Cálculo Numérico

Clase Práctica, 10 de Junio de 2021

Martín Maas

Punto fijo
Ordenes de convergencia

Ejemplos

$g(x)=2x$

- Hay un punto fijo en $x=0$,
- Las iteraciones divergen salvo para $x=0$,
- $f'(x) = 2 > 1$.

Ejemplos

g(x)=cos(x)

Las iteraciones de punto fijo convergen $\forall x_0 \in [0,1]$
Hallar n tal que el error es menor a 10^{-8}

Teo: $g : [a,b] \to [a,b] \in C^1$ con $|g'(x)| \le \lambda < 1 \; \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow |x_n - r| < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

Ejemplos

g(x)=cos(x)

$$\textbf{Teo:}\;\; g:[a,b]\to[a,b]\in C^1 \;\text{ con } |g'(x)|\le\lambda<1\;\forall x\in[a,b]$$
$$\Rightarrow |x_n - r| < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0|$$

- $\cos(x)\in\mathbf{[0{,}1]}$ para $x\in\mathbf{[0{,}1]}$
- $|-\sin(x)|\le|\sin(1)|\le 0.82$ para $x\in[0,1]$
- $\frac{\lambda^n}{1-\lambda}(b-a)<10^{-8}\Rightarrow n=\ln(0.18\times10^{-8})/\ln(0.82)\approx 102$

Ordenes de convergencia

Def: $x_n \to r$ con orden α si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^\alpha} = C > 0$

Equiv: $|e_{n+1}| \sim C|e_n|^\alpha$

Repaso: Secante

Secante: $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Error: $$e_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\nu_n)}{f'(\xi_n)}e_n e_{n-1}$$

Orden: $$|e_{n+1}| \sim |e_n|^\alpha \qquad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Repaso: Newton

Newton: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Error: $$e_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2$$

Obs: $f'(r) \neq 0$

Orden de convergencia de Punto Fijo

Ejercicio 16: NR y modificaciones para raíces dobles.

Ejemplo: apliquemos NR a $f(x) = x^3$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n$$

$$\Rightarrow |e_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|e_n|$$

Orden de convergencia de Punto Fijo

Teo: Sea $x_{n+1} = g(x_n)$ tal que $x_n \to r$. Entonces:

- si $g'(r) \neq 0$ la convergencia es lineal
- si $g'(r) = 0, g''(r) \neq 0$ la convergencia es cuadrática

Dem:

$$g(x) = g(r) + g'(r)(x - r) + \frac{g''(r)}{2}(x - r)^2 + \frac{g'''(\xi)}{6}(x - r)^3$$

Evaluando en x_n y notando que $x_{n+1} = g(x_n), g(r) = r$

$$\frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = g'(r) + \frac{g''(r)}{2}(x_n - r) + \frac{g'''(\xi)}{6}(x_n - r)^2$$

Orden de convergencia de Punto Fijo

Ejercicio 16: NR y modificaciones para raíces dobles.

Sugerencia: sale con el Teo anterior.