Cálculo Avanzado
2do cuatrimestre 2021

Soluciones Primer Parcial

1.

Sea X un conjunto infinito numerable. Una partición de X es una colección $P = \{X_j\}_{j\in J}$ de subconjuntos de X, disjuntos dos a dos tales que su unión es todo X. Es decir, $X_j \cap X_{j'} = \emptyset$ para todo $j \neq j'$, y $\bigcup_{j\in J} X_j = X$.
Determinar el cardinal de $\{P : P \text{ es una partición de } X\}$.

Solución 1:

Probaremos que $A := \{P : P \text{ es una partición de } X\} =_c 2^{\mathbb{N}}$.

En primer lugar notemos que dada una partición $P\{X_j\}_{j\in J}$, se tiene $J \leq_c \mathbb{N}$. En efecto, al tener cada X_j al menos un elemento distinto de X, si $J >_c X$ tendríamos un absurdo. Además, como X es infinito numerable existe $\sigma : \mathbb{N} \to X$ biyectiva. Por último, como al fijar una partición P cada $x \in X$ está en un único X_j, lo denotaremos X_x^P. Dicho esto, encontremos las dos inyectividades:

- Sea

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \quad A & \to & 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \\ \varphi(P) & = & (a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} : \begin{cases} a_{(i,j)} = 1 \text{ si } X^P_{\sigma(i)} = X^P_{\sigma(j)} \\ a_{(i,j)} = 0 \text{ si } X^P_{\sigma(i)} \neq X^P_{\sigma(j)} \end{cases} \end{array}$$

  Es decir, $\varphi(P)$ es una matriz (simétrica) infinita, con la diagonal llena de 1, y en el lugar (i,j) tiene un 1 si los elementos $\sigma(i)$ y $\sigma(j)$ de X están en el mismo conjunto de la partición. Claramente esta función es inyectiva, ya que para dos particiones distintas P y P' existen $x, y \in X$ tales que están en el mismo conjunto en P pero están en conjuntos distintos de P'. Eso nos diría que en el lugar $(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y))$ deben diferir $\varphi(P)$ y $\varphi(P')$.

- Sea

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \quad 2^{\mathbb{N}} & \to & A \\ \Psi((a_j)_{j\in\mathbb{N}}) & = & P := \{X_j\}_{j\in\mathbb{N}} \cup \{X'_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ con} \\ & & \begin{cases} X_j = \{\sigma(2j-1), \sigma(2j)\}, X'_j = \emptyset \text{ si } a_j = 1 \\ X_j = \{\sigma(2j-1)\}, X'_j = \{\sigma(2j)\} \text{ si } a_j = 0 \end{cases} \end{array}$$

  Veamos que es inyectiva. En efecto, si $\Psi((a_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \Psi((b_j)_{j\in\mathbb{N}})$ significa que para todo $j \in \mathbb{N}$ los puntos de X dados por $\sigma(2j-1), \sigma(2j)$ están en el mismo conjunto o no de ambas particiones. Pero eso ocurre sí y solo sí $a_j = b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Hemos probado que $A \leq_c 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} =_c 2^{\mathbb{N}} \leq_c A$. Por lo tanto, por el teorema de Cantor-Schoeder-Bernstein, $A =_c 2^{\mathbb{N}}$.

Solución 2:

Dado $x \in X$, tenemos una función $\varphi : \mathcal{P}(X \backslash \{x\}) \to A$ definida como $\varphi(B) := \{B, X\backslash B\}$. Notemos que φ es inyectiva, ya que dada una partición de la forma $\{B, X\backslash B\}$ exactamente sólo uno de los dos subconjuntos $B, X\backslash B$ contiene al elemento x. Puesto que X es infinito numerable, por el ejercicio 6 de la práctica 1 se tiene que $X\backslash\{x\} =_c X$ y en consecuencia $\mathcal{P}(X\backslash\{x\}) =_c \mathcal{P}(X) =_c 2^X =_c 2^{\mathbb{N}} \leq_c A$.

Por otro lado, de álgebra 1 sabemos que dar una partición en X es lo mismo que dar una relación de equivalencia en X. En efecto, si $P = \{X_j\}_{j\in J} \in A$ definimos $\sim$ de manera que dados $x, y \in X$ definimos $x \sim y$ si y sólo si existe $j \in J$ tal que $x, y \in X_j$. Recíprocamente, dada una relación de equivalencia $\sim$ en X, las clases de equivalencia de $\sim$ definen una partición para X. Puesto que una relación de equivalencia se corresponde con un subconjunto de $X \times X$ tenemos una función inyectiva $\psi : A \to \mathcal{P}(X \times X)$. Entonces $A \leq_c 2^{X\times X} =_c 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} =_c 2^{\mathbb{N}}$.

Del teorema de Cantor-Schoeder-Bernstein concluimos que $A =_c 2^{\mathbb{N}}$.

2.

Sea $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$ con la distancia infinito. Consideremos los conjuntos

$$A := \{f \in X : f(0) < 0 \text{ y } f(1) = 1\}$$
$$B := \{f \in X : f(x) = f(1-x) \text{ para todo } x \in [0,1]\}$$

(a) Calcular $d(A, B)$.

(b) Probar que existe una función continua $\varphi : X \to [0,1]$ tal que $\varphi(A) = \{0\}$ y $\varphi(B) = \{1\}$.

Solución:

(a) Queremos calcular $d(A,B) = \inf\{d_\infty(f,g) : f \in A, g \in B\}$. Para eso, notemos que si $f \in A$ y $g \in B$ se tiene $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} \geq |f(x_0) - g(x_0)|$ para todo $x_0 \in [0,1]$.

En particular,

$$d_\infty(f,g) \geq |f(1)-g(1)| = |1-g(1)| \text{ y } d_\infty(f,g) \geq |f(0)-g(0)| = |f(0)-g(1-0)| = |f(0)-g(1)|$$

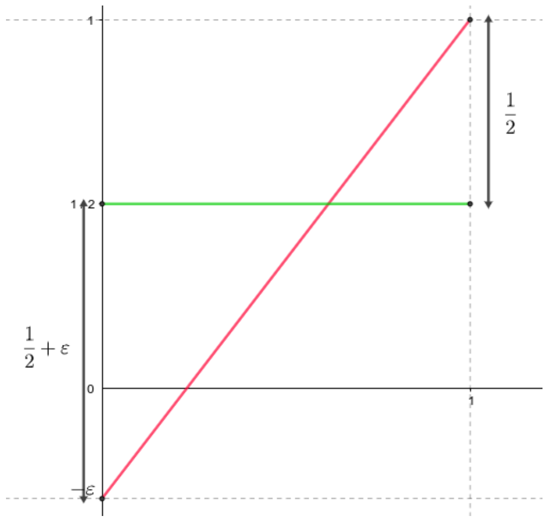
De esto se deduce que $g(1) \in [1 - d_\infty(f,g), 1 + d_\infty(f,g)] \bigcap [f(0) - d_\infty(f,g), f(0) + d_\infty(f,g)]$.

Esta intersección es no vacía sí y solo sí $1 - d_\infty(f,g) \leq f(0) + d_\infty(f,g)$.

Por lo tanto $1 - 2d_\infty(f,g) \leq f(0) < 0$, lo cual implica que $\frac{1}{2} < d_\infty(f,g)$ para cualquier $f \in A$ y $g \in B$.

Por ahora probamos que todos los elementos del conjunto $\{d_\infty(f,g) : f \in A, g \in B\}$ son mayores que $\frac{1}{2}$. Por lo tanto al tomar ínfimo tenemos $\frac{1}{2} \leq d(A,B)$.

Afirmo que $d(A,B) = \frac{1}{2}$. Para probar eso basta mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existen $f_\varepsilon \in A$ y $g_\varepsilon \in B$ tales que $d_\infty(f_\varepsilon, g_\varepsilon) = \frac{1}{2} + \varepsilon$



Definimos $f_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)x - \varepsilon$ y $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}$.

Es claro que $f_\varepsilon \in A$ y $g_\varepsilon \in B$.

Además,

$$\begin{aligned} d_\infty(f_\varepsilon, g_\varepsilon) &= \sup_{x\in[0,1]} \{|f_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|\} \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \{|(1+\varepsilon)x - \varepsilon - \tfrac{1}{2}|\} \\ &= \tfrac{1}{2} + \varepsilon \end{aligned}$$

como queríamos.

(b) Definimos la función $\varphi : X \to [0,1]$ como $\varphi(f) = \dfrac{d(f,A)}{d(f,A)+d(f,B)}$, que es continua por ser suma y cociente de funciones continuas (las distancias).

Buena definición: si $d(f,A) = 0 = d(f,B)$ entonces $f \in \overline{A} \cap \overline{B}$, lo cual no ocurre porque probamos que $d(A,B) = \frac{1}{2} > 0$. 'Además, como $0 \leq d(f,A) \leq d(f,A) + d(f,B)$ tenemos que $\varphi(f) \in [0,1]$ para toda $f \in X$.

Por último, si $f \in A$, entonces $d(f,A) = 0$ y $d(f,B) \neq 0$ entonces $\varphi(f) = 0$. Y si $g \in B$, entonces $d(g,B) = 0$ y $d(g,A) \neq 0$ entonces $\varphi(g) = 1$.

3.

> Probar que si (X,d) es un espacio métrico separable entonces se tiene que
>
> $$\{U \subseteq X : U \text{ es abierto}\} \leq_c 2^{\mathbb{N}}$$

Solución:

Como (X,d) es separable, existe una base de abiertos de X $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ con I numerable. Esto significa que todo abierto $U \subseteq X$ se puede escribir como $U = \bigcup_{j\in J} B_j$ para algún $J \subseteq I$.

Como I es numerable, existe una inyección $\iota : I \hookrightarrow \mathbb{N}$. Con esto definimos

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \{U \subseteq X : U \text{ es abierto}\} &\to \qquad 2^{\mathbb{N}} \\ \varphi(U) \qquad &= \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} a_{\iota(i)} = 1 \text{ si } B_i \subseteq U \\ a_{\iota(i)} = 0 \text{ si } B_i \nsubseteq U \\ a_n = 0 \text{ si } n \notin Im(\iota) \end{cases} \end{aligned}$$

Notar que el último renglón es necesario dado que como ι es una inyección, podríamos tener lugares no definidos. Veamos que φ es inyectiva:

Si $\varphi(U) = \varphi(V) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces $J = \{i \in I : a_{\iota(i)} = 1\} = \{i \in I : B_i \subseteq U\}$ es el conjunto de indexación tanto de U como de V en la escritura en la base $\mathcal{B}$. Dicho de otra manera, $U = \bigcup_{j\in J} B_j = V$. Por lo tanto φ es inyectiva como queríamos.

4.

Sean $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{(Y_n, d'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos familias de espacios métricos y sean (X, d) e (Y, d') los espacios métricos productos respectivos, con d y d' dadas por

$$d((x_n)_n, (\tilde{x}_n)_n) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, \tilde{x}_n)}{1 + d_n(x_n, \tilde{x}_n)}$$
$$d'((y_n)_n, (\tilde{y}_n)_n) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d'_n(y_n, \tilde{y}_n)}{1 + d'_n(y_n, \tilde{y}_n)}$$

Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : X_n \to Y_n$ y consideremos la función $f : X \to Y$ dada por $f((x_n)_n) := (f_n(x_n))_n$.

(a) Probar que si f_n es continua para todo n, entonces f es continua.

(b) Probar que si cada f_n es una función abierta, y f_n es suryectiva salvo finitos $n \in \mathbb{N}$, entonces f es una función abierta.

(a)

Solución 1:

Sea $\varepsilon > 0$. Hagamos algunas observaciones que nos serán útiles:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$.
- Como cada f_n es continua, existe $\delta_n > 0$ tal que si $d_n(x_n, \tilde{x}_n) < \delta_n$ entonces

$$\frac{d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))}{1 + d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))} \leq \min\{1, d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Notar que la primera desigualdad vale siempre (también para las distancias d_n).

Sea $\delta_{\min} = \min\{\delta_1, ..., \delta_{n_0-1}\}$.

Dados dos elementos $(x_n)_n, (\tilde{x}_n)_n \in X$ que cumplen $d_n(x_n, \tilde{x}_n) < \delta_{\min}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
d'(f((x_n)_n), f((\tilde{x}_n)_n)) &:= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))}{1 + d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))} \\
&= \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{2^n} \frac{d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))}{1 + d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))}{1 + d'_n(f_n(x_n), f_n(\tilde{x}_n))} \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 1 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{2^n} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 1 \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}(1 + 1) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir, f es continua.

Solución 2:

Alternativamente, podemos usar subbases para probar la continuidad. Por el ejercicio 4 de la práctica 4, si $\mathcal{S}_n$ es una subbase para cada Y_n y definimos

$$\sigma_k := \left\{ Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_{k-1} \times S_k \times \prod_{j>k} Y_j : S_k \in \mathcal{S}_k \right\},$$

resulta que $\mathcal{S} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$ es una subbase de $Y = \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Tenemos que f es continua si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto para todo $U \in \mathcal{S}$. Entonces, dado $U \in \mathcal{S}$; existe k tal que $U = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_{k-1} \times S_k \times \prod_{j>k} Y_j$. Tenemos que $f^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{k-1} \times f_k^{-1}(S_k) \times \prod_{j>k} X_j$. Puesto que f_k es continua y S_k es abierto, $f_k^{-1}(S_k)$ es un abierto de X_k, en consecuencia $f^{-1}(U)$ es un abierto de la subbase de $X = \prod_n X_n$ en la que tomamos por subbase de cada X_n a todos los abiertos. Concluimos que f es continua.

(b)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{B}_n$ una base de abiertos de X_n. Por el ejercicio 4 de la práctica 4, $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ es una base de (X, d), donde

$$\beta_n = \left\{ B_1 \times \cdots \times B_n \times \prod_{i>n} X_i : B_k \in \mathcal{B}_k \forall 1 \leq k \leq n \right\}$$

Utilizaremos el siguiente **lema:** si para todo abierto $B \in \mathcal{B}$, $f(B)$ es abierto, entonces f es una función abierta.

Como las f_n son suryectivas salvo para finitos valores de n, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_n es suryectiva para todo $n \geq n_0$. Es decir $f_n(X_n) = Y_n$ si $n \geq n_0$.

Sea $B \in \mathcal{B}$. Entonces

- Si $m > n_0$, $f(B) = f_1(B_1) \times \cdots \times f_m(B_m) \times \prod_{i>m} Y_i$.
- Si $t \leq n_0$, $f(B) = f_1(B_1) \times \cdots \times f_t(B_t) \times f_{t+1}(X_{t+1}) \times \cdots \times f_{n_0-1}(X_{n_0-1}) \prod_{i\geq n_0} Y_i$.

Como todas las f_n son abiertas, la imagen de los B's y de los espacios totales X_n deben ser abiertos, por ser ellos abiertos. Como el producto de abiertos es abierto, esto nos dice que $f(B)$ es abierto y, usando el lema, f resulta una función abierta.

5.

Sea A el subconjunto de (ℓ^∞, d_∞) conformado por las sucesiones de números reales convergentes, es decir

$$A := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente}\}$$

Probar que A es cerrado en ℓ^∞.

Solución 1:

Para probar que A es cerrado en ℓ^∞, tomemos una sucesión de elementos de ℓ^∞ (que son a su vez sucesiones) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en ℓ^∞ a una sucesión real x_0 y veamos que $x_0 \in A$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo la sucesión real $x_n = (x_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente a un número $x_{n,0}$ por ser un elemento de A. Este esquema puede ayudar a no mezclarse los índices:

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1: & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \ldots & x_{1,j} & x_{1,j+1} & \ldots & \xrightarrow{j\to\infty} & x_{1,0} \\
x_2: & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \ldots & x_{2,j} & x_{2,j+1} & \ldots & \xrightarrow{j\to\infty} & x_{2,0} \\
x_3: & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \ldots & x_{3,j} & x_{3,j+1} & \ldots & \xrightarrow{j\to\infty} & x_{3,0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n: & x_{n,1} & x_{n,2} & x_{n,3} & \ldots & x_{n,j} & x_{n,j+1} & \ldots & \xrightarrow{j\to\infty} & x_{n,0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\downarrow n \to \infty & & & & & & & & & \\
x_0: & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} & \ldots & x_{0,j} & x_{0,j+1} & \ldots & ¿\xrightarrow{j\to\infty} & x_{0,0}?
\end{array}$$

Para ver que x_0 es una sucesión real convergente, veamos que es de Cauchy. Si esto ocurre, como $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo, tendremos lo que queremos. Sean $n_0, N, M \in \mathbb{N}$. Por desigualdad triangular sabemos que

$$|x_{0,N} - x_{0,M}| \leq |x_{0,N} - x_{n_0,N}| + |x_{n_0,N} - x_{n_0,M}| + |x_{n_0,M} - x_{0,M}| \qquad \bigstar$$

Sea $\varepsilon > 0$,

- Como $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ sabemos que $d_\infty(x_n, x_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que si $n \geq n_0$ entonces $d_\infty(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$. Además, como $|x_{n_0,j} - x_{0,j}| \leq \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|x_{n_0,j} - x_{0,j}|\} = d_\infty(x_{n_0}, x_0) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, ya tenemos acotados el primer y el tercer término.
- Para el $n_0 \in \mathbb{N}$ hallado, como la sucesión real $(x_{n_0,j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es de Cauchy (en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$). Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$ de manera que si $M, N \geq j_0$ tenemos $|x_{n_0,N} - x_{n_0,M}| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Finalmente, para los n_0, j_0 hallados, si $N, M \geq j_0$ en $\bigstar$ se cumple

$$|x_{0,N} - x_{0,M}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Es decir, la sucesión real x_0 es de Cauchy y, por lo tanto, convergente. En otras palabras, probamos que $x_0 \in A$ lo cual completa la demostración de que A es cerrado en ℓ^∞.

Solución 2:

Veamos que $\ell^\infty \backslash A$ es abierto. Dado un elemento de $\ell^\infty \backslash A$ se trata de una sucesión $(a_n)_n$ acotada que no es convergente. Por lo tanto existen subsucesiones convergentes $(a_{n_k})_k, (a_{n_{k'}})_{k'}$ tales que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l, \lim_{k'\to\infty} a_{n_{k'}} = L$ y $l < L$. Sea $\varepsilon < \frac{L-l}{2}$. Veamos que $B((a_n)_n, \varepsilon) \subseteq \ell^\infty \backslash A$. Si $(b_n)_n \in B((a_n)_n, \varepsilon)$ entonces $|a_n - b_n| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en particular $|a_{n_k} - b_{n_k}| < \varepsilon$ para todo k, y $|a_{n_{k'}} - b_{n_{k'}}| < \varepsilon$ para todo k'. Si (b_n) fuera convergente con límite b, tomando límite cuando $k \to \infty$ y $k' \to \infty$, respectivamente, tendríamos que $|l - b| \le \varepsilon$ y $|L - b| \le \varepsilon$. Pero entonces

$$L - l = |L - l| \le |L - b| + |b - l| \le 2\varepsilon < L - l,$$

que es absurdo. Concluimos que $(b_n)_n$ no es convergente y por lo tanto que es un elemento de $\ell^\infty \backslash A$.