1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Se desea resolver el problema $Ax = b$ para $b = (3,5,6)^t$. Para esto se considera la descomposición QR de A, dada por las matrices

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular x a partir del cálculo $x = A^{-1}b$. Calcular las entradas de A^{-1} a partir del sistema $A^{-1}A = I_3$, trabajando con base 10, mantisa de 3 dígitos y método de redondeo.

b) Calcular x, despejando sus entradas en el sistema $Rx = Q^t b$, trabajando con base 10, mantisa de 3 dígitos y método de redondeo.

b

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FL(1 \cdot 6) \\ FL(1 \cdot 5) \\ FL(1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3x_3 = 3$$

$$x_3 = FL\left(\frac{3}{3}\right) = FL(1) = 1$$

$$x_2 = FL\left(\frac{5 - 3x_3}{2}\right) = FL\left(\frac{FL(5 - FL(3 \cdot 1))}{2}\right) = 1$$

$$x_1 = FL(6 - 2x_2 - 3x_3) = FL(6 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1) = FL(1) = 1.$$

2

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow x\,Q$ $$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow \frac{F_3}{3}$ $$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_L(1) & F_L(\frac{1}{3}) & 0 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}333 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$F_1 - F_2$
$\Rightarrow$ $$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}333 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$F_2 - 3F_1$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -0{,}999 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}333 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$\frac{F_2}{2}$
$\Rightarrow$ $$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & F_L(-0{,}4995) & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}333 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

0,4995

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -0{,}499 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0{,}333 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

$$A^{-1} = \left|\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -0{,}499 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0{,}333 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$$

$$X = A^{-1} b = \left|\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ -0{,}499 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0{,}333 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}\right| = \begin{pmatrix} 1 \\ Fl(-0{,}499 \cdot 3) + Fl(\frac{5}{2}) \\ Fl(0{,}999) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ Fl(-1{,}5 + 2{,}5) \\ 0{,}999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}999 \end{pmatrix}$$

2. Dado el problema: $\begin{cases} y'(t) &= 4t^2 \operatorname{sen}(t+2y(t)), \\ y(0) &= 0 \end{cases}$.

a) Expresar la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.

b) Estimar el error de truncado local para $t \in [0,1]$.

c) Hallar una cota para el paso h que garantice que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-2}.

a) $\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot 4t_n^2 \sin(t_n + 2y_n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$

b) $\mathcal{E}_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\gamma_n), \quad \gamma_n \in (t_n, t_{n+1})$

$|\mathcal{E}_{n+1}| = \left|\frac{h^2}{2}\left(8\gamma_n \sin(\gamma_n + 2y(\gamma_n)) + 4\gamma_n^2 \cos(\gamma_n + 2y(\gamma_n))(1 + 2y'(\gamma_n))\right)\right|$

$|\mathcal{E}_{n+1}| \leq \frac{h^2}{2}(8 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1(1 + 2y'(\gamma_n)))$

$\hat{\gamma_n} \in (t_n, t_{n+1}) \in (0,1)$

$|\mathcal{E}_{n+1}| \leq \frac{h^2}{2}(8 + 4(1 + 2y'(\gamma_n)))$

$$|\mathcal{E}_{n+1}| \leqslant \frac{h^2}{2}\left(8 + 4\left(1 + 2\cdot\left(4\gamma_n^2 \sin(\gamma_n + 2y(\gamma_n))\right)\right)\right)$$

$$|\mathcal{E}_{n+1}| \leqslant \frac{h^2}{2}\left(8 + 4\left(1 + 2\left(4\cdot 1\cdot 1\right)\right)\right)$$

$|\mathcal{E}_{n+1}| \leqslant 22h^2$, como vale $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant n \leqslant N-1$

en particular vale para $\mathcal{E}_{max} = MAX\, |\mathcal{E}_n|$

$$\mathcal{E}_{MAX} \leqslant 22h^2$$

(c) Veamos si $F(t,y) = y'(t) = 4t^2 \sin(t + 2y(t))$

es Lipschitz con respecto a y.

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| = |F'(t, \tilde{y})|\,|y_2 - y_1|$$

$$= |(1, y'(t)) \cdot \nabla F|\,|y_2 - y_1|$$

$$= \left| (1, y'(t)) \cdot \left(8t\sin(t+2\tilde{y}) + 4t^2\cos(t+2\tilde{y}),\ 4t^2\cos(t+2\tilde{y})\cdot 2 \right) \right| |y_2 - y_1|$$

$$= \left| 8t\sin(t+2\tilde{y}) + 4t^2\cos(t+2\tilde{y}) + y'(t)\cdot 8t^2\cos(t+2\tilde{y}) \right| |y_2 - y_1|$$

$$\leqslant \left(|8| + |4| + |8y'(t)| \right) |y_2 - y_1|$$

$t \in (0,1)$ y des triangular

$$\leqslant \left(|8| + |4| + |8(4t^2\sin(t+2y))| \right) |y_2 - y_1|$$

$$\leqslant (12 + 32)|y_2 - y_1|$$

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leqslant 44|y_2 - y_1|$$

$$L = 44$$

Sabemos que

$$|E_N| \leq \frac{\varepsilon_{MAX}}{L \cdot h}\left(e^{L(1-a)} - 1\right)$$

$$|E_N| \leq \frac{22h}{44}\left(e^{44} - 1\right) \leq 10^{-2}$$

$$h \leq \frac{2 \cdot 10^{-2}}{e^{44} - 1}$$

3. Se considera el siguiente problema de evolución, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 5u_x(x,t) = 0, & x \in (0,1), t \in (0,1), \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), & x \in [0,1], \\ u(1,t) = 0, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

a) Discretizar el problema usando diferencias adelantadas con paso h en x y diferencias adelantadas con paso k en t, y escribir el esquema explícito como un sistema lineal de la forma $u^{j+1} = Au^j$, indicando cuál es la matriz A, el vector u^0 y sus respectivas dimensiones.

b) Hallar condiciones sobre $\nu = \frac{k}{h}$ que garanticen la estabilidad del método en norma infinito.

a)
$$\begin{cases} \dfrac{U_{J+1}^{n} - U_{J}^{n}}{k} - 5\,\dfrac{U_{J}^{n+1} - U_{J}^{n}}{h} = 0, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad 0 \leq J \leq J-1 \\ U_0^n = \sin(\pi x_n), \quad \forall n \quad 0 \leq n \leq N \\ U_J^N = 0, \quad \forall J \quad 0 \leq J \leq J \end{cases}$$

$$U_t - 5U_x = 0$$

$$\frac{U_{J+1}^{n} - U_{J}^{n}}{k} - 5\,\frac{U_{J}^{n+1} - U_{J}^{n}}{h} = 0$$

$$U_{J+1}^{n} = \frac{5k}{h} U_J^{n+1} + \left(1 - \frac{5k}{h}\right) U_J^n$$

Si $n = N-1$ $\quad U_{j+1}^{N-1} = \frac{sk}{h} U_j^N + \left(1 - \frac{sk}{h}\right) U_j^{N-1}$

$$U_{j+1}^{N-1} = \left(1 - \frac{sk}{h}\right) U_j^{N-1}$$

Por ende

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1-\frac{sk}{h} & \frac{sk}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{sk}{h} & \frac{sk}{h} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1-\frac{sk}{h} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} U_j^0 \\ U_j^1 \\ \vdots \\ U_j^{N-1} \end{bmatrix}}_{U_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{j+1}^0 \\ U_{j+1}^1 \\ \vdots \\ U_{j+1}^{N-1} \end{bmatrix}}_{U_{j+1}}$$

$$A \cdot U_j = U_{j+1} \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N},\ U_j, U_{j+1} \in \mathbb{R}^N$$

Si $j = 0 \Rightarrow U_0^n = \sin(\pi x_n) = \sin\left(\pi \frac{n}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N$

$$U_0 = \left(0, \sin\left(\frac{\pi}{N}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right), \cdots, \sin\left(\pi \frac{N-1}{N}\right) \right)$$

(b) como $\|U_{J+1}\|_\infty = \|A U_J\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty \|U_{J-1}\|_\infty$.

Haciendo recursion.

$$\|U_N\| \leqslant \|A\|_\infty^N \|U_0\|_\infty$$

Necesitamos $\|A\|_\infty \leqslant 1$ para asegurar estabilidad.

$$\|A\|_\infty = \max\left\{ \left|1-\frac{SK}{h}\right| + \left|\frac{SK}{h}\right|, \left|1-\frac{SK}{h}\right| \right\} = \left|1-\frac{SK}{h}\right| + \left|\frac{SK}{h}\right| = \left|1-\frac{SK}{h}\right| + \frac{SK}{h}$$

Si pedimos $\frac{SK}{h} \leqslant 1$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty = \left|1-\frac{SK}{h}\right| + \frac{SK}{h} = 1 - \frac{SK}{h} + \frac{SK}{h} = 1.$$

Y es metodo es estable

4. Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, la matriz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Calcular $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{cond}_1(A_n)$ y $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{cond}_2(A_n)$.

definamos $B_n = A_n - C_n$, donde $C_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{n1} = 1 \\ 0 \text{ de otra forma} \end{cases}$

como la primera columna de B_n es nula

B_n es singular.

Analizemos A_n

ANALIzemos A_n

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Es Facil ver que el $\max\limits_{1 \leq j \leq N} a_{ij} = n$, $\forall i \; 1 \leq i \leq N$

Por lo Tanto LA columna mas Grande va A ser la ultima

$$\|A_n\|_1 = n \cdot n = n^2$$

Sabemos que

$$\mathrm{cond}_1(A_n) \geqslant \frac{\|A_n\|_1}{\|A_n - B\|_1} \quad , \forall B \text{ singular}$$

en particular

$$\mathrm{cond}_1(A_n) \geqslant \frac{\|A_n\|_1}{\|A_n - B_n\|_1} = \frac{n^2}{\|C_n\|_1} = \frac{n^2}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{cond}_1(A_n) \geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2} = \infty .$$

POR LA PRACTICA 4 EJ 2.

$$\|A_n\|_2 \geqslant \frac{\|A\|_1}{\sqrt{n}} = \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n^{\frac{3}{2}}$$

$$\|C_n\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|C_n\|_1$$

$$\frac{1}{\|C_n\|_2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}\,\|C_n\|_1} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\operatorname{cond}_2(A_n) \geqslant \frac{\|A_n\|_2}{\|A_n - B_n\|_2} = \frac{\|A_n\|_2}{\|C_n\|_2} \geqslant \frac{n^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{n}} = \frac{n}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{cond}_2(A_n) \geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} = \infty$$