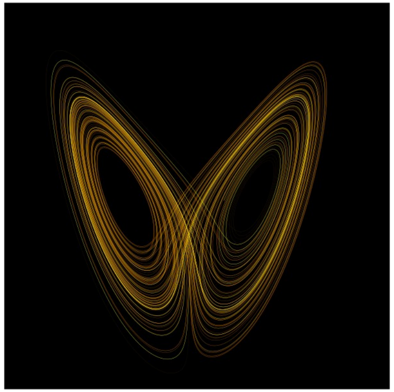
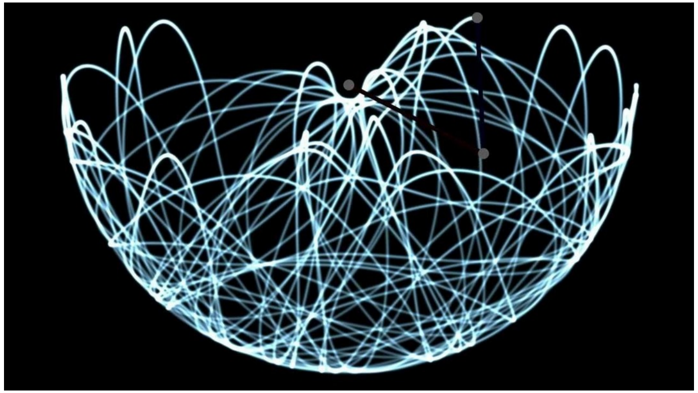
Cálculo Numérico

Clase Práctica, 5 de Abril de 2021
Martín Maas

Práctica 2:
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Problemas de Valores Iniciales)





EDO: Problemas de Valores Iniciales

Sistema de Lorenz

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y-x)\\ \frac{dx}{dt} &= x(b-z)\\ \frac{dx}{dt} &= xy-cz\end{aligned}$$

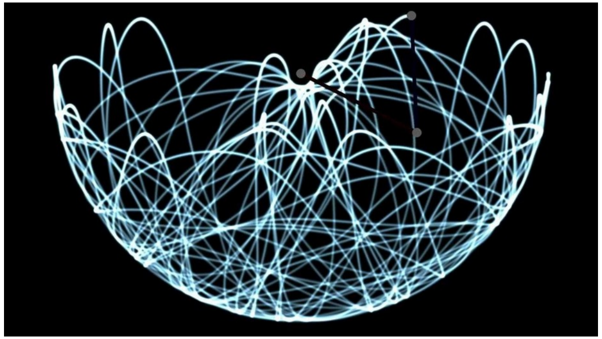
Péndulo doble

$$\begin{cases}(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2\ddot{\theta}_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)+m_2\dot{\theta}_2^2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)+(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1=0\\ m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2+m_2\ddot{\theta}_1 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)-m_2\dot{\theta}_1^2 l_1 l_2\sin(\theta_1-\theta_2)+m_2 g l_2\sin\theta_2=0\end{cases}$$

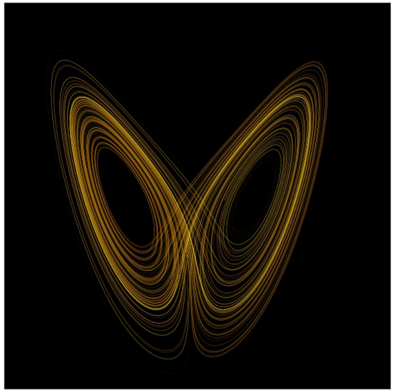
Cómo sacar conclusiones a partir de esto?

EDO: Problemas de Valores Iniciales

Péndulo doble



Sistema de Lorenz



Cómo sabemos que estas simulaciones son correctas?

Métodos de un paso para una ecuación

En la Bibliografía:

Capítulo 8 secciones 8.1 y 8.2
Notas de Cálculo Numérico (DLR).

(seccion 8.3 para el final del curso)

Métodos de un paso para una ecuación

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \quad t_0 \le t \le T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Paso 0: discretizamos el tiempo

$$t_j = t_0 + jh, \quad h = \frac{T - t_0}{N}, \quad 0 \le j \le N$$

Método numérico más sencillo (Euler) $\quad y'(t_j) \approx \dfrac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{t_{j+1} - t_j}$

$$\longrightarrow \begin{cases} y_{j+1} = hf(t_j, y_j) + y_j, \quad 0 \le j \le \frac{T-t_0}{h} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Métodos de un paso para una ecuación

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\Phi(t_j, y_j), \quad 0 \leq j \leq \frac{T-t_0}{h} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Euler

$$\Phi(t_j, y_j, h) = f(t_j, y_j)$$

Taylor de segundo orden $\quad y(t+h) \approx y(t) + y'(t)h + y''(t)\frac{h^2}{2}$

$$\Phi(t_j, y_j, h) = f(t_j, y_j) + \frac{h}{2}\left(f_t(t_j, y_j) + f_y(t_j, y_j) f(t_j, y_j)\right)$$

Análisis del Error: error global

Teorema 8.2

Para el método de un paso asociado a $\Phi(t, y, h)$, Lipschitz en y con constante K,

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, \tilde{y}, h)| \leq K|y - \tilde{y}|, \quad t \in [t_0, T]$$

se tiene

$$|y(T) - y_N| \leq \frac{\tau_{\max}}{K}\left(e^{K(T-t_0)} - 1\right)$$

donde

$$\tau_{\max} = \max|\tau_j|, j = 1, \ldots, N$$

Análisis del Error: truncamiento local

Paso 1: Consistencia (error de truncado local)

Definición: $$\tau_j = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) \qquad (\varepsilon_j = h\tau_j)$$

Observación: En la definición, la función y es la solución exacta.

"El truncado local mide cuán bien la aproximación discreta anda cuando se aplica a la solución exacta en cada punto"

Suele estar muy relacionado con la manera en que se dedujo el método en primer lugar (ej. Taylor de orden 2).

Ejercicio

Sea $y(t)$ solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = t\cos(2y^2), \quad 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Probar que $0 \le y(t) \le 2$ en $[0, 1]$
2. Hallar N para que el error en $y(1)$ usando Euler de paso $h = \frac{1}{N}$ sea $< 10^{-2}$

Ejercicio

Sea $y(t)$ solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = t\cos(2y^2), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Probar que $0 \leq y(t) \leq 2$ en $[0,1]$

$$|y(t) - y(0)| = |y(t) - 1| \overset{\text{TVM}}{=} |y'(\xi)||t - 0|$$

$$= |\xi\cos(2y^2(\xi))||t| \leq |\xi||t| \leq 1$$

$$|y(t) - 1| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y(t) \leq 2$$

Ejercicio

Sea $y(t)$ solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = t\cos(2y^2), & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Hallar N para que el error en $y(1)$ usando Euler de paso $h = \frac{1}{N}$ sea $< 10^{-2}$

   (a) Necesitamos K, la constante de Lipschitz en y de $\Phi(t, y, h)$

   (b) Necesitamos acotar τ, el error de truncado local

Ejercicio

(a) Necesitamos K, la constante de Lipschitz en y de $\Phi(t, y, h)$

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y) = t\cos(2y^2)$$

TVM en y, $\xi \in (y, \tilde{y})$

$$|t\cos(2y^2) - t\cos(2\tilde{y}^2)| = |t||\cos(2y^2) - \cos(2\tilde{y}^2)| =$$

$$= |t||\sin(2\xi^2)4\xi||y - \tilde{y}| \leq 8|y - \tilde{y}|$$

$|\xi| \leq 2$ por item 1

Ejercicio

(b) Necesitamos acotar τ, el error de truncado local

$$\tau_j = \frac{h}{2} y''(\xi_j) \longrightarrow \text{Apunte}$$

Usamos la ecuación

$$y''(t) = (t\cos(2y^2))' = \cos(2y^2) - t\sin(2y^2)4yt\cos(2y^2),$$

$$\Rightarrow |y''(t)| \leq |\cos(2y^2)||1 - 4t^2\sin(2y^2)y| \leq 1 + |4t^2 y| \leq 9$$

$y \leq 2$

$$\longrightarrow \quad \tau_{\max} \leq \frac{9h}{2}$$

Ejercicio

Armamos la cota del teorema:

$$|y(1) - y_N| \leq \frac{9h/2}{8}(e^{8(1-0)} - 1) = \frac{9}{16N}(e^8 - 1) \leq \frac{617}{N}$$

$$\frac{617}{N} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow N \geq 61700$$