Resolución numérica de sistemas lineales

Resolución numérica de sistemas lineales

Temas:

Práctica 4. Métodos “Directos” estilo “programamos Gauss”

Práctica 5. Métodos “Iterativos” que ya veremos

Condicionamiento $\longrightarrow$ ¿Qué errores podemos esperar tener *independientemente* del método que usemos?

Resolución numérica de sistemas lineales

Ejercicio 4: $Ax = b$

$\tilde{x}$ Sol numérica aprox $$\frac{||x-\tilde{x}||}{||x||} \leq \mathrm{Cond}(A)\frac{||b-A\tilde{x}||}{||b||}$$

$\tilde{b}$ Lado derecho aprox (con sol exacta!) $$\frac{||x-\tilde{x}||}{||x||} \leq \mathrm{Cond}(A)\frac{||b-\tilde{b}||}{||b||}$$

Sugerencia: usar las definiciones y la propiedad $||Ax|| \leq ||A||\,||x||$

… y para “interpretar el resultado”, un ejercicio computacional...

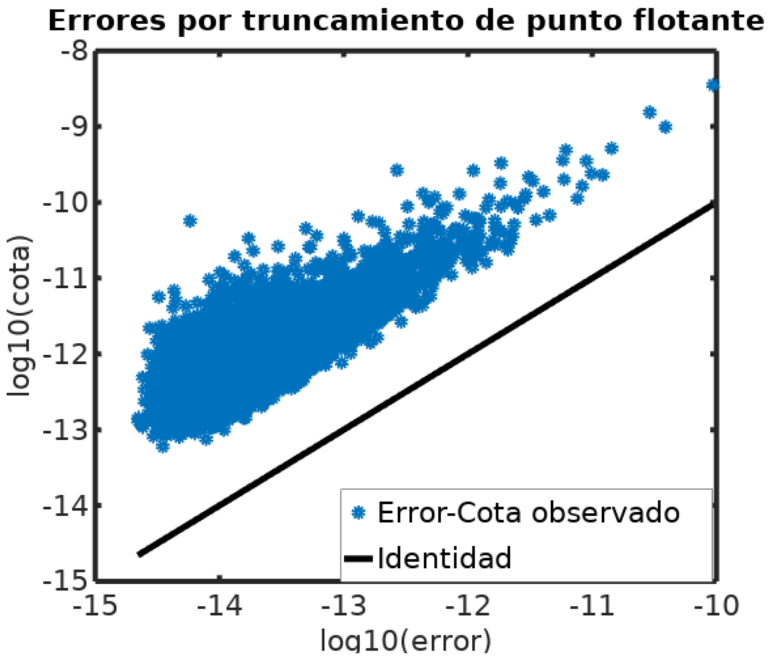
Resolución numérica de sistemas lineales

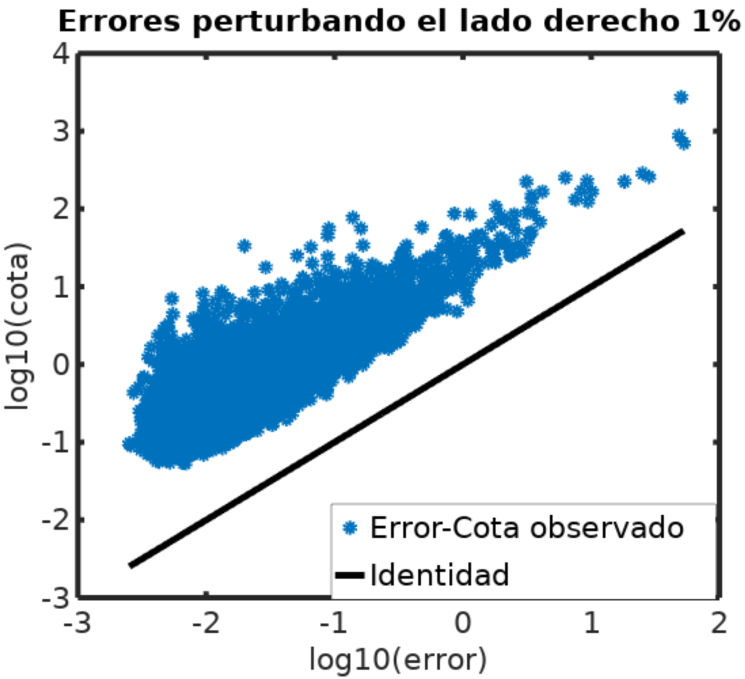
$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}(A)\frac{\|b-A\tilde{x}\|}{\|b\|}$$

error

cota

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$





Ejercicio 9: condicionamiento y determinantes

(ejercicio trivial con moraleja)

$$A_n = \begin{bmatrix} 0.1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0.1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad A_n = 0.1 I_n$$

$$\det(A_n) = 0.1^n \to 0 \qquad \mathrm{Cond}(A_n) = 1\,\textbf{!!}$$

$$\det(A) = \prod_{i=0}^{n} \lambda_i^{m_i}$$ → Para el condicionamiento no nos importa la multiplicidad

Problemas mal condicionados

Ejercicios 8, 10 y 11: condicionamiento tendiendo a infinito

Para acotar **inferiormente** el condicionamiento usamos la propiedad

$$\mathrm{Cond}(A) = \sup \left\{ \frac{\|A\|}{\|A-B\|} \;:\; B \text{ singular} \right\}$$

eligiendo una matriz B “astutamente”, ya que

$$\mathrm{Cond}(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|} \;\forall\, B \text{ singular}$$

Ejercicios 8, 10 y 11: condicionamiento tendiendo a infinito

Ejemplo. Muy similar al ejercicio 8.

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{elijo}} B_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singular

$$A_\varepsilon - B_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

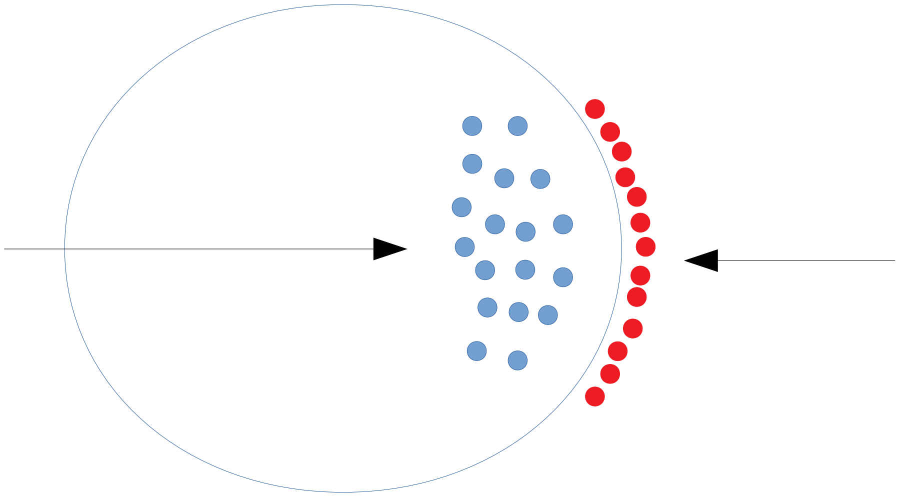
$$\|A_\varepsilon - B_\varepsilon\|_\infty = 2\varepsilon \Rightarrow \mathrm{Cond}_\infty(A_\varepsilon) \geq \frac{\|A_\varepsilon\|_\infty}{2\varepsilon} = \frac{6}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cond}_\infty(A_\epsilon) \to \infty \text{ si } \varepsilon \to 0$$

(y en cualquier otra norma también, porque en dimensión finita son todas equivalentes)

Problema inverso: modelo simplificado de gravimetría

Masas puntuales en los puntos azules



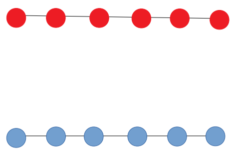
Medimos la gravedad en los puntos rojos

Ley de Newton $d = G\frac{p}{r^2}$ es lineal en p y d.

$$\boxed{d_j = \sum_{i=0}^{n} \frac{G}{r_{ij}^2} p_i}$$

Problema inverso: modelo simplificado de gravimetría

Simplificando la geometría



$(jh, 2)$

$(ih, 1)$

$$h = \frac{1}{n}$$

$$d_j = \sum_{i=0}^{n} \frac{G}{r_{ij}^2} p_i$$

$$r_{ij}^2 = \|(ih, 1) - (jh, 2)\|_2^2 = 1 + (i-j)^2 h^2$$

$$A_n = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{G}{1 + \frac{(i-j)^2}{n^2}}$$

$$\boxed{p = A_n^{-1} d}$$

Ejercicios 8, 10 y 11: condicionamiento tendiendo a infinito

Dada la sucesión de matrices $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_{ij} = \dfrac{1}{1+\frac{(i-j)^2}{n^2}}$

probar que $\mathbf{Cond}(A_n) \to \infty$

¿¿Cómo se me ocurre la matriz para comparar??

Ejercicios 8, 10 y 11: condicionamiento tendiendo a infinito

Tip: el condicionamiento tiende a infinito si nuestra matriz
"se parece" a una matriz singular… hay que buscar a cuál.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3+\varepsilon \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filas parecidas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Columnas parecidas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Columnas casi múltiplo

O sea, me doy cuenta de *por qué* una matriz se parece a una singular
(sin tomar límite y examinarlo, porque puede no haber una matriz límite)

Problemas inversos: usualmente mal condicionados

Dada la sucesión de matrices $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a_{ij} = \dfrac{1}{1+\frac{(i-j)^2}{n^2}}$

probar que $\textbf{Cond}(A_n) \to \infty$

Idea: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es continua, y $a_{ij} = f(h(i-j))$

Con lo cual cada fila o columna se tiene que parecer a su vecina

→ Como matriz singular, elijo $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq 1 \\ a_{2j} & i = 1 \end{cases}$

Problemas inversos: usualmente mal condicionados

$$A_n - B_n = \begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ \frac{1}{1+h^2(1-j)^2} - \frac{1}{1+h^2(2-j)^2} & i = 1 \end{cases}$$

$$\|A_n - B_n\|_\infty = \max_{0\leq j\leq n} \left| \frac{1}{1+h^2(1-j)^2} - \frac{1}{1+h^2(2-j)^2} \right|$$

$$a = 1 + h^2(1-j)^2$$
$$b = 1 + h^2(2-j)^2$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

$$b - a = h^2\left[(2-j)^2 - (1-j)^2\right] \sim O(h^2)$$

$$ab \geq 1$$

$$\Rightarrow \|A_n - B_n\|_\infty \sim O(h^2)$$

Problemas inversos: usualmente mal condicionados

Recapitulando $$\mathrm{Cond}(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|} \ \forall\ B \text{ singular}$$

Demostramos $$\|A_n - B_n\|_\infty \sim O(h^2)$$

Es fácil chequear que $$\|A_n\|_\infty \geq 1$$ (vale 1 en la diagonal...)

$$\Rightarrow \mathrm{Cond}(A_n) \sim O(n^2)$$