Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°11

---

1. Sea A una matriz inversible de $n \times n$, para la cual se desea aproximar la solución verdadera x_{sol} del sistema lineal $Ax = b$. Para dicho objetivo, se propone considerar alguna matriz inversible N adecuada, un vector inicial x_0 y definir una sucesión de vectores dada por: $x_{j+1} = x_j + y_j$. Donde cada y_j es la solución del sistema $Nx = Ae_j = A(x_{sol} - x_j)$. Este método se conoce como Método de corrección residual.

a) Suponiendo N dada, hallar una matriz B y un vector c tales que el método se pueda escribir de la forma $x_{j+1} = Bx_j + c$. Mostrar que si x_j converge a un valor x^*, entonces x^* es solución del sistema $Ax = b$.

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Probar que el método resulta convergente para todo vector inicial x_0. Sugerencia: considerar una norma matricial adecuada.

2. Dada la función $f(x) = \cos(\pi x) - e^{-x}$ y $x_0, \ldots, x_n \in [0, 1]$ tales que $x_0 = 0$ y $x_n = 1$, sea P_{n+2} el polinomio de grado menor o igual a $n + 2$ que interpola a f en los x_i y que además cumple que $f'(0) = P'_{n+2}(0)$ y $f'(1) = P'_{n+2}(1)$.

a) Probar que el error de interpolación verifica

$$|f(x) - P_{n+2}(x)| \leq \frac{\|f^{(n+3)}\|_{\infty,[0,1]}}{(n+3)!} \frac{|u(x)|}{16}$$

donde $u(x) = \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$.

b) ¿Cómo hay que elegir a los x_i para que $|u(x)|$ sea mínimo?

c) Hallar n tal que $\|f - P_{n+2}\|_{\infty,[0,1]} < 10^{-3}$.

3. Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos de la siguiente tabla de datos

x	0	1	2
y	4	3	0

con una función del tipo: $y(x) = a\,2^x + b\,x$.

4. Se considera la función $f(x) = x^6 - 48x^2 + 3$

a) Demostrar que f tiene exactamente una raíz en el intervalo $(2, +\infty)$.

b) Sea r dicha raíz. Demostrar que el método de Newton-Raphson converge si se toma como valor inicial un $x_0 > r$.

c) Generalizar el ítem anterior para un x_0 que sea mayor a 2.

5. Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(x)dx \sim A_0(f(x_0) + f(x_1)),$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? ¿Es una regla de cuadratura Gaussiana? *(Sugerencia:* $((x^2 - 2)\,\mathrm{sen}(x) + 2x\cos(x))' = x^2\cos(x)$*)*