Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Segundo Cuatrimestre 2020

Práctica N° 6: Interpolación.

Ejercicio 1 Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3:

a) en la forma de Lagrange,

b) por coeficientes indeterminados,

c) utilizando diferencias divididas.

Verificar los resultados en `Octave`, utilizando el comando **polyfit**. Graficar el polinomio interpolador, usando **polyval**.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

Ejercicio 2 Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto $x = 4,\ y = 1$. Calcular los polinomios interpoladores, aumentando las tablas de diferencias divididas.

Ejercicio 3 **Método de Horner** Dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar el poliomio en un cierto x_0? Horner propone como alternativa escribir a p como $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + xa_n)))$. ¿Cuántos productos y cuántas sumas se realizan al evaluar p bajo esta forma?

Ejercicio 4 Interpolar cada una de las siguientes funciones en $n+1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$. Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores para $n = 5, 10, 15$.

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad f_2(x) = |x|, \qquad f_3(x) = \operatorname{sen}(\pi x).$$

Ejercicio 5 Implementar un programa que reciba como input dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, calcule la tabla de diferencias divididas y devuelva el polinomio que interpola los puntos (x_i, y_i).

Ejercicio 6 Encontrar una función del tipo $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$ que interpole la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	2
y	1	1	0.5	4

Ejercicio 7 Hallar y graficar una función del tipo $e^{a_4x^4+a_3x^3+\cdots+a_0}$ que interpole a la función $f(x) = 1/x$ en 5 nodos equiespaciados en el intervalo $[1, 10]$.

Ejercicio 8

a) Dado el intervalo $[a, b]$, sea m el punto medio entre a y b y sea $h \le (b-a)/2$. Sea $p = m - h$ y $q = m + h$. Demostrar que para todo x en $[a, b]$,

$$|(x-p)(x-q)| \le \frac{(b-a)^2}{4}.$$

b) Sean $x_0 = a, \ldots, x_n = b$, $n+1$ puntos en el intervalo $[a, b]$, distribuidos simétricamente respecto del punto medio. Demostrar que para todo x en $[a, b]$ se verifica la desigualdad

$$|(x-x_0)\ldots(x-x_n)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Ejercicio 9

a) Sea $t_j = j/n$ con $j = 0, \ldots, n$, probar que para $t \in [0, 1]$ se verifica

$$|(t-t_0)\ldots(t-t_n)| \le \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$$

b) Sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \ldots, x_n = b$, donde $h = (b-a)/n$, mostrar que

$$|(x-x_0)\ldots(x-x_n)| \le \frac{(b-a)^{n+1}(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

c) Usar la fórmula de Stirling para obtener una cota de $|(x-x_0)\ldots(x-x_n)|$.

Ejercicio 10 Sea f una función C^∞ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [a, b]$ se tiene:

$$|f^k(x)| \le C^k k!$$

Mostrar que, si $0 < C < \frac{1}{b-a}$ y P_n en un polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos distintos, entonces P_n converge a f uniformemente en $[a, b]$, es decir, $\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \to 0$ cuando n tiende a ∞.

Ejercicio 11 Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a+x}$. Sean $(x_n)_{n\ge0}$ una sucesión arbitraria de puntos en $[-1, 1]$ y $P_n(x)$ el polinomio que interpola a $f(x)$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Demostrar que si $a > 3$ entonces P_n converge a f uniformemente en $[-1, 1]$.

Ejercicio 12 Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x) + e^x$. Sea P_n el polinomio de grado n que interpola a f en $n+1$ puntos equiespaciados.

a) Usando el Ejercicio 8, acotar el error $\|f - P_n\|_\infty$.

b) Sea C_n la cota hallada en (a). Para $n = 1, 3, 5$, graficar simultáneamente f, $f + C_n$, $f - C_n$ y P_n.

Ejercicio 13 Dado un intervalo $[a, b]$, decidir como tienen que estar distribuidos $n+1$ nodos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ en el intervalo de modo que exista $x \in [a, b]$ tal que

$$|(x - x_0)\dots(x - x_n)| \sim (b-a)^{n+1}$$

Ejercicio 14

a) Hallar n de modo que el polinomio P_n que interpola a la función $f(x) = e^{2x}$ en los ceros de T_{n+1} verifique que $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$ en $[-1, 1]$.

b) Repetir el ítem anterior para $f(x) = e^x$, $x \in [0, 4]$.

Ejercicio 15 Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente el polinomio $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, donde $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \dots, n$ y el polinomio de Tchebychev T_{n+1}.

Ejercicio 16 Repetir el Ejercicio 4 usando los polinomios que interpolan a la función f en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado $n+1$, para $n = 5, 10, 15$.

Ejercicio 17 Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio p de grado 2 que satisfaga:

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10.$$

Ejercicio 18 Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar p de grado a lo sumo 3 que verifique:

(a) $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
(b) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
(c) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$

Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 19 Analizar para qué valores de $x_0,\ x_1,\ x_2$, y $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ existe un polinomio de grado 2 que satisface:

$$p(x_0) = \alpha_0,\ p(x_1) = \alpha_1,\ p'(x_2) = \alpha_2.$$

y cuándo este polinomio es único.

Ejercicio 20

a) Sea $f(x) = \cos(\pi x)$, hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1).$$

b) Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del item anterior, más la condición

$$p''(1) = f''(1).$$

Ejercicio 21 Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^{2x-1}$ y sean $x_0 <\ x_1 < \ldots < x_n$ los ceros del polinomio de Tchebychev, T_{n+1}. Se interpola a f con un polinomio P de grado $\leq n+1$ de modo que $P(x_0) = f(x_0),\ P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$ y además $P'(x_n) = f'(x_n)$. Probar que si $n \geq 6$ entonces, el error cometido en la interpolación sobre el intervalo $[-1, 1]$ es menor que 10^{-3}.

Ejercicio 22 Sea $f \in C^2[a,b]$, y sean $x_0 = a, x_1 = a + h, \ldots, x_n = b$, donde $h = (b-a)/n$. Considerar la poligonal $\ell(x)$ que interpola a f en los puntos x_i, $i = 0 \ldots n$.

a) Probar que
$$|f(x) - \ell(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

b) Para los $x \in [a,b]$ tales que l es derivable, probar que
$$|f'(x) - \ell'(x)| \leq h \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Ejercicio 23 Calcular un spline cúbico que interpole los datos: $x = (0, 0.5, 1)$, $y = (0, 1, 0)$. Graficar el spline junto con la función $\operatorname{sen}(\pi x)$.