Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°10

1. Sea $f \in C^4([0,5])$. Se desa aproximar $I(f) = \int_0^5 f(x)\,dx$ con una fórmula de la forma

$$Q(f) = A_0 f(1) + A_1 f^{'}(1) + A_2 f(3) + A_3 f^{'}(3),$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.

a) Hallar los pesos A_0, A_1, A_2 y A_3 para conseguir dicho grado de exactitud.

b) Demostrar que $|I(f) - Q(f)| \leq \frac{55}{36} \|f^{(iv)}\|_{\infty,[0,5]}$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°10 - Resolución del ejercicio

1a) Como la fórmula tiene grado de precisión tres debe valer:

$$5 = x|_0^5 = \int_0^5 1\,dx = A_0 + A_2$$

$$\frac{25}{2} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \int_0^5 x\,dx = A_0 + A_1 + 3A_2 + A_3$$

$$\frac{125}{3} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = \int_0^5 x^2\,dx = A_0 + 2A_1 + 9A_2 + 6A_3$$

$$\frac{625}{4} = \frac{x^4}{4}\Big|_0^5 = \int_0^5 x^3\,dx = A_0 + 3A_1 + 27A_2 + 27A_3$$

Resolviendo el sistema con algún método (Gauss, Cramer, etc.), obtenemos:

$$A_0 = \frac{75}{16}, A_1 = \frac{85}{48}, A_2 = \frac{5}{16} \text{ y } A_3 = \frac{245}{48}$$

(se puede chequear fácilmente que cumplen todas las ecuaciones anteriores).
Por lo tanto,

$$Q(f) = \frac{75}{16}f(1) + \frac{85}{48}f^{'}(1) + \frac{5}{16}f(3) + \frac{245}{48}f^{'}(3).$$

Por último, verifiquemos el grado de precisión:

$$625 = \frac{x^5}{5}\Big|_0^5 = \int_0^3 x^4\,dx \neq \frac{75}{16} + 4\frac{85}{48} + 81\frac{5}{16} + 108\frac{245}{48} = \frac{75}{16} + \frac{85}{12} + \frac{405}{16} + \frac{8820}{16} = \frac{1765}{3}.$$

1b) Tenemos

$$\begin{array}{cccc} 1 & \rightarrow & f(1) & f^{'}(1) \\ 3 & \rightarrow & f(3) & f^{'}(3) \end{array}$$

Sabemos que existe único polinomio $p(x) \in P_3$ que cumple $p(1) = f(1)$, $p(3) = f(3)$, $p'(1) = f'(1)$ y $p'(3) = f'(3)$ y es tal que $f(x) - p(x) = \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-3)^2$.
Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|I(f)-Q(f)| &= |I(f)-I(p)+I(p)-Q(p)+Q(p)-Q(f)| \\
&\leq |I(f)-I(p)|+|I(p)-Q(p)|+|Q(p)-Q(f)| = |I(f)-I(p)| \\
&= \Big| \int_0^5 f(x)-p(x) \Big| \leq \int_0^5 \Big| \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-3)^2 \Big| dx \\
&= \int_0^5 \frac{|f^{(iv)}(\xi)|}{4!}(x-1)^2(x-3)^2 dx \\
&\leq \frac{\|f^{(iv)}\|_{\infty,[0,5]}}{4!} \int_0^5 (x-1)^2(x-3)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Calculamos de forma exacta la integral,

$$
\int_0^5 (x-1)^2(x-3)^2 dx = \frac{110}{3}.
$$

Por lo tanto,

$$
|I(f)-Q(f)| \leq \frac{\|f^{(iv)}\|_{\infty,[0,5]}}{4!}\frac{110}{3} = \|f^{(iv)}\|_{\infty,[0,5]}\frac{55}{36}.
$$