Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Primer Parcial

Primer Cuatrimestre 2021 (13/05/2021)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y explicitar los cálculos o aclarar cómo se obtuvieron los resultados.

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Se desea resolver el problema $Ax = b$ para $b = (3, 5, 6)^t$. Para esto se considera la descomposición QR de A, dada por las matrices

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular x a partir del cálculo $x = A^{-1}b$. Calcular las entradas de A^{-1} a partir del sistema $A^{-1}A = I_3$, trabajando con base 10, mantisa de 3 dígitos y método de redondeo.

   b) Calcular x, despejando sus entradas en el sistema $Rx = Q^t b$, trabajando con base 10, mantisa de 3 dígitos y método de redondeo.

2. Dado el problema: $\begin{cases} y'(t) &= 4t^2 \operatorname{sen}(t + 2y(t)), \\ y(0) &= 0 \end{cases}$.

   a) Expresar la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.

   b) Estimar el error de truncado local para $t \in [0, 1]$.

   c) Hallar una cota para el paso h que garantice que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-2}.

3. Se considera el siguiente problema de evolución, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 5u_x(x,t) = 0, \quad x \in (0,1), t \in (0,1), \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad x \in [0,1], \\ u(1,t) = 0, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

   a) Discretizar el problema usando diferencias adelantadas con paso h en x y diferencias adelantadas con paso k en t, y escribir el esquema explícito como un sistema lineal de la forma $u^{j+1} = Au^j$, indicando cuál es la matriz A, el vector u^0 y sus respectivas dimensiones.

   b) Hallar condiciones sobre $\nu = \frac{k}{h}$ que garanticen la estabilidad del método en norma infinito.

4. Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, la matriz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

   Calcular $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{cond}_1(A_n)$ y $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{cond}_2(A_n)$.