N.A = nota del autor

7) (Guia 1)

Sol: Sea $A = \{ x \in [a,b] \ / \ f(x) > x \}$

A es no vacío porque $a \in A$ y tiene cota superior ($b \in \mathbb{R}$, por ej)

$\Rightarrow \exists \ x_0 = \sup(A)$

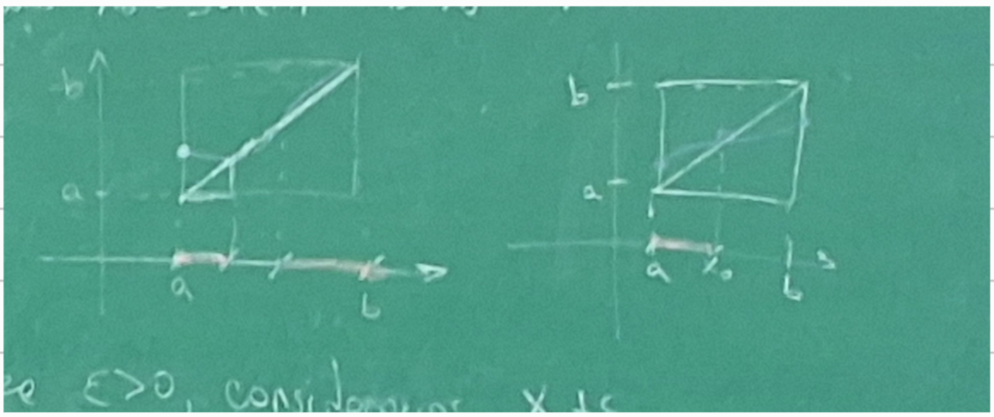
$x_0 = \sup(A)$ y entonces es una cota superior de A

por lo que $x_0 \geq a \quad \forall a \in A$

Como f es creciente $f(x_0) \geq f(a) > a \ \forall a \in A$

$\Rightarrow f(x_0)$ es cota superior de A

como $x_0 = \sup(A) \Rightarrow x_0 \leq f(x_0)$



N.A: no tenía ganas de dibujar

Sea $\varepsilon > 0$, consideremos $x_0+\varepsilon > x_0$ como f es creciente tenemos que $f(x_0+\varepsilon) \geq f(x_0) \geq x_0$

Como $x_0+\varepsilon > x_0 = \sup(A)$ tenemos que $x_0+\varepsilon \notin A$

$\Rightarrow f(x_0+\varepsilon) \leq x_0+\varepsilon$

$\Rightarrow \; x_0+\varepsilon \geq f(x_0+\varepsilon) \geq f(x_0) \geq x_0$

$\forall \; \varepsilon > 0 \; / \; x_0+\varepsilon \in [a,b]$

(salvo en el caso en que $x_0 = b$)

Luego, basta tomar $\varepsilon \longrightarrow 0$ y obtenemos

$$x_0 \geq f(x_0) \geq x_0$$

El caso en que $x_0 = b$:

$\forall \; n \in \mathbb{N} \;\; \exists \; a_n \in A \; / \; b - \frac{1}{n} \leq a_n \leq b$

$\Rightarrow f(a_n) > a_n > b - 1/n \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(b) \geq f(a_n) > b - 1/n \;\; \forall \; n \in \mathbb{N} \;\; \Rightarrow f(b) = b$

Pablo (martes) x_n creciente, $x_{n_k} \longrightarrow \ell$

Pablo probó que entonces $\ell \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado y monotona

$\Rightarrow (x_n)$ converge. Es decir, $\exists\, \tilde{\ell} \in \mathbb{R} \,/\, x_n \to \tilde{\ell}$

Pero entonces, $x_{n_k} \longrightarrow \tilde{\ell}$ pues es subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \tilde{\ell} = \ell$

1) Decidir si la sucesión

$$a_n = \underbrace{\underset{\text{+ grande}}{\frac{1}{\sqrt{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \overset{\text{+ chico}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}}_{n+1 \text{ elementos}}$$

es convergente

Sol: Valen las siguientes cotas

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = (n+1)\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n \leq (n+1)\frac{1}{n}$$

$$\frac{n+1}{\underbrace{\sqrt{n^2+n}}_{\xrightarrow[n]{} 1}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\xrightarrow[n]{} 1}$$

Por el teorema del sanguche: $a_n \xrightarrow[n]{} 1$

2) Sea $(x_n)_n$ una sucesión definida del siguiente

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{x_n+1} \quad y \quad x_1 = 5$$

Decidir si $(x_n)_n$ es convergente, y si lo es calcular su límite

Sol: sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{x_n+1}$

En particular, si $x_n \longrightarrow L$ tendríamos que

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{x_n+1} = \frac{L^2+2}{L+1}$$

$$L = \frac{L^2+2}{L+1}$$

$$L^2+L = L^2+2 \Rightarrow L=2$$

Afirmo que $(x_n)_n$ es monotona y acotada

Tratemos de probar que $x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\iff \frac{x_n^2+2}{x_n+1} < x_n$$

$$\iff x_n^2+2 < x_n(x_n+1)$$

$$x_{n+1} < x_n \iff 2 < x_n$$

Luego basta ver que $2 < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ para concluir que $(x_n)_n$ es convergente

Probemos que $2 < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, podemos usar inducción

Supongamos que $x_n > 2$ q.v.q. $x_{n+1} > 2$

$$\iff \frac{x_n^2+2}{x_n+1} > 2 \iff x_n^2+2 > 2x_n+2$$

$$\iff x_n^2 > 2x_n \iff x_n > 2$$

Como $(x_n)_n$ es monotona y acotada $\Rightarrow x_n \xrightarrow[n]{} 2$