Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°8

1. Se considera

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f''(x)g''(x)dx.$$

a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en S_m, el espacio generado por $\{x^2, x^3, \ldots, x^m\}$ para $m \geq 3$.

b) Hallar una base ortonormal para S_3.

c) Hallar la mejor aproximación en S_3, en el sentido de cuadrados mínimos, para $g(x) = x^5$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°8 - Resolución del ejercicio

1a) Para probar que $\langle , \rangle$ es un producto interno para S_m, debemos ver que se satisfacen las siguientes condiciones:

- Es bilineal y simétrico, es decir que $\langle \alpha f_1 + f_2, g\rangle = \alpha\langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$ y $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$: esto es directo (derivar e integrar son lineales y el producto conmuta).
- $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{(f''(x))^2}_{\geq 0} dx \geq 0$.
- Además $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f'' \equiv 0$. Pero si $f'' \equiv 0$ entonces f' es constante y f lineal, pero la única función lineal en el espacio generado por $\{x^2, x^3, \ldots, x^m\}$ para $m \geq 3$ es $f \equiv 0$.

1b) Para hallar dicha base ortonormal, aplicaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{x^2, x^3\}$:

- $q_1 = x^2$, $\|q_1\|^2 = \langle x^2, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} 4dx = 8 \Rightarrow\ p_1 = \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$.
- $q_2 = x^3 - \langle x^3, \frac{x^2}{2\sqrt{2}}\rangle \frac{x^2}{2\sqrt{2}} = x^3 - \underbrace{\int_{-1}^{1}}_{\text{sim.}} \underbrace{\frac{6x}{\sqrt{2}}}_{\text{impar}} dx \frac{x^2}{2\sqrt{2}} = x^3$,

  $$\|q_2\|^2 = \langle x^3, x^3\rangle = \int_{-1}^{1} (6x)^2 dx \underset{(6x)^2 \text{ par}}{=} 72 \int_0^1 x^2 dx = \frac{72}{3} = 24\ \Rightarrow p_2 = \frac{x^3}{2\sqrt{6}}.$$

Luego, la base ortonormal pedida es $\left\{\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}, \dfrac{x^3}{2\sqrt{6}}\right\}$.

1c) Para hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de $g(x) = x^5$ sobre el subespacio S_3 debemos hallar la proyección ortogonal de g sobre dicho subespacio. Si $\{p_1, p_2\}$, es una base ortonormal de S_3, entonces la proyección ortogonal de g sobre S_3, $P_{S_3}(g)$, se obtiene mediante la fórmula:

$$P_{S_3}(g) = \langle g, p_1\rangle p_1 + \langle g, p_2\rangle p_2.$$

Tenemos:

- $\langle g, p_1\rangle = \langle x^5, \frac{x^2}{2\sqrt{2}}\rangle = \frac{20}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_{-1}^{1}}_{\text{sim.}} \underbrace{x^3}_{\text{impar}} dx = 0$.
- $\langle g, p_2\rangle = \langle x^5, \frac{x^3}{2\sqrt{6}}\rangle = \frac{60}{\sqrt{6}} \int_{-1}^{1} x^4 dx = 4\sqrt{6}$.

De esta forma:

$$P_{S_3}(g) = 4\sqrt{6}\frac{x^3}{2\sqrt{6}} = 2x^3.$$