Cálculo Avanzado - 2° Cuatrimestre 2020
1º Parcial (26/10/2020)

---

1. Notamos con $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ al conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Calcular el cardinal del conjunto
$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ es inyectiva y } f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}.$$

2. Sea X un espacio métrico para el cual existen subconjuntos $A_i \subset X$ $(i \in I)$ tales que
$$X = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{e} \quad \text{ínf}\{d(A_i, A_j) \mid i \neq j\} > 0.$$
Sea Y otro espacio métrico.
   a) Probar que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f|_{A_i} : A_i \to Y$ es continua para todo $i \in I$.
   b) Probar la afirmación anterior no es cierta si se cambia *continua* por *uniformemente continua.*

3. Consideremos en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la distancia
$$\tilde{d}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(x_n, y_n)}{n},$$
donde $d(s, t) = \frac{|s-t|}{1+|s-t|}$ para $s, t \in \mathbb{R}$. Probar que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tilde{d})$ es separable.

4. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $U \subset X$ un conjunto abierto. Definimos en U la distancia
$$\diamondsuit(x, y) := d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, U^c)} - \frac{1}{d(y, U^c)} \right|.$$
   a) Probar que $\diamondsuit$ y $d|_{U \times U}$ son topológicamente equivalentes.
   b) Probar que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ es de Cauchy para la métrica $\diamondsuit$ entonces $d(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, U^c) > 0$.
   c) Probar que $(U, \diamondsuit)$ es completo.
   Aclaración: no es necesesario probar que $\diamondsuit$ es una distancia.

Puede usar como ciertos los resultados de las guías prácticas o los vistos en la teórica.