Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°11

---

1. Sea A una matriz inversible de $n \times n$, para la cual se desea aproximar la solución verdadera x_{sol} del sistema lineal $Ax = b$. Para dicho objetivo, se propone considerar alguna matriz inversible N adecuada, un vector inicial x_0 y definir una sucesión de vectores dada por: $x_{j+1} = x_j + y_j$. Donde cada y_j es la solución del sistema $Nx = Ae_j = A(x_{sol} - x_j)$. Este método se conoce como Método de corrección residual.

a) Suponiendo N dada, hallar una matriz B y un vector c tales que el método se pueda escribir de la forma $x_{j+1} = Bx_j + c$. Mostrar que si x_j converge a un valor x^*, entonces x^* es solución del sistema $Ax = b$.

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Probar que el método resulta convergente para todo vector inicial x_0. Sugerencia: considerar una norma matricial adecuada.

2. Dada la función $f(x) = \cos(\pi x) - e^{-x}$ y $x_0, \dots, x_n \in [0, 1]$ tales que $x_0 = 0$ y $x_n = 1$, sea P_{n+2} el polinomio de grado menor o igual a $n + 2$ que interpola a f en los x_i y que además cumple que $f'(0) = P'_{n+2}(0)$ y $f'(1) = P'_{n+2}(1)$.

a) Probar que el error de interpolación verifica

$$|f(x) - P_{n+2}(x)| \leq \frac{\|f^{(n+3)}\|_{\infty,[0,1]}}{(n+3)!} \frac{|u(x)|}{16}$$

donde $u(x) = \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$.

b) ¿Cómo hay que elegir a los x_i para que $|u(x)|$ sea mínimo?

c) Hallar n tal que $\|f - P_{n+2}\|_{\infty,[0,1]} < 10^{-3}$.

3. Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la siguiente tabla de datos

x	0	1	2
y	4	3	0

con una función del tipo: $y(x) = a\,2^x + b\,x$.

4. Se considera la función $f(x) = x^6 - 48x^2 + 3$

a) Demostrar que f tiene exactamente una raíz en el intervalo $(2, +\infty)$.

b) Sea r dicha raíz. Demostrar que el método de Newton-Raphson converge si se toma como valor inicial un $x_0 > r$.

c) Generalizar el ítem anterior para un x_0 que sea mayor a 2.

5. Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(x)dx \sim A_0(f(x_0) + f(x_1)),$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? ¿Es una regla de cuadratura Gaussiana? *(Sugerencia:* $((x^2 - 2)\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x))' = x^2\cos(x)$*)*

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°11 - Resolución del modelo de parcial

1a) Si y_j es tal que $Ny_j = A(x_{sol} - x_j)$, como N es inversible y vale que $Ax_{sol} = b$, podemos escribir:

$$x_{j+1} = x_j + y_j = x_j + N^{-1}A(x_{sol} - x_j) = \underbrace{(I - N^{-1}A)}_{B}x_j + \underbrace{N^{-1}b}_{c}.$$

Lo que nos da la matriz $B = I - N^{-1}A$ (con I la matriz identidad de tamaño $n \times n$) y $c = N^{-1}b$.

Si el método converge a x^*, entonces $x_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ (y $x_{j+1} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x^*$) y por lo tanto vale:

$$x^* = (I - N^{-1}A)x^* + N^{-1}b.$$

Pero esto es equivalente, multiplicando a ambos miembros por N, a $Nx^* = (N - A)x^* + b = Nx^* - Ax^* + b$, que a su vez es equivalente a $Ax^* = b$, como se quería probar.

1b) Para que el método sea convergente para cualquier vector inicial x_0 es suficiente que exista una norma matricial para la cual la norma de la matriz del método sea menor a 1. En este caso, la matriz del método, B es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $\|B\|_\infty = \text{máx}\{|-\frac{1}{2}|, |-\frac{1}{2}| + |-\frac{1}{4}|, |-\frac{1}{3}| + |-\frac{1}{3}|\} = \frac{3}{4} < 1$, y el método resulta convergente.

2a) Utilizaremos la cota para fórmula del error de interpolar por un polinomio de Hermite en $n + 1$ nodos y las derivadas en 2 de ellos:

$$|f(x) - P_{n+2}(x)| \leq \frac{\|f^{(n+3)}\|_{\infty,[0,1]}}{(n+3)!}|w(x)|$$

donde $w(x) = (x - 0)^2(x - 1)^2u(x)$. Acotando el módulo de la cuadrática $x(x - 1)$ con vértice de abscisa $x = \frac{1}{2}$ en el intervalo $[0, 1]$, tenemos $|x(x - 1)| \leq |\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})| = \frac{1}{4}$ y por lo tanto $|w(x)| \leq \frac{|u(x)|}{16}$. Así conseguimos la cota deseada:

$$|f(x) - P_{n+2}(x)| \leq \frac{\|f^{n+3}\|_{\infty,[0,1]}}{(n+3)!}\frac{|u(x)|}{16}.$$

2b) Para minimizar $|u(x)|$, los nodos que hay que tomar son los del polinomio de Tchebychev de grado $n-1$ en el intervalo $[0,1]$, $\tilde{T}_{n-1}$, y esto nos da $\|u\|_\infty = \frac{1}{2^{n-2}}\left(\frac{1-0}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{2n-3}}$.

2c) Primero calculemos las derivadas de f y la cota de $|f^{(n+3)}(x)|$ para $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \cos(\pi x) - e^{-x},\ f'(x) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x) + e^{-x}, \dots, \|f^{(n+3)}\|_{\infty,[0,1]} \leq \pi^{n+3} + 1$$

Ahora tomamos los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n-1$ en el intervalo $[0,1]$ para $x_1, \dots, x_{n-1}$ y juntamos las cotas de los ítems anteriores:

$$|f(x) - P_{n+2}(x)| \leq \frac{\pi^{n+3}+1}{(n+3)!2^{2n+1}}.$$

Como nos da una expresión decreciente en n, probamos valores. Para $n=4$ nos queda $0{,}00117\ldots > 10^{-3}$ pero con $n=5$ nos queda $0{,}0001149\ldots < 10^{-3}$. Luego, basta con $n \geq 5$.

---

3) Los coeficientes que nos dan la mejor aproximación, en el sentido de cuadrados mínimos, de la tabla de datos son la solución del sistema lineal $A^tAv = A^ty$, donde el vector v es tal que $v^t = (a,b)$, $A = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 \\ 2^1 & 1 \\ 2^2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, y por lo tanto $A^tA = \begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$, $A^ty = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema obtenemos $a = 4$, $b = -\frac{37}{5}$, y así $g(x) = 4.\,2^x - \frac{37}{5}x$.

4a) Para probar que f tiene una única raíz en $(2,+\infty)$, hagamos un análisis de función.

$$f(x) = x^6 - 48x^2 + 3 \ \Rightarrow\ f'(x) = 6x(x^4-16) > 0 \text{ en } (2,+\infty).$$

De esta forma, f es estrictamente creciente en $(2,+\infty)$ y como $f(2) = 64 - 192 + 3 < 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, por Bolzano sabemos que existe r en $(2,+\infty)$ y es único por ser f monótona ahí.

4b) Notemos que $f''(x) = 6(5x^4 - 16) > 0$ en $(2,+\infty)$. Miremos ahora el error del método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} e_{n+1} = x_{n+1} - r &= x_n - \frac{f(r) + e_n f'(x_n) - \frac{e_n^2}{2}f''(\xi_n)}{f'(x_n)} - r \\ &= e_n + \frac{-e_n f'(x_n) + \frac{e_n^2}{2}f''(\xi_n)}{f'(x_n)} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}e_n^2, \end{aligned}$$

para ξ_n entre x_n y r. De esta forma, si $x_n > r > 2$, entonces $\xi_n > 2$ y $f''(\xi_n) > 0$ y además $f'(x_n) > 0$. Esto nos da $e_n > 0$. Es decir, $2 < r < x_{n+1}$ si $x_n > 2$ y nos queda $r < x_n$ para todo $n \geq 0$. Además,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\overbrace{f(x_n)}^{>0 \forall x_n > r}}{\underbrace{f'(x_n)}_{>0 \forall x_n > r}} < x_n,$$

por lo que la sucesión será decreciente y acotada inferiormente si se toma $x_0 > r$, lo que nos da que la sucesión es convergente a un límite ℓ. Verifiquemos que $\ell = r$:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to \ell} = \underbrace{x_n}_{\to \ell} - \frac{\overbrace{f(x_n)}^{\to f(\ell)}}{\underbrace{f'(x_n)}_{\to f'(\ell)}}.$$

Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in (2, +\infty)$, estos límites tienen sentido y tiene que valer que $f(\ell) = 0$. Por la unicidad del cero que probamos en el ítem anterior, se tiene que $\ell = r$, como se quería probar.

4c) Si $x_0 \in (2, r)$, como $e_1 = \frac{\overbrace{f''(\xi_0)}^{>0}}{\underbrace{2f'(x_0)}_{>0}} e_0^2 > 0$, para $\xi_0 \in (x_0, r)$, entonces $x_1 > r$ y vale, a partir de x_1, el ítem b).

---

5) Para que la regla de cuadratura tenga el mayor grado de precisión posible, busquemos A_0, x_0 y x_1 tales que $I(x^k) = Q(x^k)$ para $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Hasta el mayor k posible. Como es una regla de cuadratura en dos nodos, tenemos $n = 1$ y entonces el grado de precisión que puede tener es a lo sumo $2n + 1 = 3$. Veamos:

$I(1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\, dx = 2, Q(1) = A_0(1 + 1)$. Luego,

$$2 = 2A_0.$$

De esta forma, $\boxed{A_0 = 1}$. Seguimos:

$I(x) = \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{\text{int.sim.}} \underbrace{x\cos(x)}_{\text{impar}}\, dx = 0, Q(x) = x_0 + x_1$. Así,

$$0 = x_0 + x_1. \tag{1}$$

$I(x^2) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos(x)\, dx = 2[(x^2 - 2)\,\mathrm{sen}(x) + 2x\cos(x)]\big|_0^{\pi/2} = 2(\frac{\pi^2}{4} - 2), Q(x^2) = x_0^2 + x_1^2$. Y entonces,

$$\frac{\pi^2}{2} - 4 = x_0^2 + x_1^2. \tag{2}$$

De (1) y (2) deducimos que $x_1 = -x_0$ y por lo tanto $\boxed{x_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}}$ y $\boxed{x_1 = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}}$.
Hasta aquí, el grado de precisión es 2 y la fórmula es:

$$Q(f) = f\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\right).$$

Busquemos el grado de precisión:

$I(x^3) = \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{\text{int.sim.}} \underbrace{x^3 \cos(x)}_{\text{impar}}\, dx = 0, Q(x^3) = ((\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2})^3 + (-\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2})^3) = 0$ y por lo tanto el grado de precisión es al menos 3. Pero como este es el máximo grado de precisión que puede alcanzar una regla con dos nodos, el grado de precisión es 3 y es una regla de cuadratura gaussiana.