Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico
Métodos Multipaso

Mercedes Pérez Millán

Dto. de Matemática–FCEyN–Universidad de Buenos Aires
IMAS-CONICET

01 de julio de 2021

“Machete”: métodos de un paso vs. métodos multipaso.

Iteración:

Métodos de un paso	Métodos multipaso
$y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h)$	$\boxed{\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f_{n+j}}$ k pasos, $f_{n+j} = f(t_{n+j}, y_{n+j})$, $a_k \neq 0$, $\lvert a_0 \rvert + \lvert b_0 \rvert > 0$. Si $b_k = 0$ método explícito; si no, implícito.

Ejemplos:

Métodos de un paso	Métodos multipaso
- Euler - Taylor de orden k - Runge-Kutta Ej.: RK2: $K_1 = f(t_i, y_i)$, $K_2 = f(t_i+h, y_i+hK_1)$, $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1+K_2)$.	$f(t, y(t)) \sim \dfrac{y(t+h) - y(t-h)}{2h}$ $\rightsquigarrow y_{j+1} = y_{j-1} + 2hf(t_j, y_j)$ 2 pasos; y_0 dato; y_1 c/ Euler o RK. $\underbrace{\int_t^{t+h} y'(s)\ ds}_{y(t+h)-y(t)} = \underbrace{\int_t^{t+h} f(s, y(s))\ ds}_{\text{uso fórmulas de cuadratura}}$

τ (error de truncado local):

Métodos de un paso

$$y(t+h) = y(t) + h\phi(t, y(t), h) + \underbrace{h\tau}_{\text{error local}}$$

Ej: Euler $\tau = \frac{h}{2} y''(\xi)$, $\xi \in (t, t+h)$.

Métodos multipaso

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y(t+jh) = h \sum_{j=0}^{k} b_j y'(t+jh) + h\tau$$

Consistencia:

Métodos de un paso	Métodos multipaso
$\tau \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$	$\tau \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

Métodos multipaso: $\sum_{j=0}^{k} a_j y(t+jh) = h\sum_{j=0}^{k} b_j y'(t+jh) + h\tau$

- $y(t+jh) = y(t) + y'(t)jh + \frac{y''(t)}{2}(jh)^2 + \dots$
- $y'(t+jh) = y'(t) + y''(t)jh + \frac{y'''(t)}{2}(jh)^2 + \dots$
- $h\tau = c_0 y(t) + c_1 h y'(t) + c_2 h^2 y''(t) + \dots$

$$\Rightarrow \quad c_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j, \; c_1 = \sum_{j=0}^{k} j a_j - \sum_{j=0}^{k} b_j, \; \boxed{c_m = \sum_{j=0}^{k} \frac{j^m}{m!} a_j - \sum_{j=0}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1!)} b_j}.$$

Métodos de un paso	Métodos multipaso
consist. $\Leftrightarrow \phi(t,y,0) = f(t,y)$	consist. $\Leftrightarrow c_0 = c_1 = 0$

Orden p :

Métodos de un paso	Métodos multipaso
$\tau = O(h^p)$	$\tau = O(h^p)$
Euler $\longrightarrow$ orden 1 T_k $\longrightarrow$ orden k $RK2$ $\longrightarrow$ orden 2	Orden p sii $c_0 = c_1 = \cdots = c_p = 0$ y $c_{p+1} \neq 0$.

Diferencias:

Métodos de un paso	Métodos multipaso
Condición CL: Existe K indep. de t y h tal que $\lvert\phi(t,y,h)-\phi(t,z,h)\rvert \leq K\lvert y-z\rvert$	Polinomio característico: $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$
Error global: ϕ CL $\lvert y(t_j)-y_j\rvert \leq \frac{\tau_{max}}{K}\left(e^{K(t_j-t_0)}-1\right)$	Condición de la raíz: r_i cero de p, $i)$ $\lvert r_i\rvert \leq 1$ si r_i cero simple, $ii)$ $\lvert r_i\rvert < 1$ si r_i cero múltiple.

Convergencia en $[0, T]$:

Métodos de un paso	Métodos multipaso
$T = nh$, converge si $\lim_{h\to 0} y_n = y(T)$.	$T = (n+k)h$, converge si $\lim_{h\to 0} y_{n+k} = y(T)$.
<u>Teo</u>: CL $+$ consistencia $\Rightarrow$ conv.	<u>Teo</u>: cond. de la raíz $+$ consist. $\Leftrightarrow$ conv.

Ejercicio:

Se considera el PVI $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

a) A partir de la siguiente igualdad, que vale para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\, dt + \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} y'(t)\, dt = \alpha \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt + \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\, dt,$$

hallar el método multipaso

$$y_{n+2} + (\alpha - 1) y_{n+1} - \alpha y_n = h[A f_{n+2} + B f_{n+1} + C f_n],$$

que resulta de aproximar mediante la regla de trapecios cada una de las integrales

$$\alpha \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, dt \qquad \text{y} \qquad \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\, dt.$$

Ejercicio:

b) Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el método del ítem anterior resulte convergente.

c) Para tales valores de α, ¿cuál es el orden de convergencia?

Resolución:

a) Recuerdo: $\boxed{T(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))}$.

$$\alpha \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\ dt \sim \alpha \left[\frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})\right], \qquad (1)$$

$$\int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} f(t, y(t))\ dt \sim \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_{n+2}). \qquad (2)$$

$$(1) + (2) = h\left[\frac{1}{2} f_{n+2} + \frac{\alpha + 1}{2} f_{n+1} + \frac{\alpha}{2} f_n\right]$$

Luego, $\boxed{A = \frac{1}{2}}$, $\boxed{B = \frac{\alpha+1}{2}}$, $\boxed{C = \frac{\alpha}{2}}$.

Notar que $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\ dt = y(t_{n+1}) - y(t_n) \sim y_{n+1} - y_n$, etc.

Resolución:

b) Convergencia = consistencia + condición de la raíz.

$$y_{n+2} + (\alpha - 1)y_{n+1} - \alpha y_n = h[\frac{1}{2}f_{n+2} + \frac{\alpha + 1}{2}f_{n+1} + \frac{\alpha}{2}f_n]$$

- Consistencia: $c_0 = c_1 = 0$

$$c_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j = a_0 + a_1 + a_2 = -\alpha + (\alpha - 1) + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{j=0}^{k} j a_j - \sum_{j=0}^{k} b_j = a_1 + 2a_2 - (b_0 + b_1 + b_2) \\ &= (\alpha - 1) + 2 - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{1}{2}) = 0. \end{aligned}$$

Así, el método es consistente para todo α.

Resolución:

b)
- Condición de la raíz: $|r_i| \leq 1$ si r_i cero simple de p; $|r_i| < 1$ si r_i cero múltiple de p.
  $p(x) = x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha$ y sus raíces:

$$\frac{1-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1 + 4\alpha}}{2} = \frac{1-\alpha \pm \sqrt{(\alpha+1)^2}}{2} = \frac{1-\alpha \pm (\alpha+1)}{2},$$

  es decir, $r_1 = 1$, $r_2 = -\alpha$. Luego, la condición de la raíz se satisface si $\alpha \in (-1, 1]$.

De esta forma, el método converge si y solo si $\boxed{\alpha \in (-1, 1]}$.

Resolución:

c) $\boxed{c_m = \sum_{j=0}^{k} \frac{j^m}{m!} a_j - \sum_{j=0}^{k} \frac{j^{m-1}}{(m-1!)} b_j}$

$$\begin{aligned}
c_2 &= \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{4}{2} a_2\right) - \left(b_1 + \frac{2}{1} b_2\right) \\
&= \left(\frac{\alpha - 1}{2} + 2\right) - \left(\frac{\alpha + 1}{2} + 1\right) = 0 \\
c_3 &= \left(\frac{1}{6} a_1 + \frac{8}{6} a_2\right) - \left(\frac{1}{2} b_1 + \frac{4}{2} b_2\right) \\
&= \left(\frac{\alpha - 1}{6} + \frac{8}{6}\right) - \left(\frac{\alpha + 1}{4} + \frac{4}{4}\right) \\
&= \frac{2\alpha + 14 - 3\alpha - 15}{12} = \frac{-\alpha - 1}{12}
\end{aligned}$$

$c_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$, pero $\alpha \in (-1, 1]$, por lo tanto $c_3 \neq 0$ y el orden de convergencia es 2.