Integración numérica

Carlos Alliera

Método de los trapecios

17 de junio de 2021

Introducción

Dada una función integrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobre un intervalo $[a, b]$, no siempre es fácil calcular

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ahora nos preguntamos si las herramientas de aproximación vistas en la materia nos pueden servir también para aproximar esas integrales.
Por ejemplo, buscaremos $x_0,\ x_1,\ \dots,\ n_n \in [a, b]$ tales que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) := Q(f)$$

esto último se define una *cuadratura* de f en el intervalo $[a, b]$.

Método de Newton Côtes

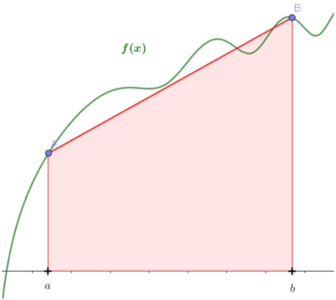
En este caso los nodos $x_0,\ x_1,\ \dots,\ n_n \in [a, b]$ se toman equiespaciados, entonces

$$x_j = a + j\frac{b-a}{n} := a + jh$$

Si $j = 0,\ 1, \dots\ n-1,\ n$ (tomando los extremos del intervalo) la regla es cerrada.
Si $j = 1, \dots\ n-1$ (no toma los extremos del intervalo) la regla es abierta.

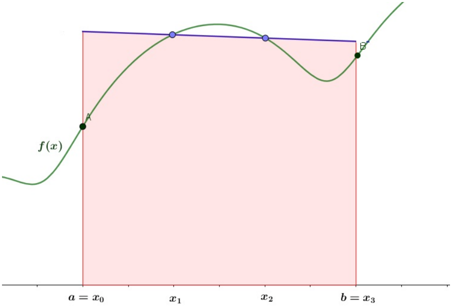
Regla de Trapecios

Una de las formas más sencillas de Newton Côtes es la regla que toma la menor cantidad de puntos para aproximar la integral calculando el área de una función lineal.
La regla de los trapecios simple se obtiene si se reemplaza en el intervalo $[a;b]$ la integral de la función f por la de la recta secante que une los puntos $A=(a;f(a))$ con $B=(b;f(b))$, los nodos de interpolación son los extremos del intervalo, esta fórmula también suele llamarse de trapecios cerrada: $x_0=a,\ x_1=b$.



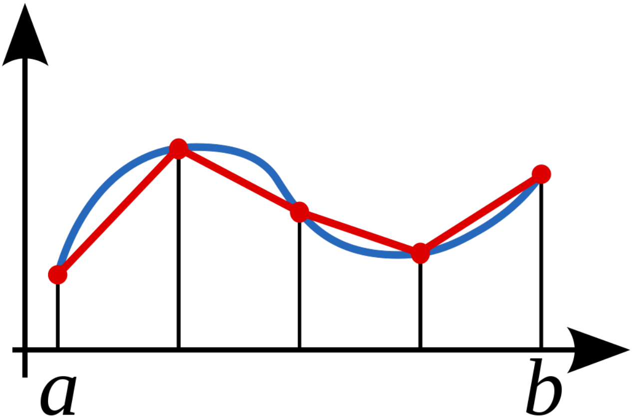
Regla de Trapecios abierta

La regla de trapecios simple abierta usa dos puntos interiores al intervalo $x_1, \; x_2 \in (a, b)$ equiespaciados.



Regla de Trapecios

Para la regla de trapecios compuesta se toman nodos equiespaciados $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ y se efectúan n (si es cerrada) o $n-2$ (si es abierta) reglas de trapecios simples entre nodos consecutivos:



Regla de Trapecios simple cerrada

La función lineal que se usa es

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

de esta forma, la regla de cuadratura es

$$T(f) = \int_a^b g(x)dx = \frac{f(a)}{b-a} \int_a^b (b-x)dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$$

Si se considera que $f \in C^2([a,b])$ entonces el error es

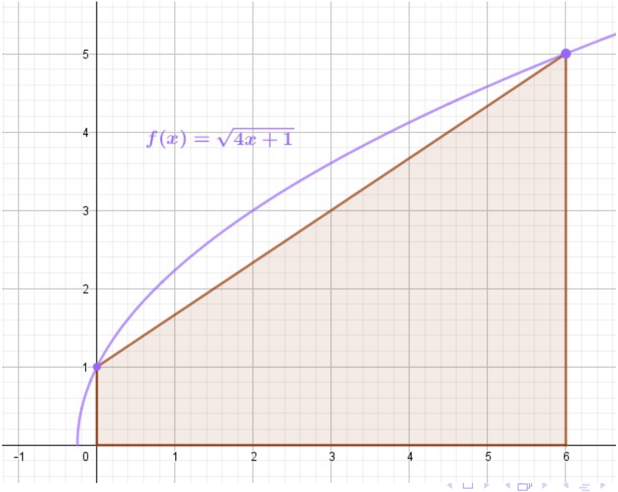
$$\boxed{E = |R_T(f)| = |I(f) - Q(f)| = \left| \frac{-(b-a)^3}{12} f''(\eta) \right|, \ \eta \in (a,b)}$$

Regla de Trapecios simple cerrada

Ejemplo

Aproximar la integral $\int_0^6 \sqrt{4x+1}dx$ y estimar el error.

Esta función es estrictamente cóncava, su área real debe ser mayor a la aproximación



Regla de Trapecios simple cerrada: Ejemplo

Planteamos la fórmula:

$$\int_0^6 \sqrt{4x+1}dx \sim T(f) = \frac{6-0}{2}(f(6)+f(0)) = \frac{6}{2}(5+1) = 3 \cdot 6 = 18$$

El error se puede acotar observando la derivada segunda de esta función:

$$f''(x) = \frac{-4}{\sqrt{4x+1}(4x+1)}$$

entonces

$$E = \left| -\frac{6^3}{12} f''(\eta) \right| = \frac{864}{12\sqrt{4\eta+1}(4\eta+1)} < \frac{72}{1} = 72$$

cota de error exagerada si tenemos en cuenta que en realidad:

$$\int_0^6 \sqrt{4x+1}dx = \left. \frac{1}{6}(4x+1)\sqrt{4x+1} \right|_0^6 = \frac{125-1}{6} = 20,\widehat{6}$$

Regla de Trapecios simple abierta

En este caso para integrar usamos la función lineal

$$p(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

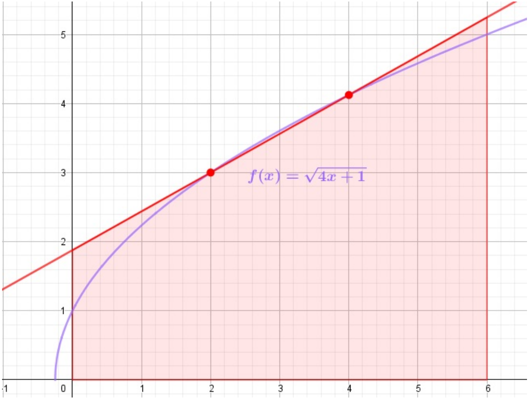
resolviendo, la regla resulta ser:

$$\int_a^b f(x)dx \sim T(f) = \frac{3h}{2}(f(x_1) + f(x_2)),\ h = \frac{b-a}{3}$$

Ejercicio

Aproximar $\int_0^6 \sqrt{4x+1}dx$ con la regla de trapecios abierta.

En este caso tenemos $a = 0,\ b = 6,\ h = \frac{6-0}{3} = 2,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4$



según la regla:

$$\int_0^6 \sqrt{4x+1}dx \sim T(f) = \frac{3 \cdot 2}{2}(f(2) + f(4)) = 3 \cdot (3 + \sqrt{17}) = 21,36931688...$$

que se asemeja más al verdadero valor de la integral.

Regla de Trapecios compuesta

La regla responde a esta fórmula:

$$T(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} 2f(x_j) + f(x_n) \right), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

En el caso que $f \in C^2([a,b])$:

$$R(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta), \; a < \eta < b$$

Ejercicio

Determinar el n mínimo de subintervalos tal que el error de aproximar

$$\int_1^{10} \ln(x)dx$$

con una regla de trapecios compuesta sea inferior a 10^{-4}.

Regla de Trapecios compuesta (ejemplo)

Primero acotamos la derivada segunda en el intervalo $[1, 10]$:

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = x^{-1} \rightarrow f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left| \frac{-1}{\eta^2} \right| \leq 1$$

entonces

$$|R(f)| = \frac{h^2(10-1)}{\eta^2 12} \leq \frac{9h^2}{12} < \frac{1}{10^4}$$

así:

$$h^2 < \frac{12}{9 \cdot 10^4} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-4} \Rightarrow h = \frac{10-1}{n} < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-2}$$

de esta forma

$$n > \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 10^2 = 779,4228634....$$

bastaría con subdividir el intervalo en 780 subintervalos o más para asegurar esa cota del error.

Dar una regla de cuadratura en el intervalo $[0, 3]$ tal que

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f(2) + A_2 f(3)$$

sea de grado mayor o igual a 2, usando:

1. la base de Lagrange.
2. coeficientes indeterminados.

Hallar el grado de precisión de Q.

Usando Base de Lagrange

1. Si P_2 es el polinomio que interpola a f en $x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$ y $\{\ell_0(x),\ \ell_1(x),\ \ell_2(x)\}$ la correspondiente base de Lagrange, entonces

$$P_2(x) = f(x_0)\ell_0(x) + f(x_1)\ell_1(x) + f(x_2)\ell_2(x)$$

Por otro lado, si esperamos que el grado de la cuadratura sea al menos 2, entonces vale que

$$Q(f) = Q(P) = I(P)$$

- La primera igualdad es cierta porque $f(x_i) = P_2(x_i)$
- La segunda igualdad vale porque el grado es ≥ 2

$$A_0 f(0) + A_1 f(2) + A_2 f(3) = \int_0^3 (f(0)\ell_0(x) + f(2)\ell_1(x) + f(3)\ell_2(x))dx =$$

$$= f(0) \underbrace{\int_0^3 \ell_0(x)dx}_{A_0} + f(2) \underbrace{\int_0^3 \ell_1(x)dxdx}_{A_1} + f(3) \underbrace{\int_0^3 \ell_2(x)dx}_{A_2}$$

Calculemos:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{6} \Rightarrow \int_0^3 \ell_0(x)dx = \frac{3}{4}$$

$$\ell_1(x) = \frac{x(x-3)}{-2} \Rightarrow \int_0^3 \ell_1(x)dx = \frac{9}{4}$$

$$\ell_2(x) = \frac{x(x-2)}{3} \Rightarrow \int_0^3 \ell_2(x)dx = 0$$

por lo tanto:

$$Q(f) = \frac{3}{4}f(0) + \frac{9}{4}f(2)$$

Usando Coeficientes Indeterminados

2.Como el grado de precisión es al menos 2, tenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

- $Q(1) = A_0 + A_1 + A_2 = I(1) = \int_0^3 1dx = 3$
- $Q(x) = 2A_1 + 3A_2 = I(x) = \int_0^3 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{9}{2}$
- $Q(x^2) = 4A_1 + 9A_2 = I(x^2) = \int_0^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$

es decir, para calcular $A_0,\ A_1,\ A_2$ hay que resolver un sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |3 \\ 0 & 2 & 3 & |\frac{9}{2} \\ 0 & 4 & 9 & |9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 2F_2 = F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |3 \\ 0 & 2 & 3 & |\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & |0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - \frac{1}{2}F_2 = F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & |\frac{3}{4} \\ 0 & 2 & 3 & |\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & |0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A_3 = 0,\ A_2 = \frac{9}{4},\ A_1 = \frac{3}{4}$$

Luego

$$I(f) = \int_0^3 f(x)dx \sim Q(f) = \frac{3}{4}f(0) + \frac{9}{4}f(2)$$

como pasaba con Lagrange.

El grado de precisión de la regla

Hasta ahora sabemos que la regla es exacta para polinomios de grado a lo sumo 2, para saber con exactitud el grado de precisión máximo vamos a ver que ocurre cuando aplicamos esta regla en $f(x) = x^k,\ k \geq 3$:

$$I(x^3) = \int_0^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^3 = \frac{81}{4}$$

$$Q(x^3) = \frac{3}{4} \cdot 0^3 + \frac{9}{4} \cdot 2^3 = \frac{9 \cdot 8}{4} = 18$$

Como $Q(x^3) \neq I(x^3)$ entonces el grado de precisión de esta regla es exactamente 2.

Sea Q una regla de cuadratura en $n+1$ nodos, con grado de precisión $k \geq n$, y P_n el polinomio interpolador de f de grado menor o igual a n que interpola en esos $n+1$ nodos, entonces:

$$|I(f) - Q(f)| = |I(f) - I(P_n) \quad \underbrace{+I(P_n) - Q(P_n)}_{=0 \text{ pues } Q(P_n)=I(P_n)} \quad + \quad \underbrace{Q(P_n) - Q(f)}_{=0 \text{ pues } f(x_i)=P(x_i)} \quad | =$$

$$= |I(f) - I(P_n)| =_{I\ lin} |I(f - P_n)| = \left| \int f - P_n \right| \leq \int |f - P_n|$$

y usamos la fórmula del error de interpolación.

Error en el ejemplo anterior

Aplicamos la fórmula para el ejercicio que habíamos resuelto:

$$|I(f-P_n)| \leq \int_0^3 |f(x)-P_2(x)|dx \leq \int_0^3 \frac{\|f'''\|_{\infty,[0,3]}}{3!}|x(x-2)(x-3)|dx =$$

$$= \frac{\|f'''\|_{\infty,[0,3]}}{3!}\left(\int_0^2 x(2-x)(3-x)dx + \int_2^3 x(x-2)(3-x)dx\right) = \frac{37\|f'''\|_{\infty,[0,3]}}{72}$$

- Obs. 1: Usualmente conviene integrar $|(x-x_0)...(x-x_n)|$ en vez de integrar una cota de este módulo.
- Obs. 2: Aunque veamos n nodos en la fórmula de Q, si el grado de precisión es k podemos usar cualquier interpolador de grado k para la cota del error que obviamente interpole en $x_0, ..., x_n$.

Ayuda para el ejercicio 14

Ejercicio 14 Sea $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva. Se tiene una fórmula de cuadratura en el intervalo $[a, b]$ de la forma:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \sim \sum_{i=1}^n A_i f(x_i). \tag{1}$$

Aplicando un cambio de variables, obtener, a partir de (1), una cuadratura para el intervalo $[c, d]$, de la forma

$$\int_c^d f(x)w(x) \sim \sum_{i=1}^n B_i f(y_i).$$

Calcular los coeficientes B_i en función de los A_i y los nodos y_i en función de los x_i. ¿Tiene la cuadratura en $[c, d]$ el mismo grado de precisión que la cuadratura en $[a, b]$?

(Generalización Lema 7.3, apunte Durán Lasalle Rossi) Llamemos

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx, \;\; \varphi(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c, \;\; \tilde{w}(y) = w(\varphi^{-1}(y))$$

entonces

$$\tilde{I}(f) = \int_c^d f(y)\tilde{w}(y)dyy = \varphi(x), \;\; dy = \frac{d-c}{b-a}dx$$

así,

$$\tilde{I}(f) = \frac{d-c}{b-a}\int_a^b f(\varphi(x))w(x)dx = \frac{d-c}{b-a}I(f\circ\varphi)$$

Si P_k es un polinomio de grado k, ¿qué grado tiene $P\circ\varphi$?

y punto...

- Se puede hacer hasta el ejercicio 17 de la Práctica 9, inclusive.
- Notar que en el ejemplo de arriba, el peso de la integral es $w \equiv 1$.
- Si no contamos con (alguno de) los nodos de la fórmula de cuadratura, llegaremos a un sistema polinomial de ecuaciones para despejar los pesos A_i y los nodos x_i .
- La próxima clase veremos cuadratura gaussiana.