Cálculo Avanzado

Primer Parcial - 21/05/21

1 Calcular el cardinal del siguiente conjunto:

$$A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} : |a_{n+1} - a_n| = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

2 Sean (X,d) un espacio métrico y $D \subset X$ un subconjunto denso. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Supongamos que existe un punto $x \in X$ tal que, para todo $y \in D$, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = d(x, y)$. Probar que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

3 Sea $X = \{f : \mathbb{R} \to [0,1] \mid f \text{ es continua}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $d_n : X \times X \to \mathbb{R}$ la función definida por $d_n(f,g) = \sup_{t\in[-n,n]} |f(t) - g(t)|$, y sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la métrica definida por

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f,g)}{2^n}.$$

Probar que (X,d) es un espacio métrico completo.

Nota. No hace falta probar que d es una métrica.

4 Sean X e Y dos espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función que cumple que para toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ también es de Cauchy. Probar que si X es totalmente acotado entonces f es uniformemente continua.

5 Sea X un espacio métrico compacto y sea $Y \subseteq X$ tal que $\bigcup_{y\in Y} B(y,1) = X$.

Probar que existe $r < 1$ tal que $\bigcup_{y\in Y} B(y,r) = X$.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y escriba con claridad