Cálculo Numérico

Producto interno - Ortogonalización

Nazareno Faillace

31/05

Departamento de Matemática - FCEyN - UBA

Producto interno

Definición

Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno si para todo $x, y, z \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ cumple:

1. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$

Ejemplo: sea $\mathbb{V} = C[-1, 1]$ el espacio de las funciones continuas en $[-1, 1]$. Mostrar que, para $f, g \in \mathbb{V}$, la función definida por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)|x|dx$$

es un producto interno.

Veamos que se cumplen las cuatro propiedades:

1. $\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle f + h, g \rangle &= \int_{-1}^{1} (f(x) + h(x))g(x)|x|dx = \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)|x|dx + \int_{-1}^{1} h(x)g(x)|x|dx = \\
&= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle
\end{aligned}$$

2. $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle \quad \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\langle \alpha f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \alpha f(x)g(x)|x|dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x)g(x)|x|dx = \alpha\langle f, g\rangle$$

3. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)|x|dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)|x|dx = \langle g, f\rangle$$

4. $\langle f, f\rangle > 0$ si $f \neq 0$:

$$\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)f(x)|x|dx = \int_{-1}^{1} f^2(x)|x|dx$$

   $f^2(x)|x|$ es continua y $f^2(x)|x| \geq 0$. Además, como $f \neq 0$, $f^2(x)|x|$ no es la función nula, por lo tanto, existe $x_0 \in [-1, 1]$ tal que $f^2(x_0)|x_0| > 0$. Luego, $f^2(x_0)|x_0| > \delta$ para algún $\delta \in \mathbb{R}$. Por la continuidad de $f^2(x)|x|$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^2(x)|x| > \delta$ si $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Entonces:

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)|x|dx \geq \int_{x_o-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^2(x)|x|dx \geq \int_{x_o-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta \; dx = 2\varepsilon\delta > 0$$

Producto interno

Definiciones

1. En un e.v. con producto interno $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se define la norma inducida:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

2. Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un e.v. con producto interno, se dice que $f, g \in \mathbb{V}$ son ortogonales si $\langle f, g\rangle = 0$.
3. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ subespacio de dimensión finita de $\mathbb{V}$ generado por $\{s_1, \ldots, s_r\}$, decimos que $\{s_1, \ldots, s_r\}$ es una base ortonormal (b.o.n.) si:

$$\langle s_i, s_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Problema B de cuadrados mínimos

En vez de aproximar un conjunto de datos, este problema se trata de aproximar en el espacio de funciones:

- Sean $\mathbb{V}$ espacio vectorial con producto interno, $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio de dimensión finita. Dada $f \in \mathbb{V}$, queremos hallar $\Phi^* \in S$ tal que:

$$\|f - \Phi^*\| \leq \|f - \Phi\| \quad \forall\, \Phi \in S$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interno de $\mathbb{V}$:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Proyección ortogonal

Teorema

Sean $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un e.v. con producto interno, $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio, $x \in \mathbb{V}$ e $y \in \mathbb{S}$, son equivalentes:

1. $||x - y|| = \text{mín}_{s\in\mathbb{S}} ||x - s||$
2. $\langle x - y, s\rangle = 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{S}$

Además, existe único $y \in \mathbb{S}$ que verifica alguna de las propiedades anteriores. A y se lo denomina la proyección ortogonal de x sobre $\mathbb{S}$, y se lo nota $P_S(x)$

Obs: $P_S(f)$ es la solución a nuestro problema.

Corolario

Sean $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un e.v. con producto interno, $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio de dimensión finita y $\{v_1, \dots, v_n\}$ b.o.n. de $\mathbb{S}$, entonces:

$$P_S(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, v_i\rangle v_i$$

Ejemplo: sea $\mathbb{V} = C[-1,1]$ el e.v. con el producto interno definido en el primer ejemplo de la clase, consideramos $\mathbb{R}_2[x] = gen\{1, x, x^2\}$ subespacio de $\mathbb{V}$.

1. Hallar b.o.n. de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Hallar la mejor aproximación en sentido de cuadrados mínimos de x^3 en $\mathbb{R}_2[x]$.

1. Para ortonormalizar $\{1, x, x^2\}$ usamos Gram-Schmidt:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_1 = 1 \\
&\|\tilde{u}_1\|^2 = \langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot |x| dx = 1 \Rightarrow \|\tilde{u}_1\| = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{\tilde{u}_1}{\|\tilde{u}_1\|} = 1 \\
&\tilde{u}_2 = x - \langle x, u_1 \rangle u_1 = x - \int_{-1}^{1} x \cdot 1 \cdot |x| dx \cdot 1 = x - 0 \cdot 1 = x \\
&\|\tilde{u}_2\|^2 = \langle \tilde{u}_2, \tilde{u}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x \cdot |x| dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \|\tilde{u}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \sqrt{2}x \\
&\tilde{u}_3 = x^2 - \langle x^2, u_1 \rangle u_1 - \langle x^2, u_2 \rangle u_2 = x^2 - \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \cdot |x| dx \cdot 1 - \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sqrt{2}x \cdot |x| dx \cdot \sqrt{2}x = \\
&\qquad = x^2 - (-\tfrac{1}{2}) \cdot 1 - 0 \cdot \sqrt{2}x = x^2 + \frac{1}{2} \\
&\|\tilde{u}_3\|^2 = \langle \tilde{u}_3, \tilde{u}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot |x| dx = \frac{13}{12} \Rightarrow u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = 2\sqrt{\tfrac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\tfrac{3}{13}}
\end{aligned}
$$

Entonces $\{1, \sqrt{2}x, 2\sqrt{\frac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\frac{3}{13}}\}$ es b.o.n de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Ya tenemos una b.o.n de $\mathbb{R}_2[x]$: $\{1, \sqrt{2}x, 2\sqrt{\frac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\frac{3}{13}}\}$. Luego, la mejor aproximación en sentido de cuadrados mínimos de x^3 en $\mathbb{S} = \mathbb{R}_2[x]$ es $P_S(x^3)$:

$$P_S(x^3) = \langle x^3, 1\rangle \cdot 1 + \langle x^3, \sqrt{2}x\rangle\sqrt{2}x + \langle x^3, 2\sqrt{\tfrac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\tfrac{3}{13}}\rangle(2\sqrt{\tfrac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\tfrac{3}{13}})$$

Calculamos los productos internos:

$$\langle x^3, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot 1 \cdot |x| dx = 0$$

$$\langle x^3, \sqrt{2}x\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \sqrt{2}x \cdot |x| dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\langle x^3, 2\sqrt{\tfrac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\tfrac{3}{13}}\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot (2\sqrt{\tfrac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\tfrac{3}{13}}) \cdot |x| dx = 0$$

Entonces:

$$P_S(x^3) = 0 \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{2}x + 0 \cdot (2\sqrt{\tfrac{3}{13}}x^2 - \sqrt{\tfrac{3}{13}}) = \frac{2}{3}x$$