1) Sabemos que (l_1, d_1) es COMPLETO. $A \subseteq l_1$, A es cerrado entonces A es COMPLETO. A es acotado entonces existe $M > 0$ tal que $\forall (x_n)_n \in A$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq M.$$

Un conjunto es COMPACTO si y solo si es COMPLETO y TOTALMENTE ACOTADO. Nuestro objetivo será ver que A es TOTALMENTE ACOTADO.

Queremos ver que dado $\varepsilon > 0$ $\exists X^{(1)}, \dots, X^{(k)} \in l_1$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(X^{(i)}, \varepsilon)$.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por enunciado, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $(a_n)_n \in A$. (Podemos tomar $n_0 > 1$).

Consideremos $(\mathbb{R}^{n_0-1}, \|\cdot\|_1)$. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^{n_0-1}$

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^{n_0-1} \,/\, \|x\|_1 \leq M \}$$

S es acotado (con M una cota) y cerrado puesto que $S = \phi^{-1}([0,M])$ con $\phi : \mathbb{R}^{n_0-1} \to \mathbb{R}$ $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n_0-1} |x_i|$ que es continua.

Como en $\mathbb{R}^{n_0-1}$ los COMPACTOS son los CERRADOS y ACOTADOS (esto vale para cualquier norma ya que son equivalentes)

Se tiene que S es COMPACTO. En particular es totalmente acotado. Luego, $\exists x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_0-1}$ tales que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x^{(i)}, \frac{\varepsilon}{3})$

Para cada $1 \leq i \leq K$ consideramos

$$X^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n_0-1}^{(i)}, 0, 0 \dots) \in l_1$$

Afirmamos que $A \subseteq \bigcup_{K=1}^{K} B(X^{(i)}, \varepsilon)$.

En efecto, sea $(a_n)_n \in A$ y sea $a = (a_1, \dots, a_{n_0-1})$ $a \in \mathbb{R}^{n_0-1}$, más aún como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq M$ se tiene que $a \in S$ pues $\sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| = \|a\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq M$

Luego $\exists\, i_0 \in [\![K]\!]$ tal que $a \in B(x^{(i_0)}, \frac{\varepsilon}{3})$

es decir $\|a - x^{(i_0)}\|_1 = \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n - x_n^{(i_0)}| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Entonces $d_1((a_n)_n, X^{(i_0)}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - X_n^{(i_0)}| =$

$$= \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n - X_n^{(i_0)}| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n - 0| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

por lo que $(a_n)_n \in B(X^{(i_0)}, \varepsilon)$.

Como $(a_n)_n \in A$ era arbitrario, concluimos que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{K} B(X^{(k)}, \varepsilon)$

Luego A es totalmente acotado, y como dijimos al principio también es COMPLETO

$\therefore$ A es COMPACTO

$\boxed{\checkmark}$

2) a) $A \subsetneq X$ entonces $\exists\, x_0 \in X \setminus A$

$B \subsetneq Y$ entonces $\exists\, y_0 \in Y \setminus B$.

Notar que $\forall\, y \in Y$, $(x_0, y) \notin A \times B$ pues $x_0 \notin A$

Analogamente, $\forall\, x \in X$, $(x, y_0) \notin A \times B$.

Para probar que $(A \times B)^c$ es CONEXO, probaremos que tiene una única componente conexa.

Como $(x_0, y_0) \in (A \times B)^c$, bastará ver que

$\underline{C(x_0, y_0)} = (A \times B)^c$

↳ componente conexa de (x_0, y_0) en $(A \times B)^c$

Recordemos que $(z, w) \in X \times Y$ pertenece a la misma componente conexa que (x, y) sii $\exists\, C$ conexo de $X \times Y$ tal que $\{(z,w), (x,y)\} \subseteq C$.

Sea $(z, w) \in (A \times B)^c$, entonces $z \notin A$ o $w \notin B$.

<u>OBSERVACIÓN:</u> $\{x_0\}$ es CONEXO (únicos conjuntos abiertos y cerrados son $\emptyset$ y $\{x_0\}$). Y es conexo entonces (ejercicio 10, PRACTICA 7), $\{x_0\} \times Y$ es conexo.

Como $\{x_0\} \times Y \subseteq (A \times B)^c$ resulta ser un conexo de $(A \times B)^c$. Analogamente, $X \times \{y_0\}$ es un conexo de $(A \times B)^c$.

Supongamos que $z \notin A$. Sea $C_1 = (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$

C_1 es conexo por ser unión de conexos con intersección no vacía: $(x_0, y_0) \in C_1$.

$\{z\} \times Y$ es conexo de $(A \times B)^c$.

Sea $C_2 = C_1 \cup (\{z\} \times Y)$. C_2 es conexo pues $(z, y_0) \in C_1 \cap (\{z\} \times Y)$. Además $C_2 \subseteq (A \times B)^c$

Porque tanto C_1 está contenido en $(A \times B)^c$ como $\{z\} \times Y$. Notar que $\{(z,w), (x_0, y_0)\} \subseteq C_2 \subseteq (A \times B)^c$

Luego $(z, w) \in C(x_0, y_0)$.

Si en cambio $z \in A \Rightarrow w \notin B$. En este caso, $X \times \{w\}$ es un conexo de $(A \times B)^c$ y

$C_3 = C_1 \cup (X \times \{w\})$ es conexo de $(A \times B)^c$

puesto que $(x_0, w) \in C_1 \cap (X \times \{w\})$

y $C_3 \subseteq (A \times B)^c$. Luego $\{(z,w), (x_0, y_0)\} \subseteq C_3$

por lo que $(z, w) \in C(x_0, y_0)$.

Vimos entonces que $\forall (z, w) \in (A \times B)^c$, (z, w) está en la misma componente conexa que (x_0, y_0)

Como estar en una misma componente conexa es una relación de equivalencia, la única componente conexa de $(A \times B)^c$ es $C(x_0, y_0)$

$\therefore (A \times B)^c = C(x_0, y_0)$ y $(A \times B)^c$ es CONEXO. $\blacksquare$

b) Notar que $X \times Y$ no posee puntos aislados ya que si $(x,y) \in X \times Y$ es aislado entonces $\exists\, r>0$ tal que $\{(x,y)\} = B((x,y),r)$. Luego $\{(x,y)\}$ sería abierto y cerrado de $X \times Y$, pero $X \times Y$ es conexo así que los únicos abiertos y cerrados son el vacío y $X \times Y$.

Sea $A = \{x_0, \dots, x_n\}$, $B = \{y_0, \dots, y_m\}$

Sabemos que un espacio métrico conexo con cardinal mayor que 1 no puede tener finitos elementos por lo que $A \subsetneq X$ y $B \subsetneq Y$.

Por item a) $(A \times B)^c$ es conexo. Además

$\{(x_0,y_0), \dots, (x_n,y_m)\} \subseteq A \times B$ por lo que

$$(A \times B)^c \subseteq \{(x_0,y_0), \dots, (x_n,y_m)\}^c \subseteq X \times Y$$

$$\#(A \times B) = (n+1) \times (m+1) \quad \text{i.e. es finito.}$$

Luego todo elemento $(a,b) \in A \times B$ es un punto de acumulación de $(A \times B)^c$ ya que (a,b) no es aislado y entonces para cada $r>0$, $B((a,b),r)$ contiene infinitos puntos de $X \times Y$, luego ha de contener alguno de $(A \times B)^c$ por ser $A \times B$ finito.

Luego $\overline{(A \times B)^c} = X \times Y$. Como $(A \times B)^c$ es conexo y $(A \times B)^c \subseteq \{(x_0,y_0), \dots, (x_n,y_m)\}^c \subseteq \overline{(A \times B)^c}$ se sigue que $\{(x_0,y_0), \dots, (x_n,y_m)\}^c$ es conexo.

3) Sea $T: C^1[-1,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) = f'(0)$

a) Notar que T es lineal: dadas $f, g \in C^1[-1,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ $(f+\lambda g)'(0) = (f' + \lambda g')(0) = f'(0) + \lambda g'(0)$

ie $T(f+\lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$.

Por ejercicio 12, PRÁCTICA 8 T es continua sii $Ker(T)$ es cerrado.

Veamos que $Ker(T) = \{ f \in C^1[-1,1] \ / \ f'(0) = 0 \}$ no es cerrado. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

sea $f_k \in C^1[-1,1]$, $f_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Notar que $f_k'(0) = 0$.

Sea $S_N : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$

$S_N \in C^1[-1,1]$ por ser suma finita de funciones $C^1[-1,1]$. Además, $S_N'(0) = \sum_{k=0}^{N} f_k'(0) = 0$

Luego para cada $N \in \mathbb{N}$ $S_N \in Ker(T)$

Por ejercicio 20 i) de la PRACTICA 9,

$(S_N)_N$ converge uniformemente (y por lo tanto converge en $\|\cdot\|_\infty$) a la función $sen(x)$

sin embargo $sen(x) \notin Ker(T)$ ya que $T(sen(x)) = cos(0) = 1$.

Luego $Ker(T)$ no es cerrado y por lo tanto T no es continua.

b) $\|f\|_{\heartsuit} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$

Veamos que T es continua con $\|\cdot\|_{\heartsuit}$. Para ello veamos que es acotada. (continua $\Leftrightarrow$ acotada)

$\|T(f)\| = |f'(0)| \leq \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{\heartsuit}$

Luego T es acotada y $\|T\| \leq 1$ ya que

$\|T\| = \inf\{c : \|T(f)\| \leq c \cdot \|f\|_{\heartsuit}\}$

Calculemos $\|T\|$. Esto es muy sencillo ya que si f es la función identidad $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \to x$

$f \in C^1[-1,1]$, $\|f\|_\infty = 1$ $f'(x) = 1$ por lo que $\|f'\|_\infty = 1$ con lo cual $\|f\|_{\heartsuit} = 1$ y $|f'(0)| = 1$. Tenemos entonces

$$1 = |f'(0)| \leq \sup_{\|g\|_{\heartsuit}=1} |T(g)| = \|T\| \leq 1$$

Concluimos que $\|T\| = 1$.

4) a_ f está bien definida: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, luego $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2} < +\infty$. Como $\frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2x^2}$

se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} < +\infty$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\therefore$ f está bien definida.

Sea $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$, entonces $f_n'(x) = \frac{-2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} \leq 0$

$f_n'(x) = 0 \iff x = 0$. Si tomamos $r > 0$ y consideramos $\mathbb{R} \setminus [-r, r]$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ converge uniformemente ya que

$\frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{1+n^2r^2}$ (y Aplicando el criterio de Weierstrass).

Sea $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ con f_n definida sobre $\mathbb{R} \setminus [-r, r]$

luego S_N es continua y está acotada ya que es suma de funciones continuas y acotados (f_n es acotada, $|f_n(x)| \leq f_n(0) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$)

Luego $(S_N)_N \subseteq C_b(\mathbb{R} \setminus [-r, r])$ y converge en $\| \cdot \|_\infty$ luego $f_{|\mathbb{R} \setminus [-r,r]}$ es continua.

Esto vale $\forall r > 0$.

Como f es continua sobre $\mathbb{R}\setminus[-r,r]$ (que es abierto para cada $r>0$) y $\mathbb{R}\setminus\{0\} = \bigcup_{r>0} \mathbb{R}\setminus[-r,r]$

se sigue que f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Para ver que es derivable notamos

$$S_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n'(x) \quad \text{con } f_n' \text{ definida en } \mathbb{R}\setminus[-r,r],\ r>0$$

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}\right| \leq \left|\frac{2n^2x}{n^4x^4}\right| = \frac{2}{n^2|x|^3} \leq \frac{2}{n^2 r^3}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r^3 n^2} < +\infty$, por Weierstrass

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente y uniformemente sobre $\mathbb{R}\setminus[-r,r]$ para cada $r>0$

Luego, por teorema visto en clase, como

$(S_N)_N \to f$ y $S_N' \rightrightarrows \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ sobre $\mathbb{R}\setminus[-r,r]$

se tiene que f es derivable sobre $\mathbb{R}\setminus[-r,r]$

y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Esto vale $\forall r>0$.

Como la diferenciabilidad, al igual que la continuidad, es local y como f' es derivable en $\mathbb{R}\setminus[-r,r]$ $\forall r>0$ y

$\mathbb{R}\setminus\{0\} = \bigcup_{r>0} \mathbb{R}\setminus[-r,r]$ se sigue que

f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Veamos que f no es acotada. Sea $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ dada por $x_k = \frac{1}{k^2}$. Luego

$$f(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 \cdot x_k^2} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1+\frac{n^2}{k^2}} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{1+\frac{k^2}{k^2}}$$

$\geq k \cdot \frac{1}{2}$. Tomando lim $k \to \infty$ vemos que $f(x_k) \longrightarrow +\infty$. $\therefore f$ no es acotada.

b) Si la sucesión $(S_N)_N$ convergiera uniformemente en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, tendríamos que la sucesión $(f_n)_n$ con $f_n : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow \frac{1}{1+n^2x^2}$

converge uniformemente a la función nula. Sin embargo, si consideramos la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$, $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ se tiene que $|f_n(x_n)| = \frac{1}{2}$ luego, por ejercicio 1 de la práctica 9, $(f_n)_n$ NO converge UNIFORMEMENTE a la función nula.

$\therefore (S_N)_N$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.