Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°2

1. Considerar el problema: $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & t(\mathrm{sen}(y(t)))^2 \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$.

a) Escribir la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.

b) Calcular el error de truncado local para $t \in [0, 1)$.

c) Si se escribe a la iteración del método de Euler como $y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h)$ para $0 \leq i \leq N - 1$, mostrar que $\phi(t, y, h)$ es Lipschitz respecto de la segunda variable y concluir que $|y_N - y(1)| \to 0$ cuando $N \to +\infty$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°2 - Resolución del ejercicio

1a) La iteración del método de Euler con paso $h = \frac{1}{N}$ es:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + ht_i(\mathrm{sen}(y_i))^2, \text{ para } 0 \leq i \leq N-1, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

1b) Recordemos que el error de truncado local para el método de Euler para t en $[0,1)$ es $\tau = \frac{h}{2}y''(\xi)$, para $\xi \in (t, t+h) \subseteq (0,1)$. Como $y''(t) = \frac{d}{dt}f(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(t(\mathrm{sen}(y(t)))^2) = (\mathrm{sen}(y(t))^2 + 2t\,\mathrm{sen}(y(t))(\cos(y(t))t(\mathrm{sen}(y(t))^2 = (\mathrm{sen}(y(t))^2(1 + 2t^2\cos(y(t))\,\mathrm{sen}(y(t)))$, tenemos:

$$\tau = \frac{hy''(\xi)}{2} = \frac{h[(\mathrm{sen}(y(\xi))^2(1 + 2\xi^2\cos(y(\xi))\,\mathrm{sen}(y(\xi)))]}{2}.$$

Para acotar esta expresión (en módulo) alcanza con considerar que $|\cos(z)| \leq 1$, $|\mathrm{sen}(z)| \leq 1$ para cualquier argumento z, que $\xi \in (0,1)$ y por lo tanto $|\xi| < 1$, más la desigualdad triangular. Luego:

$$|\tau| \leq \frac{h[1 \times (1 + 2 \times 1 \times 1 \times 1)]}{2} = \frac{3h}{2}.$$

De esta forma, el valor máximo que puede tomar $|\tau|$, τ_{MAX}, se puede acotar por $\tau_{MAX} \leq \frac{3h}{2}$.

1c) Mostremos ahora que $\phi(t, y, h) = t(\sin(y))^2$ es Lipschitz respecto de la segunda variable:

$$\begin{aligned} |\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| &= |t(\mathrm{sen}(y))^2 - t(\mathrm{sen}(z))^2| = t|\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}(z)||\mathrm{sen}(y) - \mathrm{sen}(z)| \\ &\leq 1 \cdot 2 \cdot |\mathrm{sen}(y) - \mathrm{sen}(z)| \underset{TVM}{=} 2|\cos(\xi)||y - z| \leq 2|y - z|. \end{aligned}$$

Como el método es consistente porque $\tau \underset{h \to 0}{\to} 0$ y la ϕ es Lipschitz en la segunda variable, el método converge.

Tambien podríamos ver que, si K es la constante de Lipschitz (en este caso, $K = 2$):

$$|y_N - y(1)| = |e_N| \leq \frac{\tau_{MAX}}{K}(e^{K(1-0)} - 1) \leq \frac{3h}{4}(e^2 - 1) = \frac{3}{4N}(e^2 - 1) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$