Cálculo Avanzado - 2° Cuatrimestre 2020
2º Parcial (9/12/2020)

---

1. Consideremos ℓ_1 con la distancia usual, es decir $d_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$. Sea $A \subset \ell_1$ un conjunto cerrado y acotado que cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n| \leq \varepsilon$ para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Probar que A es compacto.

2. Sean X e Y espacios métricos conexos, $A \subsetneq X$ y $B \subsetneq Y$.

   a) Probar que $(A \times B)^c$ es un subconjunto conexo de $X \times Y$.

   b) Probar que si $\#(X) \neq 1$ y $\#(Y) \neq 1$ entonces dados $(x_0, y_0) \ldots (x_n, y_n) \in X \times Y$, $\{(x_0, y_0) \ldots (x_n, y_n)\}^c$ es un subconjunto conexo de $X \times Y$.

3. Sea $T : C^1[-1,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = f'(0)$.

   a) Probar que T no es continua si consideramos en $C^1[-1,1]$ la norma infinito.

   b) Probar que si en cambio definimos en $C^1[-1,1]$ la norma $\|f\|_{\heartsuit} = \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$ entonces T resulta continua. Calcular su norma.

4. Para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ definimos $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

   a) Probar que f está bien definida (es decir, que la serie converge para todo $x \neq 0$), es continua, derivable y no acotada.

   b) Probar que la sucesión de sumas parciales no converge uniformemente en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Puede usar como ciertos los resultados de las guías prácticas o los vistos en la teórica.