Cálculo Avanzado
2do cuatrimestre 2021
Soluciones Segundo Parcial

Ejercicio 1.
Sea X un espacio métrico tal que $\overline{B_r(x)}$ es compacto para cada $x \in X$ y $r > 0$. Sea $f : X \to X$ una función continua. Probar que si A es un conjunto de clase F_σ entonces $f(A)$ es de clase F_σ.

Solución:
Recordemos que un conjunto A es de clase F_σ si es unión numerable de cerrados. Supongamos $A = \cup C_n$ con C_n cerrados. Como $f(A) = f(\cup C_n) = \cup f(C_n)$, si probamos que cada $f(C_n)$ es de clase F_σ habremos terminado (una unión doble numerable, es numerable).

Fijemos un $x \in X$, un C_n y escribamos $C_n = C_n \cap X = C_n \cap \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{B_k(x)} \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (C_n \cap \overline{B_k(x)})$.
Luego $f(C_n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(C_n \cap \overline{B_k(x)})$. Notemos que al ser C_n cerrado y por hipótesis $\overline{B_k(x)}$ compacto, tenemos que $C_n \cap \overline{B_k(x)}$ es cerrado por ser intersección de cerrados, pero además es compacto por ser un cerrado dentro de la bola que es compacta. Como f es continua, $f(C_n \cap \overline{B_k(x)})$ es compacto para cada n y para cada k, y entonces en particular es cerrado. Esto prueba que $f(C_n)$ es de clase F_σ y por lo tanto $f(A)$ también.

Ejercicio 2.
Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} : E \to F$ una sucesión de operadores lineales y continuos tales que para cada $x \in E$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n(x) = 0$. Demostrar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T_m(x) = 0$ para todo $x \in E$.

Solución:
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos los núcleos $K_n = \{x \in E : T_n(x) = 0\} = T_n^{-1}(\{0\})$. Como cada T_n es continuo y $\{0\}$ es cerrado en F, tenemos que K_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis sabemos que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Lo que nos pide probar el ejercicio es que para algún $m \in \mathbb{N}$ se tiene $K_m = E$.

Supongamos que no eso no ocurre. Como cada K_n es un subespacio cerrado de E, si es propio sabemos que debe tener interior vacío. Por el Teorema de Baire (al ser E Banach, es completo) la unión de cerrados de interior vacío debe tener interior vacío. Pero la unión de los K_n es todo el espacio E que no tiene interior vacío, con lo cual tendríamos un absurdo. Por lo tanto, algún K_m no debe ser propio y $K_m = E$ como queríamos.

Si no recordaban que los subespacios cerrados y propios tienen interior vacío, igual se podría resolver el ejercicio (demostrando esto implícitamente): Por Baire, algún K_n tiene interior no vacío. Por ende K_n contiene una bola $B(x, r)$, $r > 0$. Entonces como K_n es el núcleo de una transformación lineal vale que para todo $c \in \mathbb{R}$ $cB(x, r)$ está contenida en K_N. Entonces $K_n = E$.

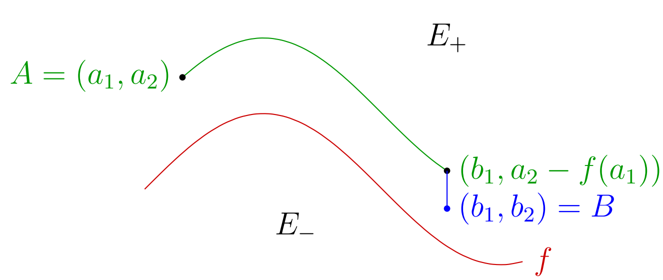
Ejercicio 3.
Probar que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\mathbb{R}^2 - \text{graf}(f)$ tiene exactamente 2 componentes conexas.
Nota: Recordar que $\text{graf}(f) = \{(x, f(x) : x \in \mathbb{R})\}$.

Solución:
En primer lugar notemos que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intuitivamente divide al plano en dos regiones: la de los puntos "por arriba" del gráfico de f y la de los puntos "por abajo". Probaremos que efectivamente esos dos conjuntos son las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \text{graf}(f)$, a saber: $E_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$ y $E_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$.

Como E_+ y E_- son no vacíos, $\mathbb{R}^2 - \text{graf}(f) = E_+ \cup E_-$ y $E_+ \cap E_- = \emptyset$, si mostramos que ambos son conjuntos conexos de R^2 y ADEMÁS mostramos que son cerrados en $\mathbb{R}^2 - \text{graf}(f)$ habremos terminado. Para eso probemos que, más aún, son arcoconexos.
(El ADEMÁS se debe al siguiente ejemplo: $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$).

Para ver que son cerrados, podemos aducir que sus clausuras en $\mathbb{R}^2$ son $\overline{E_+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ y $\overline{E_-} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$. (el detalle de esta demostración lo dejamos de ejercicio básico de continuidad) Y por lo tanto E_+ y E_- son cerrados en $\mathbb{R}^2 - \text{graf}(f)$ por ser intersección de cerrados del espacio ambiente $\mathbb{R}^2$ con el subespacio $\mathbb{R}^2 - \text{graf}(f)$.

Para ver que son arcoconexos, dados $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ puntos de E_+, podemos llegar de uno al otro "surfeando" la función f. Si $a_1 = b_1$ entonces el segmento $a_2 b_2$ está completamente contenido en E_+. Si no podemos suponer $a_1 < b_1$ y, para $x \in [a_1, b_1]$ considerar la función $g(x) = f(x) + a_2 - f(a_1)$, que es mayor a $f(x)$ porque $A \in E_+$, juxtapuesta con el segmento vertical que va desde $(b_1, a_2 - f(a_1))$ hasta (b_1, b_2), completamente contenido en E_+. Esto nos da un camino desde A hasta B, completamente contenido en E_+.



De igual manera se prueba que E_- es arcoconexo y por lo tanto E_+ y E_- son las componentes conexas de $R^2 - \text{graf}(f)$ como queríamos.

Ejercicio 4.
Sea $X = \{(a_n)_n : \frac{1}{n+1} \leq |a_n| \leq \frac{1}{n}\} \subset \ell^\infty$. Decidir si (X, d_∞) es compacto y/o conexo.

Solución:

Daremos tres demostraciones diferentes.

primera demostración: Podemos identificar el conjunto X con un espacio producto: si definimos $X_n = [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}] \cup [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ tenemos que existe una función biyectiva $\phi : X \to \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ dada por $\phi((a_n)_n) = (a_1, a_2, \dots)$. (ojo, ¡esto no significa que sean iguales los conjuntos!).
Si pensamos a (X, d_∞) y $(\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n, d)$ como espacios métricos, donde

$$d((a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}$$

Podemos ver que la función ϕ es un homeomorfismo:

- ϕ continua: si $d((a_n)_n, (b_n)_n) = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |a_j - b_j| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
d(\phi((a_n)_n), \phi((b_n)_n)) &= d((a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \tfrac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} \\
(0 \le |a_n - b_n| \le \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j - b_j|) \quad &\le \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \tfrac{\sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j - b_j|}{1} \\
&= \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j - b_j| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2^n} \\
&= \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j - b_j| \cdot 1 < \delta
\end{aligned}$$

- ϕ^{-1} es continua:

  Sea $\varepsilon > 0$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $|a_n - b_n| \le \frac{2}{n} = \text{diam}(X_n) \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

  Ahora sea $k \le n_0$. Tenemos que $\frac{1}{2^{n_0}} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \le \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}$. Si pedimos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{1}{2^{n_0}}$, despejando de la desigualdad $\frac{1}{2^{n_0}} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{1}{2^{n_0}}$ obtenemos que $|a_k - b_k| < \varepsilon$.

  Es decir, hemos probado que si $d((a_1, a_2, \dots), (b_1, b_2, \dots)) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{1}{2^{n_0}}$ se tiene

$$\begin{aligned}
d_\infty(\phi^{-1}(a_1, a_2, \dots), \phi^{-1}(b_1, b_2, \dots)) &= d_\infty((a_n)_n, (b_n)_n) \\
&= \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j - b_j| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Como cada (X_n, d_∞) es compacto en $\mathbb{R}$ por ser unión de dos intervalos compactos, entonces sabemos que $(\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n, d)$ también será compacto y, al ser ϕ homeomorfismo, $X = \phi^{-1}(\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n)$ también será compacto.
Por otro lado, si X fuera conexo, entonces $\phi(X) = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$ también debería serlo. Más aún, si consideramos la función $\Phi : \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n \to X_1$ que manda $\Phi(a_1, a_2, \dots) = a_1$ es continua (vimos en clase que las proyecciones son continuas y abiertas) y por lo tanto X_1 también debería ser conexo. Esto es un absurdo ya que $X_1 = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ no es conexo en $\mathbb{R}$ porque los únicos conjuntos conexos son los intervalos y X_1 no lo es. El absurdo provino de suponer que X era conexo y por lo tanto, X no es conexo.

Este ejercicio se puede demostrar de al menos otras dos maneras, (en el fondo todas las demostraciones pasaran por lo mismo, y es que "la cola" se achica): Una es demostrando que el conjunto es cerrado y totalmente acotado: Demostrar que es cerrado es sencillo: si una sucesión $((a_n^k)_n)_{k\in\mathbb{N}} \to (a_n)_n$ en ℓ^∞ entonces sus coordenadas convergen, y como las coordenadas verifican la cota $\frac{1}{n+1} \leq |a_n^k| \leq \frac{1}{n}$ su límite también. Es totalmente acotado porque dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, $2/n \leq \varepsilon$ y por ende $diam\{x : \frac{1}{n+1} \leq |x| \leq \frac{1}{n}\} \leq \varepsilon$. Esto nos permite controlar la cola de los elementos de X. mientras que a cada una de las primeras n_0 coordenadas las metemos en el intervalo $[-1,1]$ que es totalmente acotado, y entonces lo podemos cubrir con j_0 conjuntos de diámetro ε, $\{V^1, V^2, \ldots, V^{j_0}\}$. Entonces los conjuntos de la forma

$$V^{r_1} \times V^{r_2} \times \cdots \times V^{r_{n_0}} \times \prod_{n>n_0} (-\varepsilon/2, +\varepsilon/2), \quad \text{con } 1 \leq r_i \leq j_0 \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n_0$$

son de diámetro menor a ε y cubren X.

la otra es posibilidad es demostrar que toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Los detalles de escritura los dejamos de ejercicio, pero la idea es un argumento diagonal de Cantor. Tomamos la sucesión $((a_n^k)_n)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y queremos ver que tiene una subucesión convergente. Por compacidad de la primera coordenada, vemos que existe una subsucesión $((a_n^{k_1})_n)_{k_1\in\mathbb{N}}$ cuya primera coordenada es converegente. hacemos lo mismo con esta subsucesion y nos construimos una subsucesion de esta que converge en la segunda coordenada. Y así siguiendo. El problema es que no podemos tomar la sucesion "límite" pero sí podemos tomar la subsucesión diagonal. O sea, nos quedamos con la subsucesión de la original que tiene como j–ésimo elemento, el j–ésimo elemento de la j–ésima subsucesión que construimos. Resta ver que esta es convergente. los detalles de escritura los dejamos de ejercicio, cargado de subíndices. Pero la idea es la misma que en la demostración anterior, las primeras coordenadas las controlamos por la construcción, mientras que la cola la controlamos porque el diámetro es chico (y entonces siempre las coordenadas de la cola estarán desde un momento en adelante ε cerca del supuesto punto límite.

Ejercicio 5.
Sean X un espacio métrico compacto y conexo, e Y un espacio normado de dimensión finita. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{C}(X,Y)$ equicontinuo, tal que existe $x_0 \in X$ con $\mathcal{F}(x_0)$ acotado. Probar que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto.

Solución:
Como $\mathcal{F}$ es equicontinuo, si probamos que $\mathcal{F}(x)$ es relativamente compacto en Y para cada $x \in X$, tendremos por el Teorema de Arzela–Áscoli que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(X,Y)$. Por hipótesis sabemos que $\mathcal{F}(x_0)$ es acotado, lo cual significa que existe M tal que $||f(x_0)|| < M$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Por otro lado, al ser X compacto la familia $\mathcal{F}$ resulta uniformemente equicontinua (ejercicio de la práctica 9). Esto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,\bar{x}) < \delta$ entonces $||f(x) - f(\bar{x})|| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Sea $x \in X$ fijo. Queremos probar que $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$ es compacto en Y. Como Y es un espacio normado de dimensión finita, basta probar que $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado (esto es porque si es acotado está contenido en alguna bola cerrada, que son compactas por ser Y de dimensión finita, y por lo tanto tendríamos que $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}}$ es un conjunto cerrado dentro de un compacto, y resulta compacto).

Como X es conexo existen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $||x_{i+1} - x_i|| < \delta$ con $x_n = x$, x_0 el del enunciado y δ el encontrado por la uniforme equicontinuidad. Tenemos

$$
\begin{aligned}
||f(x)|| &\leq ||f(x)-f(x_0)|| + ||f(x_0)|| \\
&\leq ||f(x)-f(x_{n-1})|| + ||f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|| + \cdots + ||f(x_1)-f(x_0)|| + ||f(x_0)|| \\
&< \varepsilon \cdot n + M_0
\end{aligned}
$$

Y esto vale para toda $f \in \mathcal{F}$. Es decir, hemos probado que $\mathcal{F}(x)$ es acotado. Como el x es arbitrario, por las observaciones previas, concluimos que $\mathcal{F}(x)$ es relativamente compacto en Y y, por el teorema de Arzela-Áscoli, $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(X,Y)$ como queríamos.

Otra forma quizá más elemental de resolver el ejercicio es demostrar que el conjunto $A = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \text{ es acotado}\}$ es abierto y cerrado y no vacío (esto último es porque por hipótesis $x_0 \in A$). Por conexión se deduce que $A = X$ y luego se sigue como en la demostración anterior. Este enfoque lo dejamos de ejercicio.