Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico

Cuadratura Gaussiana

Mercedes Pérez Millán

Dto. de Matemática–FCEyN–Universidad de Buenos Aires
IMAS-CONICET

28 de junio de 2021

Es una fórmula de cuadratura tal que fijada la cantidad de puntos, $n+1$, halla $x_0, \ldots, x_n$ para optimizar el grado de precisión de la regla.

Receta:

Si tenemos que $I(f) = \int_a^b f(x)w(x)\ dx$, hacemos:

1. Consideramos $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\ dx$. (Luego veremos que siempre es un producto interno.)
2. Definimos S, el subespacio generado por $\{1, x, \dots, x^{n+1}\}$.
3. Buscamos una b.o.n. de S, $\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\}$ tal que el subespacio generado por $\{1, x, \dots, x^i\}$ coincida con el generado con $\{p_0, p_1, \dots, p_i\}$ (por ejemplo: usando Gram-Schmidt).
4. Determinamos $x_0, \dots, x_n$ como las raíces de p_{n+1}. (*Observación: no necesitamos normalizar el último polinomio.*)
5. Calculamos los pesos $A_0, \dots, A_n$ como antes.

Observación: Cuando el peso es $w \equiv 1$ la fórmula se llama de Gauss-Legendre.

Ejemplo:

Buscamos una fórmula de cuadratura gaussiana Q tal que

$$I(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(x)\ dx \sim Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

1. Consideramos $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\cos(x)\ dx$.
2. Definimos S, el subespacio generado por $\{1, x, x^2\}$.
   $(n+1 = 1+1 = 2)$

3. Aplicamos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2\}$:

$$q_0 = 1, \|q_0\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx = 2 \quad \Rightarrow \boxed{p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$q_1 = x - \langle x, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}} = x - \tfrac{1}{2}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{\text{sim.}} \underbrace{x\cos(x)}_{\text{impar}}\ dx = x - 0 = x,$$

$$\|q_1\|^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\ dx = \frac{\pi^2-8}{2} \Rightarrow \boxed{p_1 = \sqrt{\tfrac{2}{\pi^2-8}}x}$$

$$q_2 = x^2 - \langle x^2, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \langle x^2, \sqrt{\tfrac{2}{\pi^2-8}}x\rangle \sqrt{\tfrac{2}{\pi^2-8}}x =$$

$$x^2 - \tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\ dx - \tfrac{2}{\pi^2-8}\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{\text{sim.}} \underbrace{x^3\cos(x)}_{\text{impar}}\ dx\ x = \boxed{x^2 - \frac{\pi^2-8}{4}}$$

y busco las raíces de este polinomio (no hace falta normalizar).

4. $x_0 = -\dfrac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}$, $x_1 = \dfrac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}$.
5. $I(1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx = 2 = Q(1) = A_0 + A_1$

$$I(x) = \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{\text{sim.}} \underbrace{x\cos(x)}_{\text{impar}}\ dx = 0 = Q(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}(-A_0 + A_1).$$

Luego, $A_0 = A_1 = 1$ y

$$\boxed{Q(f) = f\left(-\frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}\right)}$$

Tarea: verificar que realmente tiene grado de precisión $2n + 1 = 3$. Es decir, que $I(x^2) = Q(x^2)$ y que $I(x^3) = Q(x^3)$.

Extra:

Corroboremos que $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$ siempre es un producto interno.

- Es bilineal y simétrico, es decir que $\langle \alpha f_1 + f_2, g\rangle = \alpha\langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$ y $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$. Esto es directo (integrar es lineal y el producto conmuta).
- $\langle f, f\rangle = \int_a^b \underbrace{(f(x))^2 w(x)}_{\geq 0}\,dx \geq 0.$
- Además $\langle f, f\rangle = 0 \underset{w(x)>0\ \forall x}{\Leftrightarrow} f \equiv 0.$

Oservación para el alumno inquieto: el 99.9 % de las veces trabajamos con funciones continuas.

¿Extra?