Cálculo Avanzado - 1er cuatrimestre 2013
Soluciones del segundo parcial

1) *Primera resolución:* Veamos que si $C \subseteq Z$ es cerrado, entonces $g^{-1}(C) \subseteq Y$ es cerrado.
Como $g \circ f$ es continua, entonces $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ es un subconjunto cerrado de X (que es compacto), y por lo tanto es compacto.
Como f es sobreyectiva, $f(f^{-1}(g^{-1}(C))) = g^{-1}(C)$ y por ser f continua además es compacto. Entonces es cerrado, como queríamos ver.

Segunda resolución: Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una sucesión tal que $y_n \to y$. Queremos ver que $g(y_n) \to g(y)$.
Ahora, como f es sobreyectiva, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $f(x_n) = y_n$ y por ser X compacto, x_n tiene una subsucesión convergente $x_{n_k} \to x$. Entonces, por un lado $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y$, y por el otro (usando la continuidad de f), $f(x_{n_k}) \to f(x)$, así que debe ser $y = f(x)$.
Por último, como $g \circ f$ es continua, $g \circ f(x_n) \to g \circ f(x)$, pero por lo anterior esto es lo mismo que $g(y_n) \to g(y)$, como queríamos. $\blacksquare$

2) a) Sea v un vector de E que no está en H, de modo que $E = H \oplus \langle v \rangle$. Como H es separable, existe $D \subset H$ denso y numerable. Sea $\widetilde{D}$ el conjunto de los vectores de E que se pueden escribir en la forma $x + qv$, con $x \in D$ y $q \in \mathbb{Q}$. Es claro que $\widetilde{D}$ es numerable, pues está en biyección con $D \times \mathbb{Q}$. Veamos que $\widetilde{D}$ es denso. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $w \in E$, queremos encontrar un elemento de $\widetilde{D}$ que esté a distancia menor que ε de w.
Como $E = H \oplus \langle v \rangle$, existen $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $w = h + \lambda v$. Como D es denso en H, existe $x \in D$ tal que $\|h - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$; y como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|\lambda - q| < \frac{\varepsilon}{2\|v\|}$. Si ahora definimos $\widetilde{w} = x + qv$, resulta que $\widetilde{w} \in \widetilde{D}$, y por desigualdad triangular

$$\|w - \widetilde{w}\| \leq \|h - x\| + \|\lambda v - qv\| = \|h - x\| + |\lambda - q| \cdot \|v\| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Entonces $\widetilde{D} \subset E$ es denso y numerable, y por lo tanto, E es separable.

b) Vimos en el ejercicio 7 de la práctica 9 que c_0 es un hiperplano de c, y en el ejercicio 2 de la práctica 8 que c_0 es separable. Entonces c es un espacio normado que contiene un hiperplano separable. Por lo probado en a), se deduce que c es separable. $\blacksquare$

3) Sabemos que T es continuo si y sólo si es acotado en la esfera unitaria, es decir si $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$. Supongamos que esto no ocurre. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in E$ con $\|y_n\| = 1$ tal que $\|Ty_n\| > n$.

Sea $x_n = \frac{y_n}{\sqrt{n}}$. Entonces $\|x_n\| = \left\|\frac{y_n}{\sqrt{n}}\right\| = \frac{\|y_n\|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, de modo que la sucesión (x_n) converge a 0. Sin embargo,

$$\|Tx_n\| = \left\|T\left(\frac{y_n}{\sqrt{n}}\right)\right\| = \left\|\frac{Ty_n}{\sqrt{n}}\right\| = \frac{\|Ty_n\|}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

de modo que la sucesión (Tx_n) no es acotada, contradiciendo las hipótesis del enunciado.
Por lo tanto, T es continuo. ■

4) Por un lado, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de la norma de un operador tenemos que

$$|\langle y, Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|y\|\|T\|\|x\|,$$

de donde

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle y, Tx\rangle| \leq \|T\|.$$

Por otro lado, afirmamos que para cualquier x tal que $\|x\| = 1$ se tiene $\sup\limits_{\|y\|=1} |\langle y, Tx\rangle| \geq \|Tx\|$. Esto es claro si $Tx = 0$, pues en tal caso es $\langle y, Tx\rangle = 0$ para todo y. Si $Tx \neq 0$, podemos considerar $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$, de donde

$$\sup_{\|y\|=1} |\langle y, Tx\rangle| \geq \left|\left\langle \frac{Tx}{\|Tx\|}, Tx\right\rangle\right| = \|Tx\|.$$

Ahora tomando supremo sobre todos los x de norma 1 deducimos

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle y, Tx\rangle| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\|.$$

Entonces vale la igualdad. ■

5) Sea $x \in X$ arbitrario, y llamemos $x_n = T^n(x)$. Reemplazando $y = T(x)$ en la condición del enunciado obtenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$. Veamos que esto implica que la sucesión (x_n) es de Cauchy. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$. Ahora, si $m > m' \geq n_0$, entonces por desigualdad triangular tenemos que

$$d(x_{m'}, x_m) \leq d(x_{m'}, x_{m'+1}) + d(x_{m'+1}, x_{m'+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy, y como el espacio X es completo, converge a un cierto punto $x^* \in X$. Veamos que x^* es un punto fijo de T: en efecto, basta notar que como T es una función continua,

$$T(x^*) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

Falta probar la unicidad. Si x e y son dos puntos fijos distintos de T, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ es $d(T^n(x), T^n(y)) = d(x, y) > 0$, y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} d(T^n(x), T^n(y))$ no converge, contradiciendo la hipótesis del enunciado. Entonces el punto fijo es único. ■