1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido: ....

N° de libreta: ....

Cálculo Avanzado

Segundo parcial - 12/07/13

1) Sean $X; Y; Z$ espacios métricos, X compacto. Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, y sea $g : Y \to Z$ una función. Probar que si $g \circ f : X \to Z$ es continua, entonces g es continua.

2) *a*) Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{R}$ y sea $H \subset E$ un hiperplano. Probar que si H es separable, entonces E es separable.

   b) Sea c el espacio de sucesiones convergentes de números reales, provisto de la norma infinito. ¿Es c un espacio métrico separable?

3) Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal con la siguiente propiedad: para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ que converge a 0, la sucesión $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ es acotada. Probar que T es continuo.

4) Sea H un espacio de Hilbert y sea $T : H \to H$ un operador lineal. Probar que

$$||T|| = \sup_{||x||=||y||=1} |\langle y, Tx\rangle|.$$

5) Sea (X, d) un espacio métrico completo, y sea $T : X \to X$ una función continua con la siguiente propiedad: para todos $x, y \in X$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} d(T^n(x), T^n(y))$ es convergente. Probar que T tiene un único punto fijo.

Justifique todas las respuestas