Cáculo Avanzado

Primer Cuatrimestre 2016

Primer Parcial - 10/05/2015

Nombre y apellido: LU:

Ejercicio 1. Sea $A = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } z_{n+k} = (z_k)^n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Calcular $\#A$.

Solución. Sea $A_k = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : z_{n+k} = (z_k)^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$. Recordar que una unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Luego, como $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, basta ver que A_k es numerable para cada $k \in \mathbb{N}$ para probar que A también lo es.

Dado $k \in \mathbb{N}$ fijo, veamos la numerabilidad de A_k. Para ello, definimos la función $f : A_k \to \mathbb{Z}^k$ definida como $f((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (z_1, \dots, z_k)$ y vemos que es biyectiva. En primer lugar, es inyectiva, ya que si $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k) = f((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$, entonces $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$: para $i \le k$ esto es inmediato y para $i > k$ se deduce del hecho de que $a_i = a_k^{i-k} = b_k^{i-k} = b_i$. Además, es sobreyectiva: dado $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{Z}^k$, consideramos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la que $a_i = b_i$ si $i \le k$ y $a_i = b_k^{i-k}$ si $i > k$. Por construcción $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A_k$ y se tiene además $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (b_1, \dots, b_k)$, lo cual prueba que f es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. Como ya sabemos que $\mathbb{Z}^k$ es numerable, esto concluye el ejercicio.

Ejercicio 2. Sea $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones de ceros y unos. Sean $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ e } y \text{ difieren en infinitos índices,} \\ \dfrac{k}{k+1} & \text{si } x \text{ e } y \text{ difieren en } k \text{ índices.} \end{cases}$$

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ \dfrac{1}{j} & \text{si } j \text{ es el primer índice donde difieren } x \text{ e } y. \end{cases}$$

a) Probar que d_1 y d_2 son métricas.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, se define $(e^k) \in X$ por $e^k_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$

Calcular la clausura de $A = \{(e^k) : k \in \mathbb{N}\}$ en (X, d_1) y en (X, d_2).

Solución.

a) Veamos que d_1 es una distancia. Probemos sólo la desigualdad triangular, ya que las otras propiedades que debe cumplir una distancia son inmediatas de la definición. Consideremos la función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(t) = \frac{t}{t+1}$. Mediante un análisis de función se puede ver que f es creciente. Luego, si $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(k) \geq f(1) = \frac{1}{2}$. Además, f cumple que $f(k) \leq 1$. Por lo tanto, si $x \neq y$ se tiene que

$$\tfrac{1}{2} \leq d(x, y) \leq 1.$$

Sean $x, y, z \in X$ todos distintos entre si pues caso contrario la desigualdad triangular es trivial. Entonces como $x \neq z$ y $z \neq y$ se tiene que $1/2 \leq d(x, z)$ y $1/2 \leq d(z, y)$ por lo tanto,

$$d(x, y) \leq 1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Luego d_1 es una distancia.

Veamos que d_2 es una distancia. Al igual que antes veamos sólo la desigualdad triangular para $x, y, z \in X$ distintos entre sí. Supongamos que la primer diferencia entre x e y ocurre en el lugar j-ésimo, es decir, $d_2(x, y) = \frac{1}{j}$. Sea k la primer coordenada donde x difiere de z y sea l la primer coordenada donde z difiere de y. Supongamos que z difiere con x antes de la coordenada j-ésima, es decir, $k < j$. Como x es igual a y hasta la coordenada $(j-1)$-ésima, se tendrá que $l = k < j$. Por lo tanto $d(x, y) = \frac{1}{j} < \frac{1}{k} < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = d_2(x, z) + d_2(z, y)$. Si z conincide con x (y, por lo tanto, también con y) en las primeras $j-1$ coordenadas, como $x_j \neq y_j$ debe ser $z_j = x_j$ y $z_j \neq y_j$ o bien $z_j = y_j$ y $z_j \neq x_j$ (recordar que nuestra sucesión sólo toma valores 0 o 1, luego si $x_j \neq y_j$, z_j debe ser igual a una y distinta a la otra). Entonces $d_2(x, y) = \frac{1}{j} = d_2(x, z)$ o bien $d_2(x, y) = \frac{1}{j} = d_2(z, y)$ y por lo tanto, $d_2(x, y) \leq d_2(x, z) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y)$ o bien $d_2(x, y) \leq d_2(z, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y)$ respectivamente.

Concluimos asi que d_2 satisface la desigualdad triangular.

b) Calculemos la clausura del conjunto A en (X, d_1). Vimos que si $x \neq y$, $d_1(x, y) \geq 1/2$. Sea $x \in \overline{A}$. Por definición de clausura, tomando $\varepsilon = 1/2$, se tendrá que $B_{1/2}(x) \cap A \neq \emptyset$. Pero $B_{1/2}(x) = \{x\}$, luego debe ser $x \in A$. Por lo tanto, $A = \overline{A}$. Observar que (X, d_1) es un espacio discreto.

Veamos qué sucede en el caso de d_2. Sabemos que siempre $A \subseteq \overline{A}$. Además, si $(\mathbf{0}) = (0, 0, 0, \dots)$ es la sucesión constantemente 0, entonces $d_2((e^k), (\mathbf{0})) = 1/k \to 0$, es decir, $e^k \to \mathbf{0}$. Por lo tanto, $\mathbf{0} \in \overline{A}$. Veamos que si $x \notin A \cup \{\mathbf{0}\}$, entonces $x \notin \overline{A}$. Sea $x \notin A \cup \{\mathbf{0}\}$, como x no es cero y no es una sucesión canónica, la sucesión x posee al menos dos $1'$s. Supongamos que el primer 1 se encuentra en la coordenada i-ésima y el segundo en la coordenada j-ésima, con $i < j$. Entonces

$d_2(x, e^k) = 1/k$ si $k < i$, $d_2(x, e^k) = 1/j$ si $k = i$ y $d_2(x, e^k) = 1/i$ si $k > i$. En cualquier caso, $d_2(x, e^k) \geq 1/j$ (recordar que j está fijo, depende sólo de x). Es decir, x está a distancia mayor o igual a $1/j$ de cualquier elemento de A, por lo tanto, no existe sucesión en A que lo tenga como límite. Es decir, x no es un punto clausura del conjunto A. Luego, será $\overline{A} = A \cup \{\mathbf{0}\}$.

Ejercicio 3. Sean X e Y espacios métricos y sea $B(X,Y)$ el conjunto de funciones acotadas de X en Y, con la métrica infinito. Dotamos al espacio producto $B(X,Y)\times X$ de la métrica infinito. Se define la *función evaluación* por

$$\mathrm{ev} : B(X,Y)\times X \to Y$$
$$(f,\ x) \longmapsto f(x)$$

Probar que ev es continua en (f,x) si y sólo si f es continua en x.

Solución.
$\Rightarrow$) Para mostrar que f es continua en x alcanza con ver que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \to x$, es $f(x_n) \to f(x)$. Sea entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una tal sucesión. Necesitamos probar que $d(f(x_n), f(x)) \to 0$. Como $d(f(x_n), f(x)) = d(\mathrm{ev}(f,x_n), \mathrm{ev}(f,x))$ y $(f,x_n) \to (f,x)$ en $B(X,Y)\times X$ (puesto que $d((f,x_n),(f,x)) = d(x_n,x)$), la conclusión deseada se sigue de la continuidad de ev en (f,x).

$\Leftarrow$) Nuevamente, tomemos una sucesión $(f_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X,Y)\times Y$ con $(f_n,x_n) \to (f,x)$ (equivalentemente, con $f_n \to f$ y $x_n \to x$) y probemos que $\mathrm{ev}(f_n,x_n) \to \mathrm{ev}(f,x)$. Lo que debemos ver entonces es $d(f_n(x_n), f(x)) \to 0$. Como es de esperar, vamos a utilizar la desigualdad triangular para lograrlo. Intercalando con $f(x_n)$, vemos que

$$d(f_n(x_n), f(x)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x)).$$

El primer sumando converge a 0 porque $f_n \to f$ en $B(X,Y)$ y el segundo porque $x_n \to x$ en X y f es continua en x.

Otra solución.
$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos $\delta > 0$ de manera que $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$ siempre que $d(y,x) < \delta, y \in X$. Reescribiendo para poder usar la hipótesis, lo que necesitamos controlar es $d(\mathrm{ev}(f,y), \mathrm{ev}(f,x))$ para $y \in X$ suficientemente cerca de x. Como ev es continua en (f,x), existe $\delta > 0$ tal que si $(g,y) \in B(X,Y)\times X$ es tal que $d((g,y),(f,x)) < \delta$ entonces $d(\mathrm{ev}(g,y), \mathrm{ev}(f,x)) < \varepsilon$. Tal δ sirve para nuestros propósitos: en efecto, si $y \in X$ satisface $d(y,x) < \delta$ claramente $d((f,y),(f,x)) < \delta$ en $B(X,Y)\times X$ y luego $d(\mathrm{ev}(f,y), \mathrm{ev}(f,x)) = d(f(y), f(x)) < \varepsilon$ por la elección de δ. Por lo tanto f es continua en x.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$. Ahora necesitamos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(\mathrm{ev}(g,y), \mathrm{ev}(f,x)) < \varepsilon$ siempre que $d((g,y),(f,x)) < \delta, (g,y) \in B(X,Y)\times X$. Fijemos $(g,y) \in B(X,Y)\times X$. Para acotar $d(\mathrm{ev}(g,y), \mathrm{ev}(f,x)) = d(g(y), f(x))$ usaremos la desigualdad triangular intercalando un punto que nos permita controlar todos los términos involucrados. El valor que sirve es $f(y)$. En efecto:

- $d(g(y), f(y))$ está acotado por $d(g,f)$ en $B(X,Y)$ y eso lo podemos hacer arbitrariamente chico pidiendo que (g,y) esté suficientemente cerca de (f,x).

- $d(f(y), f(x))$ también es arbitrariamente chico si y está cerca de x pues f es continua en x por hipótesis. Esto también lo podemos lograr si (g,y) está suficientemente cerca de (f,x).

A partir de acá, una cuenta rutinaria del estilo $\frac{\varepsilon}{2}$ muestra que $d(\mathrm{ev}(g,y),\mathrm{ev}(f,x)) < \varepsilon$ si $d((g,y),(f,x)) < \delta$ para un δ apropiado.

Nota: El otro "candidato" natural para intercalar era $g(x)$. Fíjense que eso no funciona bien porque no podemos controlar $d(g(y),g(x))$ en términos d la distancia de (g,y) a (f,x).

Ejercicio 4. Sea $\varphi : A \to B$ un homeomorfismo local (es decir, para todo $a \in A$, existe $U \subseteq A$ abierto tal que $a \in U$ y $\varphi|_U : U \to \varphi(U)$ es homeomorfismo). Dado X un espacio métrico, sean $f, g : X \to A$ funciones continuas tales que $\varphi \circ f = \varphi \circ g$. Probar que si X es conexo, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ o $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in X$.

Solución. Consideramos el conjunto $Y = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. El ejercicio nos pide probar que Y es o bien todo X o bien el conjunto vacío. Como el espacio X es conexo, para ver esto alcanza con probar que Y es abierto y cerrado en X. Veamos esto.

En primer lugar, probemos que Y es cerrado en X. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de Y con $x_n \longrightarrow x \in X$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n \in Y$, entonces $f(x_n) = g(x_n)$. Ahora bien, la continuidad de las funciones f y g nos asegura que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ y que $g(x_n) \longrightarrow g(x)$. Juntando estos hechos, obtenemos que $f(x) = g(x)$ por unicidad del límite, y así $x \in Y$. Esto prueba que Y es cerrado en X.

Veamos ahora que Y es abierto en X. Supongamos $x \in Y$: sabemos entonces que $f(x) = g(x)$. Como φ es un homeomorfismo local, existe un abierto $U \subseteq A$ que contiene a $f(x)$ de modo que $\varphi|_U : U \to \varphi(U)$ es un homeomorfismo. Como U es abierto en X, existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$. Además, f y g son funciones continuas, por lo que existe un radio $\delta > 0$ de modo que si $y \in X$ es tal que $d_X(x,y) < \delta$ entonces $d_A(f(x),f(y)) < \varepsilon$ y $d_A(g(x),g(y)) < \varepsilon$. Como $f(x) = g(x)$, esto nos dice que la imagen de $B_\delta(x)$ por tanto la función f como la función g cae dentro de $B_\varepsilon(f(x))$ y por lo tanto dentro de U. De este modo, tenemos que

$$\varphi|_U \circ f(B_\delta(x)) = \varphi \circ f(B_\delta(x)) = \varphi \circ g(B_\delta(x)) = \varphi|_U \circ g(B_\delta(x)).$$

Aplicando $\varphi|_U^{-1}$ a las puntas de esta igualdad, obtenemos $f(B_\delta(x)) = g(B_\delta(x))$ y de este modo probamos que $B_\delta(x) \subseteq Y$, por lo que Y es abierto en X.

Una pequeña observación: el razonamiento del final se puede adaptar para probar el resultado incluso aunque φ no sea un homeomorfismo local: solamente hace falta que sea localmente inyectiva.

Ejercicio 5. Probar que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solución. Supongamos que existe una función f que verifica las condiciones del enunciado. La imagen de f es la unión de $f(\mathbb{Q})$, que es a lo sumo numerable por ser imagen de un conjunto numerable, y $f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, que también es a lo sumo numerable pues está contenido en los racionales. Por lo tanto, la imagen de f es a lo sumo numerable. Ahora bien, como $\mathbb{R}$ es conexo y f es continua, $f(\mathbb{R})$ es un espacio conexo y a lo sumo numerable. Por otro lado, sabemos que un espacio conexo que contiene más de un punto tiene cardinal mayor o igual a c (este es el ejercicio 6 de la práctica de conexión). Estos dos hechos nos dicen que la imagen de f consiste de un único punto; en otras palabras, f debe ser una función constante, lo cual contradice el hecho de que f intercambia racionales con irracionales.

Otra solución: Supongamos de nuevo que existe una función f que cumple las condiciones del enunciado. Si $q \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) \neq qx$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, si x es racional entonces qx también, pero $f(x)$ no; una situación similar ocurre si x es irracional. En otras palabras, la función $x \mapsto f(x) - qx$, que es continua, no se anula: por lo tanto, por el teorema de valor medio sabemos que o bien $f(x) > qx$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o bien $f(x) < qx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Llamemos $m = f(1)$ y consideremos racionales q, q' de modo que $q < m < q'$. Las desigualdades $qx < f(x) < q'x$ valen en $x = 1$ y la observación previa nos asegura que valen para todo $x \in \mathbb{R}$. Acercándonos a m por izquierda con racionales q y por derecha con racionales q' y tomando límite obtenemos que $f(x) = mx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Obviamente $m \neq 0$ pues de lo contrario f sería constante y no verificaría las condiciones del enunciado. Pero si $m \neq 0$, entonces f es una biyección, y en particular induce biyecciones entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, lo cual es una contradicción.