RESOLUCIÓN DEL SEGUNDO PARCIAL, 03/12/2014

1) Primero vamos a probar que si X es conexo, $U \subseteq X$ es conexo y V es abierto y cerrado con respecto a U, entonces $U \cup V$ es conexo. Supongamos entonces que $U \cup V$ no es conexo. Entonces $U = B_1 \cup B_2$ con B_1, B_2 no vacíos, disjuntos, abiertos y cerrados. Como U es conexo, está contenido en uno de los dos, digamos $U \subseteq B_2$. Entonces B_1 es abierto y cerrado en V, y por lo tanto en $X - U$. Entonces B_1 es no vacío, abierto y cerrado en $(U \cup V) \cup (X - U) = X$. Pero esto es absurdo, porque X es conexo. Así que probamos lo que queríamos.

Ahora supongamos que $X - C$ no es conexo. Entonces $X - C = U \cup V$ con U, V no vacíos, disjuntos, abiertos y cerrados en $X - C$. Como $A \subseteq X - C$ y A es conexo, podemos suponer que $A \subseteq V$. Como C es conexo lo que probamos arriba nos dice que $C \cup U$ es conexo. Como $C \cup U \subseteq X - A$ y $C \cap U = \emptyset$, tenemos que $C \cup U$ es un conexo de $X - A$ que contiene a C. Pero entonces C no puede ser una componente conexa de $X - A$, y esto es absurdo. Por lo tanto, deducimos que $X - C$ es conexo.

2) Como siempre vale que $d(\overline{f(E)}, K) \leq d(f(E), K)$, vamos a probar que $d(\overline{f(E)}, K) > 0$. Como se trata de la distancia de un cerrado a un compacto (por el ejercicio 8 de la práctica 7), nos alcanza con ver que son disjuntos.
Supongamos que no, es decir, que existe $y \in K \cap \overline{f(E)}$. En ese caso, tenemos que existe una sucesión $(y_n)_n \subset f(E)$ tal que $y_n \to y$. Consideremos $x_n \in E$ tal que $f(x_n) = y_n$ para todo n. Como E es precompacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ y $z \in \overline{E}$ tal que $x_{n_k} \to z$. Como f es continua, $f(x_{n_k}) \to f(z)$ y por unicidad del límite, $f(z) = y$. Es decir, $z \in f^{-1}(K)$. Pero entonces $d(E, f^{-1}(K)) \leq d(x_{n_k}, z) \to 0$, y esto es absurdo.

3) a) Si $f(x) = f(y)$ entonces $o \geq d(x, y)$, de donde deducimos que $x = y$. Notemos que además f^{-1} es continua porque

$$d(x, y) = d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) \geq d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)).$$

b) Supongamos que existe x_0 tal que $x_0 \notin f(K)$. Como $f(K)$ es compacto (porque K compacto y f continua), sabemos por un ejercicio de la práctica que $d(f(K), x_0) = d > 0$. Definimos la sucesión $x_n = f^n(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge en K. Por lo tanto, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_{m_0+1}}, x_{n_{m_0}}) < d/2.$$

Podemos escribir $x_{n_{m_0+1}} = x_p$ y $x_{n_{m_0}} = x_q$ con $p > q$ y tenemos que

$$d(x_{n_{m_0+1}}, x_{n_{m_0}}) = d(x_p, x_q) = d(f(x_{p-1}), f(x_{q-1})) \geq d(x_{p-1}, x_{q-1}).$$

Siguiendo este procedimiento tenemos que

$$d(x_{n_{m_0+1}}, x_{n_{m_0}}) \geq d(x_{p-1}, x_{q-1}) \geq \cdots \geq d(x_{p-q}, x_0) \geq d$$

donde la última desigualdad vale porque $x_{p-q} \in f(K)$ y $d = d(f(K), x_0)$. Pero esto es absurdo, así que concluímos que $f(K) = K$.

4) a) Sea (X, d) separable y sea d' una métrica topológicamente equivalente a d. Sabemos que $id : (X, d) \to (X, d')$ es un homeomorfismo.
Sea $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ un cubrimiento por abiertos de (X, d'). Como id es continua, $id^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} U_i) = \bigcup\limits_{i\in I} id^{-1}(U_i) = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ es un cubrimiento por abiertos de (X, d), que es separable. Sea $N \subseteq I$ subconjunto numerable tal que $X = \bigcup\limits_{i\in N} U_i$. Como los U_i son abiertos para d', $\mathcal{U}' = \bigcup\limits_{i\in N} U_i$ es un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$ y por lo tanto (X, d') es separable.
b) Sea (X, d) compacto y sea d' una métrica topológicamente equivalente a d. Sabemos que $id : (X, d) \to (X, d')$ es un homeomorfismo. En particular, como es continua, $id(X, d) = (X, d')$ es compacto por ser la imagen de un compacto a través de una función continua.
c) Mostremos que es falso a través de un contraejemplo. Consideremos $X = (0, 1)$ con la métrica inducida de $\mathbb{R}$. Como en $\mathbb{R}$ acotado implica totalmente acotado, tenemos que $(X, |\cdot|)$ es totalmente acotado. Consideremos $f : ((0, 1), |\cdot|) \to ((1, +\infty), |\cdot|)$ definida por $f(x) = 1/x$, que es un homeomorfismo (es continua y $f^{-1}(x) = 1/x$). Definimos en X la siguiente distancia: $d'(x, y) = d(f(x), f(y)) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.
d' es una distancia:
i) $d'(x, y) = d(f(x), f(y)) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. Además, $d'(x, y) = 0 = d(f(x), f(y))$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ si y sólo si $x = y$.
ii) $d'(x, y) = d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = d'(y, x)$
iii)$d'(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) = d'(x, z) + d'(z, y)$
d' es topológicamente equivalente a d:
i) $id : (X, d) \to (X, d')$ es continua: Sea $x_n \to x$ en (X, d). Como f es continua, $f(x_n) \to f(x)$. Es decir, $d'(x_n, x) = d(f(x_n), f(x)) \to 0$. Con lo cual, $x_n \to x$ en (X, d').
ii) $id : (X, d') \to (X, d)$ es continua: Sea $x_n \to x$ en (X, d'). Es decir, $d'(x_n, x) = d(f(x_n), f(x)) \to 0$. Como f^{-1} es continua, $f^{-1}(f(x_n)) \to f^{-1}(f(x))$. Con lo cual, $x_n \to x$ en (X, d).
Por último, observemos que (X, d') no es totalmente acotado, porque ni siquiera es acotado (en cualquier espacio métrico totalmente acotado implica acotado): basta con tomar la sucesión $(1/n)_{n\geq 3} \subset X$. $d'(1/n, 1/2) = |n - 2| \to \infty$.

5) Para ver que el operador está bien definido, notemos que

$$\|T_a(x)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cdot x_n|^2\right)^{1/2} \leq \|a\|_\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|a\|_\infty \|x\|_2 < +\infty \tag{1}$$

así que efectivamente $T_a : \ell_2 \to \ell_2$.
Probemos ahora que es lineal: Sean $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$T(x + \lambda y) = (a_n(x + \lambda y)_n) = (a_n(x_n + \lambda y_n)) = (a_n x_n) + \lambda(a_n y_n) = T(x) + \lambda T(y)$.

Como T es un operador entre espacios normados lineal, sabemos que es continuo si y sólo si su norma está acotada. Pero (1) nos dice que $\|T_a\| \leq \|a\|_\infty < +\infty$, con lo cual es continuo.

Para calcular la norma, vamos a probar que vale la igualdad. Para esto, dado cualquier $\varepsilon > 0$ sea $k = k(\varepsilon)$ tal que $|a_k| > \|a\|_\infty - \varepsilon$ y consideremos la sucesión

$$x^k = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \cdots, 0).$$

Entonces, es claro que $\|x^k\|_2 = 1$ y $\|T_a(x^k)\|_2 = |a_k| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon$ y, por lo tanto vale que $\|T_a\| = \|a\|_\infty$, como queríamos.