Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°5

1. Se considera una máquina muy precaria que trabaja con una aritmética de punto flotante de 4 dígitos y redondeo en base 10. Sea $b = (2, 1)^t$, se desea resolver por eliminación gaussiana sin pivoteo el sistema lineal $Ax = b$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real o no.

b) Repetir la resolución pero utilizando pivoteo y estudiar si mejora significativamente o si esencialmente queda igual.

2. Considerar la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) & = & t\cos\left(y(t)^2\right) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$$

a) Probar que $0 \leq y(t) \leq 2$, $\forall t \in [0, 1]$.

b) Escribir la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.

c) Estudiar el error de truncado local, y hallar el valor del paso h que garantice que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-5}. (Observación: también vale que $0 \leq y_i \leq 2\ \forall\, i$)

3. Se tiene el siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} u_{xx}(t,x) - u(t,x) = u_t(t,x) \quad x \in (0,1),\ t \in (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \forall t \\ u(0,x) = g(x) \end{cases}$$

a) Describir el esquema discreto explícito que utiliza la discretización usual de la derivada segunda y diferencias forward en la derivada temporal, y escribir el esquema matricial asociado.

b) Probar que si $2r + \delta t < 1$, para $r = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$ el método resulta estable en norma infinito.

4. Estimar la $\text{cond}_\infty(A_\varepsilon)$ de la siguiente matriz en función de épsilon cuando $\varepsilon \to 0^+$:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 & 1-\varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon - 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y concluir que está mal condicionada para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico.