Cálculo Avanzado - 1° Cuatrimestre 2019
Recuperatorio del 1° parcial (12/07/2019)

1. *a)* Sean A,A',B y B' conjuntos. Probar que si $\#(A') = \#(A)$ y $\#(B') = \#(B)$, entonces

$$\#\{f : A \to B | f \text{ es inyectiva}\} = \#\{f : A' \to B' | f \text{ es inyectiva}\}.$$

   b) Calcular $\#\{f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q} | f \text{ es inyectiva}\}$.

2. Sea (X, d) un espacio métrico y $F \subset X$ cerrado.

   a) Probar que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X \,:\, d(x, F) < \frac{1}{n}\}$.

   b) Pobar que F tiene interior vacío si y sólo si existe un abierto $U \subset X$ tal que $F = \partial U$.

3. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Dada $f : X \to Y$ inyectiva definimos en X la distancia $d_f(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$.*

   a) Probar que si $f : X \to Im(f)$ es un homeomorfismo entonces d_f resulta topológicamente equivalente a d_X.

   b) Probar que si f es sobreyectiva e Y es completo entonces (X, d_f) lo es.

   c) Mostrar un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to Im(f)$ tal que $(\mathbb{R}, d_f)$ no resulte completo.

4. Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continuas y acotadas. Probar que $f.g$ es uniformemente continua. Mostrar que el producto de funciones uniformemente continuas puede no serlo incluso si una de ellas está acotada.

   Sugerencia: Considerar la función $x\,\mathrm{sen}(x)$.

5. Sea (X, d) un espacio métrico acotado y separable. Para cada $x \in X$ definimos la función f_x como $f_x(y) = d(x, y)$. Probar que $\mathcal{F} = \{f_x \,:\, x \in X\}$ es un subespacio separable de $(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$.

   Observación: $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ es el conjunto de funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.
Para aprobar el examen es suficiente resolver correctamente tres ejercicios.
Si desea citar un resultado de la guía práctica consulte o incluya una demostración.