Unidad 6: Error de interpolación, Polinomios de Tchebychev y de Hermite

Carlos Alliera

26 de noviembre de 2020

Error de interpolación

Nuevamente sean $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ y una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}([a,b])$ y $P(x)$ el polinomio interpolador de f en esos puntos.
Se define el error de interpolación:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)}$$

donde $\xi \in [a,b]$ y $W_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$

Tratamiento del error

En general vamos a querer acotar $W_{n+1}(x)$ para $x \in [a,b]$. Si consideramos $n+1$ puntos equiespaciados en ese intervalo, entonces

$$x_k = \frac{(b-a)k}{n} + a, \quad k = 0, 1, ..., n$$

Tratamiento del error

Para todo $x \in [a,b]$ existe algún $1 \leq k \leq n$ tal que

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k \Rightarrow |W_{k+1}(x)| = |x - x_0|.|x - x_1|...|x - x_{k-1}|.|x - x_k|...|x - x_n| \leq$$

$$\leq |x_k - x_0|.|x_k - x_1|...|x_k - x_{k-1}|.|x_{k-1} - x_k|...|x_{k-1} - x_n| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)k}{n} \cdot \frac{(b-a)(k-1)}{n} \cdot ... \frac{(b-a)}{n} \cdot \frac{(b-a)}{n} \cdot ... \cdot \frac{(b-a)(n+1-k)}{n} =$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}} \underbrace{k! \cdot (n+1-k)!}_{\leq (n+1)!} \leq \frac{(b-a)^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}$$

Observación

La desigualdad de factoriales se prueba por inducción:

$$k! \cdot (n+1-k)! \leq (n+1)!, \ \forall\ k = 0, 1, ..., n$$

Con lo anterior se deduce que si $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ son puntos equiespaciados[1] en $[a;b]$, entonces

$$\boxed{|W_{n+1}(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}}$$

Ejemplo 5

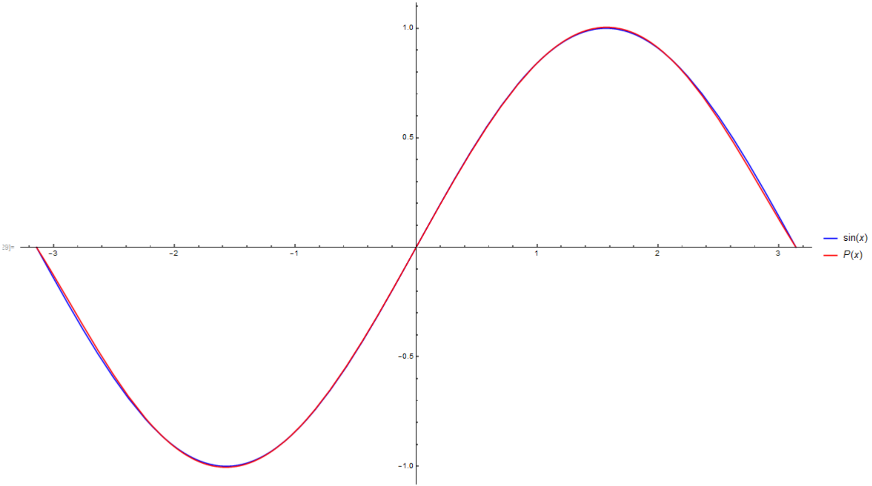
Estimar el error de aproximar $f(x) = \text{sen}(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ usando 7 puntos equiespaciados.
En este caso $gr(P) \leq 6$.

$$|E_6(x)| = \frac{|(\text{sen})^{(7)}(x)|}{7!}|W_7(x)| \leq \frac{|-\cos(x)|}{7!}||W_7||_\infty \leq \frac{1}{7!}\frac{(2\pi)^7 7!}{6^7} \approx 1,38102$$

Una cota decepcionante para el error si apreciamos el gráfico:

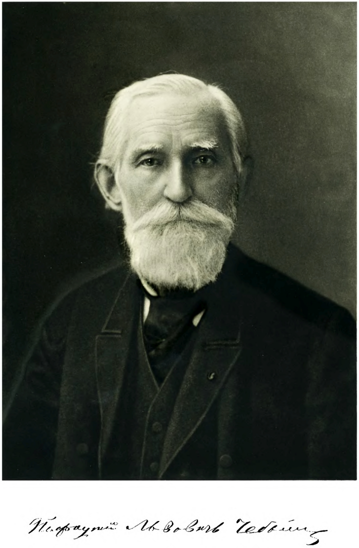
[1] La "peor"distribución de puntos al momento de estimar el error de interpolación.

Ejemplo 5



Polinomios de Tchebychev

¿Cómo debemos elegir los puntos de interpolación para optimizar la aproximación?



El matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev (Пафнутий Львович Чебышёв) (1821–1894) resolvió esta cuestión empleando una sucesión de polinomios que llevan su nombre.

Construcción

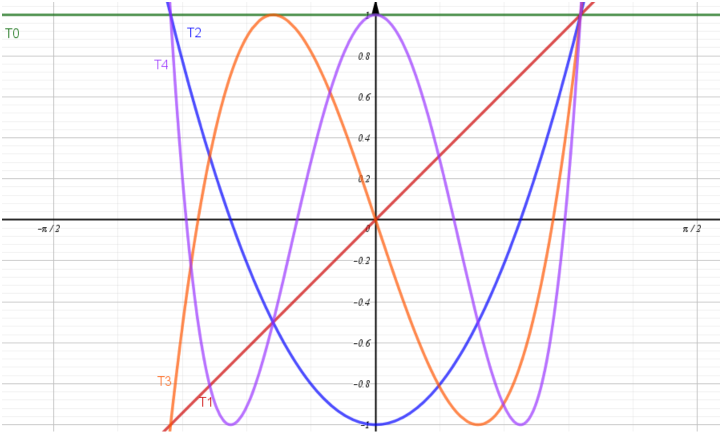
Supongamos primero que $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, luego generalizaremos la construcción de los polinomios de Tchebychev a cualquier intervalo mediante cambio de variable. Se definen los polinomios de Tchebychev para $k = 0, 1, 2, \ldots$ por

$$\boxed{T_k(x) = \cos\left(k \arccos(x)\right)}$$

Mediante propiedades del coseno, se puede obtener una relación de recurrencia entre estos polinomios:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \boxed{T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)} \end{cases}$$

Gráficos



$$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x,\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

Proposición

Sea T_k el polinomio de Tchebychev de grado k

1. El coeficiente principal de T_k es $2^{k-1}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.
2. Las raíces del polinomio T_k se encuentran en el intervalo $[-1;1]$ y son de la forma
$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2k}\right), \quad i = 0, 1, ..., k$$
Estas raíces son todas distintas.
3. $\|T_k\|_\infty = 1$
4. T_k alcanza los valores 1 y -1 en $k+1$ puntos, o sea
$$\|T_k\|_\infty = |T_k(y_i)| = 1, \quad y_i = \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right)$$
con $i = 0, ..., k$.

Teorema 1

Entre todos los polinomios mónicos de grado $n+1$, el definido como

$$W_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$$

minimiza la norma infinito en el intervalo $[-1;1]$, es decir, si

$$P \in \mathcal{P}_{n+1} := \{Q \in \mathbb{K},\ gr(Q) = n+1,\ Q \text{ es mónico}\}$$

entonces

$$||W_{n+1}||_\infty \leq ||P||_\infty$$

Teorema 2

Sea $f \in C^{n+1}[-1;1]$, si $P_n \in \mathcal{P}_n$ es el polinomio que interpola a f en las raíces de T_{n+1} entonces

$$\boxed{||f - P_n(x)||_\infty = \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{2^n (n+1)!}}$$

Ejemplo

Sea $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.
Comparar las cotas del error que se producen al estimar el valor de $f(0,65) = e^{1,3}$ al usar el polinomio interpolador de grado 3 construido con puntos equiespaciados y con los ceros de T_4.
El enunciado indica que interpolamos a f en 4 puntos, en ambas estimaciones del error necesitaremos la derivada $f^{IV}(x) = 2^4 e^{2x} = 16e^{2x}$.
Al interpolar en 4 puntos equiespaciados, tenemos:

$$W_4(x) = (x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1) \Longrightarrow W(0,65) = -0{,}179827$$

$$|E_3(0,65)| = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!}|W_4(0,65)| \leq \frac{16 \cdot e^2}{24} 0{,}18 \leq 0,886$$

Ejemplo

Ahora si usamos $W_4(x) = \frac{1}{8}T_4(x)$ en el caso de los ceros de Tchebychev:

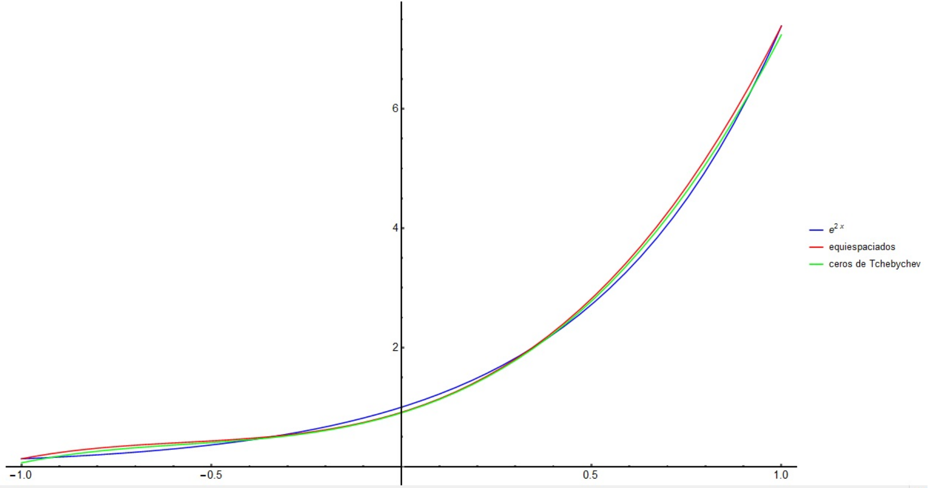
$$|E_3(0,65)| = \frac{f^{IV}(\xi)}{2^3 \cdot 4!} \underbrace{|T_4(0,65)|}_{*} \leq \frac{16 \cdot e^2}{192} 0{,}8515 \leq 0,525$$

El error en este último caso tiene una cota mejor que en el caso equiespaciado. Si calculamos el error real:

$f(0,65) = e^{1,3}$	3,6693	$\lvert E(0{,}65)\rvert = \lvert f(0,65) - P(0{,}65)\rvert$	Cota
(Equiesp) $P(0{,}65)$	3,85184	0,182546	$0,886$
(Chebychev) $P(0{,}65)$	3,78842	0,119124	$0,525$

$*$ Usualmente ese término se acota por 1 para no evaluar T_{n+1}.

Comparamos gráficos



Traslaciones

También se pueden emplear los ceros de Tchebychev para interpolar en intervalos genéricos $[a, b]$ mediante un cambio de variable

$$t = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1$$

y procediendo como antes (vea la teórica!) se obtiene:

$$\tilde{T}_{k+1}(x) = 2\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right)\tilde{T}_k(x) - \tilde{T}_{k-1}(x) = 2^{k-1}\left(\frac{2}{b-a}\right)^k x^{k+1} + \dots$$

entonces

$$W_{n+1} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\tilde{T}_{n+1} \Rightarrow \boxed{||W_{n+1}||_\infty = \frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}}$$

Y así,

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{||f^{(n+1)}||_\infty}{2^n(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$$

Ejercicio

Acotar el error de aproximar $f(x) = \log(x)$ en el intervalo $[1, 5]$ usando las raíces de $\tilde{T}_{10}(x)$.

$$f^{X}(x) = -\frac{362880}{x^{10}}$$

$$|E_9(x)| = |f(x) - P_9(x)| \leq \frac{||f^{X}||_\infty}{2^9 \cdot 10!} \left(\frac{5-1}{2}\right)^{10} \leq \frac{2 \cdot 362880}{\cdot 10!} = 0,2$$

Interpolación y derivadas

No todos los métodos enunciados previamente consideran con simpleza condiciones sobre las derivadas. Muchas veces no solo nos interesa que el polinomio P interpole a cierta f derivable en puntos específicos, sino que además pretendemos que P' coincida con f' en algunos puntos.
El matemático francés Charles Hermite (1822-1901) ha desarrollado una teoría que permite obtener este tipo de polinomios interpoladores.
Hermite demostró el teorema que nunciamos a continuación.

Teorema de Hermite

Dada una función derivable f en ciertos puntos $x_0, ..., x_k$ y los números $m_0, m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}_0$ tales que $\sum_{j=0}^{k} m_j = n + 1$. Existe un único polinomio P de grado a lo sumo n que satisface

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0), & P'(x_0) = f'(x_0), & \dots & P^{(m_0-1)}(x_0) = f^{(m_0-1)}(x_0), \\ P(x_1) = f(x_1), & P'(x_1) = f'(x_1), & \dots & P^{(m_1-1)}(x_1) = f^{(m_1-1)}(x_1), \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P(x_k) = f(x_k), & P'(x_k) = f'(x_k), & \dots & P^{(m_k-1)}(x_k) = f^{(m_k-1)}(x_k) \end{cases}$$

El método de interpolación de Hermite es una generalización del método de Newton, consideremos esta notación:

Diferencias divididas: Caso Derivada

Si f es derivable en x_k entonces vale que

$$f'(x_0) = f[x_0, x_0]$$

Polinomio de Hermite

El polinomio definido por

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) +$$

$$+ f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2)$$

Interpola a f en puntos x_0, x_1, x_2 y verifica $P'(x_k) = f'(x_k)$, $P''(x_k) = f''(x_k)$, $k = 0, 1, 2$.

Diferencias Divididas y Derivadas

Sea f m veces derivable en x_k, entonces:

$$f[\underbrace{x_k, x_k, ..., x_k}_{m-1 \text{ veces}}] = \frac{f^{(m)}(x_k)}{m!}$$

Es por esto que el polinomio interpolador de Hermite es una generalización no solo a la interpolación de Newton (por la notación y construcción), sino a la interpolación de Lagrange y al polinomio de Taylor.

Ejemplo 1

Encuentre el polinomio interpolador de cierta f de menor grado que verifica las condiciones siguientes:

$$P(0) = f(0) = 10, \quad P'(0) = f'(0) = 1, \quad P(1) = f(1) = 15 \quad P(2) = f(2) = 5$$

En este caso, se toma $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0, 0, 1, 2\}$ y se trabaja de manera similar a la forma de Newton.
Al tener 4 condiciones, el polinomio interpolador a calcular debe ser de grado a lo sumo 3.

$$f(0) = 10 \qquad f[0,0] = f'(0) = 1 \qquad f[0,0,1] = \frac{1-5}{0-1} = 4 \qquad f[0,0,1,2] = \frac{4+\frac{15}{2}}{0-2} = -23/4$$

$$f(0) = 10 \qquad f[0,1] = 5 \qquad f[0,1,2] = \frac{5+10}{0-2} = -\frac{15}{2}$$

$$f(1) = 15 \qquad f[1,2] = -10$$

$$f(2) = 5$$

Ejemplo 1

Luego nos queda

$$P(x) = f[0] + f[0,0]x + f[0,0,1]x^2 + f[0,0,1,2]x^2(x-1) =$$

$$= 10 + x + 4x^2 - \frac{23}{4}x^2(x-1) = -\frac{23}{4}x^3 + \frac{39}{4}x^2 + x + 10$$

que cumple todo lo pedido.

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = 32\sqrt{x+1}$, hallar el polinomio interpolador a f en $x_0 = 0$ y $x_3 = 3$ cuyas derivadas de primer y segundo orden también coincidan con las respectivas de f.

$$\begin{array}{ccc} f(0) = 32, & f'(0) = 16, & f''(0) = -8 \\ f(3) = 64 & f'(3) = 8, & f''(3) = -1 \end{array}$$

Ahora planteamos

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{0, 0, 0, 3, 3, 3\}$$

que indica que al tener 6 condiciones, nuestro polinomio será de grado 5, nuevamente planteamos las diferencias divididas

Ejemplo 2

Hermite a lo Newton

$f(0)=32 \quad f[0,0]=16 \quad f[0,0,0]=-4 \quad f[0,0,0,3]=\frac{20}{27} \; f[0,0,0,3,3]=\frac{-4}{27} \; f[0,0,0,3,3,3]=\frac{5}{162}$

$f(0)=32 \quad f[0,0]=16 \quad f[0,0,3]=-\frac{16}{9} \quad f[0,0,3,3]=\frac{8}{27} \quad f[0,0,3,3,3]=\frac{-1}{18}$

$f(0)=32 \quad f[0,3]=\frac{32}{3} \quad f[0,3,3]=-\frac{8}{9} \quad f[0,3,3,3]=\frac{7}{54}$

$f(3)=64 \quad f[3,3]=8 \quad f[3,3,3]=-0,5$

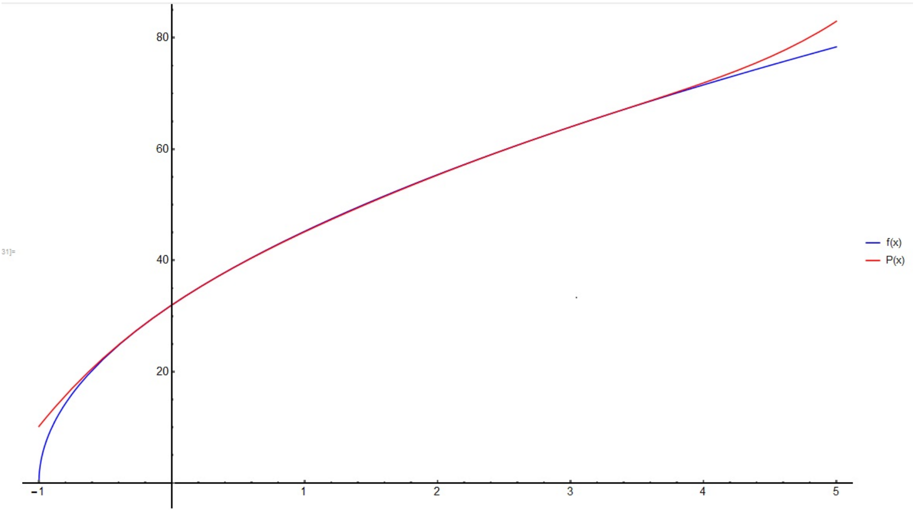
$f(3)=64 \quad f[3,3]=8$

$f(3)=64$

Con estos cálculos, planteamos el polinomio

$$P(x)=32+16x-4x^2+\frac{20}{27}x^3-\frac{4}{27}x^3(x-3)+\frac{5}{162}x^3(x-3)^2$$

Después de tanta cuenta, veamos los gráficos de ambas funciones



¡Qué parecidos son!

Y punto...