Sucesiones

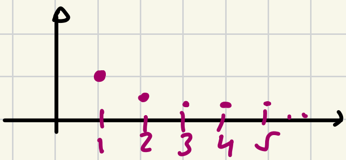
DEF: Una sucesión (en $\mathbb{R}$) es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Notación: $a(n) = a_n \in \mathbb{R}$

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;,\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \;,\; \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

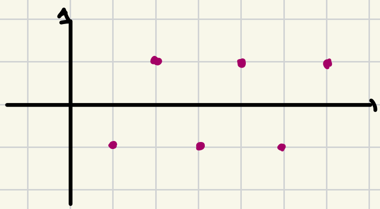
Ejemplos

(1) $a_n = \frac{1}{n}$

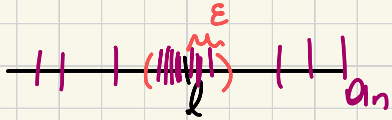


$$a = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots\right)$$

(2) $a_n = (-1)^n$, $a = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$



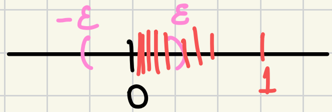
DEF: Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. Decimos que a_n converge a ℓ ($a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$) si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$.



Ejemplo: $a_n = \frac{1}{n}$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar n_0 tal que

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0.$$



$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{\neq 0}$$

Sea n_0 con $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (puedo por ppio de Arq.)

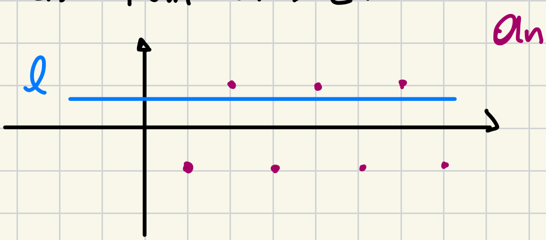
Entonces, si $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$.

· Ejemplo: $a_n = (-1)^n$, probemos que (a_n) <u>No</u> converge.

Conv: $\exists\, \ell \in \mathbb{R}$ tq $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0$ tq $\forall\, n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

<u>No</u> Conv: $\forall\, \ell \in \mathbb{R}\ \exists\, \varepsilon > 0$ tq $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq n_0$

con $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$.



Sea $\ell \in \mathbb{R}$. Hay dos opciones, (1) $\ell \geq 0$ (2) $\ell < 0$.

Supongo $\ell \geq 0$, sea $\varepsilon = 1$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$.

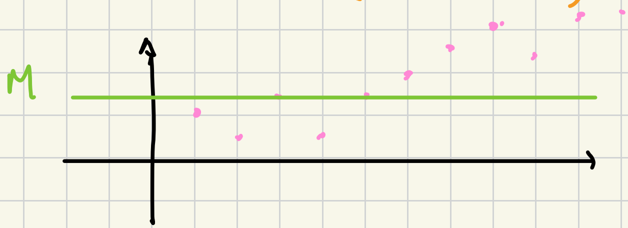
Si n_0 es impar, tomo $n = n_0 \Rightarrow (-1)^n = -1$

y como $\ell \geq 0 \Rightarrow |\ell - a_n| = \ell - (-1) = \ell + 1 \geq 1$.

Si no es par $\Rightarrow$ elijo $n = n_0 + 1$ y hago lo mismo.

<u>Tarea</u>: Hacer el caso $\ell < 0$.

DEF: Decimos que una suc. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge a $\pm\infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty\right)$ si $\forall\ M > 0$ $(\text{ó } M < 0)$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall\ n \geq n_0$, $a_n \geq M$ $(\text{ó } a_n \leq M)$.



Ejemplo: $a_n = n$, $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ (ej).

DEF: Decimos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ diverge si no converge o diverge a $\pm\infty$.

Prop: Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

(1) $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$, $\forall\ c \in \mathbb{R}$

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

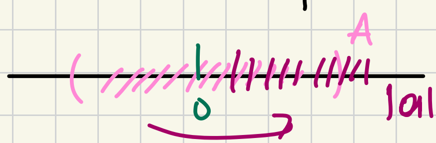
(4) Si $b \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

(5) Si $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (o $n \geq n_0$) $\Rightarrow$ $a \leq b$.

Demo: (Ej).

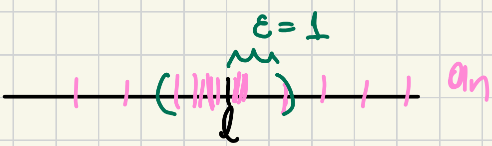
·DEF: Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada si el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es acotado (sup. e inf).

Es decir, si existe $M > 0$ tq $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.



·Prop: Si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ $\Rightarrow (a_n)$ es acotada.

-Demo:



Sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Sea $\varepsilon = 1$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < 1$.

Qvq $|a_n| \leq M$

$|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| < |\ell| + 1$ $\forall n \geq n_0$.

Sea $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |\ell| + 1\}$.

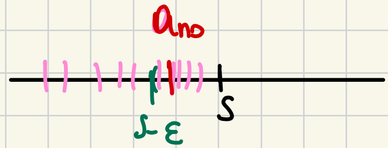
Este M sirve: $|a_n| \leq M$. ∎

DEF: Decimos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente (decreciente) si $n > m \Rightarrow a_n \geq a_m$ ($>$) estricta
$(a_n \leq a_m)$ ($<$)

Prop: Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una suc monótona creciente (decrec) y acotada. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(= i = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Demo: Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada $\Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado sup $\Rightarrow$ existe $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\varepsilon > 0$.



Como $s = \sup(a_n)$, existe a_{n_0} / $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$.

Como (a_n) es monot. creciente, si $n > n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0}$.

Entonces: $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$

$$\Rightarrow \quad |s - a_n| = s - a_n < \varepsilon$$

$\blacksquare$

Prop: Equivalencia del supremo

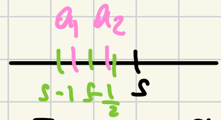
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acot. sup. Entonces $s = \sup(A)$ si y solo si:

(1) s es cota sup.

(2) $\exists (a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A \;/\; \lim_{n\to\infty} a_n = s$.

· Demo :

$\Rightarrow$) $s = \sup(A)$. (1) ✓



Construimos a_n: Sea $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Existe $a_n \in A$

con $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$.

Entonces $|s - a_n| = s - a_n < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ (prop del sandwich).

$\Leftarrow$) s cumple (1) y (2). Que $s = \sup(A)$.

s es cota sup ✓. Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \to s$,

$\exists n_0$ tq si $n \geq n_0 \Rightarrow |s - a_n| < \varepsilon$.

En part, $|s - a_{n_0}| < \varepsilon$. Pero $|a_{n_0} - s| = s - a_{n_0} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$, $a_{n_0} \in A$. ∎

· Subsucesiones

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{100}, a_{101}, \ldots, a_{500}, \ldots$

Me quedo con algunos pero infinitos.

· **DEF**: Sea $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ una suc. Una subsucesión $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ es un subconjunto de (a_n) con la propiedad $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

· **Ejemplo**:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$$

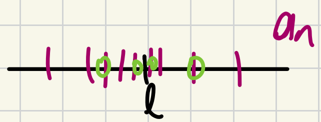
$$a_{n_j} = a_{2j} = \frac{1}{2j} \to (a_{n_j}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

$$a_{n_j} = a_{2j+1} = \frac{1}{2j+1} \to (a_{n_j}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right)$$

No es subsuc: $\left(1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ (no puedo repetir)

No es subsuc: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{100}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ (no los puedo desordenar)

· **Prop**: Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión, y $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ una subsuc. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \ell$.

· **Demo**: 

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq n_0$

$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\ n \geq n_0$.

$(a_1, \underline{a_2}, \underline{a_3}, \dots, a_{n_0}, \underline{a_{n_0+1}}, \dots)$

Sea $n_{j_0} \geq n_0$. Entonces, si $n_j \geq n_{j_0} \Rightarrow |a_{n_j} - \ell| < \varepsilon$

(xq $n_j \geq n_0$). $\blacksquare$