Cálculo Numérico

Clase Práctica, 7 de Junio de 2021

Martín Maas

Ecuaciones no-lineales
Newton-Raphson

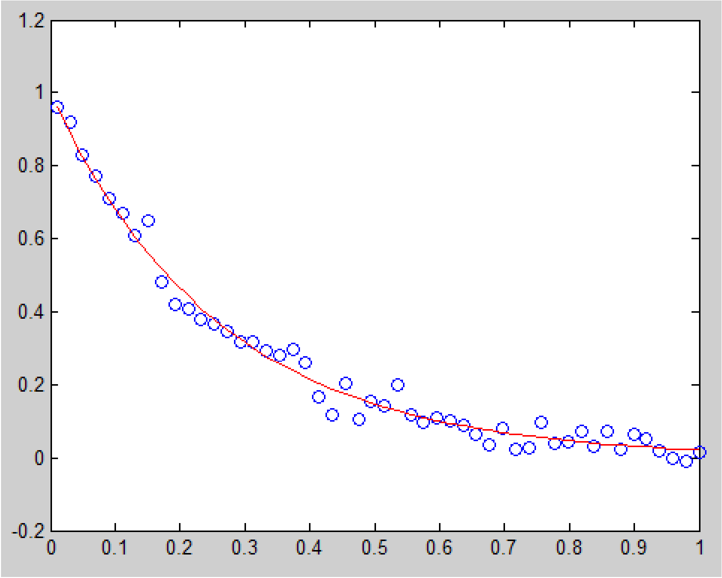
EXACTAS UBA

Aplicaciones/Comentarios

Ejercicio 20: Cuadrados mínimos no-lineales: Curve-Fitting aka “**Fitear**”

$$\min_b F(b) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - \frac{1}{x_i + b} \right)^2$$

$$\boxed{\text{Resolvemos} \quad F'(b) = 0}$$



Ejercicio 17: Newton-Rapshon **en varias variables** (materia Optimización)

Aplicaciones/Comentarios

Ejercicio 18: Ecuación diferencial no-lineal, aplicamos Euler implícito.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t) = y(t)^2 - y(t)^3$$

$$y_{n+1} - y_n = h\left(y_{n+1}^2 - y_{n+1}^3\right)$$

Newton-Rapshon a cada paso, estimación inicial y_n

Aplicaciones/Comentarios

$47.000 de contado

En 12 cuotas con un recargo de 20%

¿Cuál es la tasa efectiva de interés mensual?

$$P = \sum_{i=1}^{12} \frac{1.2P}{12}(1-\alpha)^i \longrightarrow \frac{1}{1.2} = \sum_{i=1}^{12}(1-\alpha)^i$$

Ejercicios de convergencia

Clase práctica pasada:

- Teorema de convexidad en todo R entonces NR converge
- Usando que una sucesión monótona y acotada converge.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} < x_n$$

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} > r$$

Sugerencia: repasar ejercicio del minuto 44:00 a 58:00

Ejercicios de errores y convergencia

Teorema de convergencia local:

“Si la estimación inicial es suficientemente buena NR converge”.

Idea: $$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2 \quad \Rightarrow \quad \text{pido } \left|\frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(x)}e_0\right| < 1 \quad \forall x, y \in I$$

Ejercicios de errores y convergencia

Veamos por qué alcanza con eso

$$|e_{n+1}| = \left|\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2\right| \leq \lambda e_n^2 \qquad \lambda = \max_{x,y\in I}\left|\frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(x)}\right|$$

$$|e_n| \leq \lambda e_{n-1}^2 \leq \lambda^3 e_{n-2}^4 \leq \lambda^5 e_{n-3}^6 \cdots \leq \lambda^{2^n-1} e_0^{2^n} = \underbrace{(\lambda e_0)}_{\lambda e_0 < 1}{}^{2^n-1}\, e_0$$

Sea $f(x) = e^x + 5\sin(x) - 2$

(a) Hallar un intervalo $I \subset (0, \frac{3}{2})$ para que NR converja.

(b) Decidir el número de pasos necesarios para que el error sea menor a 10^{-6}

Buscamos cotas para las derivadas de f

$$f'(x) = e^x + 5\cos(x) \longrightarrow |f'(x)| \geq 1 = \delta \qquad \left(\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x) > 0\right)$$

$$f''(x) = e^x - 5\,\mathrm{sen}(x) \longrightarrow |f''(x)| < e^{\frac{3}{2}} + 5 < 10 = M$$

Pedimos: $\left|\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}e_0\right| < 1 \quad \text{si} \quad \frac{1}{2}\frac{M}{\delta}e_0 < 1 \quad \text{si} \quad e_0 < \frac{1}{5}$

Sea $f(x) = e^x + 5\sin(x) - 2$

(a) Hallar un intervalo $I \subset (0, \frac{3}{2})$ para que NR converja.

(b) Decidir el número de pasos necesarios para que el error sea menor a 10^{-6}

El intervalo inicial es demasiado grande, porque $e_0 = r - x_0, \quad r, x \in I$

...Entonces hacemos algunos pasos de bisección para achicar el intervalo

(y/o revisamos nuestra cota para ver si no era muy poco ajustada)

Sea $f(x) = e^x + 5\sin(x) - 2$

(a) Hallar un intervalo $I \subset (0, \frac{3}{2})$ para que NR converja.

(b) Decidir el número de pasos necesarios para que el error sea menor a 10^{-6}

Empezamos con bisección en I: $f(0) < 0$ $f(\frac{3}{2}) > 0$

$f(\frac{3}{4}) > 0$

$f(\frac{3}{8}) > 0$

… en el intervalo $I = (0, \frac{3}{8})$ tengo una raiz y NR converge $\forall x_0 \in I$

$$I = (0, \frac{3}{8}) \Rightarrow e_0 = \frac{3}{16} < \frac{1}{5}$$

Sea $f(x) = e^x + 5\sin(x) - 2$

(a) Hallar un intervalo $I \subset (0, \frac{3}{2})$ para que NR converja.

(b) Decidir el número de pasos necesarios para que el error sea menor a 10^{-6}

Volviendo al error

$$e_0 = \tfrac{3}{16} \quad \lambda = 5$$

$$|e_n| \leq (\lambda e_0)^{2^n - 1} e_0 = \left(\frac{15}{16}\right)^{2^n - 1} \frac{3}{16} < 10^{-6}$$

$$\downarrow$$

$$n = 8$$