Rocío Bernardini

HOJA N° 1

FECHA

③ $\mathbb{R}[x]$, $\|P\|_{\infty} = \max_{i\in\mathbb{N}_0} |p_i|$ con $(p_i)_i$ los coefs.

B

$\Rightarrow$) hip: ev_b continua $\quad$ q.v.q. $|b|<1$

Sup que $|b|\geq 1$, como ev_b es lineal, si veo que ev_b no es acotada $\Rightarrow ev_b$ no es continua

x ej ⑥ P.8

• $b\geq 1$:

Para $n\in\mathbb{N}$ sea P_n un polinomio tq $p_i = 1$ si $i=0,\dots,n$

y $p_i = 0$ si $i>n$ $(P_n = 1+x+x^2+\dots+x^n)$

$\|P_n\|_{\infty} = 1$ sin embargo, $\|ev_b(P_n)\| = \left|\sum_{i=0}^{n} b^i\right|$ ⊛ $= \sum_{i=0}^{n} |b|^i$ $\quad \geq 1 \Rightarrow b\geq 0$

justifico atrás ⊛ $|b|\geq 1$

$\Rightarrow \nexists M \,/\, \forall P_n \quad \|ev_b(P_n)\| \leq M\|P_n\|_{\infty} = M$ $\quad \|P_n\|_{\infty} = 1$

Luego $\nexists M \,/\, \forall P \quad \|ev_b(P)\| \leq M\|P\|$

• $b\leq -1$: Tomo los $P_{2(n)} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}$

$\Rightarrow \|P_{2n}\|_{\infty} = 1$ sin embargo $\|ev_b(P_{2n})\| = \left|\sum_{i=0}^{n} (b^2)^i\right|$ ⊛ $= \sum_{i=0}^{n} |b|^{2i}$ $\quad \geq 1 \Rightarrow b^2\geq 0$

justifico también ⊛ $|b^2|\geq 1$

$\Rightarrow \nexists M \,/\, \forall P_{2(n)} \quad \|ev_b(P_{2n})\| \leq M\|P_{2n}\|_{\infty} = M$ $\quad \|P_{2n}\|_{\infty} = 1$

Luego $\nexists M \,/\, \forall P \quad \|ev_b(P)\| \leq M\|P\|_{\infty}$

justifico en la sig. hoja (PDF)

$\Leftarrow$) hip: $|b|<1$ $\quad$ q.v.q. ev_b es continua

Como ev_b es lineal, pruebo que ev_b es unif. cont y x ej ⑥ P.8 ev_b es continua.

Sea $\varepsilon>0$, q.v.q. $\exists\delta>0 \,/\,$ si $\|P-Q\|_{\infty}<\delta$

NOTA

$\Rightarrow |ev_b(P) - ev_b(Q)| < \varepsilon$

~~Digo que con $\delta < \varepsilon$ alcanza pues (si $M = gr(P-Q)$)~~

$$\cancel{\|ev_b(P) - ev_b(Q)\| = \|ev_b(P-Q)\| \leq \|P-Q\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{M} b^i}_{<1} \leq \|P-Q\|_\infty} < \varepsilon$$

Si $M = gr(P-Q)$, $\sum_{i=1}^{\infty} |b|^i$ es una serie geométrica con $|b| < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |b|^i$ converge $\therefore$ las sumas parciales están acotadas $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists R > 0 \ / \ \sum_{i=1}^{M} |b|^i < R$. Luego, si $\delta = \frac{\varepsilon}{R}$

$$\|ev_b(P) - ev_b(Q)\| = |P(b) - Q(b)| = |(P-Q)(b)| \leq$$

$$\leq \|P-Q\|_\infty \left|\sum_{i=1}^{M} b^i\right| \leq \|P-Q\|_\infty \sum_{i=1}^{M} |b^i| \leq \|P-Q\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |b|^i}_{\leq R}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon$$

$\therefore$ ev_b es unif. cont.

y por lo tanto $\boxed{ev_b \text{ es continua}}$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ no converge para $r \geq 1$ y por lo tanto, las sumas parciales no están acotadas $\left(\begin{matrix} |b| \geq 1 \\ |b^2| \geq 1 \end{matrix}\right)$

Si $b = 0 \Rightarrow \|ev_0(P)\| = |P(0)| = |a_0| \leq \|P\|_\infty$

↳ término independiente

$\Rightarrow \|ev_0\| = \sup_{P \neq 0} \frac{\|ev_0 P\|}{\|P\|} \leq 1$ y si $P \equiv 1$

$\Rightarrow \|ev_0(1)\| = |1| = 1$ $\therefore$ $\boxed{\|ev_0\| = 1}$

Rocío Bernardini

HOJA N° 2

FECHA

(2) (X, d) conexo y $A, B \subseteq X$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$

B $d_A : X \to \mathbb{R}$ y $d_B : X \to \mathbb{R}$ son (unif.) continuas

(por el ejercicio (11) de la práctica 3)

$\Rightarrow f(x) = d_A(x) - d_B(x)$ (*) es una función continua

(2a) Si $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \phi$: $\exists x \in \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow d_A(x) = 0$ y $d_B(x) = 0$

$\Rightarrow d_A(x) = d_B(x) = 0$ ✓

Sup $\bar{B} \cap \bar{A} = \phi$: $f : X \to \mathbb{R}$ definida en (*) es una función continua en un conexo, ~~luego por TVM~~

Además, si $a \in A$ $\xRightarrow{\text{x ej (24) P.2}}$ $d_A(a) = 0$ y $d_B(a) > 0$ $(\bar{A} \cap \bar{B} = \phi)$

$\Rightarrow f(a) < 0$ y si $b \in B \Rightarrow d_A(b) > 0$ $(\bar{A} \cap \bar{B} = \phi) \to$ x ej (24) P.2

x ej 24 P.2 y $d_B(b) = 0$

$\Rightarrow f(b) > 0$. Luego $f : X \to \mathbb{R}$ continua, X conexo

y $\exists a, b \in X$ / $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, luego x Bolzano (teórica)

$\exists x \in X$ / $f(x) = d_A(x) - d_B(x) = 0$

$$\therefore \boxed{d_A(x) = d_B(x)}$$

NOTA

Justifico bien ej 3 $\Rightarrow$)

$\sum_{i=0}^{\infty} |b^2|^i$ es una serie geométrica y no converge pues $|b^2| \geq |b| \geq 1$

$\downarrow$

$b \geq 1$

Luego sus sumas parciales no convergen

Lo mismo se tiene con

$\sum_{i=0}^{\infty} |b|^i$ que no converge pues $|b| \geq 1$

Luego sus sumas parciales no convergen.

☆ Nota: Gracias por la cursada! Fueron muy buenas clases

~~PD: [illegible]~~

NOTA