

Cálculo Avanzado

Recuperatorio del segundo parcial - 20/07/21

- 1 a) Sea X un espacio métrico conexo y sea $\varepsilon > 0$ fijo. Probar que dados cualesquiera dos puntos $a, b \in X$ existen $N \in \mathbb{N}$ y puntos $x_0, x_1, \dots, x_N \in X$ tales que $x_0 = a$, $x_N = b$, y $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$.
- b) ¿Es cierto que si X cumple la propiedad anterior para todo $\varepsilon > 0$ entonces X es conexo?

- 2 Sea E un \mathbb{R} -espacio vectorial normado y sean $\phi_1, \phi_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ funcionales lineales continuos, no nulos, tales que $\ker \phi_1 \neq \ker \phi_2$. Sea $X = \{x \in E : \phi_1(x) \cdot \phi_2(x) \neq 0\}$. Hallar las componentes conexas de X .

Nota. En X usamos la métrica inducida por la de E .

- 3 Sea E el espacio de las funciones continuas del intervalo $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de la norma $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $\phi_n \in E^*$ definido por $\phi_n(f) = \int_0^1 f(t) t^n dt$.

- a) Probar que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *puntualmente* a la función nula.
- b) Probar que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a la función nula con la norma de E^* .

Nota. Recordar que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, y que la norma que usamos en $\mathcal{L}(E, F)$ es la definida en el ejercicio 13 de la práctica 7.

- 4 Sean E y F espacios normados y sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal con la siguiente propiedad: para toda sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ que converge a 0, la sucesión $(T(y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ es acotada. Probar que T es continuo.

- 5 Sean E un espacio de Banach, $U \subset E$ abierto, $x_0 \in U$. Sean $\phi, f, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones tales que:

- $\phi(x_0) = f(x_0) = \psi(x_0)$;
- $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ para todo x en un entorno de x_0 ;
- ϕ y ψ son diferenciables en x_0 , con $D\phi(x_0) = D\psi(x_0)$.

Probar que f es diferenciable en x_0 .

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y escriba con claridad