Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre 2016

Segundo Parcial - 5/07/2016

Nombre y apellido: LU:

Ejercicio 1. Sea $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ función} : f \text{ creciente}\}$. Decidir si (X, d_∞) es separable.

Solución. Dado $t \in [0,1]$, consideramos la función $f_t : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < t \\ 1 & \text{si } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

la cual es creciente y por lo tanto pertenece a X. Además, dados $t, t' \in [0,1]$ puntos diferentes (sin pérdida de generalidad con $t < t'$), tenemos que $\|f_t - f_{t'}\|_\infty = 1$, pues

$$f_t(x) - f_{t'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < t \\ 1 & \text{si } t \leq x < t' \\ 0 & \text{si } t' \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Consideremos ahora la familia B de bolas abiertas de radio $1/2$ centradas en las funciones f_t. Las bolas de B son subconjuntos de X no vacíos y abiertos, y además son disjuntos entre sí por nuestra observación previa. Como el cardinal de B es $\mathfrak{c}$ (ya que la asignación que manda $t \in [0,1]$ a la bola de centro f_t es biyectiva), por el ejercicio 5 de la práctica 8 concluimos que X no es separable.

Ejercicio 2. Sea $f : X \to Y$ continua. Sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de compactos en X. Probar que

$$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n).$$

Solución. Es claro que $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$. Por el contrario, si $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K_n$ tal que $f(x_n) = y$. Como la sucesión de compactos es decreciente, $K_n \subseteq K_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y luego la sucesión $(x_n) \subseteq K_1$ tiene una subsucesión convergente (x_{n_k}). Sea $x = \lim x_{n_k}$. Veamos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Sea $n \in \mathbb{N}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} \geq n$. Entonces $(x_{n_k})_{k \geq k_0} \in K_n$. Como K_n cerrado, $x \in K_n$. Por último, como f continua y $x_{n_k} \to x$, entonces $f(x_{n_k}) = y \to f(x)$. Luego, hallamos $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ tal que $f(x) = y$, como queríamos ver.

Ejercicio 3. Sea X un espacio métrico compacto. Sea $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones equicontinua y equiacotada. Sea $g_n : X, \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_n(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\}.$$

Probar que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Solución. Veamos primero que las funciones $\{g_n\}$ son equicontinuas. Sea $\varepsilon > 0$ y elijamos $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es decir, el δ de la equicontinuidad de la familia $\{f_n\}$). Supongamos entonces que $d(x,y) < \delta$. Sabemos que

$$|g_n(x) - g_n(y)| = |f_i(x) - f_j(y)| \leq |f_i(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)|,$$

donde f_i es la función que realiza el máximo en x y f_j la que realiza el máximo en y. Notemos ahora que

$$f_j(x) + \frac{\varepsilon}{3} \geq f_j(y) \geq f_i(y) \geq f_i(x) - \frac{\varepsilon}{3},$$

por lo que $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon$. Como además tenemos que $|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, juntando todo obtenemos que

$$|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon,$$

lo cual prueba que la familia $\{g_n\}$ es equicontinua.

Además, fijado $x \in X$, la sucesión $(g_n(x))$ es acotada, ya que por hipótesis todos los valores $f_i(x)$ están acotados uniformemente por cierto valor $M \in \mathbb{R}$, y por lo tanto su máximo también. Como por definición $(g_n(x))$ es además creciente, se tiene que es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$. Si llamamos $g(x)$ a su límite, probamos que $g_n \longrightarrow g$ puntualmente.

Finalmente, tenemos que las funciones equicontinuas g_n tienden puntualmente a una función g y su dominio es compacto. El ejercicio 7.b de la práctica 9 nos dice entonces que la convergencia es uniforme, como queríamos probar.

Ejercicio 4. Sea E un espacio normado.

1. Probar que si $\overline{B}(x_1, r_1) \supseteq \overline{B}(x_2, r_2)$, entonces $||x_1 - x_2|| \leq r_1 - r_2$.

2. Probar que si E es completo y $(\overline{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de bolas cerradas, entonces $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}_n \neq \varnothing$.

Solución. a). Este ejercicio nos pide probar que si tenemos una inclusión de bolas cerradas entonces la distancia entre los centros en menor a la diferencia de los radios. Hecho que si, hacemos el dibujo de una bola contenida en otra y miramos el radio que une al centro x_1 con el centro x_2, es claro a partir del gráfico. Inspirados en el gáfico, consideramos el vector w que esta a distancia r_2 del centro x_2 en la dirección de x_1 a x_2. Es decir,

$$\|x_1 - w\| = \|x_1 - x_2\| + r_2.$$

En efecto, veamos que gracias a la estructura de espacio vectorial, nuestro dibujo se corresponde con lo que realmente sucede. Sea entonces

$$w = x_2 + r_2 \tfrac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}.$$

Este vector satisface que

$$\|w - x_2\| = \left\| r_2 \tfrac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|} \right\| = r_2$$

por lo tanto $w \in \bar{B}(x_2, r_2)$. Como $\bar{B}(x_2, r_2) \subseteq \bar{B}(x_1, r_1)$ se tiene que

$$r_1 \geq \|x_1 - w\| = \left\| \left(1 + \tfrac{r_2}{\|x_1 - x_2\|}\right) . (x_1 - x_2) \right\| = \left(1 + \tfrac{r_2}{\|x_1 - x_2\|}\right) . \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_2\| + r_2$$

, como se quería ver.

b) Dado que $\bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \bar{B}(x_n, r_n)$, el ítem $a)$ implica que

$$0 \leq \|x_n - x_{n+1}\| \leq r_n - r_{n+1}.$$

En particular, $0 \leq r_{n+1} \leq r_n$, es decir, la sucesión de radios r_n es una sucesión decreciente de números reales acotada inferiormente por 0. Luego, podemos concluir que es convergente, es decir, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r_n \to r$. Si supiéramos que $r = 0$, por ejercicio $1)c)$ de la práctica 10 tenemos que $\mathrm{diam}(\bar{\mathrm{B}}(\mathrm{x_n}, \mathrm{r_n})) = 2\mathrm{r_n} \to 0$, con lo cual estaríamos en las condiciones del teorema de intersección de Cantor lo que asegura que la intersección de esta sucesión decreciente de bolas cerradas consiste de un solo punto. Pero esto no tiene por qué suceder. Justamente este ejercicio muestra que podemos prescindir de esta hipótesis en el caso de espacios de Banach.

Veamos que la sucesión de centros x_n es de Cauchy. En efecto, por el ítem $a)$ se tiene que $\|x_n - x_m\| \leq |r_n - r_m|$ y como r_n es de Cauchy por ser convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $|r_n - r_m| < \varepsilon$. Por lo tanto, si $n, m \geq n_0$, $\|x_n - x_m\| \leq |r_n - r_m| < \varepsilon$. Como el espacio E es completo, existe $x_0 \in E$ tal que $x_n \to x_0$. Veamos que x_0 pertenece a la intersección de todas las bolas cerradas. Dado $m \in \mathbb{N}$, como x_n pertenece a $\bar{B}(x_m, r_m)$ para todo $n \geq m$ por ser estos conjuntos cerrados y $x_n \to x_0$, entonces tendremos que x_0 pertenece a $\bar{B}(x_m, r_m)$.

Ejercicio 5. Sea E un espacio normado completo y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ un subconjunto de operadores lineales y continuos. Probar que si para cada $x \in E$, $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} ||T(x)|| < +\infty$, entonces $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} ||T|| < +\infty$. [1]

Solución. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{x \in E : \sup_{T \in \mathcal{F}} ||T(x)|| \leq n\}$. Por las hipótesis, $E = \bigcup\limits_n A_n$. Además, A_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si para cada $T \in \mathcal{F}$ se define $f_T : E \to \mathbb{R}$ por $f_T(x) = ||T(x)||$, f_T es continua y $A_n = \bigcap\limits_{T \in \mathcal{F}} f_T^{-1}([0, n])$ es intersección de cerrados. Como E es completo y no vacío, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_0} tiene interior no vacío. Existe entonces $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq A_{n_0}$, de modo que si $y \in \bar{B}(x_0, \varepsilon)$, resulta $\sup_{T \in \mathcal{F}} ||T(y)|| \leq n\}$. Sea ahora $x \in E$, $||x|| = 1$. Entonces $y = x_0 + \varepsilon.x \in B(x_0, \varepsilon)$. Luego, para todo $T \in \mathcal{F}$,

$$||T(x)|| = ||T\Big(\frac{1}{\varepsilon}(y - x_0)\Big)|| \leq \frac{1}{\varepsilon}(||T(y)|| + ||T(x_0)||) \leq \frac{1}{\varepsilon}(n_0 + \sup_{T \in \mathcal{F}} ||T(x_0)||) = M.$$

En conclusión, $\sup\limits_{\substack{T \in \mathcal{F} \\ ||x||=1}} ||T(x)|| \leq M$.

[1] *Sugerencia*: Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerar $A_n = \{x \in E : \sup_{T \in \mathcal{F}} ||T(x)|| \leq n\}$.