

Cálculo Avanzado

Segundo Cuatrimestre 2021

Primer Recuperatorio - 30/11/2021

Nombre y apellido:

LU:

1. Sea X un espacio métrico separable de cardinal infinito. Calcular el cardinal de

$$C_b(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}.$$

2. Sea X espacio métrico y sea $A \subset X$. Demostrar que A es abierto si y solo si $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ para todo $B \subset X$.

3. Considere el espacio métrico \mathbb{R}^2 con la métrica $d := d_{\text{usual}} \times d_{\text{disc}}$, es decir

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + \delta(y_1, y_2)^2}$$

(donde $\delta(y, z)$ es 0 si $y = z$ y 1 en otro caso). Probar que (\mathbb{R}^2, d) no es separable.

4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Se denota por $G_f \subseteq X \times Y$ al gráfico de la función, es decir

$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Probar que $F : X \rightarrow G_f$ definida por $F(x) = (x, f(x))$ es un homeomorfismo, donde G_f tiene la métrica de subespacio de $(X \times Y, d_\infty)$.

5. Se define para cada función Lipschitz $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ el número real M_f como:

$$M_f := \inf\{M > 0 : f \text{ es } M\text{-Lipschitz}\}.$$

Sea $L \subseteq C[0, 1]$ el conjunto de funciones Lipschitz con la métrica de subespacio de $(C[0, 1], d_\infty)$. Probar que la aplicación $M : L \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada $f \in L$ el número real M_f **no** es continua.

- **JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS.**
- **SE PUEDEN CONSULTAR LAS NOTAS DE CLASE.**
- **NO SE PUEDE CONSULTAR CON OTRAS PERSONAS.**
- **NO SE PUEDE CONSULTAR FOROS ONLINE, NI LIBROS, NI PÁGINAS EN INTERNET.**

El examen lo deben enviar resuelto, antes de las 14:00 en un pdf, via email a la cuenta especial que hicimos a tal efecto: calculo.avanzado.2cuat.2021@gmail.com

El encabezado del email debe ser así: Apellido-Nombre-Recuperatorio primer parcial.

El nombre del archivo debe ser así: Apellido.Nombre_R1.pdf