**Ejercicio 13.** Dado un intervalo $[a, b]$ decidir como tienen que estar distribuidos $n + 1$ nodos $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ en el intervalo de modo que exista un $x \in [a, b]$ tal que

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \sim (b - a)^{n+1}$$

**Solución:** Por definición $f(n) \sim g(n)$ si

$$f(n) = O(g(n)), \qquad g(n) = O(f(n)).$$

Sabemos que para cualquier distribución de puntos $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ se cumple que para cualquier $x$ fijo

$$f(n) = |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \leq (b - a)^{n+1}$$

esto porque para cada $i$: $|(x - x_i)| \leq (b - a)$. Es decir $f(n) = O(g(n))$ con la constante $C = 1$.

Para probar que $g(n) = O(f(n))$ queremos ver que hay un $x \in [a, b]$ tal que existe una constante $K$ tal que

$$(b - a)^{n+1} \leq K|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$$

La idea intuitiva es que los nodos $\{x_i\}$ deberían estar acumulados (o arrinconados) en uno de los extremos del intervalo. Asi, si $x = a$, los $x_i's$ deberían estar muy "pegados" a $b$. Para encontrar dicha distribución de puntos consideremos lo siguiente:

Sean la siguiente sucesión de productos de números entre 0 y 1: $\{P_n\}_{n\geq 0}$ con

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} t_i \qquad \text{con los } t_i \in (0, 1)$$

buscamos los números $t_i$ de tal forma que la sucesión de los $P_n$ converja a una constante. Un ejemplo de tales números $t_i$ es:

$$t_i = \exp(-2^{-i}), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

En este caso:

$$P_n = \prod_{i=0}^{n} t_i = \prod_{i=0}^{n} \exp(-2^{-i}) = \exp\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i}\right) \to \exp(-2) \qquad \text{si } \ n \to \infty$$

donde usamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 2$.

Una vez que tenemos esta suceción de numeros $t_i's$ que nos dan un producto convergente definamos los nodos como

$$x_i = t_i b + (1 - t_i)a, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

como los $t_i \in (0,1)$ entonces los $x_i \in [a,b]$ para todo $i$. De esta forma, si tomamos $x = a$:

$$|x - x_i| = |a - t_i b - (1 - t_i)a| = t_i(b - a), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

entonces

$$|(a - x_0)(a - x_1)\cdots(a - x_n)| = (b - a)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} t_i$$

para rematar el ejercicio notemos que los productos $\prod_{i=0}^{n} t_i$ van siendo cada vez mas chicos a medida que crece $n$, es decir la sucesión $\{P_n\}_n$ es decreciente y converge a un valor constante, en nuestro caso a $\exp(-2)$, entonces en particular

$$\prod_{i=0}^{n} t_i \geq \exp(-2), \text{ para el caso en que los } t_i = \exp(-2^{-i})$$

entonces tenemos que:

$$|(a - x_0)(a - x_1)\cdots(a - x_n)| = (b - a)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} t_i \geq \exp(-2)(b - a)^{n+1}$$

o equivalentemente:

$$(b - a)^{n+1} \leq \exp(2)|(a - x_0)(a - x_1)\cdots(a - x_n)|.$$

En definitiva lo que tenemos es que, si elegimos los nodos como

$$x_i = t_i b + (1 - t_i)a, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

tenemos que

$$\exp(-2)(b - a)^{n+1} \leq |(a - x_0)(a - x_1)\cdots(a - x_n)| \leq (b - a)^{n+1}$$