Cardinalidad

Def: Sean X, Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o que tienen el mismo cardinal) si $\exists\, f: X \to Y$ biyectiva

(Not: $X \sim Y$)

Prop: $\sim$ es una relacion de equivalencia

Demo: (1) Reflexivo: $X \sim X$ $\quad Id: X \to X$ biy ✓

(2) simétrica: $X \sim Y$

$\Rightarrow f: X \to Y$ biy $\Rightarrow f^{-1}: Y \to X$ biy

$\to Y \sim X$ ✓

(3) Transitiva: $X \sim Y$ y $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

$f: X \to Y$ biy, $g: Y \to Z$ biy

$\Rightarrow g \circ f: X \to Z$ biy $\to X \sim Z$

$\square$

Ejemplos:

(1) $\mathbb{N} \sim \{n \in \mathbb{N}, n \text{ par}\} = \text{Pares}$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\to \text{Pares} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$ es biyectiva

(2) $f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-(n-1)}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ es biy

3) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}_+ = \{ q \in \mathbb{Q},\ q > 0 \}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ \ldots \\ 1/2 & \cancel{2/2} & 3/2 & & \\ 1/3 & 2/3 & 3/3 & & \\ 1/4 & 2/4 & 3/4 & & \end{array}$$

Defino f siguiendo este metodo y es biy

Completar con $\mathbb{Q}$
(usar $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$)

DEF: El cardinal de un conjunto X es la clase de equivalencia de X con respecto a $\sim$

NOT: $\#X = \text{Card}(X) = \{ Y : Y \sim X \}$

Distinguimos algunas:

$\# \{1, \ldots, n\} = n$

$\# \mathbb{N}$: Aleph 0 $= \aleph_0$

$\# \mathbb{R} = c$ (continuo)

Def: Un conjunto X se dice

- ·) finito si existe un n / $X \sim \{1, \dots, n\}$
- ·) infinito si no es finito
- ·) numerable si es coordinable con $\mathbb{N}$ ($\# X = \aleph_0$) (contable)
- ·) a lo sumo numerable si es finito ó numerable

Teorema: Sea A numerable, $\emptyset \neq B \subseteq A \Rightarrow B$ es a lo sumo numerable

Demo: Como A es numerable

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$f : \mathbb{N} \to A$$
$$n \mapsto a_n = f(n)$$

Como $B \subseteq A$, quiero definir $g(1)$.

Defino $g(1) = a_{j1}$ donde $j1 = \min\{j : a_j \in B\}$

Si $B = \{a_{j1}\}$ listo

si no $B \setminus \{a_{j1}\} \neq \emptyset$ y repito el procedimiento

Defino $g(n)$ de manera inductiva

Si termino en n pasos $\Rightarrow B$ es finito

Si B es infinito, debería probar que

- ·) inyectiva: porque f es inyectiva (la lista de A no tiene elem. repetidos)

·) sobreyectiva: Si $b \in B \Rightarrow b \in A$

$\Rightarrow b \in a_n$ para algun n

$\Rightarrow$ en a lo sumo n pasos llego a cubrirlo

$\square$

Teo: Sea A infinito. Entonces existe $B \subseteq A$ numerable

Demo:

Sea $a_1 \in A$ cualquiera.
Como A es infinito

$$A \neq \{a_1\} \Rightarrow A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow \exists\ a_2 \in A \setminus \{a_1\}$

Inductivamente, si elegi $a_1, \dots, a_n$. Como

$A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ xq A es infinito

$\rightarrow \exists\ a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

Defino $B = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow B$$
$$n \rightarrow a_n \quad \text{biy}$$

$\boxed{\Sigma}$

Orden entre los Cardinales

Def:

- $\#A = \#B$ si $\exists\, f: A \to B$ biyectiva
- $\#A \leq \#B$ si $\exists\, f: A \to B$ inyectiva

  $(\exists\, g: B \to A$ sobrey$)$ son equiv

- $\#A < \#B$ si $\#A \leq \#B$ pero $A \not\sim B$

Ejemplo: $\#\{1, \dots, n\} \leq \#\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \{1, \dots, n\} &\to \mathbb{N} \\ j &\mapsto j \end{aligned}$$

obs: Tendríamos que probar la buena definición y que es relación de orden

B.D: Si $\#A \leq \#B$ y $\#A = \#X$, $\#B = \#Y$

$\overset{qvq}{\Rightarrow} \#X \leq \#Y$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f\ \text{iny}"] & B \arrow[d, shift left, "h^{-1}"] \\ X \arrow[u, "g"', "\text{biy}"] \arrow[r] & Y \arrow[u, "h", "\text{biy}"'] \end{tikzcd}$$

$h^{-1} \circ f \circ g$ es inyectiva

$\leq$) es relación de orden

(1) Reflexiva. $\#A \leq \#A$

$id\ A \to A$ es iny ✓

(2) Transitiva: $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#C$

$\Rightarrow f: A \to B$ iny y $f: B \to C$ iny $\Rightarrow g \circ f: A \to C$ es iny

(3) Antisimétrica: $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$

Teorema (CANTOR - Schroeder - Bernstein) (CSB)

Si $\#A \leq \#B$ y $\#B \leq \#A \Rightarrow \#A = \#B$

Ejemplo:

1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable

$$\mathbb{N}^2 = \{ (n,m) : n \cdot m \in \mathbb{N} \}$$

I) $\# \mathbb{N} \leq \# \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

II) $\# \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq \# \mathbb{N}$

I) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es iny

$n \to (n,1)$

II) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(n,m) \longmapsto 2^n \cdot 3^m$

es inyectiva por descomposicion unica en fact. primos

$\Rightarrow$ Por CSB: $\# \mathbb{N} = \# \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

2) $\# \mathbb{N}^3 = \aleph_0$ $\quad (\# \mathbb{N}^n = \aleph_0)$

(Tarea: Pero es lo mismo)

3) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos numerables

$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ es numerable

I) $\#\mathbb{N} \leq \#A$
II) $\#A \leq \#\mathbb{N}$

I) $\mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

sé que $\exists\ f: \mathbb{N} \to A_1$ biyectiva

Pienso $f: \mathbb{N} \to A$ iny

II) $\#A \leq \#\mathbb{N} = \#\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$A \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ iny

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \dots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \dots\}$, ...

$a \in A \Rightarrow a \in A_n$ para algun n
Si esta en mas de un A_m, elijo $n = \min\{m : a \in A_m\}$

$a \in A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$

$\Rightarrow a = a_{mj}$

Defino $f: A \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$
$a \to (n, j)$