Parcial Cálculo Avanzado

Leonardo Lanciano

16 de septiembre de 2020

1.

1.a.

Sea $A = \{x \in P(\mathbb{N}) \ / \ \#x = \#(\mathbb{N} - x)\}$. Por cómo A está definido, tenemos que A son los conjuntos numerables de complemento numerable. Ya que, supongamos que $\exists \ x \in A / \ x$ es finito, luego $\#x = k \in \mathbb{N}$, y como $x \in A$, $\#x = \#x^c = \#(\mathbb{N} - x) = \aleph_0$ Abs!
Por lo que x no es finito. De esto se sigue, además, que si hubiera un conjunto infinito con complemento finito $\Rightarrow$ este conjunto no pertenece a A

Así, dado $x \in A, \ \#x = \aleph_0$. Ahora bien, queremos calcular $\#A$.

Sabemos que $A \subseteq P(\mathbb{N})$ y $\#P(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0} = c$. Pero si lo pensamos bien, solamente existen tres tipos de conjuntos en $P(\mathbb{N})$. De manera que estos son los conjuntos numerables de complemento finito, los conjuntos numberables de complemento numerable, y los conjuntos finitos. Dicho esto, tenemos que:

$P(\mathbb{N}) = \{x \in P(\mathbb{N}) / x \ es \ finito\} \cup \{x \in P(\mathbb{N}) / \#x = \aleph_0 \ y \ \#x^c \ es \ finito\} \cup \{x \in P(\mathbb{N}) / \#x = \#x^c = \aleph_0\}$
Ahora bien, $\# \{x \in P(\mathbb{N}) / x \ es \ finito\} = \# \{x \in P(\mathbb{N}) / \ \#x = \aleph_0 \ y \ \#x^c \ es \ finito\}$, ya que $f : \{x \in P(\mathbb{N}) / x \ es \ finito\} \to \{x \in P(\mathbb{N}) / \#x = \aleph_0 \ y \ \#x^c \ es \ finito\} \ / \ f(x) = x^c$ es biyectiva.
Primero veamos su inyectividad. Sean $x, y \in Dom(f)$

Tenemos que $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^c = y^c \Leftrightarrow (x^c)^c = (y^c)^c \Leftrightarrow x = y$

Además, es sobreyectiva, puesto que dado $x \in \{x \in P(\mathbb{N}) / \#x = \aleph_0 \ y \ \#x^c \ es \ finito\} \Rightarrow \#x^c$ es finito $\Rightarrow x^c$ es finito $\Rightarrow x^c \in \{x \in P(\mathbb{N}) / x \ es \ finito\}$

Luego $f(x^c) = (x^c)^c = x$, que es lo que queríamos ver.

Esto implica que $x^c \in \{x \in P(\mathbb{N}) / x \ es \ finito\} = \aleph_0$ debido a que puedo construir una $g : \{x \in P(\mathbb{N}) / x \ es \ finito\} \to \bigcup\limits_{i \geq 1} \mathbb{N}^i$ inyectiva, donde g es una función que a un conjunto $R \subseteq \mathbb{N}$ de cardinal finito lo transforma en un vector de tamaño $\#R$ que tiene sus elementos ordenados de menor a mayor de manera tal que:

$$\underset{si\,\#R=i}{g(R)} = \underbrace{(min(R), min(R\backslash\{min(R)\}), \ldots, max(R))}_{vector\,de\,tamaño\,i}$$

Esta función es inyectiva puesto que si $g(x) = g(y) \Rightarrow \#x = \#y = k$ y $min(x) = min(y)$, y así sucesivamente. Luego $\Rightarrow x^c \in \{x \in P(\mathbb{N})/x\,es\,finito\} \subseteq \# \bigcup_{i\geq 1} \mathbb{N}^i = \aleph_0$ por ser unión numerable de conjuntos numerables

Es obvio que $\#\{x \in P(\mathbb{N})/x\ es\ finito\} \geq \aleph_0$

$\Rightarrow \#\{x \in P(\mathbb{N})/x\ es\ finito\} = \aleph_0 = \#\{x \in P(\mathbb{N})/\#x = \aleph_0\ y\ \#x^c\ es\ finito\}$

Ahora, dicho y hecho esto, estamos listos para calcular $\#A$.

$\#P(\mathbb{N}) = c = \#A + \#\{x \in P(\mathbb{N})/x\ es\ finito\} + \#\{x \in P(\mathbb{N})/\#x = \aleph_0\ y\ \#x^c\ es\ finito\}$

$c = \#A + \aleph_0 + \aleph_0 \Leftrightarrow \#A = c$

$\Rightarrow \#\{x \in P(\mathbb{N})/\#(x) = \#(\mathbb{N} - x)\} = c$

1.b.

Sea $B = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/f\ es\ biyectiva\}$

Queremos calcular $\#B$. Como $B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Rightarrow$ trivialmente $\#B \leq c$. Entonces, debemos ver que $\#B \geq c$. Sea A el conjunto del ejercicio anterior, entonces por lo probado en a) , sabemos que $\#A = c$.

Afirmo que $A \sim B$ (es coordinable con B). Demostremos esto.

Para demostrarlo, bastaría ver que $\#B \geq c = \#A$. Es decir, bastaría demostrar que $\exists\, f : A \to B$ inyectiva. Ahora sea $L \in A$, luego $\#L = \aleph_0$. Además, $L \subseteq \mathbb{N}$, luego L tiene un buen orden. Entonces, $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que recorre monótonamente a L. Demostremos esto: Como L está bien ordenado todos los subconjuntos de L tienen mínimo $\Rightarrow$ Defino $a_1 = min(L)$, $a_2 = min((L)\backslash\{a_1\})\ \ldots a_n = min(L\backslash \bigcup_{i=1}^{n-1}\{a_i\})$ Además, $a \in A \Leftrightarrow a^c \in A \Rightarrow$ esta sucesión que construimos $\exists$ para a^c, llamémosla b_n. Notamos además, que $\{a_n\}_{n\geq 1} \cup \{b_n\}_{n\geq 1} = a \cup a^c = \mathbb{N}$.

Ahora estamos listos para definir $f : A \to B$ inyectiva, luego sea $f : A \to B/f(a) = g$

donde $g(n) = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & si\,n \equiv 0(2) \\ b_{\frac{n+1}{2}} & si\,n \equiv 1(2) \end{cases}$

Notemos primero que $f(a)$ está bien definida, es decir que efectivamente $f(a) = g$, es una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es sobreyectiva ya que $Im(g) = \{a_n\}_{n\geq 1} \cup \{b_n\}_{n\geq 1} = \mathbb{N}$ (lo mostramos antes).

Además $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva puesto que si $g(m) = g(n) \Rightarrow$, primero notamos que la paridad de m y n debe ser la misma ya que de no ser así, $\{a_n\} \cap \{b_n\} \neq \emptyset$, pero n $\in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \in a$ y $a_n \in a^c \Rightarrow Abs! \Rightarrow m$ y n comparten paridad.

Si $n \equiv 0(2) \Rightarrow a_{\frac{n}{2}} = a_{\frac{m}{2}} \Rightarrow m = n$ ya que $(a_n)_{m\geq 1}$ es estrictamente creciente por cómo está definida.

Si $n \equiv 1(2) \Rightarrow b_{\frac{n+1}{2}} = b_{\frac{m+1}{2}}$ y por el mismo argumento que con $a_n \Rightarrow n = m$ ■

Luego, podemos concluir que f está bien definida ya que $\forall a \in A$, $f(a) = g$ es una función biyectiva.

Ahora veamos que f es inyectiva.

Sean a y $c \in A$ tal que $f(a) = f(c)$

Luego, notemos que $f(a) = f(c) \Leftrightarrow h(n) = g(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Luego si $n \equiv 0(2) \Rightarrow c_{\frac{n}{2}} = a_{\frac{n}{2}} \forall n \in \mathbb{N}$, luego necesariamente $c = \{c_n\}_{n\geq 1} = \{a_n\}_{n\geq 1} = a \Leftrightarrow c = a \Rightarrow f$ es inyectiva.

Luego $\#B \geq c \Rightarrow$ como $c \leq \#B \leq c \Rightarrow \#B = c$ que es lo que queríamos probar ■

2.

2.a.

Primero consideramos (c_0, d_1). Veamos que (c_0, d_1) es cerrado, y luego $\overline{c_0} = c_0$. Luego, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c_0$ una sucesión de elementos de c_0/ $a_n \underset{d_1}{\longrightarrow} x$, veamos que $x \in c_0$, es decir, queremos ver que $x \underset{d}{\rightarrow} 0$.

Como $a_n \underset{d_1}{\longrightarrow} x \Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0,\ d_1(a_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Es decir, $\underset{m\in\mathbb{N}}{sup}\{min\{1, |a_n^m - x^m|\}\} < \frac{\varepsilon}{2}$

Además, notemos que $a_{n_0+1} \in c_0$, es decir, que dado $\varepsilon > 0\ \exists\ m_0 \in \mathbb{N}/\ \forall m \geq m_0,\ d(a^m_{n_0+1}, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$

Dicho esto, estamos listos para demostrar que $x \in c_0$. Lo que debemos ver es que dado $\varepsilon > 0$, $\exists m_0^* \in \mathbb{N}/\ \forall m \geq m_0^*,\ d(x^m, 0) < \varepsilon$. Ahora bien, $d(x^m, 0) \leq d(x^m, a^m_{n_0+1}) + d(a^m_{n_0+1}, 0)$.

Notemos que $d(x^m, a^m_{n_0+1}) = \ min\{1, \left|a^m_{n_0+1} - x^m\right|\}\ \leq \underset{m\in\mathbb{N}}{sup}\left\{min\{1, \left|a^m_{n_0+1} - x^m\right|\}\right\} = d_1(a_{n_0+1}, x)$

Entonces tenemos que $d(x^m, a^m_{n_0+1}) + d(a^m_{n_0+1}, 0) \leq d_1(a_{n_0+1}, x) + d_1(a_{n_0+1}, 0)$

Como $n_0 + 1 \geq n_0 \Rightarrow d_1(a_{n_0+1}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Ahora, si $m \geq m_0^* \Rightarrow d(a^m_{n_0+1}, 0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Rápidamente entonces, por lo mostrado, tenemos que: $d(x^m, 0) \leq d(x^m, a^m_{n_0+1}) + d(a^m_{n_0+1}, 0) \leq d_1(x, a_{n_0+1}) + d(a^m_{n_0+1}, 0) \overset{si\, m\geq m_0^*}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \underset{m\to\infty}{x^m} \underset{d}{\rightarrow} 0 \Rightarrow x \in c_0 \Rightarrow c_0$ es cerrado con d_1 y $\overline{c_0} = c_0$.

Sea (c_{00}, d_1), notemos que $c_{00} \subseteq\ c_0 \Rightarrow \overline{c_{00}} \subseteq \overline{c_0} = c_0$, es decir $\overline{(c_{00}, d_1)} = c_0$ (ya que hemos probado que c_0 es cerrado con d_1). Esto mismo nos da la intuición de que $\overline{c_{00}} = c_0$

Entonces, veamos que dada $b \in c_0$/ $b \underset{d}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq c_{00}$ de manera que $a_n \underset{d_1}{\longrightarrow} b$.

Notemos que $b = (b^i)_{i\geq 1}$. Ahora bien, propongo como a_n a la siguiente sucesión de sucesiones en c_{00}

Definimos $(a_n)_{n\geq 1}$ como: $a_n^k = \begin{cases} b^k & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y obsérvese que

$a_1 = b^1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

$a_2 = b^1\ b^2\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

$\vdots$

$a_k = b^1\ b^2\ b^3\ \ldots\ b^k\ 0\ 0\ \ldots$

Ahora veamos que $a_n \underset{d_1}{\longrightarrow} b$. Notemos que dado $\varepsilon > 0$, como $b \in c_0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}/\ \forall\ m \geq m_0,\ d(b^m, 0) < \varepsilon$

Entonces queremos ver que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall\ n \geq n_0,\ d_1(a_n, b) < \varepsilon$.

Ahora bien, $d_1(a_n, b) = \underset{m\in\mathbb{N}}{sup}\{min\{1, |a_n^m - b^m|\}\}$ pero $|a_n^m - b^m| = 0\ \forall m \leq n$.

$\Rightarrow min\{1, |a_n^m - b^m|\} = 0\ \forall m \leq n$. Ahora, tomando $n \geq m_0 \Rightarrow \underset{m\in\mathbb{N}}{sup}\{min\{1, |a_n^m - b^m|\}\} = \underset{m>n}{sup}\{min\{1, |a_n^m - b^m|\}\}$. Pero $a_n^m = 0\ \forall m > n\ \Rightarrow d_1(a_n, b) = \underset{m>n}{sup}\{min\{1, |a_n^m - b^m|\}\} =$

$\sup\limits_{m>n}\{min\{1,|b^m|\}\} = \sup\limits_{m>n}\{d(b^m,0)\}$

Además, notemos que si $m > n > m_0 \Rightarrow\ d(b^m, 0) < \varepsilon$

Ahora, con todo lo que hemos dicho, estamos listos para probar el resultado.

Ya que $d_1(a_n, b) = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\{min\{1, |a_n^m - b^m|\}\} = \sup\limits_{m>n}\{min\{1, |a_n^m - b^m|\}\} = \sup\limits_{m>n}\{min\{1, |b^m|\}\} = \sup\limits_{m>n}\{d(b^m, 0)\} \overset{si\, m\geq n>m_0}{<} \sup\limits_{m>n}\{\varepsilon\} = \varepsilon\ \forall\ n \geq m_0 + 1 \Rightarrow \overline{(c_{00}, d_1)} = c_0$ ■

Veamos ahora que $\overline{(c_{00}, d_2)} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Luego, sea $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ b = (b^i)_{i\geq 1}$. Demostremos que $\exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {c_{00}}^{\mathbb{N}}/\ a_n \underset{d_2}{\longrightarrow} b$.

Definimos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la siguiente sucesión de sucesiones, como: $a_n^k = \begin{cases} b^k & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Vemos que:

$a_1 = b^1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

$a_2 = b^1\ b^2\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

$\vdots$

$a_k = b^1\ b^2\ b^3\ \ldots\ b^k\ 0\ 0\ \ldots$

Notemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida ya que $a_k \in c_{00}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$

Queremos ver que $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0,\ d_2(a_n, b) < \varepsilon$. Pero, $d_2(a_n, b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d({a_n}^k, b^k)}{2^k}$. Además, por cómo esta definida $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se sigue que $a_n^k = b^k\ \forall\ k \leq n$.

Entonces $d_2(a_n^k, b^k) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d({a_n}^k, b^k)}{2^k}$

Pero $d(a_n^k, b^k) \leq 1$ ya que d es una métrica acotada $\Rightarrow d_2(a_n, b) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, la cual es la cola de una serie convergente, por lo que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0,\ \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right| < \varepsilon$.

Luego, tomando $n \geq n_0$ tenemos que:

$0 \leq d_2(a_n, b) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d({a_n}^k, b^k)}{2^k} \leq \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right| < \varepsilon.$

Lo cual implica que $\overline{(c_{00}, d_2)} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Además, como $c_{00} \subseteq c_0 \Rightarrow \overline{(c_{00}, d_2)} \subseteq \overline{(c_0, d_2)} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\overline{(c_{00}, d_2)} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \subseteq \overline{(c_0, d_2)} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\Rightarrow \overline{(c_0, d_2)} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ■

2.b.

El enunciado nos pide decidir si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es separable con ambas métricas. Veamos que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_1)$ no es separable.

Para eso supongamos que sí lo es. Luego, como $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_1)$ es separable $\Rightarrow \forall\ Y \subseteq (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_1)$,

$(Y, d_1\big|_Y)$ es separable

Entonces, sea $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Como supusimos que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_1)$ era separable $\Rightarrow (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_1\big|_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}})$ lo es. Así, llamemos d^* a $d_1\big|_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \Rightarrow \forall\ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ consideremos $B_{\frac{1}{2}}(a)$, esta bola es abierta y más aún, dadas $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $B_{\frac{1}{2}}(a) \cap B_{\frac{1}{2}}(b) = \emptyset$ si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Ya que, notemos, que $B_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\}$ debido a que:
supongamos que $\exists c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{\frac{1}{2}}(a) \Rightarrow d^*(c,a) < \frac{1}{2}$, luego $\underset{n\in\mathbb{N}}{sup}\{min\{1, |c_n - a_n|\}\} < \frac{1}{2}$. Ahora bien, como son sucesiones de 0 y 1, $|c_n - a_n| = 0$ o $|c_n - a_n| = 1$, lo cual rápidamente implica que si $c \neq a\ \exists n \in \mathbb{N}/\ |c_n - a_n| = 1 \overset{en\, ese\, caso}{\Rightarrow} 1 \leq d^*(c,a) < \frac{1}{2}$ ¡Abs!

$\Rightarrow B_{\frac{1}{2}}(a_n) = \{a_n\} \Rightarrow B_{\frac{1}{2}}(a_n) \cup B_{\frac{1}{2}}(b_n) = \emptyset \Rightarrow$ Sea $\{B_{\frac{1}{2}}(a_i)\}_{i\in I}$ (con I un conjunto) un cubrimiento de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, como $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es separable $\Rightarrow \{B_{\frac{1}{2}}(a_i)\}_{i\in I}$ tiene un subcubrimiento numerable. Pero como las bolas son disjuntas $\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es unión de numerables sucesiones ¡Abs! ya que $\#\{0,1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0} = c$. Como el absurdo sale de que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_1)$ sea separable $\Rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_1)$ no es separable, que es lo que queríamos ver. ■

Ahora, queremos ver que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_2)$ es separable. Ahora bien, sabemos que un espacio métrico es separable si admite un conjunto denso y numerable. Para $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_2)$, sea D mi conjunto candidato a denso y numerable:

$D = \{(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}\ /\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ q_n = 0\ \forall n \geq n_0\}$.

Es obvio que $\#D \geq \aleph_0$, veamos que $\#D \leq \aleph_0$.

Luego, la función $f : D \to \bigcup_{i\geq 1} \mathbb{Q}^i\ /\ f((q_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q_i)_{1\leq i\leq n_0} = (q_1, q_2, ..., q_{n_0})$, donde n_0 es $/\ q_n = 0\ \forall n \geq n_0$. Esta f es trivialmente inyectiva puesto que si $f(q_n) = f(p_n) \Rightarrow q_n$ y p_n tienen el mismo n_0 y coinciden en todos sus términos $\Rightarrow (q_n)_{n\in\mathbb{N}} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow f$ es inyectiva $\Rightarrow \#D \leq \#\bigcup_{i\geq 1} \mathbb{Q}^i = \aleph_0$ por ser unión numerable de numerables $\Rightarrow D$ es numerable.

Luego, veamos que D es denso. Notemos que $\mathbb{Q}$ es denso sobre $\mathbb{R}$ con d, puesto que dado $b \in \mathbb{R},\ \exists\ q \in \mathbb{Q}/\ |b - q| < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$ por densidad de $\mathbb{Q}$ en $(\mathbb{R}, |\ |)$, en particular si $\varepsilon < 1$, luego $d(b,q) = min\{1, |b - q|\} < \varepsilon, \forall\ 0 < \varepsilon < 1$.

Ahora estamos listos para probar que D es denso sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con d_2. Sea $a = (a^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, luego quiero ver que $\exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$, sucesión de sucesiones $/q_n \underset{d_2}{\longrightarrow} a$, $\Rightarrow$ propongo $q_n \forall n \in \mathbb{N}$ como:

$$(q_n)_i = \begin{cases} b_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases} \quad , \quad \text{con } \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0} \text{ y } b_i \in \mathbb{Q}\ /\ d(b_i, a^i) < \varepsilon'\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Así, por referencia, notemos que:

$q_1 = b_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

$q_2 = b_1\ b_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

$\vdots$

$q_k = b_1\ b_2\ b_3\ \ldots\ b_k\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

Ahora, sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y veamos que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall\ n \geq n_0,\ d_2(q_n, a) < \varepsilon$. Ahora sea $n_0 \in \mathbb{N} \ \Big/ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon'\ \forall n \geq n_0$ el cual existe ya que ésta es la cola de una serie convergente $\Rightarrow$ $d_2(q_n, a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(q_n^k, a^k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d(q_n^k, a^k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{d(q_n^k, a^k)}{2^k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon'}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \underset{\forall n \geq n_0}{<} \varepsilon' \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \varepsilon' = \varepsilon' \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \varepsilon' = \varepsilon'(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) < 2\varepsilon' < \varepsilon$, tomando ε' tal que $2\varepsilon' < \varepsilon$ ■

$\Rightarrow D$ es denso en $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_2)$ y numerable $\Rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_2)$ es separable.

3.

Sean $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{x^2}, f_3(x) = x^3$ y sean $d_i(x, y) = |f_i(x) - f_i(y)|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y $\forall\, i \in \{1, 2, 3\}$

3.a.

Queremos ver con cuáles métricas $(\mathbb{R}, d_i)$ es un espacio métrico. Primero, veamos que con d_2 no lo es, ya que, si $x \neq 0 \Rightarrow d_2(x, -x) = |f_2(x) - f_2(-x)| = |e^{x^2} - e^{(-x)^2}| = 0$, no cumpliendo así la identidad de los indiscernibles. Así, d_2 no es una distancia y se sigue que $(\mathbb{R}, d_2)$ no es un espacio métrico.

Ahora veamos que d_1 es una métrica. Para eso, basta con ver que dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ $d_1(x, y) \geq 0,\ d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,\ d_1(x, y) = d_1(y, x)$ y $d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$. Luego, que $d_1 \geq 0$ es trivial puesto que $|\ |$ lo es. Veamos que $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Ahora bien, $d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow |f_1(x) - f_1(y)| = 0 \Leftrightarrow f_1(x) - f_1(y) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = f_1(y) \Leftrightarrow e^x = e^y \overset{como\ f_1\ es\ inyectiva}{\Leftrightarrow} x = y$.

La simetría se da ya que $d_1(x, y) = |e^x - e^y| = |e^y - e^x| = d_1(y, x)$ y la desigualdad triangular se cumple ya que $d_1(x, y) = |e^x - e^y| = |e^x - e^z + e^z - e^y| \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y| = d_1(x, z) + d_1(z, y)$ Así, d_1 es métrica y $(\mathbb{R}, d_1)$ es espacio métrico.

Ahora veamos que d_3 es una métrica. Similarmente, sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, queremos ver las mismas cuatro propiedades anteriores. Por la misma razón que d_1, $d_3 \geq 0$; $d_3(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x^3 - y^3| = 0 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$ por inyectividad de f_3; $d_3(x, y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = d_3(y, x)$ y $d_3(x, y) = |x^3 - y^3| = |x^3 - z^3 + z^3 - y^3| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3| = d_3(x, z) + d_3(z, y)$. Finalmente así, d_3 es métrica y $(\mathbb{R}, d_3)$ es un espacio métrico.

3.b.

Veamos ahora que $(\mathbb{R}, |\ |)$ y $(\mathbb{R}, d_1)$ son topológicamente equivalentes. Recordamos que dos espacios métricos son topológicamente equivalentes si y solo si tienen las mismas sucesiones convergentes. Así, sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, x \in \mathbb{R}\ /\ x_n \underset{|\ |}{\longrightarrow} x$, quiero ver que $x_n \underset{d_1}{\longrightarrow} x$

Sean $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0}$, sé que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq n_0,\ |x_n - x| < \varepsilon'$, y quiero ver que $\exists\ n_0' \in \mathbb{N}/$ si $n \geq n_0' \Rightarrow\ d_1(x_n, x) < \varepsilon$. Como f_1 es continua en $\mathbb{R}$, en particular f_1 es continua en x, por lo que $\exists\ \delta \in \mathbb{R}_{>0}/$ si $|x - y| <\ \delta\ \Rightarrow |e^x - e^y| < \varepsilon$. Ahora, tomando $\varepsilon' < \delta \Rightarrow |x_n - x| < \delta\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |e^{x_n} - e^x| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow d_1(x_n, x) < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \underset{d_1}{\longrightarrow} x$ que es lo que queríamos probar.

Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, x \in \mathbb{R} / x_n \underset{d_1}{\longrightarrow} x$. Queremos demostrar que $x_n \underset{|\ |}{\longrightarrow} x$. Para esto, sean $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0}$ lo que queremos ver es que $\exists\ n_0' \in \mathbb{N}$ /si $n \geq n_0' \Rightarrow\ |x_n - x| < \varepsilon$. Además sabemos que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ /si $n \geq n_0, \Rightarrow d_1(x_n, x) < \varepsilon'$ Sea $ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la inversa de la exponencial. Como ln es continua en $(\mathbb{R}_{>0}, |\ |)$, en particular ésta es continua en x, por lo que

$\exists\ \delta \in \mathbb{R}_{>0}/$ si $|x-y| < \delta \Rightarrow |ln(x)-ln(y)| < \varepsilon$. Así, como ε' es arbitrario, tomando $\varepsilon' = \delta$ tenemos que $d_1(x_n,x) < \delta\ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow |e^{x_n} - e^x| < \delta\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |ln(e^{x_n}) - ln(e^x)| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \underset{|\,|}{\longrightarrow} x$, que es lo que queríamos demostrar ■

Concluimos que $(\mathbb{R}, |\ |)$ es topológicamente equivalente a $(\mathbb{R}, d_1)$

Ahora veamos que $(\mathbb{R}, d_3)$ es topológicamente equivalente a $(\mathbb{R}, |\ |)$, recordando lo hecho con d_1, dos espacios métricos son topológicamente equivalentes si y solo si tienen las mismas sucesiones convergentes.

Luego, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ x \in \mathbb{R}/\ x_n \underset{d_3}{\longrightarrow} x$. Veamos que $x_n \underset{|\,|}{\longrightarrow} x$. Sean $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0}$, sabemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ /si $n \geq n_0, \Rightarrow d_3(x_n,x) < \varepsilon'$. Recordemos que $\sqrt[3]{\ }$ es continua en $(\mathbb{R}, |\ |)$, por lo que, en particular, ésta es continua en $x \Rightarrow\ \exists\ \delta \in \mathbb{R}_{>0}/$ si $|x-y| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| < \varepsilon$. Luego, como ε' es arbitrario, tomando $\varepsilon' = \delta,\ d_3(x_n,x) < \delta\ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow |{x_n}^3 - x^3| < \delta\ \forall n \geq n_0 \overset{por\ la\ continuidad\ de\ \sqrt[3]{\ }}{\Longrightarrow}$ $|\sqrt[3]{{x_n}^3} - \sqrt[3]{x^3}| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \underset{|\,|}{\longrightarrow} x$ que es lo que queríamos probar ■

Para demostrar que $(\mathbb{R}, d_3)$ y $(\mathbb{R}, |\ |)$ son topológicamente equivalentes bastaría con ver que si $x_n \underset{|\,|}{\longrightarrow} x \Rightarrow x_n \underset{d_3}{\longrightarrow} x$. Así, sean $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}_{>0}$ y a su vez, también sean $x \in \mathbb{R},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\ x_n \underset{|\,|}{\longrightarrow} x$

Ahora bien, como $x_n \underset{|\,|}{\longrightarrow} x \Rightarrow\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}/$ si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon'$

Pero sabemos que x^3 es continua en $(\mathbb{R}, |\ |)$ por lo que en particular es continua en $x \Rightarrow \exists\ \delta \in \mathbb{R}_{>0}/$ si $|x-y| < \delta \Rightarrow\ |x^3 - y^3| < \varepsilon$. Así, como ε' es arbitrario, entonces tomando $\varepsilon' = \delta$ tenemos que $|x_n - x| < \delta\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |{x_n}^3 - x^3| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow d_3(x_n,x) < \varepsilon\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \underset{d_3}{\longrightarrow} x$. Finalmente, $(\mathbb{R}, |\ |)$ y $(\mathbb{R}, d_3)$ son topológicamente equivalentes y con esto queda demostrado completamente el ítem b ■

3.c.

Nos preguntamos cuándo $(\mathbb{R}, d_i)$ es completo. Para esto, basta con ver que dada una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d_i)$, ésta es convergente.

Primero, notemos que $(\mathbb{R}, d_2)$ no es completo ya que ni siquiera es un espacio métrico.

Ahora veamos que $(\mathbb{R}, d_1)$ no es completo. Para esto, tomemos la sucesión definida como $x_n = -n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego, veamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con d_1 pero que no converge con d_1. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$, quiero ver que $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}/$ si $n, m \geq n_0 \Rightarrow\ d_1(x_n, x_m) < \varepsilon$, pero como $e^{x_n} \underset{|\,|}{\longrightarrow} 0$ ya que $x_n \underset{|\,|}{\longrightarrow} -\infty$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ e^{x_n} < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow d_1(x_n,x_m) = |e^{x_n} - e^{x_m}| \leq e^{x_n} + e^{x_m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con d_1, pero veamos que no converge. Para esto, supongamos que sí, es decir, supongamos que $\exists\ x \in \mathbb{R}\ /x_n \underset{d_1}{\longrightarrow} x$ y lleguemos a una contradicción. Luego, $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/$ si $n \geq n_0 \Rightarrow\ d_1(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y como $e^{x_n} \underset{|\,|}{\longrightarrow} 0,\ \exists n_0' \in \mathbb{N}/$ si $n \geq n_0' \Rightarrow\ e^{x_n} < e^x$. Así, $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/$ si $n \geq n_0,\ \Rightarrow d_1(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ Tenemos que $\forall n \geq\ max\{n_0, n_0'\}$, $d_1(x_n,x) = |e^{x_n} - e^x| = e^x - e^{x_n} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow\ e^x < \frac{\varepsilon}{2} + e^{x_n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall n \geq max\{n_0, n_0'\}$ Esto inmediatamente provoca un absurdo, ya que x está fijo y ε es arbitrario.

Así, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente $\Rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ no es completo.

Bastaría ver ahora que $(\mathbb{R}, d_3)$ es completo. Para eso, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy y queremos ver que converge, es decir, que $\exists x \in \mathbb{R}/\ x_n \underset{d_3}{\longrightarrow} x$. Como sabemos que la sucesión es de Cauchy, sabemos que $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n, m \geq n_0,\ d_3(x_n, x_m) < \varepsilon$. Si miramos con cariño, observamos que, así, la sucesión $({x_n}^3)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\ |)$, por lo tanto, como $(\mathbb{R}, |\ |)$ es completo, la sucesión es convergente en ese espacio, y en consecuencia, $\exists\ y \in \mathbb{R}/\ {x_n}^3 \xrightarrow{|\ |} y$. Luego, sea $x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/$ si $n \geq n_0 \Rightarrow\ |{x_n}^3 - x^3| < \varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geq n_0,\ d_3(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow x_n \xrightarrow{d_3} x \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con $d_3 \Rightarrow (\mathbb{R}, d_3)$ es completo y con esto, damos por finalizado el ejercicio 3. ■

4.

4.a.

Sean (X,d_X), (Y,d_Y) espacios métricos

Queremos probar que $f:X\to Y$ es continua $\Leftrightarrow f\big|_{X_\alpha}:X_\alpha\to Y$ es continua $\forall\alpha\in\Lambda$

Demostremos la ida:

Sabemos que, como f es continua en $X \Rightarrow \forall x\in X$, dado $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta_x>0$ / si $d_X(x,x')<\delta_x \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$

Ahora, sea $\alpha\in\Lambda$, debemos ver que dado $x\in X_\alpha$ y $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta_{x_\alpha}>0/$ si $d_X(x,x')<\delta_{x_\alpha} \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$. Sin embargo, cuando nos restringimos a X_α, tenemos que $B_{\delta_x}(x)\cap X_\alpha\subseteq X_\alpha$. Luego, tomando $\delta_{x_\alpha}\le\delta_x$, se sigue que dado $x\in X_\alpha$, y $\varepsilon>0\ \exists\ \delta_{x_\alpha}>0/$ si $d_X(x,x')<\delta_{x_\alpha}$ y $x'\in X_\alpha \Rightarrow\ d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon\Rightarrow f\big|_{X_\alpha}$ es continua en x. Además como esta propiedad se cumple $\forall x\in X_\alpha$ se sigue que $f\big|_{X_\alpha}$ es continua, y luego, como α era arbitrario $\Rightarrow f\big|_{X_\alpha}$ es continua $\forall\ \alpha\in\Lambda$

Ahora, probemos la vuelta:

Queremos ver que $f:X\to Y$ es continua, dado que $f\big|_{X_\alpha}$ lo es. Sea $\forall\alpha\in\Lambda$ $d_X\big|_{X_\alpha}=d_\alpha$ y $x\in X$, demostremos que f es continua en x con d_X. Como $X=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha^\circ \Rightarrow\ \exists\ \widetilde{\alpha}\in\Lambda/\ x\in X_{\widetilde{\alpha}}^\circ$. Luego, $\exists\ \delta_1>0/\ B_{\delta_1}(x)\subseteq X_{\widetilde{\alpha}}$, entonces. tenemos que como $f\big|_{X_{\widetilde{\alpha}}}$ es continua en $(X_{\widetilde{\alpha}},d_{\widetilde{\alpha}})$, en particular es continua en x. Luego, dado $\varepsilon>0$, $\exists\ \delta_2>0/$ si $d_{\widetilde{\alpha}}(x,x')<\delta_2$, y $x'\in X_{\widetilde{\alpha}}\ \Rightarrow\ d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon$. Entonces, si tomamos $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$ se sigue que $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0/$ si $d_{\widetilde{\alpha}}(x,x')=d_X(x,x')<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon\Rightarrow f$ es continua en x con d_X. Pero como x era arbitrario concluimos que $f:X\to Y$ es continua en (X,d_X). $\blacksquare$

4.b.

Sean ahora $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos cerrados que cumplen que $X=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ y para los que existe $\varepsilon>0$ de manera que $d_X(X_\alpha,X_\beta)>\varepsilon\ \forall\ \alpha\neq\beta\in\Lambda$.

Nos piden probar que $f:X\to Y$ es continua en $(X,d_X)\Leftrightarrow\ f\big|_{X_\alpha}:X_\alpha\to Y$ también lo es en $(X_\alpha,d_\alpha)\ \forall\ \alpha\in\Lambda$

Primero, veamos la ida.

Para demostrar esto procedemos mediante el absurdo. Supongamos que $\exists\ \widetilde{\alpha}\in\Lambda/\ f\big|_{X_{\widetilde{\alpha}}}:X_{\widetilde{\alpha}}\to Y$ no es continua allí con $d_{\widetilde{\alpha}}$. Luego, $\exists\ x\in X_{\widetilde{\alpha}}/\ f\big|_{X_{\widetilde{\alpha}}}$ no es continua en x con $d_{\widetilde{\alpha}}$, es decir que $\exists\ \varepsilon>0\ /\ \forall\ \delta>0$, si $d_{\widetilde{\alpha}}(x,y)<\delta$ (con $y\in X_{\widetilde{\alpha}}$) $\Rightarrow\ d_Y(f(x),f(y))\ge\varepsilon$. Pero como $f:X\to Y$ es continua en x con d_X. Dado $\varepsilon>0,\exists\ \widetilde{\delta}>0$ /si $d_X(x,y)<\widetilde{\delta}\Rightarrow d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Como δ es arbitrario, si $\delta=\widetilde{\delta}$, entonces, se sigue que si $d_X(x,y)<\delta\Rightarrow\ \varepsilon\le\ d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$, Abs!. Esto vino de suponer que existía $\widetilde{\alpha}\in\Lambda/\ f\big|_{X_{\widetilde{\alpha}}}:X_{\widetilde{\alpha}}\to Y$ no era continua ahí con $d_{\widetilde{\alpha}}\Rightarrow f\big|_{X_\alpha}:X_\alpha\to Y$ es continua con $d_\alpha\ \forall\ \alpha\in\Lambda$.

Ahora demostremos la vuelta.

Sabemos que $\forall\ \alpha \in \Lambda,\ f\big|_{X_\alpha}$ es continua con d_α. Luego, queremos ver que f es continua en (X, d_X). Entonces, sea $x \in X$ arbitrario. Veamos que f es continua allí con d_X. Como $x \in X$ y $X = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \exists\ \widetilde{\alpha} \in\ \Lambda /\ x \in\ X_{\widetilde{\alpha}}$. Además, notemos que, por hipótesis $f\big|_{X_{\widetilde{\alpha}}} : X_{\widetilde{\alpha}} \to Y$ es continua con d_α. Luego, dado $\widetilde{\varepsilon} > 0, \exists\ \delta_{x_{\widetilde{\alpha}}} > 0/$ si $d_{\widetilde{\alpha}}(x, y) < \delta_{x_{\widetilde{\alpha}}} \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \widetilde{\varepsilon}$. Pero como $d_X(X_\alpha, X_\beta) > \varepsilon$ si $\alpha \neq \beta\ \Rightarrow\ \forall\ x \in X_{\widetilde{\alpha}}$ es obvio que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subseteq X_{\widetilde{\alpha}}$ puesto que, de no ser así, habría un elemento en la bola que pertenecería a X_β y no a $X_{\widetilde{\alpha}}$, por lo que habría un elemento de X_β a distancia menor que ε de $X_{\widetilde{\alpha}}$ y eso provocaría un absurdo. Entonces, $B_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq X_{\widetilde{\alpha}}$. Ahora bien, si $\delta = min\{\delta_{x_{\widetilde{\alpha}}}, \frac{\varepsilon}{2}\} \Rightarrow \forall\ \widetilde{\varepsilon} > 0, \exists\ \delta > 0/$ si $d_X(x, y) < \delta\ \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon \Rightarrow\ f$ es continua en x con d_X, pero como x es arbitrario, f es continua en (X, d_X). $\blacksquare$

4.c.

Sea $(X, |\ |)$ espacio métrico tal que $X = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} [2i, 2i+1]$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Ahora sean $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}_0} = \{[2i, 2i+1]\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ notemos que esta familia cumple con todos los requisitos del ítem b, ya que cada elemento es cerrado con $|\ |$, $[2i, 2i+1]$ y $[2j, 2j+1]$ distan como mínimo $1\ \forall i, j \in \mathbb{N}_0\ /\ i \neq j$ y su unión da todo el conjunto. Queremos ver que el enunciado del ítem b es falso si cambiamos continua por uniformemente continua.

Notemos que $f\big|_{X_i}$ es uniformemente continua $\forall\ i \in \mathbb{N}$ ya que los X_i son compactos en $(\mathbb{R}_{\geq 0}, |\ |)$

Ahora bien, veamos que f no es uniformemente continua en X. Para esto, procedemos por el absurdo, es decir, supongamos que sí lo es y lleguemos a una contradicción. Luego, supongamos que $f : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua $\Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$ y $x \in X,\ \ \exists\ \delta > 0\ /$ si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| < \varepsilon$. En particular, $\forall\ x,\ y \in X\ \exists\ \delta_1 > 0\ /$ si $|x - y| < \delta_1 \Rightarrow \left|x^2 - y^2\right| < 1$. Ahora, sea $n \in \mathbb{N}/\ \frac{1}{n} < \delta_1$. Si tomamos $x = 2n$ e $y = 2n + \frac{1}{n} \Rightarrow |x - y| = \left|2n - 2n - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \delta_1 \Rightarrow\ \left|x^2 - y^2\right| < 1$

Pero, de esta manera vemos que $\left|x^2 - y^2\right| < 1 \Leftrightarrow \left|(2n)^2 - (2n + \frac{1}{n})^2\right| < 1 \Leftrightarrow \left|4n^2 - 4n^2 - 4 - \frac{1}{n^2}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|4 + \frac{1}{n^2}\right| < 1 \Rightarrow\ 4 \leq \left|4 + \frac{1}{n^2}\right| < 1$, lo cual inmediatamente provoca un absurdo, el cual provino de suponer que f era uniformemente continua en X. $\Rightarrow$ Podemos determinar que no vale el ítem anterior que es lo que queríamos probar. $\blacksquare$

5.

Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $S \subseteq V$ subespacio. Sea $T : S \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Quiero ver que $\exists\ \widetilde{T} : V \to \mathbb{R}$ lineal tal que $\widetilde{T}\big|_S = T$.

Luego sea $L = \left\{ T_k : \widetilde{Y} \to \mathbb{R} \text{ transformaciones lineales } / S \subseteq \widetilde{Y} \subseteq V \wedge T_k\big|_S = T \right\}$. Notemos que $L \neq \emptyset$ ya que $T \in L$

Definimos el orden $(\leq)$ en L tal que dada $F : M \to \mathbb{R}$ y $G : N \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales de L, entonces $F \leq G \Leftrightarrow M \subseteq N$ y $G\big|_M = F$.

Veamos que $(\leq)$ es una relación de orden. Sean F y G las mismas que antes. Veamos reflexividad: quiero ver que $F \leq F$. Pero, en efecto, $F \leq F$ ya que $M \subseteq M$ y $F\big|_M = F$. Ahora veamos que $(\leq)$ es antisimétrica. Quiero ver que si $F \leq G$ y $G \leq F \Rightarrow F = G$. Como $F \leq G \Rightarrow M \subseteq N$ y $G\big|_M = F$, y como $G \leq F \Rightarrow N \subseteq M$ y $G = F\big|_N$. Pero como $\subseteq$ sí es un orden, entonces $N = M$, luego, $G\big|_M = G = F\big|_N = F \Rightarrow G = F$, luego $(\leq)$ es antisimétrica. Bastaría con ver que $(\leq)$ es transitiva, luego sea $H : O \to \mathbb{R}$ en $L/\ \ F \leq G$ y $G \leq H$ quiero ver que $F \leq H$. entonces como $F \leq G \Rightarrow M \subseteq N$ y $G\big|_M = F$ y como $G \leq H \Rightarrow N \subseteq O$ y $H\big|_N = G$, luego es obvio que $M \subseteq N \subseteq O$ y $H\big|_N\Big|_M = G\big|_M = F$ y se sigue entonces que $F \leq H$.

Luego, $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Basta con ver ahora que (para usar el lema de Zorn) dada C una cadena $\Rightarrow C$ es acotada superiormente.

Sea $C = \{f_i\}_{i \in \Lambda} \subseteq L$ una cadena $\Rightarrow$ Quiero ver que C está acotada superiormente. Propongo a la función unión de los $f_i : X_i \to \mathbb{R} \in C$ como cota superior. Sea $J : \underset{i \in \Lambda}{+} X_i \to \mathbb{R}$, donde X_i es el dominio de cada función $f_i \in C/\ J\big|_{X_i} = f_i\ \forall i \in \Lambda$.

Notemos que J está bien definida pues las funciones f_i se pegan bien, y esto se debe a que C está totalmente ordenado.

Entonces veamos que dado $i \in \Lambda,\ f_i \leq J$

Sea $i \in \Lambda$, $f_i \in C$, luego, $X_i \subseteq \underset{j \in \Lambda}{+} X_j$, y además $J\big|_{X_i} = f_i$ por cómo definimos a J.

Además, notemos que $J\big|_S = T$ ya que $J\big|_{X_i} = f_i \Rightarrow J\big|_{X_i}\Big|_S = f_i\big|_S = T$. Por otra parte, es importante notar que J es transformación lineal pues dados $a, b \in \underset{j \in \Lambda}{+} X_j$
$\Rightarrow\ \exists\ f_n,\ f_m \in C/\ a \in Dom(f_n)$ y $b \in Dom(f_m)$. Pero, como C es una cadena, o bien $f_n \leq f_m$ o bien $f_m \leq f_n \Rightarrow$ Sin pérdida de generalidad, suponemos $f_n \leq f_m$ (el otro caso es análogo) $\Rightarrow Dom(f_n) \subseteq Dom(f_m) \Rightarrow a, b \in Dom(f_m)$ y $J\big|_{Dom(f_m)} = f_m$ que es lineal, cumpliéndose las propiedades de linealidad con J en a y b. Concluimos así que $f_i \leq J\ \forall i \in \Lambda\ \therefore\ J$ es cota superior de C y $\forall\ C \subseteq L$ cadena, $\exists\ J_C \in L$ cota superior de C.

Entonces hemos probado que dada una cadena del conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq) \Rightarrow$ La cadena es acotada superiormente. Luego como L es un conjunto parcialmente ordenado, $L \neq \emptyset$ y toda cadena en L es acotada superiormente $\Rightarrow$ por el lema de Zorn, L tiene elementos maximales.

Luego, sea $\widetilde{T}$ un maximal de L, $\widetilde{T} : D \subseteq V \to \mathbb{R}$ y $\widetilde{T}\big|_S = T$. Ahora, supongamos que $D \subsetneq V$, es decir, $\exists\ v \in V/v \notin D$, luego sea

$\widetilde{D} = \langle v \rangle \oplus D$ y definimos $\widetilde{T}^* : \langle v \rangle \oplus D \to \mathbb{R}/\ \widetilde{T}^*(x) = \begin{cases} \widetilde{T}(x) & \text{si } p^{\perp}_{\langle v \rangle}(x) = 0 \\ 0 & \text{si } p^{\perp}_{\langle v \rangle}(x) \neq 0 \end{cases}$.

Notemos que $\widetilde{T}^*$ es transformación lineal, $\widetilde{T}^*\big|_S = T$, $\widetilde{T}^*\big|_D = \widetilde{T}$ y $D \subseteq D \oplus \langle v \rangle$, luego $\widetilde{T} \leq \widetilde{T}^*$, lo cual es absurdo ya que $\widetilde{T}$ era maximal $\Rightarrow D = V$.

Hemos hallado $\widetilde{T} : V \to \mathbb{R}/\ \widetilde{T}\big|_S = T$ transformación lineal, que es lo que pedía el enunciado. ■