahora bien, si $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, tenemos que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

y, por lo tanto, que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Si, por el contrario, es $x + y \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, entonces tenemos que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leq x + y \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2,$$

así que $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. En cualquiera de los dos casos vale que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, así que esto prueba la última afirmación de la proposición. □

Ejercicio 2.5.3.11. Pruebe que cualquiera sea x en $\mathbb{R}$ vale que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}; \\ -1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejercicio 2.5.3.12.

(*i*) Muestre que para cada elemento x de $\mathbb{R}$ existe exactamente un elemento n de $\mathbb{Z}$ tal que $n - 1 < x \leq n$, al que escribimos $\lceil x \rceil$.

(*ii*) Pruebe que cualesquiera sean $n \in \mathbb{Z}$ y x e y en $\mathbb{R}$ valen las siguientes afirmaciones:

$$\lceil x \rceil = n \iff n - 1 < x \leq n \iff x \leq n < x + 1,$$

$$\lceil x \rceil = x \iff x \in \mathbb{Z}, \qquad n < x \iff n < \lceil x \rceil,$$

$$x \leq n \iff \lceil x \rceil \leq n, \qquad \lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n,$$

$$\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil, \qquad x \leq y \implies \lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil,$$

$$\lceil x \rceil + \lceil -x \rceil = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}; \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

(*iii*) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\lfloor x \rfloor \leq \lceil x \rceil, && \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \iff x \in \mathbb{Z}, \\
&\lfloor x \rfloor + \lceil -x \rceil = 0, && \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor, \\
&\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil, && \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}; \\ 1 & \text{en caso contrario,} \end{cases}
\end{aligned}$$

2.5.4. Números racionales

En las secciones anteriores reconstruimos dentro de nuestro cuerpo ordenado y completo $\mathbb{R}$ copias de los conjuntos $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{Z}$. En esta haremos lo mismo con $\mathbb{Q}$.

Proposición 2.5.4.1. *Hay exactamente una función $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\textit{si } a \textit{ y } b \textit{ son dos elementos de } \mathbb{Z} \textit{ tales que } b \neq 0, \textit{ entonces } \rho(\tfrac{a}{b}) = \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1}. \tag{2.14}$$

Notemos que esta propiedad tiene sentido: si b es un elemento de $\mathbb{Z}$ tal que $b \neq 0$, entonces $\zeta(b)$ es un elemento no nulo de $\mathbb{R}$ y podemos, por lo tanto considerar su inverso $\zeta(b)^{-1}$.

Para probar esta proposición daremos una construcción explícita de la función ρ. La idea, claro, es que todo elemento de q es igual a un cociente $\frac{a}{b}$ con a y b dos enteros tales que $b \neq 0$, y que sobre un cociente de esa forma la propiedad (2.14) determina completamente el valor de la función ρ. Hay un problema con esto, de todas maneras: todo elemento de q es igual a *muchos* cocientes de esa forma. Construiremos nuestra función de una manera un poco indirecta para que esto no cause problemas.

Demostración. Consideremos el subconjunto

$$\rho \coloneqq \{(\tfrac{a}{b}, \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

de $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Se trata de una relación de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, y las siguientes dos observaciones prueban que, de hecho, se trata de una función $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

- Si q es un elemento cualquiera de $\mathbb{Q}$, entonces hay enteros a y b tales que $b \neq 0$ y $q = \frac{a}{b}$ y, por lo tanto, el par $(q, \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1}) = (\frac{a}{b}, \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1})$ pertenece a ρ.
- Supongamos, por otro lado, que $q \in \mathbb{Q}$ y x, $y \in \mathbb{R}$ son tales que los pares ordenados (q, x) y (q, y) están en ρ. En vista de la definición de ρ, esto significa que hay enteros a, b, a' y b' tales que $b \neq 0$, $b' \neq 0$, $q = \frac{a}{b}$, $q = \frac{a'}{b'}$, $x = \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1}$ e $y = \zeta(a') \cdot \zeta(b')^{-1}$. En particular, tenemos que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, así que $b'a = a'b$ y, de acuerdo a la Proposición 2.5.3.2, tenemos que $\zeta(b') \cdot \zeta(a) = \zeta(a') \cdot \zeta(b)$. Esto implica, ya que $\zeta(b')$ y $\zeta(b)$ son elementos no nulos de $\mathbb{R}$, que $x = \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1} = \zeta(a') \cdot \zeta(b')^{-1} = y$.

Notemos que la definición de ρ hace que sea evidente que esa función tiene la propiedad (2.14) descripta en la proposición. Por otro lado, si $\rho' : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es otra función con esa proposición y q es un elemento de $\mathbb{Q}$, entonces sabemos que hay enteros a y b tales que $b \neq 0$ y $q = \frac{a}{b}$, así que $\rho'(q) = \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1} = \rho(q)$. Esto prueba la afirmación de unicidad de la proposición. □

Ahora que tenemos la función $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ a mano, probemos que tiene propiedades similares a las de las funciones ν y ζ.

Proposición 2.5.4.2. *Si q y r son dos elementos cualesquiera de $\mathbb{Q}$, entonces*

$$\rho(q + r) = \rho(q) + \rho(r), \qquad \rho(q \cdot r) = \rho(q) \cdot \rho(r), \qquad q < r \iff \rho(q) < \rho(r).$$

La función $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es inyectiva.

Demostración. Sean q y r dos elementos de $\mathbb{Q}$. Hay enteros a, b, c y d tales que $b \neq 0$, $d \neq 0$, $q = \frac{a}{b}$ y $r = \frac{c}{d}$, y los podemos elegir de manera que b y c sean positivos. De acuerdo a la Proposición 2.5.4.1 tenemos que $\rho(x) = \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1}$ y $\rho(y) = \zeta(c) \cdot \zeta(d)^{-1}$. Como $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, tenemos también que

$$\begin{aligned}
\rho(x \cdot y) &= \zeta(ac) \cdot \zeta(bd)^{-1} \\
&= \zeta(a) \cdot \zeta(c) \cdot (\zeta(b) \cdot \zeta(d))^{-1} \\
&= \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1} \cdot \zeta(c) \cdot \zeta(d)^{-1} \\
&= \rho(x) \cdot \rho(y).
\end{aligned}$$

Por otro lado, es

$$\begin{aligned}
\rho(x) + \rho(y) &= \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1} + \zeta(c) \cdot \zeta(d)^{-1} \\
&= \zeta(a) \cdot \zeta(d) \cdot \zeta(d)^{-1} \cdot \zeta(b)^{-1} + \zeta(c) \cdot \zeta(b) \cdot \zeta(b)^{-1} \cdot \zeta(d)^{-1} \\
&= \big(\zeta(a) \cdot \zeta(d) + \zeta(c) \cdot \zeta(b)\big) \cdot \zeta(bd)^{-1} \\
&= \zeta(ad + bd) \cdot \zeta(bd)^{-1} \\
&= \rho(x + y),
\end{aligned}$$

ya que $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bd}{bd}$. Esto prueba las primeras dos igualdades de la proposición.

Vale que $q = \frac{a}{b} < \frac{c}{d} = r$ exactamente cuando $ad < bc$, ya que tanto b como d son positivos, y de acuerdo a la Proposición 2.5.3.3 esto ocurre si y solamente si

$$\zeta(a) \cdot \zeta(d) = \zeta(ad) < \zeta(bd) = \zeta(b) \cdot \zeta(c). \tag{2.15}$$

Ahora bien, como b y d son enteros positivos, esa misma proposición nos dice que $\zeta(b)$ y $\zeta(d)$ son elementos positivos de $\mathbb{R}$, así que la desigualdad (2.15) vale si y solamente si

$$\rho(x) = \zeta(a) \cdot \zeta(b)^{-1} < \zeta(c) \cdot \zeta(d)^{-1} = \rho(y).$$

Esto prueba la equivalencia que aparece en el enunciado de la proposición.

Para terminar, mostremos que la función ρ es inyectiva. Si q y r son dos elementos de $\mathbb{Q}$ distintos, entonces o bien $q < r$ o bien $q > r$, y lo que acabamos de probar nos dice que o bien $\rho(q) < \rho(r)$ o bien $\rho(q) > \rho(r)$ y que, en toco caso, es $\rho(q) \neq \rho(r)$. □

Gracias a esta proposición, y de la misma forma en que lo hicimos antes con $\mathbb{N}_0$ y con $\mathbb{Q}$, convendremos de ahora en adelante en identificar cada número racional q con su imagen $\rho(q)$ en $\mathbb{Z}$. Que la función ρ sea inyectiva implica que esto no introduce ninguna ambigüedad, y el resto de la proposición nos garantiza que esta identificación es compatible con las operaciones aritméticas y con la relación de orden.

La propiedad arquimediana tiene como consecuencia fundamental el siguiente resultado:

Proposición 2.5.4.3. *Sean x e y dos elementos de $\mathbb{R}$. Si $x < y$, entonces hay un elemento q de $\mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.*

Demostración. Supongamos que $x < y$, de manera que $y - x$ es un elemento positivo de $\mathbb{R}$. De acuerdo a la Proposición 2.5.2.5, hay un elemento n de $\mathbb{N}$ tal que $1/n < y - x$. Como n es positivo, esto implica que $1 < ny - nx$, y la Proposición 2.5.3.9 nos dice que hay un entero m tal que $nx < m < ny$. Otra vez usando el hecho de que n es positivo podemos concluir que $x < \frac{m}{n} < y$ y esto prueba la proposición. □

Corolario 2.5.4.4. *Si x es un elemento cualesquiera de $\mathbb{R}$, entonces $x = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$.*

Capítulo 3

Sucesiones

3.1. Límites

Los objetos que estudiaremos en este capítulo son muy sencillos:

Definición 3.1.1. Una ***sucesión*** en un conjunto X es una función $f : \mathbb{N} \to X$.

Cuando $f : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión en X normalmente escribimos f_n y no $f(n)$ al valor de f en un elemento n de $\mathbb{N}$ y lo llamamos la ***componente n-ésima*** de la sucesión. Por otro lado, cuando para cada elemento n de $\mathbb{N}$ tenemos dado de alguna forma un elemento a_n de X, entonces hay exactamente una sucesión $f : \mathbb{N} \to X$ en X tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y la escribimos en la forma $(a_n)_{n\geq 1}$. Es en esta forma en que escribiremos sistemáticamente las sucesiones en todo lo que sigue. Finalmente, desde ahora y hasta nuevo aviso consideraremos casi exclusivamente sucesiones en $\mathbb{R}$, así que dejaremos de explicitarlo: hablaremos simplemente de sucesiones, sin más.

La siguiente definición describe la propiedad de las sucesiones que nos interesa estudiar.

Definición 3.1.2. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ ***converge*** a un número A si para todo elemento positivo ε de $\mathbb{R}$ hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

Esta definición, que formaliza la idea intuitiva de límite que fue identificada desde la antigüedad, fue propuesta esencialmente en esta misma forma por Bernard Bolzano en 1816, sin mucho éxito, y, mucho más tarde, por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass en 1877.

Antes que nada, demos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1.3. Sea c un número real y sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ la ***sucesión constante*** de valor c, esto es, la que tiene $a_n = c$ cualquiera sea n en $\mathbb{N}$. Afirmamos que a converge a c. En efecto, si ε es un número positivo cualquiera y ponemos $n_0 := 1$, entonces para todo elemento n de $\mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - c| < \varepsilon,$$

simplemente porque $|a_n - c| = 0$ cualquiera sea n y el número ε es positivo.

Ejemplo 3.1.4. Probemos ahora que la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ converge a 0. Sea para ello ε un número positivo. De acuerdo a la Proposición 2.5.2.5, hay un entero positivo n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$, y si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, tenemos que $1/n \leq 1/n_0$ y, por lo tanto, que

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Esto prueba lo que queremos.

Ejemplo 3.1.5. Mostremos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que tiene $a_n = 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ converge a 0. Sea ε un número positivo. De acuerdo a la Proposición 2.5.2.5, hay un entero positivo n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces $2^n \geq 2^{n_0} \geq n_0$ y, por lo tanto,

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Ejemplo 3.1.6. Consideremos ahora la sucesión $a = (n)_{n\geq 1}$ y mostremos que no converge a ningún número real. Para ello supongamos, con el objetivo de llegar a una contradicción, que A es un número real tal que a converge a A. Existe entonces un entero positivo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < 1. \tag{3.1}$$

Por otro lado, sabemos del Corolario 2.5.2.3 que hay un entero positivo m tal que $A + 1 < m$ y podemos entonces considerar el entero $k := \max\{n_0, m\}$, que también es positivo. Como $k \geq n_0$, sabemos de (3.1) que $k - A = a_k - A \leq |a_k - A| < 1$, así que $k < A + 1$. Esto es absurdo, ya que al mismo tiempo tenemos que $k \geq m > A + 1$. Esta contradicción provino de haber supuesto que la sucesión a converge a A y, por lo tanto, no lo hace. Como esto es cierto cualquiera sea A, podemos concluir que la sucesión a no converge a ningún número real.

Ejemplo 3.1.7. Consideremos finalmente la sucesión $a \coloneqq ((-1)^n)_{n\geq 1}$ y mostremos que ella tampoco converge a ningún número real. Supongamos que, por el contrario, hay un número real A tal que a converge a A y consideremos el número $\varepsilon \coloneqq \text{máx}\{|1-A|, |-1-A|\}$. Este número es positivo, ya que alguno de los dos números $|1-A|$ y $|-1-A|$ lo es, así que nuestra hipótesis implica que existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ahora bien, el número ε es igual a $|1-A|$ o a $|-1-A|$. En el primer caso tenemos que

$$|1-A| = |(-1)^{2n_0} - A| = |a_{2n_0} - A| < \varepsilon = |1-A|,$$

y en el segundo que

$$|-1-A| = |(-1)^{2n_0+1} - A| = |a_{2n_0+1} - A| < \varepsilon = |-1-A|,$$

ya que tanto $2n_0$ como $2n_0+1$ son mayores que n_0. Ninguna de estas dos desigualdades puede ser cierta: esto es una contradicción y prueba lo que queremos.

Es útil tener bien en claro qué significa exactamente que una sucesión *no converja* a un número A: explicitemos lo que obtenemos al negar la condición de la Definición 3.1.2.

Proposición 3.1.8. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea A un número real. La sucesión a no converge a A exactamente cuando existe un número positivo ε tal que para todo entero positivo n existe otro entero positivo m tal que $n \geq m$ y $|a_n - A| \geq \varepsilon$.* □

Una observación fundamental que tenemos que hacer sobre la noción de convergencia es la siguiente:

Proposición 3.1.9. *Una sucesión converge como mucho a un elemento de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$, supongamos que A y A' son dos elementos de $\mathbb{R}$ tales que a converge tanto a A como a A' y, para llegar a un absurdo, supongamos que $A \neq A'$. Tenemos en ese caso que $A - A' \neq 0$, así que el número $\varepsilon \coloneqq \frac{1}{2}|A - A'|$ es positivo.

Como la sucesión a converge a A, hay un elemento n_0 de $\mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

De manera similar, como la sucesión a converge a A' hay otro elemento n_0' de $\mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0' \implies |a_n - A'| < \varepsilon.$$

Pongamos $m \coloneqq \max\{n_0, n_0'\}$, que es un elemento de $\mathbb{N}$. Como $m \geq n_0$ y $m \geq n_0'$, tenemos que $|a_m - A| < \varepsilon$ y $|a_m - A'| < \varepsilon$ y, por lo tanto, que

$$|A - A'| \leq |A - a_m| + |a_m - A| < \varepsilon + \varepsilon = \tfrac{1}{2}|A - A'| + \tfrac{1}{2}|A - A'| = |A - A'|.$$

Esto es absurdo, por supuesto, y esta es la contradicción que buscábamos. □

Gracias a este resultado podemos hacer la siguiente definición.

Definición 3.1.10. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea A un elemento de $\mathbb{R}$. Si a converge a A, entonces decimos que A es el ***límite*** de a y escribimos a ese número

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

La noción de convergencia es extremadamente importante y nos será útil tener varias descripciones alternativas para ella. Una primera descripción es la dada por el siguiente resultado casi inmediato:

Proposición 3.1.11. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea A un número real. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a A.*
(b) *La sucesión $(a_n - A)_{n\geq 1}$ converge a 0.*
(c) *La sucesión $(|a_n - A|)_{n\geq 1}$ converge a 0*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a A y sea ε un número positivo. Hay entonces un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon$, y esto implica que si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ es $\big|(a_n - A) - 0\big| = |a_n - A| < \varepsilon$. La sucesión $(a_n - A)_{n\geq 1}$, por lo tanto, converge a 0.

$(b) \Rightarrow (c)$ Supongamos ahora que la sucesión $(a_n - A)_{n\geq 1}$ converge a 0 y sea ε un número positivo. Hay un entero positivo n_0 tal que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$. En particular, si n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces $\big||a_n - A| - 0\big| = |(a_n - A) - 0| < \varepsilon$. Vemos con esto que la sucesión $(|a_n - A|)_{n\geq 1}$ converge a 0.

$(c) \Rightarrow (a)$ Finalmente, supongamos que la sucesión $(|a_n - A|)_{n\geq 1}$ converge a 0 y sea ε un número positivo. De acuerdo a la hipótesis hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies \big||a_n - A| - 0\big| < \varepsilon$. Para todo elemento n de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ tenemos entonces que $|a_n - A| = ||a_n - A| - 0| < \varepsilon$ y esto nos dice que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a A. □

La afirmación del siguiente ejercicio generaliza la equivalencia de la segunda y la tercera de las afirmaciones de esta proposición.

Ejercicio 3.1.12. Pruebe que si una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a un número real A, entonces la sucesión $(|a_n|)_{n\geq 1}$ converge a $|A|$. Pruebe además que si ese número A es nulo vale la implicación recíproca, pero que en caso contrario en general no lo hace.

La siguiente proposición caracteriza la convergencia de la sucesión en términos de la finitud de ciertos conjuntos.

Proposición 3.1.13. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea A un elemento de $\mathbb{R}$. Una sucesión a converge a A si y solamente si para todo número positivo ε el conjunto $I_\varepsilon \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : |a_n - A| \geq \varepsilon\}$ es finito.*

Demostración. Supongamos primero que la sucesión a converge a A y sea ε un número positivo, de manera que hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon$. Si n es un elemento del conjunto I_ε descripto en la proposición, entonces $|a_n - A| \geq \varepsilon$ y esta implicación nos permite concluir que $n < n_0$. Vemos así que ese conjunto I_ε está contenido en $\{1, \dots, n_0 - 1\}$ y, en particular, que es finito. Esto prueba que la condición que da la proposición es necesaria.

Veamos que también es suficiente. Supongamos que se cumple y sea ε un número positivo. La hipótesis implica que el conjunto I_ε es finito y podemos entonces considerar el número $n_0 \coloneqq 1 + \max I_\varepsilon$, que es un elemento de $\mathbb{N}$. Sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Como $n \geq n_0 = 1 + \max I_\varepsilon \geq 1 + k > k$ para todo elemento k de I_ε, es claro que n no pertenece a I_ε y, por lo tanto, que $|a_n - A| < \varepsilon$. Vemos así que la sucesión a converge a A. $\square$

Podemos dar una forma alternativa a la Proposición 3.1.13 que acabamos de probar usando la siguiente definición.

Definición 3.1.14. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos una afirmación $P(n)$. Decimos que la afirmación $P(n)$ vale ***para casi todo*** $n \in \mathbb{N}$ si hay un entero positivo N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq N \implies P(n).$$

Así, por ejemplo, las afirmaciones «$n \geq 100$» y «$n^2 \leq 2^n$» son ciertas para casi todo $n \in \mathbb{N}$, aunque no es cierto que sean ciertas para todo $n \in \mathbb{N}$. Es inmediato verificar que en la situación de esta definición es equivalente decir que

la afirmación $P(n)$ vale para casi todo $n \in \mathbb{N}$

que

el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ no vale}\}$ es finito.

En vista de esto es claro que podemos enunciar la Proposición 3.1.13 de la siguiente forma:

Corolario 3.1.15. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea A un elemento de $\mathbb{R}$. La sucesión a converge a A si y solamente si para todo número positivo ε vale que $|a_n - A| < \varepsilon$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$.* □

La definición de convergencia incluye una cuantificación sobre «todo número positivo ε». En muchas situaciones esto es inconveniente porque hay *demasiados* números positivos, así que esa cuantificación nos fuerza a hacer demasiadas verificaciones. El siguiente resultado nos permite reemplazar esa cuantificación por otra sobre un conjunto más pequeño, el de los números enteros positivos.

Proposición 3.1.16. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea A un elemento de $\mathbb{R}$. La sucesión a converge a A si y solamente si para todo entero positivo m hay otro n_0 tal que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \frac{1}{m}.$$

Demostración. Supongamos primero que la sucesión a converge a A y sea m un entero positivo. Como $\frac{1}{m}$ es un número positivo, la hipótesis implica que hay un entero positivo n_0 tal que

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \frac{1}{m},$$

y entonces la condición que da la proposición se cumple.

Supongamos ahora que esa condición se cumple y sea ε un número positivo. Hay un entero positivo m tal que $\varepsilon > \frac{1}{m}$ y la hipótesis entonces nos dice que hay un entero positivo n_0 tal que

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \frac{1}{m}.$$

Si n es un entero positivo tal que $n \geq n_0$, esta implicación nos permite deducir que $|a_n - A| < \frac{1}{m} < \varepsilon$. Vemos así que la sucesión a converge a A. □

El siguiente ejemplo muestra el tipo de situaciones en las que la Proposición 3.1.16 es útil.

Ejemplo 3.1.17. Mostremos que

todo número real es límite de una sucesión de números racionales.

Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, de acuerdo a la Proposición 2.5.4.3, hay números racionales en el intervalo $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$: sea q_n uno de ellos. Obtenemos de esta forma una sucesión $(q_n)_{n\geq 1}$ cuyas componentes pertenecen todas a $\mathbb{Q}$. Esta sucesión converge a x. En efecto, si m es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ se tiene que $|q_n - x| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$, y esto prueba lo que queremos.

En la demostración de la Proposición 3.1.16 es clave el hecho de que la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ converge a 0, y notando eso podemos probar un resultado más general:

Ejercicio 3.1.18. Pruebe que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a un número real A si y solamente si existe una sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ que converge a 0 tal que para todo entero positivo m existe otro n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < b_m.$$

La Proposición 3.1.16 es el caso particular de esta afirmación en el que la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ tiene $b_n = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La idea intuitiva de que una sucesión converja a un número es que sus componentes de acercan a él más y más y, en consecuencia, es razonable pensar que al mismo tiempo se alejan de los demás números. La siguiente proposición hace esto preciso.

Proposición 3.1.19. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sean A y B dos números distintos. Si a converge a A, entonces existen un número positivo K y un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$n \geq n_0 \implies |a_n - B| > K.$$

Demostración. Como $A \neq B$, el número $K := \frac{1}{2}|A - B|$ es positivo y entonces, como la sucesión a converge a A, hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < K.$$

Sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Tenemos entonces que $|a_n - A| < K$, así que

$$|A - B| - |a_n - A| > |A - B| - K = K > 0,$$

de manera que $\big||A - B| - |a_n - A|\big| > K$ y, por lo tanto,

$$|a_n - B| = |(a_n - A) + (A - B)| \geq \big||a_n - A| - |A - B|\big| > K.$$

Esto prueba la proposición. □

Hay una extensión natural del concepto de acotación de conjuntos a sucesiones:

Definición 3.1.20. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es ***acotada superiormente*** o ***inferiormente*** si el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ lo es, y es ***acotada*** si es a la vez acotada superiormente e inferiormente.

La acotación es una condición necesaria para la convergencia de una sucesión:

Proposición 3.1.21. *Una sucesión que converge es acotada.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y supongamos que a converge a un elemento A de $\mathbb{R}$. Existe entonces un entero positivo n_0 tal que para todo elemento n de $\mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| \leq 1.$$

Por otro lado, el conjunto $I \coloneqq \{|a_n| : 1 \leq n < n_0\}$ es finito así que podemos considerar el número $M \coloneqq |A| + \max I + 1$, que es no negativo. Sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$.

- Si $n < n_0$, entonces $|a_n|$ es un elemento de I, así que

$$-M \leq -\max I \leq -|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \leq \max I \leq M.$$

- Si, en cambio, $n \geq n_0$, entonces tenemos que $|a_n - A| \leq 1$, así que $-1 \leq a_n - A \leq 1$ y

$$-M \leq -|A| - 1 \leq A - 1 \leq a_n \leq A + 1 \leq |A| + 1 \leq |A| + 1 + M.$$

En cualquiera de los dos casos tenemos que $-M \leq a_n \leq M$. Esto prueba que los números $-M$ y M son, respectivamente, una cota inferior y una cota superior para el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, en definitiva, que la sucesión a es acotada. □

No es, sin embargo, una condición suficiente.

Ejemplo 3.1.22. Consideremos la sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ del Ejemplo 3.1.7, que tiene $a_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ es $\{-1, 1\}$, así que es finito y, por lo tanto, acotado: la sucesión a es, por lo tanto, acotada. Vimos en aquel ejemplo que, sin embargo, esta sucesión no converge a ningún número real. Volvamos a probarlo de una manera distinta.

Supongamos que, por el contrario, sí lo hace y sea A su límite. Existe en ese caso un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \frac{1}{2}.$$

En particular, como $2n_0 \geq n_0$ y $2n_0 + 1 \geq n_0$ tenemos que

$$2 = |1 - (-1)| = |a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| \leq |a_{2n_0} - A| + |a_{2n_0+1} - A| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

y esto es, por supuesto absurdo. Esto prueba lo que queremos.

A pesar de que la acotación no es una condición suficiente para la convergencia, veremos en la Sección 3.7 que no está demasiado lejos de serlo.

3.2. Límites «infinitos»

Una sucesión converge a un número real cuando se aproxima más y más a él. En esta sección nos ocuparemos de las sucesiones que crecen o decrecen más allá de toda cota.

Definición 3.2.1. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ ***diverge a*** $+\infty$ si para todo número real K existe un entero positivo n_0 tal que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies a_n > K,$$

y en ese caso escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

De manera similar, aquella sucesión ***diverge a*** $-\infty$ si para todo número real K existe un entero positivo n_0 tal que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies a_n < K,$$

y en ese caso escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Notemos que no decimos que las sucesiones *convergen* a $+\infty$ o a $-\infty$: reservamos el verbo converger para la convergencia a números reales. Esto simplifica generalmente el enunciado de los resultados en todo lo que sigue. Por otro lado, casi todos los resultados que obtendremos sobre estas dos nociones de divergencia vienen en pares — uno para la divergencia a $+\infty$ y otro muy similar para la divergencia a $-\infty$ — y normalmente daremos la prueba de uno solo de ellos, ya que las correspondientes demostraciones también son siempre muy similares. Muchas veces, de todas formas, podemos deducir uno de ellos del otro usando la observación del siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.2.2. Muestre que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ exactamente cuando la sucesión $(-a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$ o a $+\infty$, respectivamente.

Explicitemos las negaciones de las condiciones de divergencia:

Proposición 3.2.3. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión.*

(*i*) *La sucesión a no diverge a $+\infty$ exactamente cuando para todo número real K y todo entero positivo n existe otro entero positivo m tal que $m \geq n$ y $a_m \leq K$.*

(*ii*) *La sucesión a no diverge a $-\infty$ exactamente cuando para todo número real K y todo entero positivo K existe otro entero positivo m tal que $m \geq n$ y $a_m \geq K$.*

Demostración. Ambas afirmaciones se obtienen inmediatamente de negar las condiciones que definen la divergencia a $+\infty$ y a $-\infty$. □

El resultado análogo a la Proposición 3.1.21 para las sucesiones que divergen a $+\infty$ o a $-\infty$ es el siguiente:

Proposición 3.2.4.
(*i*) *Una sucesión que diverge a* $+\infty$ *está acotada inferiormente y no superiormente.*
(*ii*) *Una sucesión que diverge a* $-\infty$ *está acotada superiormente y no inferiormente.*

Demostración. Probaremos solo la primera de las dos afirmaciones de la proposición Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión que diverge a $+\infty$. Hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n > 0$. El conjunto $I := \{0\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ es finito, así que podemos considerar su mínimo $c := \min I$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces o bien es $n < n_0$ y $a_n \in I$, así que $a_n \geq \min I = c$, o bien es $n \geq n_0$ y la forma en que elegimos a n_0 y a I implica que $a_n > K \geq c$. Vemos así que el número c es una cota inferior para la sucesión a y que, por lo tanto, esta está acotada inferiormente.

Por otro lado, si K es un número cualquiera, entonces el hecho de que la sucesión a diverja a $+\infty$ implica inmediatamente que hay un entero positivo n tal que $a_n > K$ y, por lo tanto, que K no es una cota superior para a. Vemos así que la sucesión a no está acotada superiormente. □

Como una sucesión convergente es acotada tanto superiormente como inferiormente, de esta proposición se deduce inmediatamente lo siguiente.

Corolario 3.2.5. *Si a es una sucesión, entonces a lo sumo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*
(*a*) *La sucesión a converge.*
(*b*) *La sucesión a diverge a* $+\infty$.
(*c*) *La sucesión a diverge a* $-\infty$. □

Observemos que no es cierto que alguna de las tres afirmaciones de este corolario tenga que ser cierta necesariamente: por ejemplo, la sucesión $((-1)^n)_{n\geq 1}$ es acotada y no converge. Le ponemos un nombre a la esta posibilidad:

Definición 3.2.6. Una sucesión ***oscila*** si ni converge ni diverge a $+\infty$ o a $-\infty$.

La siguiente proposición es el análogo de la Proposición 3.1.13 para sucesiones divergentes.

Proposición 3.2.7. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión.*
(*i*) *La sucesión a diverge a $+\infty$ si y solamente si para todo número K el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq K\}$ es finito.*

(*ii*) *La sucesión a diverge a $-\infty$ si y solamente si para todo número K el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq K\}$ es finito.*

Demostración. Probemos la segunda de estas afirmaciones. Supongamos primero que la sucesión a diverge a $-\infty$ y sea K un número cualquiera. Existe entonces un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n < K$, y esto nos dice que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq K\}$ está contenido en $\{1, \ldots, n_0 - 1\}$ y, por lo tanto, que es finito. Esto prueba la necesidad de la condición.

Para ver su suficiencia, supongamos ahora que esa condición se cumple y sea K un número real. La hipótesis implica que el conjunto $I := \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq K\}$ es finito, así que podemos considerar el número $n_0 := 1 + \max I$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces ciertamente n no pertenece al conjunto I y, por lo tanto, es $a_n < K$. Esto prueba que la sucesión a diverge a $-\infty$, que es lo que queríamos. □

El siguiente ejercicio da, por su parte, una versión de la Proposición 3.1.16 para sucesiones divergentes.

Ejercicio 3.2.8. Pruebe que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$

- diverge a $+\infty$ si y solamente si para todo entero positivo N existe otro n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n > N$, y
- diverge a $-\infty$ si y solamente si para todo entero positivo N existe otro n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n < N$

3.3. Dos criterios de convergencia

3.3.1. Convergencia monótona

En general, el problema de decidir si una sucesión de números reales converge a algún límite puede ser extremadamente difícil. La mayor dificultad, en muchos casos, proviene de que para saber si una sucesión converge necesitamos saber a qué converge — al menos si lo único que tenemos a nuestra disposición es la Definición 3.1.2. En esta sección veremos una situación en la que podemos sortear esta dificultad.

Definición 3.3.1.1. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es ***no decreciente*** o ***creciente*** si para toda elección de dos enteros positivos n y m vale que

$$n \leq m \implies a_n \leq a_m,$$

y es ***estrictamente creciente*** si para toda elección de dos enteros positivos n y m vale que

$$n \leq m \implies a_n < a_m.$$

De manera similar, la sucesión es ***no creciente*** o ***decreciente*** si para toda elección de dos enteros positivos n y m vale que

$$n \leq m \implies a_n \geq a_m,$$

y es ***estrictamente decreciente*** si para toda elección de dos enteros positivos n y m vale que

$$n \leq m \implies a_n > a_m.$$

Finalmente, decimos que la sucesión es ***monótona*** si es creciente o decreciente, y que es ***estrictamente monótona*** si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

La siguiente observación nos permite muchas veces reducir el estudio de las sucesiones monótonas o estrictamente monótonas al de las crecientes o estrictamente crecientes.

Ejercicio 3.3.1.2. Pruebe que una sucesión $(a_n)_{n\geq1}$ es no decreciente o estrictamente creciente si y solamente si la sucesión $(-a_n)_{n\geq1}$ es no creciente o estrictamente decreciente, respectivamente.

Mejoremos el resultado del Ejemplo 3.1.17:

Ejemplo 3.3.1.3. Probemos que

> *todo número real es el límite de una sucesión* decreciente *de números racionales.*

Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{R}$. Construiremos por recurrencia una sucesión $(q_n)_{n\geq1}$ de números racionales que es decreciente y tal que $x < q_n < x + 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Como $x < x + \frac{1}{2}$, la Proposición 2.5.4.3 nos dice que hay números racionales en el intervalo $(x, x + \frac{1}{2})$. Sea q_1 uno cualquiera de ellos.
- Supongamos ahora que k es un elemento de $\mathbb{N}$ y que ya construimos el número q_k de manera que $x < q_k < x + 1/2^k$. Como $x < (x + q_k)/2$, la Proposición 2.5.4.3 implica que hay números racionales en el intervalo $(x, (x + q_k)/2)$. Sea q_{k+1} uno cualquiera de ellos. Tenemos entonces que $q_{k+1} < (x + q_k)/2 < q_k$ y que

$$x < q_{k+1} < \frac{x + q_k}{2} < \frac{x + x + 1/2^k}{2} = x + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|q_n - x| < 1/2^n$ y, de acuerdo a nuestro Ejemplo 3.1.5, la sucesión $(1/2^n)_{n\geq1}$ converge a 0: el resultado del Ejercicio 3.1.18 nos permite entonces concluir que la sucesión $(q_n)_{n\geq1}$ converge a x. Finalmente, la forma en que la construimos implica que se trata de una sucesión estrictamente decreciente.

Con estas definiciones a mano, podemos dar el criterio de convergencia que buscamos.

Proposición 3.3.1.4. *Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge si es no decreciente y está acotada superiormente, y en ese caso su límite es el supremo del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y supongamos que a es no decreciente y acotada superiormente. Esto último significa que el conjunto $I := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, que ciertamente no es vacío, es acotado superiormente y podemos, en consecuencia, considerar su supremo $A := \sup I$. Mostraremos que la sucesión a converge a A y esto probará la proposición.

Sea ε un número positivo. Como A es el supremo de I, sabemos que $A - \varepsilon$ no es una cota superior para I, ya que es estrictamente menor que A, y, por lo tanto, que hay un elemento de I mayor que $A - \varepsilon$. Así, existe un entero positivo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A - \varepsilon < a_{n_0}$. Sea ahora n un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Como la sucesión a es no decreciente, esta última desigualdad implica que $a_n \geq a_{n_0} > A - \varepsilon$. Por otro lado, como a_n pertenece al conjunto I y A es una cota superior para I, sabemos que $a_n \leq A < A + \varepsilon$. Juntando todo, vemos que $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, es decir, que $|a_n - A| < \varepsilon$. Todo esto prueba que la sucesión a converge a A, como queremos. □

Ejercicio 3.3.1.5. Muestre que una sucesión no decreciente es acotada si y solamente si es superiormente es acotada. En vista de esto, podríamos haber enunciado la Proposición 3.3.1.4 diciendo que una sucesión converge si es no decreciente y acotada.

Por supuesto, hay una versión de la Proposición 3.3.1.4 para sucesiones no crecientes:

Ejercicio 3.3.1.6. Pruebe que una sucesión no creciente e inferiormente acotada converge.

Por otro lado, tenemos las siguientes versiones de estos resultados para sucesiones no acotadas:

Ejercicio 3.3.1.7. Pruebe que una sucesión creciente y no acotada superiormente diverge a $+\infty$ y que una sucesión decreciente y no acotada inferiormente diverge a $-\infty$.

Notemos que se sigue de todo esto una sucesión monótona o bien converge o bien diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, pero que no oscila.

Daremos varios ejemplos en los que podemos usar la Proposición 3.3.1.4 para probar que sucesiones importantes convergen. En cada uno de ellos el límite de la sucesión considerada no es para nada evidente, y es difícil imaginar cómo conocerlo ayudaría a probar la convergencia.

Ejemplo 3.3.1.8. Consideremos la sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ tal que $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de manera que las primeras componentes de a son

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\ \dots$$

Claramente $1 \leq a_1 \leq 2$. Por otro lado, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $1 \leq a_n \leq 2$, entonces $1 \leq a_{n+1}^2 = 1 + a_n \leq 1 + 2 < 4$, así que $1 \leq a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{4} = 2$. Vemos así por inducción que $1 \leq a_n \leq 2$ cualquiera sea n en $\mathbb{N}$.

Consideremos ahora la sucesión $b = (b_n)_{n\geq 1}$ que para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene

$$b_n \coloneqq \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{2^n}.$$

Como claramente $b_{n+1}/b_n = a_{n+1}/2 \leq 1$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, se trata de una sucesión decreciente de números positivos, así que converge. Es posible probar que su límite es $2/\pi$, aunque ciertamente eso no es evidente! Calculando, podemos ver, por ejemplo, que

$$b_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} = 0{,}637\,643\,577\,3\dots$$

y que

$$b_{176} = 0{,}636\,619\,772\,367\,581\,343\,075\,535\,053\,490\,057\,448\,137\,838\,582\,961\,82\dots,$$

que coincide con $2/\pi$ en las primeras cien cifras decimales.

Este resultado, que normalmente escribimos como un «producto infinito» en la forma

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdot\dots$$

es conocido como la ***fórmula de Viète***, por François Viète, que la publicó en 1593 en su trabajo *Variorum de rebus mathematicis responsorum*. Esto es un punto significativo en la historia de la matemática: al dar esa fórmula, Viète estaba dando por primera vez en la historia una formula exacta que permitía calcular π con precisión arbitraria y al mismo tiempo estaba presentando por primera vez en la matemática europea un proceso infinito para determinar algo.

Ejemplo 3.3.1.9. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión que para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene

$$a_n \coloneqq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}. \tag{3.2}$$

Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0, \end{aligned}$$

así que la sucesión es creciente. Por otro lado, cualquiera sea n en $\mathbb{N}$ cada uno de los términos de la suma de (3.2) es menor que $1/n$ y hay n términos en total, así que $a_n \leq n \cdot 1/n = 1$: esto nos dice que la sucesión es acotada. Vemos así que la sucesión converge.

Es posible mostrar que el límite de esta sucesión es

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\,180\,559\,945\,309\,417\,232\,121\,458\,176\,568\,075\,500\,134\,360\ldots$$

pero con las herramientas que tenemos a nuestra disposición todavía no podemos hacerlo. La primera componente de la sucesión que coincide en sus primeros 10 dígitos decimales con el límite es $a_{100\,000}$.

Ejemplo 3.3.1.10. Mostremos que la sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ que tiene

$$a_n \coloneqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

que para todo $n \in \mathbb{N}$ converge usando el criterio de la Proposición 3.3.1.4.

Sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$. De acuerda a la fórmula de Newton para una potencia de un binomio sabemos que

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}$$

Si i es un elemento de $\{1, \ldots, n\}$, entonces el término i-ésimo de esta última suma es

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} &= \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \\ &= \frac{1}{i!} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \end{aligned}$$

y entonces tenemos que

$$a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right). \tag{3.3}$$

Esto es cierto cualquiera sea n en $\mathbb{N}$, así que también

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right).$$

Ahora bien, si $i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$0 < 1 - \frac{j}{n} \leq 1 - \frac{j}{n+1},$$

así que

$$\frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \leq \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right).$$

Esto nos permite deducir que

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

ya que cada término de la primera suma está acotado por el correspondiente término de la segunda, y esto es

$$\begin{aligned} &\leq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n+1}\right) \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

ya que el término $(n+1)$-ésimo de esta última suma es no negativo. Esto prueba que la sucesión $(a_n)_{n\geq1}$ es creciente. Veamos ahora que es acotada.

Sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ el término i-ésimo de la suma que escribimos en (3.3) es

$$\frac{1}{i!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)} \leq \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{2^i},$$

ya que cada uno de los factores marcados es positivo y menor que 1. De acuerdo a (3.3), entonces, tenemos que

$$a_n \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}. \tag{3.4}$$

Llamemos S_n a la suma que aparece aquí a la derecha. Es

$$\frac{1}{2}S_n = S_n - \frac{1}{2}S_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} - \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}},$$

así que

$$S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^{+1}}\right) < 2.$$

De (3.4), entonces, vemos que $a_n \le 3$.

Juntando todo podemos concluir, como queremos, que la sucesión converge. Su límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

es usualmente escrito e y es llamado habitualmente el ***número de Euler*** o la ***constante de Napier***, por Leonhard Euler y John Napier, respectivamente,

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662\,497\,757\,247\,093\,700\ldots$$

Es de notar que la convergencia de esta sucesión a su límite es remarcablemente lenta: su componente $a_{1\,000\,000}$ coincide con el límite solamente en 6 dígitos decimales.

Cambiando apenas la sucesión del ejemplo que acabamos de considerar obtenemos otra sucesión monótona que tiene el mismo límite, pero que ahora es decreciente.

Ejercicio 3.3.1.11. Muestre que la sucesión $(b_n)_{n\ge1}$ que tiene para cada $n \in \mathbb{N}$ componente

$$b_n \coloneqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es decreciente y converge a e.

Combinando la información del Ejemplo 3.3.1.10 y de este ejercicio podemos probar la existencia de un límite importante.

Ejemplo 3.3.1.12. Necesitaremos aquí suponer que tenemos una función $\ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ creciente tal que $\ln e = 1$ y para toda elección de x e y en $(0,+\infty)$ vale que

$$\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y. \tag{3.5}$$

De hecho, existe exactamente una función con estas propiedades. Como $\ln 1 = \ln(1\cdot 1) = \ln 1 + \ln 1$, tiene que ser necesariamente $\ln 1 = 0$. Por otro lado, es fácil probar por inducción a partir de la identidad (3.5) que $\ln(x^k) = k\ln x$ cualesquiera sean $k \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$.

Como las sucesiones del Ejemplo 3.3.1.10 y del Ejercicio 3.3.1.11 convergen al mismo número e, y la primera es creciente mientras que la segunda es decreciente, sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

En vista de las propiedades de la función ln, esto implica que

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \ln e \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Esto nos permite concluir, ya que $\ln e = 1$, que

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \tag{3.6}$$

y, por lo tanto, que

$$0 \leq \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \tag{3.7}$$

Notemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \ln n = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - (\ln n - \ln 1) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-1}(\ln(i+1) - \ln i) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} - \ln\left(1+\frac{1}{i}\right)\right).$$

La desigualdad (3.7) nos dice entonces que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} - \ln n \leq \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

así que

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln n.$$

La sucesión $(d_n)_{n\geq 1}$ que tiene

$$d_n \coloneqq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ está entonces acotada inferiormente por 0. Por otro lado, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces

$$d_n - d_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln n\right) - \left(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i} - \ln(n+1)\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0$$

de acuerdo a la desigualdad (3.6). Con todo esto podemos concluir que la sucesión $(d_n)_{n\geq 1}$ esta acotada inferiormente y es decreciente, así que converge. Llamamos a su límite

$$\gamma \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

la ***constante de Euler–Mascheroni***, por Leonhard Euler y Lorenzo Mascheroni. Es posible ver que su valor es

$$\gamma = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,159\,335\,939\ldots$$

pero para hacerlo necesitamos saber más que la definición que acabamos de dar: lamentablemente la sucesión $(d_n)_{n\geq 1}$ converge muy lentamente a γ.

3.3.2. El criterio de intercalación

Nuestro siguiente resultado nos da otro criterio útil para decidir que una sucesión converge, llamado el *criterio de intercalación*:

Proposición 3.3.2.1. *Sean $a = (a_n)_{n\geq1}$, $b = (b_n)_{n\geq1}$ y $c = (c_n)_{n\geq1}$ tres sucesiones. Si las sucesiones a y c convergen y tienen el mismo límite y para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces la sucesión b también converge y su límite coincide con el de a y de c.*

Demostración. Supongamos que las sucesiones a y c convergen y tienen el mismo límite, sea A ese límite común, y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $a_n \leq b_n \leq c_n$. Vamos a probar que la sucesión b también converge a A.

Sea ε un número positivo. Como a converge a A, hay un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_1 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

De manera similar, como c converge a A, hay un entero positivo n_2 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_1 \implies |c_n - A| < \varepsilon.$$

Consideremos el entero $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$ y supongamos que n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Como $n \geq n_0 \geq n_1$, tenemos que $|a_n - A| < \varepsilon$, así que, en particular, es $A - \varepsilon < a_n$. Por otro lado, como $n \geq n_0 \geq n_1$, también es $|c_n - A| < \varepsilon$, así que $c_n < A + \varepsilon$. Esto implica, gracias a la hipótesis, que

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

y, por lo tanto, que $|c_n - A| < \varepsilon$. Esto prueba lo que queremos. □

Este criterio es extremadamente útil en la práctica. Demos un ejemplo bien sencillo de esto.

Ejemplo 3.3.2.2. Consideremos la sucesión $a = (a_n)_{n\geq1}$ que tiene, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\cos n}{n}.$$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$ cualquiera sea $\in \mathbb{R}$, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \tag{3.8}$$

Ahora bien, probamos en el Ejemplo 3.1.4 que la sucesión $(1/n)_{n\geq1}$ converge a 0, y exactamente de la misma forma podemos probar que la sucesión $(-1/n)_{n\geq1}$ también converge a 0. Esto junto con la desigualdad (3.8) nos permite concluir, gracias a la proposición, que la sucesión a converge y que, de hecho,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

Ejercicio 3.3.2.3. Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones.

(a) Muestre que si la sucesión $(|a_n - b_n|)_{n\geq 1}$ converge a 0 y hay un número c tal que $a_n \leq c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces las dos sucesiones a y b convergen a c.

(b) Pruebe que si la sucesión $(|a_n - b_n|)_{n\geq 1}$ converge a 0 y la sucesión a converge, entonces la sucesión b converge y su límite coincide con el de a.

El criterio de intercalación puede adaptarse para probar la divergencia de sucesiones de la siguiente manera.

Ejercicio 3.3.2.4. Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n \leq b_n$. Pruebe que si a diverge a $+\infty$, entonces b también lo hace, y que si b diverge a $-\infty$ entonces a también lo hace.

3.4. El principio de intervalos encajados

Con una idea muy similar a la que usamos para probar la Proposición 3.3.1.4 podemos probar el siguiente resultado conocido como el *principio de los intervalos encajados*.

Proposición 3.4.1. *Para cada entero positivo n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo de $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $I_n \supseteq I_{n+1}$, entonces la intersección*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

no es vacía.

(*ii*) *Si además la sucesión $(b_n - a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0, entonces esa intersección tiene exactamente un elemento.*

Demostración. Supongamos primero que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $I_n \supseteq I_{n+1}$, esto es, que $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ y, por lo tanto, que

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Esto implica que

(a) para todo $m \in \mathbb{N}$ el número b_m es una cota superior para el conjunto $A \coloneqq \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, y

(b) para todo $n \in \mathbb{N}$ el número a_n es una cota inferior para el conjunto $B \coloneqq \{b_m : m \in \mathbb{N}\}$.

En particular, como A y B son los dos no vacíos, podemos considerar el supremo $\alpha \coloneqq \sup A$ de A y el ínfimo $\beta \coloneqq \operatorname{ínf} B$ de B, y notar que

(c) $\alpha \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que α es la menor de las cotas superiores de A que, y que

(d) $a_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque β es la menor de las cotas inferiores de B.

De este último punto (d) vemos que, además, β es una cota superior para A, así que también tenemos que

(e) $\alpha \leq \beta$,

otra vez porque α es la menor de las cotas superiores de A, y, en particular, que podemos considerar el intervalo $I \coloneqq [\alpha, \beta]$. Mostremos que la intersección que aparece en el enunciado de la proposición es precisamente el conjunto I.

Si n es un elemento de $\mathbb{N}$, entonces $a_n \leq \alpha$ porque α es una cota superior para A y $\beta \leq b_n$ porque β es una cota inferior para B, así que $I = [\alpha, \beta] \subseteq [a_n, b_n] = I_n$. Vemos con esto que $I \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Sea, por otro lado, x un elemento de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Si n es un elemento de $\mathbb{N}$, entonces x pertenece a $I_n = [a_n, b_n]$ y, por lo tanto, es $a_n \leq x$ y $x \leq b_n$. Vemos así que x es una cota superior para el conjunto A, de manera que $\alpha \leq x$, y una cota inferior para el conjunto B, por lo que $x \leq \beta$. Juntando todo podemos concluir que x pertenece a $[\alpha, \beta] = I$ y, en definitiva, que $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Como el intervalo I ciertamente no es vacío, esto prueba la primera parte de la proposición.

Probemos ahora la segunda. Supongamos para ello que la sucesión $(|b_n - a_n|)_{n\geq 1}$ converge a 0 y, para llegar a una contradicción, que hay dos puntos distintos x e y en la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Como entonces $\varepsilon \coloneqq |x-y|$ es un número positivo, la hipótesis implica que hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |b_n - a_n| < |x - y|. \tag{3.9}$$

Ahora bien, como $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$, es $a_{n_0} < x < b_{n_0}$ y $a_{n_0} < y < b_{n_0}$, así que $|x - y| < b_{n_0} - a_{n_0} = |b_{n_0} - a_{n_0}|$: esto es absurdo, porque contradice la implicación (3.9). Esta contradicción provino de haber supuesto que en la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, que no es vacía, hay dos elementos distintos. No queda otra opción, entonces, que esa intersección tenga exactamente un elemento. □

La motivación original de este resultado es la formalización de ciertos algoritmos de cálculo que fueron usados desde la antigüedad. Veamos un ejemplo de ello.

Ejemplo 3.4.2. Sea x un elemento de $\mathbb{R}$ tal que $x > 1$. Hay exactamente una sucesión $(c_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\mathbb{R}$ tal que $c_1 = x$ y

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{x}{c_n}\right)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que

$$\textit{cualquiera sea } n \textit{ en } \mathbb{N} \textit{ vale que } x \leq c_n^2. \tag{3.10}$$

Esto es claro si $n = 1$, ya que $x = x \cdot 1 \leq x \cdot x = c_1^2$. Supongamos, por otro lado, que $n \in \mathbb{N}$ es tal que $x \leq c_n^2$. Como $0 \leq (c_n^2 - x)^2 = c_n^2 - 2c_n^2 x + x^2$, tenemos que $4c_n^2 x \leq c_n^2 + 2c_n^2 x + x^2 = (c_n^2 + x)^2$ y, como $c_n > 0$, esto nos dice que

$$x \leq \frac{(c_n^2 + x)^2}{4c_n^2} = c_{n+1}^2.$$

De (3.10) se deduce inmediatamente que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x/c_n \leq c_n$, así que podemos considerar el intervalo $I_n \coloneqq [x/c_n, c_n]$. Por otro lado, como c_{n+1} es el promedio de x/c_n y c_n y es $x/c_n \leq c_n$, tenemos que $c_{n+1} \leq c_n$ y, en consecuencia, que $x/c_n \leq x/c_{n+1}$. Esto nos dice que $I_n \supseteq I_{n+1}$. Hemos construido, por lo tanto, una cadena de intervalos encajados

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$$

Por otro lado, si escribimos $\Delta_n = c_n - x/c_n$ al ancho del intervalo I_n es fácil ver que

$$\Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n}{2} \frac{c_n^2 - x}{c_n^2 + x}.$$

Como $c_n^2 + x > 0$, es

$$\frac{c_n^2 - x}{c_n^2 + x} \leq \frac{c_n^2 + x}{c_n^2 + x} = 1,$$

así podemos concluir que $\Delta_{n+1} \leq \Delta_n/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de esto, a su vez, que la sucesión $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ converge a 0. De acuerdo a la proposición, entonces, la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ contiene exactamente un punto α.

Henon de Alejandría observó en el año 60 e.c. que este número α es precisamente la raíz cuadrada $\sqrt{x}$ de x, y este es el primer método conocido para calcular explícitamente la raíz cuadrada de un número real — verificaremos más abajo que este método efectivamente funciona. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces las primeras 6 componentes de la sucesión $(c_n)_{n\geq 1}$ son

$$2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408}, \quad \frac{665857}{470832}, \quad \frac{886731088897}{627013566048}$$

así que el intervalo I_6 es

$$\left[\frac{1254027132096}{886731088897}, \frac{886731088897}{627013566048}\right]$$
$$= [1.4142135623730950488016887\ldots, 1.4142135623730950488016896\ldots]$$

Los dos extremos de este intervalo coinciden en 22 dígitos decimales con

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242\ldots$$

Una de las razones por las que este principio de los intervalos encajados es interesante es que junto con la propiedad arquimediana nos permiten dar una caracterización alternativa de los cuerpos ordenados que son completos.

Proposición 3.4.3. *Un cuerpo ordenado K es completo si y solamente si tiene las siguientes dos propiedades:*

(AP) *para todo elemento positivo x de K existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > 1/n$.*

(NIP) *si para todo entero positivo tenemos un intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ en K de manera que*

- *$I_n \supseteq I_{n+1}$ cualquiera sea n en $\mathbb{N}$, y*
- *para todo elemento positivo ε de K existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m - a_m < \varepsilon$,*

entonces la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ tiene exactamente un elemento.

Si K es un cuerpo ordenado K cualquiera podemos construir la función $\nu : \mathbb{N} \to K$ de la Sección 2.5.1 y probar las Proposiciones 2.5.1.1 y los Corolarios 2.5.1.2 y 2.5.1.4 — ya que sus demostraciones no dependen de que el cuerpo ordenado sea completo — y esto nos permite identificar, como hicimos arriba, cada elemento de $\mathbb{N}$ con su imagen por ν. Es gracias a esto que tiene sentido la condición (AP) de esta proposición.

En la prueba que daremos de este resultado usaremos algunos resultados sobre cuerpos ordenados que establecimos en el capítulo anterior. Dejamos al lector la tarea de verificar que ninguno de ellos depende de la hipótesis de completitud y que, por lo tanto, podemos usarlos aquí.

Demostración. La Proposición 2.5.2.5 y la primera parte de la Proposición 3.4.1 nos dicen que un cuerpo ordenado completo tiene las dos propiedades descriptas en el enunciado de la proposición, así que estas son necesarias para que el cuerpo ordenado K sea completo. Mostremos que también son suficientes. Supongamos que el cuerpo ordenado K tiene las dos propiedades descriptas en la proposición y sea A un subconjunto no vacío y superiormente acotado de K. Tenemos que probar que A admite un supremo en K.

Primer paso. Empezaremos por construir un número r y, por recurrencia, para cada entero positivo n un intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ con la propiedad de que

$$a_n \text{ no es una cota superior para } A,\ b_n \text{ sí lo es, y } b_n - a_n \leq r/n \tag{3.11}$$

y

para todo $n \in \mathbb{N}$ *es* $I_n \supseteq I_{n+1}$.

Como el conjunto A no es vacío, hay algún elemento c en A y podemos poner $a_1 \coloneqq c - 1$. Claramente a_1 no es una cota superior de A. Por otro lado, como A es acotado superiormente podemos elegir una cota superior para A y escribirla b_1. Por supuesto, es $a_1 \leq b_1$. Sea $r \coloneqq b_1 - a_1$ y consideremos el intervalo $I_1 \coloneqq [a_1, b_1]$. La condición (3.11) con $n = 1$ evidentemente se cumple.

Supongamos ahora que m es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que ya construimos un intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ que satisface la condición (3.11) con $n = k$. Sea $t \coloneqq (b_k + a_k)/2$, de manera que, en particular, es $a_k < t < b_k$. Tenemos ahora dos casos a considerar.

- Si t no es una cota superior para A, entonces ponemos $a_{k+1} \coloneqq t$, $b_{k+1} \coloneqq b_k$ y, en consecuencia, $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Tenemos que a_{k+1} no es una cota superior para A, que b_{k+1} sí lo es, y que

$$b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - t = b_k - \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{r}{2k} \leq \frac{r}{k+1},$$

  ya que $2k = k + k \geq k + 1$.
- Si en cambio t sí es una cota superior para A, entonces ponemos $a_{k+1} \coloneqq a_k$, $b_{k+1} \coloneqq t$ e $I_{k+1} \coloneqq [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Otra vez a_{k+1} no es una cota superior para A, que b_{k+1} sí lo es, y ahora

$$b_{k+1} - a_{k+1} = t - a_k = \frac{a_k + b_k}{2} - a_k = \frac{b_k - a_k}{2} \leq \frac{r}{2k} \leq \frac{r}{k+1}.$$

En cualquiera de los dos casos, el intervalo I_{k+1} que construimos tiene la propiedad (3.11) con $n = k + 1$ y está contenido en I_k.

Segundo paso. Queremos mostrar ahora que

para todo elemento positivo ε *de* K *hay un entero positivo* n *tal que* $b_n - a_n < \varepsilon$. (3.12)

Sea para ello ε elemento positivo de K. Como ε/r también es un elemento positivo de K, la hipótesis (AP) implica que hay un elemento n_0 de $\mathbb{N}$ tal que $\varepsilon/r > 1/n_0$ en K. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces tenemos que $b_n - a_n = r/n \leq r/n_0 < \varepsilon$. Esto prueba lo que queremos

En este punto tenemos para cada entero positivo un intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ de K, es $I_n \supseteq I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y vale (3.12). La hipótesis (NIP) nos permite concluir, entonces, que la intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ tiene exactamente un elemento. Escribámoslo α y mostremos que es un supremo para A en K.

Tercer paso. Veamos que α es una cota superior para el conjunto A en K. Supongamos para ello que no lo es y lleguemos a una contradicción. Como no es una cota superior, hay un elemento a de A tal que $\alpha < a$ y, en particular, tenemos que $a - \alpha > 0$. Como $(a - \alpha)/r$ también es positivo, la hipótesis (AP) nos dice que hay un entero positivo n tal que $1/n < (a - \alpha)/r$, de manera que $r/n + \alpha < a$. Como $\alpha \in [a_n, b_n]$, tenemos que $a_n \leq \alpha \leq b_n$, así que

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n < \frac{r}{n} + \alpha < a.$$

Esto es absurdo, ya que a pertenece a A y b_n es una cota superior para A. Esta contradicción prueba que α es, como queremos, una cota superior para A.

Cuarto y último paso. Probemos finalmente que α es la menor de las cotas superiores de A en K. Sea β un elemento de K tal que $\beta < \alpha$. En ese caso el número $(\alpha - \beta)/r$ es positivo, así que la hipótesis (AP) implica que hay un entero positivo n tal que $(\alpha - \beta)/r > 1/n$ y, por lo tanto, $\alpha - r/n > \beta$. Como α pertenece al intervalo I_n, tenemos que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ y, por lo tanto, que

$$a_n = b_n - (b_n - a_n) \geq \alpha - r/n > \beta.$$

Ahora bien, como a_n no es una cota superior para el conjunto A, esta desigualdad nos dice que β tampoco lo es. Podemos concluir con esto que ningún elemento de K menor que α es una cota superior para A, de manera que α es la menor de las cotas superiores de ese conjunto. Esto es lo que queríamos probar. □

3.5. Manipulación de límites

El primer resultado de esta sección nos dice que al estudiar la convergencia o divergencia de una sucesión podemos olvidarnos de cualquiera de sus segmentos iniciales.

Proposición 3.5.1. *Sea k un entero positivo.*

(*i*) *Una sucesión $(a_n)_{n\geq1}$ converge si y solamente si la sucesión $(a_{n+k})_{n\geq1}$ converge, y cuando ese es el caso ambas tienen el mismo límite.*

(*ii*) *Una sucesión $(a_n)_{n\geq1}$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ si y solamente si la sucesión $(a_{n+k})_{n\geq1}$ también lo hace.*

Demostración. (*i*) Sea $a = (a_n)_{n\geq1}$ una sucesión y supongamos que a converge a un número A. Si ε es un número positivo, existe entonces un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

Si ahora n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces como $k \geq 0$ tenemos que $n + k \geq 0$ y, por lo tanto, que $|a_{n+k} - A| < \varepsilon$. Esto nos dice que la sucesión $(a_{n+k})_{n\geq}$ converge a A y prueba la necesidad de la condición que aparece en la proposición.

Supongamos ahora que la sucesión $(a_{n+k})_{n\geq 1}$ converge a un número real A y sea ε un número positivo. La hipótesis implica que hay un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_1 \implies |a_{n+k} - A| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Sea ahora $n_0 \coloneqq n_1 + k$, y supongamos que n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Esto nos dice que $n \geq n_1 + k$, así que $n - k \geq n_1$ y, en particular, que $n - k \in \mathbb{N}$, así que de (3.13) sabemos que $|a_n - A| = |a_{(n-k)+k} - A| < \varepsilon$. Esto prueba que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a A y, por lo tanto, la suficiencia de la condición que da la proposición.

(ii) Probaremos solamente la afirmación sobre divergencia a $+\infty$. Supongamos primero que la sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ y sea K un numero real cualquiera. La hipótesis implica que existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n > K$. Ahora bien, si n es un entero cualquiera tal que $n \geq n_0$, entonces ciertamente vale también es $n + k \geq n_0$ y, por lo tanto, la elección de n_0 implica que $a_{n+k} > K$. Esto muestra que la sucesión $(a_{n+k})_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ y, entonces, que la condición del enunciado es necesaria.

Mostremos que también es suficiente. Supongamos que la sucesión $(a_{n+k})_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ y sea K un número cualquiera. La hipótesis implica que hay un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_1 \implies a_{n+k} \geq K$. Pongamos $n_0 \coloneqq n_1 + k$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces claramente $n - k \geq n_0$ y, por lo tanto, la forma en que elegimos n_0 implica que $a_n = a_{(n-k)+k} > K$. Podemos concluir de esto que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$. □

Otro resultado fundamental al trabajar con sucesiones y sus límites es el siguiente, que describe de que manera interactúan estas nociones con las operaciones aritméticas de $\mathbb{R}$. La siguiente proposición se ocupa de esto cuando las sucesiones con las que operamos convergen.

Proposición 3.5.2.

(i) *Si una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge y c es un número real, entonces la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ también converge y su límite es*

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(ii) *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones convergentes, entonces la sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ también converge y su límite es*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(iii) *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones convergentes, entonces la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ también converge y su límite es*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(*iv*) *Si* $(a_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión convergente y tanto sus componentes como su límite son todos no nulos, entonces la sucesión* $(1/a_n)_{n\geq 1}$ *también converge y su límite es*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}. \tag{3.14}$$

Notemos que en esta última afirmación necesitamos la hipótesis de que todas las componentes de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ sean distintas de 0 para que tenga sentido considerar la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$, y que su límite sea no nulo para que tenga sentido el lado derecho de la igualdad (3.14).

Demostración. (*i*) Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente, sea A su límite, y sea c un número real. Queremos probar que la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ converge a cA.

Sea ε un número positivo. El número $1 + |c|$ es positivo, así que $\eta \coloneqq (1 + |c|)^{-1}\varepsilon$ es un número positivo, y la convergencia de a a A implica que existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \eta.$$

Ahora bien, si n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces tenemos que

$$|ca_n - cA| = |c \cdot (a_n - A)| = |c| \cdot |a_n - A| \leq |c| \cdot \eta = |c| \cdot \frac{\varepsilon}{1 + |c|} = \frac{|c|}{1 + |c|} \cdot \varepsilon < \varepsilon,$$

ya que, como $|c| < 1 + |c|$, el cociente $|c|/(1 + |c|)$ es estrictamente menor que 1. Esto prueba que la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ converge a cA, como queremos.

(*ii*) Supongamos ahora que $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones convergentes, que A y B son sus respectivos límites, y mostremos que la sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ converge a $A + B$.

Sea ε un número positivo. Como $\frac{1}{2}\varepsilon$ es también un número positivo, la convergencia de a a A implica que hay un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_1 \implies |a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

y la convergencia de b a B que hay otro entero positivo n_2 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_2 \implies |b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Pongamos ahora $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$ y sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Como $n \geq n_0 \geq n_1$, tenemos que $|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$, y como $n \geq n_0 \geq n_2$, que $|b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Esto implica que

$$\big|(a_n + b_n) - (A + B)\big| = \big|(a_n - A) + (b_n - B)\big| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ converge a $A + B$, como queremos.

(*iii*) Sean $a = (a_n)$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones, sean A y B sus correspondientes límites, y probemos que la sucesión $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ converge a AB.

Sea ε un número positivo. Como la sucesión a converge, sabemos de la Proposición 3.1.21 que es acotada y existe, por lo tanto, un número positivo K tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como la sucesión a converge a A y la sucesión b converge a B y los números $\varepsilon/2(1+|B|)$ y $\varepsilon/2K$ son positivos, hay enteros positivos n_1 y n_2 tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ valen

$$n \geq n_1 \implies |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)}, \qquad n \geq n_2 \implies |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Sea $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Como $n \geq n_0 \geq n_1$ es $|a_n - A| < \varepsilon$, y como $n \geq n_0 \geq n_2$, también es $|b_n - B| < \varepsilon$, así que

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= \big|a_n(b_n - B) + (a_n - A)B\big| \leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot |B| \\ &\leq K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2(1+|B|)} \cdot |B| = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|B|}{1+|B|}\right)\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba lo que queremos.

(*iv*) Sea finalmente $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente de componentes y límite no nulos, sea A su límite, y probemos que la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ converge a $1/A$.

Sea ε un número positivo. Como el límite A no es nulo, la Proposición 3.1.19 nos dice que hay un número positivo K y un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_1 \implies |a_n| > K. \tag{3.15}$$

El número $K|A|\varepsilon$ es positivo, así que como la sucesión a converge a A, hay un entero positivo n_2 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_2 \implies |a_n - A| < K|A|\varepsilon. \tag{3.16}$$

Pongamos $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y supongamos que n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Como $n \geq n_1$ y $n \geq n_2$, de (3.15) y (3.16) podemos deducir que

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|A - a_n|}{|a_n| \cdot |A|} < \frac{K|A|\varepsilon}{K \cdot |A|} = \varepsilon,$$

Esto prueba que la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ converge a $1/A$. □

Las siguientes proposiciones que presentaremos, por su parte, se ocupan de la situación en la que hacemos operaciones aritméticas involucrando sucesiones que divergen.

Proposición 3.5.3. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea c un número real.*

(*i*) *Si a diverge a $+\infty$, entonces la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ si c es positivo, diverge a $-\infty$ si c es negativo, y converge a 0 si c es nulo.*

(*ii*) *Si a diverge a $-\infty$, entonces la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ si c es positivo, diverge a $-\infty$ si c es negativo, y converge a 0 si c es nulo.*

Demostración. Probaremos solamente la afirmación (*i*). Supongamos que la sucesión a diverge a $+\infty$ y en primer lugar que el número c es positivo. Si K es un numero cualquiera, entonces la divergencia de a a $+\infty$ implica que hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n > K/c$. Si n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces $a_n > K/c$ y, como c es positivo, es $ca_n > K$. Esto prueba que la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$.

Supongamos ahora que el número c es negativo. Como $-c$ es positivo, lo que ya hicimos nos dice que la sucesión $(-ca_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ y el resultado del Ejercicio 3.2.2 nos permite concluir que la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$.

Finalmente, si el número c es nulo entonces es claro que la sucesión $(ca_n)_{n\geq 1}$ converge a 0 porque es, de hecho, constante de valor 0. □

Para obtener un resultado útil sobre para la suma tenemos que incluir una hipótesis de acotación conveniente.

Proposición 3.5.4. *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones.*

(*i*) *Si a diverge a $+\infty$ y b está acotada inferiormente, entonces la sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$.*

(*ii*) *Si a diverge a $-\infty$ y b está acotada superiormente, entonces la sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$.*

Si a diverge a $+\infty$ y b no está acotada inferiormente, entonces no podemos decir en general nada sobre el carácter de la sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$. Por ejemplo, si a es la sucesión $(n)_{n\geq 1}$, que diverge a $+\infty$, entonces si $b = (-n)_{n\geq 1}$ obtenemos una sucesión convergente, si $b = (-n^2)_{n\geq 1}$ una que diverge a $-\infty$, si $b = (-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ una que diverge a $+\infty$, si $b = (-n + (-1)^n)_{n\geq 1}$ una que oscila y está acotada, y si $b = ((-1)^n n)_{n\geq 1}$ una que oscila y no está acotada. Por supuesto, podemos hacer una observación similar sobre la hipótesis de la segunda parte de la proposición.

Demostración. Supongamos que la sucesión a diverge a $+\infty$ y que la sucesión b está acotada inferiormente, y sea L una cota inferior para b. Sea K es un número cualquiera. La divergencia de a a $+\infty$ implica que hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n > K - L$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces por un lado tenemos que $a_n > K - L$ y, por otro, que $b_n \geq L$, y de esto podemos decucir que $a_n + b_n > (K - L) + L = K$. Esto prueba que la sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$, como queremos. □

Para describir el comportamiento con respecto al producto de las sucesiones divergentes es útil la siguiente definición.

Definición 3.5.5. Decimos que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ está

- ***a la larga acotada inferiormente por un número*** K si hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 0$ es $a_n > K$, y
- ***a la larga acotada superiormente por un número*** K si hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 0$ es $a_n < K$.

Notemos que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ está a la larga acotada inferiormente por un número K exactamente cuando vale que $a_n \geq K$ para cada casi todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.5.6. Una sucesión que converge a un límite positivo está a la larga acotada inferiormente por un número positivo — por ejemplo, por la mitad de su límite. Por otro lado, una sucesión que diverge a $+\infty$ está a la larga acotada inferiormente por cualquiera número real: esto es precisamente lo que significa que diverja a $+\infty$, de hecho.

Ejercicio 3.5.7. Muestre que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ está a la larga acotada inferiormente por un número positivo si y solamente si la sucesión $(-a_n)_{n\geq 1}$ está a la larga acotada superiormente por un número negativo.

Usando este lenguaje, podemos ocuparnos de los productos.

Proposición 3.5.8. *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones.*

(*i*) *Si la sucesión a diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ y la sucesión b está a la larga acotada superiormente por un número positivo, entonces la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$.*

(*ii*) *Si la sucesión a diverge a $+\infty$ o a $-\infty$ y la sucesión b está a la larga acotada inferiormente por un número negativo, entonces la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$ o a $+\infty$.*

Si la sucesión a diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, y la sucesión b no está a la larga acotada superiormente por un número positivo ni a la larga acotada inferiormente por un número negativo, entonces no podemos en general decir nada sobre el carácter de la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$.

Demostración. Probaremos solamente las parte de estas afirmaciones en las que la hipótesis es que la sucesión a diverge a $-\infty$. Supongamos entonces que a diverge a $+\infty$ y primero que la sucesión b está a la larga acotada inferiormente por un número positivo ε, de manera que hay un entero positivo N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq N \implies b_n > \varepsilon$. Sea K un número cualquiera. La divergencia de a a $+\infty$ implica que hay un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n > K/\varepsilon$. Pongamos $n_0 := \max N, n_1$ y sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que

$n \geq n_0$. En ese caso tenemos que $b_n > \varepsilon > 0$ porque $n \geq N$ y que $a_n > K/\varepsilon$ porque $n \geq n_1$, así que

$$a_n \cdot b_n > \frac{K}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1 + |K| > K.$$

Esto nos dice que la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$.

Supongamos ahora que la sucesión b está a la larga acotada inferiormente por un número negativo. El resultado del Ejercicio 3.5.7 nos dice entonces que la sucesión $(-b_n)_{n\geq 1}$ está a la larga acotada por un número positivo y, en vista de lo que ya probamos, la sucesión $(a_n \cdot (-b_n))_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$: el Ejercicio 3.2.2 nos permite concluir de esto que la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$, que es lo que queremos. □

Ejercicio 3.5.9. Construya sucesiones $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ de manera que a diverja a $+\infty$, b no esté a la larga acotada inferiormente por un número positivo, y la sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ (*i*) diverja a $+\infty$, (*ii*) converja a un número positivo, (*iii*) converja a 0, (*iv*) converja a un número negativo, (*v*) diverja a $-\infty$, (*vi*) oscile y sea acotada, (*vii*) oscile y no sea acotada.

Finalmente nos ocupamos de la inversión.

Proposición 3.5.10. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de componentes no nulas.*

(*i*) *Si la sucesión a diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, entonces la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ converge a* 0.

(*ii*) *Si la sucesión a converge a* 0 *y está a la larga acotada inferiormente por* 0*, entonces la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$.*

(*iii*) *Si la sucesión a converge a* 0 *está a la larga acotada superiormente por* 0*, entonces la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$.*

En el Ejercicio 3.7.7 consideraremos la situación en la que la sucesión a converge a 0 pero no está a la larga acotada ni inferiormente ni superiormente por 0

Demostración. (*i*) Supongamos que la sucesión a diverge a $+\infty$ y sea ε un número positivo. Hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies a_n > 1/\varepsilon$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces tenemos que $a_n > 1/\varepsilon$, así que $1/a_n < \varepsilon$ y, por lo tanto $|1/a_n - 0| < \varepsilon$. Esto prueba que la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0.

Si en cambio la sucesión a diverge a $-\infty$, sabemos que la sucesión $(-a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ y lo que acabamos de probar nos dice que la sucesión $(-1/a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0. La primera parte de la Proposición 3.5.2 nos permite concluir que finalmente que la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0.

(*ii*) Supongamos que la sucesión a converge a 0 y que está a la larga acotada inferiormente por 0, de manera que hay un entero positivo N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq N \implies a_n > 0$. Sea K un número cualquiera. Como $1/(1+|K|)$ es un número positivo, hay un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \neq n_1 \implies |a_n - 0| < 1/(1+|K|)$. Sea $n_0 \coloneqq \max\{N, n_1\}$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces es $n \geq N$, así que $a_n > 0$, y $n \geq n_1$, así que $a_n = |a_n| = |a_n - 0| < 1/(1 + |K|)$ y, por lo tanto, $1/a_n > 1 + |K| > K$. Esto muestra que la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$.

(*iii*) Si la sucesión a converge a 0 y está a la larga acotada superiormente por 0, entonces la sucesión $(-a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0 y está a la larga acotada inferiormente por 0, así que la parte (*ii*) nos dice que $(-1/a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$. Como sabemos, esto implic que la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$. □

Nuestra próxima proposición nos dice que tomar límites de sucesiones convergentes es una operación monótona: preserva las desigualdades.

Proposición 3.5.11. *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones convergentes. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $a_n \leq b_n$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Demostración. Probaremos la implicación contrarrecíproca de la del enunciado. Sean A y B los límites de las sucesiones a y b, respectivamente, y supongamos que $A > B$, de manera que el número $\varepsilon := \frac{1}{2}(A - B)$ es positivo. Notemos que

$$B + \varepsilon = B + \frac{1}{2}(A - B) = A - \frac{1}{2}(A - B) = A - \varepsilon.$$

Ahora bien, como la sucesión a converge a A, existe un entero positivo n_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_1 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

De la misma forma, como la sucesión b converge a B, hay un entero positivo n_2 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_2 \implies |b_n - B| < \varepsilon.$$

En particular, si ponemos $k := \max\{n_1, n_2\}$ tenemos, ya que $k \geq n_1$ y $k \geq n_2$, que $|a_k - A| < \varepsilon$ y $|b_k - B| < \varepsilon$. En particular, esto nos dice que

$$b_k < B + \varepsilon = A - \varepsilon < a_k.$$

Vemos así que no vale que para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $a_n \leq b_n$. Esto prueba la proposición. □

Un caso especial de esta propiedad de monotonía es importante:

Corolario 3.5.12. *Sea k un número real. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente tal que $a_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq k.$$

Es importante observar que en este corolario no podemos reemplazar las desigualdades por desigualdades estrictas. Por ejemplo, todos los términos de la sucesión convergente $(-1/n)_{n\geq 1}$ son estrictamente negativos pero no es cierto que si límite, que es 0, lo sea.

Demostración. Sea k un numero real y sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente tal que $a_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $b = (b_n)_{n\geq 1}$ es la sucesión constante de valor k, entonces b converge a k y tenemos que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$: la proposición nos permite concluir de esto que $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = k$, como queremos. □

Ejercicio 3.5.13. Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones. Pruebe que si a converge y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n < b_n < a_{n+1}$, entonces la sucesión b también converge y su límite coincide con el de a.

Ejercicio 3.5.14. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que si a converge, entonces el límite de a es un elemento de $\mathbb{Z}$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$m \geq n_0 \implies a_m = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ejercicio 3.5.15. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión, y sea $b = (b_n)_{n\geq 1}$ la sucesión que tiene

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pruebe que si a converge, entonces b también lo hace y que en ese caso a y b tienen el mismo límite.
(b) Dando un ejemplo, muestre que puede ser que a no converja y b sí lo haga.

Ejercicio 3.5.16. Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesión. Muestre que si a converge a 0 y b es acotada, entonces la sucesión $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ converge a 0.

Ejemplo 3.5.17. Sea α un número positivo y consideremos la sucesión $(\alpha^{1/n})_{n\geq 1}$.

- Si $\alpha \geq 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que por un lado que $\alpha^{1/n} \geq 1$ y, por otro, como $(n+1)/n > 1$, que $\alpha^{(n+1)/n} \geq \alpha$, por lo que $\alpha^{1/n} \geq \alpha^{1/(n+1)}$. Esto nos dice que la sucesión está acotada inferiormente y que es decreciente, así que converge, y que si L es su límite vale que $L \geq 1 > 0$.

- Si en cambio $0 < \alpha < 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\alpha^{1/n} < 1$ y, como $(n+1)/n > 1$, que $\alpha^{(n+1)/n} < \alpha$, de manera que $\alpha^{1/n} < \alpha^{1/(n+1)}$. En este caso vemos que la sucesión esta acotada superiormente y es creciente, así que otra vez converge, y que si L es su límite entonces $L \geq \alpha > 0$.

Vemos así que en cualquier caso la sucesión $(\alpha^{1/n})_{n\geq 1}$ converge y que su límite L es positivo. En particular, esto implica que la sucesión $(\alpha^{2/n})_{n\geq 1}$ converge a L^2. Ahora bien, como $(\alpha^{1/n})_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $(\alpha^{2/n})_{n\geq 1}$, debe ser entonces $L = L^2$ y, como L no es nulo, $L = 1$.

Ejemplo 3.5.18. Consideremos la sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ que tiene $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Es claro que $a_1 \leq 2$, y si k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $a_k \leq 2$, entonces $a_{k+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{2+2} = 2$, ya que la función $t \in [0,\infty) \mapsto \sqrt{t} \in [0,\infty)$ es creciente. Por inducción, entonces, podemos concluir que $a_n \leq 2$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, que la sucesión a está acotada superiormente.
- Como $\sqrt{2}+2 \geq$, es $a_2 = \sqrt{a_1 + 2} = \sqrt{\sqrt{2}+2} \geq \sqrt{2} = a-1$. Por otro lado, si k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y es $a_{k+1} \geq a_k$, entonces $a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}+2} \geq \sqrt{a_k + 2} = a_{k+1}$. Otra por el principio de inducción podemos concluir de esto que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente.

Juntando todo, vemos que esa sucesión converge. Sea α su límite. Es inmediato que $a_{n+1}^2 = a_n + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y los resultados de esta sección implican que la sucesión $(a_{n+1}^2)_{n\geq 1}$ converge a α^2 y que la sucesión $(a_n+2)_{n\geq 1}$ converge a $\alpha+2$. Como estas dos sucesión son iguales, esto implica, claro, que $\alpha^2 = \alpha + 2$. Vemos así que el número α es una raíz del polinomio $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ y, por lo tanto, que α es o -1 o 2. Ahora bien, como $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$: esto implica que necesariamente debe ser $\alpha = 2$.

Calculando directamente, por ejemplo, podemos ver que

$$a_{10} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}}} = 1{,}999\,997\,647\ldots$$

3.6. El criterio de Cauchy

Una sucesión es convergente exactamente cuando tiene un límite: un problema de esta definición es que para decidir si una sucesión es convergente necesitamos conocer su límite. Con frecuencia esto es imposible. En esta sección presentaremos un criterio que nos permitirá sortear este problema.

Supongamos que $a = (a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión que converge a un número A y fijemos un número positivo ε. Hay entonces un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

Esto nos dice que a partir de la componente n_0-ésima de la sucesión todas las componentes están en el intervalo $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ y, en particular, dos cualesquiera de esas componentes no pueden diferir en más que 2ε. Esta observación es tan sencilla como importante.

Definición 3.6.1. Decimos que una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es ***de Cauchy*** si para todo número positivo ε hay un entero positivo n_0 tal para cada $m, n \in \mathbb{N}$ vale

$$m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

El nombre recuerda a Augustin-Louis Cauchy.

Proposición 3.6.2. *Una sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y supongamos que es de Cauchy. Hay entonces un entero positivo n_1 tal que para cada $m, n \in \mathbb{N}$ vale

$$m, n \geq n_1 \implies |a_m - a_n| < 1,$$

y de esto se sigue, en particular, que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ es $a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$. Por otro lado, el conjunto $I \coloneqq \{a_1, \dots, a_{n_0}\} \cup \{a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1\}$ es finito, así que podemos considerar los números $\alpha \coloneqq \min I$ y $\beta \coloneqq \max I$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces

- o bien es $n < n_0$, y en ese caso $a_n \in I$, así que $\alpha \leq a_n \leq \beta$,
- o bien es $n \geq n_0$, y en ese caso tenemos que $\alpha \leq a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1 \leq \beta$.

Así, en cualquier caso es $\alpha \leq a_n \leq \beta_n$, y esto nos dice que el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado inferiormente por α y superiormente por β. □

Nuestra observación de arriba es, en este lenguaje, que una sucesión convergente es de Cauchy. La importancia de esta noción radica en que vale la afirmación recíproca.

Proposición 3.6.3. *Una sucesión es convergente si y solamente si es de Cauchy.*

El interés de esto, claro, es que podemos decidir si una sucesión es de Cauchy o no sin hacer referencia alguna a su límite, si es que tiene alguno.

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Supongamos primero que a converge, que A es su límite, y mostremos que a es de Cauchy. Sea ε un número positivo. Como $\varepsilon/2$ es también positivo y la sucesión a converge a A, hay un entero positivo n_0 tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si n y m son dos elementos cualesquiera de $\mathbb{N}$ tales que $m, n \geq n_0$, tenemos entonces que

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto nos dice que la sucesión a es de Cauchy y prueba que la condición que da la proposición es necesaria.

Veamos ahora que es también suficiente. Supongamos que la sucesión a es de Cauchy. De acuerdo a la Proposición 3.6.2, hay un número positivo K tal que $|a_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $C_n \coloneqq \{a_i : i \geq n\}$. Claramente C_n tiene a K como cota superior y no es vacío, así que podemos considerar su supremo $c_n \coloneqq \sup C_n$ y es $c_n \geq -K$, ya que $-K$ no es una cota superior para C_n. Por otro lado, si n es un elemento cualesquiera de $\mathbb{N}$ es $C_n \supseteq C_{n+1}$, así que $c_n = \sup C_n \geq \sup C_{n+1} = c_{n+1}$. Esto nos dice que la sucesión $c = (c_n)_{n\geq 1}$ es decreciente y que está acotada inferiormente por $-K$. De acuerdo a la Proposición 3.3.1.4, entonces, esta sucesión c converge. Sea A su límite. Para probar la proposición mostraremos que la sucesión a con la que empezamos converge a A.

Sea ε un número positivo. Como la sucesión a es de Cauchy, hay un entero positivo n_0 tal que para cada $m, n \in \mathbb{N}$ vale

$$m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.17}$$

Fijemos un elemento cualquiera n de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. De (3.17) podemos deducir que

$$|a_n - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.18}$$

Por otro lado, si m es otro elemento de $\mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0$, entonces de (3.17) sabemos que es

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} < a_k < a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } k \geq m,$$

así que $a_{n_0} + \frac{1}{2}\varepsilon$ es una cota superior para el conjunto C_m y $a_{n_0} - \frac{1}{2}\varepsilon$ no lo es: esto implica que

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq c_m \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como esto es cierto cualquiera sea m en $\mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0$, nos permite deducir que el límite A de la sucesión c satisface la desigualdad

$$a_{n_0} - \frac{\varepsilon}{2} \leq A \leq a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}$$

o, equivalentemente,

$$|a_{n_0} - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando esto y la desigualdad (3.18) vemos que

$$|a_n - A| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión a converge a A, como queremos. □

El criterio convergencia de Cauchy, como el principio de intervalos encajados, también nos permite caracterizar los cuerpos ordenados completos:

Proposición 3.6.4. *Un cuerpo ordenado K es completo si y solamente si tiene las siguientes dos propiedades:*

(AP) *para todo elemento positivo x de K existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > 1/n$.*

(CC) *Toda sucesión de Cauchy en K converge.*

Demostración. Las Proposiciones 2.5.2.5 y 3.6.3 nos dicen que un cuerpo ordenado completo tiene las dos propiedades descriptas en el enunciado de la proposición, así que estas son necesarias para que el cuerpo ordenado K sea completo. Probemos que son suficientes.

Primer paso. Supongamos que K es un cuerpo ordenado que satisface esas dos condiciones y sea A un subconjunto no vacío de K que es acotado superiormente. Como A no es vacío, podemos elegir un elemento x en A. Si x es el máximo de A, entonces es su supremo y no tenemos nada que hacer. Supongamos entonces que x no es el máximo de A. Fijemos, por otro lado, una cota superior y de A en K, y observemos que $y - x$ es un elemento positivo de K. Definamos ahora una sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ recursivamente poniendo $a_1 \coloneqq y$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} \coloneqq \begin{cases} a_n - \dfrac{y-x}{2^n} & \text{si esta es una cota superior para } A; \\ a_n & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$0 \leq a_n - a_{n+1} \leq \frac{y-x}{2^n}.$$

Mostremos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en K. Sea ε un elemento positivo de K. La hipótesis (AP) implica que hay un elemento n_0 de $\mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon/(y-x)$. Sean n y m dos enteros positivos tales que n, $m \geq n_0$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n \leq m$. Es entonces

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= \left|\sum_{i=n}^{m-1}(a_i - a_{i+1})\right| \leq \sum_{i=n}^{m-1}|a_i - a_{i+1}| \leq \sum_{i=n}^{m-1}\frac{y-x}{2^i} = (y-x)\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^m}\right) \\ &\leq \frac{y-x}{2^{n-1}} \leq \frac{y-x}{n} \leq \frac{y-x}{n_0} < \varepsilon,\end{aligned}$$

ya que $2^{n_0-1} \geq n_0$ y $\sum_{i=n}^{m} 2^{-i} = 2^{-n+1} - 2^m$. Esto prueba lo que queremos.

Segundo paso. En vista de la hipótesis (CC) sabemos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a un elemento α de K. Notemos que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \leq a_m$, así que $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \leq a_m$. Mostraremos que α es un supremo del conjunto A en K. Sea z un elemento cualquiera de A. La forma en que definimos la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ nos dice que cada una de sus componentes es una cota superior para A, así que tenemos que $z \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, que $z \leq \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Vemos así que α es una cota superior para A.

Tercer y último paso. Queremos probar ahora que α es la menor de las cotas superiores de A — como veremos, esto es un poco más complicado. Supongamos que ese no es el caso, de manera que hay una cota superior β para A tal que $\beta < \alpha$. De acuerdo a la hipótesis (AP), hay un elemento n_1 de $\mathbb{N}$ tal que $1/n_1 < (\alpha - \beta)/(y-x)$, ya que este último elemento de K es positivo, y entonces

$$\alpha - \frac{y-x}{2^{n_1}} \geq \alpha - \frac{y-x}{n_1} > \beta.$$

Sea ahora n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$. Como $\alpha_n \geq \alpha$, es

$$a_n - \frac{y-x}{2^n} \geq \alpha - \frac{y-x}{2^n} \geq \alpha - \frac{y-x}{2^{n_1}} > \beta$$

y, como β es una cota superior para A, esto nos dice que $a_n - (y-x)/2^n$ también lo es. De acuerdo a la definición de nuestra sucesión, entonces, tenemos que $a_{n+1} = a_n - (y-x)/2^n < a_n$.

Hemos probado que el número n_1 pertenece al conjunto

$$I \coloneqq \{m \in \mathbb{N} : \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq m \text{ es } a_{n+1} < a_n\}$$

y, en particular, que este subconjunto de $\mathbb{N}$ no es vacío: podemos entonces considerar su mínimo $n_0 \coloneqq \min I$. Mostremos ahora por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ es

$$a_{n_0} - \frac{y-x}{2^{n_0-1}} = a_n - \frac{y-x}{2^{n-1}}. \tag{3.19}$$

Si $n = n_0$ esto es evidente. Por otro lado, si n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ y para el cual esta igualdad es válida, entonces de que n_0 pertenece a I podemos deducir que $a_{n+1} < a_n$, así que, de acuerdo a la definición de nuestra sucesión y la hipótesis inductiva, es

$$a_{n_0} - \frac{y-x}{2^{n_0-1}} = a_n - \frac{y-x}{2^{n-1}} = a_{n+1} + \frac{y-x}{2^n} - \frac{y-x}{2^{n-1}} = a_{n+1} - \frac{y-x}{2^n}.$$

Como las sucesiones $((y-x)/2^{n-1})_{n\geq 1}$ y $(a_n)_{n\geq 1}$ convergen a 0 y a α, respectivamente, de la igualdad (3.19) deducimos inmediatamente que

$$a_{n_0} - \frac{y-x}{2^{n_0-1}} = \alpha \tag{3.20}$$

Supongamos por un momento que $n_0 > 1$. En ese caso $n_0 - 1$ es un elemento de $\mathbb{N}$ y tenemos que $a_{n_0-1} \geq a_{n_0}$ y, por lo tanto, que

$$a_{n_0-1} - \frac{y-x}{2^{n_0-1}} \geq a_{n_0} - \frac{y-x}{2^{n_0-1}} = \alpha.$$

Como α es una cota superior para A, esto nos dice que $a_{n_0-1} - (y-x)/2^{n_0-1}$ también lo es y, por lo tanto, que $a_{n_0} < a_{n_0-1}$. De esto y de que n_0 pertenece al conjunto I podemos deducir que también $n_0 - 1$ pertenece a I: esto es absurdo, ya que n_0 es el menor elemento de I.

Esta contradicción prueba que $n_0 = 1$. La igualdad (3.20) nos dice entonces que

$$x = a_{n_0} - (y-x) = \alpha.$$

Esto otra vez es absurdo, porque x no un elemento de A que no es el máximo de A y, por lo tanto, no puede ser igual a α, que sí es una cota superior para A. Esta contradicción provino de haber supuesto que hay una cota superior para A menor que α, así que α debe ser la menor cota superior de A, esto es, el supremo de A. □

Observación 3.6.5. En esta demostración usamos la hipótesis de que toda sucesión de Cauchy converge solo para concluir que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que construimos ahí converge. Notemos que esta sucesión es decreciente y está acotada inferiormente por el elemento x de A: podríamos haber supuesto también que toda sucesión monótona decreciente y acotada converge y llegar a la misma conclusión de que el cuerpo K es completo. De todas formas, la importancia de la proposición que acabamos de probar reside sobre todo en que siguiere de qué manera extender la noción de completitud a situaciones en las que no hay un orden. Esto es importante en topología, en el análisis funcional, y en varios otros contextos.

3.7. Subsucesiones y puntos de acumulación

Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, entonces la ***subsucesión*** de a correspondiente a f es la sucesión $b = (b_n)_{n\geq 1}$ que para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene componente $b_n = a_{f(n)}$. Si vemos a a como una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, entonces la sucesión b es simplemente la composición $a \circ f$. HACER: Redo this.

Notemos que si b es la subsucesión de a correspondiente a una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y c es la subsucesión de b correspondiente a una segunda función estrictamente creciente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, entonces c es la subsucesión de a correspondiente a la función $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que es, claro, estrictamente creciente. Así, una subsucesión de una subsucesión de a es una subsucesión de a. Por otro lado, las subsucesiones de una subsucesiones heredan muchas de las propiedades que esta pueda tener. El siguiente ejercicio da algunos ejemplos de esto.

Ejercicio 3.7.1. Muestre que una subsucesión de una sucesión que es creciente, estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente, acotada superiormente, acotada inferiormente o de Cauchy tiene la misma propiedad.

Usaremos el siguiente lema todo el tiempo al trabajar con subsucesiones.

Lema 3.7.2. *(i) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(n) \geq n$.*

(ii) Si I es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, entonces hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cuya imagen está contenida en I.

Demostración. (*i*) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Claramente vale que $f(1) \geq 1$, simplemente porque $f(1)$ es un elemento de $\mathbb{N}$. Por otro lado, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq n$, entonces que f sea estrictamente creciente implica que $n \leq f(n) < f(n+1)$ y, como $f(n+1)$ es un entero, que, de hecho, $n+1 \leq f(n+1)$. Esto prueba el lema por inducción.

(*ii*) Sea I un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Para probar el lema será suficiente que mostremos que podemos construir por recurrencia una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de elementos de I tal que $f_n < f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como el conjunto I es infinito, en particular no es vacío y podemos elegir un elemento cualquiera f_1 en I. Supongamos ahora que k es un elemento de $\mathbb{N}$ y que ya construimos la componente f_k de la sucesión. Como el conjunto I es infinito y el conjunto $\{1, \ldots, f_k\}$ es finito, la diferencia $I \setminus \{1, \ldots, f_k\}$ es infinito: podemos entonces elegir un elemento f_{k+1} en él. Como f_{k+1} no pertenece a $\{1, \ldots, f_k\}$ y sí a $\mathbb{N}$, es claro que $f_k < f_{k+1}$. Esto completa la construcción. □

La primera observación que podemos hacer sobre las subsucesiones de una sucesión es la siguiente:

Proposición 3.7.3. *Una subsucesión de una sucesión a que converge converge y lo hace al mismo límite que a.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente, sea A su límite, sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente y consideremos la subsucesión $b = (b_n)_{n\geq 1}$ de a correspondiente a f, de manera que es $b_n = a_{f(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea ε un número positivo. Como a converge a A, existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ahora bien, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces el Lema 3.7.2(*i*) nos dice que $f(n) \geq n \geq n_0$, así que $|b_n - A| = |a_{f(n)} - A| < \varepsilon$. Vemos así que la sucesión b converge a A. □

El recíproco de esta proposición es cierto, esto es, si toda subsucesión de una sucesión a converge, entonces a misma converge y su límite coincide con el de cualquiera de sus subsucesiones. Esto no es particularmente interesante, sin embargo, ya que a misma es una de sus subsucesiones… Más interesante es el siguiente resultado:

Proposición 3.7.4. *Sea a una sucesión, sea A un número real, sea k un entero positivo, sean $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funciones estrictamente crecientes y sean $b^1, \dots, b^k$ las correspondientes subsucesiones de a. Si las sucesiones $b^1, \dots, b^k$ convergen a A y el conjunto $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} f_i(\mathbb{N})$ es finito, entonces a converge a A.*

Demostración. Supongamos que cada una de las sucesiones $b^1, \dots, b^k$ converge a A y que el conjunto $I \coloneqq \mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f_i(\mathbb{N})$ es finito, y sea ε un número positivo. La hipótesis implica que existen enteros positivos $n_1, \dots, n_k$ tales que para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_i \implies |b^i_n - A| < \varepsilon.$$

Sea $n_0 \coloneqq \text{máx}\{f_1(n_1), \dots, f_k(n_k)\} + \text{máx}\, I$, que es un entero positivo, y supongamos que n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$. Como n pertenece a $\mathbb{N}$ y es mayor que cualquier elemento de $\mathbb{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} f_i(\mathbb{N})$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $n \in f_i(\mathbb{N})$ y hay, por lo tanto, un elemento m de $\mathbb{N}$ tal que $n = f_i(m)$. Tenemos entonces que $f_i(n_i) \leq n_0 \leq n = f(m)$, así que $n_i \leq m$ y, por lo tanto, $m = f_i(m) \geq n_i$. La elección de n_i implica que entonces

$$|a_n - A| = |b^i_m - A| < \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión a converge a A, como afirma la proposición. □

Un número A es un ***punto de acumulación*** de una sucesión a si esta posee una subsucesión que converge a A. Por ejemplo, si la sucesión a converge a un número A, entonces toda subsucesión de a converge y su límite es A, como vimos recién, así que A es un punto de acumulación de A y, de hecho, es el único. Esto prueba lo siguiente:

Corolario 3.7.5. *Si una sucesión converge, entonces su único punto de acumulación es su límite.*

Bien puede ser, por otro lado, que una sucesión no tenga ningún punto de acumulación.

Ejemplo 3.7.6. La sucesión $a = (n)_{n\geq 1}$ no tiene ningún punto de acumulación. En efecto, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces la subsucesión de a correspondiente a f es $(f(n))_{n\geq 1}$ y es consecuencia inmediata del Lema 3.7.2(*i*) que esta no es acotada y, en particular, que no es convergente. Vemos así que la sucesión a no tiene ninguna subsucesión convergente y, por lo tanto, no tiene ningún punto de acumulación.

Ejercicio 3.7.7. Muestre que si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de componentes no nulas que converge a 0 y que no está a la larga acotada inferiormente ni superiormente por 0, entonces toda subsucesión de la sucesión $(1/a_n)_{n\geq 1}$ oscila y es no acotada. En particular, esta sucesión no tiene ningún punto de acumulación.

Una sucesión que converge, como vimos, tiene un único punto de acumulación, pero es posible ser que una sucesión tenga un único punto de acumulación y no converja. En la Proposición 3.7.13 veremos como «arreglar» esto.

Ejemplo 3.7.8. Consideremos la sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par;} \\ n & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Claramente esta sucesión no está acotada, así que no converge. Supongamos que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente tal que la correspondiente subsucesión $b = (a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a converge y, en particular, es acotada, de manera que existe un número positivo K tal que $a_{f(n)} \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si n es un entero tal que $n > K$, entonces $a_{f(n)} \leq K < n \leq f(n)$ y, en vista de la definición de a, el entero $f(n)$ tiene que ser par y $a_{f(n)}$ nulo. Vemos así que la subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ tiene un número finito de componentes distintas de 0 y que, por lo tanto, converge a 0.

Como es claro que 0 es un punto de acumulación de la sucesión a, esto muestra que a posee exactamente un punto de acumulación.

Es útil tener una caracterización de los puntos de acumulación de una sucesión que no involucre las subsucesiones de esta. Nuestra siguiente proposición nos da una.

Proposición 3.7.9. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Un número A es un punto de acumulación de a si y solamente si para todo número positivo ε y todo entero positivo n hay otro entero positivo m tal que $m \geq n$ y $|a_m - A| < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos primero que el número A es un punto de acumulación de la sucesión a, de manera que hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a converge a A, y sean ε un número positivo y n un entero positivo. Como esa subsucesión converge a A, hay un entero positivo n_0 tal que para para todo $k \in \mathbb{N}$ vale $k \geq n_0 \implies |a_{f(k)} - A| < \varepsilon$. Sea $m \coloneqq f(n_0 + n)$. Como f es estrictamente creciente, tenemos que $m = f(n_0 + n) \geq f(n) \geq n$. Por otro lado, como $n_0 + n \geq n_0$, es $|a_m - A| = |a_{f(n_0+n)} - A| < \varepsilon$. Esto prueba la necesidad de la condición que da la proposición.

Probemos ahora su suficiencia. Supongamos que se satisface. Vamos a construir una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de manera que para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $|a_{f(n)} - A| < \frac{1}{n}$. La correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a tendrá a A por límite, y esto probará que A es un punto de acumulación de la sucesión a, como queremos.

Tomando $\varepsilon = 1$ y $n = 1$ en la hipótesis vemos que hay un entero positivo $f(1)$ tal que $|a_{f(1)} - A| < 1$. Supongamos ahora que k es un elemento de $\mathbb{N}$ y que ya decidimos cuál es el valor de la función f en k. Tomando ahora $\varepsilon = 1/(k+1)$ y $n = f(k) + 1$ en la hipótesis vemos que hay un entero positivo $f(k+1)$ tal que $f(k+1) \geq f(k) + 1$ y $|a_{f(k+1)} - A| < 1/(k+1)$. Claramente de esta forma construimos una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que es estrictamente creciente y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $|a_{f(n)} - A| < 1/n$, como queremos. □

El siguiente resultado es una variación de la Proposición 3.1.13 con la que caracterizamos el límite de una sucesión.

Proposición 3.7.10. *Un numero A es un punto de acumulación de una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ si y solamente si para todo número positivo ε el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon\}$ es infinito.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión, sea A un número real, y supongamos primero que A es un punto de acumulación de a, de manera que hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a converge a A. Sea ε un número positivo. Existe entonces un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |a_{f(n)} - A| < \varepsilon.$$

Esto nos dice, en particular, que el conjunto $\{f(n) : n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ esta contenido en el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon\}$ y que, por lo tanto, este último es infinito. Esto prueba que la condición que da la proposición es necesaria.

Veamos ahora que es suficiente. Supongamos para ello que la condición se cumple y sean ε un número positivo y n un entero positivo. La hipótesis nos dice que el conjunto $\{m \in \mathbb{N} : |a_m - A| < \varepsilon\}$

es infinito, así que contiene algún elemento m mayor que n: este entero, entonces, es tal que $m \geq n$ y $|a_m - A| < \varepsilon$. La Proposición 3.7.9 nos permite concluir a partir de esto que el número A es un punto de acumulación de la sucesión a. □

El siguiente resultado, que nos da una condición que garantiza la existencia de puntos de acumulación, es conocido como el *teorema de Bolzano–Weierstrass*, por Bernard Bolzano y Karl Theodor Wilhelm Weierstrass que lo probaron en 1817 y en 1867, respectivamente — el trabajo de Bolzano, por diversas razones, fue ignorado durante un largo tiempo, así que el trabajo de Weierstrass fue independiente de él.

Proposición 3.7.11. *Una sucesión acotada posee puntos de acumulación.*

Daremos dos pruebas distintas de esta proposición: una basada en el principio de intervalos encajados y otra basada en un lema que es útil en otras situaciones.

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada. Construiremos una sucesión de intervalos $I_0 = [l_0, r_0]$, $I_1 = [l_1, r_1]$, $I_2 = [l_2, r_2]$, … y una constante positiva c tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ valen las siguientes condiciones:

$$I_n \supseteq I_{n+1}, \quad \text{el conjunto } \{i \in \mathbb{N} : a_i \in I_n\} \text{ es infinito}, \quad 0 < r_n - l_n \leq \frac{c}{2^n}$$

Como la sucesión a es acotada, podemos elegir una cota inferior l_0 y una cota superior r_0 para a tales que $l_0 < r_0$ y poner $I_0 \coloneqq [u_0, v_0]$ y $c \coloneqq r_0 - l_0$. El conjunto $J_0 = \{i \in \mathbb{N} : a_n \in I_0\}$ coincide con $\mathbb{N}$, así que es infinito, y ciertamente vale que $0 < r_0 - l_0 \leq c/2^0$.

Supongamos ahora que k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que ya construimos el intervalo $I_k = [l_k, r_k]$ de manera que se cumplan las condiciones de arriba. Sea $t \coloneqq (r_k + l_k)/2$. Como $[l_k, r_k] = [l_k, t] \cup [t, r_k]$, es inmediato verificar que

$$\{i \in \mathbb{N} : a_i \in I_k\} = \{i \in \mathbb{N} : a_i \in [l_k, t]\} \cup \{i \in \mathbb{N} : a_i \in [t, r_k]\}.$$

Ahora bien, el conjunto que aparece aquí a la izquierda es infinito, así que alguno de los dos conjuntos $\{i \in \mathbb{N} : a_i \in [l_k, t]\}$ o $\{i \in \mathbb{N} : a_i \in [t, r_k]\}$ tiene que ser infinito.

- Si el primero es infinito, entonces ponemos $l_{k+1} \coloneqq l_k$, $r_{k+1} \coloneqq t$, e $I_{k+1} \coloneqq [l_{k+1}, r_{k+1}]$.
- Si en cambio el primero no es infinito, entonces el segundo lo es, y ponemos $l_{k+1} \coloneqq t$, $r_{k+1} \coloneqq r_k$ e $I_{k+1} \coloneqq [l_{k+1}, r_{k+1}]$.

Es claro que en cualquiera de los dos casos tenemos que $I_k \supseteq I_{k+1}$, que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : a_i \in I_{k+1}\}$ es infinito, y que $0 < r_{k+1} - l_{k+1} = (r_k - l_k)/2 \leq c/2^{k+1}$. Esto completa la construcción de nuestra sucesión de intervalos.

Esta sucesión de intervalos está en las hipótesis de la Proposición 3.4.1, así que esta nos permite concluir que hay un número A tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{A\}$. Mostraremos que A es un punto de acumulación de la sucesión a, y esto probará la proposición.

Sean ε un número positivo y n un entero positivo. Como el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : a_i \in I_n\}$ es infinito, podemos elegir m en él tal que $m \geq n$ y $c/2^m < \varepsilon$. Tenemos entonces que tanto a_m como A pertenecen al intervalo $I_n = [l_m, r_m]$, así que $|a_m - A| \leq r_m - l_m \leq c/2^m < \varepsilon$. La Proposición 3.7.9 implica entonces que A es un punto de acumulación de la sucesión a. □

La segunda demostración que daremos del teorema de Bolzano–Weierstrass se basa en la siguiente observación:

Lema 3.7.12. *Toda sucesión posee una subsucesión monótona.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Digamos que un número n de $\mathbb{N}$ es un *pico* de a si para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ se tiene que $a_n \geq a_m$, y sea $P \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto de todos los picos de a. Este conjunto es o finito o infinito, por supuesto. Analizaremos por separado estas dos posibilidades.

Supongamos primero que el conjunto P es infinito. En ese caso el Lema 3.7.2(*ii*) nos dice que hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cuya imagen está contenida en P, y podemos entonces considerar correspondiente $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a. Si n y m son dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n \leq m$, entonces tenemos que $f(n) \leq f(m)$ porque f es estrictamente creciente y como $f(n)$ es un pico de a esto implica que $a_{f(n)} \geq a_{f(m)}$. Esto nos dice que la subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ es decreciente y, en particular, monótona. Vemos así que la afirmación del lema es cierta en este caso.

Supongamos ahora que el conjunto P es finito Vamos a construir una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a es estricamente creciente. Como el conjunto P es finito, podemos poner $f(1) \coloneqq 1 + \max P$. Supongamos, por otro lado, que k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que ya decidimos los valores de f en $1, 2, \ldots, k$ de manera que las secuencias $f(1), f(2), \ldots, f(k)$ y $a_{f(1)}, a_{f(2)}, \ldots, a_{f(k)}$ sean estrictamente crecientes. En particular, tenemos que $\max P < f(1) \leq f(k)$, así que $f(k)$ no pertenece al conjunto P y, por lo tanto, existe un entero $f(k+1)$ tal que $f(k+1) > f(k)$ y $a_{f(k+1)} > a_{f(k)}$.

De esta manera obtenemos, como dijimos, una función estrictamente creciente $f : P \to P$ tal que la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a es estrictamente decreciente y, en particular, monótona. La conclusión de esto es que la afirmación del lema es cierta también en este caso. □

Usando este lema podemos dar fácilmente una demostración alternativa del teorema de Bolzano–Weierstrass.

Demostración alternativa de la Proposición 3.7.11. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada. De acuerdo al lema, hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la correspondiente subsucesión $b = (a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a es monótona. Como a es acotada, esta subsucesión b también es acotada y de acuerdo a la Proposición 3.3.1.4 y el Ejercicio 3.3.1.6 la sucesión b converge. □

Como dijimos arriba, una sucesión puede tener exactamente un punto de acumulación pero no converge, pero usando el teorema de Bolzano–Weierstrass podemos mostrar que esto no ocurre si la sucesión está acotada:

Proposición 3.7.13. *Una sucesión acotada que tiene exactamente un punto de acumulación converge a él.*

Demostración. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada que tiene exactamente un punto de acumulación. Sean L y R una cota inferior y una cota superiormente para a, respectivamente, sea A el único punto de acumulación de a, y supongamos, para llegar a una contradicción, que a no converge a A. Existe entonces un número positivo ε tal que para todo entero positivo n existe otro m tal que $n \geq m$ y $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Construyamos una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $|a_{f(n)} - A| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo a la elección de ε, hay un entero positivo $f(1)$ tal que $f(1) \geq 1$ y $|a_{f(1)} - A| \geq \varepsilon$. Por otro lado, si k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y ya elegimos el valor de f en k, entonces sabemos que hay un elemento $f(k+1)$ en $\mathbb{N}$ tal que $f(k+1) \geq f(k) + 1$ y $|a_{f(k+)} - A| \geq \varepsilon$. Esto completa la construcción.

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $a_{f(n)} \in [L, A - \varepsilon] \cup [A + \varepsilon, L]$, así que la unión de los conjuntos $I \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : a_{f(n)} \in [L, A - \varepsilon]\}$ y $J \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : a_{f(n)} \in [A + \varepsilon, R]\}$ es $\mathbb{N}$. Alguno de los dos debe ser, por lo tanto, infinito. Supongamos que, por ejemplo, I lo es y que hay, en consecuencia, una función estrictamente creciente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cuya imagen está contenida en I. La subsucesión $a' \coloneqq (a_{f(g(n))})_{n\geq 1}$ toma sus valores en el intervalo $[L, A - \varepsilon]$: esto nos dice que es acotada y el teorema de Bolzano–Weierstrass 3.7.11 implica que hay una función estrictamente creciente $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la subsucesión $a'' \coloneqq (a_{f(g(h(n)))})_{n\geq 1}$ converge. Su límite pertence al intervalo $[L, A - \varepsilon]$, así que distinto de A, y es un punto de acumulación de a, ya que a'' es una subsucesión de a. Esto es absurdo, claro. □

Vimos ejemplos de sucesiones que no tienen ningún punto de acumulación, que tienen un punto de acumulación, y es fácil dar otros que tiene como conjunto de puntos de acumulación a un subconjunto finito arbitrario de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.7.14. Sea N un elemento de $\mathbb{N}$ y sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}$ elementos dos a dos distintos de $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $r_N(n)$ el resto de dividir a n por N. Muestre que el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión $a = (\alpha_{r_N(n)})_{n\geq 1}$ es exactamente $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}\}$.

Con un poco más de trabajo podemos construir ejemplos de sucesiones que tienen infinitos puntos de acumulación.

Ejemplo 3.7.15. Queremos exhibir un ejemplo de una sucesión que tiene a todos los elementos del intervalo $[1, 2]$ como puntos de acumulación. Consideremos la sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ que para cada $n \in \mathbb{N}$ tiene

$$a_n \coloneqq \frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}.$$

Notemos que si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ entonces $\lfloor \log_2 n \rfloor \leq \log_2 n < \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, así que $2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \leq n < 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$ y, por lo tanto,

$$1 \leq a_n = \frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} < 2.$$

Vemos con esto que la sucesión a toma valores en el intervalo $[1, 2]$ y, en particular, que es acotada y que todos sus puntos de acumulación pertenecen a ese intervalo. Mostremos que, por otro lado, cualquier elemento de ese intervalo es un punto de acumulación de a.

Sea x un elemento de $[1, 2]$. Si $x = 1$, entonces x es el límite de la subsucesión $(a_{2^n})_{n \geq 1}$ de a, ya que esta es constante de valor 1. Supongamos entonces que x está en $(1, 2]$.

Primer paso. Como $x - 1 > 0$, existe un entero positivo k_0 tal que $1 \leq 2^{k_0}(x - 1)$. Sea k un entero cualquiera tal que $k \geq k_0$. Queremos probar que el conjunto

$$I_k \coloneqq \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{\lfloor 2^k x \rfloor}{2^k} \right\}$$

es infinito. Como $k \geq k_0$, tenemos que $1 \leq 2^{k_0}(x - 1) \leq 2^k(x - 1)$, así que $2^k \leq 2^k x - 1$ y, como la función $\log_2$ es creciente, $k \leq \log_2(2^k x - 1)$. Por otro lado, es $1 < 2^k \leq 2^k x$, así que $0 < 2^k x - 1 < \lfloor 2^k x \rfloor \leq 2^k x$ y, en consecuencia,

$$k \leq \log_2(2^k x - 1) < \log_2 \lfloor 2^l x \rfloor \leq \log_2(2^k x) = k + \log_2 x < k + 1.$$

Como sabemos, esto implica que $\lfloor \log_2 \lfloor 2^k x \rfloor \rfloor = k$ y, por lo tanto, que

$$a_{\lfloor 2^k x \rfloor} = \frac{\lfloor 2^k x \rfloor}{2^{\lfloor \log_2 \lfloor 2^k x \rfloor \rfloor}} = \frac{\lfloor 2^k x \rfloor}{2^k}.$$

Vemos así que k pertenece al conjunto I_k. Por otro lado, si m es un elemento cualquiera de I_k, entonces $2m$ también está en I_k: en efecto, es

$$a_{2m} = \frac{2m}{2^{\lfloor \log_2 2m \rfloor}} = \frac{2m}{2^{\lfloor 1 + \log_2 m \rfloor}} = \frac{2m}{2^{1 + \lfloor \log_2 m \rfloor}} = a_m = \frac{\lfloor 2^k x \rfloor}{2^k}.$$

Esto implica que el conjunto I_k contiene a $\{2^i k : i \in \mathbb{N}_0\}$ y, por lo tanto, que es infinito, como queríamos probar.

Segundo paso. Vamos a construir un función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq x - a_{f(n)} < \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. La subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a converge entonces a x y esto prueba lo que queremos.

Podemos poner $f(1) \coloneqq 1$, ya que en ese caso, como $x \in (1,2]$, es

$$0 \leq x - a_{f(1)} = x - a_1 = x - 1 < 1 = \frac{1}{1}.$$

Sea ahora n un elemento de $\mathbb{N}$ y supongamos que ya decidimos el valor de f en n. Como

$$\lfloor 2^{n+k_0} x \rfloor \leq 2^{n+k_0} x < \lfloor 2^{n+k_0} x \rfloor + 1,$$

es $0 \leq 2^{n+k_0} x - \lfloor 2^{n+k_0} x \rfloor < 1$ y, por lo tanto,

$$0 \leq x - \frac{\lfloor 2^{n+k_0} x \rfloor}{2^{m+k_0}} < \frac{1}{2^{n+k_0}}.$$

Como $n + k_0 \geq k_0$, el conjunto I_{n+k_0} es infinito y, en particular, contiene un elemento estrictamente mayor que $f(n)$ al que podemos escribir $f(n+1)$. Tenemos entonces que

$$0 \leq x - a_{f(n+1)} = x - \frac{\lfloor 2^{n+k_0} x \rfloor}{2^{m+k_0}} < \frac{1}{2^{n+k_0}} < \frac{1}{n+1}.$$

Esto completa la construcción de la función f que queríamos, y la verificación de todas nuestras afirmaciones.

Ejercicio 3.7.16.

(a) Pruebe que la sucesión $(2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})_{n\geq 1}$ tiene como conjunto de puntos de acumulación a $\mathbb{N}$.

(b) Construya una sucesión que tenga a $\mathbb{Z}$ como conjunto de puntos de acumulación.

(c) Construya una sucesión que tenga a $\mathbb{R}$ como conjunto de puntos de acumulación.

Una pregunta natural en este punto es: ¿qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ son el conjunto de puntos de acumulación de una sucesión? Nuestro siguiente resultado muestra que no todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene esa propiedad.

Proposición 3.7.17. *Sea a una sucesión y sea $C(a)$ el conjunto de todos los puntos de acumulación de a. Si b es una sucesión convergente que toma valores en $C(a)$, entonces el límite de b también pertenece a $C(a)$.*

Demostración. Supongamos que la sucesión a es $(a_n)_{n\geq 1}$, y sea $b = (b_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente con valores en el conjunto $C(a)$, y sea B su límite. Queremos probar que B pertenece a $C(a)$, esto es, que es un punto de acumulación de la sucesión a.

Sea ε un número positivo y sea n un elemento de $\mathbb{N}$. Como la sucesión b converge a B, hay un entero positivo k tal que $|b_k - B| < \varepsilon/2$. Por otro lado, como b_k es un punto de acumulación la de sucesión a, existe un entero positivo m tal que $m \geq n$ y $|a_m - b_k| < \varepsilon/2$, y entonces

$$|a_m - B| \leq |a_m - b_k| + |b_k - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La Proposición 3.7.9 nos permite concluir a partir de sto que B es un punto de acumulación de la sucesión a. □

Ejemplo 3.7.18. El conjunto $(0, 1)$ no es el conjunto de puntos de acumulación de ninguna sucesión. En efecto, la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ toma valores en $(0, 1)$ y converge, pero su límite no pertenece a ese conjunto: la proposición que acabamos de probar implica entonces que no hay ninguna sucesión que tenga a $(0, 1)$ como conjunto de puntos de acumulación.

De manera similar, $\mathbb{Q}$ no es el conjunto de puntos de acumulación de ninguna sucesión, ya que hay una sucesión de elementos de $\mathbb{Q}$ que converge a $\sqrt{2}$ pero $\sqrt{2}$ no pertenece a $\mathbb{Q}$.

Vale la pena ponerle un nombre a la condición de la Proposición 3.7.17.

Definición 3.7.19. Un subconjunto C de $\mathbb{R}$ es ***cerrado*** si el límite de toda sucesión convergente con valores en C pertenece a C.

La Proposición 3.7.17 nos dice que el conjunto de puntos de acumulación de una sucesión es necesariamente cerrado. De hecho, esta condición necesaria es también suficiente.

Proposición 3.7.20. *Un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ es el conjunto puntos de acumulación de alguna sucesión.*

Demostración. HACER. □

3.8. Límites superiores e inferiores

Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Supongamos que a es acotada superiormente y que K es una cota superior para a. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\mathscr{A}_n \coloneqq \{a_m : m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$$

está entonces acotado superiormente por K y ciertamente no es vacío, así que podemos considerar su supremo $\sup \mathscr{A}_n$. Si n y m son dos elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n \leq m$, es $\mathscr{A}_n \supseteq \mathscr{A}_m$ y, por lo tanto, $\sup \mathscr{A}_n \geq \sup \mathscr{A}_m$. Esto nos dice que la sucesión $(\sup \mathscr{A}_n)_{n\geq 1}$ es decreciente. Si está sucesión esta además acotada inferiormente, entonces converge y a su límite lo llamamos el ***límite superior*** de la sucesión a con la que empezamos y lo escribimos

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} \Big(\sup \mathscr{A}_n\Big).$$

Si en cambio la sucesión $(\sup \mathscr{A}_n)_{n\geq 1}$ no está acotada inferiormente, entonces escribimos

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \coloneqq -\infty.$$

Finalmente, si la sucesión a no está acotada superiormente escribimos

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \coloneqq +\infty.$$

A diferencia de lo que ocurre con los límites, esto da sentido al símbolo

$$\limsup_{n\to\infty} a_n$$

cualquiera sea la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, y nos dice que denota o bien un número real, o bien alguno de los dos símbolos $+\infty$ o $-\infty$. La siguiente proposición nos permite decidir cuál de los tres casos corresponde a una sucesión.

Proposición 3.8.1. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión, sea A un número real, y para cada $K \in \mathbb{R}$ sea $I_K^+ \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : a_n > K\}$.*

(i) Es $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si y solamente si para todo número K el conjunto I_K^+ es infinito.

(ii) Es $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si y solamente si para todo número K el conjunto I_K^+ es finito.

(iii) Es $\limsup_{n\to\infty} a_n = A$ si y solamente si para todo número positivo ε

- *el conjunto $I_{A+\varepsilon}^+$ es finito, y*
- *el conjunto $I_{A-\varepsilon}^+$ es infinito.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $\mathscr{A}_n \coloneqq \{a_m : m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$ y $A_n \coloneqq \sup \mathscr{A}_n$.

(i) Supongamos primero que existe un número K tal que el conjunto I_K^+ es finito. En ese caso, el conjunto $J \coloneqq \{a_n : n \in I_K^+\}$ es por supuesto también finito y podemos considerar el número $L \coloneqq \text{máx}\{K\} \cup J$. Se trata de una cota superior para la sucesión a. En efecto, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces o bien $a_n \leq K \leq L$, o bien $a_n > K$, y en ese caso n pertenece a I_K^+ y, por lo tanto, a_n pertenece a J y $a_n \leq \text{máx}\, J = L$. Esto prueba que si existe un número K tal que el conjunto I_K^+ es finito, entonces $\limsup_{n\to\infty} a_n$ no es $+\infty$ y, por lo tanto, que la condición que da la afirmación (i) es necesaria.

Veamos que también es suficiente. Supongamos que para todo número K el conjunto I_K^+ es infinito. Esto implica, claro, que para todo número K existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > K$ y, por lo tanto, que K no es una cota superior para la sucesión a. Vemos así que la sucesión no está acotada superiormente y, por lo tanto, que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Supongamos primero que $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, esto es, que la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ no está acotada inferiormente, y sea K un número cualquiera. Como la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ no esta acotada inferiormente, ciertamente el número K no es una cota inferior para ella, así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sup \mathscr{A}_n = A_n < K$. Esto nos dice que K es una cota superior para el conjunto $\mathscr{A}_n$ y, por lo tanto, que $a_m \leq K$ siempre que m es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $m \geq n$: esto implica que el conjunto I_K^+ está contenido en $\{1, 2, \dots, n\}$ y, en particular, que es finito. Vemos con esto que la condición que da la afirmación (ii) de la proposición es necesaria.

Supongamos ahora, para probar que también esa condición es necesaria, que para todo número K el conjunto I_K^+ es finito, y sea L un número cualquiera. El conjunto I_{L-1}^+ es finito, así que podemos considerar el numero $n_0 \coloneqq 1 + \text{máx}\, I_{L-1}^+$. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces n no pertenece a I_{L-1}^+, así que $a_n \leq L_1$. Esto nos dice que $L-1$ es una cota superior para el conjunto $\mathscr{A}_{n_0}$ y, por lo tanto, que $A_n \leq L - 1 < L$. Esta última desigualdad nos dice, a su vez, que el número L no es una cota inferior para la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$. Esto es así cualquiera sea el elemento L de $\mathbb{R}$, así que la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ no tiene ninguna cota inferior: podemos concluir entonces que $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(iii) Supongamos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = A$, esto es, la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ converge al número A, y sea ε un número positivo. La hipótesis implica que hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies |A_n - A| < \varepsilon.$$

Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces esto nos dice que $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ y, por lo tanto, que $n \in I_{A-\varepsilon}^+$ y que $n \notin I^+ + A - \varepsilon$. Vemos así que el conjunto $I_{A-\varepsilon}^+$ contiene a $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ y es, por lo tanto, infinito, y que el conjunto $I_{A+\varepsilon}^+$ está contenido en $\{n \in \mathbb{N} : n < n_0\}$ y es, por lo tanto, finito. Esto prueba que las condiciones que da la afirmación (iii) de la proposición son necesarias. Para terminar, probemos que también son suficientes.

Supongamos que esas condiciones se cumplen y sea ε un número positivo. La hipótesis nos dice que el conjunto $I^+_{A+\varepsilon/2}$ es finito y que el conjunto $I^+_{A-\varepsilon}$ es infinito. Sea $n_1 \coloneqq 1 + \max I^+_{A+\varepsilon/2}$ y sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$.

Si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $m \geq n$, entonces $m \geq n \geq n_1 > \max I^+_{A+\varepsilon/2}$, de manera que m no pertenece a $I^+_{A+\varepsilon/2}$ y, por lo tanto, es $a_m \leq A + \varepsilon/2$. Esto nos dice que $A + \varepsilon/2$ es una cota superior para el conjunto $\mathscr{A}_n$ y, por lo tanto, que $A_n = \sup \mathscr{A}_n \leq A + \varepsilon/2 < A + \varepsilon$. Por otro lado, el conjunto $I^+_{A-\varepsilon}$ es infinito, así que contiene elementos mayores que n — sea k alguno de ellos. Como $a_k > A - \varepsilon$ y a_k pertenece al conjunto $\mathscr{A}_n$, el número $A - \varepsilon$ no es una cota superior para $\mathscr{A}_n$ y, por lo tanto, $A - \varepsilon < \sup \mathscr{A}_n = A_n$. Juntando todo, hemos probado que $A - \varepsilon < A_n < A + \varepsilon$ o, equivalentemente, que $|A_n - A| < \varepsilon$. Podemos concluir entonces que la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ converge a A y, en definitiva, que $\limsup_{n\to\infty} a_n = A$, como queremos. □

Podemos enunciar la tercera parte de la proposición que acabamos de probar de una manera útilmente sugerente usando la siguiente definición.

Definición 3.8.2. Decimos que un número A es ***casi una cota superior*** para una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n > K\}$ es finito.

Usando este lenguaje podemos enunciar la tercera parte de la proposición en la siguiente manera:

Corolario 3.8.3. *Un número A es el límite superior de una sucesión a si y solamente si*

- *todo número estrictamente mayor que A es casi una cota superior para a, y*
- *ningún número estrictamente menor que A es casi una cota superior para a.* □

Notemos que bien puede ser en esta situación que el número A sea el límite superior de la sucesión a pero no sea casi una cota superior para ella.

Podemos dar otra caracterización del límite superior de una sucesión en términos del conjunto de los puntos de acumulación de esta.

Proposición 3.8.4. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea A un número real.*

(*i*) *Es $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si y solamente si a no está acotada superiormente.*

(*ii*) *Es $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si y solamente a está acotada superiormente y todas sus subsucesiones divergen a $-\infty$.*

(*iii*) *Es $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A$ si y solamente si a está acotada superiormente y el conjunto de sus puntos de acumulación tiene a A como máximo.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $\mathscr{A}_n \coloneqq \{a_m : m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$ y $A_n \coloneqq \sup \mathscr{A}_n$. Notemos que la afirmación (*i*) es consecuencia directa de la definición del límite superior de una sucesión.

(*ii*) Supongamos primero que $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, de manera que la sucesión a está acotada superiormente y la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ no está acotada inferiormente, sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente, y consideremos la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a. Sea K un número real. Como la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ no está acotada inferiormente, el número K no es una cota superior para ella y existe entonces un entero positivo n_0 tal que $\sup \mathscr{A}_{n_0} = A_{n_0} < K$. Si n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, entonces tenemos que $f(n) \geq n \geq n_0$ y, por lo tanto que $a_{f(n)} < K$, que que $a_{f(n)}$ pertenece a $\mathscr{A}_{n_0}$. Esto prueba que la subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$, como queremos

Supongamos ahora que la sucesión a está acotada superiormente y que es falso que $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$, de manera que la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente y existe un número K tal que $A_n \geq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a construir una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $a_{f(n)} > K - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sup \mathscr{A}_1 = A_1 \geq K > K - 1$, el número $K - 1$ no es una cota superior para $\mathscr{A}_1$ y existe entonces un entero positivo $f(1)$ tal que $a_{f(1)} > K - 1$. Supongamos ahora que k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que ya decidimos el valor de la función f en k. Como $\sup \mathscr{A}_{f(k)+1} = A_{f(k)+1} \geq K > K - 1$, el número $K - 1$ no es una cota superior para $\mathscr{A}_{f(k)+1}$, así que hay un entero positivo $f(k+1)$ tal que $f(k+1) \geq f(k) + 1 > f(k)$ y $a_{f(k+1)} > K - 1$. Esto completa la construcción de f.

Ahora bien, la subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a esta acotada inferiormente por $K - 1$ por la forma en que construimos la función f y superiormente porque es una subsucesión de a y esta última esta acotada superiormente. De acuerdo al teorema de Bolzano–Weierstrass 3.7.11, entonces, podemos concluir que hay una subsucesión de $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ que converge a un número real. Esto muestra que no toda subsucesión de a diverge a $-\infty$ y, a su vez, esto nos permite concluir que la condición que da la afirmación (*ii*) de la proposición es suficiente.

(*iii*) Supongamos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = A$, de manera que la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ converge a A. Es evidente de la definición del límite superior que entonces la sucesión a está acotada superiormente. Vamos a construir una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por recurrencia para probar que el número A es un punto de acumulación de a.

- Como la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ converge a A, hay un entero positivo m tal que $|A_m - A| < 1$, así que $A - 1 < A_m = \sup \mathscr{A}_m < A + 1$. Esto nos dice que $A - 1$ no es una cota superior para $\mathscr{A}_m$, de manera que hay un entero positivo $f(1)$ tal que $f(1) \in m$ y $A - 1 < a_{f(1)}$, y que $A + 1$ sí es una cota superior para $\mathscr{A}_n$, de manera que, en particular, es $a_{f(1)} < A + 1$.
- Supongamos ahora que k es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y que ya decidimos el valor de la función f en k. Como la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ converge a A, hay un entero positivo m_0 tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale $m \geq m_0 \implies |A_m - A| < 1/k$. Pongamos $m_1 \coloneqq 1 + \max\{m_0, f(k)\}$. Como $m_1 \geq m_0$ tenemos que $|A_{m_1} - A| < 1/k$, de manera que $A - 1/k < A_{m_1} = \sup \mathscr{A}_{m_1} < A + 1/k$.

Esto nos dice que $A - 1/k$ no es una cota superior para $\mathscr{A}_{m_1}$, de manera que hay un entero $f(k+1)$ tal que $f(k+1) \geq m_1$ y $A - 1/k < a_{f(k+1)}$, y que $A + 1/k$ sí lo es, de manera que $a_{f(k+1)} < A + 1/k$. Notemos que $f(k+1) \geq m_1 > f(k)$.

De esta forma construimos una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, como dijimos, y para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $|a_{f(n)} - A| < 1/n$. Podemos concluir entonces que la subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a correspondiente a la función f converge a A y, por lo tanto, que A es un punto de acumulación de a. Así, el conjunto de puntos de acumulación de a no es vacío y contiene a A.

Mostremos ahora que A es, de hecho, el máximo de ese conjunto. Para ello es suficiente que mostremos que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente tal que la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de A converge a un número B, entonces se tiene que $B \leq A$.

Sea entonces $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente y supongamos que la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ de a converge a un número B. Si n es un elemento cualquiera de A, tenemos que $f(n) \geq n$, así que $a_{f(n)}$ pertenece al conjunto $\mathscr{A}_n$ y, por lo tanto, $a_{f(n)} \leq \sup \mathscr{A}_n = A_n$. Esto es cierto cualquiera sea n en $\mathbb{N}$, y nuestras hipótesis son que la sucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ converge a B y que la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ converge a A: podemos concluir entonces de la Proposición 3.5.11 que $B \leq A$, como queremos. Esto prueba la necesidad de la condición de (*iii*).

Probemos su suficiencia. Supongamos que la sucesión a esta acotada superiormente, que el conjunto de sus puntos de acumulación no es vacío, y que el número A es su máximo, y mostremos que entonces A es el límite superior de a usando el criterio de la tercera parte de la Proposición 3.8.1.

Sea ε un número positivo. Supongamos que el conjunto $I^+_{A+\varepsilon}$ de esa proposición es infinito, de manera que el Lema 3.7.2(*ii*) implica que hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con imagen contenida en él y, por lo tanto, que la correspondiente subsucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ tiene

$$a_{f(n)} > A + \varepsilon \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.21}$$

Por otro lado, como la sucesión a está acotada superiormente, esta subsucesión también lo está y vemos que, de hecho, está acotada: el Teorema de Bolzano–Weierstrass 3.7.11 nos permite concluir que la sucesión $(a_{f(n)})_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente y de (3.21) vemos que el límite B de esta es tal que $B \geq A + \varepsilon$. Esto es absurdo, ya que en esta situación B es un punto de acumulación de la sucesión a y nuestra hipótesis es que A es el máximo de sus puntos de acumulación. Esta contradicción prueba que le conjunto $I^+_{A+\varepsilon}$ es finito.

Por otro lado, como A es un punto de acumulación de la sucesión a, esta última posee una subsucesión $a_{g(n)}$ que converge a A y hay un entero positivo n_0 tal para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq n_0 \implies |a_{f(n)} - A| < \varepsilon$. En particular, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ está contenido en el conjunto $I^+_{A-\varepsilon}$ del enunciado, así que este último es infinito. □

De la última parte de esta proposición podemos concluir inmediatamente lo siguiente:

Corolario 3.8.5. *Si $(a_n)_{n\geq1}$ es una sucesión convergente, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Demostración. En efecto, si una sucesión converge, entonces es acotada, y la tercera parte de la Proposición 3.8.4 nos dice que su límite superior es uno de sus puntos de acumulación. Sabemos, por otro lado, que en ese caso su límite es su único punto de acumulación: el corolario es consecuencia de esto. □

Como ocurre con los límites, la operación de tomar límite superior es monótona:

Proposición 3.8.6. *Sean $a = (a_n)_{n\geq1}$ y $b = (b_n)_{n\geq1}$ dos sucesiones. Si $a_n \leq b_n$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Demostración. Supongamos que vale la hipótesis de la afirmación de la proposición, de manera que hay un entero positivo N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $n \geq N \implies a_n \leq b_n$.

Supongamos primero que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, de manera que la sucesión a no está acotada superiormente, y sea $I := \{|a_n| : n \in \mathbb{N}, n \leq N\}$, que es un conjunto finito y no vacío y tiene, por lo tanto, maximo. Si K es un número cualquiera, entonces $K+1+\max I$ no es una cota inferior para la sucesión a, así que hay un entero positivo n tal que $a_n > K+1+\max I$. No puede ser $n \leq N$, ya que en ese caso tendríamos que $|a_n| \in I$ y, por lo tanto, que $a_n \leq |a_n| \leq \max I < K+1+\max I$. Vemos así que es $n > N$ y tenemos, en vista de la elección de N, que $b_n \geq a_n > K+1+\max I > K$: el número K no es, por lo tanto, una cota superior para la sucesión b. Esto prueba que la sucesión b no está acotada superiormente y, en consecuencia, que $\limsup_{n\to\infty} b_n = +\infty$ y que vale la desigualdad de la proposición.

Supongamos desde ahora que la sucesión a está acotada superiormente. Si la sucesión b no lo está, entonces es $\limsup_{n\to\infty} b_n = +\infty$ y la desigualdad del enunciado vale por razones triviales. Supongamos entonces que la sucesión b también está acotada superiormente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $\mathscr{A}_n := \{a_m : m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$, $\mathscr{B}_n := \{b_m : m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$, $A_n := \sup \mathscr{A}_n$ y $B_n := \sup \mathscr{B}_n$ — notemos que podemos considerar estos supremos porque en este punto estamos suponiendo que las dos sucesiones a y b están acotadas superiormente. Si la sucesión $(A_n)_{n\geq1}$ no esta acotada inferiormente, entonces $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ y la desigualdad del enunciado vale por razones triviales, así que bastará que consideremos el caso en que esa sucesión está acotada inferiormente y, por lo tanto, converge a un número real A, que es el límite superior de la sucesión a.

Sea ε un número positivo. De acuerdo a la tercera parte de la Proposición 3.8.1 el conjunto $M := \{n \in \mathbb{N} : a_n > A - \varepsilon\}$ es infinito. Si n es un elemento de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq N$, entonces como el conjunto M es infinito contiene un elemento m tal que $m \geq N$ y tenemos que $b_m \geq a_m > A - \varepsilon$. Esto nos dice que $A - \varepsilon$ no es una cota superior para el conjunto acotado superiormente $\mathscr{B}_n$ y, por lo tanto, que $A - \varepsilon < \sup \mathscr{B}_n = B_n$. Vemos de esta forma que vale $A - \varepsilon \leq B_n$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$: esto implica que la sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ está acotada inferiormente, de manera que $\limsup_{n\to\infty} b_n$ es un número real, el límite de esa sucesión, y que

$$A - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} B_n = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Esto es cierto cualquiera sea el número positivo ε, y esto nos permite deducir, a su vez, que

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = A \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

La proposición queda así probada. □

Todo lo que llevamos hecho en esta sección se refiere a los límites superiores. Hay también, como es de esperar, una noción de límite inferior. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada inferiormente. Como antes, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos al conjunto $\mathscr{A}_n \coloneqq \{a_m : m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$, observamos que es es acotado inferiormente y no vacío y, por lo tanto, podemos considerar también su ínfimo $A_n \coloneqq \inf \mathscr{A}_n$. La sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ es creciente: si está acotada superiormente un límite α y a ese límito lo llamamos el ***límite inferior*** de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ y lo escribimos

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \coloneqq \alpha.$$

Si en cambio la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ no está acotada superiormente escribimos

$$\liminf_{n\to\infty} = +\infty.$$

Finalmente, si la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ con la que empezamos no esta acotada inferiormente, entonces ponemos

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Para esta noción de límite inferior podemos enunciar y probar resultados análogos a todos los que presentamos arriba para el límite superior. En lugar de hacer eso, es más eficiente hacer la siguiente observación:

Proposición 3.8.7. *Sea $(a_n)_{n\to\infty}$ una sucesión y sea A un número.*

(i) Es $\liminf_{n\to\infty} a_n = A$ si y solamente si es $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -A$.

(ii) Es $\liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si y solamente si es $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\infty$.

(iii) Es $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si y solamente si es $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = +\infty$. □

Este resultado reduce cualquier cuestión relativa a límites inferiores a otra sobre límites superiores y nos evita tener que repetir todo lo que ya hicimos.

Ejercicio 3.8.8. Pruebe en detalle la Proposición 3.8.7

De todas maneras, hay toda una familia de resultados que involucran al mismo tiempo límites superiores e inferiores, y la Proposición 3.8.7 no ayuda con ellos.

Proposición 3.8.9. *Sea* $a = (a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión. Es*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Demostración. Si la sucesión a no está acotada inferiormente o no está acotada superiormente, entonces es $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ o $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, respectivamente, y en cualquiera de los dos casos la desigualdad de la proposición es evidente. Supongamos entonces que a está acotada tanto inferiormente como superiormente. Sean L y R una cota inferior y una cota superior para a.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\mathscr{A}_n \coloneqq \{a_m : m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$ es entonces acotado, podemos considerar su supremo y su ínfimo y, por supuesto, es

$$L \leq \inf \mathscr{A}_n \leq \sup \mathscr{A}_n \leq R. \tag{3.22}$$

Esto nos dice que la sucesión $(\inf A_n)_{n\geq 1}$ está acotada superiormente y que la sucesión $(\sup \mathscr{A}_n)_{n\geq 1}$ está acotada inferiormente: junto con la desigualdad (3.22) podemos concluir entonces que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf \mathscr{A}_n) \leq \lim_{n\to\infty} (\sup \mathscr{A}_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

□

Podemos caracterizar precisamente cuando la desigualdad de la proposición que acabamos de probar es estricta:

Proposición 3.8.10. *Una sucesión* $a = (a_n)_{n\geq 1}$ *oscila exactamente cuando*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Demostración. Supongamos que la desigualdad del enunciado vale. Si $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ entonces la sucesión a no esta acotada inferiormente, y $\limsup_{n\to\infty} a_n$ es o bien $+\infty$ o bien un número real. En el primer caso a no está acotada ni inferiormente ni superiormente, así que la Proposiciones 3.1.21 y 3.2.4 implican que a oscila. Supongamos entonces que estamos en el segundo caso, de manera que, en particular, a está acotada superiormente. Si no oscilara, entonces de la Proposición 3.2.4 podríamos concluir que diverge a $-\infty$, pero esto es imposible porque estamos suponiendo que vale la desigualdad del enunciado. Vemos así que en cualquiera caso la sucesión oscila.

Supongamos ahora que la desigualdad del enunciado no vale, de manera que, de hecho, es $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Si el valor común de estos dos límites es $+\infty$ o $-\infty$, entonces la sucesión diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, respectivamente. Supongamos entonces que el valor común de los límites es un número real A. De acuerdo a la tercera parte de la Proposición 3.8.4 y su versión para límites inferiores, la sucesión a esta acotada, y el conjunto de sus puntos de acumulación tiene a A tanto como máximo como mínimo: esto significa, claro, que A es el único punto de acumulación de A. Como a es acotada, la Proposición 3.7.13 implica que converge. En cualquier caso, vemos que la sucesión no oscila. □

Para límites inferiores y superiores tenemos, como para los límite usuales, un «álgebra de límites». Para enunciar la siguiente proposición hacemos la convención de que

$$c \cdot (+\infty) = +\infty \text{ y } c \cdot (-\infty) = -\infty \text{ si } c \text{ es positivo}$$

y

$$c \cdot (+\infty) = -\infty \text{ y } c \cdot (-\infty) = +\infty \text{ si } c \text{ es negativo.}$$

Notemos que no asignamos ningún valor a las expresiones $0 \cdot (+\infty)$ y $0 \cdot (-\infty)$.

Proposición 3.8.11. *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sea c un número real. Si $c > 0$, entonces*

$$\limsup_{n\to\infty} ca_n = c \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \liminf_{n\to\infty} ca_n = c \liminf_{n\to\infty} a_n,$$

y si en cambio $c < 0$ entonces

$$\limsup_{n\to\infty} ca_n = c \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \liminf_{n\to\infty} ca_n = c \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

Demostración. HACER. □

Nuestra siguiente proposición se ocupa de la suma. Hacemos en su enunciado la conveción de que

$$\begin{array}{lll} (-\infty) + (-\infty) = -\infty & (-\infty) + c = -\infty & c + (-\infty) = -\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty & (+\infty) + c = +\infty & c + (+\infty) = +\infty \end{array}$$

No asignamos ningún valor a las expresiones $(+\infty) + (-\infty)$ y $(-\infty) + (+\infty)$.

Proposición 3.8.12. *Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones, entonces cada una de las* *desigualdades*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

vale en caso que las expresiones que tiene a da izquierda y a la derecha tienen sentido.

Demostración. HACER. □

Para el producto nos contentaremos con probar el siguiente resultado que se ocupa solamente de sucesiones a la larga acotadas inferiormente por números positivos. En ella convenimos, además de lo que ya dijimos arriba, que

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Proposición 3.8.13. *Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones a la larga acotadas inferiormente por un número positivo, entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Demostración. HACER. □

3.9. Ejercicios

Ejercicio 3.9.1. Muestre que si a y p son números mayores que 1, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

Ejercicio 3.9.2. Pruebe que si $f \in \mathbb{R}[X]$ es un polinomio y q es un numero real tal que $|q| < 1$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}_0$ es

$$\lim_{n\to\infty} f(n)q^{n+k} = 0.$$

3.9.1. Densidad asintótica

Si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ llamamos ***densidad asintótica superior*** e ***inferior*** a los límites

$$\overline{d}(A) \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \frac{|A| \cap \{1,\dots,n\}}{n}, \qquad \underline{d}(A) \coloneqq \liminf_{n\to\infty} \frac{|A| \cap \{1,\dots,n\}}{n}.$$

Si $\overline{d}(A) = \underline{d}(A)$, llamamos al valor común de estas dos densidad la ***densidad*** de A y la escribimos $d(A)$.

Ejercicio 3.9.1.1.

(a) Un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ tiene densidad asintótica nula.

(b) El conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ de los números pares tiene densidad $\frac{1}{2}$. Más generalmente, si a y b son dos enteros y $a \neq 0$, entonces el conjunto $\{an + b : n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$ tiene densidad $\frac{1}{a}$.

(c) El conjunto $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ de los cuadrados tiene densidad nula.

(d) Si un conjunto A posee densidad, entonces su complemento también la posee y es $d(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - d(A)$. ¿Una afirmación análoga es cierta para la densidad superior e inferior?

(e) Sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, y sea $f : \mathbb{N} \to A$ una función biyectiva y estrictamente creciente. Pruebe que

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{f(n)}, \qquad \overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}.$$

(f) Si A y B son dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que $d(A)$, $d(B)$ y $d(A \cup B)$ existen, entonces

$$\max\{d(A), d(B)\} \leq d(A \cup B) \leq \min\{d(A) + d(B), 1\}.$$

(g) Construya un subconjunto A de $\mathbb{N}$ tal que $\underline{d}(A) < \overline{d}(A)$.

Es posible mostrar que el conjunto de los números primos tiene densidad nula, y que la densidad del conjunto de los enteros positivos que no son divisibles por el cuadrado de ningún primo es exactamente $\frac{6}{\pi^2}$. La noción de densidad es importante en muchas cuestiones de teoría de números. Por ejemplo, si A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ de densidad superior positiva, entonces un teorema de Endre Szemerédi [Sze1975] dice que A contiene progresiones aritméticas de longitud arbitrariamente grande y otro de Hillel Furstenberg [Fur1977] y András Sárközy [Sár1978] que hay dos elementos de A que difieren en un cuadrado.

Capítulo 4

Series

4.1. Series

En este capítulo estudiaremos un tipo particular de sucesiones que describimos en la siguiente definición.

Definición 4.1.1. Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos

$$s_n \coloneqq a_1 + \cdots + a_n$$

y llamamos a la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ la ***serie*** de términos dados por la sucesión a. Normalmente denotamos a esta sucesión usando el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si esta sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ converge a un número real A, entonces llamamos a A la ***suma*** de la serie y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A.$$

De manera similar, escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$$

cuando la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos al número a_n el ***término*** n-ésimo de la serie y a s_n es su ***suma parcial*** n-ésima.

Es importante recordar que cuando escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ estamos refiriéndonos a la sucesión de sumas parciales $(a_1 + \cdots + a_n)_{n\geq 1}$ construida a partir de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$, y que cuando decimos que una serie converge a un número, diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, o que oscila lo que estamos diciendo es que esa sucesión de sumas parciales converge a ese número, diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, o oscila, respectivamente. Por otro lado es fundamental recordar que una serie *no es* una suma con infinitos sumandos: es el límite de una sucesión de sumas, cada una de las cuales tiene finitos sumandos. De hecho, la frase «suma con infinitos sumandos» simplemente no significa nada.

Ejemplo 4.1.2. Sea q un número real y consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n. \tag{4.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ la n-ésima suma parcial de esta serie es

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n$$

y si q es distinto de 1 esto es

$$\frac{1 - q^{n+1}}{1 + q}.$$

Si $|q| < 1$, entonces sabemos que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, así que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q},$$

y esto nos dice que la serie de (4.1) converge y cuál es su suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \qquad \text{si } |q| < 1.$$

Si, por el contrario, $q \geq 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$|s_{n+1} - s_n| = |q^n| \geq 1,$$

de manera que la sucesión $(s_n)_{n\geq 0}$ no es de Cauchy y, por lo tanto, no converge. De hecho, si $q \geq 1$, entonces

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n \geq n,$$

así que claramente $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ y, por lo tanto, en este caso la serie diverge a $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty \qquad \text{si } q \geq 1.$$

Ejercicio 4.1.3. Muestre que si $q < -1$ entonces la sucesión de sumas parciales de la serie de este ejemplo no es acotada inferiormente ni superiormente, de manera que oscila.

Ejemplo 4.1.4. Sea otra vez q un número real tal que $|q| < 1$ y consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1}. \tag{4.2}$$

Sea N un entero no negativo. La N-ésima suma parcial de esta serie es

$$\sum_{n=0}^{N} nq^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\sum_{n=0}^{N} q^{n-1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1-q^{N+1}}{1-q}\right) = \frac{Nq^{N+1} - (N+1)q^N + 1}{(1-q)^2}.$$

El Ejercicio 3.9.2 nos dice que las sucesiones $(Nq^{N+1})_{N\geq 1}$ y $((N+1)q^N)_{N\geq 1}$ convergen a 0 y entonces tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Si N es un entero no negativo, la N-ésima suma parcial de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)q^{n-2}. \tag{4.3}$$

es

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)q^{n-2} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}\left(\sum_{n=0}^{N} q^n\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}\left(\frac{1-q^{N+1}}{1-q}\right) \\ &= \frac{2(N^2-1)q^N - N(N+1)q^{N-1} - (N-1)Nq^{N+1} + 2}{(1-q)^3},\end{aligned}$$

y otra vez el Ejercicio 3.9.2 nos permite concluir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Más generalmente, es cierto que para todo entero positivo k vale que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)q^{n-k} = \frac{k!}{(1-q)^{k+1}},$$

pero necesitamos una estrategia más eficiente que la que usamos aquí para probarlo — deberíamos si no determinar para cada $N \in \mathbb{N}_0$ la derivada k-ésima

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}q^k}\left(\frac{1-q^{N+1}}{1-q}\right)$$

y esto no es muy placentero. Más adelante resolveremos este problema.

Ejercicio 4.1.5. Pruebe que si q es un número real tal que $|q| \geq 1$ las series (4.2) y (4.3) del Ejemplo 4.1.4 no convergen. Pruebe, por otro lado, que si $|q| < 1$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)q^{n-3} = \frac{3!}{(1-q)^4},$$

La siguiente proposición nos da una condición necesaria para que una serie converja que, como veremos muchas veces, no es suficiente:

Proposición 4.1.6. *Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces la sucesión $(a_n)_{n\geq1}$ de sus términos converge a* 0.

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie que converge, sea A su suma, y sea $(s_n)_{n\geq1}$ la correspondiente sucesión de sumas parciales, que converge a A. Sabemos entonces que la sucesión $(s_{n+1})_{n\geq1}$ también converge a A, así que la sucesión $(s_{n+1}-s_n)_{n\geq1}$ converge a 0: como $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ esto nos dice que la sucesión $(a_{n+1})_{n\geq1}$ converge a 0 y, por lo tanto, que también lo hace $(a_n)_{n\geq1}$. □

Vimos que que una sucesión $(a_n)_{n\geq1}$ converja o no no depende de sus primeras componentes, en el sentido de que lo hace si y solamente si la sucesión $(a_{n+k})_{n\geq1}$ lo hace. Para series podemos hacer una observación similar:

Proposición 4.1.7. *Sea k un entero positivo. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ converge, y cuando ese es el caso*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}.$$

Muchas veces escribiremos $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ el lugar de $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ y usaremos la primera afirmación de esta proposición implícitamente.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $s_n \coloneqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ es $a_{1+k} + a_{2+k} + \cdots + a_{n+k} = s_{n+k} - s_k$, y la primera afirmación de la proposición es consecuencia de que la sucesión $(s_n)_{n\geq1}$ converge si y solamente si lo hace la sucesión $(s_{n+k} - s_k)_{n\geq1}$. La segunda, por su parte, sigue de que cuando estas dos sucesiones convergen vale que

$$\lim_{n\to\infty} (s_{n+k} - s_k) = \lim_{n\to\infty} s_{n+k} - s_k,$$

de lo que se deduce inmediatamente la igualdad de la proposición. □

Cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, esta proposición nos dice que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+1} + \cdots)$$

y podemos, por lo tanto, interpretar este resultado como una forma restringida de la propiedad asociativa para series. El siguiente resultado es similar:

Proposición 4.1.8. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente tal que $f(1) = 1$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces también lo hace la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{f(n)} + a_{f(n)+1} + \cdots + a_{f(n+1)-1})$$

y las dos series tienen la misma suma.

Esto nos dice que si una serie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots$$

converge y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente tal que $f(1) = 1$ podemos asociar términos para obtener la serie

$$(a_1 + \cdots + a_{f(2)-1}) + (a_{f(2)} + \cdots + a_{f(3)-1}) + \cdots + (a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1}) + \cdots$$

que también converge y a lo mismo. Esto es una forma de la ley asociativa para series.

Demostración. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos s_n a la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1})$ es

$$(a_1 + \cdots + a_{f(2)-1}) + (a_{f(2)} + \cdots + a_{f(3)-1}) + \cdots + (a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1}) = s_{f(n+1)-1}.$$

Esto nos dice que la sucesión de las sumas parciales de la segunda serie es la subsucesión $(s_{f(n)})_{n\geq1}$ de la sucesión $(s_n)_{n\geq1}$ de las sumas parciales de la primera serie, y se sigue de esto que aquella converge si lo hace esta y, en ese caso, que las dos tienen el mismo límite. □

Notemos que estos resultados nos permiten *insertar* paréntesis en una serie convergente. No vale, en general, *sacarlos*. Por ejemplo, la serie

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

claramente converge, mientras que la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

que se obtiene eliminando los paréntesis no lo hace.

Una observación sencilla es que si en una serie convergente eliminamos paréntesis y el resultado también converge, entonces las dos series tienen la misma suma.

Proposición 4.1.9. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente tal que $f(1) = 1$ y sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Si las dos series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1})$$

convergen, entonces las dos tienen la misma suma.

Demostración. Esto es inmediato, ya que la sucesión de las sumas parciales de la segunda serie es una subsucesión de la sucesión de las sumas parciales de la primera. □

Una segunda observación sencilla es que el único obstáculo a que eliminar paréntesis en una serie preserve la convergencia es que los términos independientes de la nueva serie no converjan a cero, como ocurre en la serie $(1-1) + (1-1) + \cdots$ del ejemplo.

Proposición 4.1.10. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente tal que $f(1) = 1$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie. Si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1})$$

converge y

$$\lim_{n\to\infty} \left(|a_{f(n)}| + \cdots + |a_{f(n+1)-1}|\right) = 0,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Demostración. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1})$ converge, que A es su suma, y que

$$\lim_{n\to\infty} \left(|a_{f(n)}| + \cdots + |a_{f(n+1)-1}|\right) = 0.$$

Sea ε un número positivo. Como $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1})$ converge a A, hay un entero positivo N_1 tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ vale

$$N \geq N_1 \implies \left| \sum_{n=1}^{N} (a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1}) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, la hipótesis sobre el límite nos dice que hay un entero positivo N_2 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$n \geq N_2 \implies |a_{f(n)}| + \cdots + |a_{f(n+1)-1}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea ahora $N_0 \coloneqq 1 + \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y sea N un entero cualquier tal que $N \geq N_0$. Como la función f es estrictamente creciente y tiene $f(1) = 1$, existe exactamente un entero positivo M tal que $f(M) \leq N < f(M+1)$ y entonces

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{f(M)-1} a_n + a_{f(M)} + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{M-1} (a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1}) + a_{f(M)} + \cdots + a_N.$$

En vista de esto, tenemos que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n - A \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{M-1} (a_{f(n)} + \cdots + a_{f(n+1)-1}) - A \right| + |a_{f(M)}| + \cdots + |a_{f(M+1)-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado con esto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a A. □

La última observación general que haremos en esta sección es que no hay sorpresas al sumar series término a término o multiplicar una serie término a término por número:

Proposición 4.1.11. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes y α y β son dos números arbitrarios, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ también converge y su suma es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes, para cada $n \in \mathbb{N}$ sean A_n y B_n las correspondientes sumas parciales, y sean α y β dos números. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ es $\alpha A_n + \beta B_n$. Como las sucesiones $(A_n)_{n \geq 1}$ y $(B_n)_{n \geq 1}$ convergen a las sumas de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, sabemos que la sucesión $(\alpha A_n + \beta B_n)_{n \geq 1}$ también lo hace, de manera que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ converge, y su límite es $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Esto es lo que afirma la proposición. □

Ejercicio 4.1.12. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Muestre que si $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

4.2. Series de términos no negativos

Queremos establecer criterios que nos permitan decidir si una serie converge. Como una serie no es más que una sucesión de una forma especial, ciertamente podemos aplicar los criterios de convergencia que tenemos para sucesiones.

Sabemos que una sucesión creciente y acotada superiormente converge: veamos qué nos dice esto sobre series. Supongamos que tenemos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea s_n la correspondiente suma parcial n-ésima. La sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es creciente exactamente cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq s_{n+1} - s_n = a_n,$$

es decir, todos los términos de la serie son no negativos. En vista de esto, el siguiente resultado es inmediato:

Proposición 4.2.1. *Una serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solamente si sus sumas parciales están acotadas superiormente, esto es, si hay un número K tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$a_1 + \cdots + a_n \leq K$$

y en ese caso la suma de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{a_1 + \cdots + a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si la serie no converge, entonces diverge a $+\infty$.

Demostración. En efecto, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos no negativos, entonces la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ de sus sumas parciales es creciente y, por lo tanto, converge si y solamente si está acotada superiormente y en ese caso su límite es $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si no lo hace, además, necesariamente diverge a $+\infty$. □

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este criterio.

Ejemplo 4.2.2. La serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{4.4}$$

converge. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ es $n! \geq 2^n$, así que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3.$$

Esto nos dice que la sucesión de sumas parciales de la serie está acotada por 3.

Probemos que, de hecho, su límite es el número e. Recordemos que en Ejemplo 3.3.1.10 mostramos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge y que el número e es, por definición, su límite. Más aún, ahí mostramos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

y, como cada uno de los factores entre paréntesis es menor que 1, esto es

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},$$

que es precisamente la $(n+1)$-ésima suma parcial de la serie (4.4). Esto implica que

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{4.5}$$

Sea ahora N un entero positivo. Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, entonces cada vez que i es un entero tal que $0 \leq i \leq N$ vale que

$$\frac{(n+N)!}{i!(n+N-i)!n^i} = \frac{1}{i!} \cdot \frac{(n+N)(n+N-1)\cdots(n+N-i+1)}{n^i} \geq \frac{1}{i!},$$

ya que cada uno de los i factores del numerador es mayor que n, y, por lo tanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+N} = \sum_{i=0}^{n+N} \binom{n+N}{i} \frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^{n+N} \frac{(n+N)!}{i!(n+N-i)!n^i} \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{(n+N)!}{i!(n+N-i)!n^i} \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!}$$

Como $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$, sabemos que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^N = 1$ y, por lo tanto, que

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^N = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+N} \geq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!}.$$

Esto nos dice que todas las sumas parciales de la serie (4.4) son menores o iguales que e, así que la suma de esa serie, que es el supremo del conjunto de esas sumas parciales, es también menor o igual a e. Junto con la desigualdad (4.5) esto implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e,$$

que es lo que queríamos probar. Esta serie converge rápidamente. En efecto, si N es un entero positivo, usando la Proposición 4.1.7 vemos que

$$e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Como $n! \geq 10^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 25$, usando el resultado del Ejercicio 4.1.12 vemos que si $N \geq 24$ es

$$e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^N}.$$

Esto implica que la suma parcial $\sum_{n=0}^{N+1} 1/n!$ coincide con e en al menos sus primeros N dígitos decimales. Dedujimos esto de la desigualdad $n! \geq 10!$: es de notar que esta acotación es muy grosera, y que si la mejoramos podemos probar que la convergencia es mucho más rápida.

Ejemplo 4.2.3. Sea α un numero tal que $\alpha > 1$. Supongamos que N es un entero positivo cualquiera y elijamos k en $\mathbb{N}$ de manera que sea $2^k > N$, de manera que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} < 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k - 1)^\alpha}\right).$$

Acotando cada uno de los sumandos que escribimos entre paréntesis por el producto del menor de sus términos multiplicado por el número de términos que tiene vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{i^\alpha} &< 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{4^\alpha} + \frac{2^3}{8^\alpha} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^3} + \cdots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{k-1}} \\
&= \frac{1 - (2^{\alpha-1})^k}{1 - 2^{\alpha-1}} < \frac{1}{1 - 2^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

tiene sus sumas parciales acotadas superiormente y que, por lo tanto, converge.

Supongamos ahora que α es un número tal que $\alpha \leq 1$. Si N es un entero positivo cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^\alpha} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{N-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^N - 1)^\alpha}\right) \\
&> 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^N} = 1 + \frac{N-1}{2}.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

tiene en este caso sus sumas parciales no acotadas superiormente, así que diverge a $+\infty$.

Juntado todo, hemos probado que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ vale que

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si y solamente si $\alpha > 1$.

La suma de esta serie, que es un número real que depende de α, no puede expresarse en términos de las funciones elementales. Definimos una función $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, la ***función ζ de Riemann***, poniendo para cada $\alpha \in (1, +\infty)$,

$$\zeta(\alpha) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Esta función fue estudiada en detalle originalmente por Bernhard Riemann en su trabajo sobre la distribución de los números primos y desde entonces tiene un rol central en la teoría analítica de números.

La determinación explícita de los valores de la función ζ es un problema extremadamente difícil. La primera instancia de esto es llamado el ***problema de Basel***: determinar el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}. \tag{4.6}$$

El primero en plantearlo fue Pietro Mengoli, en 1650, y el primero en resolverlo fue Leonhard Euler, que presentó una solución en 1734, a la edad de 28 años: fue este resultado el que llevó a Euler a la fama. El problema era célebre y había sido atacado por muchos matemáticos sin éxito.

Parte de la dificultad del problema consiste en que la serie converge muy lentamente y eso hace que sea muy trabajoso aproximar su suma. Por ejemplo, Jacob Bernoulli después de mucho trabajo pudo probar en 1689 que la suma es menor o igual que 2 y agotado abandonó el problema. Treinta años más tarde, en 1721, Johann Bernoulli y Daniel Bernoulli (hermano y sobrino de Jacob, respectivamente) pudieron mejorar eso y concluir que la suma es aproximadamente $\frac{8}{5}$. El involucramiento de la familia Bernoulli en esta cuestión se ve reflejado en el nombre con el que es conocido el problema de Mengoli: la familia Bernoulli vivía en Basel, ciudad del noroeste de Suiza. De hecho, esa es también la ciudad natal de Euler — el padre de Euler había estudiado matemática con Jacob y Euler mismo fue alumno de Johann, que dirigió su tesis doctoral.

El problema de aproximar la suma fue encarado también por Gottfried Wilhelm Leibniz, James Stirling, Abraham de Moivre, entre otros, pero el siguiente avance significativo fue hecho por

Christian Goldbach, que probó que está entre $\frac{41}{35}$ y $\frac{5}{3}$… El primer trabajo de Euler sobre el problema de Basel consistió, de hecho, en calcular aproximaciones: en 1731 obtuvo las aproximaciones

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} \sim 1{,}549\,77\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{1\,000} \frac{1}{n^2} \sim 1{,}634\,98\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{1\,000\,000} \frac{1}{n^2} \sim 1{,}634\,98\ldots,$$

y las tres tienen solamente dos decimales correctos!

A lo largo de su vida Euler dio tres soluciones distintas del problema de Basel, todas de carácter análitico. Hoy diríamos que sus argumentos no eran precisamente rigurosos, y remediar esto fue, en gran parte, la motivación para que Weierstrass y Riemann emprendieran el proyecto de volver más rigurosos a los métodos del análisis. Hoy conocemos decenas de formas distintas de determinar la suma de la serie de (4.6), que se apoyan sobre las ideas más variadas — el análisis real, el análisis complejo, el análisis funciona, la teoría de Lie, la teoría de representaciones de grupos, la geometría hiperbólica, la teoría de probabilidades, etc.

Presentaremos un argumento para determinar la suma de la serie debido a Augustin-Louis Cauchy que es a la vez completamente elemental y bellísimo.

Sea x un elemento del intervalo $(0, \pi/2)$ y sea m un entero positivo. De la fórmula de de Moivre sabemos que

$$(\cot x + i)^{2m+1} = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{2m+1}}{\operatorname{sen}^{2m+1} x} = \frac{\cos(2m+1)x + i \operatorname{sen}(2m+1)x}{\operatorname{sen}^{2m+1} x}.$$

Por otro lado, la fórmula de Newton nos dice que

$$\begin{aligned}(\cot x + i)^{2m+1} &= \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} i^k \cot^{2m+1-k} x \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} (-1)^k \cot^{2m+1-2k} x + i \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \cot^{2m-2k} x.\end{aligned}$$

Mirando las partes imaginarias de estas dos expresiones de $(\cot x + i)^{2m+1}$ concluimos que

$$\frac{\operatorname{sen}(2m+1)x}{\operatorname{sen}^{2m+1} x} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k \cot^{2m-2k} x.$$

Sea $w \in \{1, \ldots, m\}$ y pongamos $r_w \coloneqq t\pi/(2m+1)$ y $t_w \coloneqq \cot^2 r_w$. Como $(2m+1)r_w$ es un múltiplo de π, la función sen se anula en él. Vemos así que

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k t_w^{m-k} \qquad \text{para cada } w \in \{1, \ldots, m\}.$$

Esto significa que los m números

$$t_1 = \cot^2 \frac{\pi}{2m+1}, \quad t_2 = \cot^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \quad \ldots, t_m = \cot^2 \frac{m\pi}{2m+1} \tag{4.7}$$

son raíces del polinomio

$$p(X) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k X^{m-k} \in \mathbb{Z}[X].$$

La función $x \in (0, \pi/2) \mapsto \cot^2 x \in \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente, así que los m puntos de (4.7) son distintos dos a dos: como el grado del polinomio p es m, se trata entonces de *todas* las raíces de ese polinomio. En particular, recordando las relaciones entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces podemos concluir que

$$\cot^2 \frac{\pi}{2m+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \cdots + \cot^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}. \tag{4.8}$$

Para todo número real x es $\operatorname{cosec}^2 x = \cot^2 x + 1$, y podemos reescribir la igualdad de arriba en la forma

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \cdots + \operatorname{cosec}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = m + \frac{m(2m-1)}{3} = \frac{2m(m+1)}{3}. \tag{4.9}$$

Como puede verse en la Figura 4.1, para cada $0 \in (0, \pi/2)$ vale la desigualdad

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < \operatorname{cosec}^2 x.$$

Usando esto y las dos igualdades de (4.8) y (4.9) vemos que

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} + \frac{(2m+1)^2}{2^2\pi^2} + \cdots + \frac{(2m+1)^2}{m^2\pi^2} < \frac{2m(m+1)}{3}.$$

Esto implica que para todo entero positivo m es

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{6m(2m-1)}{3(2m+1)^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{12m(m+1)}{3(2m+1)^2}.$$

Es fácil ver que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{6m(2m-1)}{3(2m+1)^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{12m(m+1)}{3(2m+1)^2} = 1,$$

así que la Proposición 3.3.2.1 nos permite concluir inmediatamente que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Después de obtener la suma de la serie (4.6), Euler pudo extender sus métodos para determinar los valores de la función ζ en los enteros pares: en 1741 mostró que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ hay un número racional B_k de manera que para todo entero positivo k es

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}.$$

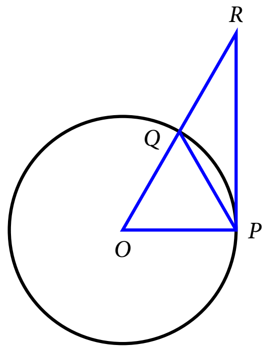


Figura 4.1. Si en la figura el círculo tiene radio 1 y el ángulo es θ, entonces el área del triangulo OPQ es $\frac{1}{2}\sin\theta$, la del sector circular OPQ es $\frac{1}{2}\theta$, y la del triangulo OPR es $\frac{1}{2}\tan\theta$, así que $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ y, por lo tanto, también $\operatorname{cosec}^2\theta > 1/\theta^2 > \cot^2\theta$.

No se conocen, sin embargo, demostraciones elementales de este hecho. Los números B_k se llaman ***números de Bernoulli***: la sucesión $(B_k)_{k\geq 0}$ queda completamente determinada por las condiciones de que

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_k = 1 - \sum_{t=0}^{k-1} \binom{m}{k} \frac{B_t}{k-t+1}.$$

Se puede ver que $B_{2k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y que las primeras componentes de índice par de la sucesión son que listamos en el Cuadro 4.1 de la página 139.

Es de notar que sobre los números $\zeta(k)$ con k impar no sabemos casi nada. El resultado más célebre sobre ellos es el teorema de Roger Apéry que afirma que el número

$$\zeta(3) = 1{,}202\,056\,903\,159\,594\,285\,399\,738\,161\,511\,449\,990\,764\,986\,292\ldots,$$

al que llamamos ***constante de Apéry***, es irracional. La demostración de esto dada por Apéry en [Apé1979] es larga y difícil. Hoy se conocen otras mucho más sencillas, como las de Frits Beukers [Beu1979] y la bien elemental de Wadim Zudilin [Zud2002]. Euler conocia los primeros 16 dígitos decimales de este número y hoy conocemos los primeros 1 200 000 000 100, que fueron determinados por Seungmin Kim en 2020.

No sabemos si el número $\zeta(3)$ es trascendente. Los valores de la función ζ en los enteros son ejemplos de lo que se llama ***periodos***: hay toda una serie de conjeturas de Maxim Kontsevich y Don Zagier sobre ellos [KZ2001].

Si en una serie de términos no negativos que converge dejamos de lado algunos términos

n	B_{2n}	n	B_{2n}
0	1	20	$-\dfrac{174611}{330}$
2	$\dfrac{1}{6}$	22	$\dfrac{854513}{138}$
4	$-\dfrac{1}{30}$	24	$-\dfrac{236364091}{2730}$
6	$\dfrac{1}{42}$	26	$\dfrac{8553103}{6}$
8	$-\dfrac{1}{30}$	28	$-\dfrac{23749461029}{870}$
10	$\dfrac{5}{66}$	30	$\dfrac{8615841276005}{14322}$
12	$-\dfrac{691}{2730}$	32	$-\dfrac{7709321041217}{510}$
14	$\dfrac{7}{6}$	34	$\dfrac{2577687858367}{6}$
16	$-\dfrac{3617}{510}$	36	$-\dfrac{26315271553053477373}{1919190}$
18	$\dfrac{43867}{798}$	38	$\dfrac{2929993913841559}{6}$

Cuadro 4.1. Los números de Bernoulli B_n con índice par. Los que tienen índice impar son todos nulos salvo por $B_1 = -1/2$.

entonces la serie resultante también converge.

Corolario 4.2.4. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie converge de términos no negativos y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ también converge y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos que converge y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Para cada $N \in \mathbb{N}$ claramente es

$$\sum_{n=1}^{N} a_{f(n)} \leq \sum_{n=1}^{f(N)} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

y esto nos dice que el conjunto de sumas parciales de la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ está acotado superiormente por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. La Proposición 4.2.1, entonces, nos permite concluir que esta serie converge. Que vale la desigualdad de enunciado es consecuencia inmediata de que la suma esa serie es el supremo del conjunto de sus sumas parciales. □

Notemos que cuando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos no negativos que diverge a $+\infty$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente no podemos decir, en general, nada sobre el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$. Por ejemplo, sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge pero que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ converge. Nuestro siguiente ejemplo involucra otra serie que se obtiene de la $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ como en el Corolario 4.2.4.

Ejemplo 4.2.5. Sean $p_1, p_2, p_3, \ldots$ los números primos listados en orden creciente y sin repeticiones. Sea N un entero positivo. Como todos los primos son mayores que 1, tenemos que $1 \geq 1 - 1/p_n^N$ y que $1 - 1/p_n > 0$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, que

$$\frac{1}{1-1/p_1} \cdot \frac{1}{1-1/p_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-1/p_N} \geq \frac{1-1/p_1^{N+1}}{1-1/p_1} \cdot \frac{1-1/p_2^{N+1}}{1-1/p_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1-1/p_N^{N+1}}{1-1/p_N},$$

y este último producto es igual a

$$\left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots + \frac{1}{p_1^N}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_2^N}\right) \cdots\cdots \left(1 + \frac{1}{p_N} + \frac{1}{p_N^2} + \cdots + \frac{1}{p_N^N}\right). \quad (4.10)$$

Si distribuimos este producto de N sumas, cada una de las cuales tiene $N+1$ términos, obtenemos la suma de los $(N+1)^N$ números de la forma

$$\frac{1}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_N^{a_N}}$$

que se obtienen eligiendo de todas las formas posibles N elementos $a_1, a_2, \dots, a_N$ del conjunto $\{0, \dots, N\}$. Ahora bien, si k es un entero tal que $1 \leq k \leq p_N$, sabemos del teorema fundamental de la aritmética que k posee una y solo una factorización como producto de potencias de primos distintos dos a dos: en esa factorización solo pueden aparecer primos menores o iguales que k, por supuesto, y, por lo tanto, menores o iguales que p_N. Esto nos dice que existen entonces enteros no negativos $b_1, b_2, \dots, b_N$ tales que $k = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_N^{b_N}$. Más aún, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ es $p_N \geq k \geq p_i^{b_i} \geq 2^{b_i}$, así que debe ser $p_N \geq b_i \geq 0$. Vemos así que hay exactamente *un* término en la suma que se obtiene distribuyendo el producto (4.10) que es igual a $1/k$.

Juntando todo, vemos con esto que

$$\frac{1}{1 - 1/p_1} \cdot \frac{1}{1 - 1/p_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - 1/p_N} \geq \sum_{n=1}^{p_N} \frac{1}{n}.$$

Notemos que como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge a $+\infty$, esto nos permite concluir que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{1 - 1/p_1} \cdot \frac{1}{1 - 1/p_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - 1/p_N} = +\infty.$$

Sea ahora K un número real. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge a $+\infty$ y la sucesión $(p_N)_{N \geq 1}$ de los primos es estrictamente creciente, sabemos que la sucesión $(\sum_{n=1}^{p_N} 1/n)_{N \geq 1}$ diverge a $+\infty$, así que existe N_0 tal que

$$\frac{1}{1 - 1/p_1} \cdot \frac{1}{1 - 1/p_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - 1/p_N} \geq \sum_{n=1}^{p_{N_0}} \frac{1}{n} \geq e^K.$$

Tomando logaritmos vemos que

$$\sum_{n=1}^{N_0} \ln \frac{1}{1 - 1/p_n} \geq K.$$

Para todo número real x tal que $0 < x \leq \frac{1}{2}$ vale que

$$\ln \frac{1}{1 - x} = -\ln(1 - x) \leq 2x,$$

y usando esto podemos concluir que

$$K \leq \sum_{n=1}^{N_0} \ln \frac{1}{1 - 1/p_n} \leq 2 \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{p_n}.$$

Como el número K es arbitrario, esto nos dice que

$$\textit{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \textit{ diverge,} \tag{4.11}$$

ya que tiene términos positivos y sus sumas parciales no están acotadas superiormente. Este resultado es un célebre teorema de Leonhard Euler [Eul1744] de 1744.

Por supuesto, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ diverja significa que sus sumas parciales no están acotadas. El llamado ***segundo teorema de Mertens***, de Franz Mertens, afirma que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}-\ln\ln n\right) \tag{4.12}$$

existe y que entonces tenemos una aproximación con error acotado

$$\sum_{p\leq n}\frac{1}{n}\sim\ln\ln n. \tag{4.13}$$

En la Figura 4.2 pueden verse las últimas líneas del artículo [Eul1744] donde Euler prueba su teorema (4.11): allí aparece sugerido este resultado.

El valor del límite (4.12) es la ***constante de Meissel–Mertens*** por Mertens y Ernst Meissel, y es aproximadamente

$$0{,}261\,497\,212\,847\,642\,783\,755\,426\,838\,608\,695\,859\,051\ldots$$

Que la serie de los inversos de los números primos diverja puede verse como una forma de decir que hay *muchos* números primos: si en la serie armónica divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ nos quedamos solamente con los términos que corresponden a valores primos de n la serie resultante sigue divergiendo. Esto es una idea general: siempre que tenemos un subconjunto infinito A de $\mathbb{N}$ podemos enumerar sus elementos de forma creciente y sin repeticiones $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y considerar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

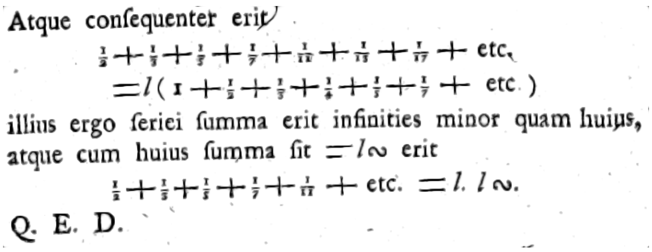
Si esta serie diverge, entonces pensamos que el conjunto A es *grande* y si converge que A es *chico*. Veamos un ejemplo importante de esta forma de pensar.

Decimos que dos números primos p y q son ***gemelos*** si difieren en 2 unidades, como 3 y 5 o los dos números de 388 342 dígitos

$$2\,996\,863\,034\,895\cdot 2^{1\,290\,000}-1 \qquad \text{y} \qquad 2\,996\,863\,034\,895\cdot 2^{1\,290\,000}+1.$$

No se sabe si existen finitos o infinitos pares de primos gemelos. De todas formas, Viggo Brun probó en 1915 que si hay infinitos la serie

$$\sum_{\substack{p \text{ primo tal que}\\ p+2 \text{ es primo}}}\frac{1}{p}$$



Atque consequenter erit

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{17} + \text{etc.}$$

$$= l\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{etc.})$$

illius ergo seriei summa erit infinities minor quam huius, atque cum huius summa sit $= l\infty$ erit

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \text{etc.} = l.\,l\infty.$$

Q. E. D.

Figura 4.2. Las últimas líneas del artículo [Eul1744] de Leonhard Euler. La expresión «$l.l.\infty$» con la que termina el artículo sugiere el lado derecho de (4.13). Euler escribe $l.$ a la función logaritmo.

converge: esto nos dice que inclusive si hay infinitos no hay *tantos*. No se conoce el valor de la suma de esa serie — al que llamamos la ***constante de Brun*** — aunque se sabe que es menor que 2,347. Se sabe de todas formas que la serie converge de manera extremadamente lenta a su suma. Thomas Nicely determinó en 1994 todos los primos gemelos menores que 10^{14} y a partir de eso estimó que el valor de la constante de Brun es aproximadamente 1,902 160 578. Ese cálculo es famoso porque al hacerlo descubrió una falla en el procesador Pentium de Intel, que le costó a la empresa unos 500 millones de dólares. Hoy hay estimaciones más precisas de la constante de Brun.

Otra consecuencia sencilla de la Proposición 4.2.1 es el siguiente criterio de convergencia:

Corolario 4.2.6. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente de términos no negativos y $(c_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada de números no negativos, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ converge.*

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos no negativos, sea $(c_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada de números no negativos, y sea K una cota superior positiva para esta. Si N es un entero positivo cualquiera, entonces

$$\sum_{n=1}^{N} c_n a_n \leq \sum_{n=1}^{N} K a_n = K \sum_{n=1}^{N} a_n \leq K \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $0 \leq c_n \leq K$, $0 \leq a_n$ y $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$, que tiene términos no negativos, tiene sumas parciales acotadas y que, por lo tanto, converge. $\square$

Correspondiente a este criterio de convergencia tenemos otro de divergencia:

Ejercicio 4.2.7. Muestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie divergente de términos no negativos y $(c_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números acotada inferiormente por un número positivo, entonces la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ diverge a $+\infty$.

El Corolario 4.2.4 nos dice que una serie que se obtiene de otra de términos no negativos eliminando términos converge y tiene suma acotada por la de esta. Nuestro siguiente resultado se ocupa de la situación en la que *reordenamos* los términos de una serie convergente de términos no negativos.

Proposición 4.2.8. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos no negativos y suma A, y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función* biyectiva, *entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ converge y su suma es A.*

Podemos ver esto como una extensión de la conmutatividad de la suma de $\mathbb{R}$ a las series de términos positivos. Veremos más adelante que con series de términos arbitrarios la situación es más complicada.

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie converge de términos no negativos, sea A su suma, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $s_n \coloneqq a_1 + \cdots + a_n$ su suma parcial. Sea además $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a A y tiene términos no negativos, la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es creciente, converge, y su límite es A y coincide con $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ y ponemos $N \coloneqq \text{máx}\{f(i) : i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$, entonces tenemos que la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ es

$$t_n \coloneqq a_{f(1)} + \cdots + a_{f(n)} \leq a_1 + \cdots + a_N = s_N \leq A.$$

Esto nos dice que A es una cota superior para las sumas parciales de esa serie: como tiene sus términos no negativos, esto nos dice que converge y que su suma es

$$A' \coloneqq \sup\{t_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Este supremo es menor o igual que A. Supongamos que ε es un número positivo cualquiera. Como $A = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, sabemos que hay un entero positivo m tal que $A - \varepsilon < s_n$. Por otro lado, como la función f es biyectiva, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ hay un entero positivo l_k tal que $f(l_k) = k$ y entonces, si ponemos $L \coloneqq \text{máx}\{l_1, \ldots, l_n\}$, es

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = a_{f(l_1)} + \cdots + a_{f(l_n)} \leq a_{f(1)} + \cdots + a_{f(L)} = t_L.$$

Vemos así que $A - \varepsilon < t_L$ y, por lo tanto, que $A - \varepsilon$ no es una cota superior para el conjunto $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Con todo esto podemos concluir que el supremo de este conjunto es A, y esto completa la prueba de la proposición. □

La versión de este resultado para series divergentes también vale:

Ejercicio 4.2.9. Pruebe que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie divergente de términos no negativos y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ diverge a $+\infty$.

4.3. Criterios de comparación para series de términos no negativos

Hay toda una familia de criterios de convergencia para series de términos no negativos que proceden por comparación término a término con otras series. En la base de todos ellos está el siguiente resultado:

Proposición 4.3.1. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$a_n \leq b_n.$$

(*i*) *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(*ii*) *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también lo hace.*

Cuando dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como en esta proposición decimos que la primera está ***acotada superiormente término a término*** por la segunda.

Demostración. (*i*) Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, de manera que su suma es una cota superior para el conjunto de sus sumas parciales. Si N es un entero positivo cualquiera, tenemos entonces que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es una cota superior para el conjunto de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Como esta tiene sus términos no negativos, esto nos permite concluir que converge y, más aún, que vale la desigualdad del enunciado.

(*ii*) Como una serie de términos no negativos o converge o diverge a $+\infty$, la afirmación (*ii*) de la proposición es simplemente la contrarrecíproca de la afirmación (*i*). □

Una forma eficiente de usar el criterio que nos da la Proposición 4.3.1 es vía el siguiente resultado, que reemplaza la condición de que una serie acote superiormente a la otra término a término por una condición sobre un límite.

Proposición 4.3.2. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una de términos positivos.*

(*i*) *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace.*

(*ii*) *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace.*

Demostración. (*i*) Supongamos que serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y que $L \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$. Hay entonces un entero positivo N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq N \implies \frac{a_n}{b_n} < L + 1.$$

Esto nos dice que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ está acotada término a termino por la serie $\sum_{n=N}^{\infty} (L+1) b_n$, que converge. De acuerdo a la Proposición 4.3.1, entonces, la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge si lo hace $\sum_{n=N}^{\infty} (L+1) b_n$, y esto ocurre si lo hace $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$.

(*ii*) Supongamos ahora que serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y que $l \coloneqq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, de manera que hay un entero positivo N tal que para todo entero n mayor que N es

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{l}{2}.$$

Esto nos dice que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_N$ está acotada termino a termino por abajo por la serie $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{l}{2} b_n$: si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, también lo hace $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{l}{2} b_n$ y, por lo tanto, también, la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$. □

Ejemplo 4.3.3. Sean b un número mayor que 1 y p uno positivo, y consideremos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_b n)^p}. \tag{4.14}$$

Sea ε un número positivo. Sabemos del Ejercicio 3.9.1 que $\lim_{n\to\infty} n^p/b^n = 0$, así que hay un entero positivo N tal que para todo entero n mayor que N es $n^p/b^n < \varepsilon/b$. Si ahora n es un entero tal que $n \geq b^N$, entonces hay otro entero m tal que $b^m \leq n < b^{m+1}$, claramente $m \geq N$, y es

$$0 \leq \frac{(\log_b n)^p}{n} < \frac{(\log_b b^{m+1})^p}{b^m} = b\frac{(m+1)^p}{b^{m+1}} < \varepsilon.$$

Esto prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(\log_b n)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log_b n)^p}{n} = 0$$

y, en vista de la primera parte de la Proposición 4.3.2, que la serie (4.14) diverge.

Una forma de entender este resultado es decir que cualquiera sea el número positivo p la sucesión $((\log_b n)^p)_{n\geq 1}$ crece tan lentamente que la serie de los inversos de sus componentes diverge. En particular, esto nos dice que la sucesión $(\log_b n)_{n\geq 1}$ crece lentamente. Sin embargo, no lo hace *tan* lentamente ya que la serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log_b n)^{\log_b n}} \tag{4.15}$$

converge. En efecto, si $n \geq b^{b^2}$

$$\log_b\bigl((\log_b n)^{\log_b n}\bigr) = \log_b n \cdot \log_b \log_b n \leq 2\log_b n = \log_b n^2$$

así que

$$(\log_b n)^{\log_b n} \leq n^2$$

y, por lo tanto, la serie de (4.15) está acotada superiormente término a término a partir de un momento por la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

El siguiente caso particular de la Proposición 4.3.2 aparece frecuentemente en la práctica:

Corolario 4.3.4. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos no negativos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una de términos positivos. Si existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ y es un elemento de $(0,+\infty)$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge exactamente cuando lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demostración. Supongamos que existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ y que su valor es un elemento L de $(0,+\infty)$. De la parte (*i*) de la Proposición 4.3.2 sabemos entonces que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{P} \infty a_n$. Por otro lado, que la sucesión $(a_n/b_n)_{n\geq 1}$ converja al número positivo L implica que existe un entero positivo N tal que para todo entero n mayor que N es $a_n > 0$, de manera que podemos considerar la sucesión $(b_n/a_n)_{n\geq N}$, y que su límite es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{L} \in (0,+\infty),$$

De acuerdo a la parte (*i*) de la proposición, otra vez, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ lo hace. Esto prueba el corolario. □

Ejemplo 4.3.5. Sean f y g dos polinomios con coeficientes reales de grados k y l, respectivamente, de manera que hay números reales $a_0, \ldots, a_k$ y $b_0, \ldots, b_l$ tales que $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$ y

$$f(X) = a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0, \qquad g(X) = b_l X^l + \cdots + b_1 X + b_0$$

Supongamos además que $a_k > 0$ y $b_l > 0$, por un lado, y que $g(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que podemos considerar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{g(n)}. \tag{4.16}$$

Queremos estudiar el carácter de esta.

Sea n un entero positivo cualquiera. Es

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} \cdots + a_1 n + a_0 = a_k n^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \cdots + \frac{a_1}{a_n n^{k-1}} + \frac{a_0}{a_n n^k}\right). \tag{4.17}$$

Cualquiera sea $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ sabemos que $\text{lím}_{n\to\infty} a_i / a_k n^{k-i} = 0$, así que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \cdots + \frac{a_1}{a_n n^{k-1}} + \frac{a_0}{a_n n^k}\right) = 1. \tag{4.18}$$

Vemos con esto que hay un entero positivo N_1 tal que para todo entero n mayor o igual que N_1 vale

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \cdots + \frac{a_1}{a_n n^{k-1}} + \frac{a_0}{a_n n^k} < \frac{3}{2}.$$

En particular, recordando (4.17) y que $a_k > 0$, podemos concluir que

$$f(n) > \frac{1}{2} a_k n^k > 0.$$

De manera similar, es

$$g(n) = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} \cdots + b_1 n + b_0 = b_l n^l \left(1 + \frac{b_{l-1}}{b_l n} + \cdots + \frac{b_1}{b_l n^{l-1}} + \frac{b_0}{b_l n^l}\right), \tag{4.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b_{l-1}}{b_l n} + \cdots + \frac{b_1}{b_l n^{l-1}} + \frac{b_0}{b_l n^l}\right) = 1, \tag{4.20}$$

y hay un entero positivo N_2 tal que para todo entero N mayor o igual que N_2 es $g(n) > 0$. Si ponemos $N \coloneqq \text{máx}\{N_1, N_2\}$, esto nos permite concluir que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)/g(n)$, que tiene el mismo carácter que la de (4.16), tiene todos sus términos positivos. Más aún, usando (4.17) y (4.19) vemos que

$$\frac{f(n)/g(n)}{1/n^{l-k}} = \frac{a_k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \cdots + \frac{a_1}{a_n n^{k-1}} + \frac{a_0}{a_n n^k}\right)}{b_l \left(1 + \frac{b_{l-1}}{b_l n} + \cdots + \frac{b_1}{b_l n^{l-1}} + \frac{b_0}{b_l n^l}\right)},$$

así que usando (4.18) y (4.20) podemos concluir inmediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)/g(n)}{1/n^{l-k}} = \frac{a_k}{a_l}.$$

De acuerdo al Corolario 4.3.4 y el Ejemplo 4.2.3, podemos deducir de esto que la serie de (4.16) converge si y solamente si $l > k + 1$.

En base al criterio de la Proposición 4.3.1 podemos establecer muchos otros que son más cómodos en situaciones especiales.

Proposición 4.3.6. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos* positivos *y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

(i) *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace y*

$$\frac{1}{a_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{1}{b_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(ii) *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también lo hace.*

Necesitamos aquí que las series tengan términos positivos y no solamente no negativos para que tenga sentido considerar los cocientes entre ellos. La hipótesis de esta proposición es una comparación entre las series pero no como en la Proposición 4.3.1 entre sus términos sino entre las *razones de cambio* de sus términos.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale que

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_1}.$$

Esto nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ está acotada término a termino por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$, y esta última converge si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Esto junto con la primera parte de la Proposición 4.3.1 implica que vale la afirmación (i). La afirmación (ii), por su parte, es la contrarrecíproca de (i). □

Los criterios que nos dan las Proposiciones 4.3.1 y 4.3.6 se basan en la comparación de una serie con otra. Si los usamos para comparar con series geométricas obtenemos los siguientes dos criterios, conocidos como el *criterio de la raíz* y el *criterio del cociente*, debidos a Augustin-Louis Cauchy.

Proposición 4.3.7. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.*

(i) *Si hay un número $q \in (0,1)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Si hay un número $q \in (0,1)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_{n+1}/a_n \leq q$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Demostración. (i) Supongamos que hay un número $q \in (0,1)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Tenemos entonces que $a_n \leq q^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto, que la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, que converge, acota superiormente término a término a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De acuerdo a la Proposición 4.3.1, esto implica que la segunda converge.

(ii) Supongamos ahora que hay un número $q \in (0,1)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_{n+1}/a_n \leq q$. En este caso tenemos que $a_{n+1}/a_n \leq q^{n+1}/q^n$ y, por lo tanto, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ converge, la Proposición 4.3.6 nos permite concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

En ninguna de las dos partes de la Proposición 4.3.7 podemos relajar la hipótesis a que el número q pertenezca a $(0,1]$. Por ejemplo si $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces claramente tenemos que $\sqrt[n]{a_n} \leq 1$ y $a_{n+1}/a_n \leq 1$ pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. Más aún, inclusive si suponemos que $\sqrt[n]{a_n} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que $a_{n+1}/a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ no podemos concluir que la serie converge: en efecto, las dos condiciones son satisfechas por la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

Ejercicio 4.3.8. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Muestre que si hay un número $q \in [1,+\infty)$ tal que

- o bien $\sqrt[n]{a_n} \geq q$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- o bien $a_{n+1}/a_n \geq q$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Las segundas partes de la Proposición 4.3.7 y de este ejercicio pueden refinarse para obtener el siguiente criterio debido a Jean le Rond d'Alembert.

Proposición 4.3.9. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.*

(i) *Si* $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *entonces la serie converge.*

(ii) *Si* $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *entonces la serie diverge.*

Demostración. (i) Supongamos que $L \coloneqq \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$. Como $(L+1)/2 > L$, existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{L+1}{2}.$$

Es $(L+1)/2 < 1$, así que la segunda parte de la Proposición 4.3.7 nos dice que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge y, por lo tanto, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace.

(ii) Supongamos ahora que $l \coloneqq \liminf_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n > 1$. Como $(l+1)/2 < l$, hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{l+1}{2}.$$

Notemos que $(l+1)/2 > 1$. Afirmamos que

$$a_n \geq a_{n_0} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0. \tag{4.21}$$

Esto es obvio cuando n es n_0, y si es cierto cuando n es un entero k tal que $k \geq n_0$, también es cierto cuando n es $k+1$, ya que

$$a_{k+1} > \frac{l+1}{2} a_k \geq a_{n_0}.$$

Se sigue inmediatamente de (4.21) que la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ no converge a 0, así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge y por lo tanto, como tiene términos positivos, que diverge. □

De manera similar, las primeras partes de la Proposición 4.3.7 y del Ejercicio 4.3.8 tienen el siguiente refinamiento:

Proposición 4.3.10. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y sea $L \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.*

(i) Si $L < 1$, entonces la serie converge.

(ii) Si $L > 1$, entonces la serie diverge.

Notemos que, a diferencia de lo que ocurre en la Proposición 4.3.9, consideramos aquí solamente el límite superior.

Demostración. Supongamos primero que $L < 1$. Como $q \coloneqq (L+1)/2 > L$, existe entonces un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Esto implica que para todo entero n tal que $n \geq n_0$ es $a_n < q^n$ y, como la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ converge, que la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Si en cambio es $L > 1$, entonces el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} > 1\}$ es infinito, así que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n > 1\}$ es infinito y la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no converge a 0: esto nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge y, por lo tanto, diverge. □

Es interesante observar que los criterios dados por las Proposiciones 4.3.9 y 4.3.10 no son independientes. Para establecer esto usamos el siguiente resultado.

Lema 4.3.11. *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números positivos, entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Esto implica, por ejemplo, que si $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces también $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$:

así, si podemos concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge usando el criterio de la Proposición 4.3.9 entonces también podemos hacerlo usando el criterio de la Proposición 4.3.10. Por otro lado, es bien posible que se tenga $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ y $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, como ocurre en el Ejemplo 4.3.13 que daremos abajo: esto significa que el criterio de la Proposición 4.3.10 es *mejor* que el de la Proposición 4.3.9.

Notemos finalmente que este lema implica que si la sucesión $(a_{n+1}/a_n)_{n\geq 1}$ converge, entonces también lo hace la sucesión $(\sqrt[n]{a_n})_{n\geq 1}$ y que en ese caso ambas tienen el mismo límite.

Demostración. Probemos primer la tercera de las desigualdades. Si $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ esa desigualdad es evidente, así que podemos suponer que ese no es el caso, esto es, que la sucesión $(a_{n+1}/a_n)_{n\geq 1}$ está acotada superiormente. Como esa sucesión tiene todas sus componentes positivas es acotada y su límite superior no puede ser $-\infty$. Vemos así que su límite superior es un número real — escribámoslo L.

Sea ε un número positivo cualquiera. Hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si n es un entero cualquiera tal que $n \geq n_0$ tenemos entonces que

$$a_n = a_{n_0} \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n_0-1}} < a_{n_0}\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$$

y, por lo tanto, que

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\alpha}\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

con $\alpha \coloneqq a_{n_0}/(L+\varepsilon/2)^{n_0}$. Este número α es positivo, así que de acuerdo al Ejemplo 3.5.17 es $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ y podemos elegir un entero n_1 mayor que n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ valga

$$n \geq n_1 \implies \sqrt[n]{\alpha} < \frac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon/2},$$

ya que este último cociente es estrictamente mayor que 1. Juntando todo, vemos que si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$ es $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$, y esto implica que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon.$$

Como esto es cierto cualquiera sea el numero positivo ε, podemos deducir que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L,$$

y esta es precisamente la desigualdad que queríamos probar.

La segunda desigualdad del lema es evidente, y a la prueba de la primera, que es similar a lo que acabamos de hacer, la dejamos a cargo del lector. □

Ejercicio 4.3.12. Pruebe en detalle la primera de las desigualdades que afirma el lema.

Veamos un ejemplo que muestra que el criterio de la raíz de la Proposición 4.3.10 es estrictamente más fuerte que el del cociente de la Proposición 4.3.9.

Ejemplo 4.3.13. Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{1/2^{(n+1)+(-1)^{n+1}}}{1/2^{n+(-1)^n}} = \frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{(n+1)+(-1)^{n+1}}} = 2^{2(-1)^n-1} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par;} \\ 2^{-3} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Se sigue de esto claramente que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1/2^{(n+1)+(-1)^{n+1}}}{1/2^{n+(-1)^n}} = 2 > 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{1/2^{(n+1)+(-1)^{n+1}}}{1/2^{n+(-1)^n}} = 2^{-3} < 1,$$

así que con la Proposición 4.3.9 no podemos concluir ni que la serie converge ni que diverge. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2^{1+(-1)^n/n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(-1)^{n+1}/n}$$

así que

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{-1/n} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{1/n}$$

y, por lo tanto, ya que $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

La Proposición 4.3.9 nos permite concluir de esto que la serie converge.

4.4. Una aplicación: la representación posicional de los números reales

Fijemos un entero β tal que $b \geq 2$, sea $D_\beta \coloneqq \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$, y consideremos el conjunto $\mathscr{X}_\beta$ de todas las sucesiones $(d_n)_{n\geq 1}$ tales que $d_n \in D_\beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $d = (d_n)_{n\geq 1}$ es un elemento de $\mathscr{X}_\beta$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\beta^n}$$

converge. En efecto, tiene todos sus términos no negativos positivos y, como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\sqrt[n]{d_n/\beta^n} = \sqrt[n]{d_n}/\beta \leq \sqrt[n]{b}/\beta$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{d_n}{\beta^n}} \leq \frac{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta}}{\beta} = \frac{1}{\beta} < 1.$$

Más aún, como $0 \leq d_n \leq \beta - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\beta^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta - 1}{\beta^n} = 1.$$

Esto nos dice que hay una función

$$f_\beta : (d_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{X}_\beta \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\beta^n} \in [0, 1].$$

El siguiente resultado nos dice cuál lejos está esta función f_β de ser una biyección.

Lema 4.4.1.

(*i*) *La función $f_\beta : \mathscr{X}_\beta \to [0, 1]$ es sobreyectiva.*

(*ii*) *Si x es un elemento cualquiera de $[0, 1)$, entonces existe exactamente un elemento $\xi = (x_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{X}_\beta$ con $f(\xi) = x$ tal que no existe un entero no negativo N tal que para todo entero n mayor que N es $x_n = \beta - 1$.*

(*iii*) *Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos elementos distintos de $\mathscr{X}_\beta$, de manera que el conjunto $S \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$ no es vacío y podemos considerar su mínimo $k \coloneqq \min S$, y se tiene que $f_\beta(a) = f_\beta(b)$ y $a_k < b_k$, entonces $a_k + 1 = b_k$ y para todo entero n mayor que k se tiene que $a_n = \beta - 1$ y $b_n = 0$.*

Demostración. La imagen de la sucesión constante $(\beta - 1)_{n\geq 1}$ de valor $\beta - 1$ por f es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta - 1}{\beta^n} = 1,$$

así que 1 pertenece a la imagen de la función f_β. Sea x un elemento de $[0,1)$ y mostremos que x también está en la imagen de f. Vamos a construir una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de elementos del conjunto $D_\beta = \{0, 1, \ldots, \beta - 1\}$ de manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ valga que

$$\frac{x_n}{\beta^n} \leq x - \left(\frac{x_1}{\beta} + \frac{x_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{\beta^{n-1}}\right) < \frac{x_n + 1}{\beta^n}, \tag{4.22}$$

Procedemos por recurrencia.

- Empezamos poniendo $x_1 \coloneqq \lfloor \beta x \rfloor$. Como $0 \leq x < 1$, es $0 \leq \beta x < \beta$ y, por lo tanto, $0 \leq x_1 \leq \beta - 1$, esto es, x_1 es un elemento de D_β. Por otro lado, de que x_1 sea $\lfloor \beta x \rfloor$ se sigue inmediatamente que $x_1 \leq \beta x < x_1 + 1$, de manera que $x_1/\beta \leq x < (x_1 + 1)/\beta$.
- Supongamos ahora que k es un elemento de $\mathbb{N}$ y que ya elegimos las componentes $x_1, \ldots, x_k$ de la sucesión de manera tal que la desigualdad (4.22) valga cuando n es cualquiera elemento de $\{1, \ldots, k\}$. Ponemos entonces

  $$x_{n+1} \coloneqq \left\lfloor \beta^{n+1} x - (\beta^n x_1 + \beta^{n-1} x_2 + \cdots + \beta x_n) \right\rfloor$$

  Como estamos suponiendo que vale la desigualdad (4.22) cuando n es k, tenemos que

  $$0 \leq \beta^{k+1} x - \left(\beta^k x_1 + \beta^{k-1} x_2 + \cdots + \beta^2 x_{k-1} + \beta x_k\right) < \beta$$

  y esto implica que x_{n+1} pertenece al conjunto D_β. Por otro lado, la definición de x_{n+1} implica inmediatamente que

  $$x_{n+1} \leq \beta^{n+1} x - (\beta^n x_1 + \beta^{n-1} x_2 + \cdots + \beta x_n) \leq x_{n+1} + 1,$$

  y dividiendo por β^{k+1} vemos que con nuestra elección de x_{k+1} la desigualdad (4.22) también vale cuando n es $k+1$.

Esto completa la construcción. Como la sucesión $\xi \coloneqq (x_n)_{n\geq 1}$ que hemos construido satisface la desigualdad (4.22) cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y las sucesiones $(x_n/\beta^n)_{n\geq 1}$ y $((x_n + 1)/\beta^n)_{n\geq 1}$ claramente convergen a 0, podemos concluir inmediatamente que

$$f_\beta(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n} = x.$$

Vemos así que el número x está en la imagen de f_β, como queríamos. Esto completa la demostración de la parte (*i*) del lema.

Para probar la afirmación de existencia de la parte (*ii*) del lema, en vista de lo que hemos hecho, es suficiente con mostrar que la sucesión ξ que construimos tiene la propiedad descripta en el enunciado. Supongamos que esto no es así, de manera que hay un entero positivo N tal que para todo entero mayor que N es $x_n = \beta - 1$. Tenemos entonces que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{\beta^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\beta - 1}{\beta^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{\beta^n} + \frac{1}{\beta^N}$$

y, en consecuencia, que

$$x - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{\beta^n} = \frac{1}{\beta^N}.$$

Por otro lado, como la desigualdad (4.22) vale cuando $n = N+1$ y $x_{N+1} = \beta - 1$, tenemos al mismo tiempo que

$$x - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{\beta^n} < \frac{\beta_{N+1} + 1}{\beta^{N+1}} = \frac{1}{\beta^N}.$$

Esto es, por supuesto, absurdo. Esta contradicción prueba lo que queremos.

Probemos ahora la parte (*iii*) del lema. Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos elementos distintos de $\mathscr{X}_\beta$, y sea k el menor elemento del conjunto $S \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$, que no es vacío, y supongamos que $f_\beta(a) = f_\beta(b)$ y $a_k < b_k$. Tenemos entonces que

$$0 = f_\beta(b) - f_\beta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\beta^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n} = \frac{b_k - a_k}{\beta^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{\beta^n},$$

de manera que

$$\frac{1}{\beta^k} \leq \frac{b_k - a_k}{\beta^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_k - b_k}{\beta^k} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{\beta^k} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\beta - 1}{\beta^k} = \frac{1}{\beta^k}.$$

Esto nos dice, por un lado, que $(b_k - a_k)/\beta^k = 1/\beta^k$, es decir, que $b_k = a_k + 1$, y, por otro, que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\beta - 1 - (a_n - b_n)}{\beta^n} = 0.$$

Como todos los términos de esta serie son no negativos, esto es posible solamente si $(a_n - b_n) = \beta - 1$ para todo entero n mayor que k, y esto, a su vez, solo puede ocurrir si $a_n = \beta - 1$ y $b_n = 0$ para todo tal n. Esto es precisamente lo que afirma la parte (*iii*) del lema.

Para terminar, probemos la afirmación de unicidad de la parte (*ii*). Sea x un elemento de $[0,1)$ y supongamos que tenemos dos elementos distintos $\xi = (x_n)_{n\geq 1}$ y $\xi' = (x'_n)_{n\geq 1}$ de $\mathscr{X}$ tales que $f_\beta(\xi) = x$ y $f_\beta(\xi') = x$, y sea k el menor elemento del conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq x'_n\}$. Es $x_k \neq x'_k$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que, de hecho, es $x_k < x'_k$. De acuerdo a la parte (*iii*) del lema que acabamos de probar, se tiene entonces que $x'_n = \beta - 1$ para todo entero n mayor que k y que, por lo tanto, la sucesión ξ no satisface la condición descripta en (*ii*). Vemos así que hay como mucho un elemento de $\mathscr{X}_\beta$ cuya imagen por f_β es x y que satisface esa condición. El lema queda así completamente probado. □

Podemos enunciar parte de las afirmaciones del lema en la siguiente manera:

Corolario 4.4.2. *Sea β un entero mayor que 1. Si x es un elemento del intervalo $[0,1)$, entonces existe exactamente una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de elementos del conjunto $D_\beta \coloneqq \{0,1,\ldots,\beta-1\}$ tales que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n}$$

y no existe ningún entero no negativo N tal que $x_n = \beta - 1$ para todo entero n mayor que N. □

Esta serie es el llamado ***desarrollo en base β*** del número x. El corolario se ocupa solamente de los números que pertenecen al intervalo $[0,1)$, pero el resultado del siguiente ejercicio generaliza esto al caso general de números positivos cualesquiera.

Ejercicio 4.4.3. Sea β un entero mayor que 1. Pruebe que si x es un número positivo, entonces existe exactamente una forma de elegir un entero n_0 y una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de elementos de $\{0,1,\ldots,\beta-1\}$ de manera que

- $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \beta^{n_0-n}$,
- $x_0 \neq 0$, y
- no existe un entero positivo N tal que $x_n = \beta - 1$ para todo entero n mayor que N.

En todo esto hemos supuesto todo el tiempo que la base β es un entero mayor que 1. Es posible considerar bases no enteras, sin embargo.

Ejercicio 4.4.4. Sea β un numero *real* mayor que 1. Muestre que si x es un número real positivo, es posible elegir un entero n_0 y una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de elementos de $\{0,1,\ldots,\lfloor\beta\rfloor\}$ tales que $x_0 \neq 0$ y

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \beta^{n_0-n}.$$

Este es el desarrollo en base β de x estudiado originalmente por Alfréd Rényi en [Rén1957] y estudiado en detalle por William Parry en [Par1960] en el contexto de la teoría ergódica de los sistemas dinámicos. Por ejemplo, si $\beta = \sqrt{2}$ entonces el desarrollo de 55

$$55 = 1\cdot\beta^{10} + 0\cdot\beta^9 + 1\cdot\beta^8 + 0\cdot\beta^7 + 0\cdot\beta^6 + 0\cdot\beta^5 + 1\cdot\beta^4 + 0\cdot\beta^3 + 1\cdot\beta^2 + 0\cdot\beta^1 + 1$$

mientras que el de $1 + 7\sqrt{2}$ es

$$1 + 7\sqrt{2} = 1\cdot\beta^5 + 0\cdot\beta^4 + 1\cdot\beta^3 + 0\cdot\beta^2 + 1\cdot\beta^1 + 1.$$

Cuando la base β no es un entero es mucho más complicado decidir qué números tienen una única representación. Por ejemplo, si $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, entonces el número ϕ^2 tiene dos representaciones distintas en base ϕ, ya que $\phi + 1 = \phi^2$.

Más adelante necesitaremos la información que nos da el siguiente lema.

Lema 4.4.5. *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos elementos distintos de $\mathscr{X}_\beta$, de manera que el conjunto $S := \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$ no es vacío y podemos considerar el número $k := \min S$.*

(*i*) *Se tiene que*

$$\frac{|a_k - b_k| - 1}{\beta^k} \leq |f_\beta(a) - f_\beta(b)| \leq \frac{1}{\beta^{k-1}}.$$

(*ii*) *Si $f_\beta(a) < f_\beta(b)$, entonces $a_k < b_k$.*

Demostración. Es $a_i = b_i$ siempre que $i \in \{1, \dots, k-1\}$, así que

$$f_\beta(a) - f_\beta(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\beta^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\beta^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{\beta^n} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{\beta^n}. \tag{4.23}$$

Como $|a_n - b_n| \leq \beta - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica que

$$\begin{aligned} \left|f_\beta(a) - f_\beta(b)\right| &= \left| \frac{a_k - b_k}{\beta^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{\beta^n} \right| \geq \frac{|a_k - b_k|}{\beta^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{\beta^n} \\ &\geq \frac{1}{\beta^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\beta - 1}{\beta^n} = \frac{|a_k - b_k|}{\beta^k} - \frac{1}{\beta^k} = \frac{|a_k - b_k| - 1}{\beta^k} \end{aligned}$$

y que

$$\left|f_\beta(a) - f_\beta(b)\right| = \left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{\beta^n} \right| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{\beta^n} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\beta - 1}{\beta^n} = \frac{1}{\beta^{k-1}},$$

y esto es lo que afirma la primera parte del lema.

Finalmente, para probar la segunda parte, supongamos $f_\beta(a) = f_\beta(b)$ y $a_k < b_k$. De (4.23) tenemos entonces que

$$0 = f_\beta(a) - f_\beta(b) = \frac{a_k - b_k}{\beta^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{\beta^n},$$

de manera que

$$\frac{1}{\beta^k} \leq \frac{b_k - a_k}{\beta^k} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{\beta^n} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\beta - 1}{\beta^n} = \frac{1}{\beta^k}$$

y, por lo tanto, $b_k = a_k + 1$ y

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\beta - 1 - a_n + b_n}{\beta^n} = \frac{1}{\beta^k}.$$

Es fácil ver que esto implica que para todo entero n tal que $n \geq k + 1$ es $a_n - b_n = \beta - 1$ y, en consecuencia, $a_n = \beta - 1$ y $b_n = 0$. □

4.5. Series de términos arbitrarios

La condición de Cauchy de la Definición 3.6.1 caracteriza exactamente las sucesiones que convergen. La siguiente es una versión de esa condición para series.

Definición 4.5.1. Decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ***de Cauchy*** si para todo número positivo ε existe un entero no negativo n_0 tal que cualesquiera sean n y m en $\mathbb{N}$ vale

$$n \geq m \geq n_0 \implies |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

La razón por la que esto nos interesa es la siguiente:

Lema 4.5.2. *Una serie es de Cauchy exactamente cuando la sucesión de sus sumas parciales es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y sea $(s_n)_{n\geq 1}$ su sucesión de sumas parciales, de manera que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Supongamos primero que la serie es de Cauchy y sea ε un número positivo. La hipótesis implica que hay un entero positivo n_0 tal que para toda elección de n y m en $\mathbb{N}$ vale

$$n \geq m \geq n_0 \implies |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon. \tag{4.24}$$

Esto nos dice que si n y m son elementos de $\mathbb{N}$ tales que $n, m \geq n_0 + 1$ y ponemos $n' := \text{máx}\{n, m\}$ y $m' := \text{mín}\{n, m\}$, entonces o bien $n' \geq m' + 1 \geq n_0$ y podemos usar (4.24) para ver que

$$|s_n - s_m| = |s_{n'} - s_{m'}| = |a_{m'+1} + a_{m'+2} + \cdots + a_{n'}| < \varepsilon,$$

o bien $n' < m' + 1$ y en ese caso necesariamente $n = m$, así que

$$|s_n - s_m| = 0 < \varepsilon.$$

En cualquier caso, esto muestra que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy.

Supongamos ahora que la sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy y sea ε un número positivo. Existe entonces un entero positivo n_0 tal que siempre que n y m son elementos de $\mathbb{N}$ vale

$$n, m \geq n \implies |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Esto implica que si n y m son dos enteros tales que $n \geq m \geq n_0 + 1$, entonces

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| = |s_n - s_{m-1}| < \varepsilon$$

y, por lo tanto, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de Cauchy. $\square$

Esto tiene la siguiente consecuencia inmediata:

Proposición 4.5.3. *Una serie converge si y solamente si es de Cauchy.*

Demostración. En efecto, una serie converge si y solamente si la sucesión de sus sumas parciales converge, y sabemos que esto ocurre exactamente cuando esta es de Cauchy, y el lema nos dice que esto ocurre, a su vez, exactamente cuando la serie con la que empezamos es de Cauchy. □

Este criterio nos permite concluir que la serie armónica diverge de una manera mucho más sencilla que lo que hicimos en el Ejemplo 4.2.3.

Ejemplo 4.5.4. Si n es un entero positivo, entonces

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n},$$

ya que hay n sumandos en esta suma y todos son mayores o iguales que el último de ellos. Esto nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no satisface la condición de Cauchy y que, por lo tanto, no converge.

Usando el criterio de Cauchy podemos obtener el siguiente resultado de Gottfried Wilhelm Leibniz que se aplica a series cuyos términos alternan en signo:

Proposición 4.5.5. *Si $(a_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de números positivos decreciente que converge a 0, entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

converge y para todo $m \in \mathbb{N}$ su suma está entre los números $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} (-1)^{n+1} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{m+1} (-1)^{n+1} a_n$.

Cuál de estos dos números es más grande y cuál es más chico depende de la paridad del entero m, como veremos en la demostración.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea $s_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_n$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n$. Si n y m son dos enteros cualesquiera tales que $n \geq m \geq 0$, entonces

$$(-1)^{m+1} \cdot (s_n - s_m) = a_{m+1} + (-1)^1 a_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m} a_n.$$

Asociando los términos de esta última suma de a dos vemos que es igual a

$$\begin{cases} (a_{m+1} - a_{m+2}) + (a_{m+3} - a_{m+4}) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) & \text{si } n - m \text{ es par;} \\ (a_{m+1} - a_{m+2}) + (a_{m+3} - a_{m+4}) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n & \text{si } n - m \text{ es impar.} \end{cases} \tag{4.25}$$

En cualquiera de los dos casos todos los términos que aparecen en estas sumas son no negativos, ya que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene componentes no negativos y es decreciente, y esto nos dice que $(-1)^{m+1}\cdot(s_n-s_m)>0$. Por otro lado, cambiando la forma en que asociamos los términos en estas sumas vemos que (4.25) es igual a

$$\begin{cases} a_{m+1}-(a_{m+2}-a_{m+3})-(a_{m+4}-a_{m+5})-\cdots-(a_{n-2}-a_{n-1})-a_n & \text{si } n-m \text{ es par;} \\ a_{m+1}-(a_{m+2}-a_{m+3})-(a_{m+4}-a_{m+5})-\cdots-(a_{n-1}-a_n) & \text{si } n-m \text{ es impar.} \end{cases}$$

Tanto a_n como cada una de las diferencias que aparecen aquí entre paréntesis son positivas, así que en cualquiera de los dos casos esta expresión es menor que a_m.

Podemos concluir con todo esto que siempre que n y m son enteros tales que $n\geq m\geq 0$ vale

$$0\leq(-1)^m\cdot(s_n-s_m)<a_m. \tag{4.26}$$

Mostremos ahora que la serie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ es de Cauchy y que, por lo tanto, converge. Sea ε un número positivo. Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0, existe un entero positivo N tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ vale

$$n\geq N \implies a_n<\varepsilon.$$

Si ahora n y m son dos enteros cualesquiera tales que $n\geq m\geq N$, entonces usando esto y la desigualdad (4.26) vemos que

$$|(-1)^m a_m+(-1)^{m+1}a_{m+1}+\cdots+(-1)^n a_n|<a_m<\varepsilon.$$

Esto prueba que la serie es de Cauchy, como queremos. Sea $S:=\lim_{n\to\infty}s_n$ su suma. Si ahora fijamos un entero positivo m, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq m$ vale la desigualdad (4.26), y esto implica que

$$0\leq(-1)^m\cdot(S-s_m)\leq a_m$$

de manera que

$$s_m\leq S\leq s_m+a_m=s_{m+1} \qquad \text{si } m \text{ es par}$$

y

$$s_{m+1}=s_m-a_m\leq S\leq s_m \qquad \text{si } m \text{ es impar.}$$

Esto prueba que S está entre s_m y s_{m+1}. □

Demostramos el criterio de Leibniz de la Proposición 4.5.5 resultado usando el criterio de Cauchy para series, pero es posible probarlo de otras maneras. El siguiente ejercicio sugiere dos, y veremos más abajo una tercera.

Ejercicio 4.5.6. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números positivos estrictamente decreciente que converge a 0 y sea $(s_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

(a) Muestre que la sucesión $(s_{2n})_{n\geq 0}$ es decreciente y acotada inferiormente y que la sucesión $(s_{2n+1})_{n\geq 0})$ es creciente y acotada superiormente, de manera que ambas convergen, que tienen el mismo límite, y que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge a ese límite común.

(b) De una tercera prueba de la proposición usando el principio de intervalos encajados.

Es fácil dar ejemplos de aplicación del criterio de Leibniz.

Ejemplo 4.5.7. Las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

convergen, ya que las sucesión de términos positivos $(1/n)_{n\geq 1}$ y $(1/\ln n)_{n\geq 2}$ son estrictamente decrecientes y convergen a 0. Esto es una aplicación inmediata del criterio de Leibniz. Es bastante más dificil encontrar las sumas de estas series! Hagámoslo con la primera.

Para cada entero positivo N sea

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

la N-ésima suma parcial de la serie. Queremos calcular $\lim_{N\to\infty} s_N$: como sabemos que ese límite existe, bastará calcular el límite $\lim_{N\to\infty} s_{2N}$ de la subsucesión de $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de los términos de índice par. Fijemos N en $\mathbb{N}$. Es

$$s_{2N} = \sum_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}.$$

y sumando y restando $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}$ podemos reescribir esto:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

Si para cada $n\in\mathbb{N}$ ponemos ahora $r_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$, esto nos dice que

$$s_{2N-1} = r_{2N} - r_N + \ln 2N - \ln N = r_{2N-1} - r_{N-1} + \ln 2.$$

En el Ejemplo 3.3.1.12 mostramos que la sucesión $(r_n)_{n\geq 1}$ converge a la constante γ de Euler–Mascheroni, y esto implica inmediatamente que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{N\to\infty} s_{2N} = \lim_{N\to+\infty} r_{2N-1} - \lim_{N\to+\infty} r_{N-1} + \ln 2 = \ln 2.$$

Sin la hipótesis de que la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ sea decreciente que aparece en la Proposición 4.5.5 no podemos en general probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converja, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5.8. La sucesión de los valores absolutos de los términos de la serie

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$$

converge a 0 pero no es decreciente, y la serie diverge. En efecto, si n es un entero positivo, su $2n$-ésima suma parcial es

$$\sum_{i=2}^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{i}-1} - \frac{1}{\sqrt{i}+1}\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i},$$

y esto es el doble que la n-ésima suma parcial de la serie armónica, que diverge.

De todas formas, no es necesario que una sucesión de componentes positivas $(a_n)_{n\geq 0}$ de límite nulo sea decreciente para que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converja.

Ejemplo 4.5.9. Consideremos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{4.27}$$

y para cada $N \in \mathbb{N}$ sea s_N su N-ésima suma parcial.

Si $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$s_{2N} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{2n(2n+1)},$$

y esto es la N-ésima suma parcial de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)},$$

que, de acuerdo a lo que en el Ejemplo 4.3.5, converge: esto nos dice que la sucesión $(s_{2N})_{N\geq 1}$ converge. Por otro lado, para todo $N \in \mathbb{N}$ es

$$s_{2N+1} = s_{2N} + \frac{1}{2N+3},$$

así que claramente la sucesión $(s_{2N+1})_{N\geq 1}$ converge y al mismo límite que $(s_{2N})_{N\geq 1}$. Juntando todo, vemos que la sucesión $(s_N)_{N\geq 1}$ converge y, por lo tanto, que la serie (4.27) converge. Notemos que esta serie tiene términos de signos alternantes pero que los valores absolutos de estos no decrecen.

El criterio de Leibniz tiene la siguiente generalización importante conocida como el ***criterio de Dirichlet***, por Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Proposición 4.5.10. *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números no negativos que converge a 0 y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie cuyas sumas parciales están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a 0, sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie cuyas sumas parciales están acotadas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos S_n y B_n a las sumas parciales n-ésimas de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Existe entonces un número positivo B tal que $|B_n| \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es inmediato verificar por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$S_n = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}). \tag{4.28}$$

Sea ε un número positivo. Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a 0 y tiene componentes positivas, hay un entero positivo N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq N \implies 0 \leq a_n < \frac{\varepsilon}{3B}.$$

Sean ahora n y m dos enteros tales que $n \geq m \geq N$. Usando la igualdad (4.28) y recordando que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene componentes no negativas y decreciente, vemos inmediatamente que

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left| a_n B_n - a_m B_m + \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) \right| \\
&\leq a_n |B_n| + a_m |B_m| + \sum_{k=m}^{n-1} |B_k| (a_k - a_{k+1}) \\
&\leq a_n B + a_m B + B \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \\
&= a_n B + a_m B + B(a_m - a_n) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es de Cauchy y que, por lo tanto, converge. □

Este criterio de Dirichlet generaliza al de Leibniz. En efecto, si estamos en la situación de este último, de manera que tenemos una sucesión decreciente $(a_n)_{n\geq 1}$ de componentes no negativas, el criterio de Dirichlet nos permite concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, ya que la serie $\sum_{n=1}^{n} (-1)^n$ tiene sus sumas parciales acotadas.

El criterio de Dirichlet es mucho más flexible que el de Leibniz.

Ejemplo 4.5.11. Mostremos que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es cualquier sucesión decreciente de números positivos que converge a 0 la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} n$$

converge. En vista del criterio de Dirichlet, para esto es suficiente con que probemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$ tiene sus sumas parciales acotadas. Esto es consecuencia inmediata de que para todo $N \in \mathbb{N}$ es

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen} n = \frac{\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} N - \operatorname{sen}(N+1)}{2 - 2\cos 1}. \tag{4.29}$$

Probemos esto. Recordemos que si x e y son dos números reales la *fórmula de adición* para la función seno nos dice que

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

Esto implica que $\operatorname{sen} 2 = \operatorname{sen}(1+1) = 2 \operatorname{sen} 1 \cos 1$, así que $2 \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 2 = (2 - 2\cos 1) \operatorname{sen} 1$ y, por lo tanto,

$$\sin 1 = \frac{\sin 1 + \sin 1 - \sin 2}{2 - 2\cos 1}.$$

Esto nos dice que la igualdad (4.29) vale cuando N es 1. Por otro lado, si N es un elemento de $\mathbb{N}$ para el cual esa igualdad vale, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} \operatorname{sen} n &= \frac{\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} N - \operatorname{sen}(N+1)}{2 - 2\cos 1} + \operatorname{sen}(N+1) \\ &= \frac{\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} N + \operatorname{sen}(N+1) - 2\cos 1 \operatorname{sen}(N+1)}{2 - 2\cos 1}\end{aligned}$$

y esto es

$$= \frac{\operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen}(N+1) - \operatorname{sen}(N+2)}{2 - 2\cos 1},$$

ya que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} N - 2\cos 1 \operatorname{sen}(N+1) &= \operatorname{sen}((N+1)-1) - 2\cos 1 \operatorname{sen}(N+1) \\ &= \operatorname{sen}(N+1)\cos(-1) + \cos(N+1)\operatorname{sen}(-1) - 2\cos 1 \operatorname{sen}(N+1) \\ &= -\operatorname{sen}(N+1)\cos(1) - \cos(N+1)\operatorname{sen}(-1) \\ &= -\operatorname{sen}(N+2).\end{aligned}$$

Por ejemplo, de esta manera vemos inmediata que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} \tag{4.30}$$

converge. Es posible mostrar que su suma es $(\pi-1)/2$. Notemos que los signos de los términos de esta serie son positivos y negativos de acuerdo a que el entero $\lfloor n/\pi \rfloor$ sea par o impar, y que esto ocurre sin ninguna periodicidad.

Observación. Una forma de mostrar que la serie de (4.30) suma $(\pi-1)/2$ es considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de periodo 2π y tal que $f(x) = (\pi - x)/2$ cuando $x \in [0, 2\pi)$, observar que es diferenciable a trozos, de manera que su desarrollo de Fourier $f(x) \sim \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$ sen nx converge en sus puntos de diferenciabilidad, y evaluarlo a este en 1.

La identidad (4.28) que usamos en la prueba de la Proposición 4.5.10 es conocida como la ***fórmula de sumación por partes*** o ***identidad de Abel*** por Niels Henrik Abel. Como es importante dejémosla registrada en el siguiente lema:

Lema 4.5.12. *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} b_k$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ vale entonces la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{n} a_n b_n = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \qquad \square$$

Abel usó esta identidad originalmente en 1826 para probar la siguiente variación del criterio de Dirichlet, a la que llamamos el ***criterio de Abel***, que luego Dirichlet generalizó al probar la Proposición 4.5.10.

Proposición 4.5.13. *Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente y acotada de números no negativos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente y acotada de números no negativos, sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie convergente, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean B_n y S_n las n-ésimas sumas parciales de las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge: sea a su límite. De acuerdo a la fórmula de sumación por partes, para todo entero positivo n tenemos que

$$S_n = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

De esto se sigue que si n y m son dos enteros tales que $n \geq m \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned} S_n - S_m &= a_n B_n - a_m B_m + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \\ &= (a_n - a) B_n + a(B_n - B_m) + (a - a_m) B_m + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \end{aligned}$$

Sea ε un número positivo. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ converge y existe, por un lado, un número B tal que

$$|B_n| < B \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

y, por otro, un número natural N_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n, m \geq N_1 \implies |B_n - B_m| < \frac{\varepsilon}{6|a|}.$$

Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge a a y es decreciente, hay un entero positivo N_2 tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$k \geq N_2 \implies 0 \leq a_k - a < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Pongamos $N := \max\{N_1, N_2\}$. Si n y m son dos enteros tales que $n \geq m \geq N$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &\leq |a_n - a| \cdot |B_n| + |a| \cdot |B_n - B_m| + |a - a_m| \cdot |B_m| + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1})|B_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{6B} B + |a| \frac{\varepsilon}{6|a|} + \frac{\varepsilon}{6B} B + B \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + B(a_m - a_n). \end{aligned}$$

Como $a \leq a_n \leq a_m$, es $a_m - a_n \leq a_m - a < \varepsilon/3B$, así juntando todo vemos que

$$|S_n - S_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Esto nos dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es de Cauchy y que, por lo tanto, converge. □

Ejercicio 4.5.14. Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones

4.6. Convergencia absoluta y condicional

Definición 4.6.1. Decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***converge absolutamente*** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Notemos que esta definición no pide que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converja, pero eso es automático:

Proposición 4.6.2. *Una serie absolutamente convergente converge.*

No es cierto que una serie convergente sea necesariamente absolutamente convergente: por ejemplo, el criterio de Leibniz nos permite mostrar que la serie armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ converge y sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. Veremos más abajo cuándo exactamente ocurre esto.

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente y sea ε un número positivo. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge satisface la condición de Cauchy y existe, por lo tanto, un entero positivo N tal que siempre que n y m son enteros vale que

$$n \geq m \geq N \implies \sum_{k=m}^{n} |a_n| < \varepsilon.$$

Si ahora n y m son dos enteros tales que $n \geq m \geq n$, entonces tenemos que

$$|a_m + \cdots + a_n| \leq |a_m| + \cdots + |a_n| < \varepsilon.$$

Esto prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisface la condición de Cauchy, así que converge. □

El interés fundamental de este resultado es que nos permite reducir en muchos casos el problema de mostrar que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge al de mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ lo hace, y esto suele ser más sencillo, ya que esta última tiene sus términos no negativos y podemos usar todos los criterios que vimos en la Sección 4.3.

La siguiente proposición describe las formas más sencillas en que podemos manipular series absolutamente convergentes.

Proposición 4.6.3.

(i) *Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente, entonces también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.*

(ii) *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie que converge absolutamente y $(b_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ también converge absolutamente.*

Demostración. (i) Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series que convergen absolutamente. Las series $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ son entonces convergentes, así que también lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$. Por su parte, esta última acota superiormente término a término a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n + b_n|$, así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge absolutamente.

(ii) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie que converge absolutamente, sea $(b_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada y sea B un número tal que $|b_n| \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ está entonces acotada término a término por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} B|a_n|$, y esta converge, así que aquella también lo hace. □

Para cada número real a escribimos

$$a^+ := \max\{a, 0\}, \qquad a^- := -\min\{a, 0\}.$$

Notemos que

$$a = a^+ - a^-, \qquad |a| = a^+ + a^-, \qquad a^+ = \frac{|a| + a}{2}, \qquad a^- = \frac{|a| - a}{2}. \tag{4.31}$$

Proposición 4.6.4.

(*i*) *Una serie* $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente si y solamente si las series de términos no negativos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *convergen, y en ese caso es*

$$\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n\geq1}^{\infty} a_n^+.$$

(*ii*) *Si una serie* $\sum_{n\geq1}^{\infty} a_n$ *converge pero no lo hace absolutamente, entonces las dos series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *divergen.*

Demostración. (*i*) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie. De acuerdo a las relaciones (4.31) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-),$$

y se sigue de esto que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, así que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Recíprocamente, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen.

(*ii*) Sea ahora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie que converge pero que no lo hace absolutamente. De acuerdo a la parte (*i*), alguna de las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ diverge: mostremos que lo hacen las dos.

Supongamos que, por el contrario, por ejemplo la primera diverge y la segunda no lo hace. En ese caso, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ tiene términos no negativos converge y en particular que tiene sus sumas parciales acotadas: sea K un número tal que $|\sum_{n=1}^{N} a_n^-| \leq K$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Sea L un número positivo. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ no converge sus sumas parciales no están acotadas superiormente y existe un entero positivo M tal que

$$\sum_{n=1}^{M} a_n^+ > K + L.$$

Tenemos entonces que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{N} a_n^+ - \sum_{n=1}^{N} a_n^- = \sum_{n=1}^{N} a_n^+ - \left|\sum_{n=1}^{N} a_n^-\right| > (K + L) - K = L.$$

Vemos así que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no están acotadas inferiormente: esto es absurdo, ya que estamos suponiendo que esa serie converge. □

Una propiedad fundamental de las series absolutamente convergentes es que podemos reordenar sus términos sin perder la convergencia ni cambiar la suma:

Proposición 4.6.5. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ también converge absolutamente y su suma es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. De acuerdo a la Proposición 4.6.4, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ convergen y, como tienen términos no negativos, la Proposición 4.2.8 nos dice que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}^-$ convergen, y la Proposición 4.6.4 nos permite concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ converge absolutamente y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

como queremos. □

Este resultado nos lleva a hacer la siguiente definición:

Definición 4.6.6. Una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es ***incondicionalmente convergente*** si para toda biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ converge, y ***condicionalmente convergente*** en caso contrario.

Esta noción es útil en muchos contextos del análisis — sobre todo el análisis funcional. En el nuestro resulta ser equivalente a la de convergente absoluta:

Proposición 4.6.7. *Una serie convergente es incondicionalmente convergente exactamente cuando es convergente absolutamente.*

Demostración. La Proposición 4.6.5 nos dice que la condición es suficiente. Para probar que también es necesaria consideremos una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que no converge absolutamente y mostremos que hay una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ no converge. Sin pérdida de generalidad supondremos que $a_1 > 0$.

De acuerdo a la Proposición 4.6.4 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ diverge. Consideremos los conjuntos $\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$ y $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 0\}$. Claramente $\mathcal{P} \cup \mathcal{N} = \mathbb{N}$ y $\mathcal{P} \cap \mathcal{N} = \varnothing$. Mostremos que los dos conjuntos son infinitos. Si no fuera este el caso claramente habría un entero positivo n_0 tal que todos los términos de la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ o bien son todos positivos o bien son todos no negativos: en ese caso esa serie, que converge, claramente convergería absolutamente, pero esto es imposible porque estamos suponiendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no lo hace.

Como los subconjuntos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N}$ son infinitos, hay funciones biyectivas y estrictamente crecientes $\pi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ y $\nu : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ diverge a $+\infty$, ya que se obtiene de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ eliminando los términos nulos. Como sus términos son todos positivos, esto significa que sus sumas parciales no están acotadas. Mostremos que podemos construir una función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente con $h(1) = 1$ y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(h(n+1)-1)} > 1 + n - \big(a_{\nu(1)} + \cdots + a_{\nu(n)}\big).$$

Por supuesto, empezamos poniendo $h(1) \coloneqq 1$. Por otro lado, supongamos que k es un elemento de $\mathbb{N}$ y ya decidimos los valores de h en los enteros $1, \ldots, k$: como la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ no están acotadas superiormente y sus términos son positivos, existe un entero $h(k+1)$ tal que $h(k+1) > h(k)$ y

$$a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(h(k+1)-1)} > 1 + n - \big(a_{\nu(1)} + \cdots + a_{\nu(k+1)}\big).$$

Esta construcción implica que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_{\pi(h(n))} + \cdots + a_{\pi(h(n+1)-1)} + a_{\nu(n)}\big) \tag{4.32}$$

diverge, ya que para cada $N \in \mathbb{N}$ su suma parcial N-ésima es

$$a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(h(N+1)-1)} + a_{\nu(1)} + \cdots + a_{\nu(N+1)} > 1 + N.$$

Esto implica que la serie que se obtiene «eliminando los paréntesis» en (4.32),

$$\begin{aligned}
&a_{\pi(h(1))} + \cdots + a_{\pi(h(2)-1)} + a_{\nu(1)} \\
&\qquad + a_{\pi(h(2))} + \cdots + a_{\pi(h(3)-1)} + a_{\nu(2)} \\
&\qquad\qquad + a_{\pi(h(3))} + \cdots + a_{\pi(h(4)-1)} + a_{\nu(4)} \\
&\qquad\qquad\qquad + \cdots\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + a_{\pi(h(n))} + \cdots + a_{\pi(h(n+1)-1)} + a_{\nu(n)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

también diverge, ya que hay una subsucesión de su sucesión de sumas parciales que no está acotada. Para terminar, es suficiente que observemos que en esta serie aparece cada uno de los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ exactamente una vez, así que se trata de un reordenamiento de esta. □

Queremos dar un ejemplo de lo que ocurre cuando reordenamos los términos de una serie condicionalmente convergente. Para ello usaremos el resultado del siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.6.8. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y existen $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}_0$ tales que existe

$$\alpha := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{qN+r} a_n,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y su suma es precisamente α.

Ejemplo 4.6.9. Vimos en el Ejemplo 4.5.7 que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{4.33}$$

converge a $\ln 2$, pero sabemos que no lo hace absolutamente ya que la serie armónica diverge. De acuerdo a la Proposición 4.6.7 existen reordenamientos de esta serie que no convergen. Mostremos que, además de eso, tiene reordenamientos que convergen pero a una suma distinta de $\ln 2$.

Sean a y b dos enteros positivos, y consideremos la serie que se obtiene reordenando los términos de la serie armónica alternante de manera que ni el orden de los términos positivos ni el de los negativos cambien, pero que ahora a cada a términos positivos sigan b términos negativos. Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 1$, obtenemos la siguiente serie

$$\underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10}} + \underbrace{\frac{1}{21} + \frac{1}{23} - \frac{1}{12}} + \cdots$$

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces el término n-esimo de esta serie es

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2(qa+r)+1}, & \text{si } 0 \leq r < a; \\ -\dfrac{1}{2(qb+r-a+1)}, & \text{si } a \leq r < a+b \end{cases}$$

con q y r los enteros tales que $n - 1 = (a+b)q + r$ y $0 \leq r < a+b$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ sea $s_N := u_1 + \cdots + u_N$ la N-ésima suma parcial de la serie.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

En el Ejemplo 3.3.1.12 vimos que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \gamma,$$

la constante de Euler–Mascheroni. Notemos que

$$\frac{1}{2} r_n + \frac{1}{2} \ln n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

y que

$$r_{2n} - \frac{1}{2}r_n + \ln 2n - \frac{1}{2}\ln n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

Fijemos $N \in \mathbb{N}$. La suma $s_{(a+b)N}$ tiene los primeros aN términos positivos de la serie (4.33) y los primeros bN términos negativos, así que es

$$\begin{aligned} s_{(a+b)N} &= \sum_{n=1}^{aN} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{bN} \frac{1}{2n} \\ &= r_{2aN} - \frac{1}{2}r_{aN} + \ln 2aN - \frac{1}{2}\ln aN - \frac{1}{2}r_{bN} - \frac{1}{2}\ln bN \\ &= r_{2aN} - \frac{1}{2}r_{aN} - \frac{1}{2}r_{bN} + \ln 2\sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Se sigue de esto que

$$\lim_{n\to\infty} s_{(a+b)N} = \ln 2\sqrt{\frac{a}{b}},$$

y el resultado del Ejercicio 4.6.8 nos permite concluir que la suma de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_r = \ln 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Notemos que cuando $a = b = 1$ la serie es precisamente la serie armónica alternante con la que empezamos, y esta fórmula nos dice que su suma es $\ln 2$, como sabemos.

Lo que hicimos en este ejemplo se puede hacer con cualquier serie convergente que no converge absolutamente: este es un célebre resultado de Bernhard Riemann de 1868 llamado el *teorema de reordenamiento de Riemann* [Rie1868].

Proposición 4.6.10. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie que converge pero no absolutamente.*

(*i*) *Para cada número α hay una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ converge a α.*

(*ii*) *Hay funciones biyectivas g, h, $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_{g(n)}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{h(n)}$ divergen a $+\infty$ y a $-\infty$, respectivamente, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k(n)}$ oscila.*

Demostración. HACER. □

Se conocen muchas variaciones sobre el teorema de reordenamiento de Riemann. Por ejemplo, Wacław Sierpiński probó en [Sie1910a, Sie1910b, Sie1911] que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie condicionalmente convergente de suma α y β es o bien $-\infty$ o bien un número tal que $\beta \leq \alpha$ entonces podemos encontrar una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \beta$ y con la propiedad de que para todo

$n \in \mathbb{N}$ vale

$$a_n \leq 0 \implies f(n) = n.$$

Esto nos dice que reordenando solamente los términos no negativos podemos obtener una serie que sume cualquier número menor o igual que α. Es posible, además, probar que este es el mejor resultado posible si solo permitimos reordenar los términos no negativos.

Por otro lado, Władysław Wilczyński probó en [Wil2007] que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie condicionalmente convergente y α es un número cualquier, $+\infty$ o $-\infty$, entonces hay una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \alpha$ y el conjunto $I \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq n\}$ tiene ***densidad asintótica*** nula, esto es,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|I \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} = 0.$$

Esto nos dice que para hacer que la suma de la serie reordenada sea α es suficiente permutar los términos que pertenecen a un subconjunto I *muy pequeño*.

Hay versiones del teorema de reordenamiento de Riemann para series de términos complejos, como el teorema de Lévy–Steinitz de Paul Lévy [Lé1905] y Ernst Steinitz [Ste1913], y, más generalmente, para series cuyos términos pertenecen a espacios vectoriales de dimensión finita o, inclusive, espacios de Banach arbitarios [KK1991].

4.7. Productos

4.7.1. Algunas biyecciones auxiliares

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que bajo condiciones apropiadas vale la propiedad distributiva para productos de dos series. Empezaremos estableciendo algunos resultados muy sencillos sobre la existencia de ciertas biyecciones.

Lema 4.7.1.1. *Existen funciones biyectivas $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Consideremos la función

$$\sigma : (x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto 2^x(2y + 1) - 1 \in \mathbb{N}_0.$$

Sea n un elemento cualquiera de $\mathbb{N}_0$. El conjunto $I \coloneqq \{k \in \mathbb{N}_0 : 2^k \text{ divide a } n + 1\}$ es finito, ya que sus elementos son todos menores que $n + 1$, y no es vacío, ya que contiene a 0, así que podemos considerar el entero $u \coloneqq \max I$. Como u pertenece a I, hay un entero positivo m tal que $n+1 = 2^u m$. Este entero m es impar: en caso contrario habría otro entero m' tal que $m = 2m'$ y tendríamos que $2^{u+1} \mid 2^u 2m' = 2^u m = n + 1$, lo que es absurdo porque $u + 1$ no pertenece a I. Vemos con esto que hay un entero no negativo v tal que $m = 2v+1$ y tenemos entonces que $n = 2^u(2v+1)-1 = \sigma(u,v)$. Esto muestra que la función σ es sobreyectiva.

Supongamos ahora que x, x', y e y' son elementos de $\mathbb{N}_0$ tales que $\sigma(x,y) = \sigma(x',y')$, esto es, tales que

$$2^x(2y+1)-1 = 2^{x'}(2y'+1)-1. \tag{4.34}$$

Si $x > x'$, esto implica que $2^{x-x'}(2y+1) = 2y'+1$, y esto es absurdo porque a la izquierda de esta igualdad tenemos un número par y a la derecha uno par. De manera similar, no puede ser que sea $x < x'$ y, por lo tanto, es $x = x'$. Usando esto y la igualdad de (4.34) vemos entonces que también $2y+1 = 2y'+1$ y, en definitiva, que $y = y'$. Esto prueba que la función σ también es inyectiva.

Vemos así que la función σ es una biyección, así que es inversible. La consideración de su función inversa $\pi \coloneqq \sigma^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que, por supuesto, también es biyectiva, muestra que el lema es cierto. □

En la Figura 4.3 de la página 176 puede verse una tabla de valores de la función σ de esta demostración. El siguiente ejercicio da otra función biyectiva como la del lema que es muchas veces más útil.

Ejercicio 4.7.1.2. Muestre que la función

$$\sigma : (x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x \in \mathbb{N}_0$$

es biyectiva, y que su función inversa $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ toma en cada entero no negativo n el valor $\pi(n) = (r-i, i)$ con

$$r = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor, \qquad i = n - r(r+1)/2.$$

La Figura 4.4 de la página 176 muestra una tabla de la función σ.

De hecho, hay muchas biyecciones $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. El resultado del siguiente ejercicio permite describirlas a todas a partir de cualquiera de ellas.

Ejercicio 4.7.1.3. Muestre que si π, $\pi' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ son dos biyecciones, entonces existe exactamente una función biyectiva $\rho : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que $\pi = \pi' \circ \rho$.

	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
8	16	33	67	135	271	543	1087	2175	4351	$\cdots$
7	14	29	59	119	239	479	959	1919	3839	$\cdots$
6	12	25	51	103	207	415	831	1663	3327	$\cdots$
5	10	21	43	87	175	351	703	1407	2815	$\cdots$
4	8	17	35	71	143	287	575	1151	2303	$\cdots$
3	6	13	27	55	111	223	447	895	1791	$\cdots$
2	4	9	19	39	79	159	319	639	1279	$\cdots$
1	2	5	11	23	47	95	191	383	767	$\cdots$
0	0	1	3	7	15	31	63	127	255	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Figura 4.3. La tabla de valores de la función $\sigma : (x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto 2^x(2y+1) \in \mathbb{N}_0$ que usamos en la prueba del Lema 4.7.1.1.

	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
8	36	46	57	69	82	96	111	127	144	$\cdots$
7	28	37	47	58	70	83	97	112	128	$\cdots$
6	21	29	38	48	59	71	84	98	113	$\cdots$
5	15	22	30	39	49	60	72	85	99	$\cdots$
4	10	16	23	31	40	50	61	73	86	$\cdots$
3	6	11	17	24	32	41	51	62	74	$\cdots$
2	3	7	12	18	25	33	42	52	63	$\cdots$
1	1	4	8	13	19	26	34	43	53	$\cdots$
0	0	2	5	9	14	20	27	35	44	$\cdots$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Figura 4.4. La tabla de la función $\sigma : (x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto (x+y)(x+y+1)/2 + x \in \mathbb{N}_0$ del Ejercicio 4.7.1.2.

4.7.2. El producto de dos series absolutamente convergentes

El producto de dos sumas finitas $\sum_{n=0}^{N} a_n$ y $\sum_{m=0}^{M} b_m$ es

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cdot \sum_{m=0}^{M} b_m = (a_0 + \cdots + a_N)(b_0 + \cdots + b_M)$$

y la ley distributiva nos dice que esto es igual a la suma de los $(N+1)(M+1)$ productos de la forma $a_i b_j$ que se obtienen eligiendo de todas las formas posibles i en $\{0, \dots, N\}$ y j en $\{0, \dots, M\}$. Queremos extender esta observación al producto de dos *series*. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ son dos series, entonces podemos considerar todos los productos de la forma

$$a_i b_j \tag{4.35}$$

que se obtienen eligiendo i y j en $\mathbb{N}_0$ de todas las maneras posibles: nos gustaría sumarlos. Por supuesto, esto no tiene ningún sentido, pero podemos intentar construir una serie que los tenga por términos. Para ello elegimos una función biyectiva $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ y escribimos $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a las dos componentes de π, de manera que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ es $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n))$. Podemos entonces considerar la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)}.$$

Como la función π es una biyección, los términos de esta serie son exactamente los productos (4.35), sin repeticiones. Esta serie puede entonces verse de manera intuitiva como el resultado de usar la ley distributiva en el producto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m$$

y ordenar los términos resultantes siguiente el orden descripto por la función π.

Bajo una hipótesis razonable, esta intuición da el resultado correcto:

Proposición 4.7.2.1. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ dos series absolutamente convergentes y sea $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ una función biyectiva. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)}$ converge absolutamente y suma es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m. \tag{4.36}$$

Notemos que, en particular, en esta situación la suma de la serie no depende de la elección de la función biyectiva π.

Demostración. Sea N un entero no negativo y pongamos

$$M \coloneqq \max\{\pi_1(n) : n \in \mathbb{N}_0, n \leq N\} \cup \max\{\pi_2(n) : n \in \mathbb{N}_0, n \leq N\}.$$

Si n es un entero tal que $0 \leq n \leq M$, entonces $\pi_1(n)$, $\pi_2(n) \in \{0, \ldots, M\}$, así que el producto $|a_{\pi_1(n)}| \cdot |b_{\pi_2(n)}|$ es uno de los $(M+1)^2$ que se obtienen distribuyendo el producto

$$\sum_{n=0}^{M} |a_n| \cdot \sum_{m=0}^{M} |b_m|,$$

y esto implica inmediatamente que

$$\sum_{n=0}^{N} |a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)}| \leq \sum_{n=0}^{M} |a_n| \cdot \sum_{m=0}^{M} |b_m| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|. \tag{4.37}$$

Vemos así que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{N} |a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)}|$ están acotadas y, por lo tanto, que esa serie converge. Podemos entonces concluir que la serie $\sum_{n=0}^{N} a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)}$ converge absolutamente, como afirma la proposición. Queremos ahora determinar la suma de esa serie.

Consideremos primero el caso en el que las dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ tienen todos sus términos no negativos, y sean A y B sus sumas. Si $A = 0$, entonces claramente tenemos que $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que la igualdad (4.36) del enunciado se cumple trivialmente. Lo mismo ocurre si $B = 0$, así que es suficiente que consideremos el caso en el que $A > 0$ y $B > 0$.

La desigualdad (4.37) implica en esta situación que el número AB es una cota superior para las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)}$. Para probar que es, de hecho, su suma bastará entonces que mostremos que ningún número menor que AB también es una cota superior para esas sumas parciales. Fijemos un número positivo ε menor que $\min\{A^2, AB, B^2\}$. Es

$$A - \frac{\varepsilon}{A+B} = \frac{A^2 + AB - \varepsilon}{A+B} > 0, \quad B - \frac{\varepsilon}{A+B} = \frac{B^2 + AB - \varepsilon}{A+B} > 0,$$

así que la convergencia de las dos series implica que existen enteros no negativos N_1 y N_2 tales que

$$\sum_{n=0}^{N_1} a_n \geq A - \frac{\varepsilon}{A+B} > 0, \qquad \sum_{n=0}^{N_2} b_n \geq B - \frac{\varepsilon}{A+B} > 0.$$

Como la función π es biyectiva, para cada elección de i en $\{0 \ldots, N_1\}$ y de j en $\{0, \ldots, N_2\}$ existe un entero $n_{i,j} \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(n_{i,j}) = (i, j)$. Pongamos

$$N \coloneqq \max\{n_{i,j} : i \in \{0, \ldots, N_1\}, j \in \{0, \ldots, N_2\}\}.$$

Todas estas elecciones implican inmediatamente que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} a_{\pi_1(n)} b_{\pi_2(n)} &\geq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} a_i b_j = \sum_{i=0}^{N_1} a_i \cdot \sum_{j=0}^{N_2} b_j > \left(A - \frac{\varepsilon}{A+B}\right)\left(B - \frac{\varepsilon}{A+B}\right) \\ &= AB - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{(A+B)^2} > AB - \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la igualdad (4.36) del enunciado en el caso en que las dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ tienen todos sus términos no negativos.

Volvamos ahora al caso general. Para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$(a_{\pi_1(n)}b_{\pi_2(n)})^+ = a^+_{\pi_1(n)}b^+_{\pi_2(n)} + a^-_{\pi_1(n)}b^-_{\pi_2(n)},$$
$$(a_{\pi_1(n)}b_{\pi_2(n)})^- = a^+_{\pi_1(n)}b^-_{\pi_2(n)} + a^-_{\pi_1(n)}b^+_{\pi_2(n)},$$

y entonces, como las tres series que aparecen en la igualdad (4.36) convergen absolutamente y por lo que ya probamos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi_1(n)}b_{\pi_2(n)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_{\pi_1(n)}b_{\pi_2(n)})^+ - \sum_{n=0}^{\infty}(a_{\pi_1(n)}b_{\pi_2(n)})^- \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^+_{\pi_1(n)}b^+_{\pi_2(n)} + \sum_{n=0}^{\infty} a^-_{\pi_1(n)}b^-_{\pi_2(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a^+_{\pi_1(n)}b^-_{\pi_2(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} a^-_{\pi_1(n)}b^+_{\pi_2(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^+_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b^+_n + \sum_{n=0}^{\infty} a^-_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b^-_n - \sum_{n=0}^{\infty} a^+_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b^-_n - \sum_{n=0}^{\infty} a^-_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b^+_n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^+_n - \sum_{n=0}^{\infty} a^-_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b^+_n - \sum_{n=0}^{\infty} b^-_n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la proposición. □

4.7.3. El producto de Cauchy

La Proposición 4.7.2.1 nos dice que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ son dos series absolutamente convergentes de sumas A y B, respectivamente, y $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ es una biyección cualquiera, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi_1(n)}b_{\pi_2(n)}$$

converge absolutamente a AB. Si usamos la biyección π del Ejercicio 4.7.1.2, esta serie es

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 + \cdots$$

De acuerdo a la Proposición 4.1.8 podemos aquí introducir paréntesis sin cambiar ni la convergencia ni la suma y obtener la serie

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0) + \cdots$$

que podemos escribir en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right).$$

Llamamos a esta serie el ***producto de Cauchy*** de las dos series con las que empezamos. Su suma es, de acuerdo a la Proposición 4.7.2.1, igual al producto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m.$$

Ejemplo 4.7.3.1. Sea q un número real tal que $|q| < 1$. Sabemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{4.38}$$

Calculemos el producto de Cauchy de esta serie por sí misma. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el término n-ésimo de la serie resultante es

$$\sum_{i=0}^{n} q^i q^{n-i} = (n+1)q^n,$$

así que la proposición nos dice que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{(1-q)^2},$$

y que la serie de lado izquierdo de esta igualdad converge absolutamente. Notemos que este resultado es el mismo que encontramos en el Ejemplo 4.1.4, salvo por la indexación de los términos.

Podemos calcular ahora el cubo de la serie geométrica: es

$$\frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

y para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el término n-ésimo del producto de Cauchy que calcula el lado derecho de esta igualdad es

$$\sum_{i=0}^{n}(i+1)q^i q^{n-1} = \big(1+2+\cdots+(n+1)\big)q^n = \binom{n+2}{2}q^n.$$

Concluimos así que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}q^n = \frac{1}{(1-q)^3}.$$

Probemos que, más generalmente, para todo entero no negativo k vale que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}q^n = \frac{1}{(1-q)^{k+1}} \tag{4.39}$$

y que esta serie converge absolutamente. Procedemos por inducción con respecto a k. Que esta igualdad vale cuando k es 0 es precisamente la igualdad (4.38) de arriba. Por otro lado, si l es un entero positivo tal que cuando k es l la serie que aparece en (4.39) converge absolutamente y vale la igualdad, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-q)^{l+2}} &= \frac{1}{(1-q)^{l+1}} \cdot \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l}{l} q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{i+l}{l} q^i q^{n-i} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{i+l}{l} \right] q^n,\end{aligned}$$

y para concluir que la igualdad (4.39) también vale cuando $k = l+1$ es suficiente que probemos que siempre que $n \in \mathbb{N}_0$ vale que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i+l}{l} = \binom{n+l+1}{l+1}.$$

Podemos hacer procediendo por inducción con respecto a n: cuando $n = 0$ la igualdad es evidente, y si vale cuando n es un entero no negativo m entonces también vale cuando es $m+1$, ya que

$$\sum_{i=0}^{m+1} \binom{i+l}{l} = \sum_{i=0}^{m} \binom{i+l}{l} + \binom{m+1+l}{l} = \binom{m+l+1}{l+1} + \binom{m+1+l}{l} = \binom{(m+1)+l}{l+1}.$$

La igualdad (4.39) que obtuvimos arriba puede verse como una generalización de la fórmula de Newton para potencias de un binomio. Veamos cómo. Para cada entero no negativo s consideramos el polinomio

$$\binom{X}{s} := \frac{1}{s!} X(X-1)(X-2)\cdots(X-s+1) \in \mathbb{R}[X],$$

al que llamamos un ***coeficiente binomial generalizado***. El valor de este polinomio en un entero no negativo r es precisamente el coeficiente binomial $\binom{r}{s}$, pero al polinomio $\binom{X}{s}$ lo podemos evaluar en cualquier número real. En particular, si k es un entero no negativo tenemos que

$$\begin{aligned}\binom{-k}{s} &= \frac{1}{s!}(-k)(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-s+1) = \frac{(-1)^s}{s!} k(k+1)(k+2)\cdots(k+s-1) \\ &= (-1)^s \binom{k-1+s}{s}.\end{aligned}$$

Usando esta igualdad podemos reescribir la serie de (4.39): si k es un entero positivo, entonces

$$\frac{1}{(1-q)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-q)^n. \tag{4.40}$$

La conclusión de esto es que para todo número real q tal que $|q| < 1$ y todo entero k vale la igualdad

$$(1+q)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} q^n.$$

En efecto, si el entero k es negativo, entonces esta igualdad es la de (4.40) con q reemplazado por $-q$, y si k es no negativo esto es simplemente la fórmula usual de Newton: para todo entero n tal que $n > k$ es $\binom{k}{n} = 0$, así que en ese caso la serie tiene como mucho $k+1$ términos no nulos.

Ejercicio 4.7.3.2. Pruebe que si α y q son dos números reales cualquiera tales que $|q| < 1$ entonces converge absolutamente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} q^n.$$

Mostramos arriba que cuando α es un entero la suma de la serie de este ejercicio es $(1+q)^\alpha$, y de hecho esto es cierto *cualquiera sea* α. Este resultado es conocido como el ***teorema binomial de Newton***, que lo conocia ya en 1664, aunque el primer estudio detallado de la serie — y, en particular, de su convergencia — fue hecho por Niels Henrik Abel en [Abe1826]. Este trabajo de Abel es importante históricamente porque es el inicio de la teoría de las series de potencias con coeficientes complejos. En el Ejemplo 4.8.8 probaremos este teorema en el caso en que el exponente α es racional.

Ejemplo 4.7.3.3. Si x es un número cualquiera, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge absolutamente. Si x es nulo esto es obvio, y si no lo es, entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Podemos entonces definir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poniendo, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Si x e y son dos números reales, entonces el producto de Cauchy de las series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ y $\sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$ tiene, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, término n-ésimo

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Se sigue de esto que

$$f(x) \cdot f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y).$$

4.7.4. Formas alternativas del producto

El producto de Cauchy es un caso particular de una construcción más general que describimos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.7.4.1. Sea $s : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ una función con la propiedad de que

> *para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el conjunto $S_n := \{(u,v) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : s(u,v) = n\}$ es finito.*

Para cada $r \in \mathbb{N}_0$ escribamos k_r al cardinal de S_r y sean

$$(u_{r,0}, v_{r,0}), (u_{r,1}, v_{r,1}), \dots, (u_{r,k_r-1}, v_{r,k_r-1})$$

los elementos de ese conjunto listados en algún orden. Finalmente, para cada $r \in \mathbb{N}_0$ pongamos

$$K_r = k_0 + k_2 + \cdots + k_{r-1}.$$

(a) Muestre que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ hay exactamente un entero no negativo r tal que $K_r \le n < K_{r+1}$, al que podemos entonces escribir $r(n)$. Pruebe además que la función $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ que en cada $n \in \mathbb{N}$ toma el valor

$$\pi(n) := (u_{r(n),n-K_{r(n)}}, v_{r(n),n-K_{r(n)}})$$

es una biyección.

(b) Concluya que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son dos series absolutamente convergentes y para cada $r \in \mathbb{N}_0$ ponemos

$$c_r := \sum_{i=0}^{k_r-1} a_{u_{r,i}} b_{v_{r,i}}$$

entonces la serie $\sum_{r=1}^{\infty} c_r$ converge absolutamente y su suma es

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Veamos cómo podemos usar el resultado de este ejercicio para reconstruir el producto de Cauchy. Consideremos la función

$$s : (u,v) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto u + v \in \mathbb{N}_0.$$

Es fácil ver que para cada $r \in \mathbb{N}_0$ es

$$S_r = \{(r-i, i) : i \in \{0, \dots, r\}\}, \qquad k_r = r+1, \qquad K_r = r(r+1)/2.$$

Si para cada $i \in \{0, \dots, r\}$ ponemos $u_{r,i} \coloneqq r - i$ y $v_{r,i} \coloneqq i$, los elementos de S_r son entonces

$$(u_{r,0}, v_{r,0}), (u_{r,1}, v_{r,1}), \dots, (u_{r,k_r-1}, v_{r,k_r-1}).$$

Supongamos que n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}_0$ y busquemos el elemento r de $\mathbb{N}_0$ tal que $K_r \leq n < K_{r+1}$, esto es, tal que

$$\frac{r(r+1)}{2} \leq n < \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

La primera de estas desigualdades vale si y solamente si $r \leq (\sqrt{8n+1} - 1)/2$ y la segunda si y solamente si $(\sqrt{8n+1} - 3)/2 < r$: esto nos dice que el número r que buscamos satisface las desigualdades

$$\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} - 1 < r \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$$

y, por lo tanto, de acuerdo a la Proposición 2.5.3.8, que

$$r = \left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor.$$

La biyección $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ construida en el ejercicio tiene entonces

$$\pi(n) = (u_{r,n-K_r}, v_{r,n-K_r}) = (r - n + K_r, n - K_r).$$

Notemos que esta función π es exactamente la misma que describimos en el Ejercicio 4.7.1.2. Sean ahora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series absolutamente convergentes. En la notación de la segunda parte del Ejercicio 4.7.4.1 tenemos que

$$c_n = \sum_{i=0}^{k_r-1} a_{u_{r,i}} b_{v_{r,i}} = \sum_{i=0}^{n} a_{r-i} b_i$$

y, por lo tanto, lo que nos dice ese ejercicio es que

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_{r-i} b_i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Este es exactamente el producto de Cauchy de las dos series.

El Ejercicio 4.7.4.1 permite construir otras series cuya suma es el producto de las sumas de dos series absolutamente convergentes. Veamos un ejemplo importante de esto. Indexaremos aquí las series con enteros positivos, no no negativos como antes — esto no cambia nada sustancial.

Consideremos la función

$$s : (u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto uv \in \mathbb{N}.$$

Sea r un elemento cualquiera de $\mathbb{N}$, sea $S_r \coloneqq \{(u,v) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : s(u,v) = r\}$, y escribamos $\operatorname{Div}(r)$ al conjunto de los divisores positivos de r. Si d es un elemento de $\operatorname{Div}(r)$, entonces r/d es un entero y claramente el par ordenado $(d, r/d)$ pertenece al conjunto S_r. Esto nos dice que hay una función

$$u \in \operatorname{Div}(r) \mapsto (u, u/r) \in S_r,$$

y es inmediato verificar que se trata de una biyección. Como $\operatorname{Div}(r) \subseteq \{1,\dots,r\}$, esto implica que S_r es un conjunto finito. Si k_r es el cardinal de $\operatorname{Div}(r)$ y $d_{r,1}$, $d_{r,2}$ …, d_{r,k_r} son sus elementos listados en orden creciente y sin repeticiones, entonces claramente el cardinal de S_r es también k_r y sus elementos son los pares ordenados

$$(d_{r,1}, r/d_{r,1}), (d_{r,2}, r/d_{r,2}), \dots (d_{r,k_r}, r/d_{r,k_r}).$$

Sean ahora $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y $\sum_{n=1}^\infty b_n$ dos series absolutamente convergentes. La segunda parte del Ejercicio 4.7.4.1 nos dice entonces que si para cada $r \in \mathbb{N}$ ponemos

$$c_r \coloneqq \sum_{i=1}^{k_r} a_{d_{r,i}} b_{r/d_{r,i}}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty c_r$ converge absolutamente y su suma es el producto $\sum_{n=1}^\infty a_n \cdot \sum_{n=1}^\infty b_n$. Normalmente escribimos al término r-ésimo de esta serie en la forma

$$\sum_{d|r} a_d b_{r/d},$$

conviniendo que en una suma de esta forma el índice d recorre el conjunto $\operatorname{Div}(r)$ de los divisores positivos de r. Usando esta notación podemos escribir lo que tenemos como la igualdad

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{d|n} a_d b_{n/d} \right) = \sum_{n=1}^\infty a_n \cdot \sum_{n=1}^\infty b_n.$$

La serie que aparece aquí a la izquierda es el ***producto de Dirichlet*** de las series $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y $\sum_{n=1}^\infty b_n$.

Ejemplo 4.7.4.2. Una ***serie de Dirichlet*** es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s},$$

con $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales y s un número real. No toda serie de Dirichlet converge, claro, pero tenemos el siguiente criterio útil:

> *si hay un polinomio $p \in \mathbb{R}[X]$ y un entero N tal que $|a_n| \leq p(n)$ para todo entero n mayor que N, entonces la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n/n^s$ converge absolutamente siempre que $s > \deg p + 1$.*

Para verlo, supongamos que estamos en esa situación, que d es el grado de p, y que p es el polinomio

$c_d X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_1 X + c_0$. Para cada $s > d+1$ tenemos entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\frac{|a_n/n^s|}{1/n^{s-d}} = \left| c_d + \frac{c_{d-1}}{n} + \cdots + \frac{c_1}{n^{d-1}} + \frac{c_0}{n^d} \right|,$$

de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n/n^s|}{1/n^{s-d}} = \lim_{n\to\infty} \left| c_d + \frac{c_{d-1}}{n} + \cdots + \frac{c_1}{n^{d-1}} + \frac{c_0}{n^d} \right| = |c_n|$$

y, como $s - d > 1$, podemos concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ converge absolutamente del hecho de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{s-d}$ lo hace.

El producto de Dirichlet apareció originalmente al describir el producto de series de Dirichlet. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^s$ son dos series de Dirichlet que convergen absolutamente, entonces lo que hicimos arriba nos dice que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \frac{a_d}{d^s} \frac{b_{n/d}}{(n/d)^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} a_d b_{n/d} \right) \frac{1}{n^s}.$$

Vemos así que el producto de dos series de Dirichlet absolutamente convergentes está él mismo dado por una serie de Dirichlet absolutamente convergente: tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

con

$$c_n := \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto tiene incontables aplicaciones en teoría de números. Veamos algunos ejemplos de cómo se establece la conexión entre los dos temas.

La función ζ de Riemann $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ está dada por una serie de Dirichlet absolutamente convergente siempre que $s > 1$, y entonces su cuadrado también: de acuerdo a lo anterior, es

$$\zeta(s)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

con $c_n = \sum_{d|n} 1 \cdot 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por supuesto, el número c_n es precisamente la cantidad de divisores positivos de n, que tradicionalmente escribimos $\sigma_0(n)$, y esto prueba que

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_0(n)}{n^s}$$

cualquiera sea $s \in (1, +\infty)$. Esta observación tiene dos generalizaciones distintas.

- Sea k un número real mayor que 1. Si $s > k+1$, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{s-k}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ convergen absolutamente y es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-k}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d^k \right) \frac{1}{n^s}.$$

  Esto nos dice que, si escribimos $\sigma_k(n)$ a la suma de las potencias k-ésimas de los divisores positivos de n, entonces para todo $s \in (k+1, +\infty)$ se tiene que

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}.$$

- Notemos, en segundo lugar, que para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $\sigma_0(n)$ es el número de pares ordenados de enteros positivos (u, v) tales que $uv = n$. Para cada elección de dos enteros positivos n y k escribamos $f_{n,k}$ al número de k-uplas ordenadas $(u_1, \dots, u_k)$ de enteros positivos tales que $u_1 \cdots u_k = n$. En el Ejercicio 4.7.4.4 proponemos al lector mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $s \in (1, +\infty)$ vale que

$$\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n,k}}{n^s}.$$

Ejercicio 4.7.4.3. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ una serie de Dirichlet.

(a) Muestre que si la sucesión $(|a_1 + \cdots + a_n|)_{n\geq 1}$ está acotada, entonces la serie converge para todo $s \in (0, +\infty)$.

(b) Muestre que si hay una constante positiva C tal que $|a_1 + \cdots + a_n| < C \ln n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces la serie converge cualquiera sea $s \in (0, +\infty)$.

Ejercicio 4.7.4.4. Para cada par de enteros positivos n y k sea $f_{n,k}$ la cantidad de k-uplas ordenadas $(u_1, \dots, u_k)$ de enteros positivos tales que $u_1 \cdots u_k = n$. Muestre que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n,k}}{n^s}.$$

Ejercicio 4.7.4.5. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números con $a_1 \neq 0$.

(a) Muestre que hay exactamente una sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\sum_{d|n} b_d a_{n/d} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1; \\ 0 & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

y que si s es un número tal que las serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^s$ convergen absolutamente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s} = 1.$$

Para hacerlo construya esa sucesión recursivamente poniendo $b_1 \coloneqq 1/a_1$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$ mayor que 1,

$$b_n \coloneqq -\frac{1}{a_1}\sum_{d|n}{}' \, b_d a_{n/d}.$$

Aquí la tilde en $\sum'$ denota que en la suma solo consideramos los divisores *propios* de n. Tabulamos las primeras componentes de esta sucesión en la Figura 4.5, bajo la hipótesis de que $a_1 = 1$..

(b) Muestre que si $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ es la serie que define a la función ζ de Riemann, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es divisible por el cuadrado de un número primo;} \\ (-1)^r & \text{si ese no es el caso y } r \text{ es el número de primos que dividen a } n. \end{cases}$$

Normalmente escribimos $\mu(n)$ en lugar de b_n y la función $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que obtenemos de esta forma es la ***función de Möbius***, por August Ferdinand Möbius, que la introdujo en 1832.

Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s$ converge para todo $s \in (1, +\infty)$, que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{n}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

y que la función μ es multiplicativa, esto es, que siempre que n y m son enteros positivos coprimos vale que $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$.

(c) Pruebe que para todo $s \in (1, +\infty)$ vale que

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{n}\frac{|\mu(n)|}{n^s}.$$

Esta función de Möbius juega un rol importante en teoría de números. Veamos dos ejemplos de esto. Para enunciarlos consideramos la ***función de Mertens*** $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que en cada $x \in \mathbb{R}$ toma el valor

$$M(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor}\mu(x).$$

El célebre Teorema de los Números primos es equivalente al hecho de que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x} = 0,$$

n	b_n	n	b_n
1	1	11	$-a_{11}$
2	$-a_2$	12	$-3a_3a_2^2 + 2a_6a_2 + 2a_3a_4 - a_{12}$
3	$-a_3$	13	$-a_{13}$
4	$a_2^2 - a_4$	14	$2a_2a_7 - a_{14}$
5	$-a_5$	15	$2a_3a_5 - a_{15}$
6	$2a_2a_3 - a_6$	16	$a_2^4 - 3a_4a_2^2 + 2a_8a_2 + a_4^2 - a_{16}$
7	$-a_7$	17	$-a_{17}$
8	$-a_2^3 + 2a_4a_2 - a_8$	18	$-3a_2a_3^2 + 2a_6a_3 + 2a_2a_9 - a_{18}$
9	$a_3^2 - a_9$	19	$-a_{19}$
10	$2a_2a_5 - a_{10}$	20	$-3a_5a_2^2 + 2a_{10}a_2 + 2a_4a_5 - a_{20}$

Figura 4.5. La sucesión construida en el Ejercicio 4.7.4.5, bajo la hipótesis de que $a_1 = 1$.

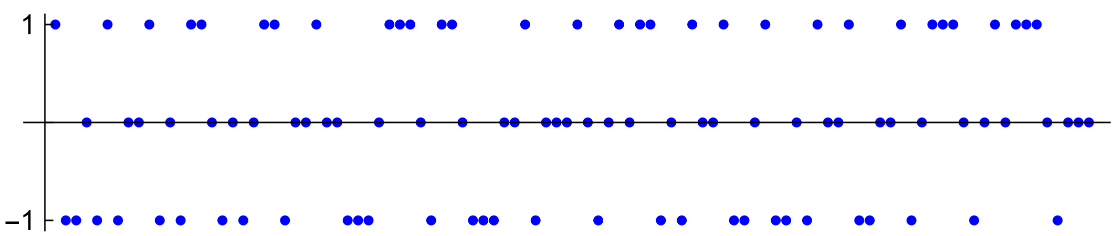


Figura 4.6. La función de Moebius.

Notemos que esta igualdad significa que el promedio de los números $\mu(1), \mu(2), \ldots, \mu(n)$ converge a 0 cuando n crece. Por otro lado, la hipótesis de Riemann es equivalente a la siguiente afirmación:

> *para todo número positivo ε existen constantes positivas positiva C y K tales que $|M(x)| \leq Cx^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ siempre que $x > K$.*

Esto fue probado por John Edensor Littlewood en 1912.

Una serie de Dirichlet puede convergen condicionalmente para algunos valores de s y para otros absolutamente. Un ejemplo famoso de este fenómeno es el siguiente.

Ejemplo 4.7.4.6. Consideremos la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Como, por supuesto, $|(-1)^{n+1}| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el criterio que dimos al principio del Ejemplo 4.7.4.2 nos permite concluir que la serie converge absolutamente siempre que $s > 1$. Por otro lado, gracias al criterio de Leibniz 4.5.5 podemos concluir inmediatamente que la serie de hecho converge para todo $s > 0$ y sabemos del Ejemplo 4.2.3 que lo hace condicionalmente cuando $0 < s < 1$. En cualquier caso, podemos definir una función $\eta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ poniendo para cada número positivo s

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

Esta es la ***función η de Dirichlet***.

Cuando $s > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ converge absolutamente y, por supuesto, también lo hace la «serie» $1 - 2/2^s$, así que el producto $(1 - 2/2^s) \cdot \zeta(s)$ de las dos puede calcularse usando el producto de Dirichlet de las dos series: es inmediato verificar que lo que obtenemos es la igualdad

$$\left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \cdot \zeta(s) = \eta(s).$$

Esta igualdad es válida siempre que $s > 1$, y para esos valores de s tenemos entonces que

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)^{-1} \cdot \eta(s). \tag{4.41}$$

Remarcablemente, el lado derecho de esta igualdad tiene sentido para todo $s \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, mientras que le lado izquierdo solo cuando $s > 1$: podemos usar esta igualdad, entonces, para *definir* el valor de la función ζ sobre el conjunto $(0, 1)$. Esta observación es importante: es el primer paso de la llamada *prolongación analítica de la función* ζ, fundamental en el estudio de esta — no podemos aquí entrar en detalles sobre qué significa esto exactamente.

De todas formas, la igualdad (4.41) tiene un interés mucho más inmediato: como la serie que define a la función η es alternante, conocemos formas de «acelerar» su convergencia, y entonces esa igualdad nos permite calcular aproximaciones a los valores de ζ mucho mejores que las que podríamos obtener usando directamente la serie que define la define.

4.7.5. El teorema de Mertens

Vimos que si dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen absolutamente y A y B son sus sumas, entonces el producto de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right)$$

también converge absolutamente y su suma es AB. Sin la hipótesis de que las series convergen absolutamente no podemos llegar en general a esa conclusión, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7.5.1. Usando el criterio de Leibniz 4.5.5 vemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

converge, y comparando con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)$, que diverge, vemos inmediatamente que no lo hace absolutamente. El producto de Cauchy de esta serie consigo misma es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ que para todo $n \in \mathbb{N}$ tiene término n-ésimo

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \right) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Ahora bien, si $n, k \in \mathbb{N}$ son tales que $0 \leq k \leq n$, tanto $k+1$ como $n-k+1$ son menores o iguales que $n+1$, así que $\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \sqrt{(n+1)^2} = n+1$ y, por lo tanto,

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Claramente, entonces, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ no converge.

Franz Mertens probó en que para que el producto de Cauchy de dos series convergentes converja es suficiente que *uno* de los factores converja absolutamente:

Proposición 4.7.5.2. *El producto de Cauchy de una serie absolutamente convergente y una serie convergente converge al producto de las sumas de los factores.*

Llamamos a este resultado el ***teorema de Mertens***.

Demostración. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ una serie absolutamente convergente y una serie convergente, respectivamente, y sean A y B sus sumas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_i b_{n-i}$, y sean $(A_n)_{n\geq 1}$, $(B_n)_{n\geq 1}$, y $(C_n)_{n\geq 1}$ las sucesiones de sumas parciales de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, respectivamente. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ vale que

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} c_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} a_i b_k = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i (B_{n-i} - B) + \sum_{i=0}^{n} a_n B = \sum_{i=0}^{n} a_i (B_{n-i} - B) + A_n B \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} (B_i - B) + A_n B. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Sea ε un número positivo, y escribamos

$$K := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

que es un número no negativo. Como la sucesión $(B_n)_{n\geq 1}$ converge a B, hay un entero positivo N tal que para todo entero n mayor que N es

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{3(K+1)}. \tag{4.43}$$

Consideremos el número $L \coloneqq \max\{|B_i - B| : 0 \leq i \leq N\}$. Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ converge a 0 y, por lo tanto, hay un entero positivo M tal que para todo entero n vale

$$n \geq M \implies |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3(N+1)L+1}. \tag{4.44}$$

Finalmente, como la sucesión $(A_n)_{n\geq 1}$ converge a A, hay un entero positivo P tal que para todo entero n vale

$$n \geq P \implies |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3(|B|+1)}. \tag{4.45}$$

Pongamos $n_0 \coloneqq \max N + M, P$. Sea n un entero mayor que n_0. De acuerdo a (4.42), es

$$\begin{aligned}
|C_n - AB| &= \left|\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) + (A_n - A)B\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{N} a_{n-i}(B_i - B) + \sum_{i=N+1}^{n} a_{n-i}(B_i - B) + (A_n - A)B\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N}|a_{n-i}||B_i - B| + \sum_{i=N+1}^{n}|a_{n-i}||B_i - B| + |A_n - A||B|. \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

Si $i \in \{0, \ldots, N\}$, entonces $n-i \geq n_0-i \geq (N+M)-N = M$, así que usando las desigualdades (4.44) y (4.43) podemos ver que

$$\sum_{i=0}^{N}|a_{n-i}||B_i - B| < \frac{\varepsilon}{3(N+1)L+1}\sum_{i=0}^{N}|B_i - B| \leq \frac{\varepsilon}{3(N+1)L+1}(N+1)L < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, de (4.43) podemos deducir que

$$\sum_{i=N+1}^{n}|a_{n-i}||B_i - B| < \frac{\varepsilon}{3(K+1)}\sum_{i=N+1}^{n}|a_{n-i}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ya que $\sum_{i=N+1}^{n}|a_{n-i}| \leq \sum_{k=0}^{\infty}|a_k| = K$. Finalmente, de acuerdo a (4.45) tenemos que

$$|A_n - A||B| \leq \frac{\varepsilon|B|}{3(|B|+1)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Volviendo a (4.46), entonces, podemos concluir que

$$|C_n - AB| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vemos con esto que la sucesión $(C_n)_{n\geq 1}$ converge a AB, y esto es precisamente lo que afirma la proposición. □

Es interesante observar que el teorema de Mertens puede extenderse a una caracterización de la convergencia uniforme: J.D. Hill probó en[Hil1939] el siguiente resultado:

> *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Una condición necesaria y suficiente para que cualquiera sea la serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ el producto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i})$ converja es que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converja absolutamente.*

4.8. Series de potencias

Una ***serie de potencias*** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

con $(a_n)_{n\geq 0}$ un sucesión de números y x un número real. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos a a_n el ***coeficiente** n**-ésimo*** de la serie.

La primera observación que hay que hacer sobre la convergencia de una serie de potencias es la siguiente:

Proposición 4.8.1. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias y sea r un número real no nulo.*

(i) Si la serie converge cuando $x = r$, entonces converge absolutamente siempre que $|x| < |r|$.

(ii) Si la serie no converge cuando $x = r$, entonces no converge siempre que $|x| > |r|$.

Demostración. Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge y sea x un número cualquiera tal que $|x| < |r|$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge, la sucesión $(a_n r^n)_{n\geq 0}$ converge a 0 y, en particular, está acotada: sea K un número tal que $|a_n r^n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \cdot \left|\frac{x}{r}\right|^n \leq K\left|\frac{x}{r}\right|^n$$

cualquiera sea n en $\mathbb{N}$ y entonces, escribiendo $q := |x/r|$, la serie de términos no negativos $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ está acotada término a término por la serie $\sum_{n=0}^{\infty} K q^n$: esta converge porque $0 \leq q < 1$, así que aquella también y, por lo tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente. Esto prueba la primera afirmación de la proposición. La segunda afirmación, pro su parte, es consecuencia inmediata de la contrarrecíproca de la primera. □

Esta proposición nos lleva a hacer la siguiente definición:

Definición 4.8.2. El ***radio de convergencia*** de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es el supremo del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$.

Notemos que el conjunto cuyo supremo estamos tomando no es vacío, ya que contiene a 0. Se sigue de esto que el radio de convergencia es un número no negativo si ese conjunto es acotado superiormente, y es $+\infty$ si no lo es.

Con la noción de radio de convergencia a nuestra disposición podemos enunciar el resultado de la Proposición 4.8.1 de la siguiente manera:

Corolario 4.8.3. *Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de radio de convergencia R converge absolutamente cuando $x = 0$ o $|x| < R$ y no converge cuando $|x| > R$.*

Notemos que este corolario no dice nada sobre la convergencia de la serie cuando $|x| = R$.

Demostración. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias y sea R su radio de convergencia. Por supuesto la serie converge si $x = 0$. Si x es un número real tal que $|x| < R$, entonces en vista de la definición sabemos que hay un número y tal que $|x| < y$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ converge. De acuerdo a la Proposición 4.8.1, entonces, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente.

Sea, por otro lado, x un número tal que $|x| > R$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergiera, esa misma proposición nos diría que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con $z := (|x| + R)/2$ también converge porque $|z| < |x|$, y esto es imposible porque $|z| > R$. Esto prueba la segunda afirmación del corolario. □

Nuestro siguiente resultad, conocido como el ***teorema de Cauchy–Hadamard***, por Augustin-Louis Cauchy [Cau1821] y Jacques Salomon Hadamard [Had1888], nos permite determinar el radio de convergencia de una serie de potencias.

Proposición 4.8.4. *El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es*

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Aquí hacemos la convención de que R es $+\infty$ cuando el límite superior es 0 y que R es 0 cuando el límite superior es $+\infty$.

Demostración. Escribamos L al valor del límite superior que aparece en el enunciado.

Supongamos primero que $L = +\infty$. Si x es un número no nulo cualquiera, esto nos dice que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > 1/|x|\}$ es infinito y esto implica inmediatamente que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene infinitos términos cuyo valor absoluto es mayor que 1 y, por lo tanto, no converge. Vemos así que cuando $L = +\infty$ la serie no converge para ningún valor no nulo de x y, por lo tanto, que su radio de convergencia es 0.

Supongamos ahora que $L = 0$ y sea x un número real arbitrario. Como

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \cdot |x| = 0,$$

la Proposición 4.3.10 nos permite concluir que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente. Vemos así que cuando $L = 0$ la serie de la proposición converge cualquiera sea x y, en consecuencia, que su radio de convergencia es $+\infty$.

Finalmente, supongamos que L es un número real positivo y sea x un número real no nulo tal que $|x| < 1/L$. Sea $y := (|x| + 1/L)/2$. Es $|x| < y < 1/L$, así que $1/y > L$ y, por lo tanto, hay un entero positivo N tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq N \implies \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{y}.$$

Esto implica que si n es un entero mayor que N entonces

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < \frac{|x|}{y} < 1,$$

y $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq |x|/y < 1$: gracias a la Proposición 4.3.10 podemos concluir de esto que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente. Esto prueba que la serie converge siempre que x pertenece a $(-1/L, 1/L)$.

Sea, por otro lado, x un número tal que $|x| > 1/L$. Como $1/|x| < L$, la forma en que elegimos L implica el conjunto $\{n \in \mathbb{N}_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > 1/|x|\}$ es infinito y que para cada elemento n de él tenemos que $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, de manera que $|a_n x^n| > 1$. Vemos así que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no converge. Juntando todo, esto prueba que $1/L$ es precisamente el radio de convergencia de la serie de potencias, que es lo que queremos. □

Muchas veces el límite superior del teorema de Cauchy–Hadamard es díficil de calcular pero el siguiente resultado se aplica:

Corolario 4.8.5. *El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cuyos coeficientes son casi todos no nulos es*

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

si el límite que aparece aquí existe.

Cuando el límite es 0 o $+\infty$ interpretamos que el cociente del enunciado tiene valor $+\infty$ o 0, respectivamente.

Demostración. El Lema 4.3.11 implica que si el límite $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$ existe, entonces también existe el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ y ambos tienen el mismo valor. El corolario es entonces una consecuencia inmediata de la Proposición 4.8.4. □

El producto de Cauchy de series de potencias es él mismo una serie de potencias:

Proposición 4.8.6. *Sea R un número positivo y sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos series de potencias con radio de convergencia mayor o igual que R, y para cada $n \in \mathbb{N}_=$ pongamos $c_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. El radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es al menos R y para todo $x \in (-R, R)$ se tiene que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Demostración. □

Daremos un ejemplo importante de uso del producto de Cauchy más abajo. Para ello necesitamos un resultado auxiliar. Recordemos que en el Ejemplo 4.7.3.1 introdujimos, para cada $s \in \mathbb{N}_0$, el polinomio

$$\binom{X}{s} \coloneqq \frac{1}{s!} X(X-1)(X-2)\cdots(X-s+1) \in \mathbb{R}[X].,$$

Lema 4.8.7. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ es*

$$\binom{X+Y}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{X}{i}\binom{Y}{n-i}.$$

Esta igualdad de dos polinomios en variables X e Y es la ***identidad de Chu–Vandermonde***, por Zhū Shìjié (朱世杰), que la dio a conocer en 1303 en su libro *El espejo de jade de los cuatro elementos*, y Alexandre-Théophile Vandermonde, que la redescubrió en 1772.

Demostración. Fijemos un entero no negativo n. Si α y β son dos enteros tales que $\alpha \geq n$ y $\beta \geq n$, entonces la fórmula de Newton para las potencias de un binomio nos dice que

$$\sum_{i=0}^{\alpha+\beta} \binom{\alpha+\beta}{i} X^i = (1+X)^{\alpha+\beta} = (1+X)^{\alpha}(1+X)^{\beta} = \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} X^i \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} X^i,$$

y considerando el coeficiente de X^n en el primero y en el último de los miembros de esta cadena de igualdades vemos que

$$\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{n-i} \text{ siempre que } \alpha, \beta \text{ y } n \text{ son enteros tales que } \alpha \geq n \text{ y } \beta \geq n.$$

Esto nos dice que el polinomio

$$\binom{X+\beta}{n} - \sum_{i=0}^{n} \binom{X}{i}\binom{\beta}{n-i} \in \mathbb{R}[X] \tag{4.47}$$

se anula sobre todos los enteros mayores que n y, por lo tanto, que es idénticamente nulo. Sea ahora Y otra variable y consideremos el polimio

$$\binom{X+Y}{n} - \sum_{i=0}^{n} \binom{X}{i}\binom{Y}{n-i} \in \mathbb{R}[X,Y].$$

Claramente hay un entero d y polinomios $p_0(Y), \dots, p_d(Y) \in \mathbb{R}[Y]$ tales que

$$\binom{X+Y}{n} - \sum_{i=0}^{n} \binom{X}{i}\binom{Y}{n-i} = p_0(Y) + p_1(Y)X + p_2(Y)X^2 + \cdots + p_d(Y)X^d. \tag{4.48}$$

Como el polinomio de (4.47) es nulo, sabemos que para todo entero β mayor que n es

$$0 = \binom{X+\beta}{n} - \sum_{i=0}^{n} \binom{X}{i}\binom{\beta}{n-i} = p_0(\beta) + p_1(\beta)X + p_2(\beta)X^2 + \cdots + p_d(\beta)X^d,$$

y esto implica que $p_0(\beta) = p_2(\beta) = \cdots = p_d(\beta) = 0$: los polinomios $p_0, p_1, \dots, p_d$ deben ser, por lo tanto, todos nulos. En vista de (4.48), podemos concluir de esto que

$$\binom{X+Y}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{X}{i}\binom{Y}{n-i},$$

que es precisamente la afirmación del lema. □

Usando la identidad de Chu–Vandermonde podemos ahora continuar con el proceso de extender la validez de la fórmula de Newton para las potencias de un binomio.

Ejemplo 4.8.8. Sea s un número real y consideremos la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n.$$

Si s es un elemento de $\mathbb{N}_0$, entonces es $\binom{s}{n}$ para todo entero n mayor o igual que s, así que en ese caso la serie tiene un número finito de términos no nulos y su radio de convergencia es $+\infty$.

Supongamos ahora que s no pertenece a $\mathbb{N}_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ el coeficiente $\binom{s}{n}$ es igual a

$$\frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \ldots \cdot (s-(n-1))}{n!}$$

y, como s no es un elemento de $\mathbb{N}_0$, este coeficiente no es nulo. Más aún, esto implica que

$$\frac{\left|\binom{s}{n+1}\right|}{\left|\binom{s}{n}\right|} = \frac{\dfrac{|s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \ldots \cdot (s-n)|}{(n+1)!}}{\dfrac{|s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \ldots \cdot (s-(n-1))|}{n!}} = \frac{|s-n|}{n+1},$$

de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{s}{n+1}\right|}{\left|\binom{s}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|s-n|}{n+1} = 1$$

y, por lo tanto, el radio de convergencia de la serie (4.48) es 1.

Escribamos $f_s : (-1,1) \to \mathbb{R}$ a la función que en cada $x \in (-1,1)$ tiene por valor a la suma de esa serie. Afirmamos que

$$\textit{para todo } k \in \mathbb{N} \textit{ y todo } x \in (-1,1) \textit{ vale que } f_s(x)^k = f_{ks}. \tag{4.49}$$

Esto es evidente cuando k es 1 y, por otro lado, si es cierto cuando k es igual a un entero positivo l, entonces calculando el producto de Cauchy vemos que para todo $x \in (-1,1)$ es

$$f_s(k)^{l+1} = f_s(x)^l f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{ls}{n} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{ls}{i} \binom{s}{n-i} \right] x^n$$

y esta última serie, de acuerdo a la identidad de Chu–Vandermonde, es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{(l+1)s}{n} x^n.$$

Notemos que, en particular, nuestra afirmación (4.49) implica que si q es un entero positivo para cada $x \in (-1,1)$ es

$$f_{1/q}(x)^q = f_1(x) = 1 + x,$$

de manera que $f_{1/q}(x)$ es una raíz q-ésima de $1 + x$. Más aún, la afirmación (4.49) nos dice que $f_{1/q}(x) = f_{1/2q}(x)^2$, así que el número $f_{1/q}(x)$ es un cuadrado y, por lo tanto, no negativo. Podemos concluir entonces que $f_{1/q}(x)$ es la raíz q-ésima positiva de $1+x$, que es la que escribimos $(1+x)^{1/q}$. Usando otra vez (4.49) llegamos finalmente al siguiente resultado:

$$\textit{si } r \textit{ es un número racional positivo, entonces } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = (1+x)^r \textit{ para todo } x \in (-1,1).$$

En efecto, si r es un número racional positivo, hay enteros positivos p y q tales que $r = p/q$, y sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p/q}{n} x^n = f_{1/q}(x)^p = ((1+x)^{1/q})^p = (1+x)^r$. Dejamos a cargo del lector mostrar en el Ejercicio 4.8.9 que, de hecho, lo mismo es cierto si r es un número racional negativo.

Ejercicio 4.8.9. Muestre que si r es un número racional negativo entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = (1+x)^r$ para todo $x \in (-1,1)$.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias, sea R su radio de convergencia, y supongamos que $R > 0$. Podemos entonces definir una función $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ poniendo, para cada $x \in (-R, R)$,

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Un resultado fundamental es que esta función determina completamente a la serie. Llamamos a esto el ***principio de indentidad*** para series de potencias.

Proposición 4.8.10. *Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ dos series de potencias, sean R y S sus radios de convergencia, y supongamos que $R > 0$ y $S > 0$, de manera que podemos definir funciones*

$$f : x \in (-R, R) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}, \qquad g : x \in (-S, S) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}.$$

Si existe un numero positivo ε tal que $\varepsilon < R$, $\varepsilon < S$ y para cada $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ es $f(x) = g(x)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n = b_n$.

Demostración. Sea ε un número positivo que satisface esas condiciones, y pongamos $c_n \coloneqq a_n - b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente cualquiera sea $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, ya que las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ lo hacen, y su suma es $f(x) - g(x) = 0$. Supongamos por un momento que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}_0 : c_n \neq 0\}$ no es vacío, y sea m su menor elemento.

Notemos que la serie $\sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n| \varepsilon^n$ converge, y escribamos K a su suma. Sea x un elemento no nulo cualquiera de $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Como $c_i = 0$ si $0 \leq i < m$, tenemos que $\sum_{n=m}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$, así que

$$-c_m x^m = \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n x^n = \frac{x^{m+1}}{\varepsilon^{m+1}} \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n x^{n-m-1} \varepsilon^{m+1}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|c_m| &= \frac{|x|}{\varepsilon^m + 1} \cdot \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n x^{n-m-1} \varepsilon^{m+1} \right| \\
&\leq \frac{|x|}{\varepsilon^m + 1} \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^{n-m-1} \varepsilon^{m+1} \\
&\leq \frac{|x|}{\varepsilon^m + 1} \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n| \varepsilon^n \\
&\leq \frac{|x|}{\varepsilon^{m+1}} (K + 1).
\end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\frac{\varepsilon^{m+1} |c_m|}{K} \leq |x| \qquad \text{cualquiera sea } x \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

lo que es absurdo, ya que $|c_m| \neq 0$. Vemos así que debe ser $c_n = 0$ y, por lo tanto, $a_n = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, como afirma la proposición. □

Esta proposición tiene incontables aplicaciones. Demos un par de ellas.

Ejemplo 4.8.11. Consideremos la sucesión $(F_n)_{n\geq 1}$ que tiene $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y, para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Se trata, claro, de la sucesión de los ***números de Fibonacci***. Observemos que

$$\textit{para todo } n \in \mathbb{N}_0 \textit{ es } 0 \leq F_n \leq 2^n. \tag{4.50}$$

Esto es claro cuando n es 0 o 1. Por otro lado, si n es un elemento cualquiera de $\mathbb{N}_0$ tal que $0 \leq F_n \leq 2^n$ y $0 \leq F_{n+1} \leq 2^{n+1}$, entonces $0 \leq F_{n+1} = F_{n+1} + F_n \leq 2^{n+1} + 2^n \leq 2^{n+2}$.

Se sigue inmediatamente de (4.50) y del teorema de Cauchy–Hadamard 4.8.4 que el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

es mayor o igual que 1/2, ya que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Sea I el intervalo $(-1/2, 1/2)$. Podemos entonces definir una función $f : I \to \mathbb{R}$ poniendo $f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ para cada $x \in I$. Notemos que si x pertenece a I es

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= x + x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x f(x) + x^2 f(x).
\end{aligned}$$

Vemos así que para todo $x \in I$ es

$$(x^2 + x - 1) \cdot f(x) = -x.$$

Es $x^2 + x - 1 = (x + \alpha)(x + \beta)$ con $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ y $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$: como ninguna de las dos raíces de este polinomio pertenece a I, podemos concluir que

$$f(x) = -\frac{x}{x^2 + x - 1} \qquad \text{para todo } x \in (-1/2, 1/2). \tag{4.51}$$

Calculando podemos ver que

$$-\frac{x}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\beta x}$$

Si u es un número no nulo y $|x| < 1/|u|$, es

$$\frac{1}{1-ux} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n x^n.$$

Como $1/2 < \text{mín}\{1/|\alpha|, 1/|\beta|\}$, esto implica que para todo $x \in I$ vale que

$$-\frac{x}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n.$$

Juntando todo, podemos concluir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n$$

cualquiera sea x en I y, de acuerdo a la Proposición 4.8.10, que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_0$. Esta es la llamada ***fórmula de Binet*** para los números de Fibonacci, por Jacques Philippe Marie Binet.

La consideración de la función f no solamente nos permite encontrar una fórmula explícita para los números de Fibonacci sino que haciendo manipulaciones con ella podemos obtener muchas propiedades de estos números. Por ejemplo, mostremos que

$$\textit{para todo } n \geq 0 \textit{ es } F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{4.52}$$

Para ello, notemos que para cada elemento no nulo x del intervalo $(-1/2, 1/2)$ es

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (F_0 + F_1 + \cdots + F_n) x^n$$

y

$$\frac{f(x)-x}{x^2} - \frac{1}{1-x} = x^{-2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (F_{n+2} - 1) x^n.$$

Para ver que vale (4.52) es entonces suficiente, de acuerdo principio de indentidad, con mostrar que

$$\frac{f(x)}{1-x} = \frac{f(x)-x}{x^2} - \frac{1}{1-x},$$

y esto sigue de un calculo directo usando la igualdad (4.51).

Capítulo 5
La topología euclídea

5.1. La métrica euclídea

En esta sección fijamos un entero positivo d.

Definición 5.1.1. La ***norma euclídea*** es la función

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

que en cada punto $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$ toma el valor

$$\|x\| \coloneqq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}.$$

Notemos que cualquiera sea el punto $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$ la suma $\sum_{i=1}^{d} x_i^2$ es un número no negativo y que, por lo tanto, tiene exactamente una raíz cuadrada positiva: es a esa raíz a las que nos referimos en esta definición.

Ejemplo 5.1.2. Si $n = 1$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Vemos así que la noción de norma euclídea de un vector es una generalización de la de valor absoluto de un número real.

En la Proposición 5.1.4 describiremos las propiedades fundamentales de esta función norma. Para probar una de ellas haremos uso de la desigualdad del siguiente lema, conocida como la

desigualdad de Cauchy–Bunyakovsky–Schwartz, por Augustin-Louis Cauchy, Viktor Bunyakovsky y Hermann Schwarz.

Lema 5.1.3. *Si $x = (x_1, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, \dots, y_d)$ son dos elementos de $\mathbb{R}^d$, entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^{d} x_i y_i\right| \leq \|x\|\|y\|.$$

Demostración. Para todo $t \in \mathbb{R}$ es

$$0 \leq \sum_{i=1}^{\delta}(tx_i + y_i)^2 \leq t^2\sum_{i=1}^{d} x_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{d} x_i y_i + \sum_{i=1}^{d} y_i^2.$$

Si ponemos $u \coloneqq \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$, esto nos dice que el polinomio $p(X) \coloneqq \|x\|^2 X^2 + 2uX + \|y\|^2 \in \mathbb{R}[X]$ toma valores no negativos en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, que su discriminante no es positivo, esto es, que

$$4u^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0.$$

Esto implica que $|u| = \sqrt{u^2} \leq \|x\| \cdot \|y\|$, y esta es la desigualdad que aparece en el enunciado del lema. □

Podemos ahora dar las propiedades fundamentales de la norma euclídea.

Proposición 5.1.4.

(*i*) *Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ es $\|x\| \geq 0$ y vale $\|x\| = 0 \iff x = 0$.*

(*ii*) *Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.*

(*iii*) *Siempre que x e y son elementos de $\mathbb{R}^d$ se tiene que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

La desigualdad de la tercera parte de esta proposición es la ***desigualdad triangular***.

Demostración. (*i*) Sea $x = (x_1, \dots, x_d)$ un elemento de $\mathbb{R}^d$. Es $\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$, y esta norma es claramente no negativo, y es nula exactamente cuando $x_1^2 + \cdots + x_d^2$ lo es: como esta suma tiene sus d términos no negativos, esto ocurre si y solamente si cada uno de esos términos se anula, esto es, si y solamente si $x = 0$.

(*ii*) Si $x = (x_1, \dots, x_d)$ es un elemento de $\mathbb{R}^d$ y λ uno de $\mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$ y, por lo tanto,

$$\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \cdots + (\lambda x_d)^2} = \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + \cdots + x_d^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

(*iii*) Sean $x = (x_1, \ldots, x_d)$ e $y = (y_1, \ldots, y_d)$ elementos de $\mathbb{R}^d$. De acuerdo al lema, es

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{\delta}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{d} x_i y_i + \sum_{i=1}^{d} y_i^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{d} x_i y_i\right| + \|y^2\| \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y^2\| = \big(\|x\|+\|y\|\big)^2\end{aligned}$$

y tomando raíces cuadradas vemos que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, como afirma la proposición. □

Usaremos la siguiente observación muchas, muchas veces:

Lema 5.1.5. *Sean $x = (x_1, \ldots, x_d)$ e $y = (y_1, \ldots, y_d)$ dos puntos de $\mathbb{R}^d$. Si i es un elemento de $\{1, \ldots, d\}$, entonces $|x_i - y_i| \leq \|x - y\|$.*

Demostración. En efecto, cualquiera sea i en $\{1, \ldots, d\}$ tenemos que

$$|x_i - y_i| = \sqrt{|x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|^2} = \|x - y\|.$$

□

Usando la norma euclídea podemos definir una noción extremadamente útil:

Ejercicio 5.1.6. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ es ***acotado*** si existe un número K tal que $\|x\| \leq K$ para todo $x \in X$.

(a) Muestre que si k es un entero positivo y $X_1, \ldots, X_k$ son subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^d$, entonces la unión $X_1 \cup \cdots \cup X_k$ también es un subconjunto acotado.

(b) Muestre que si X e Y son subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^d$, entonces el conjunto

$$X + Y \coloneqq \{x + y : x \in X, y \in Y\},$$

al que llamamos la ***suma de Minkowski*** de X e Y, también es un conjunto acotado.

(c) Muestre que si X es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^d$ y T es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, entonces

$$T \cdot X \coloneqq \{tx : t \in T, x \in X\}$$

es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^d$.

Si x es un elemento de $\mathbb{R}^d$, normalmente interpretamos al número $\|x\|$ como una medida del «tamaño» de x. Con esto en mente, podemos introducir una segunda función para medir distancias entre los elementos de $\mathbb{R}^d$.

Definición 5.1.7. La ***distancia euclídea*** es la función $\delta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(x, y) = \|x - y\|$ para todo par de elementos x e y de $\mathbb{R}^d$.

Definimos la distancia euclídea usando la norma euclídea, y esto tiene como consecuencia que las propiedades básicas de esta se ven reflejadas en propiedades de aquella:

Proposición 5.1.8. *Sean x, y y z tres elementos de $\mathbb{R}^d$.*

(*i*) *Es $\delta(x, y) \geq 0$ y, más aún, $\delta(x, y) = 0 \iff x = y$.*

(*ii*) *Es $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.*

(*iii*) *Es $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.*

Demostración. Es $\delta(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ y $\delta(x, y) = \|x - y\| = 0$ exactamente cuando $x - y = 0$, esto es, cuando $x = y$. Esto prueba la primera afirmación. Para probar la segunda, es suficiente calcular que

$$\delta(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \delta(y, x).$$

Finalmente, la tercera afirmación es consecuencia de que

$$\delta(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \delta(x, y) + \delta(y, z). \qquad \square$$

5.2. Conjuntos abiertos

Queremos ahora centrar nuestra atención en un tipo particular de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Para definirlos usaremos la siguiente definición.

Definición 5.2.1. Si x es un elemento de $\mathbb{R}^d$ y r es un número positivo, entonces la ***bola abierta*** centrada en x de radio r es el conjunto $B_r(x) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^d : \delta(x, y) < r\}$.

Veamos qué son estos conjuntos cuando d es pequeño.

Ejemplo 5.2.2. Supongamos primero que $d = 1$ y sean x un elemento de $\mathbb{R}$ y r un número positivo. Un número $y \in \mathbb{R}$ pertenece a la bola $B_r(x)$ exactamente cuando $\delta(x, y) = \|x - y\| = |x - y| < r$, esto es, cuando $x - r < y < z + r$: esto nos dice que la bola $B_r(x)$ no es otra cosa que el intervalo abierto $(x - r, x + r)$ centrado en x de longitud $2r$.

Supongamos ahora que $d = 2$, sea $x = (x_1, x_2)$ un elemento de $\mathbb{R}^2$ y sea r un número positivo.

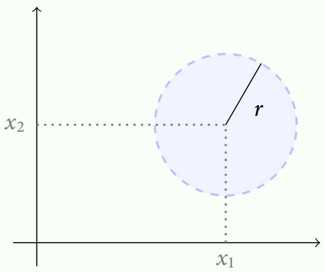
Un punto $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ pertenece entonces a la bola $B_r(x)$ si y solamente si

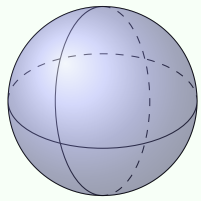
$$\delta(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < r,$$

y esto ocurre si y solamente se

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2.$$

El lector no debería tener dificultades en convencerse de que esto nos dice que la bola $B_r(x)$ son los puntos del interior de la circunferencia de radio r centrada en el punto x.





De manera similar, cuando $d = 3$ la bola abierta $B_r(x)$ es el interior de la esfera de radio r centrada en x.

Ejercicio 5.2.3. Sea x un punto de $\mathbb{R}^d$. Muestre que la intersección y la unión de dos bolas abiertas centradas en x son bolas abiertas centradas en x, y que si r y s son dos números positivos, entonces

$$r < s \iff B_r(x) \subseteq B_s(x).$$

Ejercicio 5.2.4. Pruebe que un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ es acotado si y solamente si existe un punto x de $\mathbb{R}^d$ y un número positivo r tal que $X \subseteq B_r(x)$, y que en ese caso, de hecho, para todo punto y de $\mathbb{R}^d$ existe un número positivo s tal que $X \subseteq B_s(y)$.

Usando bolas abiertas podemos describir la clase de conjuntos que nos interesan:

Definición 5.2.5. Un subconjunto U de $\mathbb{R}^d$ es ***abierto*** si para todo elemento x de U hay un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq U$.

El siguiente lema da un ejemplo básico de conjunto abierto:

Lema 5.2.6. *Sea x un elemento de $\mathbb{R}^d$ y sea r un número positivo. La bola abierta $B_r(x)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea y un elemento de $B_r(x)$, de manera que $\delta(x,y) < r$. Esto implica que el número $s \coloneqq r - \delta(x,y)$ es positivo y que, por lo tanto, podemos considerar la bola $B_s(y)$. Si z es un punto de $B_s(y)$, entonces

$$\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z) < \delta(x,y) + s = \delta(x,y) + r - \delta(x,y) = r,$$

y esto nos dice que z pertenece a $B_r(x)$. Vemos así que $B_s(y) \subseteq B_r(x)$, y esto prueba que el conjunto $B_r(x)$ es abierto, como queremos. □

Así, el intervalo $(-1,1)$ es un conjunto abierto, ya que coincide con la bola abierta $B_1(0)$. De hecho, cualquier intervalo abierto no vacío (a,b) es abierto: se trata de la bola abierta centrada en $(b+a)/2$ de radio $(b-a)/2$, como es fácil verificar.

Antes de seguir, demos ejemplos que muestren que no todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es abierto.

Ejemplo 5.2.7. Sea $x = (x_1, \dots, x_d)$ un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^d$ y mostremos que el conjunto $\{x\}$ no es abierto. En efecto, si lo fuera habría un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq \{x\}$. Ahora bien, el punto, $y = (x_1 + r/2, x_2, \dots, x_d)$ está a distancia $r/2$ de x, así que en ese caso tendríamos que $y \in \{x\}$: esto es claramente absurdo.

Ejemplo 5.2.8. Supongamos por un momento que el conjunto $X \coloneqq [0,1]$ es abierto, de manera que, en particular, hay un número positivo r tal que $(-r,r) = B_r(0) \subseteq [0,1]$: esto es absurdo, ya que el número $-r/2$ pertenece a $(-r,r)$ y no a $[0,1]$. Vemos así que $[0,1]$ no es abierto.

Ejercicio 5.2.9. Pruebe que cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$ las semirrectas abiertas $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

Una forma de entender la Definición 5.2.5 es la siguiente:

> *un subconjunto U de $\mathbb{R}^d$ es abierto si y solamente si para cada punto x de U todo punto suficientemente cercano de x también pertenece a U.*

¿Qué queremos decir con esto? Que siempre que x es un elemento de U existe un número positivo r tal que todo punto y de $\mathbb{R}^d$ que está a una distancia menor que r también está en U: esto es simplemente una reescritura de la definición. Podemos dar a esto una forma alternativa:

Proposición 5.2.10. *Un subconjunto propio U de $\mathbb{R}^d$ es abierto si para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que*

$$\inf\{\delta(x,y) : y \in \mathbb{R}^d \setminus U\} > 0.$$

El conjunto $\{\delta(x,y) : y \in \mathbb{R}^d \setminus U\}$ que aparece aquí es de las distancias de x a todos los puntos del complemento de U: como U es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^d$, este conjunto no es vacío, y está acotado inferiormente simplemente porque la distancia euclídea toma valores no negativos. Tiene sentido entonces considerar el ínfimo que aparece en el enunciado. Podemos interpretar que esta proposición nos dice que

> *un subconjunto no vacío U de $\mathbb{R}^d$ es abierto si todos sus puntos están* alejados *del complemento $\mathbb{R}^d \smallsetminus U$.*

Demostración. Sea U un subconjunto propio de $\mathbb{R}^d$. Supongamos primero que el conjunto U es abierto y sea x un elemento de U, de manera que hay un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq U$. Si y es un elemento de $\mathbb{R}^d \smallsetminus U$, en particular es $y \notin B_r(x)$ y, por lo tanto, $\delta(x,y) > r$: esto nos dice que el número r es una cota inferior para el conjunto $\{\delta(x,y) : y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus U\}$ y, en consecuencia, que el ínfimo de este conjunto es positivo. Esto demuestra que la condición que da la proposición es necesaria para que el conjunto U sea abierto.

Probemos que también es suficiente. Supongamos que el conjunto U satisface esa condición y sea x un elemento de U. La hipótesis nos dice entonces que el número

$$r \coloneqq \text{ínf}\{\delta(x,y) : y \in \mathbb{R}^d \smallsetminus U\}$$

es positivo, así que podemos considerar la bola abierta $B_{r/2}(x)$. Si z es un elemento de esta bola, entonces $\delta(x,z) < r/2 < r$: como r una cota inferior del conjunto $\text{ínf}\{\delta(x,y) : y \in \mathbb{R}^d \smallsetminus U\}$ y $\delta(x,z)$ es estrictamente menor que r, este número $\delta(x,z)$ no pertenece a ese conjunto, de manera que z no pertenece a $\mathbb{R}^d \smallsetminus U$ y, en consecuencia, pertenece a U. Esto prueba que $B_{r/2}(x) \subseteq U$ y, en definitiva, que U es abierto, como queremos. □

La clase de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ tiene ciertas propiedades que resultan ser fundamentales:

Proposición 5.2.11.

(*i*) *Los subconjuntos $\varnothing$ y $\mathbb{R}^d$ de $\mathbb{R}^d$ son abiertos.*

(*ii*) *La intersección de una familia finita y no vacía de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ es un conjunto abierto.*

(*iii*) *La unión de una familia cualquiera de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Que $\varnothing$ y $\mathbb{R}^d$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$, como se afirma en (*i*), es una consecuencia inmediata de la Definición 5.2.5.

Sea n un entero positivo, sean $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$, y consideremos la intersección $U \coloneqq U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Sea x un elemento de U. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ es $x \in U \subseteq U_i$ y, como U_i es abierto, hay un número positivo r_i tal que $B_{r_i}(x) \subseteq U_i$. El conjunto $\{r_1, \ldots, r_n\}$ es finito y sus elementos son positivos, así que el mínimo de ese conjunto, al que escribimos r, es también positivo. Si $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $B_r(x) \subseteq B_{r_i}(x) \subseteq U$, ya que $r \leq r_i$, y esto implica que, de hecho, $B_r(x) \subseteq U$. Vemos así que el conjunto U es abierto. Esto prueba la afirmación (*ii*).

Finalmente, sea $\mathscr{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ y sea U su unión. Si x es un elemento de U, entonces hay un elemento V de $\mathscr{U}$ tal que $x \in V$ y, como V es abierto, un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq U \subseteq V$: vemos así que el conjunto V es abierto, y esto es lo que afirma la tercera parte de la proposición. □

Estamos por fin en posición de explicar el significado del título de este capítulo.

Definición 5.2.12. La ***topología euclídea*** es el conjunto τ de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$.

La Proposición 5.2.11 nos dice que este conjunto τ contiene a $\varnothing$ y a $\mathbb{R}^d$, y que es cerrado por intersecciones finitas y uniones arbitrarias: la conjunción de estas propiedades es lo que caracteriza a lo que se llama una ***topología***. La única topología que nos interesa aquí es la euclídea, así que no entraremos en más detalles sobre esto.

Como dijimos, la unión de una cantidad arbitraria de conjuntos abiertos es abierta, pero su intersección en general no lo es, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.13. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $U_k \coloneqq (-1/k, 1/k)$, que es un abierto de $\mathbb{R}$, y consideremos la intersección $U \coloneqq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$. Como claramente $0 \in U_k$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{0\} \subseteq U$.

Mostremos que, de hecho, vale aquí la igualdad y que, por lo tanto, esta intersección U no es un abierto de $\mathbb{R}$. Sea x un elemento de U. Si $k \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que $x \in U \subseteq U_k = (-1/k, 1/k)$, así que $|x| < 1/k$. Así, tenemos que

$$0 \leq |x| < \frac{1}{k} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

y esto implica que $|x| = 0$, esto es, que $x = 0$. Hemos probado que $U \subseteq \{0\}$ y, en consecuencia, lo que queríamos.

Las bolas abiertas son abiertas, y acabamos de probar que la clase de los subconjuntos abiertos es cerrada por uniones arbitrarias, así que toda unión de bolas es un subconjuntos abierto. Esto prueba la mitad del siguiente corolario.

Corolario 5.2.14. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es abierto si y solamente si es la unión de una familia de bolas abiertas.*

De hecho, mostraremos que un conjunto abierto es la unión de la familia de todas bolas abiertas que contiene. En el Ejercicio 5.7.10 daremos una mejora del resultado de este corolario.

Demostración. Nos queda probar que todo abierto es la unión de una familia de bolas abiertas. Sea para ello U un abierto de $\mathbb{R}^d$, sea $\mathscr{U}$ el conjunto de todas las bolas abiertas de $\mathbb{R}^d$ que están contenidas en U, y escribamos U' a la unión de todas ellas. Bastará que probemos que $U = U'$.

Todo elemento de $\mathscr{U}$ está contenido en U, así que ciertamente la unión U' de los elementos de $\mathscr{U}$ está contenida en U: tenemos así que $U' \subseteq U$. Sea, por otro lado, x un elemento cualquiera de U. Como U es abierto, existe entonces un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq U$: en particular, la bola $B_r(x)$ es un elemento del conjunto $\mathscr{U}$ y, por lo tanto, está contenida en su unión: tenemos entonces que $x \in B_r(x) \subseteq U'$. Esto prueba que $U \subseteq U'$. □

Como vimos, no todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es abierto. Podemos, de todas formas, «aproximar» un subconjunto cualquiera por otro que sea abierto. Para precisar esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 5.2.15. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$.

- Un elemento x de $\mathbb{R}^d$ es ***interior*** a X si hay un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq X$.
- El ***interior*** de X es el conjunto X° de los puntos de $\mathbb{R}^d$ que son interiores a X.

Notemos que es evidente que un punto interior a X pertenece a X y que, por lo tanto, $X^\circ \subseteq X$. Es fácil ver cuando vale aquí la igualdad:

Proposición 5.2.16. *Un conjunto es abierto si y solamente si coincide con su interior.*

Demostración. En efecto, de acuerdo a la Definición 5.2.5 un conjunto es abierto exactamente cuando todos sus puntos son interiores a él. □

Nuestro siguiente resultado nos dice que el interior de un conjunto es una aproximación abierta a este en un sentido bien preciso:

Proposición 5.2.17. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. El interior X° de X es abierto y coincide con la unión de todos los subconjuntos abiertos de X. En particular, el interior X° es el mayor abierto contenido en X.*

Notemos que X efectivamente contiene conjuntos abierto — ciertamente contiene a $\varnothing$ — así que tiene sentido considerar la unión de todos ellos.

Demostración. Bastará que mostremos que X° coincide con la unión de todos los subconjuntos abiertos de X, ya que sabemos que esta unión es un conjunto abierto. Escribamos U a esa unión.

Si x es un elemento de X°, de manera que es interior a X y, por lo tanto, existe un número positivo r tal que $B_r(x)$ está contenido en X, entonces $B_r(x)$ es un subconjunto abierto de X y tenemos que $x \in B_r(x) \subseteq U$. Esto prueba que $X^\circ \subseteq U$.

Sea ahora x un elemento de U, de manera que hay un subconjunto V de X que es abierto tal que $x \in V$. Como V es abierto, hay además un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq V$ y, por lo tanto, tenemos que $B_r(x) \subseteq X$: esto nos dice que x es interior a X y, en definitiva, que $x \in X^\circ$. Vemos así que $U \subseteq X^\circ$ y, con lo anterior, que, de hecho, $U = X^\circ$. □

Una consecuencia inmediata de la descripción del interior de un conjunto que nos da esta proposición es que tomar el interior de un conjunto es una operación «creciente»:

Corolario 5.2.18. *Si X e Y son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y $X \subseteq Y$, entonces $X^\circ \subseteq Y^\circ$.*

Demostración. En efecto, en esa situación X° es un abierto y, como $X^\circ \subseteq X \subseteq Y$, está contenido en Y: como Y° es el mayor abierto contenido en Y, esto implica que $X^\circ \subseteq X^\circ$. □

No es difícil, además, ver como interactúa la operación de tomar el interior de un conjunto con las operaciones usuales de conjuntos:

Proposición 5.2.19. *Si X e Y son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, entonces*

$$(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ, \qquad\qquad (X \cup Y)^\circ \supseteq X^\circ \cup Y^\circ.$$

Notemos que, en general, esta última inclusión no es una igualdad. Por ejemplo, si $X = (-\infty, 0]$ e $Y = (0, +\infty)$, entonces $(X \cup Y)^\circ = \mathbb{R}$ mientras que $X^\circ \cup Y^\circ = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demostración. Sean X e Y dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Como $X \cap Y \subseteq X$ y $X \cap Y \subseteq Y$, sabemos que $(X \cap Y)^\circ \subseteq X^\circ$ y $(X \cap Y)^\circ \subseteq Y^\circ$, así que claramente $(X \cap Y)^\circ \subseteq X^\circ \cap Y^\circ$. Por otro lado, $X^\circ \cap Y^\circ$ es un abierto que está contenido en $X \cap Y$, así que también está contenido en $(X \cap Y)^\circ$. Esto prueba la primera afirmación de la proposición.

Por otro lado, como $X^\circ \subseteq X \subseteq X \cup Y$ e $Y^\circ \subseteq Y \subseteq X \cup Y$, tenemos que $X^\circ \cup (X \cup Y)^\circ$ y que $Y^\circ \cup (X \cup Y)^\circ$, así que $X^\circ \cup Y^\circ \subseteq (X \cup Y)^\circ$. Esto prueba la segunda afirmación. □

Ejercicio 5.2.20. Muestre que si $\mathscr{X}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ entonces

$$\bigcap_{X \in \mathscr{X}} X^\circ \supseteq \left(\bigcap_{X \in \mathscr{X}} X \right)^\circ$$

y vale, de hecho, la igualdad si la familia $\mathscr{X}$ es finita. Dé un ejemplo para mostrar que si la familia $\mathscr{X}$ es infinita la inclusión puede ser estricta.

La Proposición 2.5.4.3 nos dice que entre dos números cualesquiera hay un número racional. La siguiente proposición da una generalización útil de esto a $\mathbb{R}^d$:

Proposición 5.2.21. *Todo subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^d$ contiene un punto cuyas coordenadas son racionales.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^d$, y sea x un punto de U. Existe entonces un número positivo r tal que la bola abierta $B_r(x)$ está contenida en U. Escribamos $x = (x_1, \dots, x_d)$, para cada elemento i de $\{1, \dots, d\}$ elijamos un número racional q_i en el intervalo $(x_i - r/\sqrt{d}, x_i + r/\sqrt{d})$, de manera que $|x_i - q_i| < r/\sqrt{d}$, y consideremos el punto $q = (q_1, \dots, q_d)$ de $\mathbb{R}^d$, que tiene todas sus coordenadas racionales. Es

$$\delta(x, q) = (|x_1 - q_1|^2 + \cdots + |x_d - q_d|^2)^{1/2} < \left(\frac{r^2}{d} + \cdots + \frac{r^2}{d}\right)^{1/2} = r,$$

así que $q \in B_r(x) \subseteq U$. Esto prueba la proposición. □

El siguiente ejercicio presenta una caracterización de los conjuntos de $\mathbb{R}^d$ en términos de subconjuntos abiertos de espacios de la forma $\mathbb{R}^{d'}$ con d' menor que d. En su enunciado, cada vez que d y e son dos enteros positivos identificamos el conjunto $\mathbb{R}^{d+e}$ y el producto cartesiano $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^e$ de la manera evidente y, más generalmente, cada vez que U y V son subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y de $\mathbb{R}^e$ vemos al producto cartesiano $U \times V$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^{d+e}$.

Ejercicio 5.2.22. Sean d y e dos enteros positivos.

(a) Sean U y V subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y de $\mathbb{R}^e$, respectivamente. Muestre que el subconjunto $U \times V$ de $\mathbb{R}^{d+e}$ es abierto si y solamente si los conjuntos U y V son abiertos en $\mathbb{R}^d$ y en $\mathbb{R}^e$.

(b) Un subconjunto W de $\mathbb{R}^{d+e}$ es abierto si y solamente si para todo punto x de W existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^d$ y en $\mathbb{R}^e$, respectivamente, tales que $x \in U \times V \subseteq W$.

5.3. Entornos

El siguiente concepto está íntimamente relacionado con el de conjunto abierto.

Definición 5.3.1. Sea x un elemento de $\mathbb{R}^d$. Un ***entorno*** de x es un subconjunto N de $\mathbb{R}^d$ tal que $x \in N^\circ$.

Notemos que un subconjunto N de $\mathbb{R}^d$ es un entorno *abierto* de un punto x exactamente cuando es un abierto y contiene a x. Podemos describir los conjuntos abiertos y el interior de un conjunto en términos de entornos:

Proposición 5.3.2.

(i) *Un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es abierto si y solamente si es un entorno de cada uno de sus puntos.*

(ii) *El interior de un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ es el conjunto de puntos x de X de los que X es un entorno.*

Demostración. (*i*) Sea U un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Que U sea un entorno de cada uno de sus puntos significa precisamente que $U \subseteq U^\circ$, y esto vale si y solamente si $U = U^\circ$, es decir, si U es abierto, ya que siempre tenemos que $U^\circ \subseteq U$.

(*ii*) Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea U el conjunto de los puntos de X de los que X es un entorno. Si x es un punto interior de X, entonces X es un entorno de X: esto nos dice que $X^\circ \subseteq U$. Por otro lado, si x es un elemento de U, entonces X es un entorno de x, es decir, x pertenece a X°: esto nos dice que $U \subseteq X^\circ$. Juntando todo vemos que $X^\circ U$, que es lo que afirma la proposición. □

La familia de todos los entornos de un punto tiene propiedades de clausura similares a las que describimos en la Proposición 5.2.11 para la familia de todos los abiertos.

Proposición 5.3.3. *Sea x un elemento de $\mathbb{R}^d$ y sea $\mathcal{N}(x)$ el conjunto de todos los entornos de x.*

(*i*) *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ que contiene un elemento de $\mathcal{N}(x)$ pertenece a $\mathcal{N}(x)$.*

(*ii*) *La intersección de una familia finita y no vacía de elementos de $\mathcal{N}(x)$ pertenece a $\mathcal{N}(x)$.*

Demostración. Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ que contiene a un elemento N de $\mathcal{N}(x)$, entonces $x \in N^\circ \subseteq X^\circ$ y, por lo tanto, X pertenece a $\mathcal{N}(x)$. Esto prueba (*i*).

Sea m un entero positivo y sean $N_1, \dots, N_m$ elementos de $\mathcal{N}(x)$. Tenemos entonces que cada uno de los abiertos $N_1^\circ, \dots, N_m^\circ$ contiene a x y, por lo tanto, que x pertenece a la intersección $U \coloneqq N_1^\circ \cap \dots \cap N_m^\circ$. Como $x \in U \subseteq N_1 \cap \dots \cap N_m$ y U es abierto, esto nos dice que x es interior a $N_1 \cap \dots \cap N_m$ y, en definitiva, que esta intersección es un elemento de $\mathcal{N}(x)$. Esto prueba (*ii*). □

El siguiente ejercicio describa otra propiedad clave de la familia de los entornos de un punto.

Ejercicio 5.3.4. Usando la notación de la Proposición 5.3.3, muestre que para cada elemento N de $\mathcal{N}(x)$ hay otro U tal que para todo $y \in U$ se tiene que $N \in \mathcal{N}(y)$.

Cada punto de $\mathbb{R}^d$ tiene una gran cantidad de entornos. Para muchos propósitos, sin embargo, es suficiente considerar unos pocos. Consideramos un ejemplo de esto en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 5.3.5. Sea x un elemento de $\mathbb{R}^d$. Una familia $\mathcal{N}$ de entornos de x es una ***base de entornos*** de x si para todo entorno N de x hay un entorno N' perteneciente a $\mathcal{N}$ tal que $N' \subseteq N$.

(a) Muestre que $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x. Más generalmente, muestre que si $(r_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números positivos que converge a 0 entonces $\{B_{r_n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos de x.

(b) Sea $\mathcal{N}$ una base de entornos de x. Pruebe que x pertenece al interior de un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ si y solamente si hay un elemento N de $\mathcal{N}$ tal que $N \subseteq X$.

5.4. Conjuntos cerrados

Es conveniente introducir un nombre para los complementos de los subconjunto abiertos:

Definición 5.4.1. Un subconjunto F de $\mathbb{R}^d$ es ***cerrado*** si su complemento $F^c := \mathbb{R}^d \setminus F$ es abierto.

En vista de esta definición, el siguiente resultado es inmediato:

Proposición 5.4.2. *Un subconjunto F de $\mathbb{R}^d$ es cerrado si y solamente si todo punto x que no pertenece a F es interior al complemento de F.* □

Usando las relaciones de dualidad de De Morgan podemos ver que muchas de las propiedades de los conjuntos cerrados se correspondan con las de los conjuntos abiertos. Por ejemplo, la siguiente proposición es la que corresponde a la Proposición 5.2.11.

Proposición 5.4.3.

(*i*) *Los subconjuntos $\varnothing$ y $\mathbb{R}^d$ de $\mathbb{R}^d$ son cerrados.*

(*ii*) *La unión de una familia finita de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$ es un conjunto cerrado.*

(*iii*) *La intersección de una familia cualquiera de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$ es un conjunto cerrado.*

Notemos que los subconjuntos $\varnothing$ y $\mathbb{R}^d$ de $\mathbb{R}^d$ son a la vez abiertos y cerrados. Veremos más adelante, cuando probemos el Corolario 6.6.3.9, que se trata de los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ con esa propiedad.

Demostración. Los subconjuntos $\varnothing$ y $\mathbb{R}^d$ de $\mathbb{R}^d$ son cerrados porque sus complementos $\varnothing^c = \mathbb{R}^d$ y $(\mathbb{R}^d)^c = \varnothing$ son abiertos. Por otro lado, si n es un entero positivo y $F_1, \dots, F_n$ son n subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$, entonces la unión $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ es también cerrada porque su complemento

$$(F_1 \cup \cdots \cup F_n)^c = F_1^c \cap \cdots \cap F_n^c$$

es la intersección de los conjuntos abiertos $F_1^c, \dots, F_n^c$ y, por lo tanto, es abierta.

Consideremos finalmente una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$. Es

$$\left(\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F\right)^c = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} F^c$$

y esta última unión es abierta, ya que cada uno de los conjuntos F^c con $F \in \mathscr{F}$ lo es, así que loa intersección $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ es cerrada. □

La hipótesis de finitud en la segunda parte de la Proposición 5.4.3 es importante: la unión de una familia infinita de conjuntos cerrados no es, en general, un conjunto abierto. En el Ejercicio 5.4.18 presentamos una situación en la que sí podemos garantizar que la unión es cerrada.

Ejemplo 5.4.4. Para cada entero n mayor que 1 el intervalo $I_n := [-1+1/n, 1-1/n]$ es un conjunto cerrado, pero la unión

$$I := \bigcup_{n=2}^{\infty} I_n = (-1, 1)$$

no es un conjunto cerrado.

Ejercicio 5.4.5. Sea x un punto de $\mathbb{R}^d$ y r un número positivo. Muestre que el conjunto

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : d(x, y) \leq r\}$$

es cerrado. Llamamos a $\overline{B}_r(x)$ la ***bola cerrada*** centrada en x de radio r.

Como no todo conjunto es abierto, no todo conjunto es cerrado. Vimos en la sección anterior que, de todas formas, podemos aproximar a todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ por otro que es abierto, su interior, que es el abierto más grande contenido en él. Hay una construcción similar pero con cerrados.

Definición 5.4.6. La ***clausura*** de un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ es la intersección $\overline{X}$ de todos los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$ que contienen a X. Un punto x de $\mathbb{R}^d$ es un ***punto de clausura*** de un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ si pertenece a la clausura $\overline{X}$ de este.

Notemos que hay al menos un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$ que contiene a X — el conjunto $\mathbb{R}^d$ mismo — así que tiene sentido considerar la intersección que define a $\overline{X}$.

La clausura de un conjunto tiene propiedades análogas a las de su interior, pero «duales»:

Proposición 5.4.7. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. La clausura $\overline{X}$ es un conjunto cerrado cerrado que contiene a X, y es el menor subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$ que contiene a X, en el sentido de que está contenido en todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$ que contiene a X.*

Demostración. Como el conjunto $\overline{X}$ es la intersección de una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$, él mismo un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$. Que $\overline{X}$ está contenido en todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$ que contiene a X es una consecuencia inmediata de su definición. □

Un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es abierto exactamente cuando coincide con su interior. El siguiente corolario es el resultado correspondiente a esto para subconjuntos cerrados:

Corolario 5.4.8. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es cerrado si y solamente si coincide con su clausura.*

Demostración. Sea X un subconjunto ce $\mathbb{R}^d$. Si X coincide con su clausura $\overline{X}$, entonces es cerrado porque esta última lo es. Recíprocamente, si X es cerrado, entonces X es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$ que contiene a X, así que sabemos que la clausura $\overline{X}$ está contenida en X: como además es $X \subseteq \overline{X}$, vemos así que $X = \overline{X}$. □

Otra forma de decir esto es la siguiente:

Corolario 5.4.9. *Un conjunto es cerrado si y solamente si contiene todos sus puntos de clausura.*

Demostración. En efecto, un conjunto es cerrado si y solamente si coincide con su clausura, y siempre está contenido en esta. □

La operación de tomar clausura es monótona, como la de tomar intersección:

Corolario 5.4.10. *Si X e Y son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y $X \subseteq Y$, entonces $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.*

Demostración. Si X e Y son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ tales que $X \subseteq Y$, entonces tenemos que $X \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$ y, por lo tanto, como $\overline{X}$ es el menor cerrado que contiene a X, tenemos que $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$. □

Por otro lado, la operación de tomar clausura de un conjunto es compatible con las operaciones de conjuntos de la siguiente forma:

Proposición 5.4.11. *Si X e Y son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$, entonces*

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}, \qquad \overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

En general, esta última inclusión no es una igualdad.

Demostración. Sean X e Y dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Como $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$ tenemos que $\overline{X} \subseteq \overline{X \cup Y}$ y que $\overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$, así que $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$. Por otro lado, como $X \subseteq \overline{X}$ e $Y \subseteq \overline{Y}$ y, por lo tanto, $X \cup Y \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$, y el conjunto $\overline{X} \cup \overline{Y}$ es cerrado, tenemos que $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$. Esto prueba la primera afirmación de la proposición. Para ver la segunda, notemos que $X \cap Y \subseteq X \subseteq \overline{X}$ y que $X \cap Y \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$, así que $X \cap Y \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$ y, como está última intersección es cerrada, $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$, que es lo que afirma la proposición. □

Ejercicio 5.4.12. Muestre que si $\mathscr{X}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ entonces

$$\bigcup_{X \in \mathscr{X}} \overline{X} \subseteq \overline{\bigcup_{X \in \mathscr{X}} X},$$

y vale, de hecho, la igualdad si la familia $\mathscr{X}$ es finita. Dé un ejemplo para mostrar que si la familia $\mathscr{X}$ es infinita la inclusión puede ser estricta.

Un punto pertenece al interior de un conjunto exactamente cuando alguno de sus entornos está contenido en este. La siguiente proposición da el resultado correspondiente a esto para los puntos de la clausura.

Proposición 5.4.13. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x un punto de $\mathbb{R}^d$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *x pertenece a la clausura $\overline{X}$ de X.*

(b) *Para todo número positivo r se tiene que $B_r(x) \cap X \neq \varnothing$.*

(c) *Para todo entorno abierto N de x se tiene que $N \cap X \neq \varnothing$.*

(d) *Para todo entorno N de x se tiene que $N \cap X \neq \varnothing$.*

Demostración. Las implicaciones $(d) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (b)$ son inmediatas, ya que todo entorno abierto de x es por supuesto un entorno de x, y toda bola abierta centrada en x es un entorno abierto de x.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que x es un punto que no pertenece a la clausura de X, de manera que hay un conjunto cerrado F tal que $x \notin F$ y $X \subseteq F$. Esto nos dice que x pertenece al complemento F^c de F, que es un conjunto abierto y, por lo tanto, que existe un número positivo r tal que la bola abierta $B_r(x)$ está contenida en F^c, y entonces $B_r(x) \cap X \subseteq B_r(x) \cap F = \varnothing$. Esto prueba la implicación contrarrecíproca a la que queremos.

$(a) \Rightarrow (d)$ Supongamos que hay un entorno N de x tal que $N \cap X = \varnothing$. El abierto $U \coloneqq N^\circ$ contiene entonces a x y es $U \subseteq N \subseteq X^c$, de manera que el cerrado U^c no contiene a x y $U^c \supseteq X$: esto implica inmediatamente que $x \notin \bar{X}$. Otra vez, esto prueba la afirmación contrarrecíproca a la que nos interesa. □

En la cuarta afirmación alcanza con considerar los entornos de x que pertenecen a alguna base de entornos de este punto:

Ejercicio 5.4.14. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea x un punto de $\mathbb{R}^d$ y sea $\mathscr{N}$ una base de entornos de x, como en el Ejercicio 5.3.5. Pruebe que x es un punto de clausura de X si y solamente si para todo $N \in \mathscr{N}$ se tiene que $N \cap X \neq \varnothing$.

Ejemplo 5.4.15. Consideremos el conjunto $\mathbb{Q}^d$ de los puntos de $\mathbb{R}^d$ que tienen todas sus coordenadas racionales. Si x es un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^d$ y U es un entorno abierto de x, la Proposición 5.2.21 nos dice que $U \cap X \neq \varnothing$: de acuerdo a la Proposición 5.4.13, que x pertenece a $\overline{\mathbb{Q}^d}$. Vemos así que $\overline{\mathbb{Q}^d} = \mathbb{R}^d$.

El resultado de este ejemplo es que el conjunto $\mathbb{Q}^d$ es denso en $\mathbb{R}^d$, en el seguiente sentido:

Definición 5.4.16. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ es ***denso*** si su clausura es $\mathbb{R}^d$.

En siguiente ejercicio da la versión del resultado de la primera parte del Ejercicio 5.2.22 para conjuntos cerrados.

Ejercicio 5.4.17. Sean d y e dos enteros positivos, y sean U y V subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y de $\mathbb{R}^e$, respectivamente. Muestre que el subconjunto $U \times V$ de $\mathbb{R}^{d+e} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^e$ es cerrado si y solamente si los conjuntos U y V son cerrados en $\mathbb{R}^d$ y en $\mathbb{R}^e$.

Terminemos esta sección con un ejercicio que describe una situación en la que la unión de una familia infinita de conjuntos cerrados es ella misma un conjunto cerrado. Recordemos que el Ejemplo 5.4.4 muestra que esto no ocurre siempre.

Ejercicio 5.4.18. Sea $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$. Decimos que $\mathscr{F}$ es ***localmente finita*** si para todo $x \in \mathbb{R}^d$ hay un entorno N de x tal que el conjunto $\{F \in \mathscr{F} : F \cap N \neq \varnothing\}$ es finito.

Pruebe que si $\mathscr{F}$ es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$ entonces la unión de los elementos de $\mathscr{F}$ es un también un subconjunto cerrado.

5.5. Puntos de acumulación, puntos aislados y conjuntos discretos

La noción de punto de clausura tiene una variación que es importante para muchas cosas:

Definición 5.5.1. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Un punto x de $\mathbb{R}^d$ es un ***punto de acumulación*** de X si pertenece a $\overline{X \setminus \{x\}}$. El ***conjunto derivado*** de X es el conjunto X' de todos los puntos de acumulación de X.

La caracterización de los puntos de la clausura de un conjunto en términos de entornos tiene el siguiente análogo para puntos de acumulación:

Proposición 5.5.2. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x un punto de $\mathbb{R}^d$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *x es un punto de acumulación de X.*

(*b*) *Para todo número positivo r la bola abierta $B_r(x)$ contiene un punto de X distinto de x.*

(*c*) *Todo entorno abierto de x contiene un punto de X distinto de x.*

(*d*) *Todo entorno de x contiene un punto de X distinto de x.*

Notemos que esto implica que, por ejemplo, un punto x *no* es un punto de acumulación del conjunto x exactamente cuando existe un entorno N de x tal que $N \cap X \subseteq \{x\}$.

Demostración. Las implicaciones $(d) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (b)$ son evidentes, ya que todo entorno abierto de x es un entorno de x y toda bola centrada en x es un entorno abierto de x.

Probemos la implicación contrarrecíproca de la implicación $(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que x no es un punto de acumulación de X, de manera que x no pertenece a $\overline{X \setminus \{x\}}$. Esto significa que x pertenece al complemento de esta clausura, que es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y, por lo tanto, que existe un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq (\overline{X \setminus \{x\}})^c$ y, en consecuencia,

$$B_r(x) \cap (X \setminus \{x\}) \subseteq B_r(x) \cap \overline{X \setminus \{x\}} = \varnothing.$$

Vemos así que la afirmación (b) no se cumple.

Probemos finalmente la implicación $(a) \Rightarrow (d)$. Supongamos que x es un punto de acumulación de X y sea N un entorno de x. Como $x \in \overline{X \setminus \{x\}}$, tenemos que $N \cap (X \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ y esto significa precisamente que N contiene un elemento de X distinto de x. Vemos así que la afirmación (d) vale. □

Los puntos de acumulación de un conjunto son «los que le faltan» a este para que sea cerrado: esa es una forma de interpretar la afirmación de la siguiente proposición.

Proposición 5.5.3. *Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, entonces $\overline{X} = X \cup X'$.*

Notemos que en general los conjuntos X y X' no son disjuntos.

Demostración. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Sabemos que $X \subseteq \overline{X}$. Por otro lado, si x es un punto de X', entonces cualquiera sea el entorno N de X tenemos que $N \cap X \subseteq N \cap (X \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, así que $x \in \overline{X}$: esto muestra que $X' \subseteq \overline{X}$ y, por lo tanto, que $X \cup X' \subseteq \overline{X}$.

Sea ahora x un elemento de $\overline{X}$ y supongamos que x no pertenece a X. Para cada entorno N de X tenemos entonces que $N \cap (X \setminus \{x\}) = N \cap X \neq \varnothing$ y, por lo tanto, vemos que x pertenece a X'. Esto muestra que $\overline{X} \subseteq X \cup X'$. □

Un punto de clausura de un conjunto X es uno que tiene puntos de X arbitrariamente cerca. La siguiente proposición nos dice intuitivamente que uno de acumulación es uno que tiene muchos.

Proposición 5.5.4. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Un punto x de $\mathbb{R}^d$ es un punto de acumulación de X si y solamente si todo entorno abierto de x contiene infinitos elementos de X.*

Podríamos aquí reemplazar la frase «todo entorno abierto» por «todo entorno» o «toda bola abierta centrada en x» sin cambiar la veracidad de la afirmación. Dejamos la verificación de esto al lector.

Demostración. Sea x un elemento de $\mathbb{R}^d$. Si todo entorno abierto de x contiene infinitos elementos de X, entonces ciertamente contiene alguno que es distinto de x: como sabemos, esto implica que x es un punto de acumulación de X.

Supongamos, por otro lado, que x es un punto de acumulación de X y sea N un entorno abierto de x, de manera que hay un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq N$. Vamos a construir una sucesión de puntos $(x_n)_{n\geq 1}$ todos pertenecientes a la intersección $N \cap X$ y tales que $\delta(x_n, x) > \delta(x_{n+1}, x) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Empezamos poniendo $x_1 := x$. Sea ahora n un entero positivo y supongamos que ya elegimos a los los puntos $x_1, \ldots, x_n$ de manera que se tiene que $\delta(x_i, x) > \delta(x_{i+1}, x) > 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. La bola abierta $B_{\delta(x_n,x)}(x)$ es un entorno abierto de x, así que, como x es un punto de acumulación de X, contiene algún punto de X distinto de x: escribámoslo x_{n+1}. Tenemos entonces que $\delta(x_n, x) > \delta(x_{n+1}, x) > 0$, y esto completa la construcción.

Como la sucesión $(\delta(x_n, x))_{n\geq 1}$ es estrictamente decreciente, las componentes de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ son dos a dos distintas. Más aún, como $r > \delta(x_1, x) > \delta(x_n, x) > 0$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, todas las componentes de esa sucesión son distintos de x y pertenecen a $B - r(x)$. Podemos concluir entonces que conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito y está contenido en $N \cap X$. La proposición queda así probada. □

Ejercicio 5.5.5. Sean X e Y dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y sea x un punto de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que

(a) Si $x \in X'$, entonces $x \in (X \setminus \{x\})'$.
(b) $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$.
(c) Si $X \subseteq Y$, entonces $X' \subseteq X'$.

La caracterización que nos da la Proposición 5.5.4 de los puntos de acumulación de un conjunto nos permite probar el siguiente resultado importante:

Proposición 5.5.6. *Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, entonces $(X')' \subseteq X'$.*

Demostración. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea x un punto de $(X')'$, y sea N un entorno abierto de x. Sabemos que N contiene un punto y de X' distinto de x y entonces que contiene infinitos puntos de X, entre los que hay, claro, infinitos distintos de x. Vemos así que todo entorno abierto de x contiene infinitos puntos de X, de manera que x pertenece a X'. Esto nos dice que $(X')'$ está contenido en X', como afirma la proposición. □

La consecuencia fundamental de esta proposición es la siguiente:

Corolario 5.5.7. *El conjunto derivado de todo subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es cerrado.*

Demostración. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. La Proposición 5.5.6 nos dice que $(X')' \subseteq X'$, así que $\overline{X'} = X' \cup (X')' = X'$ y, por lo tanto, el conjunto X' es cerrado. □

Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ construimos una sucesión de conjuntos $(X^{(n)})_{n\geq 1}$ poniendo $X^{(1)} := X'$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$X^{(n+1)} := (X^{(n)})'.$$

La Proposición 5.5.6 implica inmediatamente que tenemos una cadena decreciente de conjuntos cerrados

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq X^{(3)} \supseteq \cdots \tag{5.1}$$

Si el conjunto $S := \{n \in \mathbb{N} : X^{(n)} = X^{(n+1)}\}$ no es vacío, escribamos κ a su menor elemento y lo llamamos el ***rango de Cantor–Bendixson*** de X, por Georg Cantor y Ivar Otto Bendixson. En ese caso tenemos que, de hecho, $X^{(\kappa)} = X^{(\kappa+k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto es evidente si $k = 1$, ya que κ pertenece al conjunto X, y si k es un entero positivo tal que $X^{(\kappa)} = X^{(\kappa+k)}$, entonces es

$$X^{(\kappa+k+1)} = (X^{(\kappa+k)})' = (X^{(\kappa)})' = X^{(\kappa+1)}) = X^{(\kappa)}).$$

Vemos así que en la cadena (5.1) los primeros κ conjuntos son distintos dos a dos y todos los conjuntos a partir del κ-ésimo son iguales. Más aún, tenemos que

$$(X^{(\kappa)})' = X^{(\kappa+1)} = X^{(\kappa)},$$

de manera que el conjunto $X^{(\kappa)}$, al que llamamos la ***derivada de Cantor–Bendixson*** de X, es perfecto de acuerdo a la siguiente definición:

Definición 5.5.8. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ es ***perfecto*** si coincide con su conjunto derivado.

Motivado por el estudio del problema de decidir dónde converge una serie de Fourier Cantor introdujo la noción de conjunto derivado en su tesis doctoral, y más tarde el de derivada de Cantor–Bendixson. Ese trabajo es el origen de buena parte de la teoría de conjuntos.

Un resultado fundamental sobre los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^d$ es el llamado ***teorema de Cantor–Bendixson***, que afirma que

> *todo subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^d$ es la unión disjunta de un conjunto perfecto y un conjunto contenido en la imagen de una función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$,*

y que reduce el problema de describir los conjuntos cerrados al de describir los perfectos.

Ejercicio 5.5.9.

(a) Muestre que el subconjunto $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ tiene rango de Cantor–Bendixson igual a 1 y que su derivada de Cantor–Bendixson es el conjunto vacío.

(b) Determine los rangos y derivadas de Cantor–Bendixson de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\{2^{-n} + 2^{-n-1-m} : n, m \in \mathbb{N}\}, \qquad \{2^{-n} + 2^{-n-1-m} + 2^{-n-1-m-1-p} : n, m, p \in \mathbb{N}\}.$$

(c) Muestre que hay subconjuntos de $\mathbb{R}$ de todos los rangos posibles.

La noción «opuesta» a la de punto de acumulación es la siguiente:

Definición 5.5.10. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Un punto x de X es ***aislado*** en X si hay un entorno N de x tal que $N \cap X = \{x\}$. Si todos los puntos de X son aislados en X, decimos que X es ***discreto***.

Por ejemplo, todos los puntos de $\mathbb{Z}$ son aislados, de manera que este es un conjunto discreto, mientras que $\mathbb{Q}$ no tiene ningún punto aislado. La siguiente caracterización es inmediata:

Proposición 5.5.11. *Un punto de un subconjunto X de $\mathbb{R}^d$ es aislado en X si y solamente si no pertenece al conjunto derivado X'.* □

Ejercicio 5.5.12. Pruebe que un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es perfecto si y solamente si es cerrado y no tiene ningún punto aislado.

5.6. Sucesiones

Exactamente de la misma forma en que definimos en el Capítulo 3 definimos aquí la noción de convergencia para sucesiones en $\mathbb{R}^d$.

Definición 5.6.1. Decimos que sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}^d$ converge a un punto L de $\mathbb{R}^d$ si para todo número positivo ε existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \delta(x_n, L) < \varepsilon.$$

Cuando d es 1 esta definimos es exactamente la misma que la Definición 3.1.2, así que lo que tenemos es una generalización natural de esta última. No es sorprendente, entonces, que podamos establecer para noción de convergencia en $\mathbb{R}^d$ propiedades completamente similares a las que ya conocemos para la de convergencia en $\mathbb{R}$. Correspondiendo a la Proposición 3.1.9 tenemos el siguiente resultado:

Lema 5.6.2. *Una sucesión en $\mathbb{R}^d$ converge como mucho a un punto de $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$, sean L y L' dos elementos de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que la sucesión x converge tanto a L como a L'.

Sea ε un número positivo. Como la sucesión x converge a L, existe un entero positivo n_1 tal que para todo entero n mayor o igual que n_1 es $\|x_n - L\| < \varepsilon/2$, y como la sucesión x converge a L', existe un entero positivo n_2 tal que para todo entero n mayor o igual que n_2 es $\|x_n - L'\| < \varepsilon/2$. En particular, si ponemos $m \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$, tenemos que

$$\|L - L'\| \leq \|L - x_m\| + \|x_m - L\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que el número no negativo $\|L - L'\|$ es menor que todo número positivo y, por lo tanto, que es, de hecho, nulo. Podemos concluir entonces que $L = L'$, y esto prueba la proposición. □

Este lema nos permite hacer la siguiente definición:

Definición 5.6.3. Cuando una sucesión $x = (x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}^d$ converge a un punto L de $\mathbb{R}^d$ decimos que L es el ***límite*** de x y escribimos a ese punto

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Definimos la noción de convergencia en $\mathbb{R}^d$ usando bolas abiertas, pero podemos enunciarla también en términos de entornos y, como veremos, esta flexibilidad será muy conveniente más adelante.

Proposición 5.6.4. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$ y sea L un punto de $\mathbb{R}^d$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a L.*

(*b*) *Para todo número positivo r hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$n \geq n_0 \implies x_n \in B_r(L).$$

(*c*) *Para todo entorno abierto N de L existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$n \geq n_0 \implies x_n \in N.$$

(*d*) *Para todo entorno N de L existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$n \geq n_0 \implies x_n \in N.$$

Demostración. Las implicaciones $(d) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (b)$ son evidentes ya que todo entorno abierto de L es un entorno de L y toda bola abierta centrada en L es un entorno abierto de L. Por otro lado, la implicación $(b) \Rightarrow (a)$ es consecuencia inmediata de la definición de convergencia.

Probemos la implicación $(a) \Rightarrow (d)$. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a L y sea N un entorno de L. Como L pertenece a N° y este último conjunto es abierto, hay un número positivo r tal que $B_r(L) \subseteq N^\circ$, y la hipótesis implica que hay un entero positivo n_0 tal que para todo entero n mayor o igual a n_0 se tiene que $\delta(L, x_n) < r$, es decir, que $x \in B_r(L) \subseteq N\circ \subseteq N$. Esto prueba lo que queremos. □

Ejercicio 5.6.5. Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$.

(a) Muestre que la sucesión x no converge a un punto L de $\mathbb{R}^d$ exactamente cuando para todo entorno N de L el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin N\}$ es infinito.

(b) Muestre que si la sucesión x converge a un punto L de $\mathbb{R}^d$ y M es un punto de $\mathbb{R}^d$ distinto de L, entonces para todo entorno N de M el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in M\}$ es finito.

Ejercicio 5.6.6. Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$, sea L un punto de $\mathbb{R}^d$, y sea $\mathscr{N}$ una base de entornos de L, como en el Ejercicio 5.3.5. Muestre que la sucesión x converge a L si y solamente si para todo elemento N de $\mathscr{N}$ existe un entero positivo n_0 que para todo $n \in \mathbb{N}$ hace cierta la afirmación $n \geq n_0 \implies x_n \in N$.

Exactamente de la misma forma que en la Proposición 3.1.21 tenemos el siguiente resultado:

Proposición 5.6.7. *Una sucesión en $\mathbb{R}^d$ que converge es acotada.*

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$ que converge a un punto L de $\mathbb{R}^d$. Sea $r := \|L\| + 1$. La bola abierta $B_r(0)$ es un entorno abierto de L, así que la Proposición 5.6.4 nos dice que hay un entero positivo n_0 tal que para todo entero n mayor o igual que n_0 es $x_n \in B_r(0)$. El conjunto $S := \{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{n_0-1}\|\} \cup \{r\}$ es finito, así que podemos considerar el número $s := \text{máx}\, S + 1$, que es positivo. Si n es un entero positivo cualquiera, entonces o bien $n \geq n_0$ y tenemos que $x_n \in B_r(0) \subseteq B_s(0)$, o bien $n < n_0$, así que $\|x_n\| \in S$ y, por lo tanto, $\|x_n\| < \text{máx}\, S + 1 = s$ y $x_n \in B_s(0)$. Vemos así que la sucesión x toma valores en la bola $B_s(0)$ y, en consecuencia, que es acotada. Esto prueba la proposición. □

Ejercicio 5.6.8. Muestre que si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^d$ que converge a un punto L de $\mathbb{R}^d$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, entonces la subsucesión $(x_{f(n)})_{n\geq 1}$ también converge a L.

La Proposición 3.5.2 describe como la convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}$ interactúa con las operaciones aritméticas de ese cuerpo. Nuestro siguiente resultado hace lo mismo en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 5.6.9.

(*i*) *Si* $(x_n)_{n\geq1}$ *e* $(y_n)_{n\geq1}$ *son dos sucesiones en* $\mathbb{R}^d$ *que convergen, respectivamente, entonces la sucesión* $(x_n + y_n)_{n\geq1}$ *converge y es*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(*ii*) *Si* $(x_n)_{n\geq1}$ *es una sucesión convergente en* $\mathbb{R}^d$ *y* $(t_n)_{n\geq1}$ *es una sucesión convergente en* $\mathbb{R}$*, entonces la sucesión* $(t_n x_n)_{n\geq}$ *converge y*

$$\lim_{n\to\infty} t_n x_n = \lim_{n\to\infty} t_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Demostración. (*i*) Sean $(x_n)_{n\geq1}$ e $(y_n)_{n\geq1}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}^d$ que convergen a puntos L y M de $\mathbb{R}^d$. Sea ε un número positovo. Como $(x_n)_{n\geq1}$ converge a L, hay un entero positivo n_1 tal que para todo entero n mayor o igual a n_1 vale $n \geq n_1 \implies \|x_n - L\| < \varepsilon/2$. De manera similar, como $(y_n)_{n\geq1}$ converge a M, hay un entero positivo n_2 tal que para todo entero n mayor o igual a n_2 vale $n \geq n_2 \implies \|y_n - M\| < \varepsilon/2$. Pongamos $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$. Si n es un entero mayor o igual que n_0 tenemos entonces que

$$\|(x_n + y_n) - (L + M)\| = \|(x_n - L) + (y_n - M)\| \leq \|x_n - L\| + \|y_n - M\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $(x_n + y_n)_{n\geq1}$ converge a $L + M$.

(*ii*) Sea $(x_n)_{n\geq1}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^d$, y sea L su límite, y sea $(t_n)_{n\geq1}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, y sea T su límite. De acuerdo a la Proposición 3.1.21, hay un número positivo K tal que $|t_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ converge a L, hay un entero positivo n_1 tal que para todo entero n mayor o igual que n_1 es $\|x_n - L\| < \varepsilon/2K$, y como la sucesión $(t_n)_{n\geq1}$ converge a T hay un entero positivo n_2 tal que para todo entero n mayor o igual que n_2 es $|t_n - T| < \varepsilon/2(\|L\| + 1)$. Si ponemos $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$, entonces para todo entero n mayor o igual que n_0 es

$$\begin{aligned}
\|t_n x_n - TL\| &= \|t_n(x_n - L) + (t_n - T)L\| \\
&\leq \|t_n(x_n - L)\| + \|(t_n - T)L\| \\
&= |t_n| \cdot \|x_n - L\| + |t_n - T| \cdot \|L\| \\
&< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2(\|L\| + 1)} \cdot \|L\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que la sucesión $(t_n x_n)_{n\geq1}$ converge a TL, que es lo que afirma la proposición. □

Nuestro siguiente resultado reduce el problema de decidir si una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^d$

converge al de decidir si d sucesiones en $\mathbb{R}$ convergen.

Proposición 5.6.10. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,d})$ un punto de $\mathbb{R}^d$. Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:*

(a) La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}^d$ converge.

(b) Para cada $i \in \{1, \dots, d\}$ la sucesión $(x_{n,i})_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ converge.

Si se cumplen y ponemos $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$ y, para cada $i \in \{1, \dots, d\}$, $L_i \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_{n,i}$, entonces se tiene que $L = (L_1, L_2, \dots, L_d)$.

Demostración. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge, escribamos $L = (L_1, \dots, L_d)$ a su límite, y sea i un elemento de $\{1, \dots, d\}$. Sea ε un número positivo. La hipótesis implica que hay un entero positivo n_0 tal que para todo entero n mayor o igual que n_0 es $\|x_n - L\| < \varepsilon$. Se sigue de esto entonces que para todo entero n mayor o igual que n_0 es

$$|x_{n,i} - L_i| \leq \|x_n - L\| < \varepsilon,$$

y esto prueba que la sucesión $(x_{n,i})_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}$ converge a L_i.Vemos así que la implicación $(a) \Rightarrow (b)$ vale y que cuando vale la afirmación (a) vale también lo hace la afirmación final del enunciado.

Probemos ahora la implicación $(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, d\}$ la sucesión $(x_{n,i})_{n\geq 1}$ converge y escribamos L_i a su límite, y consideremos el punto $L \coloneqq (L_1, \dots, L_d)$ de $\mathbb{R}^d$. Sea ε un número positivo. Como la sucesión $(x_{n,i})_{n\geq 1}$ converge a L_i, existe un entero positivo n_i tal que para todo entero n mayor o igual que n_i es $|x_{n,i} - L_i| < \varepsilon/\sqrt{d}$. Sea $n_0 \coloneqq \max\{n_1, \dots, n_d\}$. Si n es un entero mayor o igual que n_0 tenemos entonces que

$$\|x_n - L\| = \left(|x_{n,1} - L_1|^2 + \cdots + |x_{n,d} - L_d|^2\right)^{1/2} < \left(\frac{\varepsilon^2}{d} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{d}\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a L. □

Gracias a este resultado podemos usar los criterios que tenemos para decidir la convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}$ para decidir la convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}^d$, procediendo «coordenada a coordenada». Es conveniente, de todas formas, enunciar una versión del criterio de Cauchy de manera directa en $\mathbb{R}^d$.

Definición 5.6.11. Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{R}^d$ es ***de Cauchy*** si para todo número positivo ε hay un entero positivo N tal que para toda elección de n y m en $\mathbb{N}$ vale

$$n, m \geq N \implies \delta(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Esta condición caracteriza la convergencia, exactamente igual que en $\mathbb{R}$:

Proposición 5.6.12. *Una sucesión en $\mathbb{R}^d$ converge si y solamente si es de Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,d})$. En vista de lo que afirman las Proposiciones 5.6.10 y 3.6.3, para probar lo que queremos es suficiente que mostremos que

> *la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ es de Cauchy si y solamente si cada una de las d sucesiones $(x_{n,1})_{n\geq1}, \dots, (x_{n,d})_{n\geq1}$ es de Cauchy.*

Supongamos primero que la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ es de Cauchy, sea i un elemento de $\{1, \dots, d\}$, y sea ε un número positivo. La hipótesis implica que hay un entero positivo n_0 tal que para todo par de enteros n y m mayores o iguales que n_0 es $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, y entonces siempre que n y m son enteros mayores o iguales que n_0 tenemos que

$$|x_{n,i} - x_{m,i}| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Vemos así que la sucesión $(x_{n,i})_{n\geq1}$ es de Cauchy.

Supongamos ahora que cada una de las d sucesiones $(x_{n,1})_{n\geq1}, \dots, (x_{n,d})_{n\geq1}$ es de Cauchy y sea ε un número positivo. Para cada $i \in \{1, \dots, d\}$ existe entonces un entero positivo n_i tal que para toda elección de dos enteros ny m mayores o iguales que n_i se tiene que $|x_{n,i} - x_{m,i}| < \varepsilon/\sqrt{d}$. Si ponemos $n_0 \coloneqq \text{máx}\{n_1, \dots, n_d\}$, entonces siempre que n y m son enteros mayores o iguales que n_0 se tiene que

$$\|x_n - x_m\| = \left(|x_{n,1} - x_{m,1}| + \dots + |x_{n,1} - x_{m,1}|\right)^{1/2} \leq \left(\frac{\varepsilon^2}{d} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{d}\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ es de Cauchy. □

Una consecuencia inmediata de la Proposición 5.6.4 es que el conjunto τ de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ determina a la clase de las sucesiones en $\mathbb{R}^d$ que convergen y al límite de cada una de ellas. Es un resultado importante que, recíprocamente, si sabemos cuáles son las sucesiones en $\mathbb{R}^d$ que convergen y cuáles son sus correspondientes límites entonces podemos determinar los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$. Nuestro siguiente resultado muestra cómo.

Proposición 5.6.13. *Un subconjunto F de $\mathbb{R}^d$ es cerrado si y solamente si el límite de toda sucesión convergente que toma valores en F pertenece a F.*

Demostración. Sea F un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Supongamos primero que F es cerrado y que $(x_n)_{n\geq1}$ es una sucesión convergente que toma valores en F y, para llegar a una contradicción, que su límite L no pertenece a F. El complemento F^c es entonces un entorno abierto de L y sabemos que existe un entero positivo n_0 tal que para todo entero n mayor o igual que n_0 es $x_n \in F^c$. En particular, tenemos que x_{n_0} pertenece a F^c: esto es absurdo, ya que la sucesión toma valores en F. Esta contradicción muestra que la condición que da la proposición para que el conjunto F sea cerrado es necesaria.

Mostremos ahora que es suficiente. Supongamos que el conjunto F no es cerrado, de manera que hay un punto de acumulación x de F que no pertenece a F. Como x es un punto de acumulación de F, para cada entero positivo n la intersección $B_{1/n}(x) \cap F$ no es vacía y podemos elegir un punto x_n en ella. La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ claramente toma valores en F y es tal que $\|x_n - x\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que converge a x: esto muestra que la condición de la proposición no se satisface, y prueba lo que queremos. □

Ejemplo 5.6.14. Usando esta proposición podemos ver inmediatamente que el intervalo $(0,1)$ no es cerrado: la sucesión $(1/n)_{n\geq 1}$ toma valores en él y converge a 0, que no es uno de sus elementos.

5.7. Compacidad

Nuestra siguiente definición presenta una noción que juega un rol fundamental en el análisis:

Definición 5.7.1. Un subconjunto F de $\mathbb{R}^d$ es ***relativamente compacto*** si toda sucesión en F posee una subsucesión convergente, y es ***compacto*** si además es cerrado.

El primero en considerar esta noción fue Maurice Fréchet en el artículo [Fré1905], que dio lugar a su tesis doctoral. En particular, fue Fréchet el que eligió la palabra *compacto*. Nuestro objetivo en esta sección es presentar caracterizaciones alternativas de los conjuntos compactos. Empezamos por la relativa compacidad:

Proposición 5.7.2. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es relativamente compacto si y solamente si es acotado.*

Demostración. Sea F un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que no es acotado, de manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un elemento y_n en F tal que $\|y_n\| > n$. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente cualquiera, entonces la subsucesión $(y_{f(n)})_{n\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ no es acotada — ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|y_{f(n)}\| > f(n) \geq n$ — y, por lo tanto, no converge. Como la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ toma valores en F, esto muestra que el conjunto F no es relativamente compacto. Vemos así que la condición que da la proposición para que F sea relativamente compacto es necesaria.

Veamos que también es suficiente. Supongamos que el conjunto F es acortado, de manera que hay un número positivo K tal que $F \subseteq B_K(0)$, y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en F, y para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,d})$. Si i es un elemento de $\{1, \dots, d\}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

es $|x_{n,i}| \leq \|x_n\| < K$. Esto nos dice que

las d sucesiones de números reales $(x_{n,1})_{n\geq1}$, $(x_{n,2})_{n\geq2}$, …, $(x_{n,d})_{n\geq1}$ son acotadas.

En particular, de acuerdo al Teorema de Bolzano–Weierstrass 3.7.11 hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{f(n),1})_{n\geq1}$ converge. Esto nos dice que 1 es un elemento del conjunto D de todos los elementos j de $\{1, \ldots, d\}$ que tienen la siguiente propiedad:

hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, j\}$ la sucesión $(x_{f(n),i})_{n\geq1}$ converge.

Podemos, por lo tanto, considerar el número $k \coloneqq \max D$.

Supongamos por un momento que $k < d$. Como k pertenece al conjunto D, hay una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, j\}$ la sucesión $(x_{f(n),i})_{n\geq1}$ converge. Por otro lado, como la subsucesión $(x_{f(n),k+1})_{n\geq1}$ de la sucesión $(x_{n,k})_{n\geq1}$ es acotada, el Teorema de Bolzano–Weierstrass 3.7.11 nos dice que hay una función estrictamente creciente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{f(g(n)),k+1})_{n\geq1}$ converge. Tenemos entonces que las $k + 1$

$$(x_{f(g(n)),1})_{n\geq1}, \qquad (x_{f(g(n)),2})_{n\geq1}, \qquad \ldots, \qquad (x_{f(g(n)),k})_{n\geq1}$$

convergen y, por lo tanto, que la función $h \coloneqq f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que es estrictamente creciente, es tal que para cada $i \in \{1, \ldots, k + 1\}$ la sucesión $(x_{g(n),i})_{n\geq1}$ converge. En otras palabras, el entero $k + 1$ pertenece al conjunto D, y esto es absurdo porque es mayor que k.

Vemos así que debe ser necesariamente $k = d$ y, en consecuencia, que existe una función estrictamente creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que las d sucesiones $(x_{f(n),1})_{n\geq1}, (x_{f(n),2})_{n\geq1}, \ldots (x_{f(n),d})_{n\geq1}$, convergen. Todo esto junto prueba que el conjunto F es relativamente compacto, que es lo que queremos. □

Apoyándonos en esta proposición podemos obtener la caracterización que nos interesa:

Corolario 5.7.3. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ es compacto si y solamente si es cerrado y acotado.*

Demostración. Un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es relativamente compacto de acuerdo a la Proposición 5.7.2 y cerrado, así que es compacto. Por otro lado, un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ es cerrado y, como es relativamente compacto, es acotado. □

Este corolario nos da una caracterización geométrica de los conjuntos compactos. Hay otra caracterización que es todavía más importante, ya que da la clave de cómo puede extenderse esa noción a situaciones mucho más generales, que queremos presentar ahora. Necesitaremos para ello algunas consideraciones preliminares sobre la noción de numerabilidad.

Definición 5.7.4. Un conjunto X es ***numerable*** si es vacío o hay una función sobreyectiva $\mathbb{N} \to X$.

Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{N}$ es numerable, ya que la función identidad $\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es sobreyectiva. Por otro lado, un conjunto finito y no vacío $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ de cardinal k es numerable, porque la función $f : n \in \mathbb{N} \to x_{\min\{n,k\}} \in X$ es sobreyectiva.

El siguiente lema muestra que ciertas operaciones entre conjuntos numerables tienen como resultado conjuntos numerables.

Lema 5.7.5.

(*i*) *Si X es un conjunto numerable y $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva, entonces el conjunto Y es numerable.*

(*ii*) *Si X es un conjunto numerable e Y es un subconjunto de X, entonces Y es numerable.*

(*iii*) *Si X e Y son conjuntos numerables, entonces el producto cartesiano $X \times Y$ también es numerable.*

(*iv*) *Si $(X_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos numerables, entonces la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ es numerable.*

Demostración. (*i*) Si X es un conjunto numerable, de manera que hay una función sobreyectiva $g : \mathbb{N} \to X$, y $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva, entonces la composición $f \circ g : \mathbb{N} \to Y$ es sobreyectiva y, por lo tanto, el conjunto $\mathbb{N}$ es numerable.

(*ii*) Sea X un conjunto numerable y sea Y un subconjunto de X. Si Y es vacío, entonces es numerable. Supongamos que Y no es vacío, de manera que X tampoco lo es. Existe entonces una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to X$ y un elemento y_0 en Y. Definamos una función $g : \mathbb{N} \to Y$ poniendo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } f(n) \in Y; \\ y_0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esta función es sobreyectiva y, por lo tanto, el conjunto Y es numerable. En efecto, si y es un elemento cualquiera de Y, entonces la sobreyectividad de la función f implica que existe un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = y$ y, por lo tanto, es $g(n) = y$.

(*iii*) Sean X e Y dos conjuntos numerables. Si alguno de los dos es vacío, entonces el producto $X \times Y$ también lo es y, por lo tanto, se trata de un conjunto numerables. Supongamos ahora que ninguno de los dos es vacío, de manera que podemos elegir elementos x_0 en X e y_0 en Y y hay funciones sobreyectivas $f : \mathbb{N} \to X$ y $g : \mathbb{N} \to Y$. Definimos una función $h : \mathbb{N} \to X \times Y$ de la siguiente manera: si n es un elemento de $\mathbb{N}$, entonces

- o bien n es divisible por algún número primo distinto de 2 y de 3, y en ese caso ponemos $h(n) = (x_0, y_0)$,
- o bien hay enteros no negativos a y b tales que $n = 2^a 3^b$, y en ese caso ponemos $h(n) = (f(a+1), g(b+1))$.

Si (x, y) es un elemento cualquiera de $X \times Y$, entonces hay elementos n y m de $\mathbb{N}$ tales que

$x = f(n)$ e $y = f(m)$, y es $(x, y) = h(2^{n-1}3^{m-1})$. Esto prueba que la función h es sobreyectivas y, por lo tanto, el lema.

(iv) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos numerables, y sea $X \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Si este conjunto X es vacío, es numerable. Supongamos que no lo es y sea x_0 uno cualquiera de sus elementos.

Como el conjunto $\mathbb{N}$ es numerable, la parte (i) del lema nos dice que el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y, por lo tanto, que existe una función sobreyectiva $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sean, por otro lado, $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las funciones tales que $\pi_1(n, m) = n$ y $\pi_2(n, m) = m$ para todo $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sea $I \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : X_n \neq \varnothing\}$, para cada $n \in I$ sea $f_n : \mathbb{N} \to X_n$ una función sobreyectiva, y consideremos la función $f : \mathbb{N} \to X$ que en cada entero positivo n toma el valor

$$f(n) = \begin{cases} f_{\pi_1(\lambda(n))}(\pi_2(\lambda(n))) & \text{si } \pi_1(\lambda(n)) \in I; \\ x_0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esta función es sobreyectiva, y esto prueba lo que queremos. En efecto, si x es un elemento de X, entonces existe un entero positivo n tal que $x \in X_n$, de manera que $n \in I$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(m) = x$: como la función λ es sobreyectiva, existe además $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(p) = (n, m)$ y, por lo tanto, $f(n) = f_{\pi_1(\lambda(n))}(\pi_2(\lambda(n))) = f_n(m) = x$. □

La tercera parte de este lema puede generalizarse fácilmente a productos cartesianos de más de dos factores:

Ejercicio 5.7.6. Muestre que si k es un entero positivo y $X_1, \dots, X_k$ son conjuntos numerables, entonces el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_k$ es numerable.

Demos un ejemplo importante de un conjunto numerable.

Ejemplo 5.7.7. Sabemos que el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y no vacío, así que hay una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Podemos considerar entonces la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ que en cada elemento n de $\mathbb{N}$ que tiene imagen (a, b, c) por f toma el valor

$$g(n) = (-1)^a \frac{b}{c}.$$

Es fácil ver que esta función es sobreyectiva, así que el conjunto $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es numerable. Como $\{0\}$ también lo es, vemos con esto que $\mathbb{Q} = \{0\} \cup (\mathbb{Q} \cup \{0\})$ es numerable.

Con toda esta información a nuestra disposición, volvamos a los conjuntos compactos.

Definición 5.7.8. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Una familia $\mathscr{U}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ es un ***cubrimiento*** de X si $X \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{U}} U$ y es un ***cubrimiento abierto*** si además cada uno de los elementos de $\mathscr{U}$ es abierto. Un ***subcubrimiento*** de $\mathscr{U}$ es un cubrimiento $\mathscr{V}$ de X tal que $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$.

La primera observación que tenemos que hacer sobre cubrimientos abiertos es la siguiente:

Proposición 5.7.9. *Todo cubrimiento abierto de un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ contiene un subcubrimiento numerable.*

Este resultado es conocido como el Lema de Lindelöf, por Ernst Leonard Lindelöf.

Demostración. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X. Si X es vacío, entonces $\varnothing$ es un subcubrimiento de $\mathscr{U}$ que es numerable, así que podemos suponer que $X \neq \varnothing$. Esto implica que también $\mathscr{U} \neq \varnothing$ y podemos entonces fijar un elemento U_0 de $\mathscr{U}$.

Para cada punto q de $\mathbb{Q}^d$ y cada número racional positivo s elijamos un elemento $U(q,s)$ de $\mathscr{U}$ de la siguiente manera:

- Si hay elementos de $\mathscr{U}$ que contienen a $B_s(q)$, elegimos uno cualquiera de ellos y lo llamamos $U(q,s)$.
- Si, por el contrario, no hay ninguno, ponemos $U(q,s) \coloneqq U_0$.

Sea x un elemento de X. Como $\mathscr{U}$ es un cubrimiento de X, hay un elemento U de $\mathscr{U}$ tal que $x \in U$, y como el conjunto U es abierto, hay un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq U$. De acuerdo a la Proposición 5.2.21 hay un elemento q de $\mathbb{Q}^d$ que pertenece a $B_{r/2}(x)$, y de acuerdo a la Proposición 2.5.4.3 hay un número racional s tal que $d(x,q) < s < r/2$. Tenemos entonces que $x \in B_s(q)$ y, gracias a la desigualdad triangular, que

$$B_s(q) \subseteq B_r(x) \subseteq U,$$

así que hay elementos de $\mathscr{U}$ que contienen a $B_s(q)$ y, por lo tanto, $x \in B_s(q) \subseteq U(q,s)$. Esto prueba que

$$\mathscr{V} \coloneqq \{U(q,s) : q \in \mathbb{Q}^d, s \in \mathbb{Q}_+\}$$

es un subcubrimiento de $\mathscr{U}$. Ahora bien, sabemos que el conjunto $\mathbb{Q}^{d+1}$ es numerable, así que su subconjunto $\mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+$ también lo es. Como la función $(q,s) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ \mapsto U(q,s) \in \mathscr{V}$ es sobreyectiva, podemos concluir que este subcubrimiento $\mathscr{V}$ de $\mathscr{U}$ es numerable. □

Usando el lema de Lindelöf podemos dar una mejora significativa del Corolario 5.2.14:

Ejercicio 5.7.10. Muestre que todo abierto de $\mathbb{R}^d$ es la unión de una familia *numerable* de bolas abiertas.

La caracterización que buscamos de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ puede verse, a su vez, como una mejora del lema de Lindelöf para los conjuntos compactos:

Proposición 5.7.11. *Un subconjunto F de $\mathbb{R}^d$ es compacto si y solamente si todo cubrimiento abierto de F contiene un subcubrimiento finito de F.*

Demostración. Sea F un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ y sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de F. De acuerdo al lema de Lindelöf 5.7.9, hay un subcubrimiento numerable $\mathscr{V}$ de $\mathscr{U}$ y hay entonces una función subreyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathscr{V}$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que no hay en $\mathscr{U}$ ningún subcubrimiento finito de F. En particular, si n es un entero positivo, entonces el subconjunto $V_n \coloneqq \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ de $\mathscr{V}$ no es un cubrimiento de F, así que existe un elemento x_n en $F \setminus \bigcup_{k=1}^{n} f(k)$. Obtenemos de esta forma una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ de puntos de F. Como F es compacto, hay entonces una función estrictamente creciente $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la subsucesión $(x_{h(n)})_{n\geq1}$ converge a un punto ξ de F.

Como $\mathscr{V}$ es un cubrimiento de F y la función f es sobreyectiva, existe un entero positivo m tal que $\xi \in f(m)$. Por otro lado, como la subsucesión $(x_{h(n)})_{n\geq1}$ converge a ξ y $f(m)$ es un entorno de ξ, existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies x_{h(n)} \in f(m).$$

Como $n_0 < h(m + n_0)$, esto nos dice que $x_{h(m+n_0)} \in f(m)$, y esto es absurdo ya que $x_{h(m+n_0)}$ pertenece al conjunto $F \setminus \bigcup_{k=1}^{h(m+n_0)} f(k)$, que es disjunto con $f(m)$ porque $m < h(m + n_0)$.

Esta contradicción prueba que $\mathscr{V}$, y por lo tanto $\mathscr{U}$, contiene un subcubrimiento finito de F.

Supongamos ahora que F es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ con la propiedad de que todo cubrimiento abierto de F posee un subcubrimiento finito y, para llegar a una contradicción, que no es compacto, de manera que hay una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ con valores en F que no tiene ninguna subsucesión convergente. Si x es un punto de F, entonces no hay ninguna subsucesión de $(x_n)_{n\geq1}$ que converge a x y, por lo tanto, hay un número positivo r_x tal que el conjunto $S_x \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{r_x}(x)\}$ es finito. El conjunto $\mathscr{U} \coloneqq \{B_{r_x}(x) : x \in F\}$ es un cubrimiento abierto de F, así que la hipótesis implica que hay un subconjunto finito $\Phi = \{y_1, \dots, y_k\}$ de F tal que $\{B_{r_{y_1}}(y_1), B_{r_{y_2}}(y_2), \dots, B_{r_{y_k}}(y_k)\}$ es un cubrimiento de F, es decir,

$$F \subseteq B_{r_{y_1}}(y_1) \cup B_{r_{y_2}}(y_2) \cup \cdots \cup B_{r_{y_k}}(y_k).$$

En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x_n \in B_{r_{y_i}}(y_i)$, ya que $x_n \in F$, y, por lo tanto, $n \in S_{y_i}$. Vemos así que

$$\mathbb{N} \subseteq S_{y_1} \cup S_{y_2} \cup \cdots \cup S_{y_k}.$$

Esto es absurdo, ya que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito y los k conjuntos $S_{y_1}, S_{y_2}, \dots, S_{y_k}$ son finitos. Esta contradicción deja en evidencia que la condición que da la proposición para que el conjunto F sea compacto es suficiente. □

La caracterización de los conjuntos compactos que nos da esta proposición es conocida como el teorema de Heine–Borel, por Heinrich Eduard Heine y Émile Borel, aunque ya en 1852 era conocida por Peter Gustav Lejeune Dirichlet — la usó implícitamente para mostrar que una función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua. Después de Dirichlet, Heine, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass y Salvatore Pincherle usaron ideas similares, pero fue recién Borel en 1894, en su tesis, que enunció el teorema en la forma en que lo hicimos nosotros pero solamente para cubrimientos numerables. El paso final de extender el resultado a cubrimientos arbitrarios fue dado Pierre Cousin, Henri Lebesgue y Arthur Moritz Schönflies en 1895, 1898 y 1900, respectivamente. Es interesante observar que Heine nunca dió una demostración de este resultado — su nombre quedó asociado al teorema porque Schönflies, que era un estudante de Weierstrass, reconoció que las ideas de Heine estaban relacionadas con las de Borel.

Referimos al lector interesado al artículo [RS2015] de Manya Raman-Sundström, en el que se relata en detalle la historia de la definición de compacidad y la evolución del teoreme de Heine–Borel, y a los artículos [Dug1989] de Pierre Dugac y [AEP0] de Nicole Andre, Susannah Engdahl y Adam Parker para ver una historia detallada del teorema y sus demostraciones.

Una aplicación importante de estos resultados es el siguiente resultado conocido como el *lema del número de Lebesgue*, por Henri Lebesgue.

Proposición 5.7.12. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$. Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de K, entonces hay un número positivo δ tal que siempre que x e y son dos puntos de K tales que $\|x-y\| < \delta$ existe un abierto U en $\mathscr{U}$ tal que $x, y \in U$.*

Llamamos a todo número δ con esa propiedad un ***número de Lebesgue*** del cubrimiento $\mathscr{U}$.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de K. Para cada $x \in K$ existe entonces un elemento U_x de $\mathscr{U}$ tal que $x \in U_x$ y, como U_x es abierto, un número positivo $r(x)$ tal que $B_{r(x)}(x) \subseteq U_x$. El conjunto $\mathscr{U}' \coloneqq \{B_{r(x)}(x) : x \in K\}$ es claramente un cubrimiento abierto de K, así que la Proposición 5.7.11 nos dice que $\mathscr{U}'$ posee un subcubrimiento finito. Existen entonces un entero positivo n y puntos $x_1, \dots, x_n$ de K tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r(x_i)/2}(x_i). \tag{5.2}$$

Mostremos que el número $\delta \coloneqq \frac{1}{2} \min\{r(x_1), \dots, r(x_n)\}$, que es positivo, tiene la propiedad descripta en la proposición.

Sean x e y dos puntos de K tales que $\|x-y\| < \delta$. De acuerdo a (5.2), hay un elemento i de $\{1, \dots, n\}$, tal que $x \in B_{r(x_i)/2}(x_i)$, y entonces

$$\|x_i - y\| \leq \|x_i - x\| + \|x - y\| \leq \frac{r(x_i)}{2} + \delta \leq \frac{r(x_i)}{2} + \frac{r(x_i)}{2} = r(x_i).$$

Esto nos dice que los dos puntos x e y pertenecen a $B_{r(x_i)}(x_i)$, y esta bola está contenida en el abierto U_{x_i} de $\mathscr{U}$. Esto prueba lo que queremos. $\square$

Capítulo 6
Funciones continuas

6.1. Límites

Nuestra primera tarea en este capítulo es extender la noción de límite — que en el Capítulo 3 y en la Sección 5.6 del Capítulo 5 estudiamos para sucesiones de números y, más generalmente, de puntos de $\mathbb{R}^n$ — a las funciones $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$. A pesar de que los detalles de lo que haremos son ciertamente distintos a lo que hicimos antes, rige todas nuestras definiciones el *principio de mínima sorpresa*: buscamos que esencialmente todos los resultados sean esencialmente los mismos a los que ya tenemos.

Definición 6.1.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea x_0 un punto de acumulación de A, y sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función. Un elemento y de de $\mathbb{R}^e$ es un ***límite*** de f ***en el punto*** x_0 si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

Es importante remarcar el hecho de que solamente definimos la noción de límite de una función en un punto de acumulación del dominio de esta. La primera observación a hacer es la siguiente:

Lema 6.1.2. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x_0 un punto de acumulación de A. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ tiene como mucho* un *límite en x_0.*

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, sean y e y' dos límites de f en x_0, y, para llegar a una contradicción, supongamos que y e y' son distintos, de manera que el número $\varepsilon := \frac{1}{2}\|y - y'\|$ es positivo. Como y es un límite de f en x_0, existe un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon, \tag{6.1}$$

y, de manera similar, como y' es un límite de f en x_0, existe un número positivo δ' tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta' \implies \|f(x) - y'\| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Sea $\eta := \text{mín}\{\delta, \delta'\}$, que es un número positivo. Como x_0 es un punto de acumulación de A, podemos elegir en el conjunto $B_\eta(x_0) \cap A$ un elemento x_1 distinto de x_0, y de acuerdo a (6.1) y (6.2), tenemos que

$$\|y - y'\| \leq \|y - f(x_1)\| + \|f(x_1) - y'\| < \varepsilon + \varepsilon = \|y - y'\|.$$

Esto es, por supuesto, imposible, y esta contradicción provino de haber supuesto que los límites y e y' de f en x_0 son distintos. Esto prueba la afirmación del lema. □

En vista de este lema, si una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ tiene un límite en un punto de acumulación x_0 de A, entonces tiene exactamente uno y podemos referirnos a él como *el* límite de f en x_0 y escribirlo

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Observación 6.1.3. Como dijimos, solamente definimos la noción de límite de una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ con dominio en un subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ en un punto x_0 que es un punto de acumulación de A. Si x_0 no es un punto de acumulación de A, entonces hay un número positivo δ tal que $B_\delta(x) \cap A \subseteq \{x\}$ y, como consecuencia de esto, cualquiera sea $y \in \mathbb{R}^e$ vale que

para todo número positivo ε y para todo $x \in A$ se tiene que $0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon$.

Vemos así que si no impusiéramos la condición de que el punto x_0 sea uno de acumulación de A en la Definición 6.1.1 entonces la afirmación del Lema 6.1.2 no sería cierta.

Podemos caracterizar los límites de una función en términos topológicos:

Proposición 6.1.4. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea x_0 un punto de A', sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, y sea y un elemento de $\mathbb{R}^e$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *El límite de f en x_0 es y.*

(*b*) *Para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que $f(B_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq B_\varepsilon(y)$.*

(*c*) *Para todo entorno V de y hay un entorno U de x_0 tal que $f(U \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.*

Demostración. (*a*) ⇒ (*b*) Supongamos que el límite de f en x_0 es y y sea ε un número positivo. Existe entonces un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

Si x es un elemento de $B_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$, entonces tenemos que $\|x - x_0\| < \delta$, $x \in A$ y $x \neq x_0$, así que $0 < \|x - x_0\| < \delta$ y, por lo tanto, la forma en que elegimos a δ implica que $\|f(x) - y\| < \varepsilon$, esto es, que $f(x) \in B_\varepsilon(y)$. Esto muestra que $f(B_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq B_\varepsilon(y)$, como queremos.

(*b*) ⇒ (*c*) Supongamos que vale la afirmación (*b*) de la proposición y sea V un entorno de y, de manera que hay un número positivo ε tal que $B_\varepsilon(y) \subseteq V$. La hipótesis implica que hay también un número positivo δ tal que $f(B_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq B_\varepsilon(y)$ y el conjunto $U \coloneqq B_\delta(x_0)$ es entonces un entorno de x_0 y es $f(U \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq B_\varepsilon(y) \subseteq V$. Esto prueba que vale la afirmación (*c*).

(*c*) ⇒ (*a*) Supongamos finalmente que vale la afirmación (*c*) de la proposición y sea ε un número positivo. Como $B_\varepsilon(y)$ es un entorno de y, la hipótesis nos dice que existe un entorno U de x_0 tal que $f(U \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq B_\varepsilon(y)$. Como U es un entorno de x_0, hay un número positivo δ tal que $B_\delta(x_0) \subseteq U$. Si x es un elemento de A tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$, entonces es $x \in B_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$ y, por lo tanto, $f(x) \in B_\varepsilon(y)$, esto es, $\|f(x) - y\| < \varepsilon$. Podemos concluir que y es un límite de f en x_0 y, en definitiva, que vale la afirmación (*a*). □

Otra caracterización importante de los límites de una función es en términos de sucesiones:

Proposición 6.1.5. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea x_0 un punto de A', sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, y sea y un elemento de $\mathbb{R}^e$. El límite de f en x_0 es y si y solamente si para toda sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 la sucesión $(f(x_n))_{n\geq1}$ converge a y.*

Demostración. Supongamos primero que el límite de f en x_0 es y, consideremos una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0, y sea ε un número positivo. La hipótesis sobre f nos dice que hay un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Por otro lado, como la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ converge a x_0, sabemos que hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Ahora bien, si n es un entero tal que $n \geq n_0$, la forma en que elegimos a n_0 implica que $\|x_n - x_0\| < \delta$ y, como la sucesión toma valores en $A \setminus \{x_0\}$, es $x_n \neq x_0$: de acuerdo a (6.3), es entonces

$\|f(x_n) - y\| < \varepsilon$. Esto prueba que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a y y, en definitiva, que la condición que da la proposición para que el límite de f en x_0 sea y es necesaria.

Mostremos ahora que esa condición también es suficiente. Supongamos que y no es el límite de f en x_0: esto significa que hay un número positivo ε tal que para todo número positivo δ existe un punto x en A tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$ y $\|f(x) - y\| \geq \varepsilon$. En particular, para cada entero positivo n podemos elegir un elemento x_n en A tal que $0 < \|x_n - x_0\| < 1/n$ y $\|f(x_n) - y\| \geq \varepsilon$. Obtenemos de esta forma una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ que toma valores en $A \setminus \{x_0\}$, que converge a x_0 y tal que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ no converge a y. Esto prueba lo que queremos. □

Una de las razones por la que esta caracterización de límites de funciones en términos de límites de sucesiones es útil es que nos permite usar todo lo que sabemos sobre estos últimos para obtener información sobre aquellos. Un ejemplo sencillo de esto es el siguiente resultado.

Proposición 6.1.6. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea x_0 un punto de A', sean $f, g : A \to \mathbb{R}^e$ y $h : A \to \mathbb{R}$ funciones, y sean y y z elementos de $\mathbb{R}^e$ y t un elemento de $\mathbb{R}$.*

(*i*) *Si f y g tienen límites y y z en x_0, entonces la función $f + g : x \in A \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^e$ tiene límite $y + z$ en x_0, de manera que*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

(*ii*) *Si h y f tienen límites t e y en x_0, entonces la función $h \cdot f : x \in A \mapsto h(x) \cdot f(x) \in \mathbb{R}^e$ tiene límite $t \cdot y$ en x_0, de manera que*

$$\lim_{x\to x_0} (h(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} h(x) \cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

(*iii*) *Si la función h tiene límite t en x_0 y es $t \neq 0$ y $h(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces la función $1/h : x \in A \mapsto 1/h(x) \in \mathbb{R}$ tiene límite $1/t$ en x_0, de manera que*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} h(x)}.$$

Demostración. (*i*) Supongamos que las funciones f y g tienen límites y y z en x_0, y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0. La hipótesis sobre f y g y la Proposición 6.1.5 implican que las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y $(g(x_n))_{n\geq 1}$ convergen a y y a z, respectivamente, y entonces la Proposición 5.6.9 nos dice que la sucesión $(f(x_n) + g(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $y + z$. De acuerdo a la Proposición 6.1.5, esto nos permite concluir que la función $f + g$ tiene límite $y + z$ en x_0, como afirma la proposición.

(*ii*) Supongamos ahora que las funciones h y f tienen límites t e y en x_0, y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0. La hipótesis sobre h y f y la Proposición 6.1.5

implican que las sucesiones $(h(x_n))_{n\geq1}$ y $(f(x_n))_{n\geq1}$ convergen a t y a y, respectivamente, y la Proposición 5.6.9 que entonces la sucesión $(h(x_n)\cdot f(x_n))_{n\geq1}$ converge a $t\cdot y$. De acuerdo a la Proposición 6.1.5, entonces, el límite de la función $h\cdot f$ en x_0 es $t\cdot y$.

(*iii*) Para terminar, supongamos que la función h tiene límite t en x_0, que $t\neq0$, y que $h(x)\neq0$ para todo $x\in A$, de manera que, en particular, podemos considerar la función $1/h : x\in A\mapsto 1/h(x)\in\mathbb{R}$. Si $(x_n)_{n\geq1}$ es una sucesión con valores en $A\smallsetminus\{x_0\}$, entonces la hipótesis sobre h y la Proposición 6.1.5 implican que la sucesión $(h(x_n))_{n\geq1}$ converge a t, y la Proposición 3.5.2 nos dice que en consecuencia la sucesión $(1/h(x_n))_{n\geq1}$ converge a $1/t$. Usando la Proposición 6.1.5 podemos concluir de todo esto que el límite de la función $1/h$ en x_0 es $1/t$. □

Ejercicio 6.1.7. Pruebe la Proposición 6.1.6 directamente, esto es, sin usar la Proposición 6.1.5, usando argumentos similares a los que usamos para probar las Proposiciones 3.5.2 y 5.6.9.

La siguiente proposición nos dice que si una función tiene límite en un punto y ese límite se satisface ciertas condiciones entonces esas condiciones se satisfacen, de hecho, en todo un entorno perforado del punto. Esto nos permite «extrapolar» información sobre la función, al menos localmente, a partir de información sobre su límite y es extremadamente útil.

Proposición 6.1.8. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x_0 un punto de A'*

(*i*) *Si $f : A\to\mathbb{R}^e$ es una función que tiene límite y en x_0 y z es un elemento de $\mathbb{R}^e$ distinto de y entonces hay un número positivo r tal que $z\notin f(B_r(x_0)\cap A\smallsetminus\{x_0\})$.*

(*ii*) *Si $f : A\to\mathbb{R}$ es una función que tiene límite y en x_0 y es $y>0$, entonces hay un número positivo r tal que $f(x)>0$ para todo $x\in B_r(x_0)\cap A\smallsetminus\{x_0\}$.*

(*iii*) *Si $f : A\to\mathbb{R}^e$ es una función que tiene límite en x_0, entonces hay un número positivo r tal que f es acotada sobre el conjunto $B_r(x_0)\cap A$, esto es, tal que el conjunto $\{f(x) : x\in B_r(x_0)\cap A\}$ es acotado superiormente.*

Demostración. (*i*) Sea $f : A\to\mathbb{R}^e$ una función y sean y y z puntos de $\mathbb{R}^e$ tales que y es el límite de f en x_0 y $z\neq y$. El número $\|y-z\|$ es entonces positivo, así que la hipótesis sobre f nos dice que hay un número positivo r tal que para todo $x\in A$ vale

$$0<\|x-x_0\|<r \implies \|f(x)-y\|<\|y-z\|.$$

Si x es un elemento de $B_r(x_0)\cap A\smallsetminus\{x_0\}$, entonces es $0<\|x-x_0\|<r$, así que tenemos que $\|f(x)-y\|<\|z-y\|$ y, en particular, es $f(x)\neq z$: vemos con esto que $z\notin f(B_r(x_0)\cap A\smallsetminus\{x_0\})$.

(*ii*) Sea $f : A\to\mathbb{R}$ una función que tiene límite y en x_0 y supongamos que $y>0$. El número $y/2$ es entonces también positivo y la hipótesis sobre f implica que hay un número positivo r tal que para todo $x\in A$ vale

$$0<\|x-x_0\|<r \implies \|f(x)-y\|<\frac{y}{2}.$$

Si x es un punto de $B_r(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}$, de manera que $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < r$, tenemos entonces que $|f(x) - y| = \|f(x) - y\| < y/2$, así que, en particular, $f(x) > y - y/2 > 0$.

(*iii*) Sea, finalmente, $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función que tiene límite en x_0 y sea y ese límite. Esto implica que hay un número positivo r tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < r \implies \|f(x) - y\| < 1.$$

Si x es un elemento de $B_r(x_0) \cap A$ distinto de x_0, entonces tenemos que $x \in A$ y $0 < \|x - x_0\| < r$, así que

$$\|f(x)\| = \|f(x) - y + y\| \le \|f(x) - y\| + \|y\| \le 1 + \|y\|.$$

Si x_0 no pertenece a A, esto nos dice que $1 + \|y\|$ es una cota superior para el conjunto $\{f(x) : x \in B_r(x_0) \cap A\}$. Si en cambio x_0 sí pertenece a A, este conjunto tiene a $1 + \|y\| + \|f(x_0)\|$ como cota superior. En cualquier caso, entonces, se trata de un conjunto acotado, como afirma la proposición. □

El siguiente *criterio de intercalación* es una versión del que da la Proposición 3.3.2.1 en el contexto de los límites de funciones:

Proposición 6.1.9. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea x_0 un punto de A', sean f, g, $h : A \to \mathbb{R}$ tres funciones, y sea y un número. Si para todo $x \in A$ se tiene que*

$$f(x) \le g(x) \le h(x),$$

y las funciones f y h tienen límite y en el punto x_0, entonces la función g también tiene límite y allí.

Demostración. Supongamos que para todo $x \in A$ esa $f(x) \le g(x) \le h(x)$ y que las funciones f y h tienen límite y en x_0, y sea ε un número positivo. Existen entonces números positivos δ_1 y δ_2 tales que para todo $x \in A$ valen

$$\|x - x_0\| < \delta_1 \implies |f(x) - y| < \varepsilon, \qquad \|x - x_0\| < \delta_2 \implies |h(x) - y| < \varepsilon.$$

Pongamos $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, que es un número positivo, y sea x un elemento de A tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$. Por la forma en que elegimos δ, es $y - \varepsilon < f(x)$ y $h(x) < y + \varepsilon$, así que

$$y - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < y + \varepsilon,$$

de manera que $|h(x) - y| < \varepsilon$. Esto prueba que la función g tiene límite y en x_0, como queremos. □

Como en las situaciones que consideramos antes, podemos dar una condición para la existencia de un límite de una función que no involucre el valor de este.

Definición 6.1.10. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x_0 un punto de acumulación de A. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ satisface la ***condición de Cauchy*** en x_0 si para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que para cada par de elementos x e y de A vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta, 0 < \|y - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Esta condición caracteriza la existencia de límites:

Proposición 6.1.11. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x_0 un punto de acumulación de A. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ tiene límite en x_0 si y solamente si satisface la condición de Cauchy en x_0.*

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función y supongamos primero que f tiene un límite y en x_0. Sea ε un número positivo. La hipótesis sobre f implica que hay un número positivo δ tal que para cada $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particular, si x y x' son dos elementos de A tales que $0 < \|x - x_0\| < \delta$ y $0 < \|x' - x_0\| < \delta$, entonces tenemos que

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \|f(x) - y\| + \|y - f(x')\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vemos así que la función satisface la condición de Cauchy en x_0 y, por lo tanto, que esta condición es necesaria para que posea un límite en ese punto.

Para probar que también es suficiente, supongamos que f la satisface. Mostraremos que f posee un límite en x_0 en varios pasos.

Primer paso. Mostremos primero que

si $(x_n)_{n\geq1}$ es una sucesión con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0, entonces la sucesión $(f(x_n))_{n\geq1}$ converge. (6.4)

Sea, para ello $(x_n)_{n\geq1}$ una sucesión con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0: para probar que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq1}$ converge es suficiente, de acuerdo a la Proposición 5.6.12, que probemos que es de Cauchy. Sea entonces ε un número positivo. Como la función f satisface la condición de Cauchy en x_0, existe un número positivo δ tal que para cada par de elementos x e y de A vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta, 0 < \|y - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Por otro lado, como la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ converge a x_0, hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Si p y q son dos enteros mayores o iguales que n_0, entonces tenemos que $\|x_p - x_0\| < \delta$ y $\|x_q - x_0\| < \delta$ y, como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ toma valores en $A \setminus \{x_0\}$, que $\|x_p - x_0\| > 0$ y $\|x_q - x_0\| > 0$, así que de (6.5) podemos deducir que $\|f(x_p) - f(x_q)\| < \varepsilon$. Esto prueba que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy y, como dijimos, que vale (6.4).

Segundo paso. Mostremos ahora que

si $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(x'_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que convergen a x_0, entonces la sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y $(f(x'_n))_{n\geq 1}$, que de acuerdo a (6.4) convergen, tienen de hecho el mismo límite.

Sean para ello $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(x'_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que convergen a x_0, y sean y e y' los límites de las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y $(f(x'_n))_{n\geq 1}$. Sea ε un número positivo. Como la función f satisface la condición de Cauchy en x_0, hay un número positivo δ tal que para cada par de elementos x y x' de A vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta, 0 < \|x' - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x')\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.6}$$

Por otro lado, como las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(x'_n)_{n\geq 1}$ convergen a x_0, hay enteros positivo n_1 y n_2 tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ valen

$$n \geq n_1 \implies \|x_n - x_0\| < \delta, \qquad n \geq n_2 \implies \|x'_n - x_0\| < \delta. \tag{6.7}$$

Finalmente, como las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y $(f(x'_n))_{n\geq 1}$ convergen a y y a y', respectivamente, existen enteros positivos n_3 y n_4 tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ valen

$$n \geq n_3 \implies \|f(x_n) - y\| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \geq n_4 \implies \|f(x'_n) - y'\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.8}$$

Pongamos $m \coloneqq \text{máx}\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$. De (6.7) y de que las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ y $(x'_n)_{n\geq 1}$ tomen valores en $A \setminus \{x_0\}$ vemos que $0 < \|x_m - x_0\| < \delta$ y $0 < \|x_0 - x'_m\| < \delta$, así que de acuerdo a (6.6) tenemos que $\|f(x_m) - f(x'_m)\| < \varepsilon/3$. Usando esto y (6.8) vemos que

$$\|y - y'\| \leq \|y - f(x_m)\| + \|f(x_m) - f(x'_m)\| + \|f(x'_m) - y'\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Podemos concluir con todo esto que el número $\|y - y'\|$ es menor que todo número positivo: por supuesto, esto significa que es, de hecho, nulo y, en consecuencia, que $y = y'$, que es lo que queríamos probar.

Tercer paso. A esta altura sabemos que hay un punto y en $\mathbb{R}^e$ tal que

cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en $A \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a y.

Para completar la prueba de que la condición de Cauchy en x_0 es suficiente para que la función f tenga un límite en x_0 mostraremos que y es un límite de f en x_0.

Sea para ello ε un número positivo y supongamos que, contra lo que queremos, no existe un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

En particular, esto nos dice que para cada entero positivo n hay un elemento x_n de A tal que $0 < \|x_n - x_0\| < 1/n$ y $\|f(x_n) - y\| \geq \varepsilon$. La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ que obtenemos de esta forma claramente toma valores en $A \setminus \{x_0\}$ y converge a x_0, así que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a y. Esto implica que hay un entero positivo m tal que $\|f(x_m) - y\| < \varepsilon$, claro, y esto es absurdo en vista de la forma en que elegimos el punto x_m.

Esta contradicción implica que para todo número positivo ε hay un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon,$$

es decir, que y es un límite para f en x_0, como queremos. Esto completa, por fin, la demostración de la proposición. □

Para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ la ***proyección canónica*** es la función

$$\pi_i : (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto x_i \in \mathbb{R}.$$

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función, llamamos ***componentes*** a las d funciones $A \to \mathbb{R}$ dadas por las composiciones

$$f_1 \coloneqq \pi_1 \circ f, \quad f_2 \coloneqq \pi_2 \circ f, \quad \ldots, \quad f_d \coloneqq \pi_d \circ f.$$

Es evidente que cualquiera sea el elemento x de A se tiene que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_d(x)),$$

y, de hecho, esta propiedad caracteriza unívocamente a esas proyecciones.

Nuestro siguiente resultado caracteriza los límites de una función en un punto en términos de los límites de las componentes de esa función en ese punto y nos permite en muchas situaciones reducir el estudio de funciones $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ al de funciones $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Proposición 6.1.12. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea y un elemento de A', sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, y sea $y = (y_1, y_2, \ldots, y_e)$ un elemento de $\mathbb{R}^e$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *El límite de la función f en x_0 es y.*

(b) *Para cada $i \in \{1, \ldots, e\}$ el límite de la componente f_i de f en x_0 es y_i.*

Demostración. Supongamos primero que vale la afirmación (a), fijemos un elemento i del conjunto $\{1, \dots, e\}$, y sea ε un número positivo. La hipótesis implica que hay un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - y\| < \varepsilon.$$

Si ahora x es un elemento cualquiera de A tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$, entonces gracias al Lema 5.1.5 vemos que $|f_i(x) - y_i| \leq \|f(x) - y\| < \varepsilon$: esto muestra que f_i tiene límite y_i en x_0 y prueba la afirmación (b).

Supongamos ahora que vale la afirmación (b) y sea ε un número positivo, de manera que para cada $i \in \{1, \dots, e\}$ existe un número positivo δ_i tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta_i \implies |f_i(x) - y_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Pongamos $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \dots, \delta_e\}$, que es un un número positivo. Si x es un elemento de A tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$, entonces para cada $i \in \{1, \dots, e\}$ tenemos que $|f_i(x) - y_i| < \varepsilon$ y, por lo tanto,

$$\|f(x) - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

Esto muestra que y es el límite de f en x_0, que es lo que queremos. $\square$

La siguiente definición le pone nombre a un caso particular de la Definición 6.1.1 que es frecuentemente útil.

Definición 6.1.13. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, sea x_0 un número, y sea y un elemento de $\mathbb{R}^e$.

- Si x_0 es un punto de acumulación del conjunto $A^+_{x_0} \coloneqq A \cap [x_0, +\infty)$, y la restricción $f|_{A^+_{x_0}} : A^+_{x_0} \to \mathbb{R}^e$ tiene límite y en x_0, entonces decimos que y es el ***límite por derecha*** de f en x_0 y escribimos

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = y.$$

- De manera similar, si x_0 es un punto de acumulación del conjunto $A^-_{x_0} \coloneqq A \cap (-\infty, x_0]$, y la restricción $f|_{A^-_{x_0}} : A^+_{x_0} \to \mathbb{R}^e$ tiene límite y en x_0, entonces decimos que y es el ***límite por izquierda*** de f en x_0 y escribimos

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y.$$

Una de las razones por las que estas definiciones son útiles es el siguiente resultado.

Ejercicio 6.1.14. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, sea x_0 un número que es punto de acumulación de $A \cap [x_0, +\infty)$ y de $A \cap (-\infty, x_0]$, y sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función. Muestre que la función f tiene límite en x_0 si y solamente si tiene límite por derecha y por izquierda en ese punto y ambos tienen el mismo valor, y que cuando ese es el caso se tiene, de hecho, que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x).$$

Dé un ejemplo para mostrar que puede ocurrir que los dos límites laterales existan pero que tengan valores distintos, o que uno de ellos exista y el otro no.

6.2. Continuidad puntual

Nuestra siguiente definición presenta el concepto central de este capítulo.

Definición 6.2.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x un punto de A. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ es ***continua*** en x_0 si para todo número positivo ε existe otro número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Es importante notar que una función solamente puede ser continua en un punto de su dominio.

Lema 6.2.2. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, y sea x_0 un punto de A. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ es continua si y solamente si o bien el punto x_0 es aislado en A o bien el límite de f en x_0 es $f(x_0)$.*

Demostración. Supongamos primero que la función f es continua en x_0 y que este no es aislado en A, y mostremos que el límite de f en x_0 es $f(x_0)$. Sea, para ello, ε un número positivo. La hipótesis sobre f implica que hay un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Si x es un elemento de A tal que $0 < \|x - x_0\| < \delta$, tenemos entonces que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, y esto nos dice que $f(x_0)$ es el límite de f en x_0. Esto prueba la necesidad de la condición que da la proposición. Mostremos ahora su suficiencia.

Supongamos que vale y sea ε un número positivo. Si x_0 es un punto aislado de A, entonces hay un número positivo δ tal que $B_\delta(x_0) \cap A = \{x_0\}$ y es claro que para todo $x \in A$ vale

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon,$$

y entonces la función f es continua en x_0 en ese caso.

Supongamos entonces que x_0 no es un punto aislado de A, de manera que la hipótesis implica que $f(x_0)$ es el límite de f en x_0 y, por lo tanto, que existe un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Sea x un elemento cualquiera de A tal que $\|x - x_0\| < \delta$. Si $x = x_0$, entonces claramente $\|f(x) - f(x_0\|) = 0 < \varepsilon$, y si en cambio es $x \neq x_0$, de manera que $0 < \|x - x_0\|$, entonces la elección de δ nos dice que también $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Esto prueba que la función f es continua en x_0, como queremos. □

Como con los límites de funciones, podemos caracterizar la continuidad de una función en un punto en términos topológicos y en términos de sucesiones. Lo primero es lo que hace la siguiente proposición.

Proposición 6.2.3. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, y sea x_0 un punto de A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *La función f es continua en x_0.*

(*b*) *Para todo entorno V de $f(x_0)$ existe un entorno U de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subseteq V$.*

(*c*) *Para todo entorno V de $f(x_0)$ el conjunto $f^{-1}(V)$ es un entorno de x_0 relativo a A.*

Demostración. (*a*) ⇒ (*b*) Supongamos que la función f es continua en x_0 y sea V un entorno de $f(x_0)$. Existe entonces un número positivo ε tal que $B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$ y, como f es continua en x_0, existe un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Sea $U \coloneqq B_\delta(x_0) \cap A$, que es un entorno de x_0 relativo a A. Si x es un elemento de U, entonces es $\|x - x_0\| < \delta$ y $x \in A$, así que la forma en que elegimos δ implica que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, esto es, que $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)) \subseteq V$. Vemos así que $f(U) \subseteq V$ y, por lo tanto, que vale la afirmación (*b*).

(*b*) ⇒ (*c*) Supongamos que vale la afirmación (*b*) de la proposición y sea V un entorno de $f(x_0)$. La hipótesis implica que existe un entorno relativo U de x_0 en A tal que $f(U) \subseteq V$ y, por lo tanto, tal que $U \subseteq f^{-1}(V)$, de manera que $f^{-1}(V)$ es un entorno de x_0 relativo a A. Esto nos dice que vale la afirmación (*c*), como queremos.

(*c*) ⇒ (*a*) Supongamos finalmente que vale la afirmación (*c*) y sea ε un número positivo. La bola abierta $B_\varepsilon(f(x_0))$ es un entorno de $f(x_0)$, así que la hipótesis nos dice que hay un entorno U de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Hay un abierto U_0 de $\mathbb{R}^d$ tal que $U = U_0 \cap A$ y, a su vez, un número positivo δ tal que $B_\delta(x_0) \subseteq U_0$.

Sea x un elemento de A tal que $\|x - x_0\| < \delta$. Es entonces $x \in B_\delta(x_0) \cap A \subseteq U_0 \cap A = U$, así que $f(x) \in f(U) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$ y, por lo tanto, $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Esto nos dice que f es continua en x_0, es decir, que vale la afirmación (a). □

Por otro lado, la siguiente proposición caracteriza la continuidad en términos de sucesiones:

Proposición 6.2.4. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, y sea x_0 un punto de A. La función f es continua en x_0 si y solamente si cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en A que converge a x_0 la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$.*

Demostración. Supongamos primero que la función f es continua en x_0 y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en A que converge a x_0. Sea ε un número positivo. Como f es continua en x_0, sabemos que existe un número positivo δ tal que para todo $x \in A$ vale

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Por otro lado, como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x_0, existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Sea n un entero mayor o igual que n_0. Por la forma en que elegimos a n_0 tenemos que $\|x_n - x_0\| < \delta$, y por la forma en que elegimos a δ tenemos entonces que $\|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Vemos con todo esto que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$ y podemos concluir que la condición que da la proposición para que la función f sea continua en x_0 es necesaria.

Veamos ahora que también es suficiente. Supongamos que la función f no es continua en x_0, de manera que necesariamente x_0 no es un punto aislado de A y $f(x_0)$ no es el límite de f en x_0. Esto implica que existe un número positivo ε tal que para todo número positivo δ no vale que para todo $x \in A$ sea cierto que

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

En particular, para cada entero positivo n existe un elemento x_n de A tal que $\|x_n - x_0\| < \delta$ y $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$. La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ que obtenemos de esta forma toma valores en A y converge a x_0, y claramente la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ no converge a $f(x_0)$: vemos así que la condición de la proposición no se satisface. Esto prueba lo que queremos. □

La continuidad de una función en un punto es heredada por sus restricciones:

Proposición 6.2.5. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x_0 un punto de A. Si $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función continua en x_0 y B es un subconjunto de A que contiene a x_0, entonces la restricción $f|_B : B \to \mathbb{R}^e$ es continua en x_0.*

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función continua en x_0 y sea B un subconjunto de A que contiene a x_0. Si $(x_n)_{n\geq1}$ es una sucesión con valores en B que converge a x_0, entonces es también una sucesión con valores que A que converge a x_0 y, por lo tanto, sabemos que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq1}$ converge a $f(x_0)$. Esta última sucesión coincide con la sucesión $(f|_B(x_n))_{n\geq1}$ y es $f(x_0) = f|_B(x_0)$: la Proposición 6.2.4 nos permite concluir entonces que la función $f|_B : B \to \mathbb{R}^e$ es continua en x_0, como queremos. □

Ejercicio 6.2.6. Pruebe la Proposición 6.2.5 usando la Proposición 6.2.3 en lugar de la Proposición 6.2.4.

Del «álgebra de límites» para funciones podemos deducir fácilmente un «álgebra de funciones continuas» en un punto:

Proposición 6.2.7. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, y sea x_0 un punto de A.*

(*i*) *Si $f, g : A \to \mathbb{R}^e$ y $h : A \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en x_0, entonces las funciones*

$$f + g : x \in A \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^e,$$
$$h \cdot f : x \in A \mapsto h(x)f(x) \in \mathbb{R}^e$$

también son continuas en x_0.

(*ii*) *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en x_0 tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces la función*

$$\frac{1}{f} : x \in A \mapsto \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R}$$

es continua en x_0.

Demostración. Las dos afirmaciones de la proposición son evidentes si el punto x_0 es aislado en A, así que es suficiente que consideremos el caso en el que no lo es.

(*i*) Sean $f, h : A \to \mathbb{R}^e$ y $h : A \to \mathbb{R}$ funciones continuas en x_0, de manera que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} h(x) = h(x_0).$$

De acuerdo a la Proposición 6.1.6, tenemos entonces que

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} (h(x) \cdot f(x)) = h(x_0) \cdot g(x_0),$$

y entonces las funciones $f + g$ y $h \cdot f$ son continuas en x_0

(*ii*) Sea ahora $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0 tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, de manera que podemos considerar la función $1/f : x \in A \mapsto 1/f(x) \in \mathbb{R}$ y, por otro lado, tenemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. De acuerdo a la tercera parte de la Proposición 6.1.6 tenemos entonces que $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = 1/f(x_0)$, así que la función $1/f$ es continua en x_0. □

De manera similar, correspondiendo a la Proposición 6.1.8 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 6.2.8. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, y sea x_0 un elemento de A.*

(*i*) *Si $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función continua en x_0 e y_0 es un elemento de $\mathbb{R}^e$ distinto de $f(x_0)$, entonces existe un entorno U de x_0 relativo a A tal que $y_0 \notin f(U)$.*

(*ii*) *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en x_0 y K es un número tal que $f(x_0) < K$, entonces hay un entorno U de x_0 relativo a A tal que $f(x) < K$ para todo $x \in U$.*

(*iii*) *Si $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función continua en x_0, entonces existe un entorno U de x_0 relativo a A tal que la función f es acotada en U, esto es, tal que el conjunto $f(U)$ es acotado.*

Demostración. (*i*) Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función continua en x_0 y sea y_0 un elemento de $\mathbb{R}^e$ distinto de $f(x_0)$, de manera que el número $r := \|f(x_0) - y_0\|$ es positivo y el conjunto $B_r(f(x_0))$ es un entorno de $f(x_0)$. Como la función f es continua en x_0, existe un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subseteq B_r(f(x_0))$ y, como y_0 no pertenece a $B_r(f(x_0))$, tal que $y_0 \notin f(U)$.

(*ii*) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0 y sea K un número tal que $f(x_0) < K$. Como el intervalo $(-\infty, K)$ es entonces un entorno de $f(x_0)$, la continuidad de f en x_0 implica que hay un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subseteq (-\infty, K)$, esto es, tal que para todo $x \in U$ se tiene $f(x) < K$.

(*iii*) Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función continua en x_0 y sea $r := 1 + \|f(x_0)\|$. El conjunto $B_r(0)$ es un entorno de $f(x_0)$, así que la continuidad de f en x_0 implica que hay un entorno U de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subseteq B_r(0)$, y esto nos dice que el conjunto $f(U)$ es acotado. □

Finalmente, la continuidad es preservada por la composición de funciones bajo las condiciones apropiadas:

Proposición 6.2.9. *Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ y de $\mathbb{R}^e$, respectivamente, sean $f : A \to \mathbb{R}^e$ y $g : B \to \mathbb{R}^k$ dos funciones tales que $f(A) \subseteq B$, de manera que podemos considerar la composición $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$, y sea x_0 un punto de A. Si la función f es continua en x_0 y la función g es continua en $f(x_0)$, entonces la función $g \circ f$ es continua en x_0.*

Demostración. Supongamos que la función f es continua en x_0 y que la función g es continua en $f(x_0)$, y sea W un entorno de $g(f(x_0))$ en $\mathbb{R}^k$. Como g es continua en $f(x_0)$, hay un entorno V de $f(x_0)$ relativo a B tal que $g(V) \subseteq U$ y hay entonces un abierto V_0 de $\mathbb{R}^e$ tal que $V \supseteq V_0 \cap B$. El conjunto V_0 es un entorno de $f(x_0)$ y la función f es continua en x_0, así que hay un entorno U de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subseteq V_0$. Como $f(A) \subseteq B$, esto implica que $f(U) \subseteq V_0 \cap A \subseteq V$ y, por lo tanto, que $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$. Vemos así que la función $g \circ f$ es continua en x_0, y esto es lo que afirma la proposición. □

Ejercicio 6.2.10. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea x_0 un elemento de A. Muestre que una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ es continua en x_0 si y solamente si cada una de sus componentes $f_1, \dots, f_e : A \to \mathbb{R}$ es continua en x_0.

6.3. Continuidad global

Definición 6.3.1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ es ***continua*** si es continua en cada punto de A.

La caracterización de la continuidad puntual en términos de sucesiones nos da inmediatamente una caracterización de la continuidad en términos de sucesiones:

Proposición 6.3.2. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ es continua si y solamente si cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en A que converge a un punto x de A se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. Si $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función continua en A y $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en A que converge a un punto x de A, entonces como la función f es continua en x, la Proposición 6.2.4 nos dice que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$. Vemos así que la condición que da la proposición para que la función f sea continua es suficiente.

Por otro laso, si $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función que satisface esa condición, entonces para cada punto x de A y cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ con valores en A que converge a x la hipótesis implica que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$: de acuerdo a la Proposición 6.2.4, esto nos dice que la función f es continua en x y, como esto es así cualquiera sea el punto x de A, que f es continua. □

Mucho más interesante es la caracterización de la continuidad que obtenemos de la caracterización topológica de la continuidad puntual:

Proposición 6.3.3. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *La función f es continua.*
(b) *Para todo subconjunto abierto V de $\mathbb{R}^d$ el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto relativo a A.*
(c) *Para todo subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}^d$ el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado relativo a A.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que la función f es continua y que V es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. Si x es un elemento de $f^{-1}(V)$, entonces f es continua en x y V es un entorno de $f(x)$, así que hay un entorno U de x_0 relativo a A tal que $f(U) \subseteq V$ y, por lo tanto, $U \subseteq f^{-1}(V)$: esto nos dice que $f^{-1}(V)$ es un entorno relativo de x en A. Como esto es así para todo punto x de $f^{-1}(V)$, podemos concluir que el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto relativo a A.

$(b) \Rightarrow (c)$ Supongamos que la afirmación (b) se cumple y sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^e$. El conjunto F^c es entonces abierto y la hipótesis nos dice que el conjunto $f^{-1}(F^c)$ es abierto relativo a A. Como $f^{-1}(F) = A \setminus f^{-1}(F^c)$, esto implica que $f^{-1}(F)$ es cerrado relativo a A.

$(c) \Rightarrow (a)$ Supongamos ahora la afirmación (c) se satisface y sea x un punto de A. Si V es un entorno de $f(x)$, entonces la hipótesis nos dice que $f^{-1}(\mathbb{R}^e \setminus V^\circ)$ es un cerrado relativo a A, ya que $\mathbb{R}^e \setminus V^\circ$ es un cerrado de $\mathbb{R}^e$, y, por lo tanto, que el conjunto $f^{-1}(V^\circ) = A \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^e \setminus V^\circ)$ es abierto relativo a A. Como $x \in f^{-1}(V^\circ) \subseteq f^{-1}(V)$, vemos que $f^{-1}(V)$ es un entorno de x relativo a A. Usando la Proposición 6.3.3 podemos concluir entonces que la función f es continua en x y, en definitiva, en todo A. □

El siguiente corolario pone de manifiesto algunos casos particulares importantes de la proposición que acabamos de probar.

Corolario 6.3.4. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$.*

(*i*) *Si $f, g : A \to \mathbb{R}^e$ son funciones continuas, entonces el conjunto $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto en A y el conjunto $\{x \in A : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en A.*

(*ii*) *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el conjunto $\{x \in A : f(x) > 0\}$ es abierto en A.*

Demostración. (*i*) Sean $f, g : A \to \mathbb{R}^e$ dos funciones continuas. La diferencia $h \coloneqq f - g : A \to \mathbb{R}^e$ es entonces continua y como los subconjuntos $\mathbb{R}^e \setminus \{0\}$ y $\{0\}$ son, respectivamente, abierto y cerrado, tenemos que

$$h^{-1}(\mathbb{R}^e \setminus \{0\}) = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}, \qquad h^{-1}(\{0\}) = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$$

son un subconjunto abierto y un subconjunto cerrado de A, respectivamente.

(*i*) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el conjunto $f^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ es un abierto relativo a A, ya que $(0, +\infty)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, y coincide con $\{x \in A : f(x) > 0\}$. □

La Proposición 6.3.3 nos dice que la preimagen por una función continua de un conjunto abierto o cerrado sea abierta o cerrada en su dominio y que, de hecho, esta propiedad caracteriza a las funciones continuas. En contraste a esto, no es cierto que la imagen por una función continua de un conjunto abierto o cerrado sea abierta o cerrada.

Ejemplo 6.3.5. La función $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 + x^2)^{-1} \in \mathbb{R}$ es continua y la imagen del subconjunto abierto y cerrado $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ por f es el intervalo $(0, 1]$, que no es ni abierto ni cerrado.

De todas formas, veremos más abajo, cuando probemos el Corolario 6.5.3, que la imagen por una función continua de un conjunto compacto es siempre compacta.

Como la continuidad puntual, la continuidad se preserva al restringir funciones:

Proposición 6.3.6. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Si $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función continua y B es un subconjunto de A, entonces la restricción $f|_B : B \to \mathbb{R}^e$ es continua.*

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función continua y sea B un subconjunto de A. De acuerdo a la Proposición 6.2.5, la restricción $f|_B : B \to \mathbb{R}^e$ es continua en cada punto de B, ya que f es continua en cada uno de ellos, así que esa restricción es una función continua. □

En la dirección opuesta, tenemos dos resultados extremadamente útiles que nos permiten concluir que una función es continua sabiendo que sus restricciones a conjuntos apropiados lo son, ambos basados en la Proposición 6.3.3. En primer lugar, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 6.3.7. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, y sea $\mathscr{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de A tal que $A = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} A$. Si para cada $U \in \mathscr{U}$ la restricción $f|_U : U \to \mathbb{R}^e$ es continua, entonces la función f es continua.*

Demostración. Supongamos que para cada $U \in \mathscr{U}$ la restricción $f|_U : U \to \mathbb{R}^e$ es continua, y sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^e$. La hipótesis implica que para todo $U \in \mathscr{U}$ el conjunto $f^{-1}(U) \cap V = (f|_U)^{-1})(V)$ es abierto en U y, como U es abierto en A, en A, así que el conjunto

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} \left(f^{-1}(V) \cap U\right)$$

es abierto en A. Esto nos permite concluir que la función f es continua. □

En segundo lugar, tenemos la siguiente variante para cubrimientos cerrados del dominio de una función que son *finitos*:

Proposición 6.3.8. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función, y sean $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos cerrados de A tales que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$. Si cada una de las restricciones $f|_{A_1}, \ldots, f|_{A_k}$ es continua entonces la función f es continua.*

Demostración. Supongamos que las restricciones $f|_{A_1}, \ldots, f|_{A_k}$ son todas continuas y sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^e$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ la restricción $f|_{A_i}$ es continua, así que el conjunto $(f|_{A_i})^{-1}(F)$ es cerrado relativo a A_i y, como A_i es cerrado en A, cerrado en A. Como

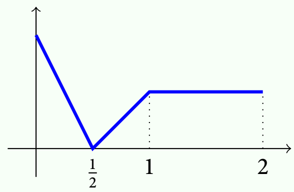
$$f^{-1}(F) = (f|_{A_1})^{-1}(F) \cup \cdots \cup (f|_{A_k})^{-1}(F),$$

podemos concluir que el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en A y, en definitiva, que la función f es continua, como queremos. $\square$

El siguiente ejemplo muestra una aplicación típica de este resultado.

Ejemplo 6.3.9. Consideremos la función $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ que en cada $t \in [0,1]$ toma el valor

$$f(t) = \begin{cases} 1-2t & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}]; \\ 2t-\frac{3}{2} & \text{si } t \in (\frac{1}{2},1]; \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \in (1,2]. \end{cases}$$



Las restricciones $f|_{[0,1/2]}$, $f|_{[1/2,1]}$ y $f|_{[1,2]}$ son las funciones

$$t \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto 1-2t \in \mathbb{R}, \qquad t \in [\frac{1}{2},1] \mapsto 2t-\tfrac{3}{2} \in \mathbb{R}, \qquad t \in [1,2] \mapsto \tfrac{1}{2} \in \mathbb{R},$$

que son continuas y tenemos que $[0,2] = [0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},1] \cup [1,2]$, así que la Proposición 6.3.8 nos permite concluir que la función f es continua.

En la Proposición 6.3.8 consideramos una descomposición como unión *finita* de subconjunto cerrados del dominio de la función $f : A \to \mathbb{R}^e$ de A. En general, si consideramos una descomposición de A como unión infinita de cerrados de A la afirmación de la proposición no es cierta.

Ejemplo 6.3.10. Sea $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sgn}(x) \in \mathbb{R}^e$ la función signo. Para todo $x \in \mathbb{R}$ la restricción $f|_{\{x\}} : \{x\} \to \mathbb{R}$ es continua y $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión es $\mathbb{R}$, pero ciertamente la función f no es continua.

El siguiente ejercicio describe una situación en la que podemos extender el resultado de la Proposición 6.3.8 a familias infinitas de subconjuntos cerrados.

Ejercicio 6.3.11. Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función definida en un subconjunto cerrado A de $\mathbb{R}^d$ y sea $\mathscr{F}$ una familia localmente finita de cerrados de $\mathbb{R}^d$, como en el Ejercicio 5.4.18. Muestre que si para cada $F \in \mathscr{F}$ la restricción $f|_F : F \to \mathbb{R}^e$ es una función continua, entonces la función f es continua.

Como para la continuidad puntual, tenemos un «álgebra de funciones continuas»:

Proposición 6.3.12. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$.*

(*i*) *Si* $f, g : A \to \mathbb{R}^e$ *y* $h : A \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas, entonces las funciones*

$$hf : x \in A \mapsto h(x)f(x) \in \mathbb{R}^e,$$
$$f + g : x \in A \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R}^e,$$
$$f \cdot g : x \in A \mapsto f(x)g(x) \in \mathbb{R}^e$$

también son continuas.

(*ii*) *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *es una función continua tal que* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in A$*, entonces la función*

$$\frac{1}{f} : x \in A \mapsto \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R}$$

es continua.

Demostración. HACER. □

La continuidad es preservada por la composición de funciones:

Proposición 6.3.13. *Sean* A *y* B *subconjuntos de* $\mathbb{R}^d$ *y de* $\mathbb{R}^e$*, respectivamente. Si* $f : A \to \mathbb{R}^e$ *y* $g : B \to \mathbb{R}^k$ *son dos funciones continuas tales que* $f(A) \subseteq B$*, de manera que podemos considerar la composición* $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$*, entonces la funciones* $g \circ f$ *es continua.*

Demostración. HACER. □

Como con la continuidad puntual, podemos caracterizar la continuidad de la función en términos de sus componentes:

Proposición 6.3.14. *Sea* A *un subconjunto de* $\mathbb{R}^d$*. Una función* $f : A \to \mathbb{R}^e$ *es continua si y solamente si cada una de sus componentes* $f_1, \dots, f_e : A \to \mathbb{R}$ *lo es.*

Demostración. HACER. □

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y $f : A \to \mathbb{R}^e$ es una función, entonces el ***gráfico*** de f es el subconjunto

$$\Gamma_f \coloneqq \{(x, f(x)) \in A \times \mathbb{R}^e : x \in A\}$$

de $A \times \mathbb{R}^e$, que identificamos de la manera natural con un subconjunto de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^e = \mathbb{R}^{d+e}$. La razón por la que nos interesa esta noción de gráfico es el siguiente resultado:

Proposición 6.3.15. *Sea* A *un subconjunto de* $\mathbb{R}^d$ *y sea* $f : A \to \mathbb{R}^e$ *una función.*

(*i*) *Si la función* f *es continua, entonces el gráfico* Γ_f *de* f *es un subconjunto cerrado de* $A \times \mathbb{R}^e$*.*

(*ii*) *Recíprocamente, si el gráfico* Γ_f *de* f *es cerrado en* $A \times \mathbb{R}^e$ *y la función* f *es acotada, entonces* f *es continua.*

La segunda parte de esta proposición puede verse como adaptación a nuestro contexto del *teorema del gráfico cerrado*, un resultado fundamental del análisis funcional.

Demostración. Supongamos primero que la función f es continua y que $(p_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de puntos de Γ_f que converge a un punto p del conjunto $A \times \mathbb{R}^e$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay puntos unívocamente determinados x_n e y_n de A y de $\mathbb{R}^e$ tales que $p_n = (x_n, y_n)$, y como p pertenece al gráfico de f tiene que ser $y_n = f(x_n)$. De manera similar, hay una única forma de elegir puntos x e y en A y en $\mathbb{R}^e$ de manera que sea $p = (x, y)$. Como la sucesión $(p_n)_{n\geq 1}$ converge a p, la Proposición 5.6.10 implica inmediatamente que las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ convergen a x y a y, respectivamente. Ahora bien, como la función f es continua, sabemos que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1} = (f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x)$, y entonces tenemos que $y = f(x)$, esto es, que el punto p pertenece a Γ_f. Vemos así que el gráfico Γ_f de f es un cerrado de $A \times \mathbb{R}^e$, y esto prueba la primera parte de la proposición.

Probemos ahora la segunda parte. Supongamos que la función $f : A \to \mathbb{R}^e$ tiene gráfico Γ_f cerrado en $A \times \mathbb{R}^e$ y que es acotada, de manera que podemos elegir un número positivo K tal que $f(x) \in B_K(0) \subseteq \mathbb{R}^e$ para todo $x \in A$, y sea x_0 un punto de A. Mostraremos que f es necesariamente continua en x_0, y esto probará lo que queremos.

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en A que converge a x_0 y supongamos, para llegar a una contradicción, que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ no converge a $f(x_0)$, de manera que hay un número positivo ε y una función estrictamente creciente $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\|f(x_{h(n)}) - f(x_0)\| \geq \varepsilon \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{6.9}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el punto $p_n \coloneqq (x_{h(n)}, f(x_{h(n)})) \in \Gamma_f$. Como la sucesión $(x_{h(n)})_{n\geq 1}$ converge, es acotada y podemos elegir un número positivo L tal que $x_{h(n)} \in B_L(0) \subseteq \mathbb{R}^d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue de esto que la sucesión $(p_n)_{n\geq 1}$ toma valores en el conjunto $B_L(0) \times B_K(0)$ y, por lo tanto, que es acotada: hay entonces una función estrictamente creciente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la subsucesión $(p_{k(n)})_{n\geq 1}$ converge a un punto p de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^e$.

Sean x_0' e y los puntos de $\mathbb{R}^d$ y de $\mathbb{R}^e$ tales que $p = (x_0', y)$. Las sucesiones $(x_{h(k(n))})_{n\geq 1}$ y $(f(x_{h(k(n))}))_{n\geq 1}$ convergen a x_0 y a y, y como la primera de ellas es una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, que converge a x_0, tenemos, de hecho, que $x_0' = x_0 \in A$. Esto nos dice que el límite de la sucesión $(p_{k(n)})_{n\geq 1}$ pertenece a $A \times \mathbb{R}^e$: como esa sucesión toma valores en Γ_f y estamos suponiendo que este conjunto es cerrado en $A \times \mathbb{R}^e$, podemos concluir que $p = (x_0, y)$ pertenece a Γ_f, esto es, que $y = f(x_0)$. Vemos así que la sucesión $(f(x_{h(k(n))}))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$. Esto es imposible, porque contradice a la afirmación (6.9).

La conclusión de esto es que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ debe converger a $f(x_0)$ y, en definitiva, que la función f es continua en x_0. □

Sin la hipótesis de acotación la conclusión de la segunda parte de esta proposición no es necesariamente cierta.

Ejercicio 6.3.16. Muestre que el gráfico de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que en cada $x \in \mathbb{R}$ toma el valor

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

es cerrado, pero que no es continua.

Ejercicio 6.3.17. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función. Pruebe que f es continua si su gráfico Γ_f es cerrado en $A \times \mathbb{R}^e$ y es ***localmente acotada***, esto es, para cada $x \in A$ existe un entorno U de x relativo a A tal que el conjunto $f(U)$ es acotado.

Terminemos esta sección con un criterio útil para comparar funciones continuas:

Proposición 6.3.18. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, sea D un subconjunto de A tal que $A \subseteq \overline{D}$, y sean $f, g : A \to \mathbb{R}^e$ dos funciones continuas. Si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.*

Demostración. Supongamos que $f|_D = g|_D$ y sea x un elemento cualquiera de A. Como $A \subseteq \overline{D}$, hay una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ con valores en D que converge a x, y como las funciones f y g son continuas en x, sabemos que las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq1}$ y $(g(x_n))_{n\geq1}$ convergen a $f(x)$ y a $g(x)$, respectivamente. Como las restricciones de f y de g a A son iguales, esas dos sucesiones son, de hecho, iguales: es claro, por lo tanto, que $f(x) = g(x)$. Esto prueba que $f = g$, como afirma la proposición. □

6.4. Algunos ejemplos

Ejemplo 6.4.1. HACER: La función identidad

Ejemplo 6.4.2. HACER: La norma

Ejemplo 6.4.3. HACER: La distancia a un conjunto

Ejemplo 6.4.4. Un polinomio $p = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ con coeficientes reales determina una función

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R} \tag{6.10}$$

y esta función es continua. En efecto, la función $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ es continua, así que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ es continua y, en consecuencia, la función f de (6.10) es continua: todo esto es consecuencia inmediata de la Proposición 6.3.12.

Si $q = b_m X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0 \in \mathbb{R}[X]$ es otro polinomio y

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{R}$$

es la correspondiente función continua, entonces el conjunto $A \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}$ — de hecho, es un conjunto finito — la función

$$\frac{f}{g} : x \in A \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \in \mathbb{R}$$

es continua. Esto también se sigue de la Proposición 6.3.12.

Ejemplo 6.4.5. A los fines de este ejemplo supondremos que

$0 \leq \operatorname{sen} x \leq x$ *siempre que x es un número no negativo.*

Sea x un número real y sea ε un número positivo. Si y es un número real tal que $|y - x| < \varepsilon$, entonces

$$\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

y $|\cos(x+y)/2| \leq 1$, de manera que

$$|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| = \left| 2 \operatorname{sen} \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+y}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-y|}{2} < \varepsilon.$$

Esto nos dice que la función $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x. De manera similar, es

$$\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

y $|\sin(y+x)/2| \leq 1$, así que

$$|\cos y - \cos x| = \left| 2 \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-y|}{2} < \varepsilon$$

y, por lo tanto, la función $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua.

El conjunto $F \coloneqq \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ coincide con $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\}$, así que las funciones

$$\tan : x \in \mathbb{R} \setminus F \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \in \mathbb{R}, \qquad \sec : x \in \mathbb{R} \setminus F \mapsto \frac{1}{\cos x} \in \mathbb{R}$$

son continuas.

Ejemplo 6.4.6. Supondremos ahora que

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \textit{ para cada número } x \textit{ menor que } 1.$$

Como

$$\lim_{x\to 0}(1+x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x} = 1,$$

esto implica que

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 = e^0,$$

esto es, que la función $\exp : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ es continua en 0. Por otro lado, si x_0 es un número cualquiera, entonces la función $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - x_0 \in \mathbb{R}$ es continua, así que la composición $\exp \circ f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{x-x_0} \in \mathbb{R}$ es continua en x_0, esto es,

$$\lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = e^0 = 1.$$

Como para todo $x \in \mathbb{R}$ es $e^x = e^{x_0}e^{x-x_0}$, esto implica que

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} e^{x_0}e^{x-x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0}e^{x_0-x_0} = e^{x_0}.$$

Vemos así que la función exp es continua en todo su dominio $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.4.7. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que en cada número $x \in \mathbb{R}$ toma el valor

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Esta función, conocida como la ***función de Dirichlet***, por Peter Gustav Lejeune Dirichlet, no es continua en ningún punto de su dominio. Para verlo, es suficiente que fijemos un elemento x_0 de $\mathbb{R}$ y mostremos que para cualquier número positivo δ existe un elemento x de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $|f(x) - f(x_0)| = 1$. Esto es fácil: sabemos que en el intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ hay un número racional a y un número irracional b, y basta que elijamos

$$x := \begin{cases} a & \text{si } x_0 \notin \mathbb{Q}; \\ b & \text{si } x_0 \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ejemplo 6.4.8. Consideremos ahora la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que en cada número $x \in \mathbb{R}$ toma el valor

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{Q};\\ 0 & \text{en caso contrario.}\end{cases}$$

Mostremos que esta función es continua en 0 y que no es continua en ningún otro punto de $\mathbb{R}$.

Sea ε un número positivo. Si ponemos $\delta\coloneqq\varepsilon$, entonces para cada punto x de $\mathbb{R}$ tal que $|x-0|<\delta$ es $f(x)=0$ o $f(x)=x$, así que $|f(x)-f(0)|$ es o $|x|$ o 0, y, en cualquier caso, es $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. Esto prueba que f es continua en 0.

Sea ahora x_0 un elemento de $\mathbb{R}$ distinto de 0 y mostremos que la función f no es continua en x_0. Consideraremos solamente el caso en que x_0 es positivo — el caso en el que es negativo es similar, y lo dejamos a cargo del lector. Sea $\varepsilon\coloneqq\frac{1}{2}x_0$, que es un número positivo, y sea δ un número positivo arbitrario. El conjunto $(x_0,x_0+\delta)$ es un intervalo abierto no vacío, así que contiene un número racional a y un número irracional b. Pongamos $x\coloneqq b$ si $x_0\in\mathbb{Q}$ y $x\coloneqq a$ en caso contrario. Es claro que x pertenece a $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ y que

$$|f(x)-f(x_0)|=\left.\begin{cases} x_0 & \text{si } x_0\in\mathbb{Q};\\ b & \text{en caso contrario}\end{cases}\right\}\geq\varepsilon.$$

Esto prueba que la función f no es continua en x_0.

Ejemplo 6.4.9. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función que en cada número irracional toma el valor 0 y que en cada número racional $\frac{a}{b}$, con a y b enteros coprimos y b positivo, toma el valor $\frac{1}{b}$. Esta es la ***función de Thomae***, por Carl Johannes Thomae, que la presentó como un ejemplo de una función integrable en el sentido de Riemann con infinitas discontinuidades.

Sea x un número racional, y sean a y b enteros coprimos tales que $b>0$ y $x=a/b$. Si n es un entero mayor que 1, entonces

$$x+\frac{1}{b^n}=\frac{a}{b}+\frac{1}{b^n}=\frac{ab^{n-1}+1}{b^n}$$

y los números $ab^{n-1}+1$ y b^n son coprimos — ya que si un primo p divide a b^n, entonces divide a b y, por lo tanto, a ab^{n-1} — así que

$$f\left(x+\frac{1}{b^n}\right)=\frac{1}{b^n}.$$

Vemos así que

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x+\frac{1}{b^n}\right)=0\neq\frac{1}{b}=f(x),$$

mientras que la sucesión $(x+1/b^n)_{n\geq1}$ converge a x. Esto prueba que la función f no es continua en el punto x.

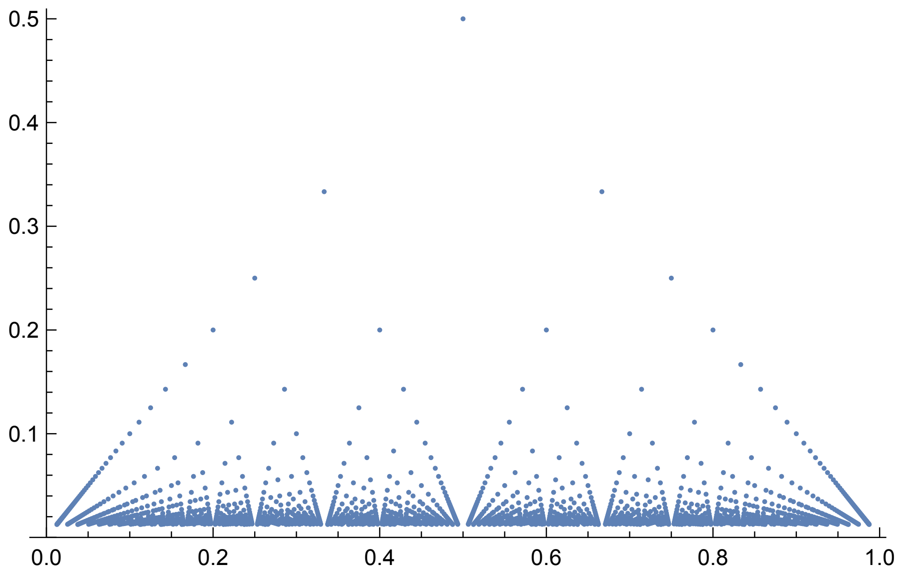


Figura 6.1. Una aproximación al gráfico de la función de Thomae del Ejemplo 6.4.9.

Sea, por otro lado, x un número irracional. Sea ε un número positivo, y sea n un entero tal que $1/n < \varepsilon$. El conjunto de números racionales

$$P := \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N},\ b \leq n,\ x - 1 < \frac{a}{b} < x + 1 \right\}$$

es finito, así que es cerrado, y, como x no es racional, no contiene a x: existe entonces un número positivo η tal que $B_\eta(x) \cap P = \varnothing$. Pongamos $\delta := \text{mín}\{1, \eta\}$ y sea y un elemento cualquiera de $B_\delta(x)$. Si y es irracional tenemos que $|f(y) - f(x)| = |0 - 0| < \varepsilon$. Si, por el contrario, y es racional y lo escribimos en la forma a/b con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces como $|y - x| < 1$ e $y \notin P$ sabemos que $b \geq n$ y, por lo tanto, que $|f(y) - f(x)| = |1/n - 0| < \varepsilon$. Vemos con esto que la función f es continua en el punto x.

La conclusión a la que llegamos es que la función de Thomae $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua exactamente en los números irracionales.

6.5. El teorema de Weierstrass

Nuestro objetivo en esta sección es probar un resultado fundamental, conocido como el teorema de Weierstrass o de los valores extremos. El nombre recuerda a Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, que lo probó en exactamente la forma en que lo presentamos nosotros, pero el resultado era conocido por Bernard Bolzano ya hacía 1830 en el caso particular en que nuestro conjunto K es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Proposición 6.5.1. *Sea K un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}^e$. Una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ es acotada superiormente y, más aún, existe un punto y en K tal que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x \in K$.*

Por supuesto, también es cierto en esta situación que la función f es acotada inferiormente y que existe un punto y' en K tal que $f(x) \geq f(y')$ para todo $x \in K$.

Demostración. Sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que la función f no es acotada superiormente, de manera que para cada entero positivo n hay un punto x_n en K tal que $f(x_n) \geq k$. La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ toma valores en K, que es un conjunto compacto, así que hay una función estrictamente creciente tal que la sucesión $(x_{h(n)})_{n\geq 1}$ converge a un punto ξ de K. Como la función f es continua en ξ, esto implica a su vez que la sucesión $(f(x_{h(n)}))_{n\geq 1}$ converge a $f(\xi)$ y, en particular, que es acotada. Esto es absurdo, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f(x_{h(n)}) \geq h(n) \geq n$. Esta contradicción prueba que la función f acotada superiormente,

Esto nos dice que el conjunto $F \coloneqq \{f(x) : x \in K\}$ es acotado superiormente y no vacío, y podemos entonces considerar su supremo $s \coloneqq \sup F$, que es elemento de $\mathbb{R}$. Sabemos que hay una sucesión de elementos de F que converge a s: esto es, existe una sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ de K tal que la sucesión $(f(y_n))_{n\geq 1}$ converge a s. Más aún, como la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ toma valores en el conjunto K, que es compacto, existe una función estrictamente creciente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(y_{k(n)})_{n\geq 1}$ converge a un punto y de K. Como la función f es continua en y, esto implica que la sucesión $(f(y_{k(n)}))_{n\geq 1}$ converge a $f(y)$. Ahora bien, como la sucesión $(f(y_n))_{n\geq 1}$ converge a s, juntando todo vemos que $f(y) = s$. Así, $f(y)$ es una cota superior para el conjunto F, y esto significa que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x \in K$. □

El teorema de Weierstrass 6.5.1 se aplica a funciones con valores en $\mathbb{R}$. Nuestro siguiente resultado es una versión de él para funciones con valores en $\mathbb{R}^e$.

Proposición 6.5.2. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$. La imagen de una función continua $f : K \to \mathbb{R}^e$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^e$.*

Demostración. Sea $f : K \to \mathbb{R}^e$ una función continua. Supongamos que $(y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en la imagen $f(K)$ de f. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un elemento x_n de K tal que $f(x_n) = y_n$, y de esta forma obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ con valores en K. Como K es compacto, hay entonces una función estrictamente creciente $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{h(n)})_{n\geq 1}$ converge. El límite de esta sucesión es un punto x de K, ya que K es cerrado, y como la función f es continua en K, sabemos que la sucesión $(f(x_{h(n)}))_{n\geq 1}$, que coincide con $(y_{h(n)})_{n\geq 1}$, converge a $f(x)$. Vemos así que toda sucesión con valores en $f(K)$ posee una subsucesión converge con límite contenido en K y, por lo tanto, que este conjunto $f(K)$ es compacto. □

Una consecuencia útil de esto es la siguiente observación:

Corolario 6.5.3. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función continua. Si K es un subconjunto compacto de A, entonces $f(K)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^e$.*

Demostración. En efecto, si K es un subconjunto compacto de A, entonces la Proposición nos dice que la imagen de la restricción $f|_K : K \to \mathbb{R}^e$, que es continua, es un compacto de $\mathbb{R}^e$. □

6.6. El teorema de los valores intermedios y sus generalizaciones

6.6.1. El teorema de los valores intermedios

Nuestro siguiente resultado, otro de las piedras fundacionales del análisis, es conocido como el *teorema de los valores intermedios*:

Proposición 6.6.1.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para todo número y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $x \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = y$.*

Demostración. Supondremos que $f(a) < f(b)$ — ya que si $f(a) = f(b)$ no hay nada que probar y si $f(a) > f(b)$ podemos proceder de manera completamente similar. Sea y un elemento del intervalo $(f(a), f(b)$ y consideremos el conjunto $U := \{x \in [a, b] : f(x) < y\}$. Este conjunto no es vacío, ya que contiene a a, y es acotado, ya que está contenido en $[a, b]$, así que podemos considerar el número $\xi := \sup U$, que claramente pertenece a $[a, b]$. Hay una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ con valores en U que converge a ξ y, como la función f es continua en ξ, la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(\xi)$: como $f(x_n) < y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos entonces que $f(\xi) \leq y$. Supongamos que, de hecho, es $f(\xi) < y$, de manera que $\xi \in U$.

Notemos que como $y < f(b)$ y $\xi \in [a, b]$, es $\xi < b$. Como la función f es continua, el conjunto U es abierto relativo a $[a, b]$, así que hay un número positivo r tal que $B_r(\xi) \cap [a, b] \subseteq U$. Si $s := \frac{1}{2} \min\{r, b - \xi\}$, entonces $a \leq \xi + s < b$ y $\xi + s \in B_r(\xi)$, así que $\xi + s \in U$ y, por lo tanto, $f(\xi + s) < y$: esto es absurdo, ya que $\xi + s$ pertenece al conjunto F y es mayor que $\xi = \sup F$. Esta contradicción nos permite concluir que debe ser $f(\xi) = y$, y prueba la proposición. □

Un caso particular de esta proposición es el llamado *teorema de Bolzano*, por Bernard Bolzano, que lo probó en 1817:

Corolario 6.6.1.2. *Una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado que toma valores positivos y negativos toma el valor* 0.

Demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que hay puntos c y d tales que $f(c) < 0$ y $f(d) > 0$. Si $c < d$, entonces la Proposición 6.6.1.1 nos dice que la restricción $f|_{[c,d]} : [c, d] \to \mathbb{R}$ toma el valor 0 y, en consecuencia, que f lo hace. Si en cambio es $c > d$ podemos concluir lo mismo considerando la restricción $f|_{[d,c]}$. □

Combinando la Proposición 6.6.1.1 y el teorema de Weierstrass 6.5.1 podemos describir la imagen de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado:

Corolario 6.6.1.3. *La imagen de una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Como el intervalo $[a, b]$ es compacto, el teorema de Weierstrass 6.5.1 implica que hay puntos α y β en $[a, b]$ tales que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ para todo $x \in [a, b]$, de manera que la imagen de f está contenida en el intervalo $[f(\alpha), f(\beta)]$. Por otro lado, la Proposición 6.6.1.1 nos dice que todo elemento de este intervalo está en la imagen de la restricción de f al intervalo $[\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\}]$ y, por lo tanto, en la imagen de f. Esto prueba el corolario. □

6.6.2. Conjuntos convexos y arco-conexos

Hay varias formas de extender el resultado de la Proposición 6.6.1.1 a funciones definidas sobre dominios más generales. Nuestro siguiente propósito es mostrar, en orden de complicación creciente, estas extensiones.

Definición 6.6.2.1. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^e$ es ***convexo*** si siempre que x e y son dos puntos de C y t es un elemento de $[0, 1]$ se tiene que $(1 - t) \cdot x + t \cdot y \in C$.

La interpretación geométrica de esta condición es sencilla: un conjunto es convexo si contiene el segmento de recta que a cada uno de sus pares de puntos.

Ejercicio 6.6.2.2. Muestre que si a y b son números reales tales que $a < b$, entonces los conjuntos $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, \infty)$ y $\mathbb{R}$ son todos convexos y que, mas aún, de esta forma obtenemos todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.6.2.3. Si x es un punto de $\mathbb{R}^d$ y r es un número positivo, entonces la bola $B_r(x)$ es un

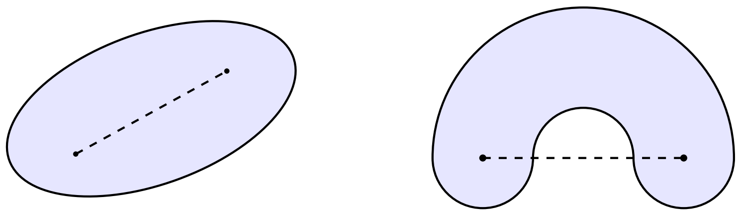


Figura 6.2. Un conjunto convexo y uno que no lo es.

conjunto convexo. En efecto, si y y z son dos puntos de $B_r(x)$ y t es un elemento de $[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}\left\|\big((1-t)\cdot y+t\cdot z\big)-x\right\| &= \left\|\big((1-t)\cdot y+t\cdot z\big)-(1-t)\cdot x-t\cdot x\right\| \\ &= \left\|\big((1-t)\cdot(y-x)+t\cdot(z-x)\big)\right\| \\ &\leq (1-t)\cdot\|y-x\|+t\cdot\|z-x\| \\ &< (1-t)\cdot r+t\cdot r=r,\end{aligned}$$

de manera que $(1-t)\cdot y+t\cdot z\in B_r(x)$.

Ejemplo 6.6.2.4. El conjunto $C\coloneqq\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ no es convexo. En efecto, si x es un punto cualquiera de X, entonces $-x$ es otro, y si elegimos $t\coloneqq\frac{1}{2}$ entonces $(1-t)\cdot x+t\cdot(-x)=0\notin C$.

Es fácil extender la Proposición 6.6.1.1 a conjuntos convexos:

Proposición 6.6.2.5. *Sea C un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ y sea $f:C\to\mathbb{R}$ una función continua. Si a y b son elementos de C e y es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un punto ξ de C tal que $f(\xi)=y$.*

Demostración. Sean a y b dos elementos de C. La función

$$\sigma:t\in[0,1]\mapsto(1-t)\cdot a+t\cdot b\in\mathbb{R}^d$$

es continua y, como el conjunto C es convexo, tiene imagen contenida en C. Podemos entonces considerar la composición $g\coloneqq f\circ\sigma:[0,1]\to\mathbb{R}$ y esta función es continua. Notemos que $g(0)=f(a)$ y que $g(1)=f(b)$, así que si y es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces y está entre $g(0)$ y $g(1)$ y la Proposición 6.6.1.1 nos dice que existe un punto τ en $[0,1]$ tal que $g(\tau)=y$ y, por lo tanto, si ponemos $\xi\coloneqq\sigma(\tau)$, que $g(\xi)=y$. □

La noción de convexidad tiene la siguiente generalización natural:

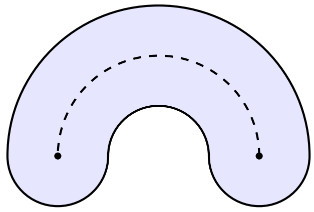


Figura 6.3. El conjunto no convexo de la Figura 6.2 es arco-conexo.

Definición 6.6.2.6. Un subconjunto C de $\mathbb{R}^d$ es ***arco-conexo*** si cada vez que x e y son elementos de C hay una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ cuya imagen está contenida en C y tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.

En la situación de esta definición pensamos en la función $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ como una *curva* contenida en C que une a x con y: así, el conjunto C es arco-conexo si cada par de sus puntos puede unirse con una curva totalmente contenida en C.

Como dijimos, la arco-conexión generaliza a la convexidad:

Lema 6.6.2.7. *Un conjunto convexo es arco-conexo.*

Demostración. Sea C un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ y sean x e y dos puntos de C. La convexidad de C implica que la función

$$\sigma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)\cdot x + t\cdot y \in \mathbb{R}^d$$

toma valores en C. Como es continua y tiene $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$, se trata de una curva contenida en C que une x con y. Vemos así que el conjunto C es arco-conexo, como queremos. □

El interés de la definición es, claro, que hay conjuntos arco-conexos que no son convexos.

Ejemplo 6.6.2.8. Sea F un subconjunto finito y no vacío de $\mathbb{R}^2$ y mostremos que el conjunto conjunto $C := \mathbb{R}^2 \setminus F$ es arco-conexo — notemos que no es convexo. Sean $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ dos puntos distintos de C.

Hay infinitas rectas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el punto x, y entre ellas hay finitas que pasan también por alguno de los puntos de F — ya que el conjunto F es finito. Podemos elegir entonces una recta L que pase por x y no por un elemento de F. De manera similar, hay infinitas rectas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el punto y y no son paralelas a L, y entre ellas hay finitas que pasan por alguno de los puntos de F: podemos entonces elegir una recta R que pasa por y, que no es paralela a L, y que no pasa por ninguno de los puntos de F.

Las rectas L y R no son paralelas, así que se intersecan en un punto z. Consideremos la función

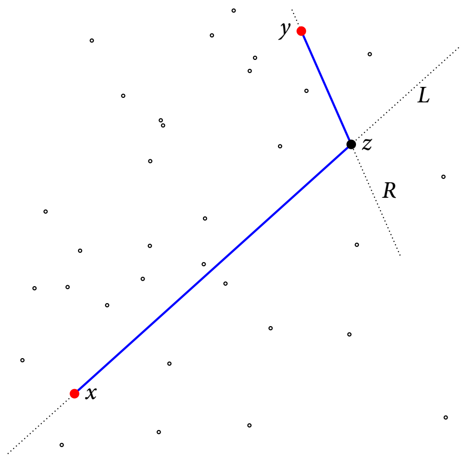


Figura 6.4. La construcción del Ejemplo 6.6.2.8.

$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ que en cada $t \in [0,1]$ toma el valor

$$\sigma(t) = \begin{cases} (1-2t)\cdot x + 2t\cdot z & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ (2-2t)\cdot z + (2t-1)\cdot y & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es claro que $\sigma(0) = x$ y que $\sigma(1) = y$, y es fácil ver que las restricciones $\sigma|_{[0,1/2]}$ y $\sigma|_{[1/2,1]}$ son continuas. Por otro lado, para cada $t \in [0,1/2]$ es $\sigma(t) \in L$, y para cada $t \in [1/2,1]$ esa $\sigma(t) \in R$: como L y R no contienen ningún punto de F, esto nos permite concluir que no hay puntos de F en la imagen de σ y, por lo tanto, que la imagen de σ está contenida en el conjunto C. Así, σ es una curva en C de x a y: esto prueba que el conjunto C es arco-conexo.

En la Figura 6.4 puede verse una ilustración de esta construcción.

En $\mathbb{R}$, de todas formas, el concepto que acabamos de presentar no da nada nuevo:

Ejercicio 6.6.2.9. Muestre que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es arco-conexo si y solamente si es convexo.

Ejemplo 6.6.2.10. Sea d un entero mayor que 1, consideremos la ***esfera unidad*** de $\mathbb{R}^d$, esto es, el conjunto

$$S := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\},$$

y mostremos que se trata de un conjunto arco-conexo. Sean x y y dos puntos de S, y supongamos primero que $x + y \neq 0$. Esto implica que para cada $t \in [0,1]$ es $(1-t)\cdot x + t\cdot y \neq 0$, así que podemos considerar la función $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ que en cada $t \in [0,1]$ toma el valor

$$\sigma(t) \coloneqq \frac{(1-t)\cdot x + t\cdot y}{\|(1-t)\cdot x + t\cdot y\|}.$$

Es inmediato verificar que $\sigma(0) = x$ y que $\sigma(1) = y$, por un lado, y que $\|\sigma(t)\| = 1$ para todo $t \in [0,1]$, de manera que σ toma valores en S. Como se trata de una función continua, es una curva en S que va de x a y.

Supongamos ahora que $x + y = 0$, esto es, que $x = -y$, y sea z un punto cualquiera de S distinto de x y de y. Como $x + z \neq 0$ y $x + z \neq y$, lo que ya hicimos muestra que hay funciones continuas $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en S y tales que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = \beta(0) = z$ y $\beta(1) = y$. Consideremos la función $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ que en cada $t \in [0,1]$ toma el valor

$$\sigma(t) \coloneqq \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Las restricciones de σ a $[0, \frac{1}{2}]$ y a $[\frac{1}{2}, 1]$ son las funciones

$$t \in [0, \tfrac{1}{2}] \mapsto \alpha(2t) \in \mathbb{R}^d, \qquad t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \mapsto \beta(2t-1) \in \mathbb{R}^d,$$

que son continuas, así que la función σ es continua. Como $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$, se trata entonces de una curva en S de x a y. Vemos así que hay en S una curva que conecta a x con y, cualesquiera sean estos y, por lo tanto, que S es arco-conexo, como queríamos probar.

El conjunto de este ejemplo está muy lejos de ser convexo:

Ejercicio 6.6.2.11. Muestre que la esfera S del Ejemplo 6.6.2.10 no contiene ningún segmento de recta con más de dos puntos.

Ejercicio 6.6.2.12. Pruebe que un subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ es arco-conexo si hay un punto x_0 en A tal que para todo punto x de A existe una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en A y tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x$.

La razón por la que nos interesan aquí los conjuntos arco-conexos es que nos permiten probar una generalización del teorema de los valores intermedios:

Proposición 6.6.2.13. *Sea A un subconjunto arco-conexo de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si a y b son dos elementos de A e y es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un punto ξ de A tal que $f(\xi) = y$.*

Demostración. Sean a y b dos elementos de A y sea y un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Como el conjunto A es arco-conexo, hay una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en A tal que $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$. Podemos entonces considerar la composición $g \coloneqq f \circ \sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$. Se trata de una función continua tal que $g(0) = f(a)$ y $g(1) = f(b)$, así que el teorema de los valores intermedios 6.6.1.1 nos dice hay que un punto τ en $[0,1]$ tal que $g(\tau) = y$. Esto implica que el punto $\xi \coloneqq \sigma(\tau)$ es tal que $f(\xi) = y$, claro, y esto prueba la proposición. □

6.6.3. Conjuntos conexos

Supongamos que A es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua para la que *no vale* el teorema de los valores intermedios: es decir, que existen puntos a y b de A y un número y entre $f(a)$ y $f(b)$ tal que no existe $\xi \in A$ tal que $f(\xi) = y$. En esta situación podemos considerar los conjuntos $U \coloneqq \{x \in A : f(x) < y\}$ y $V \coloneqq \{x \in A : f(x) > y\}$: son abiertos en A, no vacíos — ya que contienen a a y b, respectivamente — y disjuntos, y claramente su unión es $U \cup V = A$. Usando el vocabulario presentado por la siguiente definición, entonces, vemos que el conjunto A no es conexo.

Definición 6.6.3.1. Un subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ es ***conexo*** si no es vacío y no existen subconjuntos U y V abiertos en A y no vacíos tales que $U \cap V = \varnothing$ y $U \cup V = A$.

Las observaciones que acabamos de hacer prueban el siguiente resultado:

Proposición 6.6.3.2. *Sea A un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si a y b son dos puntos de A e y es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto ξ en A tal que $f(\xi) = y$.* □

Por supuesto, esta proposición es útil solamente si podemos exhibir ejemplos de conjuntos conexos! Esto no es difícil. Antes de ocuparnos de eso, demos una forma alternativa a la noción de conexión que es frecuentemente útil.

Proposición 6.6.3.3. *Un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}^d$ es conexo si y solamente si el único subconjunto no vacío U de A que es simultáneamente abierto y cerrado en A es A mismo.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^d$. Si A no es conexo, de la Definición 6.6.3.1 se sigue que hay dos subconjuntos no vacíos U y V de A que son abiertos en A y tales que $U \cap V = \varnothing$ y $U \cup V = A$, y en ese caso U es un subconjunto no vacío de A distinto de A que es abierto y cerrado en A. Esto prueba la suficiencia de la condición que da la proposición.

Por otro lado, si A es conexo y U es un subconjunto no vacío de A que es simultáneamente abierto y cerrado en A, entonces $V \coloneqq A \setminus U$ es otro subconjunto de A que es abierto y es $U \cup V = A$ y $U \cap V = \varnothing$, así que la conexión de A implica que $V = \varnothing$ y, por lo tanto, que $U = A$. Esto prueba la necesidad de la condición. □

Ejercicio 6.6.3.4. Muestre que un subconjunto no vacío A de $\mathbb{R}^d$ es conexo si y solamente si toda función continua $A \to \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{Z}$ es constante.

El primer ejemplo de conjunto conexo que daremos es fundamental:

Proposición 6.6.3.5. *El intervalo $[0,1]$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos de $[0,1]$ tales que $U \cap V = \varnothing$ y $U \cup V = [0,1]$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que 0 pertenece a U. Consideremos el conjunto $T \coloneqq \{t \in [0,1] : [0,t] \subseteq U\}$. Se trata de un conjunto acotado, ya que obviamente está contenido en $[0,1]$, y no vacío, ya que contiene a 0: podemos entonces considerar el número $\tau \coloneqq \sup T$. Como $U = [0,1] \setminus V$ y V es abierto en $[0,1]$, el conjunto U es cerrado en $[0,1]$ y, como $[0,1]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, esto nos dice que U también lo es. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un punto t_n en T tal que $\tau - \frac{1}{n} < t_n$: la sucesión $(t_n)_{n\geq 1}$ toma valores en U y converge a τ, así que τ pertenece a U. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $t_n \in T$, así que $[0, t_n] \subseteq U$ y, por lo tanto, $[0, \tau) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, t_n] \subseteq U$. Vemos así que el intervalo $[0, \tau]$ está contenido en U.

Supongamos por un momento que τ es menor que 1. Como U es abierto en $[0,1]$ y contiene a τ, hay un número positivo r tal que $B_r(\tau) \cap [0,1] \subseteq U$. En particular, si ponemos $s \coloneqq \frac{1}{2} \operatorname{mín}\{r, 1-\tau\}$, entonces $[\tau, \tau+s] \subseteq U$ y, por lo tanto, $[0, \tau+s] \subseteq U$: esto es absurdo, ya que entonces el número $\tau+s$ pertenece a T y es mayor que τ. Podemos concluir entonces que $\tau = 1$ y, por lo tanto, que $[0,1] \subseteq U$, de manera que $V = \varnothing$. Esto prueba que el intervalo $[0,1]$ es conexo, como queremos. □

Observemos que combinando este resultado con la Proposición 6.6.3.2 obtenemos una nueva demostración de la Proposición 6.6.1.1. Vamos a mostrar como, a partir de la Proposición 6.6.3.5, podemos construir muchos otros conjuntos conexos. El primer paso es el siguiente resultado:

Proposición 6.6.3.6. *Sea A un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^d$. La imagen de una función continua $f : A \to \mathbb{R}^e$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^e$.*

Demostración. Sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función continua y sean U y V subconjuntos abiertos de $f(A)$ tales que $U \cap V = \varnothing$ y $U \cup V = f(A)$. Hay entonces abiertos U_0 y V_0 de $\mathbb{R}^e$ tales que $U = U_0 \cap f(A)$ y $V = V_0 \cap f(A)$, y, como la función f es continua, los conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos de A. Es inmediato verificar que $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \varnothing$ y que $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = A$: como A es conexo, esto implica que alguno de los dos conjuntos $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ es vacío y, entonces, que alguno de U o V es vacío. Podemos concluir con esto que el conjunto $f(A)$ es conexo. □

En general, la unión de conjuntos conexos no es conexa. De todas maneras, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 6.6.3.7. *Sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^d$. Si cada vez que A y B son dos elementos de $\mathscr{A}$ la intersección $A \cap B$ no es vacía, entonces la unión $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Supongamos que la familia $\mathscr{A}$ satisface la hipótesis, sea $X := \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ su unión, y sean U y V dos abiertos de X tales que $U \cap V = \varnothing$, $U \cap V = X$ y $U \neq \varnothing$. Existen entonces U_0 y V_0 abiertos de $\mathbb{R}^d$ tales que $U = U_0 \cap X$ y $V = V_0 \cap X$. Fijemos un elemento x de U. De acuerdo a la definición de X, hay un elemento A de $\mathscr{A}$ tal que $x \in A$. Los conjuntos $U_0 \cap A$ y $V_0 \cap A$ son abiertos en A, disjuntos, y su unión es A, así que alguno de los dos es vacío: x pertenece a $U_0 \cap A$, así que vemos con esto que $V_0 \cap A = \varnothing$ y, por lo tanto, que $A \subseteq U?0$.

Sea ahora B un elemento cualesquiera de $\mathscr{A}$. Los conjuntos $U_0 \cap B$ y $V_0 \cap B$ son abiertos en B, disjuntos, y su unión es B: como B es conexo, alguno de los dos es vacío. Como $\varnothing \neq A \cap B \subseteq U_0 \cap B$, debe ser $V_0 \cap B = \varnothing$ y, por lo tanto, $B \subseteq U_0$. Vemos así que todos los elementos de $\mathscr{A}$ están contenidos en U_0 y, en consecuencia, que $X \subseteq U_0$, así que $V = \varnothing$. Esto prueba que el conjunto X es conexo. □

Juntando todo lo que hemos hecho, podemos mostrar ahora que la Proposición 6.6.3.2 generaliza a la Proposición 6.6.2.13.

Corolario 6.6.3.8. *Un subconjunto no vacío y arco-conexo de $\mathbb{R}^d$ es conexo.*

Demostración. Sea A un conjunto no vacío y arco-conexo de $\mathbb{R}^d$, y sea a_0 un elemento de A. Para cada $a \in A$ hay una función continua $\sigma_a : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en A y tal que $\sigma_a(0) = a_0$ y $\sigma_a(1) = a$: de acuerdo a la Proposición 6.6.3.6, su imagen $\sigma_a([0,1])$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^d$ que contiene a a_0 y a y contenido en A. Es $A = \bigcup_{a\in A} \sigma_a([0,1])$, y la Proposición 6.6.3.7 nos permite concluir entonces que A es conexo. □

Usando esto podemos probar algo que observamos en el capítulo 5:

Corolario 6.6.3.9. *El espacio $\mathbb{R}^d$ es conexo y, en particular, los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ que son simultáneamente abiertos y cerrados son $\varnothing$ y $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. En efecto, $\mathbb{R}^d$ es convexo, así que es arco-conexo y, por la proposición, conexo. □

Terminemos esta sección con un resultado que es extremadamente útil:

Proposición 6.6.3.10. *Un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo si y solamente si es conexo.*

Demostración. El Corolario 6.6.3.9 nos dice que la condición es necesaria. Veamos que también es suficiente. Sea A un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^d$ que es conexo, sea x_0 un punto de A, y consideremos el conjunto U de todos los puntos x de A para los que hay una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en A tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x$. Vamos a probar que $U = A$ y, en vista del resultado del Ejercicio 6.6.2.12, esto probará que el conjunto A es arco-conexo.

Supongamos que x es un elemento de U, de manera que hay una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en A y tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x$. Como A es abierto en $\mathbb{R}^d$, hay un número positivo r tal que $B_r(x) \subseteq A$. Si y es un punto cualquiera de $B_r(x)$, entonces la función $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ que en cada $t \in [0,1]$ toma el valor

$$\tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ (2-2t)\cdot x + (2t-1)\cdot y & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

es continua, tiene $\tau(0) = x_0$ y $\tau(1) = y$, y es fácil ver que toma valores en A: esto nos dice que $y \in U$. Podemos concluir de esta forma que $B_r(x) \subseteq U$ y, por lo tanto, que el conjunto U es abierto en $\mathbb{R}^d$ y, por lo tanto, en A.

Veamos ahora que U también es cerrado en A. Supongamos que $(u_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de puntos de U que converge a un punto u de A: tenemos que mostrar que u pertenece a U. Ahora bien, como A es abierto en $\mathbb{R}^d$, hay un número positivo s tal que $B_s(u) \subseteq A$, y como la sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ converge a u, hay un entero positivo m tal que u_m pertenece a $B_s(u)$. Finalmente, como u_m pertenece a U, hay una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en A y tal que $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = u_m$. Como antes, es fácil ver que la función $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ que en cada $t \in [0,1]$ toma el valor

$$\tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ (2-2t)\cdot u_m + (2t-1)\cdot u & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

es continua, toma valores en A y tiene $\tau(0) = x_0$ y $\tau(1) = u$: esto nos permite concluir que u pertenece a U, como queremos.

En este punto sabemos que U es un subconjunto abierto y cerrado de A, y no es vacío ya que claramente contiene a x_0: podemos concluir, de la Proposición 6.6.3.3 y el hecho de que A es conexo, que $U = A$, y esto prueba la proposición, como explicamos arriba. □

Ejercicio 6.6.3.11. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y consideremos la relación $\sim$ sobre A tal que siempre que x e y son puntos de A vale

> *$x \sim y$ si y solamente si hay una función continua $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ con valores en A y tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.*

(a) Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Si x es un elemento de A, la clase de equivalencia de x con respecto a esta relación es la ***componente arco-conexa*** de x en A y la escribimos $C_A(x)$. Normalmente escribimos $\pi_0(A)$ al conjunto de las clases de equivalencia de la relación $\sim$.

(b) Muestre que si el conjunto A es abierto en $\mathbb{R}^d$, entonces todas sus componentes arco-conexas son abiertas y cerradas en A

6.7. El teorema de la función inversa

En general, en análisis llamamos *teorema de la función inversa* a cualquier resultado que nos permite concluir que una función es inversible y/o que, si lo es, su inversa tiene ciertas propiedades útiles. Los ejemplos más célebres de esta clase de resultados son el teorema de la función inversa, del cálculo diferencial, y el teorema de isomorfismo de Banach, del análisis funcional. Aquí nos contentaremos con dar condiciones razonables para que una función biyectiva tenga inversa continua y para que una función continua sea biyectiva.

Recordemos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es ***estrictamente monótona*** si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Cuando ese es el caso, se trata de una función inyectiva y si escribimos $f(A)$ su imagen entonces podemos considerar la función $f^{-1} : f(A) \to A$ que es inversa de la correstricción $f|^{f(A)} : A \to f(A)$ y a la que llamamos, abusando del lenguaje un poco, la función inversa de f.

Proposición 6.7.1. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente monótona, entonces la correspondiente función inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ es continua.*

Notemos que no pedimos aquí que la función f sea continua.

Demostración. Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente — dejaremos a cargo del lector la consideración del caso de las funciones estrictamente decrecientes. Sea y_0 un elemento de $f(I)$, sea ε un número positivo, y escribamos x_0 al elemento de I tal que $f(x_0) = y_0$. Notemos que la función f^{-1} también es estrictamente creciente.

Consideremos primero el caso en que x_0 es interior a I, de manera que hay un número positivo ε' tal que $(x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon') \subseteq I$. Si ponemos $\varepsilon'' := \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$, entonces $x_0 - \varepsilon''$ y $x_0 + \varepsilon''$

pertenecen a I y es $f(x_0 - \varepsilon'') < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon'')$, de manera que el número

$$\delta \coloneqq \text{mín}\{f(x_0 + \varepsilon'') - y_0, y_0 - f(x_0 - \varepsilon'')\}$$

es positivo. Sea ahora y un elemento de $f(I)$ tal que $|y - y_0| < \delta$ y sea x el elemento de I tal que $f(x) = y$. Como

$$f(x_0 - \varepsilon'') = y_0 - (y_0 - f(x_0 - \varepsilon'')) \le y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \le y_0 + \big(f(x_0 + \varepsilon'') - y_0\big) = f(x_0 + \varepsilon''),$$

tenemos que

$$x_0 - \varepsilon < x_0 - \varepsilon'' < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon'' < x_0 + \varepsilon,$$

es decir, que $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. Esto prueba que la función f^{-1} es continua en y_0.

Consideremos ahora el caso en que x_0 no es interior al intervalo I y, por lo tanto, es igual a $\text{máx}\, I$ o a $\text{mín}\, I$. Consideraremos solamente la segunda de estas posibilidades, dejando a cargo del lector la otra. En ese caso hay un número positivo ε' tal que $[x_0, x_0 + \varepsilon') \subseteq I$ y si ponemos $\varepsilon'' \coloneqq \frac{1}{2}\text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon'\}$ entonces $x_0 + \varepsilon''$ pertenece a I, es $f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon'')$, y el número

$$\delta \coloneqq f(x_0 + \varepsilon'') - f(x_0)$$

es positivo. Sea y un elemento de $f(I)$ tal que $|y - y_0| < \delta$ y sea x el elemento de I tal que $f(x) = y$. No puede ser $y < y_0$, ya que $f^{-1}(y) \ge x_0 = f^{-1}(y_0)$ porque $x_0 = \text{mín}\, I$, y entonces tenemos que

$$y_0 \le y < y_0 + \delta = y_0 + \big(f(x_0 + \varepsilon'') - f(x_0)\big) = f(x_0 + \varepsilon'').$$

Como la función f^{-1} es estrictamente creciente, esto implica que

$$f^{-1}(y_0) \le f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon'' = f^{-1}(y_0) + \varepsilon''$$

y, en particular, que $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon'' < \varepsilon$. Vemos así que la función f^{-1} es continua en y_0 también en este caso. □

En esta demostración usamos el hecho de que el conjunto I es un intervalo para asegurar que si x_0 es un elemento de I entonces o bien x_0 es interior y hay un número positivo ε tal que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$, o bien no lo es, y hay un número positivo ε tal que $x_0 = \text{mín}\, I$ y $[x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$ o $x_0 = \text{máx}\, I$ y $(x_0 - \varepsilon, x_0] \subseteq I$. De hecho, la afirmación de la proposición es falsa en general si no suponemos que el conjunto I es un intervalo.

Ejemplo 6.7.2. Sea $f : [0,1) \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ la función que en cada $x \in [0,1) \cup [2,3]$ toma el valor

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1; \\ x - 1 & \text{si } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Es inmediato verificar que esta función es estrictamente creciente, que su imagen es $[0,2]$, y que su función inversa $f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}$ no es continua.

Una consecuencia de esta proposición es el siguiente criterio de continuidad:

Proposición 6.7.3. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Dos cualesquiera de las siguientes tres afirmaciones implica la tercera:*

(*a*) *f es inyectiva y su imagen es un intervalo de $\mathbb{R}$.*

(*b*) *f es continua.*

(*c*) *f es estrictamente monótona.*

Demostración. Supongamos primero que valen las afirmaciones (a) y (c), y sea J la imagen de f, de manera que podemos considerar la función inversa $f^{-1} : J \to I$. Esta tiene por dominio un intervalo y estrictamente monótona porque f lo es, así que la Proposición 6.7.1 nos permite concluir que $f = (f^{-1})^{-1}$ es continua, de manera que vale la afirmación (b). Esto prueba la implicación $(a) + (c) \implies (b)$.

Supongamos ahora que $f : I \to J$ es una función continua e inyectiva, y consideremos el subconjunto $\Delta \coloneqq \{(x,y) \in I \times I : x < y\}$ de $\mathbb{R}^2$. Este conjunto es arco-conexo: en efecto, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de Δ y, sin pérdida de generalidad, es $y_1 \leq y_2$, entonces la función $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ que en cada $t \in [0,1]$ toma el valor

$$\sigma(t) = \begin{cases} (x_1, (1-2t)y_1 + 2ty_2) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ ((2-2t)x_1 + (2t-1)x_2, y_2) & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

es continua, toma valores en el conjunto Δ, y tiene $\sigma(0) = (x_1, y_1)$ y $\sigma(1) = (x_2, y_2)$.

Es inmediato verificar que la función

$$g : (x,y) \in \Delta \mapsto (x-y)(f(x) - f(y)) \in \mathbb{R}$$

es continua, y que, como la función f es inyectiva, g no se anula en ningún punto de su dominio. Se sigue del teorema de los valores intermedios 6.6.2.13 que la imagen de g está totalmente contenida o bien en $(0, +\infty)$ o bien en $(-\infty, 0)$. En el primer caso la función f es estrictamente decreciente, mientras que el el segundo caso la función f es estrictamente creciente. En cualquier caso, entonces, la función f es estrictamente monótona. Esto prueba la implicación $(a) + (b) \implies (c)$.

Finalmente, supongamos que la función f es estrictamente monótona y continua. Es claro que f es entonces inyectiva y, como es continua, su imagen es ciertamente un intervalo. Esto prueba la implicación $(b) + (c) \implies (a)$ que nos faltaba. □

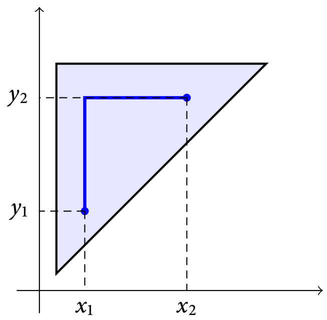


Figura 6.5. La curva que usamos en la demostración de la Proposición 6.7.3.

Ejemplo 6.7.4. Sea n un entero positivo consideremos la función

$$f : x \in [0, +\infty) \mapsto x^n \in [0, +\infty).$$

Sabemos que es continua, porque es el producto de la función $x \in [0, +\infty) \mapsto x \in [0, +\infty)$, que es claramente continua, consigo misma n veces, y es biyectiva. En efecto, es inyectiva porque $x_1^n < x_2^n$ siempre que x_1 e x_2 son números tales que $0 \leq x_1 < x_2$. Por otro lado, si y es un elemento cualquiera de $[0, +\infty)$, entonces hay un entero positivo k tal que $y < k$ y, por lo tanto, $f(0) = 0 \leq y < k^n = f(k)$, así que el teorema de los valores intermedios nos permite concluir que hay un punto $x \in [0, k]$ tal que $f(x) = y$.

Como la función f es biyectiva, podemos considerar su función inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$: la imagen de un número x de $[0, \infty)$ por esta función es el único número $y \in [0, +\infty)$ tal que $y^n = x$, que es el que normalmente escribimos $\sqrt[n]{x}$ o $x^{1/n}$. Por otro lado, como la función f es estrictamente creciente y su dominio y codominio son intervalos, la Proposición 6.7.1 nos permite concluir que f^{-1} es una función continua.

6.8. Continuidad uniforme

La función

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$$

es continua. Una forma de verlo es observar que la función identidad $h : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ es continua y que f es igual al producto $h \cdot h \cdot h$, así que su continuidad es una consecuencia inmediata de la Proposición 6.3.12. Mostremos que es continua directamente usando la Definición 6.2.1. Sea x_0 un número cualquiera y sea ε un número positivo: para ver que la función f es continua en x_0

tenemos que encontrar un número positivo δ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ valga

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies x_0^3 - \varepsilon < x^3 < x_0^3 + \varepsilon.$$

Ahora bien, como la función $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, para cada $x \in \mathbb{R}$ es

$$x^3 < x_0^3 + \varepsilon \iff x < \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon}, \qquad x^3 > x_0^3 - \varepsilon \iff x > \sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon},$$

y esto nos dice que

$$x \in \left(\sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon}, \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon}\right) \iff x_0^3 - \varepsilon < x^3 < x_0^3 + \varepsilon. \tag{6.11}$$

Es $\sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon} < x_0 < \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon}$, así que el número

$$\delta_{x_0}(\varepsilon) \coloneqq \text{mín}\left\{x_0 - \sqrt[3]{x_0^3 - \varepsilon}, \sqrt[3]{x_0^3 + \varepsilon} - x_0\right\}$$

es positivo, y el intervalo $(x_0 - \delta_{x_0}(\varepsilon), x_0 + \delta_{x_0}(\varepsilon))$ es claramente el intervalo abierto centrado en x_0 más grande contenido en el intervalo que aparece a la izquierda en (6.11). Vemos así que el número $\delta_{x_0}(\varepsilon)$ es el más grande que tiene la propiedad de que todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$x \in (x_0 - \delta_{x_0}(\varepsilon), x_0 + \delta_{x_0}(\varepsilon)) \implies x_0^3 - \varepsilon < x^3 < x_0^3 + \varepsilon.$$

Que $\delta_{x_0}(\varepsilon)$ sea positivo prueba que la función f es continua en x_0. Más aún, lo que hemos hecho implica lo siguiente:

para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y todo número positivo ε, un número positivo δ tiene la propiedad de que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ si y solamente si $\delta < \delta_{x_0}(\varepsilon)$. (6.12)

Fijemos otra vez un número positivo ε. Sea n un entero positivo y consideremos el número $x \coloneqq \text{máx}\{1, n\varepsilon/3\}$. Es $x^2 \geq x \geq n\varepsilon/3 > 0$, así que $3x^2/n \geq \varepsilon$ y, por lo tanto,

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^3 = x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} + \frac{1}{n^3} > x^3 + \varepsilon.$$

Esto implica que $x + 1/n > \sqrt[3]{x^3 + \varepsilon}$ y, en consecuencia, que $0 \leq \delta_x(\varepsilon) \leq \sqrt[3]{x^3 + \varepsilon} - x < 1/n$. Esto es así cualquiera sea n en $\mathbb{N}$, así que tenemos que

$$\text{ínf}\{\delta_x(\varepsilon) : x \in (0, +\infty)\} = 0.$$

En vista de (6.12), podemos concluir a partir de esto que

si ε es un número positivo, no existe ningún número positivo δ tal que para toda elección de elementos x_0 y x en $\mathbb{R}$ valga $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

En los términos de la siguiente definición, entonces, vemos que la función $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

Definición 6.8.1. Una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ es ***uniformemente continua*** si ara todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que para toda elección de x e y en A vale

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Escribamos $\mathbb{R}^+$ al intervalo $(0, +\infty)$. La condición de que una función $f : A \to \mathbb{R}^e$ sea continua en todo su dominio puede escribirse de la siguiente manera:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in A)(\|y - x\| < \delta \implies \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon). \tag{6.13}$$

Por otro lado, que la condición de que esa función sea uniformemente continua en su dominio es la siguiente:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\|y - x\| < \delta \implies \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon). \tag{6.14}$$

Es importante observar cuál es la diferencia entre estas dos condiciones: lo único que cambia de (6.13) a (6.14) es el *orden* de los dos cuantificadores que escribimos en color.

Ejemplo 6.8.2. La función identidad $f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto x \in \mathbb{R}^d$ es uniformemente continua. En efecto, si ε es un número positivo, podemos poner $\delta \coloneqq \varepsilon$ y evidentemente vale que para cada elección de dos puntos x e y en $\mathbb{R}^d$ se tiene que

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Ejemplo 6.8.3. Consideremos ahora la función $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sen} x \in \mathbb{R}$, demos por cierto que se trata de una función continua en 0, y sea ε un número positivo. Esa hipótesis sobre f implica que existe un número positivo δ tal que para todo $z \in \mathbb{R}$ es

$$|z| < \delta \implies |\operatorname{sen} z| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ahora x e y son dos elementos cualesquiera de $\mathbb{R}$ tales que $|x - y| < \delta$, entonces tenemos que

$$|f(x) - f(y)| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left|2 \operatorname{sen} \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}\right| < \varepsilon,$$

ya que $|\operatorname{sen}(x - y)/2| < \varepsilon/2$ y $|\cos(x + y)/2| \leq 1$. Esto prueba que vale

> *para cada número positivo ε existe otro número positivo δ tal que siempre x e y son elementos de $\mathbb{R}$ tales que $|x - y| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$*

y, por lo tanto, que la función f es uniformemente continua.

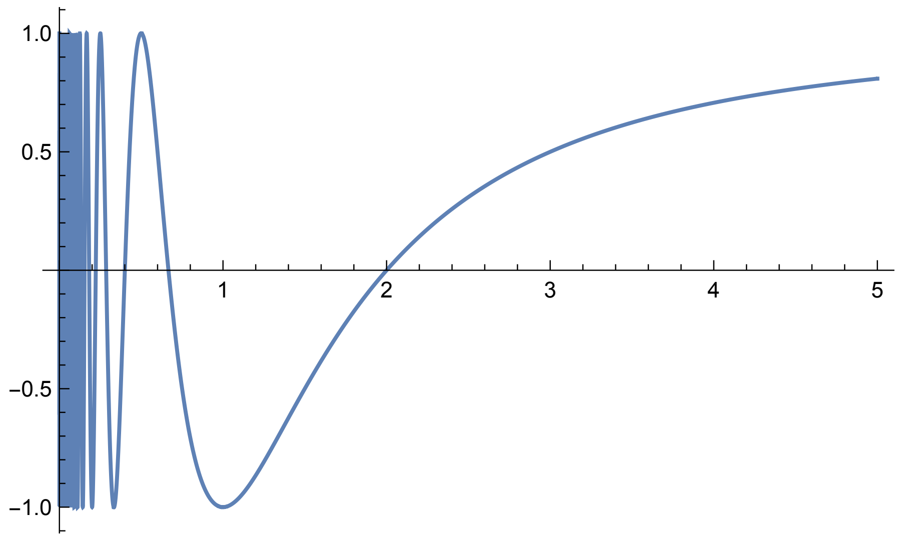


Figura 6.6. La función $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \cos \pi/t \in \mathbb{R}$ del Ejemplo 6.8.3.

Ejemplo 6.8.4. Consideremos ahora la función $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \cos \frac{\pi}{t} \in \mathbb{R}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \coloneqq 1/n$, entonces es claro que

$$|x_n - x_{n+1}| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{n} \qquad\qquad |f(x_n) - f(x_{n+1}| = 2.$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que no existe ningún número positivo δ tal que para toda elección de x e y en $\mathbb{R}^+$ valga

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < 2,$$

ya que de haberlo ese número δ sería menor que $1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vemos así que la función f no es uniformemente continua. En la Figura 6.6 puede verse el gráfico de esta función.

La continuidad uniforme es una condición más fuerte que la continuidad:

Proposición 6.8.5. *Una función uniformemente continua es continua.*

Demostración. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función uniformemente continua. Sea x_0 un punto de A y sea ε un número positivo. Como la función f es uniformemente continua, existe un número positivo δ tal que siempre que x e y son elementos de A tales que $\|x - y\| < \delta$ se tiene que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. En particular, si x es un elemento de A tal que $\|x - x_0\| < \delta$ esto nos dice que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Vemos así que la función f es continua en x_0

y, como x_0 es un punto arbitrario de A, en todo el conjunto A. □

Como muestran los ejemplos que dimos, la implicación recíproca a la de la Proposición 6.8.5 no es cierta. Es un resultado fundamental, de todas, formas, que el siguiente caso particular sí vale.

Proposición 6.8.6. *Una función continua $f : K \to \mathbb{R}^e$ definida sobre un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^d$ es uniformemente continua.*

Daremos de esta proposición dos demostraciones: una directa, usando la Proposición 5.7.12 que afirma la existencia de un número de Lebesgue para un cubrimiento abierto de un conjunto compacto, y una por contradicción que depende solamente de las definiciones de compacidad y continuidad uniforme.

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$, sea $f : K \to \mathbb{R}^e$ una función continua, y sea ε un número positivo. Como la función f es continua, para cada $x \in K$ existe un número positivo $\delta(x)$ tal que para todo $y \in K$ vale

$$\|y - x\| < \delta(x)) \implies \|f(y) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.15}$$

El conjunto $\mathscr{U} := \{B_{\delta(x)} : x \in K\}$ es entonces un cubrimiento abierto de K y, como K es un conjunto compacto, la Proposición 5.7.12 nos dice que $\mathscr{U}$ posee un número de Lebesgue, esto es, que existe un número positivo δ tal que cada vez que x e y son elementos de K tales que $\|x - y\| < \delta$ hay un elemento U de $\mathscr{U}$ que contiene tanto a x como a y.

Sean x e y dos elementos de K tales que $\|x - y\| < \delta$. Por la forma en que elegimos a δ y la definición del cubrimiento $\mathscr{U}$, hay un punto z de K tal que $x, y \in B_{\delta(z)}(z)$. De acuerdo a (6.15) tenemos entonces que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que la función f es uniformemente continua, como afirma la proposición. □

Demostración alternativa de la Proposición 6.8.6. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$, sea $f : K \to \mathbb{R}^e$ una función continua y, para llegar a una contradicción, supongamos que la función f no es uniformemente continua. Esto implica que existe un número positivo ε tal que para todo entero positivo n hay dos puntos x_n e y_n en K tales que $\|x_n - y_n\| < 1/n$ y $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$.

Como el conjunto K es compacto y la sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ toma valores en él, hay una función estrictamente creciente $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{h(n)})_{n\geq1}$ converge a un punto a de K. De la misma forma, como la sucesión $(y_{h(n)})_{n\geq1}$ toma valores en K hay una función estrictamente creciente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(y_{h(k(n))})_{n\geq1}$ converge a un punto b de K. Por simplicidad, consideremos la composición $l := h \circ k$.

Sea η un número positivo. Como las sucesiones $(x_{l(n)})_{n\geq 1}$ e $(y_{l(n)})_{n\geq 1}$ convergen a a y a b, existe un entero positivo m_0 tal que para todo entero n mayor o igual a m_0 es $\|x_{l(n)} - a\| < \eta/2$ y $\|y_{l(n)} - b\| < \eta/2$. Se sigue de esto que si m es el número máx$\{m_0, \lfloor 1/\eta \rfloor + 1\}$, entonces $\|x_{l(m)} - y_{l(m)}\| < 1/l(m) \leq 1/m < \eta$ y, por lo tanto,

$$\|a - b\| \leq \|a - x_{l(m)}\| + \|x_{l(m)} - y_{l(m)}\| + \|y_{l(m)} - n\| < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.$$

Esto es así cualquiera sea el número positivo η, así que podemos concluir que, de hecho, es $a = b$.

Como la función f es continua en a, hay un número positivo δ tal que para todo $x \in K$ vale

$$\|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, como las sucesiones $(x_{l(n)})_{n\geq 1}$ e $(y_{l(n)})_{n\geq 1}$ convergen a a, hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \|x_{l(n)} - a\| < \delta, \ \|y_{l(n)} - a\| < \delta.$$

En particular, tenemos que

$$\|f(x_{n_0}) - f(y_{n_0})\| \leq \|f(x_{n_0}) - f(a)\| + \|f(b) - f(y_{n_0})\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto es imposible en vista de la forma en que elegimos los puntos $x_{l(n_0)}$ e $y_{l(n_0)}$, y esta contradicción muestra que la proposición es cierta. □

La continuidad uniforme es una hipótesis clave en muchos resultados del análisis. Por ahora nos contentaremos con mostrar cómo puede ser usada para probar el siguiente resultado de *extensión* y *comparación* de funciones continuas.

Proposición 6.8.7. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ y sea $f : A \to \mathbb{R}^e$ una función. Si f es uniformemente continua, entonces existe exactamente una función continua $\bar{f} : \overline{A} \to \mathbb{R}^e$ sobre la clausura $\overline{A}$ de A tal que $\bar{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, y esta función es uniformemente continua.*

Demostración. Supongamos que la función $f : A \to \mathbb{R}^e$ es uniformemente continua. Probaremos la proposición en varios pasos.

Primer paso. Sea x_0 un elemento de $\overline{A}$ y mostremos que

> *si $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en A que converge a x_0, entonces la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge.*

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en A que converge a x_0 y sea ε un número positivo. Como la función f es uniformemente continua sobre A, hay un número positivo δ tal que siempre que u y

v son elementos de A vale

$$\|u - v\| < \delta \implies \|f(u) - f(v)\| < \varepsilon.$$

Por otro lado, como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x_0, hay un entero positivo n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n \geq n_0 \implies \|x_n - x_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

Sean ahora m y n dos enteros tales que $m \geq n_0$ y $n \geq n_0$. Por la forma en que elegimos n_0 tenemos que

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_0\| + \|x_0 - x_n\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

y de acuerdo a la forma en que elegimos δ tenemos entonces que $\|f(x_m) - f(x_n)\| < \varepsilon$. Esto prueba que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy y, como sabemos, esto a su vez implica que esa sucesión converge.

Segundo paso. Sea otra vez x_0 un elemento de $\overline{A}$ y mostremos ahora que

> *hay exactamente un elemento L_x de $\mathbb{R}^d$ tal que cada vez que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en A que converge a x_0 la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a L_x.*

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión cualquiera con valores en A que converge a x_0. En el paso anterior vimos que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge — escribamos L_x a su límite. Para probar lo que queremos es suficiente que mostremos que si $(y_n)_{n\geq 1}$ es otra sucesión con valores en A que converge a x_0 entonces la sucesión $(f(y_n))_{n\geq 1}$ también converge a L_x.

Sea entonces $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en A que converge a x_0 y sea L' el límite de la sucesión $(f(y_n))_{n\geq 1}$, que, como vimos, existe. Sea ε un número positivo. Como la función f es uniformemente continua en A, hay un número positivo δ tal que siempre que u y v son elementos de A vale

$$\|u - v\| < \delta \implies \|f(u) - f(v)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, como las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y $(f(y_n))_{n\geq 1}$ convergen a L_x y a L', hay enteros positivos n_1 y n_2 tales que

$$n \geq n_1 \implies \|f(x_n) - L_x\| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \geq n_2 \implies \|f(y_n) - L'\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalmente, como las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ convergen a x_0, hay enteros positivos n_3 y n_4 tales que

$$n \geq n_3 \implies \|x_n - x_0\| < \frac{\delta}{2}, \qquad n \geq n_4 \implies \|y_n - x_0\| < \frac{\delta}{2}.$$

Pongamos $m \coloneqq \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$. En vista de la forma en que elegimos n_3 y n_4, tenemos que $\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x_0\| + \|x_0 - y_n\| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$, así que por la forma en que elegimos n_1 y n_2 tenemos que

$$\|L_x - L'\| \leq \|L_x - f(x_m)\| + \|f(x_m) - f(y_m)\| + \|f(y_m) - L'\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vemos con esto que el número $\|L_x - L'\|$ es menor que todo número positivo, así que debe ser nulo y, por lo tanto, debe ser $L' = L_x$. Esto prueba lo que queremos.

Tercer paso. Lo que acabamos de hacer implica que hay una función

$$\overline{f} : x \in \overline{A} \mapsto L_x \in \mathbb{R}^e.$$

Queremos probar ahora que esta función $\overline{f}$ es uniformemente continua y que su restricción a A coincide con f.

Empecemos por la segunda de estas afirmaciones, que es la más fácil. Sea x un elemento de A. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos $x_n \coloneqq x$ obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ con valores en A que converge a x, así que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq1}$ converge a $L_x = \overline{f}(x)$. Por supuesto, esta última sucesión es constante de valor $f(x)$, así que es claro que $\overline{f}(x) = f(x)$, como queremos.

Probemos ahora que la función f es uniformemente continua en su dominio $\overline{A}$. Sea ε un número positivo. Como la función f es uniformemente continua, hay un número positivo δ tal que siempre que x e y son elementos de A vale

$$\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sean ahora u y v dos elementos de $\overline{A}$ tales que $\|u - v\| < \delta$. Como pertenecen a la clausura de A, existen sucesiones $(u_n)_{n\geq1}$ y $(v_n)_{n\geq1}$ con valores en A que convergen a u y a v, respectivamente, y de acuerdo a lo que ya hicimos las sucesiones $(f(u_n))_{n\geq1}$ y $(f(v_n))_{n\geq1}$ convergen a $\overline{f}(u)$ y a $\overline{f}(v)$. Existen entonces enteros positivo n_1 y n_2 tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ vales

$$n \geq n_1 \implies \|f(u_n) - \overline{f}(u)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \geq n_1 \implies \|f(v_n) - \overline{f}(v)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, como las sucesiones $(u_n)_{n\geq1}$ y $(v_n)_{n\geq1}$ convergen a u y a v y es $\|u - v\| < \delta$, hay enteros positivo n_3 y n_4 tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ valen

$$n \geq n_3 \implies \|u_n - u\| < \frac{1}{2}(\delta - \|u - v\|), \qquad n \geq n_4 \implies \|v_n - v\| < \frac{1}{2}(\delta - \|u - v\|).$$

Sea $m \coloneqq \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$. La forma en que elegimos n_3 y n_4 implica que

$$\begin{aligned}\|u_m - v_m\| &\leq \|u_m - u\| + \|u - v\| + \|v - v_m\| \leq \frac{1}{2}(\delta - \|u - v\|) + \|u - v\| + \frac{1}{2}(\delta - \|u - v\|) \\ &= \delta,\end{aligned}$$

así que la forma en que elegimos δ y n_1 y n_2 nos permite deducir que

$$\|\overline{f}(u) - \overline{f}(v)\| \leq \|\overline{f}(u) - f(u_m)\| + \|f(u_m) - f(v_m)\| + \|f(v_m) - \overline{f}(v)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Vemos así que la función $\overline{f}$ es uniformemente continua.

Cuarto y último paso. Probemos finalmente la afirmación de unicidad de la proposición. Si $g : \overline{A} \to \mathbb{R}^e$ es una función continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, entonces tenemos que $\overline{f}|_A = g|_A$ y, como por supuesto $A \subseteq \overline{A}$, la Proposición 6.3.18 nos permite concluit que $g = \overline{f}$. Con esto queda completamente probada la proposición. □

Bibliografía

[Abe1826] Neils Henrik Abel, *Recherches sur la série* $1+(m/1)x+(m(m-1)/1.2)x^2+(m(m-1)(m-2)/1.2.3)x^3+\ldots$, Journal für die Reine und angewandte Mathematik **1** (1826), 311–339.

[AEP0] Nicole R. Andre, Susannah M. Engdahl, and Adam E. Parker, *An Analysis of the First Proofs of the Heine–Borel Theorem*, Convergence (August 2013).

[Apé1979] Roger Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, 1979, pp. 11–13. Luminy Conference on Arithmetic. MR3363457

[AS1927a] Emil Artin and Otto Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), no. 1, 85–99. MR3069467

[AS1927b] Emil Artin and Otto Schreier, *Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), no. 1, 225–231. MR3069477

[BA1962] Robert Bourgne and J.-P. Azra, *Ecrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois: Édition critique intégrale de ses manuscrits et publications*, Gauthier-Villars & Cie, Éditeur-Imprimeur-Libraire, Paris, 1962. Préface de J. Dieudonné. MR150016

[Beu1979] Frits Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), no. 3, 268–272. MR554391

[Cau1821] Augustin-Louis Cauchy, *Analyse algébrique. cours d'analyse de l'École royale polytechnique.*, L'Imprimerie Royale, Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, Paris, 1821.

[Ded1960] Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1960. 6te unveränderte Aufl. MR114755

[Dug1989] Pierre Dugac, *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine-Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue*, Arch. Internat. Hist. Sci. **39** (1989), no. 122, 69–110. MR1092039

[Eul1744] Leonhard Euler, *Variae observationes circa series infinitas*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **9** (1744), 160–188.

[Fré1905] M. Fréchet, *Generalization of a theorem of Weierstrass*, C. R. Acad. Sci., Paris **139** (1905), 848–850 (French).

[Fur1977] Harry Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256. MR498471

[Had1888] Jacques Hadamard, *Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable*, C. R. Acad. Sci., Paris **106** (1888), 259–262.

[Hil1900] David Hilbert, *Über den zahlbegriff.*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **8** (1900), 180–183.

[Hil1939] J. D. Hill, *On the space (γ) of convergent series*, Tôhoku Math. J. **45** (1939), 332–337.

[Joh1963] Selmer M. Johnson, *Generation of permutations by adjacent transposition*, Math. Comp. **17** (1963), 282–285. MR159764

[KK1991] V. M. Kadets and M. I. Kadets, *Rearrangements of series in Banach spaces*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. Translated from the Russian by Harold H. McFaden. MR1108619

[KZ2001] Maxim Kontsevich and Don Zagier, *Periods*, Mathematics unlimited—2001 and beyond, 2001, pp. 771–808. MR1852188

[Lé1905] Paul Lévy, *Sur les séries semi-convergentes*, Nouvelles Annales de Mathématiques **64** (1905), 506–511.

[MH1973] John Milnor and Dale Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. Band 73, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. MR506372

[Par1960] William Parry, *On the β-expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 401–416. MR142719

[Rén1957] Alfréd Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8** (1957), 477–493. MR97374

[Rie1868] Bernhard Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch Dedekind)*, Gött. Abh., 1868 (German).

[RS2015] Manya Raman-Sundström, *A pedagogical history of compactness*, The American Mathematical Monthly **122** (2015), no. 7, pp. 619–635.

[Sár1978] András Sárkőzy, *On difference sets of sequences of integers. I*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **31** (1978), no. 1-2, 125–149. MR466059

[Sie1910a] Wacław Sierpiński, *Przyczynek do teoryi szeregów rozbieżnych [contribution à la théorie des séries divergentes]*, Sprawozdania Z Posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego **3** (1910), 89–93.

[Sie1910b] Wacław Sierpiński, *Uwaga do twierdzenia Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych [remarque sur le théorème de riemann relatif aux séries semiconvergentes]*, Prace Matematyczno-Fizyczne **21** (1910), no. 1, 17–20.

[Sie1911] Wacław Sierpiński, *Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes [O pewnej własności szeregów warunkowo zbieżnych]*, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie (1911), Séries A: 149–158.

[Ste1913] Ernst Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 128–176. MR1580879

[Ste1964] Hugo Steinhaus, *One hundred problems in elementary mathematics*, Basic Books, Inc., Publishers, New York, 1964. With a foreword by Martin Gardner. MR157881

[Sze1975] Endre Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245. MR369312

[Tro1962] H. F. Trotter, *Algorithm 115: Perm*, Commun. ACM **5** (1962aug), no. 8, 434–435.

[Web1893] H. Weber, *Leopold Kronecker*, Math. Ann. **43** (1893), no. 1, 1–25. MR1510799

[Wil2007] Władysław Wilczyński, *On riemann derangement theorem*, Słupskie Prace Matematyczno-Fizyczne 4 (2007), 79–82.

[Zud2002] Wadim Zudilin, *An elementary proof of Apery's theorem* (2002).

Notaciones

Lista de personas

Índice