

Cálculo Numérico

Clase Práctica, 19 de Abril de 2021
Martín Maas

Comentarios práctica 3: estabilidad.
Iniciamos práctica 4: resolución de sistemas lineales.

Problemas de valores de contorno

Problema continuo \longrightarrow Problema discreto

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{xx}(x) = f(x), \quad \text{para } x \in (0, 1) \\ U(0) = \alpha \\ U(1) = \beta. \end{array} \right. \quad A^h u^h = F^h$$

Malla uniforme $\{x_j = hj, j = 0, 1, 2, \dots, m+1\}$ con $h = 1/(m+1)$.

Diferencias centradas $\frac{1}{h^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = f(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m.$

Formulación matricial

$$\frac{1}{h^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = f(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m.$$



$$A^h u^h = F^h$$

$$A^h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad F^h = \begin{bmatrix} f(x_1) - \alpha/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Esto se implementa resolviendo una matriz (grande)

Estabilidad

Alan Turing a Wilkinson, alrededor de 1942:

“Vos siempre me hablás de la estabilidad pero cada vez que venís me decís una cosa distinta”

Comentario: Cada problema numérico (problemas de valores iniciales, de valores de contorno, sistemas lineales, PDE, etc) tiene una definición de estabilidad **apropiada al problema**.

Convergencia = Consistencia + Estabilidad

ej. truncado
local $O(h^p)$

Lipschitz, normas

Práctica 3: Ejercicio 10

Se desea resolver la ecuación $u_t = \alpha u_{xx}$ con $\alpha > 0$ y borde Dirichlet homogéneo.

Para ello se emplea el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

(a) Estudiar estabilidad en norma infinito

(b) Probar que el error de truncado es $O(\Delta t) + O(h^2)$

Práctica 3: Ejercicio 10

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

(a) Estudiar estabilidad en norma infinito

Definición: (estabilidad fuerte en norma infinito)

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$$

$$u^{n+1} = Au^n \quad \|A\|_\infty \leq 1$$

$$u_j^n = u_j^{n+1} - r\alpha (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

$$(1 + 2r\alpha)u_j^{n+1} = r\alpha (u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + u_j^n$$

$$(1 + 2r\alpha)\|u^{n+1}\|_\infty \leq r\alpha (\|u^{n+1}\|_\infty + \|u^{n+1}\|_\infty) + \|u^n\|_\infty$$

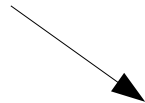
$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$$

Práctica 3: Ejercicio 10

Se desea resolver la ecuación $u_t = \alpha u_{xx}$ con $\alpha > 0$ y borde Dirichlet homogéneo. Para ello se emplea el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})$$

- (a) Estudiar estabilidad en norma infinito
- (b) Probar que el error de truncado es $O(\Delta t) + O(h^2)$



R_m^{n+1} en la clase teórica 7, páginas 66-72