Métodos iterativos

Jacobi y Gauss Seidel

Carlos H. D. Alliera

Cátedra de Matemática

Generación de un método iterativo

Supongamos que queremos resolver un sistema lineal:

$$A \cdot x = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

y que podemos descomponer la matriz asociada al sistema como suma

$$A = M + N, \quad M, \ N \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

donde M es inversible, entonces:

$$A \cdot x = b$$

$$(M + N) \cdot x = M \cdot x + N \cdot x = b \Leftrightarrow M \cdot x = -N \cdot x + b$$

Usamos la inversibilidad de M:

$$x = M^{-1} \cdot (-N \cdot x + b) = -M^{-1}N \cdot x + M^{-1} \cdot b$$

Generación de un método iterativo

Lo anterior genera el siguiente método iterativo:

$$x_n = -M^{-1}N \cdot x_{n-1} + M^{-1} \cdot b$$

Donde definimos

1. La matriz del método:

$$B = -M^{-1}N$$

2. Una matriz constante $C = -M^{-1} \cdot b$

de forma tal que el método iterativo se puede escribir

$$x_n = B \cdot x_{n-1} + C$$

Definición (Radio Espectral)

Para $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define el radio espectral:

$$\rho(B) = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|, \ \lambda_j \text{ autovalor de } B$$

Tratamiento del error de un método iterativo

Dado el sistema $A \cdot x = b$ para el que se propuso un método iterativo $x_n = B \cdot x_{n-1} + C$, entonces el error absoluto:

$$e_k = \|x - x_k\| = \|B \cdot x - B \cdot x_{k-1}\| = \|B(x - x_{k-1})\| \leq \|B\| e_{k-1} \leq \cdots \leq \|B\|^k e_0$$

Se prueba que el error tiende a 0 si $\|B\| < 1$ para alguna norma (por equivalencia).

Teorema

Son equivalentes para una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. $\rho(B) < 1$
2. *Para alguna norma "U"* $\|B\|_U < 1$

Demostración

Si el radio espectral es menor a 1 entonces existe alguna norma $\|\cdot\|_U$ tal que y el método converge para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ inicial.

Una forma sencilla de descomponer una matriz cuadrada es:

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + L + U$$

Método de Jacobi

Si la matriz diagonal D es inversible, se puede identificar $M = D, \ N = L + U$:

$$x_n = -D^{-1}(L+U) \cdot x_{n-1} + D^{-1} \cdot b = B_J \cdot x_{n-1} + C_J$$

Método de Gauss Seidel

Si la matriz $L + D$ es inversible, se puede identificar $M = L + D,\ N = U$:

$$x_n = -(L + D)^{-1}U \cdot x_{n-1} + (L + D)^{-1} \cdot b = B_{GS} \cdot x_{n-1} + C_{GS}$$

Definición (Matrices de Jacobi y Gauss Seidel)

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A = D + L + U$ *entonces:*

- *La matriz de Jacobi*

$$B_J = -D^{-1}(L + U)$$

- *La matriz de Gauss Seidel*

$$B_{GS} = -(L + D)^{-1}U$$

Autovalores de B_J y B_{GS}

- λ es autovalor de B_J sii $det(\lambda I - B_J) = 0$ o equivalentemente,

$$det(\lambda I - (-D^{-1}(L+U))) = det(D^{-1}(\lambda D + L + U)) =$$

$$= \frac{1}{det(D)} det(\lambda D + L + U) = 0 \Leftrightarrow det(\lambda D + L + U) = 0$$

- λ es autovalor de B_{GS} sii $det(\lambda I - B_{GS}) = 0$o equivalentemente,

$$det(\lambda I - (-(L+D)^{-1}U)) = det((L+D)^{-1}(\lambda(D+L)+U)) =$$

$$= \frac{1}{det(L+D)} det(\lambda(D+L)+U) = 0 \Leftrightarrow det(\lambda D + \lambda L + U) = 0$$

Algunas Propiedades

1. Si A es estrictamente diagonal dominante, Jacobi y GS convergen.
2. Si A es simétrica y definida positiva, GS converge.
3. Si A es tridiagonal,
$$\rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^2$$
4. Si A es tridiagonal, Jacobi converge sii GS converge.
5. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, Jacobi converge sii GS converge.

Otros métodos

Métodos de Sobre relajación (SOR)

Es un *promedio* entre los x_k y x_{k+1} de Gauss Seidel

$$x_{k+1} = B_\omega x_k + (D + \omega L)^{-1})\omega b$$

donde

$$B_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)$$

Este método converge si $|\omega - 1| < 1$.
Nótese que $B_1 = B_{GS}$

Método de Richardson

Para resolver $A \cdot x = b$

$$x_n = (I - A) \cdot x_{n-1} + b$$

Ejercicio

Ejercicio 0: Ejemplo de Gauss-Seidel

Se quiere resolver el sistema $A \cdot x = b$ usando Gauss-Seidel con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Decidir para qué valores de α el método resulta convergente.

Primero calculamos

$$det(\lambda D + \lambda L + U) = det \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha & 1 \\ \lambda\alpha & \lambda & \alpha \\ \lambda\alpha^2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-(-\alpha)(\lambda^2\alpha - \lambda\alpha^3) + \lambda(\lambda^2 - \lambda\alpha^2) = \alpha^2\lambda(\lambda - \alpha^2) + \lambda^2(\lambda - \alpha^2) = 0$$

$$(\alpha^2\lambda + \lambda^2)(\lambda - \alpha^2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = \alpha^2,\ \lambda = -\alpha^2$$

El método converge si y solo sí: $\rho(B_{GS}) = |\lambda| = \alpha^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ a_{ii} \neq 0\ (1 \leq i \leq n)$.
Considere la descomposición $A = D + L + U$.

1. Pruebe que resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver $(D + \frac{1}{2}L)x = -(\frac{1}{2}L + U)x + b$.

2. Considere el método iterativo $x_{n+1} = B \cdot x_n + C$ donde $B = -(D + \frac{1}{2}L)^{-1} \cdot (\frac{1}{2}L + U)$ y $C = (D + \frac{1}{2}L)^{-1}b$.
   Demuestre que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de la matriz B sii λ es raíz de la ecuación

$$det\left[\frac{1}{2}L + U + \lambda(D + \frac{1}{2}L)\right] = 0$$

3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

   Demuestre que el método anterior converge sii $a^2 < -2 + \sqrt{5} \approx 0,236068$.

4. Verifique qué condición satisface el método de Gauss Seidel sobre el parámetro a. Comparado con el método propuesto, ¿cuál de los dos eligiría?

Ejercicio 1

Todo surge a partir de la descomposición de la matriz del sistema:

$$A = D + L + U = D + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L + U$$

entonces

$$Ax = b \Leftrightarrow \left(D + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L + U\right)x = \left(D + \frac{1}{2}L\right)x + \left(\frac{1}{2}L + U\right)x = b$$

despejando el segundo término de la izquierda:

$$\left(D + \frac{1}{2}L\right)x + \left(\frac{1}{2}L + U\right)x = b \Longleftrightarrow \left(D + \frac{1}{2}L\right)x = -\left(\frac{1}{2}L + U\right)x + b$$

y listo.

Ejercicio 2

Planteamos que λ es raíz del polinomio característico para B:

$$0 = det(\lambda I - B) = det\left(\lambda I + \left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}L + U\right)\right) \bigstar$$

Se sabe que

$$I = \left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1} \cdot \left(D + \frac{1}{2}L\right)$$

y apelando a propiedades del determinante,

$$\bigstar = det\left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1} det\left(\lambda\left(D + \frac{1}{2}L\right) + \left(\frac{1}{2}L + U\right)\right) = 0$$

y como se supone que la matriz $D + \frac{1}{2}L$ es inversible, entonces:

$$det\left(\lambda\left(D + \frac{1}{2}L\right) + \left(\frac{1}{2}L + U\right)\right) = 0$$

que era lo que queríamos probar.

Ejercicio 3

Se sabe que λ es autovalor de $B \Leftrightarrow det\left(\lambda\left(D+\frac{1}{2}L\right)+\left(\frac{1}{2}L+U\right)\right)=0.$ Nos planteamos:

$$0 = det\left(\lambda\left(D+\frac{1}{2}L\right)+\left(\frac{1}{2}L+U\right)\right) = det\begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ \frac{a}{2}(1+\lambda) & \lambda & a \\ 0 & \frac{a}{2}(1+\lambda) & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 - \frac{a^2}{2}(1+\lambda)\right) - a\left(\frac{a}{2}(1+\lambda)\lambda\right) = \lambda\left(\lambda^2 - a^2(1+\lambda)\right) = \lambda\left(\lambda^2 - \lambda a^2 - a^2\right)$$

que se anula solo si:

$$\lambda = 0,\ \ \lambda = \frac{-a^2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2},\ \ \lambda = \frac{-a^2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2}$$

para la convergencia:

$$|\lambda| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}\right| = \left|\frac{-a^2 + |a|\sqrt{a^2 + 4}}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2} < 2$$

$$|\lambda| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-a^2 - \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}\right| = \left|\frac{-a^2 - |a|\sqrt{a^2 + 4}}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow \boxed{a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2} < 2}$$

De esta última desigualdad:

$$a^4 + 4a^2 < (2 - a^2)^2 \Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{2}$$

Note que la primera desigualdad se verifica siempre.

Ejercicio 4

Sea λ autovalor de la matriz de Gauss-Seidel:

$$0 = det(\lambda L + \lambda D + U) = det \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ a\lambda & \lambda & a \\ 0 & a\lambda & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2 - a^2\lambda) - a^2\lambda^2 =$$

$$\lambda^3 - 2a^2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 2a^2) \Rightarrow \lambda = 0,\ |\lambda| = 2a^2$$

Gauss Seidel converge si

$$|\lambda| = 2a^2 < 1 \Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{2}$$

Elegiríamos Gauss Seidel porque converge para un intervalo más grande de valores de a

Ejercicios para pensar

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ \beta & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$$

Para resolver el sistema lineal $Ax = b$ se descompone la matriz A de la siguiente forma: $A = M - N$.
Se utiliza el método iterativo: $x_{n+1} = M^{-1}Nx_n + M^{-1}b$
Se proponen dos posibles descomposiciones de la matriz A:
$A = M_1 - N_1, \quad A = M_2 - N_2$ siendo:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ \beta & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ N_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios para pensar

1. Probar que ambos métodos convergen para los mismos valores de α y β.
2. Para cada α y β tales que los métodos resultan convergentes, decidir cuál de los dos elegiría y fundamentar su elección[1].

[1] ¿Se acuerda del radio espectral? Qué será de su vida!

(Otro) Problema de parcial

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha} & 2 \\ -1 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \; \alpha \neq 0$$

y considere el sistema lineal $Ax = b$.
Hallar α tal que puede asegurar que tanto el método de Jacobi como el de Gauss Seidel convergen, cualquiera sea b y para todo x_0 inicial. Justifique su elección.

Demostración

- Supongamos que existe $|\lambda_1| > 1$. Sea $x_1 \in \mathbb{R}^n$ autovector, $\|Bx_1\| = |\lambda_1|\|x_1\|$ para *cualquier* norma. Entonces

$$\|B\| = \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Bx_1\|}{\|x_1\|} = |\lambda_1| > 1$$

  No vale 2.

- Se sabe que B es semejante a una matriz triangular superior T, o sea, existe $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible tal que $B = U^{-1} \cdot T \cdot U$ entonces

$$UB \cdot x = TU \cdot x$$

  si vale que para alguna norma $\|T\| < 1 \Rightarrow \|UBx\| = \|TUx\| < \|Ux\|$.
  Defino la norma $\|x\|_U = \|Ux\|$ (probar que es norma vectorial), luego:

$$\|Bx\|_U < \|x\| \Rightarrow \|B\|_U < 1$$

Volver