Cálculo Avanzado - 2° Cuatrimestre 2020
Recuperatorio del 2º Parcial (21/12/2020)

1. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \to X$ una función continua tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y) \ \ \forall x \neq y \in X$. Probar que existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

   Sugerencia: Observar que $f(x) = x$ si y sólo si $d(f(x), x) = 0$.

2. Sea (X, d) un espacio métrico conexo y $A, B \subset X$ no vacíos. Probar que existe $x \in X$ tal que $d(x, A) = d(x, B)$.

3. Definimos en $\mathbb{R}[x]$ la norma $\|P\|_{\clubsuit} = \max\limits_{i \in \mathbb{N}_0} |a_i|$, donde $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ es la sucesión de coeficientes de P. Dado $b \in \mathbb{R}$ consideramos la función $ev_b(P) = P(b)$. Probar que ev_b es continua si y sólo si $|b| < 1$. Calcular su norma para $b = 0$.

   Aclaración: No es necesario probar que ev_b es lineal.

4. Para $x > 0$ definimos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}(\frac{1}{3^n x})$.

   a) Probar que las sumas parciales convergen uniformemente en cualquier intervalo de la forma $[m, +\infty)$ con $m > 0$ pero la convergencia no es uniforme en el intervalo $(0, +\infty)$.

   b) Probar que $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y derivable.

Puede usar como ciertos los resultados de las guías prácticas o los vistos en la teórica.