Elementos de Cálculo Numérico/Cálculo Numérico

Clase 13

Primer Cuatrimestre 2021

Resolución de ecuaciones

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos resolver

Resolución de ecuaciones

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos resolver $f(x) = 0$

Resolución de ecuaciones

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos resolver $f(x) = 0$

En general: si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Resolución de ecuaciones

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos resolver $f(x) = 0$

En general: si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ buscamos $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\, f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\,f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano:

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\, f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\, f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Tomando $c = \dfrac{a+b}{2}$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\,f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Tomando $c = \dfrac{a+b}{2}$

- Si $f(c) = 0$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\, f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Tomando $c = \dfrac{a+b}{2}$

- Si $f(c) = 0 \Rightarrow x_* = c$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\,f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Tomando $c = \dfrac{a+b}{2}$

- Si $f(c) = 0 \Rightarrow x_* = c$
- Si $f(a)\,f(c) < 0$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\,f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Tomando $c = \dfrac{a+b}{2}$

- Si $f(c) = 0 \Rightarrow x_* = c$
- Si $f(a)\,f(c) < 0 \Rightarrow a = a, b = c$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\, f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Tomando $c = \dfrac{a+b}{2}$

- Si $f(c) = 0 \Rightarrow x_* = c$
- Si $f(a)\, f(c) < 0 \Rightarrow a = a, b = c$
- Si $f(a)\, f(c) > 0$

Método de bisección: algoritmo

Si en el intervalo $[a, b]$ que verifica $f(a)\, f(b) < 0$ y $f(x)$ es continua

Por el teorema de Bolzano: existe $x_* \in (a, b)$ solución de $f(x_*) = 0$

Tomando $c = \dfrac{a+b}{2}$

- Si $f(c) = 0 \Rightarrow x_* = c$
- Si $f(a)\, f(c) < 0 \Rightarrow a = a, b = c$
- Si $f(a)\, f(c) > 0 \Rightarrow a = c, b = b$

Método de bisección: ejemplo

Si $f(x) = 1.75\,x^3 - 3\,x - 1$, $[a, b] = [-2, 2]$

Método de bisección: ejemplo

Si $f(x) = 1.75\,x^3 - 3\,x - 1$, $[a,b] = [-2,2]$

Se verifica $f(-2) < 0 < f(2) \Rightarrow x_* = -1.09114, -0.360711, 1.45185$

Método de bisección: ejemplo

Si $f(x) = 1.75\,x^3 - 3\,x - 1$, $[a,b] = [-2,2]$

Se verifica $f(-2) < 0 < f(2) \Rightarrow x_* = -1.09114, -0.360711, 1.45185$

n	a	b	c
0	−2.000 00	2.000 00	0.000 00
1	0.000 00	2.000 00	1.000 00
2	1.000 00	2.000 00	1.500 00
3	1.000 00	1.500 00	1.250 00
4	1.250 00	1.500 00	1.375 00
5	1.375 00	1.500 00	1.437 50
6	1.437 50	1.500 00	1.468 75
7	1.437 50	1.468 75	1.453 13
8	1.437 50	1.453 13	1.445 31
9	1.445 31	1.453 13	1.449 22

Método de bisección: error

Paso n: $b_n - a_n = 2^{-n}\,(b_0 - a_0)$

Método de bisección: error

Paso n: $b_n - a_n = 2^{-n}\,(b_0 - a_0)$

Ejemplo: si $n = 10$, $b_n - a_n \cong 0.001\,(b_0 - a_0)$

Método de bisección: error

Paso n: $b_n - a_n = 2^{-n}\,(b_0 - a_0)$

Ejemplo: si $n = 10$, $b_n - a_n \cong 0.001\,(b_0 - a_0)$

En cada paso hay que evaluar una vez $f(x)$

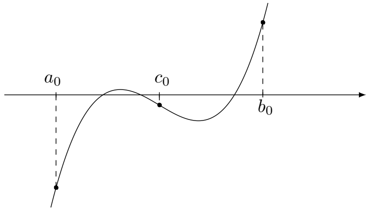
Método de bisección: error

Paso n: $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$

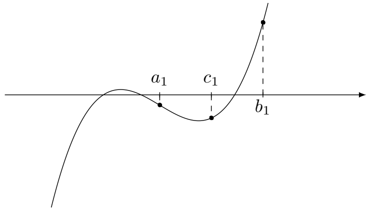
Ejemplo: si $n = 10$, $b_n - a_n \cong 0.001\,(b_0 - a_0)$

En cada paso hay que evaluar una vez $f(x)$

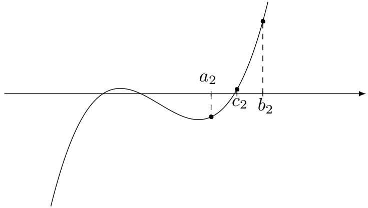
El método converge pero muy lento



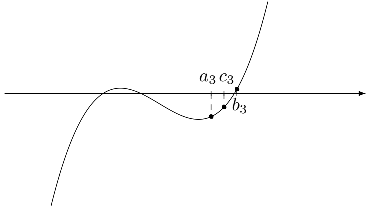
(a) Primer paso.



(b) Segundo paso.



(c) Tercer paso.



(d) Cuarto paso.

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto x_0

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) = 0$$

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Continuamos con x_1:

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Continuamos con x_1:

$$f(x_1) + f'(x_1)\,(x_2 - x_1) = 0$$

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Continuamos con x_1:

$$f(x_1) + f'(x_1)\,(x_2 - x_1) = 0 \Longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Continuamos con x_1:

$$f(x_1) + f'(x_1)\,(x_2 - x_1) = 0 \Longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

En forma iterativa:

Método de Newton: algoritmo

Se parte de un punto $x_0 \Longrightarrow x_1$ anula la recta tangente

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x_1 - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Continuamos con x_1:

$$f(x_1) + f'(x_1)\,(x_2 - x_1) = 0 \Longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

En forma iterativa: $\quad x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

Método de Newton: ejemplo

Ecuación: $e^x = 45$

Método de Newton: ejemplo

Ecuación: $e^x = 45 \quad \Longrightarrow x_* = \ln 45 \cong 3.8066624898$

Método de Newton: ejemplo

Ecuación: $e^x = 45 \quad \Longrightarrow x_* = \ln 45 \cong 3.8066624898$

Si $f(x) = e^x - 45$

Método de Newton: ejemplo

Ecuación: $e^x = 45 \quad \Longrightarrow x_* = \ln 45 \cong 3.8066624898$

Si $f(x) = e^x - 45 \quad \Longrightarrow f'(x) = e^x$

Método de Newton: ejemplo

Ecuación: $e^x = 45 \quad \Longrightarrow x_* = \ln 45 \cong 3.8066624898$

Si $f(x) = e^x - 45 \quad \Longrightarrow f'(x) = e^x$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} - 45}{e^{x_{n-1}}} = x_{n-1} - 1 + 45\, e^{-x_{n-1}}$$

Método de Newton: ejemplo

Ecuación: $e^x = 45 \quad \Longrightarrow x_* = \ln 45 \cong 3.8066624898$

Si $f(x) = e^x - 45 \quad \Longrightarrow f'(x) = e^x$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} - 45}{e^{x_{n-1}}} = x_{n-1} - 1 + 45\, e^{-x_{n-1}}$$

Error del paso n: $\epsilon = x_* - x_n$

Método de Newton: ejemplo

Ecuación: $e^x = 45 \quad \Longrightarrow x_* = \ln 45 \cong 3.8066624898$

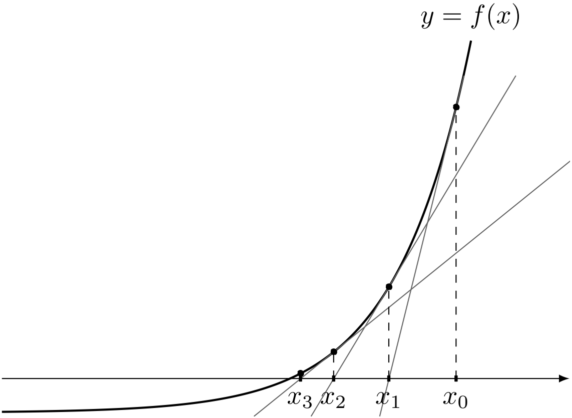
Si $f(x) = e^x - 45 \quad \Longrightarrow f'(x) = e^x$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{e^{x_{n-1}} - 45}{e^{x_{n-1}}} = x_{n-1} - 1 + 45\, e^{-x_{n-1}}$$

Error del paso n: $\epsilon = x_* - x_n$

n	x_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	6.000 000 000 0	−2.193	
1	5.111 543 847 9	−1.305	−0.271
2	4.382 748 557 3	−0.576	−0.338
3	3.944 842 622 4	−0.138	−0.416
4	3.815 784 415 0	-0.912×10^{-2}	−0.478
5	3.806 703 968 3	-0.415×10^{-4}	−0.498
6	3.806 662 490 6	-0.860×10^{-9}	−0.500

Método de Newton: ejemplo



Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f'(x)|$

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f''(x)|$

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x \in [x_* - r, x_* + r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max_{x \in [x_* - r, x_* + r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces:

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min\limits_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max\limits_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces: $x_n \in [x_* - r, x_* + r]$

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces: $x_n \in [x_* - r, x_* + r]$, $|\epsilon_n| \to 0$

Método de Newton: error

Existe ξ en el intervalo que contiene a x_* y x_{n-1}

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})}\epsilon_{n-1}^2$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min\limits_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max\limits_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces: $x_n \in [x_* - r, x_* + r]$, $|\epsilon_n| \to 0$ y $\dfrac{|\epsilon_n|}{|\epsilon_{n-1}|^2} \to \left|\dfrac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}\right|$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25 \Longrightarrow$ solución $x = 0.255413$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25 \Longrightarrow$ solución $x = 0.255413$

Si $x_0 = 1.2$, el método de Newton converge

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25 \Longrightarrow$ solución $x = 0.255413$

Si $x_0 = 1.2$, el método de Newton converge

n	x_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	1.200 000	−0.944 587	
1	−0.713 496	0.968 909	1.085 920
2	0.668 420	−0.413 007	−0.439 938
3	0.161 694	$0.937\,186 \times 10^{-1}$	0.549 427
4	0.253 760	$0.165\,250 \times 10^{-2}$	0.188 144
5	0.255 412	$0.679\,682 \times 10^{-6}$	0.248 899
6	0.255 413	$0.115\,519 \times 10^{-12}$	0.250 058

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25 \Longrightarrow$ solución $x = 0.255413$

Si $x_0 = 1.2$, el método de Newton converge

n	x_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	1.200 000	−0.944 587	
1	−0.713 496	0.968 909	1.085 920
2	0.668 420	−0.413 007	−0.439 938
3	0.161 694	$0.937\,186 \times 10^{-1}$	0.549 427
4	0.253 760	$0.165\,250 \times 10^{-2}$	0.188 144
5	0.255 412	$0.679\,682 \times 10^{-6}$	0.248 899
6	0.255 413	$0.115\,519 \times 10^{-12}$	0.250 058

$$\frac{f''(x)}{2\,f'(x)} = -\tanh(x)$$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25 \implies$ solución $x = 0.255413$

Si $x_0 = 1.2$, el método de Newton converge

n	x_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	1.200 000	−0.944 587	
1	−0.713 496	0.968 909	1.085 920
2	0.668 420	−0.413 007	−0.439 938
3	0.161 694	$0.937\,186 \times 10^{-1}$	0.549 427
4	0.253 760	$0.165\,250 \times 10^{-2}$	0.188 144
5	0.255 412	$0.679\,682 \times 10^{-6}$	0.248 899
6	0.255 413	$0.115\,519 \times 10^{-12}$	0.250 058

$$\frac{f''(x)}{2\,f'(x)} = -\tanh(x) \implies \frac{f''(x_*)}{2\,f'(x_*)} = -\tanh(x_*) = -0.25$$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Si $x_0 = 1.285$, el método de Newton no converge

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Si $x_0 = 1.285$, el método de Newton no converge

- $x_1 = -1.01592$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Si $x_0 = 1.285$, el método de Newton no converge

- $x_1 = -1.01592$
- $x_2 = \quad 1.4683$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Si $x_0 = 1.285$, el método de Newton no converge

- $x_1 = -1.01592$
- $x_2 = 1.4683$
- $x_3 = -1.92482$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Si $x_0 = 1.285$, el método de Newton no converge

- $x_1 = -1.01592$
- $x_2 = 1.4683$
- $x_3 = -1.92482$
- $x_4 = 12.8762$

Convergencia global: ejemplo

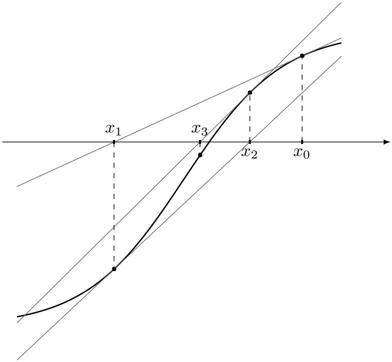
$f(x) = \tanh(x) - 0.25$

Si $x_0 = 1.285$, el método de Newton no converge

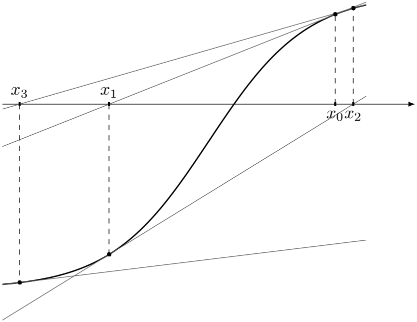
- $x_1 = -1.01592$
- $x_2 = 1.4683$
- $x_3 = -1.92482$
- $x_4 = 12.8762$
- $x_5 = -2.86493 \times 10^{10}$

Convergencia global: ejemplo

$f(x) = \tanh(x) - 0.25$



(a) Iteraciones a partir de $x_0 = 1.2$.



(b) Iteraciones a partir de $x_0 = 1.285$.

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

- $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

- $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) $\quad \Longrightarrow f(x)$ estrictamente convexa (cóncava)

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

- $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) $\implies f(x)$ estrictamente convexa (cóncava)
- x_* no es mínimo de $f(x)$

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

- $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) $\Longrightarrow f(x)$ estrictamente convexa (cóncava)
- x_* no es mínimo de $f(x)$
- x_0 no es mínimo de $f(x)$

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

- $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) $\implies f(x)$ estrictamente convexa (cóncava)
- x_* no es mínimo de $f(x)$
- x_0 no es mínimo de $f(x)$

x_n converge a x_* solución de $f(x) = 0$

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

- $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) $\Longrightarrow f(x)$ estrictamente convexa (cóncava)
- x_* no es mínimo de $f(x)$
- x_0 no es mínimo de $f(x)$

x_n converge a x_* solución de $f(x) = 0$

Si $x_0 > x_1 > x_*$

Convergencia global: condiciones

Condiciones suficientes

- $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) $\implies f(x)$ estrictamente convexa (cóncava)
- x_* no es mínimo de $f(x)$
- x_0 no es mínimo de $f(x)$

x_n converge a x_* solución de $f(x) = 0$

Si $x_0 > x_1 > x_* \implies x_n$ decrece a x_*

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones:

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a:

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Si $x_0 = 1.9$, las iteraciones sucesivas resultan:

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Si $x_0 = 1.9$, las iteraciones sucesivas resultan:

- $x_1 = 1.51$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Si $x_0 = 1.9$, las iteraciones sucesivas resultan:

- $x_1 = 1.51$
- $x_2 = -0.2099$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Si $x_0 = 1.9$, las iteraciones sucesivas resultan:

- $x_1 = 1.51$
- $x_2 = -0.2099$
- $x_3 = -4.16584$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Si $x_0 = 1.9$, las iteraciones sucesivas resultan:

- $x_1 = 1.51$
- $x_2 = -0.2099$
- $x_3 = -4.16584$
- $x_4 = 9.1884$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Si $x_0 = 1.9$, las iteraciones sucesivas resultan:

- $x_1 = 1.51$
- $x_2 = -0.2099$
- $x_3 = -4.16584$
- $x_4 = 9.1884$
- $x_5 = 89.615$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ tiene soluciones: $x = \pm 2$

Es equivalente a: $x = \phi_1(x) = x^2 + x - 4$

Si $x_0 = 1.9$, las iteraciones sucesivas resultan:

- $x_1 = 1.51$
- $x_2 = -0.2099$
- $x_3 = -4.16584$
- $x_4 = 9.1884$
- $x_5 = 89.615$
- $x_6 = 8116.47$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ es equivalente a

Método de punto fijo: ejemplo

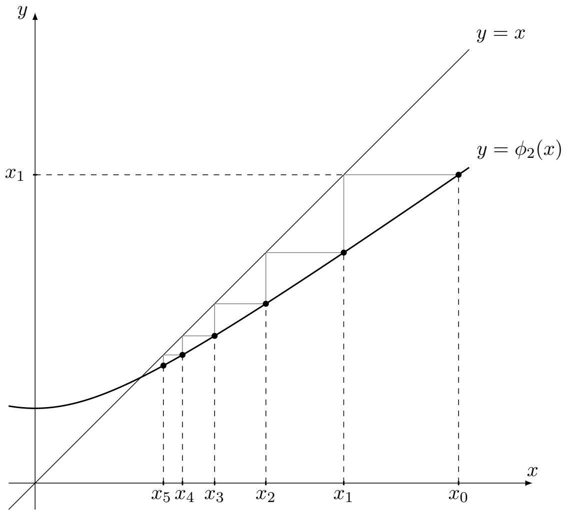
La ecuación $0 = x^2 - 4$ es equivalente a $x = \phi_2(x) = (x^2/2 + 2)^{1/2}$

Método de punto fijo: ejemplo

La ecuación $0 = x^2 - 4$ es equivalente a $x = \phi_2(x) = \left(x^2/2 + 2\right)^{1/2}$

n	x_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$
0	8.000 00	−6.000 00	
2	4.358 90	−2.358 90	0.615 747
4	2.783 88	−0.783 88	0.563 472
6	2.222 05	−0.222 05	0.523 897
8	2.057 76	-0.57759×10^{-1}	0.506 923
10	2.014 60	-0.14595×10^{-1}	0.501 805
12	2.003 66	-0.36588×10^{-2}	0.500 456
14	2.000 92	-0.91532×10^{-3}	0.500 114
16	2.000 23	-0.22887×10^{-3}	0.500 029
18	2.000 06	-0.57219×10^{-4}	0.500 007
20	2.000 01	-0.14305×10^{-4}	0.500 002

Método de punto fijo: ejemplo



Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $\phi(x) \in [a, b]$

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $\phi(x) \in [a, b]$
2. Si $x, y \in [a, b]$ entonces $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \gamma \, |x - y|$, con $0 \leq \gamma < 1$

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $\phi(x) \in [a, b]$
2. Si $x, y \in [a, b]$ entonces $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \gamma\,|x - y|$, con $0 \leq \gamma < 1$

verifica:

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $\phi(x) \in [a, b]$
2. Si $x, y \in [a, b]$ entonces $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \gamma\, |x - y|$, con $0 \leq \gamma < 1$

verifica:

- Hay un único punto fijo $x_* \in [a, b]$

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $\phi(x) \in [a, b]$
2. Si $x, y \in [a, b]$ entonces $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \gamma\, |x - y|$, con $0 \leq \gamma < 1$

verifica:

- Hay un único punto fijo $x_* \in [a, b] \Longrightarrow \phi(x_*) = x_*$

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $\phi(x) \in [a, b]$
2. Si $x, y \in [a, b]$ entonces $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \gamma\, |x - y|$, con $0 \leq \gamma < 1$

verifica:

- Hay un único punto fijo $x_* \in [a, b] \Longrightarrow \phi(x_*) = x_*$
- Para cualquier $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $x_1 = \phi(x_0), \ldots, x_n = \phi(x_{n-1})$

$$|x_* - x_n| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma}\, |x_1 - x_0| \to 0$$

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a,b]$, entonces $\phi(x) \in [a,b]$
2. Si $x, y \in [a,b]$ entonces $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \gamma\, |x - y|$, con $0 \leq \gamma < 1$

verifica:

- Hay un único punto fijo $x_* \in [a,b] \implies \phi(x_*) = x_*$
- Para cualquier $x_0 \in [a,b]$, la sucesión $x_1 = \phi(x_0), \ldots, x_n = \phi(x_{n-1})$

$$|x_* - x_n| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\, |x_1 - x_0| \to 0$$

$$\max_{x \in [a,b]} |\phi'(x)| = \gamma$$

Método de punto fijo: condiciones de convergencia

Si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

1. Si $x \in [a, b]$, entonces $\phi(x) \in [a, b]$
2. Si $x, y \in [a, b]$ entonces $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \gamma\, |x - y|$, con $0 \leq \gamma < 1$

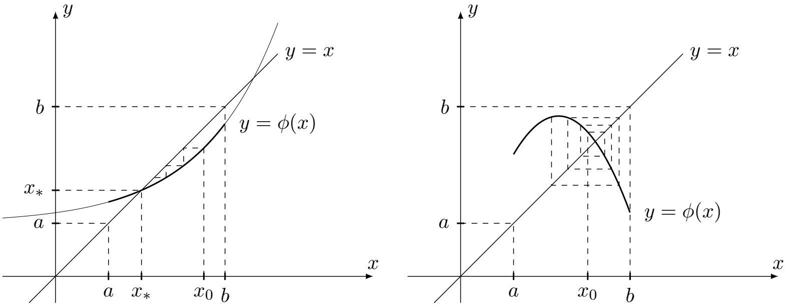
verifica:

- Hay un único punto fijo $x_* \in [a, b] \Longrightarrow \phi(x_*) = x_*$
- Para cualquier $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $x_1 = \phi(x_0), \ldots, x_n = \phi(x_{n-1})$

$$|x_* - x_n| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma}\, |x_1 - x_0| \to 0$$

$\max_{x \in [a,b]} |\phi'(x)| = \gamma \Longrightarrow$ la condición 2

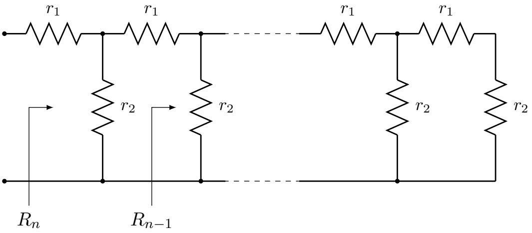
Método de punto fijo: condiciones de convergencia



(a) $x_n \to x_*$ (b) $x_n \not\to x_*$

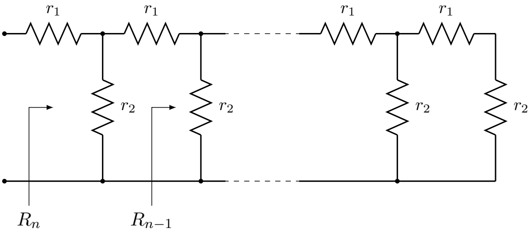
Método de punto fijo: aplicación

Resistencia equivalente:



Método de punto fijo: aplicación

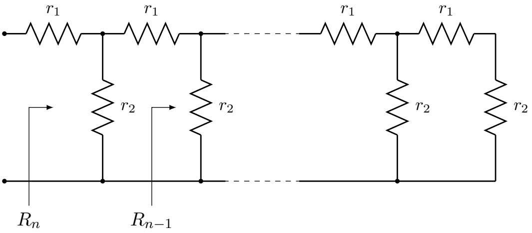
Resistencia equivalente:



$$R_n = \phi(R_{n-1}) = r_1 + \frac{r_2\, R_{n-1}}{r_2 + R_{n-1}}$$

Método de punto fijo: aplicación

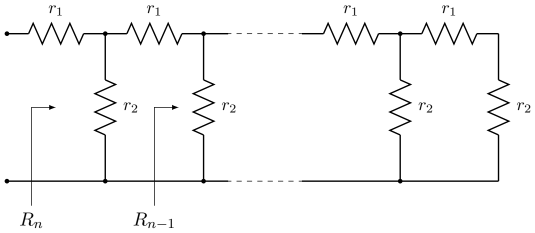
Resistencia equivalente:



$$R_n = \phi(R_{n-1}) = r_1 + \frac{r_2\, R_{n-1}}{r_2 + R_{n-1}} \Longrightarrow R_* = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4\, r_1\, r_2}}{2}$$

Método de punto fijo: aplicación

Resistencia equivalente:

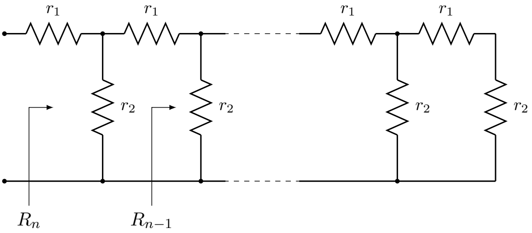


$$R_n = \phi(R_{n-1}) = r_1 + \frac{r_2\, R_{n-1}}{r_2 + R_{n-1}} \Longrightarrow R_* = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4\, r_1\, r_2}}{2}$$

$$\phi : [r_1, r_1 + r_2] \to [r_1, r_1 + r_2]$$

Método de punto fijo: aplicación

Resistencia equivalente:



$$R_n = \phi(R_{n-1}) = r_1 + \frac{r_2\,R_{n-1}}{r_2 + R_{n-1}} \Longrightarrow R_* = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4\,r_1\,r_2}}{2}$$

$$\phi : [r_1, r_1 + r_2] \to [r_1, r_1 + r_2] \;\; \text{y} \;\; |\phi'(r)| \leq \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2}\right)^2 < 1$$

Método de la secante: algoritmo

Similar al método de Newton usando aproximación por interpolación

Método de la secante: algoritmo

Similar al método de Newton usando aproximación por interpolación

$$f(x_{n-1}) + \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}(x - x_{n-1}) = 0$$

Método de la secante: algoritmo

Similar al método de Newton usando aproximación por interpolación

$$f(x_{n-1}) + \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} (x - x_{n-1}) = 0$$

Despejando:

Método de la secante: algoritmo

Similar al método de Newton usando aproximación por interpolación

$$f(x_{n-1}) + \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}(x - x_{n-1}) = 0$$

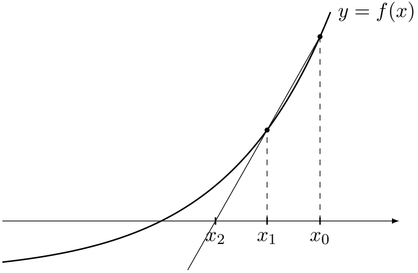
Despejando: $x_n = \dfrac{x_{n-2}\, f(x_{n-1}) - x_{n-1}\, f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$

Método de la secante: algoritmo

Similar al método de Newton usando aproximación por interpolación

$$f(x_{n-1}) + \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} (x - x_{n-1}) = 0$$

Despejando: $x_n = \dfrac{x_{n-2}\, f(x_{n-1}) - x_{n-1}\, f(x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$



Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\, f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\, f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\, f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x \in [x_* - r, x_* + r]} |f'(x)|$

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\, f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min\limits_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max\limits_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f''(x)|$

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\, f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0|, |\epsilon_1| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\,f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max_{x\in[x_*-r,x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0|, |\epsilon_1| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces:

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\, f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0|, |\epsilon_1| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces: $x_n \in [x_* - r, x_* + r]$

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\, f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min\limits_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max\limits_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0|, |\epsilon_1| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces: $x_n \in [x_* - r, x_* + r]$, $|\epsilon_n| \to 0$

Método de la secante: error

Si $\epsilon_n = x_* - x_n$, el error verifica:

$$\epsilon_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2\,f[x_{n-1}, x_{n-2}]}\epsilon_{n-1}\epsilon_{n-2}$$

Si $r > 0$ verifica

- $c_1 = \min\limits_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f'(x)|$
- $c_2 = \max\limits_{x\in[x_*-r, x_*+r]} |f''(x)|$
- $|\epsilon_0|, |\epsilon_1| < r$ y $c_2\, r \leq 2\, c_1$

Entonces: $x_n \in [x_* - r, x_* + r]$, $|\epsilon_n| \to 0$ y $\dfrac{|\epsilon_n|}{|\epsilon_{n-1}|^{\varphi}} \to \left|\dfrac{f''(x^*)}{2\, f'(x^*)}\right|^{\varphi-1}$

Método de la secante: ejemplo

$f(x) = e^x - 45,\ x_0 = 6,\ x_1 = 5$

n	x_n	ϵ_n	$\lvert\epsilon_n\rvert/\lvert\epsilon_{n-1}\rvert^{\varphi}$
0	6.000 000 000 0	-2.193	
1	5.000 000 000 0	-1.193	0.335
2	4.594 483 062 4	-0.788	0.592
3	4.152 404 516 2	-0.346	0.509
4	3.919 965 344 9	-0.113	0.632
5	3.824 813 113 8	-0.182×10^{-1}	0.615
6	3.807 668 397 8	-0.101×10^{-2}	0.660
7	3.806 671 589 6	-0.910×10^{-5}	0.644
8	3.806 662 494 3	-0.458×10^{-8}	0.656
9	3.806 662 489 8	-0.209×10^{-13}	0.650

Método de la secante: ejemplo

$f(x) = e^x - 45,\ x_0 = 6,\ x_1 = 5$

n	x_n	ϵ_n	$\lvert\epsilon_n\rvert / \lvert\epsilon_{n-1}\rvert^{\varphi}$
0	6.000 000 000 0	−2.193	
1	5.000 000 000 0	−1.193	0.335
2	4.594 483 062 4	−0.788	0.592
3	4.152 404 516 2	−0.346	0.509
4	3.919 965 344 9	−0.113	0.632
5	3.824 813 113 8	-0.182×10^{-1}	0.615
6	3.807 668 397 8	-0.101×10^{-2}	0.660
7	3.806 671 589 6	-0.910×10^{-5}	0.644
8	3.806 662 494 3	-0.458×10^{-8}	0.656
9	3.806 662 489 8	-0.209×10^{-13}	0.650

$$\frac{f''(x)}{2\,f(x)} = 0.5$$

Método de la secante: ejemplo

$f(x) = e^x - 45,\ x_0 = 6,\ x_1 = 5$

n	x_n	ϵ_n	$\lvert\epsilon_n\rvert / \lvert\epsilon_{n-1}\rvert^{\varphi}$
0	6.000 000 000 0	-2.193	
1	5.000 000 000 0	-1.193	0.335
2	4.594 483 062 4	-0.788	0.592
3	4.152 404 516 2	-0.346	0.509
4	3.919 965 344 9	-0.113	0.632
5	3.824 813 113 8	-0.182×10^{-1}	0.615
6	3.807 668 397 8	-0.101×10^{-2}	0.660
7	3.806 671 589 6	-0.910×10^{-5}	0.644
8	3.806 662 494 3	-0.458×10^{-8}	0.656
9	3.806 662 489 8	-0.209×10^{-13}	0.650

$$\frac{f''(x)}{2\,f(x)} = 0.5 \Longrightarrow (0.5)^{\varphi-1} = 0.651558$$

El número de oro

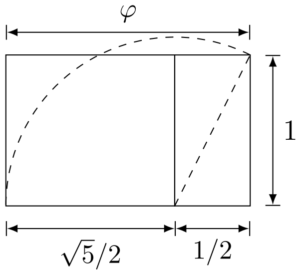
La ecuación: $x^2 - x - 1 = 0$

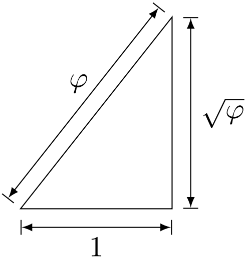
El número de oro

La ecuación: $x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1.61803$

El número de oro

La ecuación: $x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.61803$





Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si $n = 2$ planteamos

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si $n = 2$ planteamos

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si $n = 2$ planteamos

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Desarrollo de Taylor de f_1, f_2 en $\boldsymbol{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si $n = 2$ planteamos

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Desarrollo de Taylor de f_1, f_2 en $\boldsymbol{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{1,1} - x_{1,0}) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{2,1} - x_{2,0}) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{1,1} - x_{1,0}) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{2,1} - x_{2,0}) = 0 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si $n = 2$ planteamos

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Desarrollo de Taylor de f_1, f_2 en $\boldsymbol{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{1,1} - x_{1,0}) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{2,1} - x_{2,0}) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}_0) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{1,1} - x_{1,0}) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)\,(x_{2,1} - x_{2,0}) = 0 \end{cases}$$

Despejamos $\boldsymbol{x}_1 = (x_{1,1}, x_{2,1})$ del sistema lineal

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si definimos

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si definimos $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0,\ \ \boldsymbol{b}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ y

$$Df(\boldsymbol{u}_0) = \mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si definimos $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{b}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ y

$$Df(\boldsymbol{u}_0) = \mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}_0.\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{b}_0 = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_0$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si definimos $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{b}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ y

$$Df(\boldsymbol{u}_0) = \mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}_0.\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{b}_0 = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_0$

En general:

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si definimos $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{b}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ y

$$Df(\boldsymbol{u}_0) = \mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}_0 . \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_0$

En general: $\boldsymbol{b}_{n-1} = f(\boldsymbol{x}_{n-1})$

$$Df(\boldsymbol{x}_{n-1}) = \mathrm{A}_{n-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_{n-1}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_{n-1}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Si definimos $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{b}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ y

$$Df(\boldsymbol{u}_0) = \mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}_0.\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{b}_0 = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_0$

En general: $\boldsymbol{b}_{n-1} = f(\boldsymbol{x}_{n-1})$

$$Df(\boldsymbol{x}_{n-1}) = \mathrm{A}_{n-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_{n-1}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_{n-1}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}_{n-1}.\boldsymbol{u}_{n-1} + \boldsymbol{b}_{n-1} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{u}_{n-1}$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Soluciones :

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Soluciones : $(1, 0), (-1/2, \sqrt{3}/2), (-1/2, -\sqrt{3}/2)$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Soluciones : $(1, 0), (-1/2, \sqrt{3}/2), (-1/2, -\sqrt{3}/2)$

$$Df(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3\, x_1^2 - 3\, x_2^2 & -6\, x_1 x_2 \\ 6\, x_1 x_2 & 3\, x_1^2 - 3\, x_2^2 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Soluciones : $(1, 0), (-1/2, \sqrt{3}/2), (-1/2, -\sqrt{3}/2)$

$$Df(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3\, x_1^2 - 3\, x_2^2 & -6\, x_1 x_2 \\ 6\, x_1 x_2 & 3\, x_1^2 - 3\, x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{n-1} - Df(\boldsymbol{x}_{n-1})^{-1}.f(\boldsymbol{x}_{n-1})$$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

Sistemas de ecuaciones: método de Newton

Ejemplo: $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2)^3 = 1$

n	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	2.0	1.0	-2.0	1.0	-2.0	-1.0
1	1.3733	0.6133	-1.2933	0.72	-1.2933	-0.72
2	1.0139	0.2992	-0.7821	0.6093	-0.7821	-0.6093
3	0.9264	0.0375	-0.4384	0.7350	-0.4384	-0.7350
4	1.0041	-0.0063	-0.5085	0.8904	-0.5085	-0.8904
5	1.0	0.0	-0.5001	0.8666	-0.5001	-0.8667
6	1.0	0.0	-0.5	0.8660	-0.5	-0.8660

Región: $-1 \leq x_1 \leq -0.1, -0.3 \leq x_2 \leq 0.3$

Región: $-1 \leq x_1 \leq -0.1, -0.3 \leq x_2 \leq 0.3$

Región verde: puntos que convergen a $(1, 0)$

Región: $-1 \leq x_1 \leq -0.1, -0.3 \leq x_2 \leq 0.3$

Región verde: puntos que convergen a $(1, 0)$

Región azul: puntos que convergen a $(-0.5, 0.8660)$

Región: $-1 \leq x_1 \leq -0.1, -0.3 \leq x_2 \leq 0.3$

Región verde: puntos que convergen a $(1, 0)$

Región azul: puntos que convergen a $(-0.5, 0.8660)$

Región roja: puntos que convergen a $(-0.5, -0.8660)$

Región: $-1 \leq x_1 \leq -0.1, -0.3 \leq x_2 \leq 0.3$

Región verde: puntos que convergen a $(1, 0)$

Región azul: puntos que convergen a $(-0.5, 0.8660)$

Región roja: puntos que convergen a $(-0.5, -0.8660)$