Cálculo Numérico

Clase Práctica, 19 de Abril de 2021

Martín Maas

Comentarios práctica 3: estabilidad.

Iniciamos práctica 4: resolución de sistemas lineales.

Problemas de valores de contorno

Problema continuo $\longrightarrow$ Problema discreto

$$\begin{cases} U_{xx}(x) = & f(x), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ U(0) = & \alpha \\ U(1) = & \beta. \end{cases}$$

$$A^h u^h = F^h$$

Malla uniforme $\{x_j = hj, \ j = 0, 1, 2, \ldots m+1\}$ con $h = 1/(m+1)$.

Diferencias centradas $\frac{1}{h^2}\left(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}\right) = f(x_j)$ para $j = 1, 2, 3, \ldots m$.

Formulación matricial

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}\right) = f(x_j) \qquad \text{para } j = 1, 2, 3, \ldots m.$$

$$A^h u^h = F^h$$

$$A^h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad F^h = \begin{bmatrix} f(x_1) - \alpha/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{m-1}) \\ f(x_m) - \beta/h^2 \end{bmatrix}$$

Esto se implementa resolviendo una matriz (grande)

Estabilidad

Alan Turing a **Wilkinson**, alrededor de 1942:

"Vos siempre me hablás de la estabilidad pero cada vez que venís me decís una cosa distinta"

Comentario: Cada problema numérico (problemas de valores iniciales, de valores de contorno, sistemas lineales, PDE, etc) tiene una definición de estabilidad **apropiada al problema**.

Convergencia = Consistencia + Estabilidad

ej. truncado local O(h^p)

Lipschitz, normas

Práctica 3: Ejercicio 10

Se desear resolver la ecuación $u_t = \alpha u_{xx}$ con $\alpha > 0$ y borde Dirichlet homogeneo.

Para ello se emplea el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha \left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} \right)$$

(a) Estudiar estabilidad en norma infinito

(b) Probar que el error de truncado es $O(\Delta t) + O(h^2)$

Práctica 3: Ejercicio 10

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha \left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right)$$

(a) Estudiar estabilidad en norma infinito

Definición: (estabilidad fuerte en norma infinito)

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty \qquad u^{n+1} = Au^n \quad \|A\|_\infty \leq 1$$

$$u_j^n = u_j^{n+1} - r\alpha \left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right)$$

$$(1 + 2r\alpha)u_j^{n+1} = r\alpha \left(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right) + u_j^n$$

$$(1 + 2r\alpha)\|u^{n+1}\|_\infty \leq r\alpha \left(\|u^{n+1}\|_\infty + \|u^{n+1}\|_\infty\right) + \|u^n\|_\infty$$

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$$

Práctica 3: Ejercicio 10

Se desear resolver la ecuación $u_t = \alpha u_{xx}$ con $\alpha > 0$ y borde Dirichlet homogeneo.

Para ello se emplea el método implícito de primer orden:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = r\alpha\left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right)$$

(a) Estudiar estabilidad en norma infinito

(b) Probar que el error de truncado es $O(\Delta t) + O(h^2)$

R_m^{n+1} en la clase teórica 7, paginas 66-72