Nombre y nro. libreta:

1	2	3	4	5	Calif.

CALCULO AVANZADO - SEGUNDO PARCIAL
2do cuatrimestre 2012 (06/12/2012)

1. Sea $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos abiertos en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $I_i \cap I_j = \emptyset$ para todo par $i \neq j$ e $I_k \to \infty$, es decir para todo M existe k_0 tal que los extremos del intervalo I_k son mayores que M para todo $k \geq k_0$.

   Probar que existe un $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que el conjunto $\{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ interseca a infinitos I_k.

   Sugerencia: Considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}_{\geq 0}$:

   $$U_k = \{\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \exists\, n\alpha \in I_j \textit{ para algún } j \geq k\}$$

2. Sea $S \subset \ell^\infty$ definido como $S = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : |x_n| \leq 1/2^n\}$. ¿Es S compacto?

3. (a) Sea X un espacio métrico y $A \subset X$ un subespacio. Probar que si $C \subset X$ es un subconjunto conexo tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$ entonces $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

   (b) Sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ un camino tal que $\alpha(0) \in A$ y $\alpha(1) \notin A$, probar que existe $x \in [0,1]$ tal que $\alpha(x) \in \partial A$. En otras palabras, todo camino que une A con $X \backslash A$ pasa por la frontera de A.

   Aclaración: ∂A es la frontera de A.

4. Sea V un espacio normado completo, $\phi : V \to V$ una función lineal y continua con $||\phi|| < 1$ y $\alpha \in V$ un elemento cualquiera. Definamos $f_\alpha : V \to V$ como $f_\alpha(v) = \alpha + \phi(v)$.

   (a) Probar que para todo α, f_α tiene un único punto fijo.

   (b) Deducir que $\mathrm{Id} - \phi$ es un isomorfismo.

5. (a) Sean X e Y espacios normados. Probar que una función $T : X \to Y$ lineal es un homeomorfismo si y solo si existen m y M tales que

   $$m||x|| \leq ||T(x)|| \leq M||x||$$

   para todo $x \in X$.

   (b) Deducir que si X e Y son espacios normados tales que existe un homeomorfismo lineal entre ellos entonces X es completo si y solo si Y es completo.

Justifique todas sus respuestas.