Unidad 6: Interpolación

Carlos Alliera (calliera@dm.uba.ar)

17 de mayo de 2021

Problema

Tenemos $n+1$ puntos en el plano $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < ... < x_n$ queremos construir un polinomio $P \in \mathbb{K}_n[x]$ tal que

$$P(x_k) = y_k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Al polinomio que verifica lo pedido se lo llama **Polinomio interpolador.**

Visto de otra forma, buscamos los coeficientes $a_k \in \mathbb{K}$ de

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

que pueden verse como el resultado del siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Problema

Tenemos $n+1$ puntos en el plano $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < ... < x_n$ queremos construir un polinomio $P \in \mathbb{K}_n[x]$ tal que

$$P(x_k) = y_k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Al polinomio que verifica lo pedido se lo llama **Polinomio interpolador.**

Visto de otra forma, buscamos los coeficientes $a_k \in \mathbb{K}$ de

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

que pueden verse como el resultado del siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Problema

Tenemos $n+1$ puntos en el plano $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < ... < x_n$ queremos construir un polinomio $P \in \mathbb{K}_n[x]$ tal que

$$P(x_k) = y_k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Al polinomio que verifica lo pedido se lo llama **Polinomio interpolador.**

Visto de otra forma, buscamos los coeficientes $a_k \in \mathbb{K}$ de

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

que pueden verse como el resultado del siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Problema

Tenemos $n+1$ puntos en el plano $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < ... < x_n$ queremos construir un polinomio $P \in \mathbb{K}_n[x]$ tal que

$$P(x_k) = y_k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Al polinomio que verifica lo pedido se lo llama **Polinomio interpolador.**

Visto de otra forma, buscamos los coeficientes $a_k \in \mathbb{K}$ de

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

que pueden verse como el resultado del siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

Problema

Tenemos $n+1$ puntos en el plano $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ tales que $x_0 < x_1 < ... < x_n$ queremos construir un polinomio $P \in \mathbb{K}_n[x]$ tal que

$$P(x_k) = y_k, \quad 0 \leq k \leq n$$

Al polinomio que verifica lo pedido se lo llama **Polinomio interpolador.**

Visto de otra forma, buscamos los coeficientes $a_k \in \mathbb{K}$ de

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

que pueden verse como el resultado del siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

La Matriz de Vandermonde

Para resolver el problema antes planteado, consideramos un sistema lineal de la forma $V \cdot \overrightarrow{a} = y$ donde $V \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$, $a, y \in \mathbb{K}^{n+1}$ que tiene esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz V se conoce como **Matriz de Vandermonde**[1]

Propiedad

El sistema $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$ tiene solución unica cuando los x_k son todos distintos. Es decir, V es inversible si $x_k \neq x_j$ si $k \neq j$.

[1] Músico y químico frances 1735-1796

La Matriz de Vandermonde

Para resolver el problema antes planteado, consideramos un sistema lineal de la forma $V \cdot \overrightarrow{a} = y$ donde $V \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$, $a, y \in \mathbb{K}^{n+1}$ que tiene esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz V se conoce como **Matriz de Vandermonde**[1]

Propiedad

El sistema $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$ tiene solución unica cuando los x_k son todos distintos. Es decir, V es inversible si $x_k \neq x_j$ si $k \neq j$.

[1] Músico y químico frances 1735-1796

La Matriz de Vandermonde

Para resolver el problema antes planteado, consideramos un sistema lineal de la forma $V \cdot \overrightarrow{a} = y$ donde $V \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$, $a, y \in \mathbb{K}^{n+1}$ que tiene esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz V se conoce como **Matriz de Vandermonde**[1]

Propiedad

El sistema $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$ tiene solución unica cuando los x_k son todos distintos. Es decir, V es inversible si $x_k \neq x_j$ si $k \neq j$.

[1] Músico y químico frances 1735-1796

La Matriz de Vandermonde

Para resolver el problema antes planteado, consideramos un sistema lineal de la forma $V \cdot \overrightarrow{a} = y$ donde $V \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$, $a, y \in \mathbb{K}^{n+1}$ que tiene esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz V se conoce como **Matriz de Vandermonde**[1]

Propiedad

El sistema $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$ tiene solución unica cuando los x_k son todos distintos. Es decir, V es inversible si $x_k \neq x_j$ si $k \neq j$.

[1] Músico y químico frances 1735-1796

Ejemplo 1

Calcule el polinomio de menor grado que interpole los puntos:

$$(-1;-7),\ (1;3),\ (2;5)$$

Al tratarse de 3 puntos, entonces buscamos un polinomio de grado a lo sumo 2. Directamente planteamos el modelo matricial $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Al resolver, se obtiene:

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -1$$

$$\therefore \quad \boxed{P(x) = -1 + 5x - x^2}$$

Ejemplo 1

Calcule el polinomio de menor grado que interpole los puntos:

$$(-1;-7),\ (1;3),\ (2;5)$$

Al tratarse de 3 puntos, entonces buscamos un polinomio de grado a lo sumo 2.
Directamente planteamos el modelo matricial $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Al resolver, se obtiene:

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -1$$

$$\therefore \quad \boxed{P(x) = -1 + 5x - x^2}$$

Ejemplo 1

Calcule el polinomio de menor grado que interpole los puntos:

$$(-1; -7),\ (1; 3),\ (2; 5)$$

Al tratarse de 3 puntos, entonces buscamos un polinomio de grado a lo sumo 2. Directamente planteamos el modelo matricial $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Al resolver, se obtiene:

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -1$$

$$\therefore \quad \boxed{P(x) = -1 + 5x - x^2}$$

Ejemplo 1

Calcule el polinomio de menor grado que interpole los puntos:

$$(-1;-7),\ (1;3),\ (2;5)$$

Al tratarse de 3 puntos, entonces buscamos un polinomio de grado a lo sumo 2. Directamente planteamos el modelo matricial $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Al resolver, se obtiene:

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -1$$

$$\therefore \quad \boxed{P(x) = -1 + 5x - x^2}$$

Ejemplo 1

Calcule el polinomio de menor grado que interpole los puntos:

$$(-1;-7),\ (1;3),\ (2;5)$$

Al tratarse de 3 puntos, entonces buscamos un polinomio de grado a lo sumo 2. Directamente planteamos el modelo matricial $V \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Al resolver, se obtiene:

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = -1$$

$$\therefore \quad \boxed{P(x) = -1 + 5x - x^2}$$

Ejemplo 2: Condiciones sobre la derivada

Hallar el polinomio de menor grado tal que

$$P(-1) = 13, \quad P(2) = 11, \quad P(3) = 51, \quad P'(1) = 8$$

En este caso buscamos un polinomio de grado a lo sumo 3 que cumpla lo pedido. Si se plantea:

$$P(X) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

nos queda el siguiente sistema de *ecuaciones lineales*:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 13 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 11 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 51 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 8 \end{cases}$$

Ejemplo 2: Condiciones sobre la derivada

Hallar el polinomio de menor grado tal que

$$P(-1) = 13, \quad P(2) = 11, \quad P(3) = 51, \quad P'(1) = 8$$

En este caso buscamos un polinomio de grado a lo sumo 3 que cumpla lo pedido. Si se plantea:

$$P(X) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

nos queda el siguiente sistema de *ecuaciones lineales*:

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 13 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 11 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 51 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 8 \end{cases}$$

Ejemplo 2

En este caso nos queda el siguiente planteo matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 51 \\ 8 \end{pmatrix}$$

tras aplicar un método de resolución de nuestra preferencia, se tiene:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P(x) = 2x^3 + 2x - 9}$$

Ejemplo 2

En este caso nos queda el siguiente planteo matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 51 \\ 8 \end{pmatrix}$$

tras aplicar un método de resolución de nuestra preferencia, se tiene:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P(x) = 2x^3 + 2x - 9}$$

Teorema

Dados $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ distintos y $y_0, y_1, ..., y_n \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio de grado a lo sumo n tal que

$$P(x_j) = y_j \quad \forall \quad j = 0, ..., n$$

Base de Lagrange

Dados $n+1$ pares (x_j, y_j), $j = 0, 1, ..., n$ se definen los polinomios ℓ_j tales que

$$\ell_j(x_j) = 1 \qquad \& \;\; \ell_j(x_k) = 0 \;\; \text{si} \;\; k \neq j$$

Teorema

Dados $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ distintos y $y_0, y_1, ..., y_n \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio de grado a lo sumo n tal que

$$P(x_j) = y_j \quad \forall \quad j = 0, ..., n$$

Base de Lagrange

Dados $n+1$ pares (x_j, y_j), $j = 0, 1, ..., n$ se definen los polinomios ℓ_j tales que

$$\ell_j(x_j) = 1 \qquad \& \ \ \ell_j(x_k) = 0 \ \text{ si } \ k \neq j$$

Teorema

Dados $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ distintos y $y_0, y_1, ..., y_n \in \mathbb{K}$. Existe un único polinomio de grado a lo sumo n tal que

$$P(x_j) = y_j \quad \forall \quad j = 0, ..., n$$

Base de Lagrange

Dados $n+1$ pares (x_j, y_j), $j = 0, 1, ..., n$ se definen los polinomios ℓ_j tales que

$$\ell_j(x_j) = 1 \qquad \& \;\; \ell_j(x_k) = 0 \;\; \text{si} \;\; k \neq j$$

Base de Lagrange

Así nos quedan $n+1$ polinomios de grado n definidos de esta manera:

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{k \neq j}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j}^{n} (x_j - x_k)}$$

Estos polinomios forman la *Base de Lagrange*:

$$\mathcal{B} := \{\ell_0, \ell_1, ..., \ell_n\}$$

y dependen de las x_j de los puntos a interpolar.

Polinomio Interpolador de Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x)$$

Base de Lagrange

Así nos quedan $n+1$ polinomios de grado n definidos de esta manera:

$$\ell_j(x) = \frac{\prod_{k\neq j}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k\neq j}^{n}(x_j - x_k)}$$

Estos polinomios forman la *Base de Lagrange*:

$$\mathcal{B} := \{\ell_0, \ell_1, ..., \ell_n\}$$

y dependen de las x_j de los puntos a interpolar.

Polinomio Interpolador de Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x)$$

Base de Lagrange

Así nos quedan $n+1$ polinomios de grado n definidos de esta manera:

$$\ell_j(x) = \frac{\prod\limits_{k\neq j}^{n}(x - x_k)}{\prod\limits_{k\neq j}^{n}(x_j - x_k)}$$

Estos polinomios forman la *Base de Lagrange*:

$$\mathcal{B} := \{\ell_0, \ell_1, ..., \ell_n\}$$

y dependen de las x_j de los puntos a interpolar.

Polinomio Interpolador de Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x)$$

Ejemplo 3

Hallar el polinomio de grado mínimo tal que $P(x_k) = y_k$:

Valores x_k	1	-1	3	5
Valores y_k	4	20	-4	-52

Calculemos la base de Lagrange:

$$\ell_0(x) = \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1-(-1))(1-3)(1-5)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}{16}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} = \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{-48}$$

Ejemplo 3

Hallar el polinomio de grado mínimo tal que $P(x_k) = y_k$:

Valores x_k	1	-1	3	5
Valores y_k	4	20	-4	-52

Calculemos la base de Lagrange:

$$\ell_0(x) = \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1-(-1))(1-3)(1-5)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}{16}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} = \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{-48}$$

Ejemplo 3

Hallar el polinomio de grado mínimo tal que $P(x_k) = y_k$:

Valores x_k	1	-1	3	5
Valores y_k	4	20	-4	-52

Calculemos la base de Lagrange:

$$\ell_0(x) = \frac{(x+1)(x-3)(x-5)}{(1-(-1))(1-3)(1-5)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}{16}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} = \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{-48}$$

Ejemplo 3

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-5)}{(3-1)(3-(-1))(3-5)} = \frac{x^3-5x^2-x+5}{-16}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-3)}{(5-1)(5-(-1))(5-3)} = \frac{x^3-3x^2-x+3}{48}$$

entonces,

$$P(x) = 4\ell_0(x) + 20\ell_1(x) - 4\ell_2(x) - 52\ell_3(x) = -x^3 + 4x^2 - 7x + 8$$

Ejemplo 3

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-5)}{(3-1)(3-(-1))(3-5)} = \frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{-16}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-3)}{(5-1)(5-(-1))(5-3)} = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{48}$$

entonces,

$$P(x) = 4\ell_0(x) + 20\ell_1(x) - 4\ell_2(x) - 52\ell_3(x) = -x^3 + 4x^2 - 7x + 8$$

Ejemplo 3

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-5)}{(3-1)(3-(-1))(3-5)} = \frac{x^3-5x^2-x+5}{-16}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-3)}{(5-1)(5-(-1))(5-3)} = \frac{x^3-3x^2-x+3}{48}$$

entonces,

$$P(x) = 4\ell_0(x) + 20\ell_1(x) - 4\ell_2(x) - 52\ell_3(x) = -x^3 + 4x^2 - 7x + 8$$

Ejemplo 3

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-5)}{(3-1)(3-(-1))(3-5)} = \frac{x^3-5x^2-x+5}{-16}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-3)}{(5-1)(5-(-1))(5-3)} = \frac{x^3-3x^2-x+3}{48}$$

entonces,

$$P(x) = 4\ell_0(x) + 20\ell_1(x) - 4\ell_2(x) - 52\ell_3(x) = -x^3 + 4x^2 - 7x + 8$$

Interpolación de funciones

Muchas veces se busca interpolar una función f definida en un intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$, es decir, dados $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ $n+1$ valores distintos, buscamos un polinomio de grado a lo sumo n que interpole a f en esos valores:

$$\boxed{P(x_k) = f(x_k)}$$

Observación

Si f es un polinomio de grado a lo sumo n, y el polinomio P interpola a f en $n+1$ puntos distintos de un intervalo, entonces

$$P(x) = f(x) \ \forall \ x$$

Interpolación de funciones

Muchas veces se busca interpolar una función f definida en un intervalo $[a,b] \subset Dom(f)$, es decir, dados $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ $n+1$ valores distintos, buscamos un polinomio de grado a lo sumo n que interpole a f en esos valores:

$$\boxed{P(x_k) = f(x_k)}$$

Observación

Si f es un polinomio de grado a lo sumo n, y el polinomio P interpola a f en $n+1$ puntos distintos de un intervalo, entonces

$$P(x) = f(x)\ \forall\ x$$

Interpolación de funciones

Muchas veces se busca interpolar una función f definida en un intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$, es decir, dados $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ $n+1$ valores distintos, buscamos un polinomio de grado a lo sumo n que interpole a f en esos valores:

$$\boxed{P(x_k) = f(x_k)}$$

Observación

Si f es un polinomio de grado a lo sumo n, y el polinomio P interpola a f en $n+1$ puntos distintos de un intervalo, entonces

$$P(x) = f(x) \ \forall \ x$$

Interpolación de funciones

Muchas veces se busca interpolar una función f definida en un intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$, es decir, dados $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ $n+1$ valores distintos, buscamos un polinomio de grado a lo sumo n que interpole a f en esos valores:

$$\boxed{P(x_k) = f(x_k)}$$

Observación

Si f es un polinomio de grado a lo sumo n, y el polinomio P interpola a f en $n+1$ puntos distintos de un intervalo, entonces

$$P(x) = f(x) \ \forall \ x$$

Consideremos $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Diferencias Divididas

- **Primera Diferencia Dividida**

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- **Segunda Diferencia Dividida**

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- ...
- **$k-$ésima Diferencia Dividida**

$$f[x_0, ..., x_k] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_k] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Consideremos $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Diferencias Divididas

- **Primera Diferencia Dividida**

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- **Segunda Diferencia Dividida**

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- ...
- $k-$**ésima Diferencia Dividida**

$$f[x_0, ..., x_k] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_k] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Interpolación de Newton

Con lo anterior[2] podemos definir por recurrencia la siguiente lista de polinomios:

$$P_0(x) = f(x_0)$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) = P_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$P_2(x) = P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_k(x) = P_{k-1} + f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$$

Así siguiendo, se obtiene un polinomio de grado a lo sumo n representado por

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(f[x_0, x_1] + (x - x_1)\left(f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)\left(... + f[x_0, ..., x_n](x - x_{n-1})\right)\right)\right)$$

que se conoce como el **Polinomio Interpolador de Newton**.

[2] Consideremos que $f[x_0] = f(x_0)$

Ejemplo 4

Hallar el polinomio de grado mínimo tal que $P(x_k) = f(y_k)$:

x_k	-1	0	1	3
$f(x_k)$	-9	4	13	139

Calculamos las diferencias divididas necesarias.

Primer orden

$$f[-1,0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{4 - (-9)}{1} = 13$$

$$f[0,1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{13 - 4}{1} = 9$$

$$f[1,3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{139 - 13}{2} = 63$$

Ejemplo 4

Hallar el polinomio de grado mínimo tal que $P(x_k) = f(y_k)$:

x_k	-1	0	1	3
$f(x_k)$	-9	4	13	139

Calculamos las diferencias divididas necesarias.

Primer orden

$$f[-1,0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{4 - (-9)}{1} = 13$$

$$f[0,1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{13 - 4}{1} = 9$$

$$f[1,3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{139 - 13}{2} = 63$$

Ejemplo 4

Hallar el polinomio de grado mínimo tal que $P(x_k) = f(y_k)$:

x_k	-1	0	1	3
$f(x_k)$	-9	4	13	139

Calculamos las diferencias divididas necesarias.
Primer orden

$$f[-1,0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{4 - (-9)}{1} = 13$$

$$f[0,1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{13 - 4}{1} = 9$$

$$f[1,3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{139 - 13}{2} = 63$$

Ejemplo 4

Segundo orden

$$f[-1,0,1] = \frac{f[0,1]-f[-1,0]}{1-(-1)} = \frac{9-13}{2} = -2$$

$$f[0,1,3] = \frac{f[1,3]-f[0,1]}{3-0} = \frac{63-9}{3} = 18$$

Tercer orden

$$f[-1,0,1,3] = \frac{f[0,1,3]-f[-1,0,1]}{3-(-1)} = \frac{18-(-2)}{4} = 5$$

Aplicamos la fórmula de Newton:

$$P(x) = f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)(x-0) + f[-1,0,1,3](x+1)(x-0)(x-1) =$$

$$= -9 + 13(x+1) - 2(x+1)x + 5(x+1)x(x-1) = 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4$$

que es el polinomio que cumple lo pedido.

Ejemplo 4

Segundo orden

$$f[-1,0,1] = \frac{f[0,1]-f[-1,0]}{1-(-1)} = \frac{9-13}{2} = -2$$

$$f[0,1,3] = \frac{f[1,3]-f[0,1]}{3-0} = \frac{63-9}{3} = 18$$

Tercer orden

$$f[-1,0,1,3] = \frac{f[0,1,3]-f[-1,0,1]}{3-(-1)} = \frac{18-(-2)}{4} = 5$$

Aplicamos la fórmula de Newton:

$$P(x) = f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)(x-0) + f[-1,0,1,3](x+1)(x-0)(x-1) =$$

$$= -9 + 13(x+1) - 2(x+1)x + 5(x+1)x(x-1) = 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4$$

que es el polinomio que cumple lo pedido.

Ejemplo 4

Segundo orden

$$f[-1,0,1] = \frac{f[0,1] - f[-1,0]}{1-(-1)} = \frac{9-13}{2} = -2$$

$$f[0,1,3] = \frac{f[1,3] - f[0,1]}{3-0} = \frac{63-9}{3} = 18$$

Tercer orden

$$f[-1,0,1,3] = \frac{f[0,1,3] - f[-1,0,1]}{3-(-1)} = \frac{18-(-2)}{4} = 5$$

Aplicamos la fórmula de Newton:

$$P(x) = f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)(x-0) + f[-1,0,1,3](x+1)(x-0)(x-1) =$$

$$= -9 + 13(x+1) - 2(x+1)x + 5(x+1)x(x-1) = 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4$$

que es el polinomio que cumple lo pedido.

Ejemplo 4

Segundo orden

$$f[-1,0,1] = \frac{f[0,1]-f[-1,0]}{1-(-1)} = \frac{9-13}{2} = -2$$

$$f[0,1,3] = \frac{f[1,3]-f[0,1]}{3-0} = \frac{63-9}{3} = 18$$

Tercer orden

$$f[-1,0,1,3] = \frac{f[0,1,3]-f[-1,0,1]}{3-(-1)} = \frac{18-(-2)}{4} = 5$$

Aplicamos la fórmula de Newton:

$$P(x) = f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)(x-0) + f[-1,0,1,3](x+1)(x-0)(x-1) =$$

$$= -9 + 13(x+1) - 2(x+1)x + 5(x+1)x(x-1) = 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4$$

que es el polinomio que cumple lo pedido.