

Cardinalidad

DEF: Sean X, Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (\Leftrightarrow que tienen el mismo cardinal) si $\exists f: X \rightarrow Y$ biyectiva.

(Nota: $x \sim y$)

Prop: \sim es una relación de equivalencia.

Dem: (1) Reflexivo: $x \sim x$ $Id: X \rightarrow X$ biy ✓

(2) simétrica: $X \sim Y$

$$\Rightarrow f: X \rightarrow Y \text{ biy} \Rightarrow f^{-1}: Y \rightarrow X \text{ biy}$$
$$\Rightarrow Y \sim X \quad \checkmark$$

(3) Transitiva: $X \sim Y$ y $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

$f: X \rightarrow Y$ biy, $g: Y \rightarrow Z$ biy

$\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow Z$ biy $\rightarrow X \sim Z$



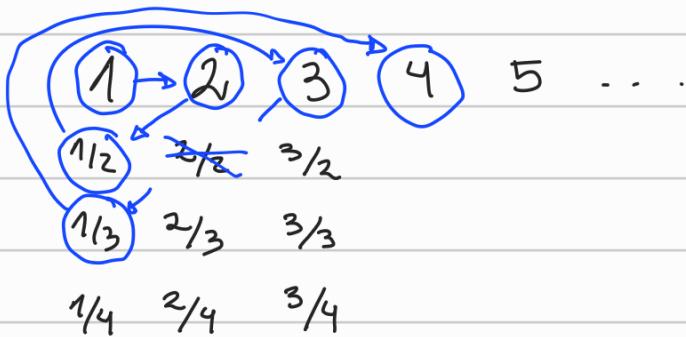
Ejemplos:

(1) $\mathbb{N} \sim \{n \in \mathbb{N}, n \text{ par}\} = \text{Pares}$

$f: \mathbb{N} \rightarrow \text{Pares}$ es biyectiva
 $n \mapsto 2n$

$$(2) \quad f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-(n-1)}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{es biy}$$

$$3) \quad \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}_+ = \{ q \in \mathbb{Q}, q > 0 \}$$



Defino f siguiendo este método y es biy

Completar con \mathbb{Q}
(usar $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$)

DEF: El cardinal de un conjunto X es la clase de equivalencia de X con respecto a \sim

$$\text{NOT: } \#X = \text{Card}(X) = \{ Y : Y \sim X \}$$

Distinguiremos algunas:

$$\# \{1, \dots, n\} = n$$

$$\# \mathbb{N} : \text{Aleph } 0 = \aleph_0$$

$$\# \mathbb{R} = c \text{ (continuo)}$$

DEF: Un conjunto X se dice

-) **finito** si existe un $n \in \mathbb{N}$ / $X \sim \{1, \dots, n\}$
-) **infinito** si no es finito
-) **numerable** si es coordinable con \mathbb{N} ($\# X = \aleph_0$) (contable)
-) a lo sumo numerable si es finito ó numerable

Teorema: Sea A numerable, $\emptyset \neq B \subseteq A \Rightarrow B$ es a lo sumo numerable

Demo: Como A es numerable

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow A$$

$$n \mapsto a_n = f(n)$$

Como $B \subseteq A$, quiero definir $g(1)$.

Defino $g(1) = a_{j_1}$ donde $j_1 = \min \{j : a_j \in B\}$

Si $B = \{a_{j_1}\}$ listo

si no $B \setminus \{a_{j_1}\} \neq \emptyset$ y repito el procedimiento

Defino $g(n)$ de manera inductiva

Si termino en n pasos $\Rightarrow B$ es finito

Si B es infinito, deberia probar que

-) **inyectiva**: porque f es inyectiva (la lista $\neq A$ no tiene elem. repetidos)

.) sobreductiva: Si $b \in B \Rightarrow b \in A$

$\Rightarrow b \in a_n$ para algun n

\Rightarrow en a lo sumo n pasos llego a cubrirlo

□



Teo: Sea A infinito. Entonces existe $B \subseteq A$ numerable

Demo:

Sea $a_1 \in A$ alquiera.

Como A es infinito

$$A \neq \{a_1\} \Rightarrow A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists a_2 \in A \setminus \{a_1\}$$

Inductivamente, si elegi a_1, \dots, a_n . Como

$$A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset \text{ xq } A \text{ es infinito}$$

$$\rightarrow \exists a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$$

Defino $B = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow B$$

$$n \rightarrow a_n \text{ bij}$$

□

Orden entre los Cardinales

Def:

.) $\#A = \#B$ si $\exists f: A \rightarrow B$ biyectiva

.) $\#A \leq \#B$ si $\exists f: A \rightarrow B$ inyectiva

$(\exists g: B \rightarrow A$ sobre $)$

con equiv

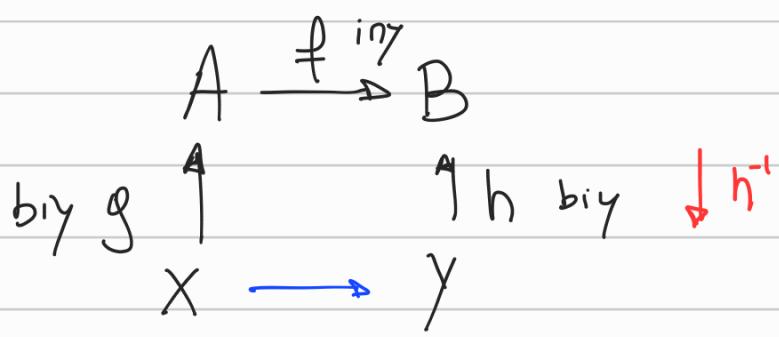
.) $\#A < \#B$ si $\#A \leq \#B$ pero $A \not\sim B$

Ejemplo: $\#\{1, \dots, n\} \leq \# \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\{1, \dots, n\} &\rightarrow \mathbb{N} \\ j &\mapsto j\end{aligned}$$

obs: Tendriamos que probar la buena definición y que es relación de orden

B.D: Si $\#A \leq \#B$ y $\#A = \#X, \#B = \#Y$
 $\xrightarrow{\text{que}} \#X \leq \#Y$



$h^{-1} \circ f \circ g$ es inyectiva

\Leftarrow) es relación de orden

(1) Reflexiva . $\#A \leq \#A$

id $A \rightarrow A$ es inj ✓

(2) Transitiva: $\#A \leq \#B \wedge \#B \leq \#C$

$\Rightarrow f: A \rightarrow B$ inj $\wedge f: B \rightarrow C$ inj $\Rightarrow g \circ f: A \rightarrow C$ es inj

(3) Antisimétrica: $\#A \leq \#B \wedge \#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$

Teorema (CANTOR - Schroeder - Bernstein) (CSB)

Si $\#A \leq \#B \wedge \#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$

Ejemplo:

1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable

$$\mathbb{N}^2 = \{(n, m) : n \cdot m \in \mathbb{N}\}$$

I) $\#\mathbb{N} \leq \#\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

II) $\#\mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq \#\mathbb{N}$

I) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es iny

$$n \rightarrow (n, 1)$$

II) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$(n, m) \mapsto 2^n \cdot 3^m$$

es inyectiva por descomposición única en fact. primos

\Rightarrow Por CSB: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2) $\#\mathbb{N}^3 = \aleph_0$ ($\#\mathbb{N}^n = \aleph_0$)

(Tarea: Pero es lo mismo)

3) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos numerables

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ es numerable

$$\begin{array}{l} \text{I)} \#N \leq \#A \\ \text{II)} \#A \leq \#N \end{array}$$

$$\Rightarrow N \rightarrow \bigcup_{n \in N} A_n$$

se que $\exists f: N \rightarrow A_1$ biyectiva

Pienso $f: N \rightarrow A$ inj

$$\text{II)} \#A \leq \#N = \#\mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$A \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ inj}$$

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \quad A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}, \dots$$

$a \in A \Rightarrow a \in A_n$ para algun n

Si esta en mas de un A_m , elijo $n = \min \{m : a \in A_m\}$

$$a \in A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$$

$$\Rightarrow a = a_{nj}$$

Defino $f: A \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
 $a \rightarrow (n, j)$