1	2	3	4	5	Calificación
B⁻	B	B	B	R/B/M	A

Cálculo Avanzado

Primer Parcial - 23/05/23

Nombre y apellido: ....

1 Calcular el cardinal del siguiente conjunto:

$$X = \{S \subset \mathbb{N} : |S| = |\mathbb{N} - S| = \aleph_0\}.$$

2 Sea $X = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : (a_n) \text{ es convergente}\}$, equipado con la métrica del supremo, es decir, $d((a_n),(b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Sea $A = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X : \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) Calcular A°.

b) Probar que A es cerrado.

3 Sean X e Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Supongamos que existe una función $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, continua en 0, tal que $\phi(0) = 0$ y además $d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x,y))$ para cualesquiera $x, y \in X$. Probar que f es uniformemente continua.

4 Consideramos la función $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

a) Probar que d es una métrica en $\mathbb{R}$.

b) Probar que $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico completo.

c) Determinar si la métrica d es topológicamente equivalente a la métrica usual de $\mathbb{R}$.

5 *a*) Sean $a < b$ dos números reales positivos. Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ los intervalos abiertos (na, nb) y $((n+1)a, (n+1)b)$ tienen intersección no vacía.

b) Sean $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función, $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Definimos

$$F_k = \{\alpha \in [0,+\infty) : |f(n\alpha)| \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq k\}.$$

Probar que si $F_k^\circ \neq \emptyset$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x > M$.

c) Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $\alpha \in [0,+\infty)$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} f(n\alpha) = 0$. Probar que entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Justifique todas sus respuestas, no omita detalles y escriba con claridad

Nota: voy a usar el símbolo "$\rightsquigarrow$" como "de esto se sigue que". La implicación lógica es "$\Rightarrow$".

Primer Parcial de Cálculo Avanzado:

Ejercicio 1: $X = \{S \subseteq \mathbb{N} / |S| = |\mathbb{N} - S| = \aleph_0\}$. Hallar $|X|$

$X \subseteq P(\mathbb{N})$. $|X| \leq |P(\mathbb{N})| = c$ ✓

Sea $A = \{\sigma \in \{0;1\}^{\mathbb{N}} / \sigma$ tiene infinitos ceros e infinitos unos$\}$

Sea ~~F: (R-Q) → A~~ $F: ((0;1) - \mathbb{Q}) \rightsquigarrow A$ / ¿ Definir bien la función ¿Es $x \longmapsto x_2$?

$F(x) = F((0, x_1 x_2 x_3 \ldots)_2) = F\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}\right) = (x_1; x_2; \ldots)$

$x_n \in \{0;1\} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Veamos que F es inyectiva:

Sean $x, y \in ((0;1) - \mathbb{Q}) / F(x) = F(y)$. $F\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}\right) = F\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n 2^{-n}\right)$

$(x_1; x_2; \ldots) = (y_1; y_2; \ldots)$

Como $x_i = y_i \ \forall i \in \mathbb{N}$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} y_n 2^{-n} = y \rightsquigarrow F \text{ es inyectiva.}$$

~~Sea g: A →~~ Veamos que $F(x) \in A$ (debería haberlo hecho antes):

Sup. que n_0 ~~sin pérdida de generalidad~~, sup. que $F(x)$ solo tiene finitos unos. Sea $n_0 / x_n \neq 1 \ \forall n \geq n_0$. Como $x_n \in \{0;1\} \ \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0 \ \forall n \geq n_0$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{n_0} x_n 2^{-n} \in \mathbb{Q}$$ pues suma finita de racionales es racional Abs/

Sup. que $F(x)$ solo tiene finitos ceros. ✓

Sea ~~$n_0 \in \mathbb{N} / x_n = 1 \ \forall n \geq n_0$~~ $N = \{n \in \mathbb{N} / x_i = 1 \ \forall i \geq n\}$.

Sea $n_0 = \min(N)$. $\rightsquigarrow x_{n_0 - 1} = 0$. (al final no hizo falta agarrar el mínimo)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} x_n 2^{-n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 \cdot 2^{-n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} x_n 2^{-n}}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{2^{-n_0+1}}_{\in \mathbb{Q}}$$ ✓

Abs//

$\therefore \underbrace{|(0,1) - \mathbb{Q}|}_{c} \leq |A|.$

Sea $g: A \to X / g(\sigma) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ \sigma_i = 1}} \{i\}.$

$\{ i : \sigma_i = 1 \}$

Veamos que g es inyectiva:

Sean $\sigma, \tau / g(\sigma) = g(\tau).$

Sea $j \in g(\sigma) = g(\tau) \to j \in \{i\}$ para algún i. ($j = i$ para algún i).

Además $\sigma(i) = 1$. $\therefore$ $\sigma(j) = 1$. Análogamente, $\tau(j) = 1$. ✓

Sea $j \notin g(\sigma) \to j \notin \{i\}$ $\forall i / \sigma(i) = 1$. $j \neq i$ $\forall / \sigma(i) = 1$.

$\to \sigma(j) \neq 1 \to \sigma(j) = 0$. Análogamente, $\tau(j) = 0$. ✓

$\to \sigma_i = \tau_i \iff \underbrace{i \in \{0, 1\}}_{\text{cierto siempre}} \to \therefore \sigma = \tau$

$\therefore |A| \leq |X|.$

$c \leq |A| \leq |X| \leq c \to \boxed{|X| = c}$ ✓

Ejercicio 2: Sea $X = \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / a_n \text{ converge}\}$. Consideremos el métrico $(X; d_\infty)$. Sea $A = \{(a_n) \in X / \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{Z}\}$

a_ Hallar A°.

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^\circ$. (Supongamos que $A^\circ \neq \emptyset$). Como A° es abierto, sea $r>0$ / $B((X_n); r) \subseteq A^\circ \subseteq A$ $\Rightarrow$ Cada elemento en $B((X_n); r)$ está en A, por lo que converge en $\mathbb{Z}$.

Consideremos $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ / $Y_n = X_n + Q$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con

$Q \in (0;1) \cap (0;r) \neq \emptyset$. Sea $P \in \mathbb{Z}$ / $P = \lim_{n\to\infty} X_n$.

$\lim_{n\to\infty}(X_n + Q) = Q + \lim_{n\to\infty} X_n = P+Q = \lim_{n\to\infty} Y_n$

$P+Q \notin \mathbb{Z}$ pues $P \in \mathbb{Z}$ y $Q \notin \mathbb{Z}$ $(Q \in (0; \min\{1; r\}))$. $\therefore (Y_n) \notin A$.

Ahora veamos que $(Y_n) \in A$:

$d_\infty((X_n);(Y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n - Y_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n - X_n - Q| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |-Q| = Q < r$.

$\Rightarrow$ $(Y_n) \in B((X_n); r) \subseteq A^\circ \subseteq A$. $\therefore (Y_n) \in A$. Abs//

El absurdo provino de asumir que $A^\circ \neq \emptyset$. $\therefore \boxed{A^\circ = \emptyset}$

b_ probar que A es cerrado.

Veamos que A^c es abierto. Sea $(X_n) \in A^c$. Sea $L = \lim_{n\to\infty} (X_n) \notin \mathbb{Z}$

Como Z es cerrado, sea $r>0 / B(L;r) \subseteq Z^c$. ~~Es importante notar que~~

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B((x_n); r/2)$.

$d_\infty((x_n);(y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| < r/2$. Sea $M = \lim_{n\to\infty} y_n$

~~Sup que $|L-M| \geq r/2$~~ Como $|x_n - y_n| < r/2$, $\lim_{n\to\infty} |x_n-y_n| \leq r/2 < r$

~~$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |\lim_{n\to\infty}(x_n) - \lim_{n\to\infty}(y_n)|$ pues $|\cdot|$ y $-$ son continuas.~~

~~$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |L-M| > r/2$. Sea $n_0 \in \mathbb{N} / ||x_n - y_n| - |L-M|| < r/2 \quad \forall n \geq n_0$~~

~~$r/2 < |x_{n_0} - y_{n_0}| - |L-M| < r/2$~~

~~$|x_{n_0} - y_{n_0}| < r/2$~~

módulo y resta son funciones continuas

$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |L-M| < r. \Rightarrow M \in B(L;r) \subseteq Z^c. \therefore (y_n) \in A^c$.

Como (y_n) es arbitrario, $B((x_n); r/2) \subseteq A^c$. Como (x_n) es arbitrario, todo punto en A^c tiene una bola centrada en él completamente contenida en A^c. Es decir, A^c es abierto.

$\therefore$ A es cerrado //

Ejercicio 3: Sean X, Y dos métricos. Sea $F: X \to Y$ una función.
Sea $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ / φ es continua en 0, $\varphi(0)=0$.
Además, $\varphi(d(x;y)) \geq d(F(x);F(y)) \ \forall x;y \in X$. Probar que F es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ / $\varphi([0;\delta)) \subseteq [0;\varepsilon)$. ✓
Sean $x, y \in X$ / $d(x;y) < \delta$. veamos que este delta sirve para la continuidad uniforme.
Como $d(x;y) \in [0;\delta)$, $\varphi(d(x;y)) \in [0;\varepsilon)$. ✓

$d(F(x);F(y)) \leq \varphi(d(x;y)) < \varepsilon$. Como x, y son arbitrarios, vale $\forall x, y \in X$

Para cada epsilon hallé un delta que cumple que: ✓

$d(x;y) < \delta \Rightarrow d(F(x);F(y)) < \varepsilon \ \forall x, y \in X$. $\to$ $\boxed{F \text{ es uniformemente continua}}$ ✓

Ejercicio 4: Sea $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, d(x;y) = \begin{cases} 0 & si\ x=y \\ |x|+|y| & si\ x\neq y \end{cases}$

a- Probar que d es una métrica:

Veamos que $Im(d) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

sean $x, y \in \mathbb{R}$. $|x| \geq 0$, $|y| \geq 0 \to |x|+|y| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ //

Veamos que $d(x;y)=0 \iff x=y$:

($\Rightarrow$)

$d(x;y)=0$. si $x=y$, listo.

si $x \neq y$: $|x|+|y|=0$

$|x|=-|y| \Rightarrow$ Algo en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ es igual a algo en $\mathbb{R}_{\leq 0}$.

$|x|=|y|=0$

$x=y=0$ Abs //

$d(x;y) \Rightarrow x=y$ //

($\Leftarrow$)

$d(x;x)=0$ por definición //

Veamos que $d(x;y)=d(y;x)$:

$$d(y;x) = \begin{cases} 0 & si\ y=x\ (\iff x=y) \\ \underbrace{|y|+|x|}_{=|x|+|y|} & si\ y\neq x\ (\iff x\neq y) \end{cases} = \begin{cases} 0 & si\ x=y \\ |x|+|y| & si\ x\neq y \end{cases} = d(x;y) ///$$

Veamos que $d(x;z) \leq d(x;y)+d(y;z)$:

Si $x=z$, $0 \leq$ algo en $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Listo.

Sean $x \neq z$.

Si $y=x$, $d(x;z) \leq \underbrace{d(x;x)}_{0}+d(x;z)=d(x;z)$ ✓

Si $y=z$, $d(x;z) \leq d(x;z)+\underbrace{d(z;z)}_{0}=d(x;z)$.

Si $x \neq y \neq z$:

$d(x;z)=|x|+|z| \leq |x|+|y|+|y|+|z|=d(x;y)+d(y;z)$ //

b- Probar que $(\mathbb{R};d)$ es completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Sea $\varepsilon>0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N} / d(x_n;x_m)<\varepsilon \; \forall n,m \geq n_0$

Si $x_m=x_n \; \forall n,m \geq n_0$: Listo. x_{n_0} es el límite pues:
$d(x_n;x_{n_0})<\varepsilon \; \forall n \geq n_0$.

Si $\exists$ (x_{n_i}) subsucesión constante: Listo. Sea $i_0 / n_{i_0} \geq n_0$. $x_{n_{i_0}}$ es el límite:
$d(x_n;x_{n_{i_0}})<\varepsilon \; \forall n \geq n_0$.

Si no hay subsucesiones constantes: Sea $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ subsuc. / no tiene imágenes repetidas. $\exists$ pues cada imagen aparece finitas veces. De no ser así, habría una subsuc. constante.

Sea $i_0 \in \mathbb{N} / d(x_{n_i};x_{n_j})<\varepsilon \; \forall i,j \geq i_0$
$|x_{n_i}| \leq |x_{n_i}|+|x_{n_j}|<\varepsilon \rightarrow |0|+|x_{n_i}|<\varepsilon \; \forall i \geq i_0$

$\lim_{i\to\infty} x_{n_i}=0 \rightarrow x_n$ Cauchy tiene subsuc. convergente a 0.
$\therefore x_n \to 0$

En todos los casos de arriba, x_n converge, $\therefore$ $\boxed{(\mathbb{R};d) \text{ es completo}}$ //

C- Determinar si d es topológicamente equivalente a la métrica usual.

Veamos por qué no lo son: (llamo $d_{|\cdot|}$ a la métrica usual)

$B_d(1;1) = \{x \in \mathbb{R} / d(x;1) < 1\}$

$$d(x;1) = \begin{cases} 0 & si\ x = 1 \\ |1|+|x| & si\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \in B_d(1;1)$$

$|1| + |x| < 1$

$|x| < 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} / |x| < 0$

$B_d(1;1) = \underbrace{\{x \in \mathbb{R} / x = 1\}}_{\{1\}} \cup \underbrace{\{x \in \mathbb{R} / |1|+|x| < 1 \wedge x \neq 1\}}_{\emptyset} = \{1\}$ ✓

$\{1\}$ es abierto en $(\mathbb{R}; d)$. pero $\{1\}$ no es abierto en $(\mathbb{R}; d_{|\cdot|})$.

$\therefore \boxed{d \not\sim d_{|\cdot|}}$ ✓

Ejercicio 5: a. Sean $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ $/ a<b$. $\boxed{\text{Probar}}$ que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ /

$(n \cdot a ; n \cdot b) \cap ((n+1) \cdot a ; (n+1) b) \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$.

→ Después elijo algo más preciso.

Sup. que n_0. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Sea $n_1 \geq n_0$ /

$(n_1 \cdot a ; n_1 \cdot b) \cap ((n_1+1) \cdot a ; (n_1+1) \cdot b) = \emptyset$. Este n_1 existe sin importar n_0 pues así lo dice la negación de lo que quiero probar.

$n_1 \cdot a < (n_1+1) a \wedge n_1 \cdot b < (n_1+1) b \wedge a<b$

Sup. $\boxed{n_1 \cdot b > (n_1+1) a}$: Sea $X \in \mathbb{R} / (n_1+1) a < X < n_1 b$.

$n_1 a < (n_1+1) a < X < n_1 b < (n_1+1) b \Rightarrow n_1 a < X < n_1 b \wedge (n_1+1) a < X < (n_1+1) b$

$\Rightarrow X \in (n_1 a ; n_1 b) \cap ((n_1+1) a ; (n_1+1) b)$ Abs//.

$\therefore \boxed{n_1 b \leq (n_1+1) a}$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

→ ~~$n_1 a < n_1 b \leq (n_1+1) < (n_1+1) b$~~. $b \leq \left(1+\frac{1}{n_1}\right) a$..

Como $a<b$, $a \in (-\infty ; b)$, sea $\varepsilon>0$ / $B(a, \varepsilon) \subseteq (-\infty ; b)$.

$\Rightarrow a+\varepsilon<b$. Sea $n_0 \in \mathbb{N} / \frac{a}{n_0}<\varepsilon$.

$a+\frac{a}{n_1} \leq a+\frac{a}{n_0}<a+\varepsilon<b$.

$a+\frac{a}{n_1}<b$, $a\left(1+\frac{1}{n_1}\right)<b$, pero $a\left(1+\frac{1}{n_1}\right) \geq b$ Abs//

El absurdo vino de asumir que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n_1 \geq n_0$ /

$(n_1 \cdot a ; n_1 \cdot b) \cap ((n_1+1) a ; (n_1+1) b)=\emptyset$.

$\therefore \exists n_0 \in \mathbb{N} / (n \cdot a ; n \cdot b) \cap ((n+1)a ; (n+1)b) \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$ //

b_ Sean $F : [0 ; +\infty) \to \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

~~para cada K~~ sea $F_K = \{\alpha \in [0 ; +\infty) / |F(n\alpha)| \leq \varepsilon \ \forall n \geq K\}$

Probar que $F_K^\circ \neq \emptyset \Rightarrow \exists M > 0 / |F(x)| \leq \varepsilon \ \forall x > M$

Sea $\alpha \in F_K^\circ$. Sea $r > 0 / B(\alpha ; r) \subseteq F_K^\circ \subseteq [0 ; +\infty)$.

Sean $a = \alpha - r$, $b = \alpha + r$. ~~$a, b \in F_K^\circ \subseteq F_K$~~. $(a ; b) \subseteq F_K^\circ \subseteq F_K$

$\downarrow$

$a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\therefore$ ~~$|F(na)| \leq \varepsilon \wedge |F(nb)| \leq \varepsilon \ \forall n \geq K$~~

$|F(nx)| \leq \varepsilon \ \forall n \geq K, \ \forall x \in (a ; b)$. otra forma de decir esto es así:

$|F(x)| \leq \varepsilon \ \forall x \in (na ; nb) \ \forall n \geq K$. Pues $\{n \cdot x, x \in (a ; b)\} = (n \cdot a ; n b) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

cuando $a, b \geq 0$

por S.a.

Sea $n_0 \in \mathbb{N} / (n a ; n b) \cap ((n+1) a ; (n+1) b) \neq \emptyset \ \forall n \geq n_0$. (pido $n_0 \geq K$).

$\to \bigcup_{i=n_0}^{L} (ia ; ib) = (n_0 a ; L b) \ \forall L \geq n_0$ (lo demuestro para dos, lo demás sale con inducción)

Lema 1

~~Como $(n a ; n b) \cap ((n+1) a ; (n+1) b) \neq \emptyset$, $(na ; nb) \cup ((n+1)a ; (n+1)b) = (na ; (n+1)b)$~~

Sea $\underline{M = n_0 a \geq 0}$ sea $x > M$. Sea $L \in \mathbb{N} / L \cdot b > x$.

$\therefore x \in (n_0 a ; L b) = \bigcup_{i=n_0}^{L} (ia ; ib)$. $\Rightarrow$ x está en alguno de los intervalos.

sea $i_0 \in \mathbb{N}$ $(i_0 \geq n_0)$ / $x \in (i_0 a ; i_0 b)$. Como $i_0 \geq n_0 \geq K$ $|F(x)| \leq \varepsilon$.

Esto vale para $x > M$ arbitrario. $\therefore \exists M > 0 / |F(x)| \leq \varepsilon \ \forall x > M$ /

Lema 1: sean $a,b,c,d \in \mathbb{R} / a<c<b<d$. Entonces $(a;b)\cup(c;d)=(a;d)$. ✓

$(\subseteq)$ sea $x\in(a;b)$.
$a<x<b<d \Rightarrow x\in(a;d)$

sea $x\in(c;d)$.
$a<c<x<d \Rightarrow x\in(a;d)$ //

$(\supseteq)$ sea $x\in(a;d)$.

si $a<x<c$: $\Rightarrow a<x<c<b \Rightarrow x\in(a;b)$
si $x=c$: $\Rightarrow a<x<b \Rightarrow x\in(a;b)$
si $c<x<b$: $\Rightarrow a<c<x<b \Rightarrow x\in(a;b)$
si $x=b$: $c<x<d \Rightarrow x\in(c;d)$
si $b<x<d$: $c<b<x<d \Rightarrow x\in(c;d)$ //

Listo.

Como unir dos intervalos así da un intervalo, unir finitos es lo mismo. ✓

C. Sea $F:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$ continua $/ \forall\alpha\in[0;+\infty), \lim_{n\to\infty} F(n\alpha)=0$.
Probar que $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$.

Sea $\varepsilon>0$. Sea $n_0\in\mathbb{N} / |F(n\cdot 1)|<\varepsilon/4 \ \forall n\geq n_0$

Sea F_{n_0} como en 5-b-. $1\in F_{n_0} = \{\alpha\in[0;+\infty) / |F(n\alpha)|\leq\varepsilon/2 \ \forall n\geq n_0\}$

como F es continua en 1, sea $\delta>0 / |x-1|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(1)|<\varepsilon/4 \ \forall x\in[0;+\infty)$

$-\varepsilon/4 < F(x)-F(1) < \varepsilon/4$
$-\varepsilon/2 < -\varepsilon/4+F(1) < F(x) < \varepsilon/4+F(1) < \varepsilon/2$
$|F(x)| < \varepsilon/2$

Ugor T. Barrio

ERROR

NOTA