Elementos de Cálculo Numérico/Cálculo Numérico

Clase 10

Primer Cuatrimestre 2021

Aproximación de funciones

Tabla de valores:

Aproximación de funciones

Tabla de valores:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Aproximación de funciones

Tabla de valores:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

- Datos experimentales

Aproximación de funciones

Tabla de valores:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

- Datos experimentales
- Evaluaciones de una función:

Aproximación de funciones

Tabla de valores:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

- Datos experimentales
- Evaluaciones de una función: $y = f(x)$

Aproximación de funciones

Tabla de valores:

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

- Datos experimentales
- Evaluaciones de una función: $y = f(x)$

  Buscamos una función *simple* (de cierta clase) que pase por esos puntos

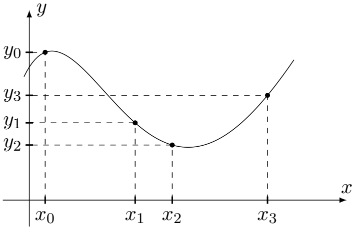
Aproximación de funciones

Tabla de valores:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

- Datos experimentales
- Evaluaciones de una función: $y = f(x)$

  Buscamos una función *simple* (de cierta clase) que pase por esos puntos



Interpolación polinomial

Planteamos una función polinomial de grado n

Interpolación polinomial

Planteamos una función polinomial de grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Interpolación polinomial

Planteamos una función polinomial de grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Si $p_n(x_0) = y_0$, $p_n(x_1) = y_1, \ldots, p_n(x_n) = y_n$

Interpolación polinomial

Planteamos una función polinomial de grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Si $p_n(x_0) = y_0$, $p_n(x_1) = y_1, \ldots, p_n(x_n) = y_n$

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1\, x_0 + \cdots + a_n\, x_0^n \\ y_1 &= a_0 + a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_1^n \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1\, x_n + \cdots + a_n\, x_n^n \end{aligned}$$

Interpolación polinomial

Planteamos una función polinomial de grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Si $p_n(x_0) = y_0$, $p_n(x_1) = y_1, \ldots, p_n(x_n) = y_n$

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 + a_1\, x_0 + \cdots + a_n\, x_0^n \\
y_1 &= a_0 + a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_1^n \\
&\vdots \\
y_n &= a_0 + a_1\, x_n + \cdots + a_n\, x_n^n
\end{aligned}$$

Sistema con $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas:

Interpolación polinomial

Planteamos una función polinomial de grado n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Si $p_n(x_0) = y_0$, $p_n(x_1) = y_1, \ldots, p_n(x_n) = y_n$

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1\, x_0 + \cdots + a_n\, x_0^n \\ y_1 &= a_0 + a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_1^n \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1\, x_n + \cdots + a_n\, x_n^n \end{aligned}$$

Sistema con $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas: $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Matriz de Vandermonde

Matriz del sistema

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Matriz de Vandermonde

Matriz del sistema

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Si $x_j \neq x_k$ entonces $V(x_0, \dots, x_n)$ es inversible

Matriz de Vandermonde

Matriz del sistema

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Si $x_j \neq x_k$ entonces $V(x_0, \ldots, x_n)$ es inversible $\Rightarrow p_n(x)$ único

Matriz de Vandermonde

Matriz del sistema

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Si $x_j \neq x_k$ entonces $V(x_0, \dots, x_n)$ es inversible $\Rightarrow p_n(x)$ único

Ejemplo: $n = 2$

Matriz de Vandermonde

Matriz del sistema

$$V(x_0,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Si $x_j \neq x_k$ entonces $V(x_0,\dots,x_n)$ es inversible $\Rightarrow p_n(x)$ único

Ejemplo: $n = 2$

$$\det(V(x_0,x_1,x_2)) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$$

Interpolación de Lagrange

Resolver un sistema lineal $(n+1) \times (n+1)$ es costoso

Interpolación de Lagrange

Resolver un sistema lineal $(n+1) \times (n+1)$ es costoso

Idea de Lagrange: hallar polinomios $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$

Interpolación de Lagrange

Resolver un sistema lineal $(n+1) \times (n+1)$ es costoso

Idea de Lagrange: hallar polinomios $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$

$L_j(x_0) = 0, L_j(x_1) = 0, \ldots, L_j(x_j) = 1, \ldots, L_j(x_n) = 0$

Interpolación de Lagrange

Resolver un sistema lineal $(n+1)\times(n+1)$ es costoso

Idea de Lagrange: hallar polinomios $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$

$L_j(x_0) = 0, L_j(x_1) = 0, \dots, L_j(x_j) = 1, \dots, L_j(x_n) = 0$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

Interpolación de Lagrange

Resolver un sistema lineal $(n+1) \times (n+1)$ es costoso

Idea de Lagrange: hallar polinomios $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$

$L_j(x_0) = 0, L_j(x_1) = 0, \ldots, L_j(x_j) = 1, \ldots, L_j(x_n) = 0$

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$$

$$p_n(x) = y_0\, L_0(x) + \cdots + y_n\, L_n(x)$$

Interpolación de Lagrange

Resolver un sistema lineal $(n+1)\times(n+1)$ es costoso

Idea de Lagrange: hallar polinomios $L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$

$L_j(x_0) = 0, L_j(x_1) = 0, \ldots, L_j(x_j) = 1, \ldots, L_j(x_n) = 0$

$$L_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$p_n(x) = y_0\,L_0(x) + \cdots + y_n\,L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x).$$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(-1)\,.\,(-3)}$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(-1)\,.\,(-3)} = \dfrac{1}{3}\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x + 1$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(-1)\,.\,(-3)} = \dfrac{1}{3}\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x + 1$
- $L_1(x) = \dfrac{x\,(x-3)}{1\,.\,(-2)}$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(-1)\,.\,(-3)} = \dfrac{1}{3}\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x + 1$
- $L_1(x) = \dfrac{x\,(x-3)}{1\,.\,(-2)} = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(-1)\,.\,(-3)} = \dfrac{1}{3}\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x + 1$
- $L_1(x) = \dfrac{x\,(x-3)}{1\,.\,(-2)} = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x$
- $L_2(x) = \dfrac{x\,(x-1)}{3\,.\,2}$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

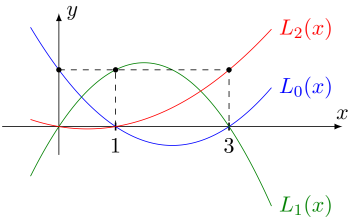
Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(-1)\,.\,(-3)} = \dfrac{1}{3}\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x + 1$
- $L_1(x) = \dfrac{x\,(x-3)}{1\,.\,(-2)} = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x$
- $L_2(x) = \dfrac{x\,(x-1)}{3\,.\,2} = \dfrac{1}{6}\,x^2 - \dfrac{1}{6}\,x$

Polinomios de Lagrange: ejemplo

Si $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$

- $L_0(x) = \dfrac{(x-1)\,(x-3)}{(-1)\,.\,(-3)} = \dfrac{1}{3}\,x^2 - \dfrac{4}{3}\,x + 1$
- $L_1(x) = \dfrac{x\,(x-3)}{1\,.\,(-2)} = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{2}\,x$
- $L_2(x) = \dfrac{x\,(x-1)}{3\,.\,2} = \dfrac{1}{6}\,x^2 - \dfrac{1}{6}\,x$



Interpolación de Lagrange: ejemplo

Función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 0.5]$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

Función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 0.5]$

Puntos equidistantes: $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2\,h, \ldots, x_n = 0.5$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

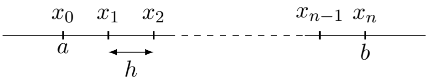
Función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 0.5]$

Puntos equidistantes: $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2\,h, \ldots, x_n = 0.5 \quad h = \dfrac{0.5}{n}$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

Función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 0.5]$

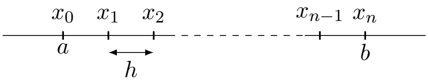
Puntos equidistantes: $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2\,h, \ldots, x_n = 0.5 \quad h = \dfrac{0.5}{n}$



Interpolación de Lagrange: ejemplo

Función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 0.5]$

Puntos equidistantes: $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2\,h, \ldots, x_n = 0.5 \quad h = \dfrac{0.5}{n}$



n	$\max\|f(x) - p_n(x)\|$	n	$\max\|f(x) - p_n(x)\|$
2	2.1051×10^{-1}	6	1.7105×10^{-5}
3	2.3537×10^{-2}	7	1.2085×10^{-6}
4	2.3932×10^{-3}	8	7.6645×10^{-8}
5	2.1533×10^{-4}	9	4.4015×10^{-9}

Gráficos de $p_n(x)$

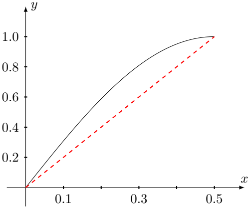
Para $f(x) = \text{sen}(\pi x)$

Gráficos de $p_n(x)$

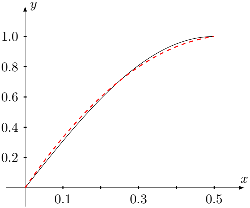
Para $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) \qquad [a, b] = [0, 0.5]$

Gráficos de $p_n(x)$

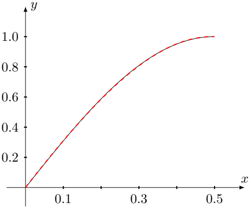
Para $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$ $\qquad [a, b] = [0, 0.5]$



(a) Grafico de $p_1(x)$



(b) Gráfico de $p_2(x)$



(c) Gráfico de $p_3(x)$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

Función $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ en el intervalo $[a, b] = [-5, 5]$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

Función $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ en el intervalo $[a, b] = [-5, 5]$

Puntos equidistantes: $x_0 = -5, x_1 = -5 + h, \ldots, x_n = 5$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

Función $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ en el intervalo $[a, b] = [-5, 5]$

Puntos equidistantes: $x_0 = -5, x_1 = -5 + h, \ldots, x_n = 5$

n	$\max\lvert f(x) - p_n(x)\rvert$	n	$\max\lvert f(x) - p_n(x)\rvert$
2	9.8652×10^{-1}	7	4.4200×10^{-1}
3	5.9306×10^{-1}	8	1.7085×10^{-1}
4	5.9135×10^{-1}	9	5.6791×10^{-1}
5	3.9335×10^{-1}	10	2.2243×10^{-1}
6	2.5965×10^{-1}	11	7.7654×10^{-1}

Interpolación de Lagrange: ejemplo

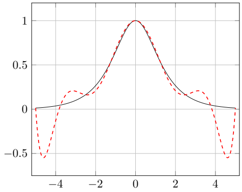
Para $f(x) = \operatorname{sech}(x)$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

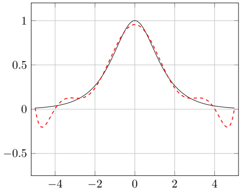
Para $f(x) = \operatorname{sech}(x) \qquad [a, b] = [-5, 5]$

Interpolación de Lagrange: ejemplo

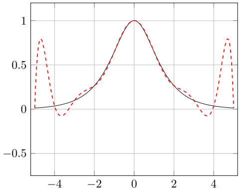
Para $f(x) = \operatorname{sech}(x) \qquad [a, b] = [-5, 5]$



(a) Grafico de $p_8(x)$



(b) Gráfico de $p_9(x)$



(c) Gráfico de $p_{10}(x)$

Forma de Newton

Si $p_1(x_0) = y_0$ y $p_1(x_1) = y_1$

Forma de Newton

Si $p_1(x_0) = y_0$ y $p_1(x_1) = y_1$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Forma de Newton

Si $p_1(x_0) = y_0$ y $p_1(x_1) = y_1$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Si $p_2(x) = p_1(x) +$ *término cuadrático*

Forma de Newton

Si $p_1(x_0) = y_0$ y $p_1(x_1) = y_1$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Si $p_2(x) = p_1(x) +$ *término cuadrático*

El término cuadrático debe anularse en x_0 y en x_1:

Forma de Newton

Si $p_1(x_0) = y_0$ y $p_1(x_1) = y_1$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Si $p_2(x) = p_1(x) +$ *término cuadrático*

El término cuadrático debe anularse en x_0 y en x_1: $a_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)$

Forma de Newton

Si $p_1(x_0) = y_0$ y $p_1(x_1) = y_1$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Si $p_2(x) = p_1(x) +$ *término cuadrático*

El término cuadrático debe anularse en x_0 y en x_1: $a_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)$

De $y_2 = p_2(x_2)$

Forma de Newton

Si $p_1(x_0) = y_0$ y $p_1(x_1) = y_1$

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Si $p_2(x) = p_1(x) +$ *término cuadrático*

El término cuadrático debe anularse en x_0 y en x_1: $a_2\,(x - x_0)\,(x - x_1)$

De $y_2 = p_2(x_2) \Rightarrow y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2\,(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)$

$$a_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.$$

Forma de Newton

Si definimos las diferencias divididas

Forma de Newton

Si definimos las diferencias divididas

$$f[x_0] = f(x_0)$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Forma de Newton

Si definimos las diferencias divididas

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Tenemos

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1)$$

Forma de Newton

Si definimos las diferencias divididas

$$
\begin{aligned}
f[x_0] &= f(x_0) \\
f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}
\end{aligned}
$$

Tenemos

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1)$$

Forma de Newton: ejemplo

Queremos hallar $p_2(x)$ correspondiente a la tabla

Forma de Newton: ejemplo

Queremos hallar $p_2(x)$ correspondiente a la tabla

x	-1	1	3
y	1	-5	5

Forma de Newton: ejemplo

Queremos hallar $p_2(x)$ correspondiente a la tabla

x	-1	1	3
y	1	-5	5

Las diferencias divididas valen

Forma de Newton: ejemplo

Queremos hallar $p_2(x)$ correspondiente a la tabla

x	-1	1	3
y	1	-5	5

Las diferencias divididas valen

$$f[-1] = \mathbf{1}$$

$$f[-1,1] = \frac{-5-1}{1-(-1)} = \mathbf{-3}$$

$$f[1] = -5$$

$$f[-1,1,3] = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \mathbf{2},$$

$$f[1,3] = \frac{5-(-5)}{3-1} = 5$$

$$f[3] = 5$$

Forma de Newton: ejemplo

Queremos hallar $p_2(x)$ correspondiente a la tabla

x	-1	1	3
y	1	-5	5

Las diferencias divididas valen

$$f[-1] = \mathbf{1}$$

$$f[-1,1] = \frac{-5-1}{1-(-1)} = \mathbf{-3}$$

$$f[1] = -5$$

$$f[-1,1,3] = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \mathbf{2},$$

$$f[1,3] = \frac{5-(-5)}{3-1} = 5$$

$$f[3] = 5$$

$$p_2(x) = 1 - 3(x+1) + 2(x+1)(x-1)$$

Forma de Newton: ejemplo

Queremos hallar $p_2(x)$ correspondiente a la tabla

x	-1	1	3
y	1	-5	5

Las diferencias divididas valen

$$f[-1] = \mathbf{1}$$

$$f[-1,1] = \frac{-5-1}{1-(-1)} = \mathbf{-3}$$

$$f[1] = -5$$

$$f[-1,1,3] = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \mathbf{2},$$

$$f[1,3] = \frac{5-(-5)}{3-1} = 5$$

$$f[3] = 5$$

$$p_2(x) = 1 - 3(x+1) + 2(x+1)(x-1) = 2x^2 - 3x - 4$$

Diferencias divididas

Si definimos inductivamente

Diferencias divididas

Si definimos inductivamente: $f[x_k] = y_k$ para $k = 0, \dots, n$

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

La forma de Newton del polinomio interpolador

Diferencias divididas

Si definimos inductivamente: $f[x_k] = y_k$ para $k = 0, \ldots, n$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

La forma de Newton del polinomio interpolador

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$

Diferencias divididas

Si definimos inductivamente: $f[x_k] = y_k$ para $k = 0, \ldots, n$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

La forma de Newton del polinomio interpolador

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$

Productoria: $\prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$

Diferencias divididas

Si definimos inductivamente: $f[x_k] = y_k$ para $k = 0, \ldots, n$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

La forma de Newton del polinomio interpolador

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$

Productoria: $\prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) = (x - x_0)\,(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$

Fórmula de error de interpolación

Error: $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

Fórmula de error de interpolación

Error: $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W(x)$$

Fórmula de error de interpolación

Error: $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W(x)$$

$W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Fórmula de error de interpolación

Error: $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W(x)$$

$W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

$$\max_{x \in [a,b]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x \in [a,b]} |W(x)|$$

Fórmula de error de interpolación

Error: $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W(x)$$

$W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

$$\max_{x \in [a,b]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \max_{x \in [a,b]} |W(x)|$$

¿Cómo elegir $x_0, x_1, \dots, x_n$ para que $\max_{x \in [a,b]} |W(x)|$ sea mínimo?

Fórmula de error de interpolación

Para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ equiespaciados

Fórmula de error de interpolación

Para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ equiespaciados

$$\max_{x \in [a,b]} |W(x)| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$$

Fórmula de error de interpolación

Para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ equiespaciados

$$\max_{x \in [a,b]} |W(x)| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$$

El error vale

Fórmula de error de interpolación

Para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ equiespaciados

$$\max_{x\in[a,b]} |W(x)| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$$

El error vale

$$\max_{x\in[a,b]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

Fórmula de error de interpolación

Para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ equiespaciados

$$\max_{x\in[a,b]} |W(x)| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$$

El error vale

$$\max_{x\in[a,b]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

$\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$

Fórmula de error de interpolación

Para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ equiespaciados

$$\max_{x\in[a,b]} |W(x)| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$$

El error vale

$$\max_{x\in[a,b]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

$\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$ $\quad \left(\max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \to ?\right)$

Criterio de Chebyshev

Elección óptima:

Criterio de Chebyshev

Elección óptima: para el intervalo $[-1, 1]$

Criterio de Chebyshev

Elección óptima: para el intervalo $[-1, 1]$ tomamos $\theta = \pi/(2n+2)$

Criterio de Chebyshev

Elección óptima: para el intervalo $[-1, 1]$ tomamos $\theta = \pi/(2n+2)$

$$x_n = \cos(\theta), x_{n-1} = \cos(3\theta), \ldots, x_0 = \cos((2n+1)\theta)$$

Criterio de Chebyshev

Elección óptima: para el intervalo $[-1, 1]$ tomamos $\theta = \pi/(2n+2)$

$$x_n = \cos(\theta), x_{n-1} = \cos(3\theta), \ldots, x_0 = \cos((2n+1)\theta)$$

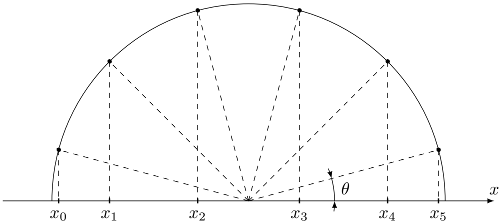


Fig.: Puntos de interpolación con el criterio de Chebyshev ($n = 5$).

Criterio de Chebyshev

Elección óptima: para el intervalo $[-1, 1]$ tomamos $\theta = \pi/(2n+2)$

$$x_n = \cos(\theta), x_{n-1} = \cos(3\theta), \ldots, x_0 = \cos((2n+1)\theta)$$

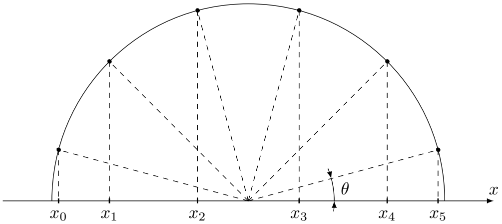


Fig.: Puntos de interpolación con el criterio de Chebyshev ($n = 5$).

Se acumulan en los extremos del intervalo

Criterio de Chebyshev

Para otros intervalos:

Criterio de Chebyshev

Para otros intervalos: transformación lineal

Criterio de Chebyshev

Para otros intervalos: transformación lineal

Si $[a, b] = [-5, 5]$

Criterio de Chebyshev

Para otros intervalos: transformación lineal

Si $[a,b] = [-5,5] \Rightarrow \tilde{x}_k = 5x_k$

Criterio de Chebyshev

Para otros intervalos: transformación lineal

Si $[a, b] = [-5, 5] \Rightarrow \tilde{x}_k = 5x_k$

Para $f(x) = \operatorname{sech}(x)$

Criterio de Chebyshev

Para otros intervalos: transformación lineal

Si $[a,b]=[-5,5] \Rightarrow \tilde{x}_k = 5x_k$

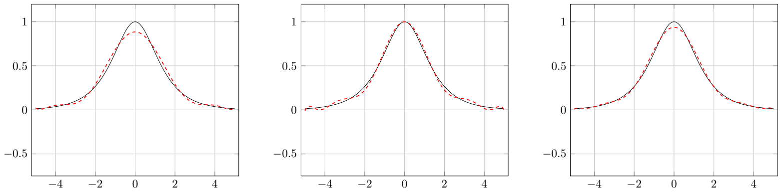
Para $f(x)=\operatorname{sech}(x) \qquad [a,b]=[-5,5]$

Criterio de Chebyshev

Para otros intervalos: transformación lineal

Si $[a,b] = [-5,5] \Rightarrow \tilde{x}_k = 5x_k$

Para $f(x) = \operatorname{sech}(x) \qquad [a,b] = [-5,5]$



(a) Grafico de $p_9(x)$. (b) Gráfico de $p_{10}(x)$. (c) Gráfico de $p_{11}(x)$.

Fig.: Gráfico de $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ y las aproximaciones polinomiales.

Polinomios $L_j(x)$

Graficamos $L_5(x)$ para $n = 8$ y distribución:

Polinomios $L_j(x)$

Graficamos $L_5(x)$ para $n = 8$ y distribución:

(a Equidistante

Polinomios $L_j(x)$

Graficamos $L_5(x)$ para $n = 8$ y distribución:

(a) Equidistante

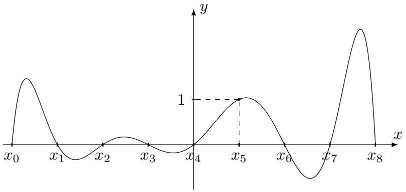
(b) Criterio de Chebyshev

Polinomios $L_j(x)$

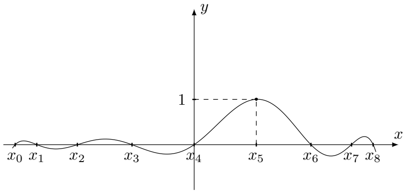
Graficamos $L_5(x)$ para $n = 8$ y distribución:

(a) Equidistante

(b) Criterio de Chebyshev



(a) Equidistante



(b) Chebyshev

Error con el criterio de Chebyshev

Para el intervalo $[-1, 1]$

Error con el criterio de Chebyshev

Para el intervalo $[-1, 1]$

$$|W(x)| = |(x - \cos(\theta))\,(x - \cos(3\,\theta))\dots(x - \cos((2n+1)\,\theta)| \leq \frac{1}{2^n}$$

El error vale

Error con el criterio de Chebyshev

Para el intervalo $[-1, 1]$

$$|W(x)| = |(x - \cos(\theta))\,(x - \cos(3\,\theta)) \ldots (x - \cos((2n+1)\,\theta)| \leq \frac{1}{2^n}$$

El error vale

$$\max_{x \in [-1,1]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{2^n\,(n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

Error con el criterio de Chebyshev

Para el intervalo $[-1, 1]$

$$|W(x)| = |(x - \cos(\theta))\,(x - \cos(3\,\theta)) \ldots (x - \cos((2n+1)\,\theta)| \leq \frac{1}{2^n}$$

El error vale

$$\max_{x\in[-1,1]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{2^n\,(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Para el intervalo $[a, b]$

Error con el criterio de Chebyshev

Para el intervalo $[-1, 1]$

$$|W(x)| = |(x - \cos(\theta))\,(x - \cos(3\,\theta)) \ldots (x - \cos((2n+1)\,\theta)| \leq \frac{1}{2^n}$$

El error vale

$$\max_{x\in[-1,1]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{2^n\,(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Para el intervalo $[a, b]$

$$\max_{x\in[a,b]} |r_n(x)| \leq \frac{1}{2^n\,(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$$

Interpolación de Hermite

- Polinomios de Taylor:

Interpolación de Hermite

- Polinomios de Taylor:

  $P_n(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en x_0

Interpolación de Hermite

- Polinomios de Taylor:

  $P_n(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en x_0

- Interpolación de Lagrange:

Interpolación de Hermite

- Polinomios de Taylor:

  $P_n(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en x_0

- Interpolación de Lagrange:

  $P_n(x)$ coinciden con $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Interpolación de Hermite

- Polinomios de Taylor:

  $P_n(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en x_0

- Interpolación de Lagrange:

  $P_n(x)$ coinciden con $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

- Interpolación de Hermite:

Interpolación de Hermite

- Polinomios de Taylor:

  $P_n(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en x_0

- Interpolación de Lagrange:

  $P_n(x)$ coinciden con $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

- Interpolación de Hermite:

  $P_m(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Interpolación de Hermite

- Polinomios de Taylor:

  $P_n(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en x_0

- Interpolación de Lagrange:

  $P_n(x)$ coinciden con $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

- Interpolación de Hermite:

  $P_m(x)$ y sus derivadas coinciden con las de $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n
$f'(x)$	y'_0	–	$\cdots$	y'_n
$f''(x)$	y''_0	–	$\cdots$	–

Forma de Newton

- Polinomios de Taylor:

Forma de Newton

- Polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n$$

Forma de Newton

- Polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + \cdots + a_n\,(x - x_0)^n$$

- Interpolación de Lagrange:

Forma de Newton

- Polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n$$

- Interpolación de Lagrange:

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + \cdots + a_n (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Forma de Newton

- Polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n$$

- Interpolación de Lagrange:

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + \cdots + a_n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

- Interpolación de Hermite:

Forma de Newton

- Polinomios de Taylor:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

- Interpolación de Lagrange:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

- Interpolación de Hermite:

$$P_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \cdots + a_m(x - x_0)^3(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})^k$$

Ejemplo

Ejemplo:

Ejemplo

Ejemplo:

- $f(-1) = -3, f'(-1) = -1$

Ejemplo

Ejemplo:

- $f(-1) = -3, f'(-1) = -1$
- $f'(0) = 0, f'(0) = 2, f''(0) = -6$

Ejemplo

Ejemplo:

- $f(-1) = -3, f'(-1) = -1$
- $f'(0) = 0, f'(0) = 2, f''(0) = -6$
- $f(1) = -1$

Ejemplo

Ejemplo:

- $f(-1) = -3, f'(-1) = -1$
- $f'(0) = 0, f'(0) = 2, f''(0) = -6$
- $f(1) = -1$

x	-1	0	1
$f(x)$	-3	0	-1
$f'(x)$	-1	2	–
$f''(x)$	–	-6	–

Ejemplo

Ejemplo:

- $f(-1) = -3, f'(-1) = -1$
- $f'(0) = 0, f'(0) = 2, f''(0) = -6$
- $f(1) = -1$

x	-1	0	1
$f(x)$	-3	0	-1
$f'(x)$	-1	2	–
$f''(x)$	–	-6	–

Número de condiciones:

Ejemplo

Ejemplo:

- $f(-1) = -3, f'(-1) = -1$
- $f'(0) = 0, f'(0) = 2, f''(0) = -6$
- $f(1) = -1$

x	-1	0	1
$f(x)$	-3	0	-1
$f'(x)$	-1	2	–
$f''(x)$	–	-6	–

Número de condiciones: $2 + 3 + 1 = 6$

Ejemplo

Número de condiciones: 6

Ejemplo

Número de condiciones: $6 \Rightarrow$ Coeficientes:

Ejemplo

Número de condiciones: $6 \Rightarrow$ Coeficientes: $a_0, a_1, \ldots, a_5$

Ejemplo

Número de condiciones: $6 \Rightarrow$ Coeficientes: $a_0, a_1, \ldots, a_5$

$$p_5(x) = a_0 + a_1\,(x+1) + (x+1)^2\left(a_2 + a_3\,x + a_4\,x^2 + x^3\,(a_5)\right)$$

Ejemplo

Número de condiciones: $6 \Rightarrow$ Coeficientes: $a_0, a_1, \ldots, a_5$

$$p_5(x) = a_0 + a_1\,(x+1) + (x+1)^2\left(a_2 + a_3\,x + a_4\,x^2 + x^3\,(a_5)\right)$$

Diferencias divididas con x_j repetidos:

Ejemplo

Número de condiciones: $6 \Rightarrow$ Coeficientes: $a_0, a_1, \ldots, a_5$

$$p_5(x) = a_0 + a_1\,(x+1) + (x+1)^2\left(a_2 + a_3\,x + a_4\,x^2 + x^3\,(a_5)\right)$$

Diferencias dividas con x_j repetidos:

$f[-1] = f(-1) = -3, \quad f[-1,-1] = f'(-1) = -1$

Ejemplo

Número de condiciones: $6 \Rightarrow$ Coeficientes: $a_0, a_1, \ldots, a_5$

$$p_5(x) = a_0 + a_1\,(x+1) + (x+1)^2 \left(a_2 + a_3\,x + a_4\,x^2 + x^3\,(a_5)\right)$$

Diferencias dividas con x_j repetidos:

$f[-1] = f(-1) = -3, \quad f[-1,-1] = f'(-1) = -1$

$f[0] = f(0) = 0, \quad f[0,0] = f'(0) = 2, \quad f[0,0,0] = \frac{1}{2} f''(0) = -3$

Ejemplo

Número de condiciones: $6 \Rightarrow$ Coeficientes: $a_0, a_1, \ldots, a_5$

$$p_5(x) = a_0 + a_1\,(x+1) + (x+1)^2\left(a_2 + a_3\,x + a_4\,x^2 + x^3\,(a_5)\right)$$

Diferencias dividas con x_j repetidos:

$f[-1] = f(-1) = -3, \quad f[-1,-1] = f'(-1) = -1$

$f[0] = f(0) = 0, \quad f[0,0] = f'(0) = 2, \quad f[0,0,0] = \frac{1}{2} f''(0) = -3$

$f[1] = f(1) = -1$

Ejemplo

Diferencias divididas (valores x_j repetidos)

x_k	$f[x_j]$	$f[x_j, x_k]$	$f[x_j, x_k, x_l]$	....		
-1	$\boxed{-3}$					
		$\boxed{-1}$				
-1	$\boxed{-3}$		4			
		3		-5		
0	$\boxed{0}$		-1		3	
		$\boxed{2}$		-2		-1
0	$\boxed{0}$		$\boxed{-3}$		1	
		$\boxed{2}$		0		
0	$\boxed{0}$		-3			
		-1				
1	$\boxed{-1}$					

Ejemplo: verificación

Polinomio interpolador de Hermite y sus derivadas:

Ejemplo: verificación

Polinomio interpolador de Hermite y sus derivadas:

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= -3 - (x+1) + (x+1)^2 \Big(4 - 5\,x + 3\,x^2 + x^3\,(-1) \Big) \\
&= 2\,x - 3\,x^2 + x^4 - x^5 \\
p_5'(x) &= 2 - 6\,x + 4\,x^3 - 5\,x^4 \\
p_5''(x) &= -6 + 12\,x^2 - 20\,x^3
\end{aligned}
$$

Ejemplo: verificación

Polinomio interpolador de Hermite y sus derivadas:

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= -3 - (x+1) + (x+1)^2\Big(4 - 5\,x + 3\,x^2 + x^3\,(-1)\Big) \\
&= 2\,x - 3\,x^2 + x^4 - x^5 \\
p_5'(x) &= 2 - 6\,x + 4\,x^3 - 5\,x^4 \\
p_5''(x) &= -6 + 12\,x^2 - 20\,x^3
\end{aligned}
$$

Verificación:

Ejemplo: verificación

Polinomio interpolador de Hermite y sus derivadas:

$$
\begin{aligned}
p_5(x) &= -3 - (x+1) + (x+1)^2\Big(4 - 5\,x + 3\,x^2 + x^3\,(-1)\Big) \\
&= 2\,x - 3\,x^2 + x^4 - x^5 \\
p_5'(x) &= 2 - 6\,x + 4\,x^3 - 5\,x^4 \\
p_5''(x) &= -6 + 12\,x^2 - 20\,x^3
\end{aligned}
$$

Verificación:

x	-1	0	1
$p_5(x)$	-3	0	-1
$p_5'(x)$	-1	2	-5
$p_5''(x)$	26	-6	-14

En general

En general

- $f(x_0) = y_{0,0}, f'(x_0) = y_{0,1}, \ldots, f^{(q_0-1)}(x_0) = y_{0,q_0-1}$ (q_0 cond.)

En general

- $f(x_0) = y_{0,0}, f'(x_0) = y_{0,1}, \ldots, f^{(q_0-1)}(x_0) = y_{0,q_0-1}$ (q_0 cond.)
- $f(x_1) = y_{1,0}, f'(x_1) = y_{1,1}, \ldots, f^{(q_1-1)}(x_1) = y_{1,q_1-1}$ (q_1 cond.)

En general

- $f(x_0) = y_{0,0}, f'(x_0) = y_{0,1}, \ldots, f^{(q_0-1)}(x_0) = y_{0,q_0-1}$ (q_0 cond.)
- $f(x_1) = y_{1,0}, f'(x_1) = y_{1,1}, \ldots, f^{(q_1-1)}(x_1) = y_{1,q_1-1}$ (q_1 cond.)

$$\vdots$$

- $f(x_n) = y_{n,0}, f'(x_n) = y_{n,1}, \ldots, f^{(q_n-1)}(x_n) = y_{n,q_n-1}$ (q_n cond.)

En general

- $f(x_0) = y_{0,0}, f'(x_0) = y_{0,1}, \dots, f^{(q_0-1)}(x_0) = y_{0,q_0-1}$ (q_0 cond.)
- $f(x_1) = y_{1,0}, f'(x_1) = y_{1,1}, \dots, f^{(q_1-1)}(x_1) = y_{1,q_1-1}$ (q_1 cond.)

  $\vdots$
- $f(x_n) = y_{n,0}, f'(x_n) = y_{n,1}, \dots, f^{(q_n-1)}(x_n) = y_{n,q_n-1}$ (q_n cond.)

Número de condiciones $q_0 + q_1 + \cdots + q_n$

En general

- $f(x_0) = y_{0,0}, f'(x_0) = y_{0,1}, \ldots, f^{(q_0-1)}(x_0) = y_{0,q_0-1}$ (q_0 cond.)
- $f(x_1) = y_{1,0}, f'(x_1) = y_{1,1}, \ldots, f^{(q_1-1)}(x_1) = y_{1,q_1-1}$ (q_1 cond.)

  $\vdots$
- $f(x_n) = y_{n,0}, f'(x_n) = y_{n,1}, \ldots, f^{(q_n-1)}(x_n) = y_{n,q_n-1}$ (q_n cond.)

Número de condiciones $q_0 + q_1 + \cdots + q_n \Rightarrow m = q_0 + q_1 + \cdots + q_n - 1$

$$\begin{aligned} p_m(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + \cdots f[x_0, \ldots, x_0](x - x_0)^{q_0-1} \\ & + f[x_0, \ldots, x_0, x_1](x - x_0)^{q_0} + f[x_0, \ldots, x_1, x_1](x - x_0)^{q_0}(x - x_1) \\ & + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)^{q_0}(x - x_1)^{q_1} \ldots (x - x_n)^{q_n-1} \end{aligned}$$

Interpolación de Hermite: error

Error: $r_m(x) = f(x) - p_m(x)$

Interpolación de Hermite: error

Error: $r_m(x) = f(x) - p_m(x)$

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}W(x)$$

Interpolación de Hermite: error

Error: $r_m(x) = f(x) - p_m(x)$

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} W(x)$$

$W(x) = (x - x_0)^{q_0} (x - x_1)^{q_1} \ldots (x - x_n)^{q_n}$

Interpolación de Hermite: error

Error: $r_m(x) = f(x) - p_m(x)$

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} W(x)$$

$W(x) = (x - x_0)^{q_0} (x - x_1)^{q_1} \dots (x - x_n)^{q_n}$

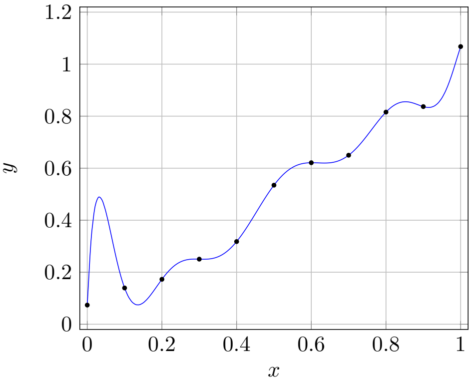
$$\max_{x\in[a,b]} |r_m(x)| \leq \frac{1}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(m+1)}(x) \right| \max_{x\in[a,b]} |W(x)|$$

Oscilación de los polinomios interpoladores

Si el n es grande, p_n es de alto grado: muchas oscilaciones

Ejemplo:

n	x	y
0	0.0	0.0736
1	0.1	0.1394
2	0.2	0.1728
3	0.3	0.2503
4	0.4	0.3178
5	0.5	0.5346
6	0.6	0.6210
7	0.7	0.6498
8	0.8	0.8156
9	0.9	0.8368
10	1.0	1.0680



Interpolación segmentada lineal

La función $s_1(x)$ verifica

Interpolación segmentada lineal

La función $s_1(x)$ verifica

- $s_1(x_j) = y_j$

Interpolación segmentada lineal

La función $s_1(x)$ verifica

- $s_1(x_j) = y_j$
- $s_1(x)$ es una función lineal en cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$

Interpolación segmentada lineal

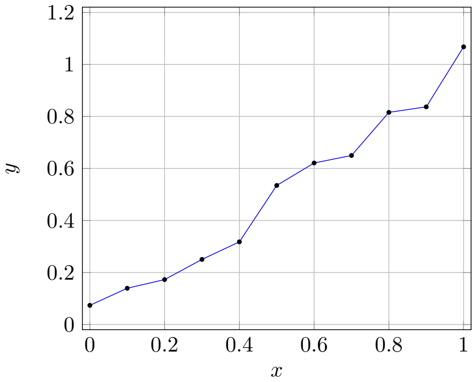
La función $s_1(x)$ verifica

- $s_1(x_j) = y_j$
- $s_1(x)$ es una función lineal en cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$

$$s_1(x) = \begin{cases} y_0 \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + y_1 \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} & \text{, si } x \in [x_0, x_1], \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1} \dfrac{x_n - x}{x_n - x_{n-1}} + y_n \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{, si } x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

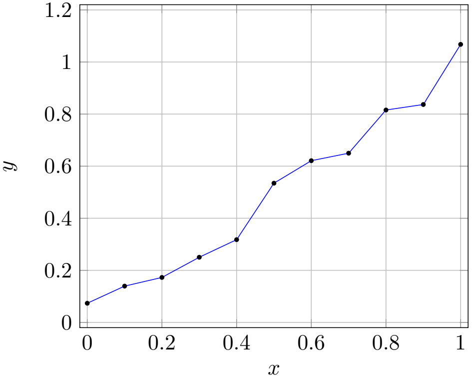
Interpolación segmentada lineal: ejemplo

n	x	y
0	0.0	0.0736
1	0.1	0.1394
2	0.2	0.1728
3	0.3	0.2503
4	0.4	0.3178
5	0.5	0.5346
6	0.6	0.6210
7	0.7	0.6498
8	0.8	0.8156
9	0.9	0.8368
10	1.0	1.0680



Interpolación segmentada lineal: ejemplo

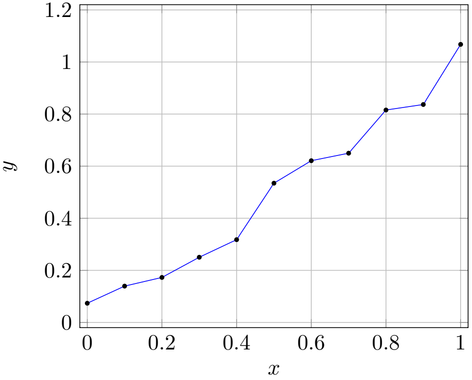
n	x	y
0	0.0	0.0736
1	0.1	0.1394
2	0.2	0.1728
3	0.3	0.2503
4	0.4	0.3178
5	0.5	0.5346
6	0.6	0.6210
7	0.7	0.6498
8	0.8	0.8156
9	0.9	0.8368
10	1.0	1.0680



$s_1(t)$ no oscila, es continua

Interpolación segmentada lineal: ejemplo

n	x	y
0	0.0	0.0736
1	0.1	0.1394
2	0.2	0.1728
3	0.3	0.2503
4	0.4	0.3178
5	0.5	0.5346
6	0.6	0.6210
7	0.7	0.6498
8	0.8	0.8156
9	0.9	0.8368
10	1.0	1.0680



$s_1(t)$ no oscila, es continua pero no derivable

Interpolación segmentada lineal: error

En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

Interpolación segmentada lineal: error

En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi)| (x_j - x)(x - x_{j-1})$$

Interpolación segmentada lineal: error

En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi)|(x_j - x)(x - x_{j-1})$$

Si son equidistantes:

Interpolación segmentada lineal: error

En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi)|(x_j - x)(x - x_{j-1})$$

Si son equidistantes: $x_j - x_{j-1} = \dfrac{b-a}{n}$

Interpolación segmentada lineal: error

En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi)|(x_j - x)(x - x_{j-1})$$

Si son equidistantes: $x_j - x_{j-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$$(x_j - x)(x - x_{j-1}) \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2}$$

Interpolación segmentada lineal: error

En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi)|(x_j - x)(x - x_{j-1})$$

Si son equidistantes: $x_j - x_{j-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$$(x_j - x)(x - x_{j-1}) \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2}$$

Para $x \in [a, b]$

Interpolación segmentada lineal: error

En cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(\xi)| (x_j - x)(x - x_{j-1})$$

Si son equidistantes: $x_j - x_{j-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$$(x_j - x)(x - x_{j-1}) \leq \frac{(b-a)^2}{4n^2}$$

Para $x \in [a, b]$

$$|f(x) - s_1(x)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)| \frac{(b-a)^2}{8n^2}$$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para que sea derivable:

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para que sea derivable: $s(t)$ debe ser de orden más alto

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para que sea derivable: $s(t)$ debe ser de orden más alto

Si $s_3(t)$ es cúbica en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$:

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para que sea derivable: $s(t)$ debe ser de orden más alto

Si $s_3(t)$ es cúbica en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$: $s_3(t)$ dos veces derivable

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para que sea derivable: $s(t)$ debe ser de orden más alto

Si $s_3(t)$ es cúbica en cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$: $s_3(t)$ dos veces derivable

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= s_3(x_0) \\
f(x_1) &= s_3(x_1^-) = s_3(x_1^+), \quad s_3'(x_1^-) = s_3'(x_1^+), \quad s_3''(x_1^-) = s_3''(x_1^+) \\
f(x_2) &= s_3(x_2^-) = s_3(x_2^+), \quad s_3'(x_2^-) = s_3'(x_2^+), \quad s_3''(x_2^-) = s_3''(x_2^+) \\
&\vdots \\
f(x_k) &= s_3(x_k^-) = s_3(x_k^+), \quad s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+), \quad s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+) \\
&\vdots \\
f(x_n) &= s_3(x_n)
\end{aligned}
$$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \dots, n - 1$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$$

$\Rightarrow 4$ condiciones

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$s_3(x_k^-) = y_k,\ \ s_3(x_k^+) = y_k,\ \ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ \ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n$$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k, \; s_3(x_k^+) = y_k, \; s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+), \; s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

Número total coeficientes: $4\,n$ coeficientes

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \dots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

Número total coeficientes: $4\,n$ coeficientes (se pueden elegir 2 libremente)

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \dots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

Número total coeficientes: $4\,n$ coeficientes (se pueden elegir 2 libremente)

Condiciones adicionales

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

Número total coeficientes: $4\,n$ coeficientes (se pueden elegir 2 libremente)

Condiciones adicionales

- Naturales:

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$s_3(x_k^-) = y_k,\ \ s_3(x_k^+) = y_k,\ \ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ \ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

Número total coeficientes: $4\,n$ coeficientes (se pueden elegir 2 libremente)

Condiciones adicionales

- Naturales: $s''(x_0) = 0,\ \ s''(x_n) = 0$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

Número total coeficientes: $4\,n$ coeficientes (se pueden elegir 2 libremente)

Condiciones adicionales

- Naturales: $s''(x_0) = 0,\ s''(x_n) = 0$
- Periódicas: si $y_0 = y_n$

Interpolación segmentada cúbica (splines)

Para $k = 1, \dots, n-1$

$s_3(x_k^-) = y_k,\ s_3(x_k^+) = y_k,\ s_3'(x_k^-) = s_3'(x_k^+),\ s_3''(x_k^-) = s_3''(x_k^+)$

$\Rightarrow 4$ condiciones $\Rightarrow 4\,(n-1) = 4\,n - 4$

$s_3(x_0) = y_0, s_3(x_n) = y_n \Rightarrow 2$ condiciones

Número total condiciones: $4\,n - 2$

Número de coeficientes de cada cúbica: 4 coeficientes

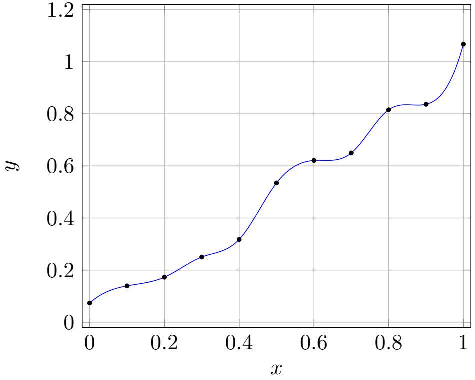
Número total coeficientes: $4\,n$ coeficientes (se pueden elegir 2 libremente)

Condiciones adicionales

- Naturales: $s''(x_0) = 0,\ s''(x_n) = 0$
- Periódicas: si $y_0 = y_n$ $s'(x_0) = s'(x_n),\ s''(x_0) = s''(x_n)$

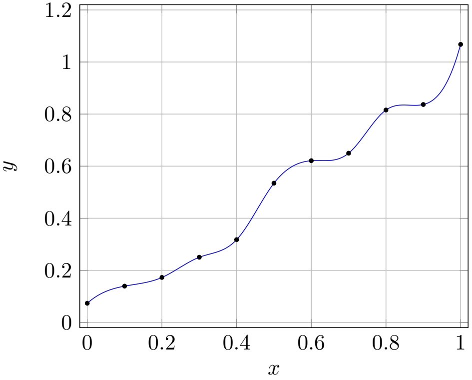
Interpolación segmentada cúbica: ejemplo

n	x	y
0	0.0	0.0736
1	0.1	0.1394
2	0.2	0.1728
3	0.3	0.2503
4	0.4	0.3178
5	0.5	0.5346
6	0.6	0.6210
7	0.7	0.6498
8	0.8	0.8156
9	0.9	0.8368
10	1.0	1.0680



Interpolación segmentada cúbica: ejemplo

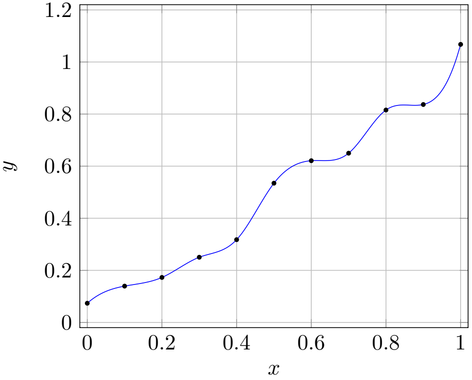
n	x	y
0	0.0	0.0736
1	0.1	0.1394
2	0.2	0.1728
3	0.3	0.2503
4	0.4	0.3178
5	0.5	0.5346
6	0.6	0.6210
7	0.7	0.6498
8	0.8	0.8156
9	0.9	0.8368
10	1.0	1.0680



$s_1(t)$ no oscila, es continua

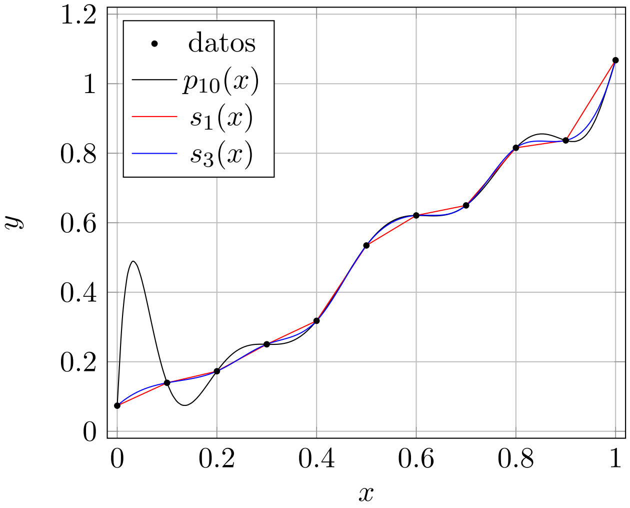
Interpolación segmentada cúbica: ejemplo

n	x	y
0	0.0	0.0736
1	0.1	0.1394
2	0.2	0.1728
3	0.3	0.2503
4	0.4	0.3178
5	0.5	0.5346
6	0.6	0.6210
7	0.7	0.6498
8	0.8	0.8156
9	0.9	0.8368
10	1.0	1.0680



$s_1(t)$ no oscila, es continua y dos veces derivable

Comparación entre métodos



Existencia de segmentación cúbica

Si $s_n(x) = p_j(x)$ para $x \in [x_{j-1}, x_j]$, planteamos

Existencia de segmentación cúbica

Si $s_n(x) = p_j(x)$ para $x \in [x_{j-1}, x_j]$, planteamos

$$p_j(x) = \frac{y_j + y_{j-1}}{2} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1/2}) + \frac{w_j + w_{j-1}}{16}\left(4(x - x_{j-1/2})^2 - h_j^2\right) + \frac{w_j - w_{j-1}}{24h_j}\left(4(x - x_{j-1/2})^2 - h_j^2\right)(x - x_{j-1/2}),$$

Existencia de segmentación cúbica

Si $s_n(x) = p_j(x)$ para $x \in [x_{j-1}, x_j]$, planteamos

$$\begin{aligned} p_j(x) = {} & \frac{y_j + y_{j-1}}{2} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1/2}) \\ & + \frac{w_j + w_{j-1}}{16}\left(4(x - x_{j-1/2})^2 - h_j^2\right) \\ & + \frac{w_j - w_{j-1}}{24h_j}\left(4(x - x_{j-1/2})^2 - h_j^2\right)(x - x_{j-1/2}), \end{aligned}$$

donde $h_j = x_j - x_{j-1}$ y $x_{j-1/2} = \dfrac{x_j + x_{j-1}}{2}$,

Existencia de segmentación cúbica

Si $s_n(x) = p_j(x)$ para $x \in [x_{j-1}, x_j]$, planteamos

$$
\begin{aligned}
p_j(x) = {} & \frac{y_j + y_{j-1}}{2} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1/2}) \\
& + \frac{w_j + w_{j-1}}{16}\left(4(x - x_{j-1/2})^2 - h_j^2\right) \\
& + \frac{w_j - w_{j-1}}{24h_j}\left(4(x - x_{j-1/2})^2 - h_j^2\right)(x - x_{j-1/2}),
\end{aligned}
$$

donde $h_j = x_j - x_{j-1}$ y $x_{j-1/2} = \dfrac{x_j + x_{j-1}}{2}$,

$$
\begin{aligned}
p_j(x_j) &= p_j(x_{j-1/2} + h_j/2) = y_j, \\
p_j(x_{j-1}) &= p_j(x_{j-1/2} - h_j/2) = y_{j-1}.
\end{aligned}
$$