Nombre y nro. libreta:

1	2	3	4	5	Calif.

CALCULO AVANZADO - PRIMER PARCIAL
2do cuatrimestre 2012 (17/10/2012)

---

1. Sean A y B conjuntos infinitos con $\alpha = \#A \geq \#B = \beta$. Definimos $P_\beta(A)$ como el conjunto formado por los subconjuntos de A que tienen cardinal β. Probar que:

$$\#P_\beta(A) = \#\{f : B \to A\} = \alpha^\beta$$

Sugerencia: Considerar el gráfico de una función.

2. Sea X un espacio métrico. Decimos que un abierto $U \subseteq X$ es *regular* si $U = \overline{U}^\circ$.

   (a) Probar que la intersección de dos abiertos regulares es un abierto regular, pero que la unión de abiertos regulares no es necesariamente regular.

   (b) Probar que si $C \subseteq X$ es un subconjunto cualquiera, entonces $\overline{C}^\circ$ es un abierto regular.

   (c) Deducir que si U y V son abiertos regulares entonces $\overline{U \cup V}^\circ$ es el menor abierto regular que los contiene.

3. Sea X un espacio métrico separable. Consideremos $S(X) = \{(a_n) : a_n \in X \text{ y } a_n \text{ es convergente}\}$ equipado con la distancia $d_\infty((a_n),(b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que $S(X)$ es un espacio métrico separable.

4. Consideremos los espacios de sucesiones de números reales $\ell^1 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum |a_n| < \infty\}$ y $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum |a_n|^2 < \infty\}$ con sus respectivas distancias d_1 y d_2.

   (a) Probar que $\ell^1 \subset \ell^2$. Por lo tanto ℓ^1 también es un espacio métrico con la distancia d_2.

   (b) Probar que en ℓ^1 las dos distancias no son topológicamente equivalentes.

   (c) Probar que ℓ^1 **no** es completo respecto de d_2.

   OBSERVACIÓN: ℓ^1 y ℓ^2 son completos con sus respectivas distancias.

5. Sea $f : X \to Y$ una función acotada. Probar que f es uniformemente continua si y solo si existe $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ monótona creciente, continua en 0 y con $\phi(0) = 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x,y))$.

   Sugerencia: Tomar $\phi(\delta) = \sup\{d(f(x), f(y)) : x, y \in X \text{ y } d(x,y) \leq \delta\}$.

Justifique todas sus respuestas.