Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°7

1. Considerar la función $f(x) = \dfrac{9x+6}{x+2}$.

a) Calcular el polinomio p tal que $p(-1) = f(-1)$, $p'(-1) = f'(-1)$, $p(0) = f(0)$, $p(1) = f(1)$ y $p'(1) = f'(1)$.

b) Mostrar que $|f(x) - p(x)| \leq 12$ para todo $x \in [-1, 1]$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°7 - Resolución del ejercicio

1a) Para hallar p podríamos usar el método de coeficientes indeterminados, pero es más práctico usar una tabla de diferencias divididas y construir su forma de Newton. Primero, calculemos:

$$f'(x) = \frac{12}{(x+2)^2},$$

$$f(-1) = \frac{-9+6}{-1+2} = -3,\ f'(-1) = 12,\ f(0) = 3, f(1) = 5,\ f'(1) = \frac{4}{3}.$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
-1	-3	$f'(-1) = 12$	$\frac{6-12}{0-(-1)} = -6$	$\frac{-2-(-6)}{1-(-1)} = 2$	$\frac{\frac{2}{3}-2}{1-(-1)} = -\frac{2}{3}$
-1	-3	$\frac{3-(-3)}{0-(-1)} = 6$	$\frac{2-6}{1-(-1)} = -2$	$\frac{-\frac{2}{3}-(-2)}{1-(-1)} = \frac{2}{3}$	
0	3	$\frac{5-3}{1-0} = 2$	$\frac{\frac{4}{3}-2}{1-0} = -\frac{2}{3}$		
1	5	$f'(1) = \frac{4}{3}$			
1	5				

Luego, $p(x) = -3 + 12(x+1) - 6(x+1)^2 + 2(x+1)^2 x - \frac{2}{3}(x+1)^2 x(x-1)$.

1b) Utilizaremos la cota para fórmula del error de interpolar por un polinomio de Hermite en 3 nodos y las derivadas en 2 de ellos:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(v)}\|_{\infty,[-1,1]}}{5!} \|w\|_{\infty,[-1,1]},$$

donde $w(x) = (x+1)^2 x(x-1)^2$. En este caso,

$$f'(x) = 12(x+2)^{-2},\ f''(x) = (-2)12(x+2)^{-3},\ f'''(x) = 3!12(x+2)^{-4},$$

$$f^{(ix)}(x) = -4!12(x+2)^{-5},\ f^{(v)}(x) = 5!12(x+2)^{-6},$$

por lo que $\|f^{(v)}\|_{\infty,[-1,1]} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \{|f^{(v)}(x)|\} = 5!12$ (recordemos que $-1 \leq x \leq 1$ y por lo tanto $(1/3)^6 \leq (x+2)^{-6} \leq 1$). Por otro lado, para acotar $\|w\|_{\infty,[-1,1]}$, podemos usar el Ejercicio 8 de la Práctica 6, donde se prueba que $|(x+1)(x-1)| \leq \frac{2^2}{4} = 1$ (también se puede hacer el análisis de esta cuadrática), y $|x| \leq 1$ para todo $x \in [-1,1]$, y así $\|w\|_{\infty,[-1,1]} \leq 1$. De esta forma, tenemos la cota deseada:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{5!12}{5!} = 12$$

para todo $x \in [-1, 1]$.