Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Recuperatorio del Segundo Parcial

Primer Cuatrimestre 2021 (22/07/2021)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	5	Nota

Justificar todas las respuestas y explicitar los cálculos o aclarar cómo se obtuvieron los resultados.

1. Sean $a > 0$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+\frac{1}{a} \\ 1 & \frac{1}{a} & 1 \\ 1+\frac{1}{a} & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se descompone a la matriz A como $A = M + N$, y se define la matriz $B = -M^{-1}N$.

   a) Hallar todos los valores de $a > 0$ para que el método iterativo cuya matriz de iteración es B resulte convergente para todo valor inicial.

   b) Para los valores de a hallados, si se permutan la primera y la tercera filas de A, ¿se puede asegurar la convergencia del método de Jacobi? ¿Y del de Gauss-Seidel? (Mirar bien la matriz antes de hacer cuentas.)

2. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \dfrac{1}{4+x}$ y sean $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ los ceros del polinomio de Tchebychev, T_{n+1}. Se interpola a f con un polinomio P de grado menor o igual a $n+1$ de modo que $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \ldots P(x_n) = f(x_n)$ y además $P'(x_n) = f'(x_n)$. Probar que si $n \geq 4$ entonces el error cometido en la interpolación sobre el intervalo $[-1, 1]$ es menor que 10^{-3}.

3. Sea:
$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x) + f''(x)g''(x)\ dx.$$

   a) Mostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es producto interno en $C^2([-1, 1])$.

   b) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la función $f(x) = x^5$ sobre el subespacio S generado por $\{x, x^3\}$.

4. Se considera la función $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$ en $\mathbb{R}$.

   a) Sabiendo que en el intervalo $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right]$, $f' > 0$ y $f'' < 0$, demostrar que la iteración de Newton-Raphson generada a partir de $x_0 \in \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right]$ converge a la única raíz del intervalo.

   b) ¿Qué sucede si se toma $x_0 = -1$?

5. Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo
$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{|x|}dx \sim A_0 f(-x_0) + A_1 f(x_0)$$
que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? ¿Es una regla de cuadratura gaussiana?