Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Segundo Parcial

Primer Cuatrimestre 2021 (08/07/2021)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y explicitar los cálculos o aclarar cómo se obtuvieron los resultados.

1. Sean $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq \beta$. Se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \end{pmatrix},$$
para resolver un sistema lineal de la forma $Ax = b$.

   a) Dar condiciones sobre α y β que determinen todos los posibles valores para los cuales el método de Jacobi converge para todo valor inicial.

   b) Dar condiciones sobre α y β que determinen todos los posibles valores para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para todo valor inicial.

   c) Fijados valores para α y β para los cuales ambos métodos convergen, ¿cuál se espera que converja más rápido?

2. Sea una función $f \in C^\infty$ que se interpola por un polinomio p en $n+1$ nodos arbitrarios $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a, b]$. Se desea estudiar cómo aproxima la derivada de p a la derivada de f en función de la longitud del intervalo $[a, b]$. Para $x \in [a, b]$:

   a) mostrar que $|f(x) - p(x)|$ es $O((b-a)^{n+1})$;

   b) mostrar que $|f'(x) - p'(x)|$ es $O((b-a)^n)$. (*Sugerencia:* recordar el Teorema de Rolle.)

3. Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

   a) Calcular su descomposición en valores singulares reducida $A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^t$ y su pseudo-inversa $A^\dagger = V\hat{\Sigma}^{-1}\hat{U}^t$.

   b) Aproximar la siguiente tabla de datos en el sentido de cuadrados mínimos

x	1	3	7
y	4	4	-8

   con una función del tipo: $y(x) = af_1(x) + bf_2(x)$ siendo $f_1(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ y $f_2(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

4. Sea $f(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{10}$.

   a) Mostrar que f tiene exactamente 2 raíces $r_1 < r_2$.

   b) Se considera la función $g(x) = -\frac{1}{10}e^{-x} - 1$. Mostrar que r_1 y r_2 son puntos fijos de g y dar un intervalo inicial I_2 para el cual el método de punto fijo determinado por g converja a r_2 para cualquier valor inicial $x_0 \in I_2$.

5. Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo
$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$
que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre 2021
Resolución del segundo parcial

1) Recordemos que un método iterativo converge para todo valor inicial si y solo si el radio espectral de la matriz del método es menor a 1. Para hallar los autovalores de cada matriz de iteración, conviene recordar la siguiente propiedad, que facilita mucho las cuentas: si descomponemos $A = M + N$ y la matriz de iteración es $B = -M^{-1}N$, entonces

$$\det(\lambda I_3 - B) = \det(\lambda I_3 + M^{-1}N) = \det(M^{-1}(\lambda M + N)) = \underbrace{\det(M^{-1})}_{\neq 0}\det(\lambda M + N) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det(\lambda M + N) = 0.$$

De esta forma, los autovalores de las matrices de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel los podemos hallar a partir de las raíces de los polinomios $\det(\lambda D + L + U)$ y $\det(\lambda(D + L) + U)$, respectivamente. Es decir:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \alpha\lambda & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\alpha\beta^2\lambda^2 - \beta\alpha^2) = \alpha\beta\lambda(\beta\lambda^2 - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \rho(B_J) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \alpha\lambda & \alpha^2 \\ \lambda & \beta\lambda & \beta^2\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\alpha\beta^2\lambda^2 - \alpha^2\beta\lambda) = \alpha\beta\lambda^2(\beta\lambda - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \rho(B_{GS}) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

1a) El método de Jacobi converge para todo dato inicial si y solo si $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} < 1$.

1b) El método de Gauss-Seidel converge para todo dato inicial si y solo si $\frac{\alpha}{\beta} < 1$.

1c) Como $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, un método converge si y solo si el otro converge. Cuando ambos convergen se espera que el método de Gauss-Seidel converja más rápido por tener un radio espectral más chico.

2a) Usamos la cota para la fórmula del error de interpolar por un polinomio en $n + 1$ nodos:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]}}{(n+1)!}\|w\|_{\infty,[a,b]},$$

donde $w(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. La cota más general de $w(x)$ que tenemos para puntos cualesquiera de $[a, b]$ es

$$w(x) < (b - a)^{n+1}.$$

Consideramos el caso $b - a \to 0$ (es decir, $a, b \to x$). De esta forma $\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a^*,b^*]} \in \mathbb{R}$, para $[a^*, b^*]$ el intervalo inicial. Así tenemos

$$|f(x) - p(x)| \leq \underbrace{\frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[a^*,b^*]}}{(n+1)!}}_{C \geq 0}(b - a)^{n+1},$$

como se quería probar.

2b) Dado que p interpola a f en $n+1$ puntos, la función

$$g(x) = f(x) - p(x)$$

se anula en $n+1$ puntos. Por el Teorema de Rolle, existen n puntos intermedios donde la derivada de g se anula. Ergo, p' interpola a f' en esos n puntos $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Entonces, utilizando el ítem anterior, tenemos el resultado pedido.

3a) Comencemos buscando $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a partir de los valores singulares de A. Para esto, calculamos los autovalores de A^tA:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1^2 = 4,\, \sigma_2^2 = 2.$$

Y por lo tanto

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora buscamos los autovectores de A^tA para construir $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-3 & 1 & 0 \\ 1 & 4-3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{(1,-1)^t}{\|(1,-1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{(1,1)^t}{\|(1,1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t.$$

Luego

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, construimos $\hat{U} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $\hat{U} = AV\hat{\Sigma}^{-1}$:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Y entonces la pseudo-inversa es:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3b) Por el Ejercicio 7a) de la Práctica 7, como el rango de A es 2, sabemos que los coeficientes que nos dan la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la tabla de datos son la solución de $A^\dagger b$, que en este caso es:

$$A^\dagger b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

y así los coeficientes son $a=-1$, $b=5$, y nos da $y(x) = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 5\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

4a) Para probar que f tiene exactamente dos raíces, estudiemos su derivada: $f'(x) = (x+2)e^x$. Vemos así que f tiene un mínimo en $x = -2$, donde vale $f(-2) = -e^{-2} + 0{,}1 \sim -0{,}035\ldots < 0$ y es estrictamente decreciente a la izquierda de -2 y estrictamente creciente a la derecha. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0{,}1 > 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ por el Teorema de Bolzano podemos afirmar que f tiene solo dos ceros: uno a la izquierda de -2 y otro a la derecha. Y por lo tanto $r_1 < -2 < r_2$.

4b) Queremos ver que $f(r_i) = 0$ si y solo si $r_i = g(r_i)$ para $i = 1, 2$. Pero

$$f(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = -\frac{1}{10}e^{-x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{10}e^{-x} - 1 = g(x),$$

como queríamos probar. Notemos ahora que $g'(x) = \frac{1}{10}e^{-x} > 0$ y $g'(x) < 1$ si y solo si $x > \ln(0{,}1) \sim -2,303$. Propongamos el intervalo $I_2 = [-2, 0]$. Como $f(-2) < 0$ y $f(0) = 1,1 > 0$, sabemos que $r_2 \in I_2$. Como $g'(x)$ es decreciente, $0{,}1 \leq g'(0) \leq g'(x) \leq g'(-2) = \frac{e^2}{10} < 1$ y $|g'(x)| \leq \lambda = \frac{e^2}{10} < 1$ para todo $x \in [-2, 0]$. Ahora solo falta ver que $g([-2, 0]) \subseteq [-2, 0]$, pero g es creciente y $-2 < g(-2) = -\frac{e^2}{10} - 1$ y $g(0) = -\frac{1}{10} - 1 < 0$, por lo que para el intervalo $I_2 = [-2, 0]$ tenemos la convergencia a r_2 asegurada para cualquier valor inicial $x_0 \in I_2$ por el Teorema 4.15 del apunte de la materia.

---

5) Como podemos elegir los nodos libremente, la regla que nos dará el mayor grado de precisión posible es una regla de cuadratura gaussiana. Sigamos el procedimiento usual para hallar dicha regla:

- Consideramos $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)\, dx$.
- Definimos S, el subespacio generado por $\{1, x, x^2\}$. $(n + 1 = 1 + 1 = 2)$
- Aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2\}$:

  $q_0 = 1, \|q_0\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \underbrace{\displaystyle\int_{-1}^{1}}_{\text{sim.}} \underbrace{(1-x^2)}_{\text{par}}\, dx = 2(x - \frac{x^3}{3})|_0^1 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \boxed{p_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

  $q_1 = x - \langle x, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \frac{3}{4}\underbrace{\displaystyle\int_{-1}^{1}}_{\text{sim.}} \underbrace{x(1-x^2)}_{\text{impar}}\, dx = x - 0 = x,$

  $\|q_1\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\, dx = 2(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5})|_0^1 = \frac{4}{15} \Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}x}$

  $q_2 = x^2 - \langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2}\rangle\frac{\sqrt{3}}{2} - \langle x^2, \frac{\sqrt{15}}{2}x\rangle\frac{\sqrt{15}}{2}x = x^2 - \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\, dx - \frac{15}{4}\underbrace{\displaystyle\int_{-1}^{1}}_{\text{sim.}} \underbrace{x^3(1-x^2)}_{\text{impar}}\, dx\, x = \boxed{x^2 - \frac{1}{5}}$

  y busco las raíces de este polinomio (no hace falta normalizar).
- $x_0 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
- Ahora calculamos los pesos A_0 y A_1 a partir de las siguientes igualdades: $I(1) = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}, Q(1) = A_0 + A_1$. Luego,

$$\frac{4}{3} = A_0 + A_1 \tag{1}$$

$I(x) = \underbrace{\int_{-1}^{1}}_{\text{sim.}} \underbrace{x(1-x^2)}_{\text{impar}}\, dx = 0, Q(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}(-A_0 + A_1)$. Así,

$$0 = \frac{\sqrt{5}}{5}(-A_0 + A_1) \tag{2}$$

De (2) deducimos que $A_0 = A_1$. Y de (1) deducimos que $A_0 = \frac{2}{3}$.

Y entonces

$$\boxed{Q(f) = \tfrac{2}{3}(f(-\tfrac{\sqrt{5}}{5}) + f(\tfrac{\sqrt{5}}{5})).}$$

Como es una regla de cuadratura gaussiana, su grado de precisión es $2n+1 = 2 \times 1 + 1 = 3$.