Cálculo Numérico

Regla de Simpson

Nazareno Faillace

24/06

Departamento de Matemática - FCEyN - UBA

Introducción

Plan de la clase:

- Regla de Simpson (similar a Regla de Trapecio, pero usaremos polinomios interpoladores de grado a lo sumo 2):
  - Regla de Simpson Cerrada
  - Regla de Simpson Abierta
- Exactitud de la Regla de Simpson
- Cota del error al utilizar la regla de Simpson
- Regla de Simpson Compuesta (para lograr mayor precisión!)

Regla de Simpson:

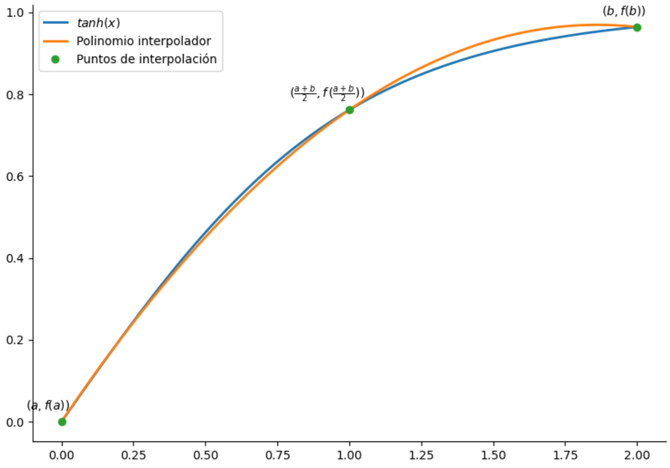
$$\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b p(x)dx \quad p \in \mathbb{R}_2[x]$$

Utilizamos p el polinomio interpolador de grado a lo sumo 2. Para esto, necesitamos tres puntos donde interpolar:

- Simpson cerrada: interpolamos en $\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$
- Simpson abierta: interpolamos en $\{a+h, a+2h, a+3h\}$ con $h = \frac{b-a}{4}$

Regla de Simpson cerrada

Regla de Simpson cerrada aplicada a calcular $\int_0^2 \tanh(x)dx$



Regla de Simpson cerrada

Utilizamos el polinomio de grado a lo sumo 2 que interpola a f en $\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$. La fórmula de Simpson cerrada es:

$$S(f) = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + f(b)) \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

Regla de Simpson cerrada

Utilizamos el polinomio de grado a lo sumo 2 que interpola a f en $\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$. La fórmula de Simpson cerrada es:

$$\boxed{S(f) = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + f(b)) \qquad h = \frac{b-a}{2}}$$

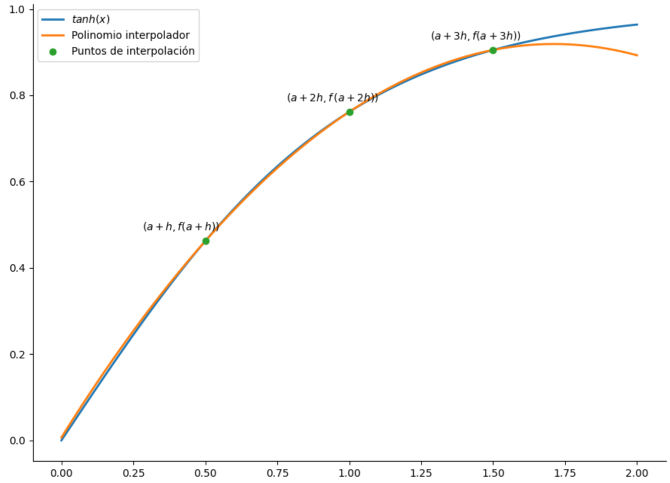
Ejemplo: utilizar la regla de Simpson cerrada para aproximar $\int_0^2 \tanh(x)dx$.

En este caso, $h = 1$, $a = 0$, $b = 2$ y $a + h = 1$. Luego, utilizando la fórmula de Simpson cerrada:

$$S(\tanh) = \frac{h}{3}(\tanh(0) + 4\tanh(1) + \tanh(2)) = 1{,}33680\ldots$$

Regla de Simpson Abierta

Regla de Simpson abierta aplicada a calcular $\int_0^2 \tanh(x)dx$



Regla de Simpson Abierta

Utilizamos el polinomio de grado a lo sumo 2 que interpola a f en $\{a+h, a+2h, a+3h\}$. La fórmula de Simpson abierta es:

$$\hat{S}(f) = \frac{4h}{3}(2f(a+h) - f(a+2h) + 2f(a+3h)) \qquad h = \frac{b-a}{4}$$

Regla de Simpson Abierta

Utilizamos el polinomio de grado a lo sumo 2 que interpola a f en $\{a+h, a+2h, a+3h\}$. La fórmula de Simpson abierta es:

$$\hat{S}(f) = \frac{4h}{3}(2f(a+h) - f(a+2h) + 2f(a+3h)) \qquad h = \frac{b-a}{4}$$

Ejemplo: utilizar la regla de Simpson abierta para aproximar $\displaystyle\int_0^2 \tanh(x)dx$.

En este caso, $h = \frac{1}{2}$, por lo que $a+h = \frac{1}{2}$, $a+2h = 1$ y $a+3h = \frac{3}{2}$. Por la fórmula de Simpson abierta se tiene que:

$$\hat{S}(\tanh) = \frac{4}{3}\frac{1}{2}\left(2\tanh\left(\tfrac{1}{2}\right) - \tanh(1) + 2\tanh\left(\tfrac{3}{2}\right)\right) = 1{,}315291\ldots$$

Sólo por curiosidad, comparemos las aproximaciones con el valor exacto de la integral. Para ustedes, ¿quién ganó?

Sólo por curiosidad, comparemos las aproximaciones con el valor exacto de la integral. Para ustedes, ¿quién ganó?

Si se calcula el valor exacto de la integral (a mano ~~o usando Wolfram Alpha~~):

$$I(\tanh) = \int_0^2 \tanh(x)dx = \ln(\cosh(2)) - \ln(\cosh(0)) = 1{,}3250027473\ldots$$

Sólo por curiosidad, comparemos las aproximaciones con el valor exacto de la integral. Para ustedes, ¿quién ganó?

Si se calcula el valor exacto de la integral (a mano ~~o usando Wolfram Alpha~~):

$$I(\tanh) = \int_0^2 \tanh(x)dx = \ln(\cosh(2)) - \ln(\cosh(0)) = 1{,}3250027473\ldots$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} |I(\tanh) - S(\tanh)| &= \quad 0{,}0117\ldots \\ |I(\tanh) - \hat{S}(\tanh)| &= \quad 0{,}00971\ldots \end{aligned}$$

Por una diferencia muy sutil, en este caso ganó la Regla de Simpson abierta.

Mas allá de eso, en el ejemplo, es importante notar que ambas reglas de Simpson aproximaron al valor exacto con un error del orden de 10^{-2}. **¿Podemos encontrar una cota para el error cometido en la aproximación?**

Exactitud de una regla de cuadratura

Definición

Decimos que una fórmula de cuadratura $Q(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$ tiene grado de exactitud k si:

$$\int_a^b p(x)dx = Q(p)$$

para todo $p \in \mathcal{P}_k$ y no para $p \in \mathcal{P}_{k+1}$.

En otras palabras: la regla de cuadratura $Q(f)$ tiene grado de exactitud k si:

$$\int_a^b x^m dx = Q(x^m) \quad m = 0, \dots, k$$

$$\int_a^b x^{k+1} dx \neq Q(x^{k+1})$$

Propiedad

La fórmula de Simpson cerrada y la abierta tienen grado de exactitud $k = 3$.

Estimación del error

Teorema

Si $f \in C^4([a,b])$, el error que se produce al aproximar $\int_a^b f(x)dx$ usando la regla de Simpson está dado por:

$$I(f) - Q(f) = R(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(iv)}(\eta) \qquad \eta \in (a,b)$$

Ejemplo: aproximar $\int_1^2 \ln(x)dx$ mediante la regla de Simpson cerrada y estimar el error cometido.

En este caso, $h = \frac{1}{2}$ y por la fórmula, se tiene que:

$$\int_1^2 \ln(x)dx \sim \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}(\ln(1) + 4\ln(\tfrac{3}{2}) + \ln(2)) = 0{,}385834...$$

Para estimar el error, consideramos $f^{(iv)}(x) = -\frac{6}{x^4}$. Por lo tanto, vale que:

$$|f^{(iv)}(x)| = \left|\frac{6}{x^4}\right| \leqslant \left|\frac{6}{1^4}\right| = 6 \quad \forall x \in (1, 2)$$

Ahora podemos acotar el error utilizando la expresión que nos proporcionó el teorema:

$$|R(f)| = \left|-\frac{1}{90}\left(\frac{2-1}{2}\right)^5 f^{(iv)}(\eta)\right| = \frac{1}{90}\frac{1}{32}|f^{(iv)}(\eta)| \leqslant \frac{1}{480} = 0{,}00208\widehat{3}$$

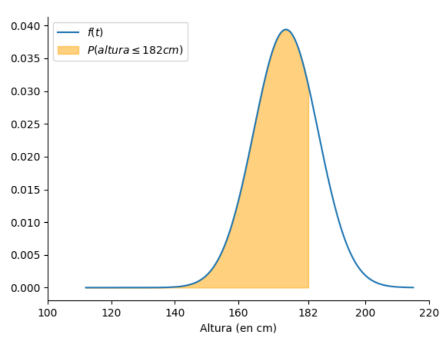
Aplicación - Cálculo de probabilidades

Tenemos un gran conjunto de datos sobre la altura de personas. Se modela la distribución de las alturas mediante una distribución Normal. De esta manera, si elegimos una persona al azar, la probabilidad de que mida a lo sumo x cm viene dada por:

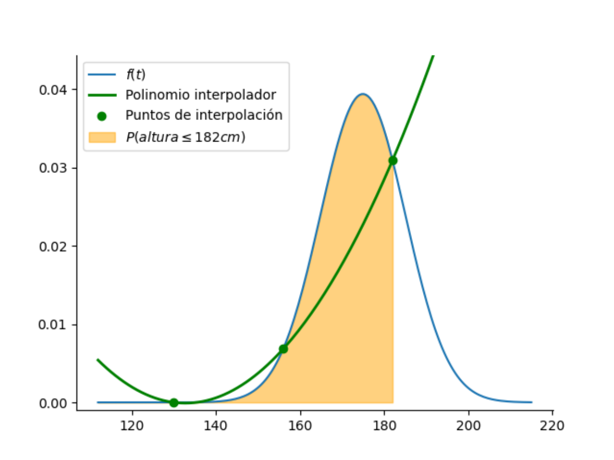
$$P(\text{altura} \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad f(t) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-175}{10}\right)^2}$$

Por ejemplo, si queremos calcular cuál es la probabilidad de que una persona mida a lo sumo 182 cm:

$$P(\text{altura} \leqslant 182) = \int_{-\infty}^{182} f(t)dt \approx \int_{130}^{182} f(t)dt$$



Si usamos Simpson cerrada para calcular $\int_{130}^{182} f(t)dt$



se ve que la aproximación no va a ser muy buena. Queremos mayor precisión.

Regla de Simpson Compuesta

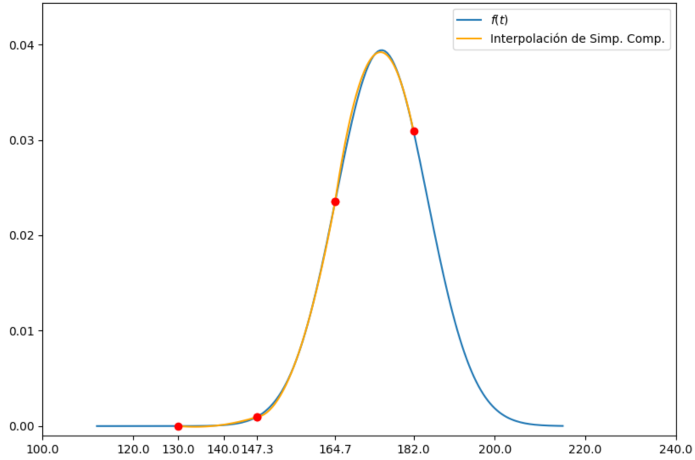
Una técnica que puede utilizarse para mejorar la precisión es particionar el intervalo $[a, b]$ en subintervalos y aplicar la regla de Simpson a cada uno de ellos. Por simplicidad, consideramos $N + 1$ puntos equiespaciados en $[a, b]$: $x_j = a + j\dfrac{b-a}{N}$ con $0 \leqslant j \leqslant N$. Luego, aplicamos la Regla de Simpson en cada uno de los intervalos:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \sim S_j(f) = \frac{h}{3}(f(x_j) + 4f(\tfrac{x_j + x_{j+1}}{2}) + f(x_{j+1}))$$

Aprovechando la linealidad de la integral, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h}{3}(f(x_j) + 4f(\tfrac{x_j + x_{j+1}}{2}) + f(x_{j+1}))$$

En nuestro ejemplo, con $N = 3$:



Implementación computacional

```
def simpson_cerrada(f,a,b):
    h = (b-a)/2
    resultado = h/3 * (f(a) + 4*f(a+h) + f(b))
    return resultado


def simpson_compuesta(f, a, b, N):
    h = (b - a)/N
    resultado = 0
    for j in range(N):
        resultado += simpson_cerrada(f, a + j*h, a + (j+1)*h)
    return resultado
```

Es una buena idea aplicar Simpson Compuesta para aproximar $\int_{130}^{182} f(t)dt$. Utilizando $N = 3$, obtenemos que:

$$\int_{130}^{182} f(t)dt \approx 0{,}759925\ldots$$

Es decir, redondeando, la probabilidad de que una persona elegida al azar mida a lo sumo 182 cm es <u>aproximadamente</u> de 75,99 %.

Es una buena idea aplicar Simpson Compuesta para aproximar $\int_{130}^{182} f(t)dt$. Utilizando $N = 3$, obtenemos que:

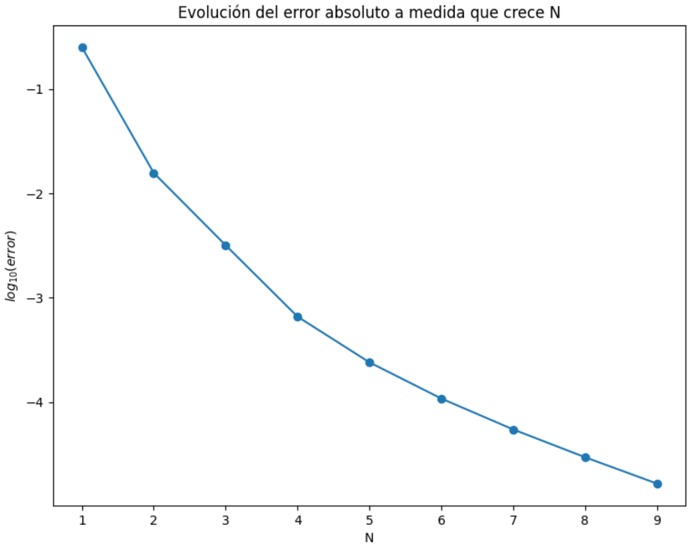
$$\int_{130}^{182} f(t)dt \approx 0{,}759925\ldots$$

Es decir, redondeando, la probabilidad de que una persona elegida al azar mida a lo sumo 182 cm es aproximadamente de 75,99 %.

Si calculamos exactamente la integral de la probabilidad, se tiene que:

$$P(\text{altura} \leqslant 182) = \int_{-\infty}^{182} f(t)dt = 0{,}75674\ldots$$

por lo que, redondeando, la probabilidad de que una persona elegida al azar mida a lo sumo 182 cm es 75,67 %


Evolución del error absoluto a medida que crece N
$log_{10}(error)$
−1
−2
−3
−4
1
2
3
4
5
6
7
8
9
N

Estimación del error

Teorema

Si $f \in C^4([a, b])$, el error que se produce al aproximar $\int_a^b f(x)dx$ usando la regla de Simpson Compuesta está dado por:

$$I(f) - Q(f) = R(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta) \qquad \eta \in (a, b)$$

donde $h = \frac{b-a}{2N}$

Ejemplo: determinar el número N de subintervalos necesario para que el error cometido con la regla de Simpson Compuesta al aproximar $\int_1^2 \ln(x)dx$ sea menor que 10^{-6}.

Ejemplo: determinar el número N de subintervalos necesario para que el error cometido con la regla de Simpson Compuesta al aproximar $\int_1^2 \ln(x)dx$ sea menor que 10^{-6}.

Tenemos que $h = \frac{b-a}{2N} = \frac{1}{2N}$. Para estimar el error, consideramos $f^{(iv)}(x) = -\frac{6}{x^4}$. Por lo tanto, vale que:

$$|f^{(iv)}(x)| = \left|\frac{6}{x^4}\right| \leqslant \left|\frac{6}{1^4}\right| = 6 \quad \forall x \in (1,2)$$

Ahora podemos acotar el error utilizando la expresión que nos proporcionó el teorema:

$$|R(f)| = \left|-\frac{h^4}{180}(2-1)f^{(iv)}(\eta)\right| = \frac{1}{180}\left(\frac{1}{2N}\right)^4 |f^{(iv)}(\eta)| \leqslant \frac{1}{30}\left(\frac{1}{2N}\right)^4$$

Ejemplo: determinar el número N de subintervalos necesario para que el error cometido con la regla de Simpson Compuesta al aproximar $\int_1^2 \ln(x)dx$ sea menor que 10^{-6}.

Tenemos que $h = \frac{b-a}{2N} = \frac{1}{2N}$. Para estimar el error, consideramos $f^{(iv)}(x) = -\frac{6}{x^4}$. Por lo tanto, vale que:

$$|f^{(iv)}(x)| = \left|\frac{6}{x^4}\right| \leqslant \left|\frac{6}{1^4}\right| = 6 \quad \forall x \in (1, 2)$$

Ahora podemos acotar el error utilizando la expresión que nos proporcionó el teorema:

$$|R(f)| = \left|-\frac{h^4}{180}(2-1)f^{(iv)}(\eta)\right| = \frac{1}{180}\left(\frac{1}{2N}\right)^4 |f^{(iv)}(\eta)| \leqslant \frac{1}{30}\left(\frac{1}{2N}\right)^4$$

$$\frac{1}{30}\left(\frac{1}{2N}\right)^4 < 10^{-6} \iff N > 6{,}75600... \iff N \geqslant 7$$

Luego, basta tomar $N = 7$ para asegurar que el error cometido será menor que 10^{-6}.