# Cálculo Numérico

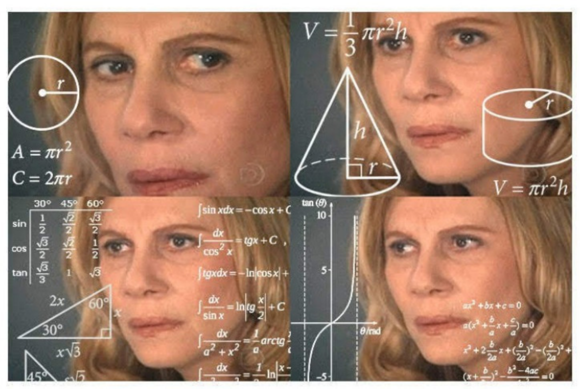
## Diferencias Finitas (Ecuaciones en derivadas parciales)

Nazareno Faillace Mullen

15/04

Departamento de Matemática - FCEyN - UBA

Hoy vamos a hacer algunas cuentas...



# Ecuaciones en derivadas parciales

Trabajaremos con la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

# Ecuaciones en derivadas parciales

Trabajaremos con la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Que es equivalente a escribir lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

# Ecuaciones en derivadas parciales

Trabajaremos con la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Que es equivalente a escribir lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

En particular, analizaremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a u_x(x,t) = 0 \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0, x \in (0,\mathcal{X}], t \in (0,T] \\ u(0,t) = g(t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

# Ecuaciones en derivadas parciales

Trabajaremos con la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Que es equivalente a escribir lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

En particular, analizaremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + au_x(x,t) = 0 \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0, x \in (0,\mathcal{X}], t \in (0,T] \\ u(0,t) = g(t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Objetivos:

- Discretizar el problema con diferencia forward para $t$, backward para $x$
- Error de truncado local (Consistencia)
- Estabilidad en norma infinito
- Convergencia

# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Como ahora tenemos dos variables independientes, vamos a discretizar en t y en x. Sean $N$ la cantidad de pasos en las que se discretiza $(0, \mathcal{X}]$ y $M$ la cantidad de pasos en la que se discretiza $(0, T]$, tenemos lo siguiente:

$$h = \frac{\mathcal{X}}{N} \qquad k = \frac{T}{M}$$

$$x_i = ih \qquad t_j = jk$$

Notaremos como $u_i^j$ a la aproximación de $u(x_i, t_j)$

Se propone el siguiente método (conocido como método upwind), que consiste en utilizar diferencia forward para aproximar la derivada parcial en $t$ y diferencia backward para aproximar la derivada parcial en $x$:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + a\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0$$

Se propone el siguiente método (conocido como método upwind), que consiste en utilizar diferencia forward para aproximar la derivada parcial en $t$ y diferencia backward para aproximar la derivada parcial en $x$:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + a\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0$$

Multiplicamos todo por k:

$$u_i^{j+1} - u_i^j + a\frac{k}{h}(u_i^j - u_{i-1}^j) = 0$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Se propone el siguiente método (conocido como método upwind), que consiste en utilizar diferencia forward para aproximar la derivada parcial en $t$ y diferencia backward para aproximar la derivada parcial en $x$:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + a\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0$$

Multiplicamos todo por k:

$$u_i^{j+1} - u_i^j + a\frac{k}{h}(u_i^j - u_{i-1}^j) = 0$$

Por simplicidad, llamamos $\nu = \frac{k}{h}$:

$$u_i^{j+1} - u_i^j + a\nu(u_i^j - u_{i-1}^j) = 0$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Se propone el siguiente método (conocido como método upwind), que consiste en utilizar diferencia forward para aproximar la derivada parcial en $t$ y diferencia backward para aproximar la derivada parcial en $x$:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + a\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0$$

Multiplicamos todo por k:

$$u_i^{j+1} - u_i^j + a\frac{k}{h}(u_i^j - u_{i-1}^j) = 0$$

Por simplicidad, llamamos $\nu = \frac{k}{h}$:

$$u_i^{j+1} - u_i^j + a\nu(u_i^j - u_{i-1}^j) = 0$$

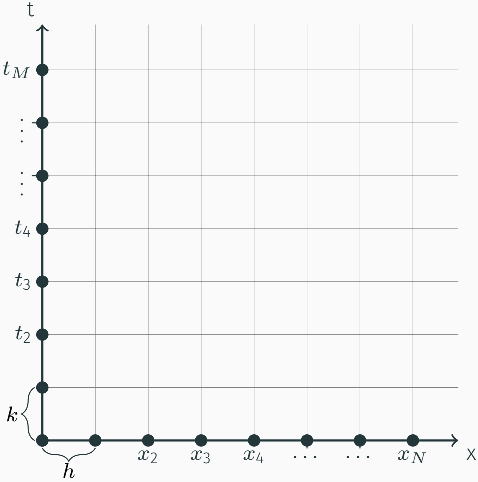
y despejamos lo que corresponda al siguiente paso temporal (i.e. lo que tenga superíndice $j+1$):

$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Luego, obtuvimos el siguiente esquema:

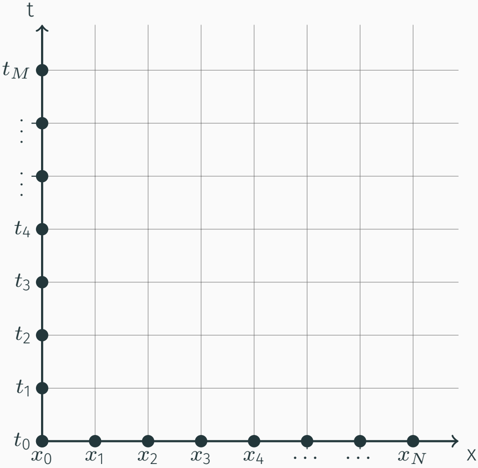
$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j$$



# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Luego, obtuvimos el siguiente esquema:

$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j$$

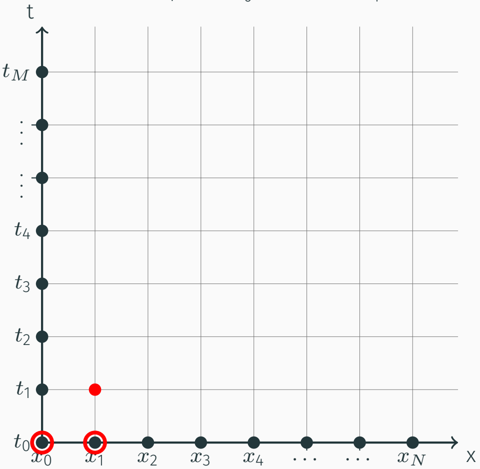


# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Luego, obtuvimos el siguiente esquema:

$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j$$

$$u_1^1 = a\nu u_0^0 + (1 - a\nu)u_1^0$$

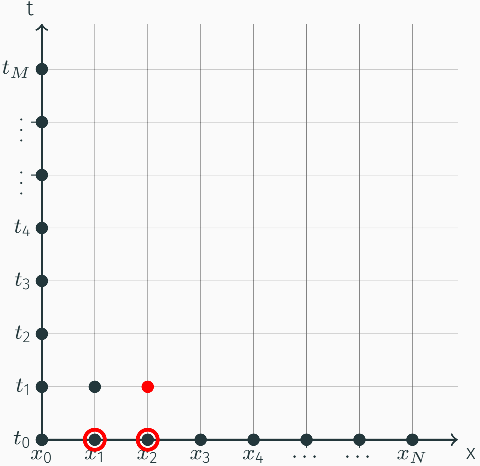


# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Luego, obtuvimos el siguiente esquema:

$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu) u_i^j$$

$$u_2^1 = a\nu u_1^0 + (1 - a\nu) u_2^0$$

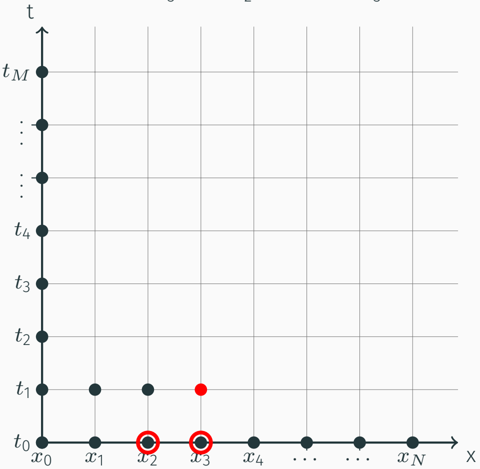


# Ecuaciones en derivadas parciales - Discretización

Luego, obtuvimos el siguiente esquema:

$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu) u_i^j$$

$$u_3^1 = a\nu u_2^0 + (1 - a\nu) u_3^0$$



# Ecuaciones en derivadas parciales - Error de truncado

Al utilizar las aproximaciones de las derivadas, estamos incurriendo en un error. En nuestro esquema, reemplazamos la solución numérica $u$ por la solución exacta $\mathcal{U}$:

$$\frac{\mathcal{U}(x_i, t_j + k) - \mathcal{U}(x_i, t_j)}{k} + a\frac{\mathcal{U}(x_i, t_j) - \mathcal{U}(x_i - h, t_j)}{h} = 0 + R(x_i, t_{j+1})$$

El método es **consistente** si $R(x_i, t_{j+1}) \xrightarrow[]{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} 0$. Veamos cómo calcular el error de truncado para nuestro método. Suponemos que $\mathcal{U}$ cumple las condiciones de regularidad necesarias.

# Ecuaciones en derivadas parciales - Error de truncado

Al utilizar las aproximaciones de las derivadas, estamos incurriendo en un error. En nuestro esquema, reemplazamos la solución numérica $u$ por la solución exacta $\mathcal{U}$:

$$\frac{\mathcal{U}(x_i, t_j + k) - \mathcal{U}(x_i, t_j)}{k} + a\frac{\mathcal{U}(x_i, t_j) - \mathcal{U}(x_i - h, t_j)}{h} = 0 + R(x_i, t_{j+1})$$

El método es **consistente** si $R(x_i, t_{j+1}) \xrightarrow[]{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} 0$. Veamos cómo calcular el error de truncado para nuestro método. Suponemos que $\mathcal{U}$ cumple las condiciones de regularidad necesarias.

Tenemos la aproximación de $\mathcal{U}_t$ dada por la diferencia forward:

$$\frac{\mathcal{U}(x, t + k) - \mathcal{U}(x, t)}{k}$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Error de truncado

Al utilizar las aproximaciones de las derivadas, estamos incurriendo en un error. En nuestro esquema, reemplazamos la solución numérica $u$ por la solución exacta $\mathcal{U}$:

$$\frac{\mathcal{U}(x_i, t_j + k) - \mathcal{U}(x_i, t_j)}{k} + a\frac{\mathcal{U}(x_i, t_j) - \mathcal{U}(x_i - h, t_j)}{h} = 0 + R(x_i, t_{j+1})$$

El método es **consistente** si $R(x_i, t_{j+1}) \xrightarrow[]{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} 0$. Veamos cómo calcular el error de truncado para nuestro método. Suponemos que $\mathcal{U}$ cumple las condiciones de regularidad necesarias.

Tenemos la aproximación de $\mathcal{U}_t$ dada por la diferencia forward:

$$\frac{\mathcal{U}(x, t + k) - \mathcal{U}(x, t)}{k}$$

Desarrollamos Taylor de orden 1 en $\mathcal{U}(x, t + k)$ alrededor de $(x, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{U}(x, t + k) - \mathcal{U}(x, t)}{k} &= \frac{\mathcal{U}(x, t) + k\mathcal{U}_t(x, t) + \frac{k^2}{2}\mathcal{U}_{tt}(x, \xi) - \mathcal{U}(x, t)}{k} \\ &= \mathcal{U}_t(x, t) + \frac{k}{2}\mathcal{U}_{tt}(x, \xi) = \mathcal{U}_t(x, t) + O(k)\end{aligned}$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Error de truncado

Realizamos un procedimiento análogo para estimar el error cometido al aproximar $\mathcal{U}_x$ con backward:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathcal{U}(x,t) - \mathcal{U}(x-h,t)}{h} \quad &= \frac{\mathcal{U}(x,t) - (\mathcal{U}(x,t) - h\mathcal{U}_x(x,t) + \frac{h^2}{2}\mathcal{U}_{xx}(\eta,t))}{h} \\
&= \mathcal{U}_x(x,t) - \tfrac{h}{2}\mathcal{U}_{xx}(\eta,t) \\
&= \mathcal{U}_x(x,t) + O(h)
\end{aligned}
$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Error de truncado

$$\frac{\mathcal{U}(x,t+k)-\mathcal{U}(x,t)}{k} = \quad \mathcal{U}_t(x,t)+O(k)$$

$$\frac{\mathcal{U}(x,t)-\mathcal{U}(x-h,t)}{h} = \quad \mathcal{U}_x(x,t)+O(h)$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Error de truncado

$$\frac{\mathcal{U}(x,t+k)-\mathcal{U}(x,t)}{k} = \quad \mathcal{U}_t(x,t)+O(k)$$

$$\frac{\mathcal{U}(x,t)-\mathcal{U}(x-h,t)}{h} = \quad \mathcal{U}_x(x,t)+O(h)$$

En el esquema, reemplazamos la solución numérica $u$ por la solución exacta $\mathcal{U}$:

$$\frac{\mathcal{U}(x_i,t_j+k)-\mathcal{U}(x_i,t_j)}{k} + a\frac{\mathcal{U}(x_i,t_j)-\mathcal{U}(x_i-h,t_j)}{h} = 0 + R(x_i,t_{j+1})$$

Por las igualdades que calculamos antes, tenemos que:

$$\mathcal{U}_t(x_i,t_j)+O(k)+a\mathcal{U}_x(x_i,t_j)+aO(h)=R(x_i,t_{j+1})$$

Como $\mathcal{U}$ es la solución exacta, $\mathcal{U}_t(x_i,t_j)+a\mathcal{U}_x(x_i,t_j)=0$, de lo que se deduce que:

$$R(x_i,t_{j+1})=O(k)+O(h)$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Error de truncado

$$\frac{\mathcal{U}(x,t+k)-\mathcal{U}(x,t)}{k} = \mathcal{U}_t(x,t)+O(k)$$

$$\frac{\mathcal{U}(x,t)-\mathcal{U}(x-h,t)}{h} = \mathcal{U}_x(x,t)+O(h)$$

En el esquema, reemplazamos la solución numérica $u$ por la solución exacta $\mathcal{U}$:

$$\frac{\mathcal{U}(x_i,t_j+k)-\mathcal{U}(x_i,t_j)}{k} + a\frac{\mathcal{U}(x_i,t_j)-\mathcal{U}(x_i-h,t_j)}{h} = 0 + R(x_i,t_{j+1})$$

Por las igualdades que calculamos antes, tenemos que:

$$\mathcal{U}_t(x_i,t_j)+O(k)+a\mathcal{U}_x(x_i,t_j)+aO(h) = R(x_i,t_{j+1})$$

Como $\mathcal{U}$ es la solución exacta, $\mathcal{U}_t(x_i,t_j)+a\mathcal{U}_x(x_i,t_j)=0$, de lo que se deduce que:

$$R(x_i,t_{j+1}) = O(k)+O(h)$$

Dado que $R(x_i,t_{j+1}) \xrightarrow[]{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} 0$, el método resulta consistente.

Habíamos llegado a que la discretización nos conduce al siguiente esquema:

$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu) u_i^j \qquad \nu = \frac{k}{h}$$

Habíamos llegado a que la discretización nos conduce al siguiente esquema:

$$u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j \qquad \nu = \frac{k}{h}$$

Esto se puede representar matricialmente, teniendo en cuenta que:

$$i = 1 \qquad u_1^{j+1} = a\nu u_0^j + (1 - a\nu)u_1^j = a\nu g(t_j) + (1 - a\nu)u_1^j$$

$$i = 2, \ldots, N \qquad u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Estabilidad

$$
\begin{aligned}
i &= 1 & u_1^{j+1} &= a\nu u_0^j + (1-a\nu)u_1^j = a\nu g(t_j) + (1-a\nu)u_1^j \\
i &= 2, \ldots, N & u_i^{j+1} &= a\nu u_{i-1}^j + (1-a\nu)u_i^j
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix}}_{u^{j+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-a\nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a\nu & 1-a\nu & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a\nu & 1-a\nu \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^j \end{bmatrix}}_{u^j} + \underbrace{\begin{bmatrix} a\nu g(t_j) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{g^j}
$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Estabilidad

$$
\begin{array}{ll}
i = 1 & u_1^{j+1} = a\nu u_0^j + (1-a\nu)u_1^j = a\nu g(t_j) + (1-a\nu)u_1^j \\
i = 2, \dots, N & u_i^{j+1} = a\nu u_{i-1}^j + (1-a\nu)u_i^j
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix}}_{u^{j+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-a\nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a\nu & 1-a\nu & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a\nu & 1-a\nu \end{bmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^j \end{bmatrix}}_{u^j} + \underbrace{\begin{bmatrix} a\nu g(t_j) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{g^j}
$$

$$u^{j+1} = Au^j + g^j$$

Recordar que se tiene que $u_i^0 = f(x_i)$, por lo tanto, conocemos $u^0$.

Observación: para este método no hace falta invertir ninguna matriz

Supongamos que el método numérico comenzó utilizando un vector inicial perturbado $\tilde{u}^0$ en vez de $u^0$. Esto puede ocurrir, por ejemplo, porque la máquina debió realizar redondeo en los valores de $u^0$. Entonces, esa perturbación se propaga en cada iteración, dando lugar a valores perturbados $\tilde{u}^j$.

Supongamos que el método numérico comenzó utilizando un vector inicial perturbado $\tilde{u}^0$ en vez de $u^0$. Esto puede ocurrir, por ejemplo, porque la máquina debió realizar redondeo en los valores de $u^0$. Entonces, esa perturbación se propaga en cada iteración, dando lugar a valores perturbados $\tilde{u}^j$.

La pregunta que nos hacemos al estudiar la estabilidad del método es si la diferencia $v^j = \tilde{u}^j - u^j$ puede acotarse en términos de la perturbación inicial $v^0 = \tilde{u}^0 - u^0$. Por simplicidad, vamos a suponer $g \equiv 0$.

# Ecuaciones en derivadas parciales - Estabilidad

Supongamos que el método numérico comenzó utilizando un vector inicial perturbado $\tilde{u}^0$ en vez de $u^0$. Esto puede ocurrir, por ejemplo, porque la máquina debió realizar redondeo en los valores de $u^0$. Entonces, esa perturbación se propaga en cada iteración, dando lugar a valores perturbados $\tilde{u}^j$.

La pregunta que nos hacemos al estudiar la estabilidad del método es si la diferencia $v^j = \tilde{u}^j - u^j$ puede acotarse en términos de la perturbación inicial $v^0 = \tilde{u}^0 - u^0$. Por simplicidad, vamos a suponer $g \equiv 0$.

$$v^j = \tilde{u}^j - u^j = (A\tilde{u}^{j-1} + g^{j-1}) - (Au^{j-1} + g^{j-1}) = A(\tilde{u}^{j-1} - u^{j-1}) = Av^{j-1}$$

Supongamos que el método numérico comenzó utilizando un vector inicial perturbado $\tilde{u}^0$ en vez de $u^0$. Esto puede ocurrir, por ejemplo, porque la máquina debió realizar redondeo en los valores de $u^0$. Entonces, esa perturbación se propaga en cada iteración, dando lugar a valores perturbados $\tilde{u}^j$.

La pregunta que nos hacemos al estudiar la estabilidad del método es si la diferencia $v^j = \tilde{u}^j - u^j$ puede acotarse en términos de la perturbación inicial $v^0 = \tilde{u}^0 - u^0$. Por simplicidad, vamos a suponer $g \equiv 0$.

$$v^j = \tilde{u}^j - u^j = (A\tilde{u}^{j-1} + g^{j-1}) - (Au^{j-1} + g^{j-1}) = A(\tilde{u}^{j-1} - u^{j-1}) = Av^{j-1}$$

Entonces, tenemos que:

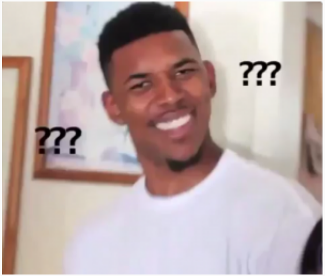
$$v^j = Av^{j-1} = A^2 v^{j-2} = \cdots = A^j v^0$$

Además:

$$\|v^j\| = \|A^j v^0\| \leq \|A\|^j \|v^0\|$$

Luego, si $\|A\| \leq 1$, $\|v^j\|$ es acotado . En particular, como queremos ver que el método es estable en norma infinito, es suficiente pedir que $\|A\|_\infty \leq 1$

$$||A||_\infty$$



# Ecuaciones en derivadas parciales - Estabilidad

Dentro de algunas clases vamos a ver normas de matrices en $\mathbb{R}^n$ que vienen inducidas por normas de vectores. Lo importante que hay que saber ahora es lo siguiente:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Dentro de algunas clases vamos a ver normas de matrices en $\mathbb{R}^n$ que vienen inducidas por normas de vectores. Lo importante que hay que saber ahora es lo siguiente:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$i = 1 \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |-1| + |2| + |-4| = 7$$

$$i = 2 \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |0| + |4| + |2| = 6$$

$$i = 3 \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |-5| + |1| + |6| = 12$$

Luego, $\|A\|_\infty = 12$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Estabilidad

Para ver que el método es estable en norma infinito, es suficiente pedir que $\|A\|_\infty \leq 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1-a\nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a\nu & 1-a\nu & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a\nu & 1-a\nu \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{|1-a\nu|, |1-a\nu| + |a\nu|\}$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Estabilidad

Para ver que el método es estable en norma infinito, es suficiente pedir que $\|A\|_\infty \leq 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1-a\nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a\nu & 1-a\nu & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a\nu & 1-a\nu \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{|1-a\nu|, |1-a\nu| + |a\nu|\}$$

Si pedimos que $a\nu \leq 1$

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{|1-a\nu|, |1-a\nu| + |a\nu|\} = \text{máx}\{1-a\nu, 1\} = 1$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Estabilidad

Para ver que el método es estable en norma infinito, es suficiente pedir que $\|A\|_\infty \leq 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1-a\nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a\nu & 1-a\nu & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a\nu & 1-a\nu \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{|1-a\nu|, |1-a\nu| + |a\nu|\}$$

Si pedimos que $a\nu \leq 1$

$$\|A\|_\infty = \text{máx}\{|1-a\nu|, |1-a\nu| + |a\nu|\} = \text{máx}\{1-a\nu, 1\} = 1$$

Entonces, si $a\nu \leq 1$, el método es **estable en norma infinito**.

$$a\nu \leq 1 \overset{\nu=\frac{k}{h}}{\iff} k \leq \frac{h}{a}$$

Sea $\mathcal{U}$ la solución exacta en la ecuación. En nuestro esquema tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x_i, t_j + k) = & \quad a\nu\mathcal{U}(x_i - h, t_j) + (1 - a\nu)\mathcal{U}(x_i, t_j) + kR(x_i, t_j + k) \\ u_i^{j+1} = & \quad a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j \end{aligned}$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Convergencia

Sea $\mathcal{U}$ la solución exacta en la ecuación. En nuestro esquema tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x_i, t_j + k) = &\quad a\nu\mathcal{U}(x_i - h, t_j) + (1 - a\nu)\mathcal{U}(x_i, t_j) + kR(x_i, t_j + k) \\ u_i^{j+1} = &\quad a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j \end{aligned}$$

Sean $e_i^j = \mathcal{U}(x_j, t_i) - u_i^j$, restando las dos expresiones de arriba, tenemos que:

$$e_i^{j+1} = a\nu e_{i-1}^j + (1 - a\nu)e_i^j + kR(x_i, t_j + k)$$

Decimos que el método es **convergente** si $|e_i^j| \xrightarrow[]{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} 0$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Convergencia

Sea $\mathcal{U}$ la solución exacta en la ecuación. En nuestro esquema tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x_i, t_j + k) = &\quad a\nu\mathcal{U}(x_i - h, t_j) + (1 - a\nu)\mathcal{U}(x_i, t_j) + kR(x_i, t_j + k) \\ u_i^{j+1} = &\quad a\nu u_{i-1}^j + (1 - a\nu)u_i^j \end{aligned}$$

Sean $e_i^j = \mathcal{U}(x_j, t_i) - u_i^j$, restando las dos expresiones de arriba, tenemos que:

$$e_i^{j+1} = a\nu e_{i-1}^j + (1 - a\nu)e_i^j + kR(x_i, t_j + k)$$

Decimos que el método es **convergente** si $|e_i^j| \xrightarrow[]{\substack{h\to 0 \\ k\to 0}} 0$

Consideramos $E^j = \max_{1\le i\le N} |e_i^j|$ y $R^j = \max_{1\le i\le N} |R(x_i, t_j)|$. Entonces, tenemos que:

$$|e_i^{j+1}| \le |a\nu||e_{i-1}^j| + |1 - a\nu||e_i^j| + k|R(x_i, t_j + k)| \le |a\nu|E^j + |1 - a\nu|E^j + kR^{j+1} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow E^{j+1} \le |a\nu|E^j + |1 - a\nu|E^j + kR^{j+1}$$

$$E^{j+1} \leq |a\nu|E^{j} + |1 - a\nu|E^{j} + kR^{j+1}$$

# Ecuaciones en derivadas parciales - Convergencia

$$E^{j+1} \leq |a\nu| E^j + |1 - a\nu| E^j + kR^{j+1}$$

Si $a\nu \leq 1$:

$$E^{j+1} \leq E^j + kR^{j+1}$$

Entonces, se tiene que:

$$E^j \leq E^{j-1} + kR^j \leq E^{j-2} + kR^{j-1} + kR^j \leq \cdots \leq kR^1 + kR^2 + \cdots + kR^j = k \sum_{m=1}^{j} R^m$$

$$E^{j+1} \leq |a\nu|E^j + |1 - a\nu|E^j + kR^{j+1}$$

Si $a\nu \leq 1$:

$$E^{j+1} \leq E^j + kR^{j+1}$$

Entonces, se tiene que:

$$E^j \leq E^{j-1} + kR^j \leq E^{j-2} + kR^{j-1} + kR^j \leq \cdots \leq kR^1 + kR^2 + \cdots + kR^j = k\sum_{m=1}^{j} R^m$$

Consideremos $\mathcal{R} = \max\limits_{1 \leq j \leq M} \max\limits_{1 \leq i \leq N} |R(x_i, t_j)|$. Como $R(x_i, t_j) = O(h) + O(k)$, vale que $\mathcal{R} = O(h) + O(k)$. Además, $R^m = \max\limits_{0 \leq i \leq N} |R(x_i, t_m)| \leq \mathcal{R}$. Luego:

$$E^{j+1} \leq |a\nu| E^j + |1 - a\nu| E^j + kR^{j+1}$$

Si $a\nu \leq 1$:

$$E^{j+1} \leq E^j + kR^{j+1}$$

Entonces, se tiene que:

$$E^j \leq E^{j-1} + kR^j \leq E^{j-2} + kR^{j-1} + kR^j \leq \cdots \leq kR^1 + kR^2 + \cdots + kR^j = k \sum_{m=1}^{j} R^m$$

Consideremos $\mathcal{R} = \max_{1 \leq j \leq M} \max_{1 \leq i \leq N} |R(x_i, t_j)|$. Como $R(x_i, t_j) = O(h) + O(k)$, vale que $\mathcal{R} = O(h) + O(k)$. Además, $R^m = \max_{0 \leq i \leq N} |R(x_i, t_m)| \leq \mathcal{R}$. Luego:

$$\begin{aligned} E^j &\leq k \sum_{m=1}^{j} R^m \leq k \sum_{m=1}^{M} R^m \leq k \sum_{m=1}^{M} \mathcal{R} = \\ &= kM\mathcal{R} = k\frac{T}{k}\mathcal{R} = T\mathcal{R} = \\ &= T(O(h) + O(k)) \xrightarrow[]{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} 0 \end{aligned}$$

Se demuestra entonces que, si $a\nu \leq 1$, el método resulta **convergente**.