Cálculo Numérico – Elementos de Cálculo Numérico
Ejercicios de final

1. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales $x'(t) = Ax(t)$, donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verifica $A^3 = 0$. Probar que el método de Runge-Kutta de segundo orden dado por:
$$x_n = x_{n-1} + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$
con $k_1 = Ax_{n-1}$ y $k_2 = A(x_{n-1} + hk_1)$, es exacto.

2. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales $x'(t) = Ax(t)$ con dato inicial $x(0) = x_0 \neq 0$, donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Probar que la solución aproximada dada por el método de Euler explícito, $x_{n+1} = x_n + hAx_n$, verifica $\|x_n\| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, para cualquier discretización temporal $h > 0$.
   (b) Probar que el método de Euler implícito, $x_{n+1} = x_n + hAx_{n+1}$, se verifica $\|x_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.
   (c) Analizar el comportamiento de las soluciones del método $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}A(x_n + x_{n+1})$.

3. Dada el problema de valor inicial
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$
donde f es una función C^2.
   (a) Probar que el método de Euler, $x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0)$, verifica $x(t_1) = x_1 + \tau h^2 + O(h^3)$, donde $x(t)$ es la solución exacta, $t_1 = t_0 + h$ y
$$\tau = \frac{1}{2}\left(f(t_0, x_0)f_x(t_0, x_0) + f_t(t_0, x_0)\right).$$
   (b) Probar que el método que se obtiene considerando dos pasos del método anterior con la mitad del paso, es decir $\bar{x}_{1/2} = x_0 + h/2f(t_0, x_0)$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_{1/2} + h/2f\left(t_0 + h/2, \bar{x}_{1/2}\right)$, verifica $x(t_1) = \bar{x}_1 + \tau h^2/2 + O(h^3)$.
   (c) Construir un método de segundo orden de la forma $\tilde{x}_1 = \alpha x_1 + \beta \bar{x}_1$.

4. Dado el problema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \end{cases}$$
   (a) Plantear un esquema de diferencias finitas consistente.
   (b) Estudiar su estabilidad.

5. Dado el problema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Vu, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \end{cases}$$
donde $V(x, t)$ es una función acotada,

(a) Plantear un esquema de diferencias finitas consistente.

(b) Estudiar su estabilidad.

6. Dado el problema $u_t = a\,u_{xx}$ con $a > 0$, considerar el esquema en diferencias:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = \frac{a}{2}\left(\frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{\Delta x^2}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{u_{j-1}^{k} - 2u_j^{k} + u_{j+1}^{k}}{\Delta x^2}\right).$$

   a) Calcular el error local de truncamiento.

   b) Obtener condiciones para la convergencia en norma infinito.

7. Sea $J = \mathbb{C}^{2\times 2}$ la matriz dada por

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   a) Probar que para toda norma de $\mathbb{C}^2$, $\|J\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|J\,x\| > |\lambda|$.

   Sug: Calcular $\|J^k x\|$ donde $x = (1\ \lambda)^T$.

   b) Si $A = \mathbb{C}^{2\times 2}$ probar que A es diagonalizable si y sólo si existe una norma de $\mathbb{C}^2$ tal que $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|A\,x\| = \rho(A)$, donde $\rho(A)$ es el radio espectral.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz inversible y tridiagonal. Si $A = Q.R$ la descomposición QR de A (Q ortogonal y R triangular superior), probar que $r_{i,j} = 0$ para $j > i + 2$.

9. Sea f una función C^2 en el intervalo $[a, b]$.

   (a) Probar que el error de la regla del trapecio, $Q(f, a, b) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$, verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q(f, a, b) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

   (b) Probar que la regla del trapecio compuesta:

$$Q_n(f, a, b) = h\left(\frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh)\right),$$

   donde $h = (b-a)/n$, verifica

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\int_a^b f(x)\,dx - Q_n(f, a, b)\right) = -\frac{(b-a)^2}{12}\int_a^b f''(x)\,dx.$$

10. Sea f una función C^4 en el intervalo $[0, 1]$.

   (a) Probar que el error de la regla de Simpson, $Q(f) = \frac{1}{6}(f(0) + 4f(1/2) + f(1))$, existe $\xi \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 f(x)\,dx - Q(f) = -\frac{1}{2880} f^{(4)}(\xi),$$

   (b) Probar que la regla del Simpson compuesta:

$$Q_n(f) = \frac{1}{3n}\sum_{j=1}^{n/2}(f((2j-2)h) + 4f((2j-1)h) + f(2jh)),$$

   donde $h = 1/n$ y n es par, verifica

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \left(\int_0^1 f(x)\,dx - Q_n(f)\right) = -\frac{1}{180}\int_0^1 f^{(4)}(x)\,dx.$$

11. Sea $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortonormales en el intervalo simétrico $I = (-a, a)$ con peso $\omega(x) > 0$.

    (a) Probar que si ω es par, entonces $P_{2k}(x)$ es par y $P_{2k+1}(x)$ es impar, para $k \geq 0$.

    (b) En ese caso, ver que $\left\{t^{-1/2}P_{2k+1}(t^{1/2})\right\}_{k\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales en el intervalo $I = (0, a^2)$ con peso $t^{1/2}\omega(t^{/12})$.

    (c) Relacionar los polinomios ortonormales de Hermite $\{H_n(x)\}_{n\geq 0}$ ($I = (-\infty, \infty)$, $\omega(x) = e^{-x^2}$) y los de Laguerre generalizados $\{L_k^{(1/2)}(t)\}_{k\geq 0}$ ($I = (0, \infty)$, $\omega(t) = t^{1/2}e^{-t}$).

12. Dado $a \in \mathbb{R}$, se define $f_a\left(x\right) = \dfrac{e^x\left(x-1\right)+a}{e^x+1}$ $(a \in \mathbb{R})$.

    (a) Probar que $f_a\left(x\right)$ tiene un único punto fijo x_*.

    (b) Probar que la sucesión definida por $x_k = f_a\left(x_{k-1}\right)$ converge a x_*, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

13. Sea $f_\lambda\left(x\right) = \lambda x\left(1-x\right)$

    (a) Probar que para $\lambda > 1$, $f_\lambda\left(x\right)$ tiene un único punto fijo $x_\lambda \in (0, 1)$.

    (b) Probar que para $1 < \lambda < 3$, la sucesión definida por $x_k = f_\lambda\left(x_{k-1}\right)$ converge a x_λ para x_0 suficientemente cerca de x_λ.

14. Sea $\omega(x)$ una función continua y positiva definida en el intervalo $[a, b]$. Si $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ son los polinomios ortonormales en el intervalo $[a, b]$ con peso $\omega(x)$, entonces la función

    $$\phi_n(t) = \int_a^b e^{tx}P_n(x)\omega(x)dx$$

    verifica $\phi_n(0) = 0, \phi_n'(0) = 0, \ldots, \phi_n^{(n-1)}(0) = 0$.

15. Sea $A = \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible y $A = L.U$, donde L es triangular inferior y U es triangular superior con $u_{j,j} = 1$.

    a) Probar que si $a_{i,j} = 0$ para $j = 1, \ldots, r < i$, entonces $l_{i,j} = 0$ para $j = 1, \ldots, r < i$.

    b) Probar que si $a_{i,j} = 0$ para $i = 1, \ldots, s < j$, entonces $u_{i,j} = 0$ para $i = 1, \ldots, s < j$.