MATIAS MORAN, LIC. COMPUTACION, NL: 806/19

1. Sean $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$. Se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix},$$

para resolver un sistema lineal de la forma $Ax = b$.

a) Dar condiciones sobre α y β que determinen todos los posibles valores para los cuales el método de Jacobi converge para todo valor inicial.

b) Dar condiciones sobre α y β que determinen todos los posibles valores para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para todo valor inicial.

c) Fijados valores para α y β para los cuales ambos métodos convergen, ¿cuál se espera que converja más rápido?

a)

$$B_J = -D^{-1}(L+U)$$

Autovalores $= \det\left(\lambda D + (L+U)\right)$

$$\text{Autovalores} = \det\left(\lambda D + (L+U)\right)$$

$$= \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & a \\ 1 & \lambda a & a^2 \\ 1 & b & \lambda b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda^3 a b^2 + 0 + 0\right) - \left(0 + \lambda a^2 b + 0\right)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 a b^2 - a^2 b\right) = \lambda\left(\lambda - \sqrt{\tfrac{a}{b}}\right)\left(\lambda + \sqrt{\tfrac{a}{b}}\right)$$

$$\rho(B_J) = \max\left\{|\lambda_i|\right\} = \max\left\{|0|, \left|\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right|, \left|-\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right|\right\} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\rho(B_J) = \max\{|\lambda_i|\} = \max\left\{|0|, \left|\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right|, \left|-\sqrt{\tfrac{a}{b}}\right|\right\} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Pedimos $\rho(B_J) < 1$

$$\iff \sqrt{\frac{a}{b}} < 1$$

$$\iff a < b \quad (b, a > 0)$$

b) $B_{GS} = -(D+L)^{-1} U$

AUTOVALORES $= \det(\lambda(D+L) + U)$

$$\text{AUTOVALORES} = \det(\lambda(D+L) + U)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda a & a^2 \\ \lambda & \lambda b & \lambda b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^3 a b^2 + 0 + 0) - (0 + \lambda^2 a^2 b + 0)$$

$$= \lambda^2 (\lambda a b^2 - a^2 b) = \lambda^2 \left(\lambda - \frac{a}{b}\right)$$

$$\rho(B_J) = \max\{|\lambda_i|\} = \max\left\{|0|, \left|\frac{a}{b}\right|\right\} = \frac{a}{b}$$

$$\rho(B_J) = \max\{|x_i|\} = \max\{|0|, |\tfrac{a}{b}|\} = \frac{a}{b}$$

Pedimos $\rho(B_{GS}) < 1$

$$\iff \frac{a}{b} < 1$$

$$\iff a < b \quad (b, a > 0)$$

c) Como $\frac{a}{b} < 1 \iff \sqrt{\frac{a}{b}} > \frac{a}{b}$

entonces tenemos

c) Como $\frac{a}{b} < 1 \iff \sqrt{\frac{a}{b}} > \frac{a}{b}$

entonces tenemos

$$\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} < 1$$

$$\iff \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$$

Asi tenemos que GS converge mas rapido

2. Sea una función $f \in C^\infty$ que se interpola por un polinomio p en $n+1$ nodos arbitrarios $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a,b]$. Se desea estudiar cómo aproxima la derivada de p a la derivada de f en función de la longitud del intervalo $[a,b]$. Para $x \in [a,b]$:

   a) mostrar que $|f(x) - p(x)|$ es $O((b-a)^{n+1})$;
   b) mostrar que $|f'(x) - p'(x)|$ es $O((b-a)^n)$. (*Sugerencia:* recordar el Teorema de Rolle.)

MATIAS MORAN, LIC. COMPUTACION, NL: 806/19

a) SI INTERPOLAMOS USANDO NEWTON EN $n+1$ PUNTOS EN $[a,b]$

$$r_n = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$r_n = f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$|r_n| \leqslant \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |w(x)|$$

com $f \in C^{\infty}$ entonces $f^{(n+1)}(x)$ es continua en $[a,b]$ y como toda f continua en un compacto alcanza un maximo:

$$|r_n| \leqslant \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!} |w(x)| = C \frac{|w(x)|}{(n+1)!}$$

toda f continua en un compacto alcanza un MAXIMO:

$$|r_n| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\varepsilon)|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!} |w(x)| = C \frac{|w(x)|}{(n+1)!}$$

Veamos que

Si $h(x) = x - x_i$, con $x_i \in [a,b]$

h es creciente

$$0 \leq h(a) = a - x_i \leq h(x) \leq h(b) = b - x_i$$

$$0 \leq a - x_i \leq h(x) \leq b - x_i \leq b - a$$

$0 \leqslant a - x_i \leqslant h(x) \leqslant b - x_i \leqslant b - a$

$0 \leqslant h(x) \leqslant b - a$

$|h(x)| \leqslant b - a$, Aplicando a $|w(x)|$

$$|r_n| \leqslant C \frac{|w(x)|}{(n+1)!} \leqslant C \frac{|(b-a)^{n+1}|}{(n+1)!} = C \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

en otras palabras $|f(x) - P(x)|$ es $O\left(\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \Rightarrow O\left((b-a)^{n+1}\right)$

(b) Sea $g(x) = f(x) - P(x)$, com P interpola (n+1)!

(b) Sea $g(x) = f(x) - P(x)$, com P interpola a f en $\{x_0, \dots, x_n\}$ => $g(x_i) = 0$.

Como $g(x)$ es suma de funciones C^∞ tambien lo es y como esta definida en $[a,b]$ podemos usar Rolle.

Como $g(x_i) = 0$, sabemos que HAY n puntos $x_{i,i+1}$:

$g'(x_{i,i+1}) = 0$ y $x_i \leq x_{i,i+1} \leq x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

$g'(x_{i,i+1}) = 0$ y $x_i \leq x_{i,i+1} \leq x_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

y como $g'(x) = f'(x) - p'(x)$

$$g'(x_{i,i+1}) = 0 \iff f'(x_{i,i+1}) = p'(x_{i,i+1})$$

y tenemos que p' interpola en n puntos a f'.

Usando el punto (a)

$|f'(x) - p'(x)|$ es $O((b-a)^n)$

MATIAS MORAN, LIC. COMPUTACION, NL: 806/19

3. Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Calcular su descomposión en valores singulares reducida $A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^t$ y su pseudo-inversa $A^\dagger = V\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t$.

b) Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

x	1	3	7
y	4	4	-8

con una función del tipo: $y(x) = af_1(x) + bf_2(x)$ siendo $f_1(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ y $f_2(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

a)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B$$

a) $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B$

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4)$$

$\lambda_1 = 4$, $(B - 4I) \cdot V_1 = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot V_1 = 0 \iff V_1 = (1, -1)$

$\lambda_2 = 2$, $(B - 2I) \cdot V_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot V_2 = 0 \iff V_2 = (1, 1)$

$\hat{V}_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\hat{V}_2 = \dfrac{V_2}{\|V_2\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$AV = U\Sigma$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}2 & \sqrt{2}\,u_{12} \\ 2u_{21} & \sqrt{2}\,u_{22} \\ 2u_{31} & \sqrt{2}\,u_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u_{13} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & u_{23} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$U_3 = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} u_{23} + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{33} = 0 \\ u_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow U_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$A = \hat{U} \hat{\Sigma} V^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t$$

$$A = \hat{U} \hat{\Sigma} V^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Reduciendo

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t$$

$$A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(b) $$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(y_i - a\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x_i\right) - b\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x_i\right)\right)^2$$

Minimizamos S_n

$$\frac{\partial S_n}{\partial a} = 0 = \sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x_i\right)\right) = -\sum y_i F_1(x_i) + \sum \hat{y}_i F_1(x_i)$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial b} = 0 = \sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x_i\right)\right) = -\sum y_i F_2(x_i) + \sum \hat{y}_i F_2(x_i)$$

$$\begin{cases} \sum y_i f_1(x_i) = a \sum \sqrt{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) + b \sum \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) \\ \sum y_i f_2(x_i) = a \sum \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) + b \sum \sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = a c_3 + b c_4 \\ c_2 = a c_4 + b c_5 \end{cases}$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^{3} y_i \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) = -8$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^{3} y_i \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) = 16$$

$$C_3 = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{2} \cos^2\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C_4 = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_5 = \sum_{i=1}^{3} \sqrt{2} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} x_i\right) = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} -8 = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2+1}{\sqrt{2}}a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b \\[2ex] 16 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}a + \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2+1}{\sqrt{2}}b \end{cases}$$

$$(a,b) = \left(6\sqrt{2}-10,\ 14-6\sqrt{2}\right)$$

4. Sea $f(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{10}$.

a) Mostrar que f tiene exactamente 2 raíces $r_1 < r_2$.

b) Se considera la función $g(x) = -\frac{1}{10}e^{-x} - 1$. Mostrar que r_1 y r_2 son puntos fijos de g y dar un intervalo inicial I_2 para el cual el método de punto fijo determinado por g converja a r_2 para cualquier valor inicial $x_0 \in I_2$.

a) $f(-4) = (-3)e^{-4} + \frac{1}{10} \approx 0{,}045 > 0$

$f(-2) = (-1)e^{-2} + \frac{1}{10} \approx -0{,}035 < 0$

$f(-1) = \frac{1}{10} > 0$

Por bolzano f tiene 2 raices tal que

$-4 < r_1 < -2 < r_2 < -1$

Para ver que son unicas basta ver que f es creciente en $(-2,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-2)$

$$f'(x) = (x+2)e^x \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (-2,\infty) \\ < 0 & \text{si } x \in (-\infty,-2) \end{cases}$$

(b) $g(x) = -\dfrac{e^{-x}}{10} - 1$

r_1 y r_2 cumplen: $f(r_n) = (r_n+1)e^{r_n} + \frac{1}{10} = 0$

despejando:

$$r_n = -\frac{e^{-r_n}}{10} - 1 = g(r_n)\text{, } r_n \text{ es pto fijo de } g(x)$$

Para que el metodo converga se tiene que cumplir

Si $x \in [a,b] \Rightarrow g(x) \in [a,b]$

Si $x,y \in [a,b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x-y|$, $0 \leq \lambda < 1$

$g'(x) = \frac{e^{-x}}{10} > 0$, $\forall x$, g es creciente monotona

Veo que $\forall c \in [a,b]$

$$a \leq c \leq b$$

$$g(a) \leq g(c) \leq g(b)$$

Si tomo $a = -2$, $b = -1$

$$g(-2) \approx -1{,}73 \leq g(c) \leq g(-1) \approx -1{,}271$$

$$-2 < g(-2) \leq g(c) \leq g(-1) < -1$$

Y como g es creciente

$$\max_{x\in[a,b]} g(x) = g(b) \qquad \min_{x\in[a,b]} g(x) = g(a)$$

Asi si $x \in [-2,-1] \Rightarrow g(x) \in [g(-2), g(-1)] \in [-2,-1]$

qvq $\exists \lambda$ / si $x,y \in [-2,-1] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \lambda |x-y|$, $0 \leqslant \lambda < 1$

Por teo valor medio

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\varepsilon)| |x-y|, \quad \varepsilon \in [-2,-1]$$

Basta tomar $\lambda = |g'(\varepsilon)|_{\infty,[-2,-1]}$ y veique $\lambda < 1$

$$|g'(\xi)|_\infty = \left|\frac{e^{-\xi}}{10}\right|_\infty = \max_{\xi\in[-2,-1]} \frac{e^{-\xi}}{10} = \frac{e^{2}}{10} < \frac{3^{2}}{10} = \frac{9}{10} < 1$$

ASI SI nuesto $I_2 = [-2,-1]$, el metodo converge.

5. Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?

$x_0, x_1, A_0, A_1 = (2 \cdot 1 + 2) = 4$ grados de libertad

como $Q(F) = \sum_{i=0}^{n} A_n F(x_n)$ en este caso $n = 1$

Por lo tanto Q puede a lo sumo tener $2n+1 = 3$ grados de precision (ejercicio 19, practica 9)

$$I(1) = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 = \frac{4}{3} \qquad I(x) = \int_{-1}^{1} x(1-x^2) = 0$$

$$I(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2) = \frac{4}{15} \qquad I(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3(1-x^2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \\ x_0^2 & x_1^2 \\ x_0^3 & x_1^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{15} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ARMAMOS BON :

$$\varphi_1 = 1$$

$$\|\varphi_1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1-x^2 = \frac{4}{3}$$

$$P_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\varphi_2 = X - \left\langle X, \sqrt{\frac{3}{4}}\right\rangle \sqrt{\frac{3}{4}} = X - \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} X(1-x^2) = X$$

$$\|\varphi_2\|^2 = \langle X, X\rangle = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2) = \frac{4}{15}$$

$$P_2 = \frac{f_2}{\| f_2 \|} = \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{15}}} = \sqrt{\frac{15}{4}}\, x$$

$$f_3 = x^2 - \left\langle x^2, \sqrt{\tfrac{15}{4}}\, x \right\rangle \sqrt{\tfrac{15}{4}}\, x - \left\langle x^2, \sqrt{\tfrac{3}{4}} \right\rangle \sqrt{\tfrac{3}{4}} = x^2 - \frac{15}{4} x \int x^3 (1-x^2) - \frac{3}{4} \int x^2 (1-x^2)$$

$$= x^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = x^2 - \frac{1}{5}$$

$$(x_0, x_1) = \left(\sqrt{\tfrac{1}{5}}, -\sqrt{\tfrac{1}{5}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{15} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_0 = A_1 = \frac{2}{3}$$

ASI $\displaystyle\int_{-1}^{1} F(x)(1-x^2) = \frac{2}{3}F\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{2}{3}F\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

Y Tiene 3 Grados de Precision