Elementos de Cálculo Numérico/Cálculo Numérico

Clase 5

Primer Cuatrimestre 2021

Normas vectoriales

Norma euclídea

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

Normas vectoriales

Norma euclídea

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

Producto interno

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Normas vectoriales

Norma euclídea

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

Producto interno

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Relación: $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{x}$

Normas vectoriales

Norma euclídea

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

Producto interno

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Relación: $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{x}$

Desigualdad Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky

$$|\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

Interpretación geométrica

Angulo entre vectores

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1,$$

Interpretación geométrica

Angulo entre vectores

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1,$$

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \cos(\theta)$$

Interpretación geométrica

Angulo entre vectores

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1,$$

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\boldsymbol{x}\| \cos(\alpha), \qquad & x_2 &= \|\boldsymbol{x}\| \operatorname{sen}(\alpha), \\ y_1 &= \|\boldsymbol{y}\| \cos(\beta), \qquad & y_2 &= \|\boldsymbol{y}\| \operatorname{sen}(\beta), \end{aligned}$$

Interpretación geométrica

Angulo entre vectores

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1,$$

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\boldsymbol{x}\| \cos(\alpha), \qquad & x_2 &= \|\boldsymbol{x}\| \operatorname{sen}(\alpha), \\ y_1 &= \|\boldsymbol{y}\| \cos(\beta), \qquad & y_2 &= \|\boldsymbol{y}\| \operatorname{sen}(\beta), \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta))$$

Interpretación geométrica

Angulo entre vectores

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1,$$

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\boldsymbol{x}\| \cos(\alpha), & x_2 &= \|\boldsymbol{x}\| \operatorname{sen}(\alpha), \\ y_1 &= \|\boldsymbol{y}\| \cos(\beta), & y_2 &= \|\boldsymbol{y}\| \operatorname{sen}(\beta), \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta))$$

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \cos(\alpha - \beta)$$

Interpretación geométrica

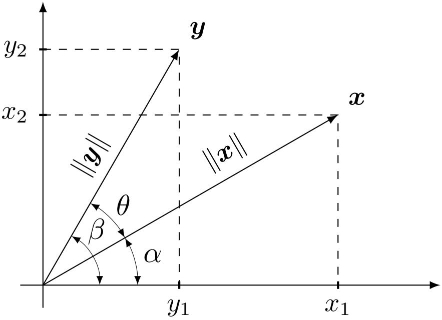


Fig.: Interpretación geométrica de θ.

Desigualdad triangular

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2,
\end{aligned}
$$

Desigualdad triangular

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2,
\end{aligned}
$$

$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

Desigualdad triangular

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2,\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

$$g(t) = \|t\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2\,\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}\,t + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$$

Desigualdad triangular

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}).(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2,\end{aligned}$$

$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

$g(t) = \|t\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 + 2\,\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}\,t + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2$

Normas

Definición de norma

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|\lambda\, \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|\lambda\, \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|\lambda\, \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$

Propiedades

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|\lambda\,\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$

Propiedades

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|\lambda\, \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$

Propiedades

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

$$\|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}\|$$

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|\lambda\, \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$

Propiedades

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

$$\|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}\|$$

$$|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

Normas

Definición de norma

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ y $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{x} = 0$
- $\|\lambda\, \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$

Propiedades

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

$$\|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}\|$$

$$\big| \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \qquad (\|\ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es continua})$$

Normas: ejemplos

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Normas: ejemplos

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Normas: ejemplos

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \qquad (p \geq 1)$$

Normas: ejemplos

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \qquad (p \geq 1)$$

Bola unitaria: $B_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : \|\boldsymbol{x}\| < 1\}$

Normas: ejemplos

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \qquad (p \geq 1)$$

Bola unitaria: $B_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : \|\boldsymbol{x}\| < 1\}$

Bola de centro $\boldsymbol{x}_0$ y radio r:

$$B_r(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| < r\}$$

Bola unitaria

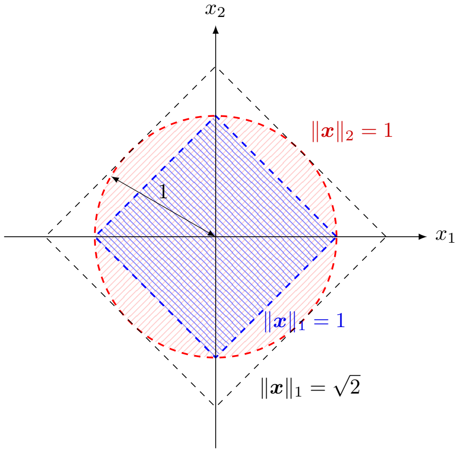


Fig.: Bolas unitarias correspondientes a $\| \; \|_1$ y $\| \; \|_2$.

Equivalencia

Dadas dos normas $\| \ \|_{\rm a}$ y $\| \ \|_{\rm b}$

Equivalencia

Dadas dos normas $\| \, \|_{\mathrm{a}}$ y $\| \, \|_{\mathrm{b}}$

existen constantes $C_{\mathrm{a}}, C_{\mathrm{b}} > 0$ que verifican

Equivalencia

Dadas dos normas $\| \, \|_{\mathrm{a}}$ y $\| \, \|_{\mathrm{b}}$

existen constantes $C_{\mathrm{a}}, C_{\mathrm{b}} > 0$ que verifican

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{a}} \leq C_{\mathrm{a}} \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{b}} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{b}} \leq C_{\mathrm{b}} \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{a}}$$

Equivalencia

Dadas dos normas $\| \; \|_{\mathrm{a}}$ y $\| \; \|_{\mathrm{b}}$

existen constantes $C_{\mathrm{a}}, C_{\mathrm{b}} > 0$ que verifican

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{a}} \leq C_{\mathrm{a}} \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{b}} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{b}} \leq C_{\mathrm{b}} \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{a}}$$

Ejemplo:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq n^{1/2} \|\boldsymbol{x}\|_2 \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$$

Norma de Minkowski

Si $\| \ \|$ es una norma, B_1 es un conjunto

Norma de Minkowski

Si $\| \ \|$ es una norma, B_1 es un conjunto

- abierto

Norma de Minkowski

Si $\| \ \|$ es una norma, B_1 es un conjunto

- abierto
- convexo

Norma de Minkowski

Si $\| \ \|$ es una norma, B_1 es un conjunto

- abierto
- convexo
- acotado

Norma de Minkowski

Si $\| \ \|$ es una norma, B_1 es un conjunto

- abierto
- convexo
- acotado
- simétrico $(\boldsymbol{x} \in B_1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{x} \in B_1)$

Norma de Minkowski

Si $\| \ \|$ es una norma, B_1 es un conjunto

- abierto
- convexo
- acotado
- simétrico ($\boldsymbol{x} \in B_1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{x} \in B_1$)

Vale la recíproca: $\|\boldsymbol{x}\|_B = \inf\{t > 0 : t^{-1}\boldsymbol{x} \in B\}$

Norma de Minkowski

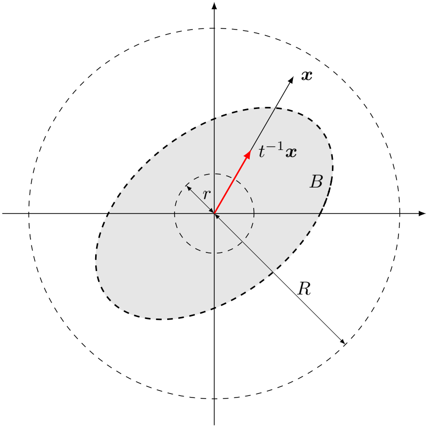


Fig.: Cálculo de la norma $\| \ \|_B$ asociada al conjunto B.

Norma de matrices

Norma inducida:

$$\|\mathrm{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Norma de matrices

Norma inducida:

$$\|\mathrm{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Propiedades

Norma de matrices

Norma inducida:

$$\|\mathrm{A}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Propiedades

- $\|\mathrm{A}\| \geq 0$ y $\|\mathrm{A}\| = 0$ si y sólo si $\mathrm{A} = 0$

Norma de matrices

Norma inducida:

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A.\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|A.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Propiedades

- $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Norma de matrices

Norma inducida:

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A.\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|A.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Propiedades

- $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

Norma de matrices

Norma inducida:

$$\|A\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A.\boldsymbol{x}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|A.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

Propiedades

- $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (consistencia)

Norma de matrices: ejemplos

- $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$

Norma de matrices: ejemplos

- $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$
- $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}|$

Norma de matrices: ejemplos

- $\|\mathrm{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$
- $\|\mathrm{A}\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}|$
- $\|\mathrm{A}\|_2 = \max\{\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_N}\}$

Norma de matrices: ejemplos

- $\|\mathrm{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$
- $\|\mathrm{A}\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}|$
- $\|\mathrm{A}\|_2 = \max\{\sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_N}\}$

  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ autovalores de $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}$

Norma de matrices: ejemplos

- $\|\mathrm{A}\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{i,j}|$

- $\|\mathrm{A}\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{i,j}|$

- $\|\mathrm{A}\|_2 = \max\{\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_N}\}$

  $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ autovalores de $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}$

- $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{F}} = \left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{A}.\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)\right)^{1/2}$ no es una norma inducida (pero consistente)

Matriz inversa

Proposición

Si $\mathrm{B} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ *verifica* $\|\mathrm{B}\| < 1$, *entonces* $\mathrm{I} + \mathrm{B}$ *es inversible y se verifica*

$$\|(\mathrm{I} + \mathrm{B})^{-1}\| \leq (1 - \|\mathrm{B}\|)^{-1}$$

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}=-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

$\square$

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}=-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\|=\|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\|\leq\|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

$\square$

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x} = -\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\| = \|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

por lo tanto $(1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{x}\| \leq 0$

□

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}=-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\|=\|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\|\leq\|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

por lo tanto $(1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{x}\|\leq 0$

como $1-\|\mathrm{B}\|>0$ resulta $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

□

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}=-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\|=\|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\|\leq\|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

por lo tanto $(1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{x}\|\leq 0$

como $1-\|\mathrm{B}\|>0$ resulta $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$\square$

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x}=-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\|=\|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\|\leq\|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

por lo tanto $(1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{x}\|\leq 0$

como $1-\|\mathrm{B}\|>0$ resulta $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$\mathrm{I}+\mathrm{B}$ es inversible

$\square$

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x} = -\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\| = \|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

por lo tanto $(1 - \|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{x}\| \leq 0$

como $1 - \|\mathrm{B}\| > 0$ resulta $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\mathrm{I}+\mathrm{B}$ es inversible

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B})^{-1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ entonces $\boldsymbol{x} = (\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{y}$

$\square$

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x} = -\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\| = \|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

por lo tanto $(1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{x}\| \leq 0$

como $1-\|\mathrm{B}\| > 0$ resulta $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\mathrm{I}+\mathrm{B}$ es inversible

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B})^{-1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ entonces $\boldsymbol{x} = (\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{y}$

$\|\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{y}\| - \|\mathrm{B}.\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{y}\| - \|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{y}\| = (1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{y}\|$

$\square$

Matriz inversa

Demostración.

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x} = -\mathrm{B}.\boldsymbol{x}$

tomando norma $\|\boldsymbol{x}\| = \|-\mathrm{B}.\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

por lo tanto $(1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{x}\| \leq 0$

como $1-\|\mathrm{B}\| > 0$ resulta $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$(\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\mathrm{I}+\mathrm{B}$ es inversible

Si $(\mathrm{I}+\mathrm{B})^{-1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ entonces $\boldsymbol{x} = (\mathrm{I}+\mathrm{B}).\boldsymbol{y}$

$\|\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{y}\| - \|\mathrm{B}.\boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{y}\| - \|\mathrm{B}\|\|\boldsymbol{y}\| = (1-\|\mathrm{B}\|)\|\boldsymbol{y}\|$

obtenemos $\|(\mathrm{I}+\mathrm{B})^{-1}.\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| \leq (1-\|\mathrm{B}\|)^{-1}\|\boldsymbol{x}\|$

$\square$

Radio espectral

Definimos $\rho(\mathrm{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } \mathrm{A}\}$

Radio espectral

Definimos $\rho(\mathrm{A}) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } \mathrm{A}\}$

Si $\| \ \|$ es una norma matricial inducida entonces $\rho(\mathrm{A}) \leq \|\mathrm{A}\|$

Radio espectral

Definimos $\rho(\mathrm{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } \mathrm{A}\}$

Si $\| \ \|$ es una norma matricial inducida entonces $\rho(\mathrm{A}) \leq \|\mathrm{A}\|$

Si A es diagonal: $\|\mathrm{A}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_1 = \|\mathrm{A}\|_\infty = \rho(\mathrm{A})$

Radio espectral

Definimos $\rho(\mathrm{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda$ es autovalor de $\mathrm{A}\}$

Si $\| \ \|$ es una norma matricial inducida entonces $\rho(\mathrm{A}) \leq \|\mathrm{A}\|$

Si A es diagonal: $\|\mathrm{A}\|_2 = \|\mathrm{A}\|_1 = \|\mathrm{A}\|_\infty = \rho(\mathrm{A})$

Proposición

Para toda matriz $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *se verifica*

$$\rho(\mathrm{A}) = \inf\{\|\mathrm{A}\| : \| \ \| \text{ norma inducida}\}$$

Radio espectral

Demostración.

Si A es diagonal, $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_2$

$\square$

Radio espectral

Demostración.

Si A es diagonal, $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_2$

Si A es diagonalizable: $\mathrm{P}^{-1}.\mathrm{A}.\mathrm{P} = \Lambda$ entonces $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|$ con $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{P}} = \|\mathrm{P}^{-1}.\boldsymbol{x}\|_2$

$\square$

Radio espectral

Demostración.

Si A es diagonal, $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_2$

Si A es diagonalizable: $\mathrm{P}^{-1}.\mathrm{A}.\mathrm{P} = \Lambda$ entonces $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|$ con $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{P}} = \|\mathrm{P}^{-1}.\boldsymbol{x}\|_2$

Por lo tanto: $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|_2 = \rho(\Lambda) = \rho(\mathrm{A})$

□

Radio espectral

Demostración.

Si A es diagonal, $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_2$

Si A es diagonalizable: $\mathrm{P}^{-1}.\mathrm{A}.\mathrm{P} = \Lambda$ entonces $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|$ con $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{P}} = \|\mathrm{P}^{-1}.\boldsymbol{x}\|_2$

Por lo tanto: $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|_2 = \rho(\Lambda) = \rho(\mathrm{A})$

Aproximamos A por B matriz diagonalizable $(\|\mathrm{B}\| = \rho(\mathrm{B}))$

$\square$

Radio espectral

Demostración.

Si A es diagonal, $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_2$

Si A es diagonalizable: $\mathrm{P}^{-1}.\mathrm{A}.\mathrm{P} = \Lambda$ entonces $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|$ con $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{P}} = \|\mathrm{P}^{-1}.\boldsymbol{x}\|_2$

Por lo tanto: $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|_2 = \rho(\Lambda) = \rho(\mathrm{A})$

Aproximamos A por B matriz diagonalizable ($\|\mathrm{B}\| = \rho(\mathrm{B})$)

- $\|\mathrm{A}\| < \|\mathrm{B}\| + \varepsilon, \quad \rho(B) < \rho(A) + \varepsilon$

$\square$

Radio espectral

Demostración.

Si A es diagonal, $\rho(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_2$

Si A es diagonalizable: $\mathrm{P}^{-1}.\mathrm{A}.\mathrm{P} = \Lambda$ entonces $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|$ con $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{P}} = \|\mathrm{P}^{-1}.\boldsymbol{x}\|_2$

Por lo tanto: $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{P}} = \|\Lambda\|_2 = \rho(\Lambda) = \rho(\mathrm{A})$

Aproximamos A por B matriz diagonalizable ($\|\mathrm{B}\| = \rho(\mathrm{B})$)

- $\|\mathrm{A}\| < \|\mathrm{B}\| + \varepsilon, \quad \rho(B) < \rho(A) + \varepsilon$
- $\|\mathrm{A}\| \leq \|\mathrm{B}\| + \varepsilon = \rho(\mathrm{B}) + \varepsilon \leq \rho(\mathrm{A}) + 2\,\varepsilon$

□

Número de condición

$\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ inversible

Número de condición

$\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ inversible

Número de condición: $\kappa(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\| \|\mathrm{A}^{-1}\|$

Número de condición

$\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ inversible

Número de condición: $\kappa(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\|$

$\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I} \Rightarrow \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\| \geq 1$

Número de condición

$\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ inversible

Número de condición: $\kappa(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\|$

$\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I} \Rightarrow \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\| \geq 1$

$\kappa(\mathrm{A}.\mathrm{B}) \leq \kappa(\mathrm{A})\kappa(\mathrm{B})$

Número de condición

$\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ inversible

Número de condición: $\kappa(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\|$

$\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I} \Rightarrow \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{A}^{-1}\| \geq 1$

$\kappa(\mathrm{A}.\mathrm{B}) \leq \kappa(\mathrm{A})\kappa(\mathrm{B})$

$\kappa_2(\mathrm{A}) = \kappa_2(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$

$\kappa_1(\mathrm{A}) = \kappa_\infty(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$

Número de condición de sistemas

Sistema perturbado: $(\mathrm{A}+\delta\mathrm{A}).(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b})$

Número de condición de sistemas

Sistema perturbado: $(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A}).(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$

$\delta\boldsymbol{x} = (\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})^{-1}.(\delta\boldsymbol{b} - \delta\mathrm{A}.\boldsymbol{x})$

Número de condición de sistemas

Sistema perturbado: $(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A}).(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$

$\delta\boldsymbol{x} = (\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})^{-1}.(\delta\boldsymbol{b} - \delta\mathrm{A}.\boldsymbol{x})$

Como $\|(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})^{-1}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|(1 - \|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta\mathrm{A}\|)^{-1}$

Número de condición de sistemas

Sistema perturbado: $(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A}).(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$

$\delta\boldsymbol{x} = (\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})^{-1}.(\delta\boldsymbol{b} - \delta\mathrm{A}.\boldsymbol{x})$

Como $\|(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})^{-1}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|(1 - \|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta\mathrm{A}\|)^{-1}$

$\|\delta\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|(1 - \|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta\mathrm{A}\|)^{-1}(\|\delta\boldsymbol{b}\| + \|\delta\mathrm{A}\|\|\boldsymbol{x}\|)$

Número de condición de sistemas

Sistema perturbado: $(\mathrm{A}+\delta \mathrm{A}).(\boldsymbol{x}+\delta \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b}+\delta \boldsymbol{b})$

$\delta \boldsymbol{x} = (\mathrm{A}+\delta \mathrm{A})^{-1}.(\delta \boldsymbol{b} - \delta \mathrm{A}.\boldsymbol{x})$

Como $\|(\mathrm{A}+\delta \mathrm{A})^{-1}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|(1-\|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta \mathrm{A}\|)^{-1}$

$\|\delta \boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|(1-\|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta \mathrm{A}\|)^{-1}(\|\delta \boldsymbol{b}\| + \|\delta \mathrm{A}\|\|\boldsymbol{x}\|)$

Usando $\|\mathrm{A}\|\|\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{b}\|$, $\|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta \mathrm{A}\| = \kappa(\mathrm{A})\|\delta \mathrm{A}\|/\|\mathrm{A}\|$

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathrm{A})}{1-\kappa(\mathrm{A})\dfrac{\|\delta \mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}}\left(\frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} + \frac{\|\delta \mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}\right)$$

Número de condición de sistemas

Sistema perturbado: $(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A}).(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b})$

$\delta\boldsymbol{x} = (\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})^{-1}.(\delta\boldsymbol{b} - \delta\mathrm{A}.\boldsymbol{x})$

Como $\|(\mathrm{A} + \delta\mathrm{A})^{-1}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|(1 - \|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta\mathrm{A}\|)^{-1}$

$\|\delta\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|(1 - \|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta\mathrm{A}\|)^{-1}(\|\delta\boldsymbol{b}\| + \|\delta\mathrm{A}\|\|\boldsymbol{x}\|)$

Usando $\|\mathrm{A}\|\|\boldsymbol{x}\| \geq \|\boldsymbol{b}\|$, $\|\mathrm{A}^{-1}\|\|\delta\mathrm{A}\| = \kappa(\mathrm{A})\|\delta\mathrm{A}\|/\|\mathrm{A}\|$

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathrm{A})}{1 - \kappa(\mathrm{A})\dfrac{\|\delta\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}} \left(\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} + \frac{\|\delta\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}\right)$$

Si $\kappa(\mathrm{A})\|\delta\mathrm{A}\|/\|\mathrm{A}\| < \varepsilon < 1/2$, entonces

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq (1 + 2\,\varepsilon)\kappa(\mathrm{A}) \left(\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} + \frac{\|\delta\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A}\|}\right)$$

Interpretación de $\kappa(\mathrm{A})$

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *es inversible, entonces* $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} = \min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$

En particular, el número de condición verifica

$$\kappa(\mathrm{A}) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| / \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$$

Interpretación de $\kappa(\mathrm{A})$

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *es inversible, entonces* $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} = \min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$

En particular, el número de condición verifica

$$\kappa(\mathrm{A}) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| / \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$$

Demostración.

$\square$

Interpretación de $\kappa(\mathrm{A})$

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *es inversible, entonces* $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} = \min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$

En particular, el número de condición verifica

$$\kappa(\mathrm{A}) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| / \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$$

Demostración.

$$\mathrm{A}^{-1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \mathrm{A}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

□

Interpretación de $\kappa(\mathrm{A})$

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *es inversible, entonces* $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} = \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$

En particular, el número de condición verifica

$$\kappa(\mathrm{A}) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| / \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$$

Demostración.

$$\mathrm{A}^{-1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \mathrm{A}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

$$\|\mathrm{A}^{-1}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|\mathrm{A}^{-1}.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

$\square$

Interpretación de $\kappa(\mathrm{A})$

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *es inversible, entonces* $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} = \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$

En particular, el número de condición verifica

$$\kappa(\mathrm{A}) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| / \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$$

Demostración.

$$\mathrm{A}^{-1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \mathrm{A}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

$$\|\mathrm{A}^{-1}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|\mathrm{A}^{-1}.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\|\boldsymbol{y}\|>0} \frac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\mathrm{A}.\boldsymbol{y}\|}$$

$\square$

Interpretación de $\kappa(\mathrm{A})$

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *es inversible, entonces* $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} = \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$

En particular, el número de condición verifica

$$\kappa(\mathrm{A}) = \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| / \min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\|$$

Demostración.

$$\mathrm{A}^{-1}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \mathrm{A}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

$$\|\mathrm{A}^{-1}\| = \max_{\|\boldsymbol{x}\|>0} \frac{\|\mathrm{A}^{-1}.\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\|\boldsymbol{y}\|>0} \frac{\|\boldsymbol{y}\|}{\|\mathrm{A}.\boldsymbol{y}\|} = \frac{1}{\min_{\|\boldsymbol{y}\|=1} \|\mathrm{A}.\boldsymbol{y}\|}$$

$\square$

Ejemplo

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$\|A\|_1 = 4, \|A^{-1}\|_1 = 1/2 \Rightarrow \kappa_1(A) = 2$

Ejemplo

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$\|A\|_1 = 4, \|A^{-1}\|_1 = 1/2 \Rightarrow \kappa_1(A) = 2$

$\|A.(0\ 1)^T\|_1 = 4, \|A.(1\ 0)^T\|_1 = 2$

Ejemplo

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$\|A\|_1 = 4, \|A^{-1}\|_1 = 1/2 \Rightarrow \kappa_1(A) = 2$

$\|A.(0\ 1)^T\|_1 = 4, \|A.(1\ 0)^T\|_1 = 2$

$B = A^T.A \Rightarrow \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{7 + \sqrt{13}, 7 - \sqrt{13}\}$

Ejemplo

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

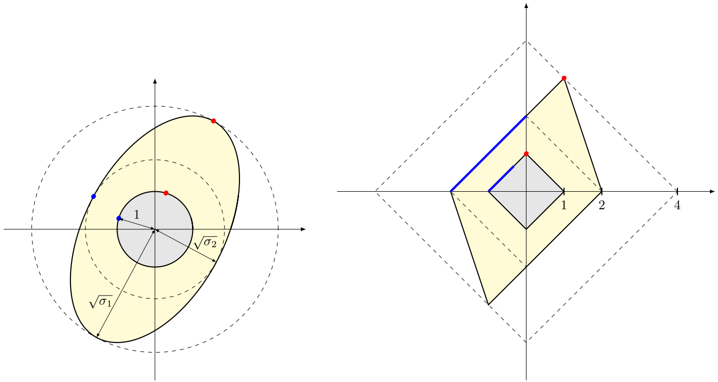
$\|A\|_1 = 4, \|A^{-1}\|_1 = 1/2 \Rightarrow \kappa_1(A) = 2$

$\|A.(0\ 1)^T\|_1 = 4, \|A.(1\ 0)^T\|_1 = 2$

$B = A^T.A \Rightarrow \{\sigma_1, \sigma_2\} = \{7 + \sqrt{13}, 7 - \sqrt{13}\}$

$\|A\|_2 = \sqrt{7 + \sqrt{13}}, \quad \kappa_2(A) = \sqrt{(31 + 7\sqrt{13})/18}.$

Ejemplo



(a) Norma matricial $\|A\|_2$.

(b) Norma matricial $\|A\|_1$.

Fig.: Gris: bola unitaria, azul: $\min \|A.\boldsymbol{x}\|$, rojo: $\max \|A.\boldsymbol{x}\|$.

Número de condición y matrices singulares

Matrices singulares: $\Sigma = \{\mathrm{B} \in \mathbb{C}^{N\times N} : \det(\mathrm{B}) = 0\}$

Número de condición y matrices singulares

Matrices singulares: $\Sigma = \{\mathrm{B} \in \mathbb{C}^{N\times N} : \det(\mathrm{B}) = 0\}$

Para A inversible: $\operatorname{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) = \min_{\mathrm{B}\in\Sigma} \|\mathrm{A} - \mathrm{B}\| > 0$

Número de condición y matrices singulares

Matrices singulares: $\Sigma = \{\mathrm{B} \in \mathbb{C}^{N\times N} : \det(\mathrm{B}) = 0\}$

Para A inversible: $\mathrm{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) = \min\limits_{\mathrm{B}\in\Sigma} \|\mathrm{A} - \mathrm{B}\| > 0$

Proposición

Si A *es inversible, entonces* $\mathrm{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) = \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$
En particular, vale

$$\kappa(\mathrm{A}) = \frac{\|\mathrm{A}\|}{\mathrm{dist}(\mathrm{A}, \Sigma)} = \max_{\mathrm{B}\in\Sigma} \frac{\|\mathrm{A}\|}{\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|}.$$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \mathrm{dist}(A, \Sigma)$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \mathrm{dist}(A, \Sigma)$

  Si $B \in \Sigma$, existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ con $B.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \mathrm{dist}(A, \Sigma)$

  Si $B \in \Sigma$, existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ con $B.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

  $\boldsymbol{x} = A^{-1}.(A - B).\boldsymbol{x}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \mathrm{dist}(A, \Sigma)$

  Si $B \in \Sigma$, existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ con $B.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

  $\boldsymbol{x} = A^{-1}.(A - B).\boldsymbol{x} \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|A - B\|\|\boldsymbol{x}\|$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \mathrm{dist}(A, \Sigma)$

  Si $B \in \Sigma$, existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ con $B.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

  $\boldsymbol{x} = A^{-1}.(A - B).\boldsymbol{x} \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|A - B\|\|\boldsymbol{x}\|$

  $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \|A - B\|$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} \leq \operatorname{dist}(\mathrm{A}, \Sigma)$

  Si $\mathrm{B} \in \Sigma$, existe $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ con $\mathrm{B}.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

  $\boldsymbol{x} = \mathrm{A}^{-1}.(\mathrm{A} - \mathrm{B}).\boldsymbol{x} \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|\|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|\|\boldsymbol{x}\|$

  $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} \leq \|\mathrm{A} - \mathrm{B}\|$

  $\|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1} \leq \operatorname{dist}(\mathrm{A}, \Sigma)$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\text{dist}(A, \Sigma) \leq \|A^{-1}\|^{-1}$ (para $\| \; \|_2$)

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\operatorname{dist}(\mathrm{A},\Sigma) \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$ (para $\| \ \|_2$)

  Existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ tal que $\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\operatorname{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$ (para $\| \ \|_2$)

  Existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ tal que $\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

  Definimos $\mathrm{B}.\boldsymbol{y} = \mathrm{A}.\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\mathrm{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$ (para $\| \;\|_2$)

  Existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ tal que $\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

  Definimos $\mathrm{B}.\boldsymbol{y} = \mathrm{A}.\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}$

  $\mathrm{B}.\boldsymbol{x} = \mathrm{A}.\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x})\mathrm{A}.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\mathrm{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$ (para $\| \ \|_2$)

  Existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ tal que $\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

  Definimos $\mathrm{B}.\boldsymbol{y} = \mathrm{A}.\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}$

  $\mathrm{B}.\boldsymbol{x} = \mathrm{A}.\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x})\mathrm{A}.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

  Si $\|\boldsymbol{y}\| = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}| \leq 1$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\operatorname{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$ (para $\| \ \|_2$)

  Existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ tal que $\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

  Definimos $\mathrm{B}.\boldsymbol{y} = \mathrm{A}.\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}$

  $\mathrm{B}.\boldsymbol{x} = \mathrm{A}.\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x})\mathrm{A}.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

  Si $\|\boldsymbol{y}\| = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}| \leq 1$

  $\|(\mathrm{A} - \mathrm{B}).\boldsymbol{y}\| = \|(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}|\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- $\mathrm{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$ (para $\| \ \|_2$)

  Existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ tal que $\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

  Definimos $\mathrm{B}.\boldsymbol{y} = \mathrm{A}.\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}$

  $\mathrm{B}.\boldsymbol{x} = \mathrm{A}.\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x})\mathrm{A}.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

  Si $\|\boldsymbol{y}\| = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}| \leq 1$

  $\|(\mathrm{A} - \mathrm{B}).\boldsymbol{y}\| = \|(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}|\|\mathrm{A}.\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

  $\mathrm{dist}(\mathrm{A}, \Sigma) \leq \|\mathrm{A}^{-1}\|^{-1}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- Para normas arbitrarias:

□

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- Para normas arbitrarias:

  Existe $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{y} \leq 1$ para $\boldsymbol{y} \in B_1$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- Para normas arbitrarias:

  Existe $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{y} \leq 1$ para $\boldsymbol{y} \in B_1$

  Definimos $\mathrm{B}.\boldsymbol{y} = \mathrm{A}.\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}$

$\square$

Número de condición y matrices singulares

Demostración.

- Para normas arbitrarias:

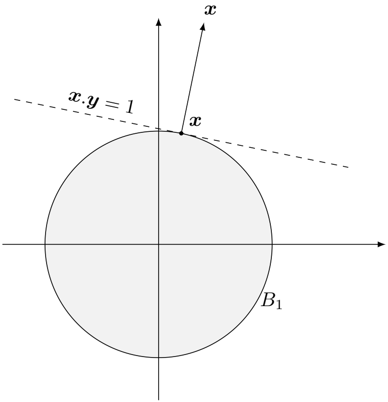
  Existe $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{y} \leq 1$ para $\boldsymbol{y} \in B_1$

  Definimos $\mathrm{B}.\boldsymbol{y} = \mathrm{A}.\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{y})\mathrm{A}.\boldsymbol{x}$

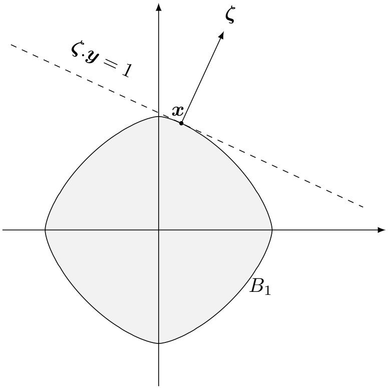
  La demostración sigue de la misma forma

$\square$

Número de condición y matrices singulares



(a) Para $\| \; \|_2$



(b) Para $\| \; \|$ arbitraria