**Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico**
**Primer Cuatrimestre de 2021**
**Entrega n°4**

**1**. Dados $n \in \mathbb{N}$ y la matriz $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, verificar que $\text{cond}(A_n) \to +\infty$ cuando $n \to \infty$ en las normas $\|.\|_\infty$ y $\|.\|_1$ para $(A_n)_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ si } i \geq j \\ n^2 \text{ si } i < j \end{cases}$. Es decir: $A_n = \begin{pmatrix} 2 & n^2 & \dots & n^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n^2 \\ 2 & \dots & \dots & 2 \end{pmatrix}$.

**Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico**
**Primer Cuatrimestre de 2021**
**Entrega n°4 - Resolución del ejercicio**

1) Si bien $\mathrm{cond}_{\|.\|}(A_n) = \|A_n\|\|A_n^{-1}\|$, antes de calcular la inversa de una matriz conviene recordar el resultado de la Práctica 4 (Ejercicio 6) que nos indica que

$$\mathrm{cond}_{\|.\|}(A_n) \geq \frac{\|A_n\|}{\|A_n - B\|},$$

para cualquier matriz $B$ singular del tamaño correspondiente.

Primero notemos que $\|A_n\|_1 = \|A_n\|_\infty = 2 + (n-1)n^2$. (Así que buscamos una matriz $B$ singular tal que $\|A_n - B\|_1$ y $\|A_n - B\|_\infty$ "diverjan más lento" que $n^3$, mejor dicho, que sean $o(2 + (n-1)n^2)$.)

Tomemos, por ejemplo, la matriz $B$ singular que es igual a $A_n$ pero cuya primera columna tiene todas sus entradas iguales a 0. *(Otra opción: igual a $A_n$ pero que la última columna sea igual a la penúltima. Sugerencia: hacer las cuentas.)*

Calculamos: $A_n - B = \left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ \vdots & 0 \\ 2 & \end{array}\right)$ y por lo tanto $\|A_n - B\|_1 = 2n$ y $\|A_n - B\|_\infty = 2$.

Por lo que

$$\mathrm{cond}_1(A_n) \geq \frac{2 + (n-1)n^2}{2n} = \frac{1}{n} + (n-1)n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty,$$

$$\mathrm{cond}_\infty(A_n) \geq \frac{2 + (n-1)n^2}{2} = 1 + \frac{(n-1)n^2}{2} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty,$$

como queríamos probar.