Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Recuperatorio del Primer Parcial

Primer Cuatrimestre 2021 (15/07/2021)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y explicitar los cálculos o aclarar cómo se obtuvieron los resultados.

1. Sea $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ un número de máquina. Se quiere calcular $a^4 = a*(a*(a*a))$ con aritmética de punto flotante. Probar que el error relativo de dicho cálculo se puede acotar por $3\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$, donde ε es el correspondiente épsilon de máquina.

2. Considerar la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) &= \frac{1}{t+(y(t))^2}, \quad t \in (0,1) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

   a) Probar que $y(t) \geq 1$, $\forall t \in [0,1]$.

   b) Escribir la iteración del método de Euler correspondiente a este problema y probar que es siempre mayor o igual a 1.

   c) Estudiar el error de truncado local, y hallar el valor del paso h que garantice que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-3}.

3. Se considera el siguiente problema de evolución, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 3x + 5, \quad x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

   a) Discretizar el problema usando un esquema explícito con paso h en x y paso k en t.

   b) Dar una fórmula explícita del error de truncado local del esquema propuesto.

   c) Hallar un valor de $r = \frac{k}{h^2}$ para que el error sea $O(h^4) + O(k^2)$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ se define la matriz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n^2 & 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Mostrar que $\operatorname{cond}_\infty(A_n) \geq \frac{n^2}{9}$ y deducir que $\operatorname{cond}_\infty(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.

   b) Mostrar que $\operatorname{cond}_2(A_n) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.