Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico

Transformaciones ortogonales y descomposición de matrices - $PA = LU$

Mercedes Pérez Millán

Dto. de Matemática–FCEyN–Universidad de Buenos Aires
IMAS-CONICET

29 de abril de 2021

Resumen

Breve repaso de transformaciones ortogonales

Hacia la descomposición QR (para el lunes)

Volviendo a LU: ahora con permutación

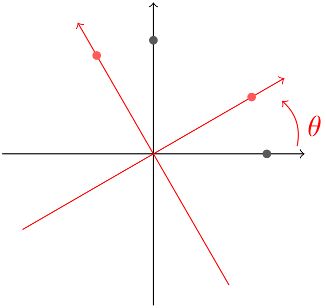
Matrices ortogonales en $\mathbb{R}^{n\times n}$:

- $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal
  $\Leftrightarrow$ las columnas de Q son una base ortonormal (b.o.n.) de $\mathbb{R}^n$
  $\Leftrightarrow$ Q es inversible y $Q^{-1} = Q^t$.
- $\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle$. Y por lo tanto preserva ángulos y distancias.
- Si λ es autovalor de Q, entonces $\lambda = \pm 1$.
- Autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales entre sí.

En $\mathbb{R}^2$:

Rotaciones de ángulo θ:

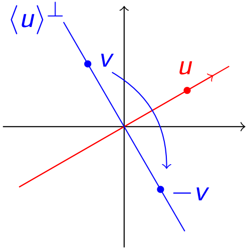
$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



$\det(Q) = 1$

Simetrías ortogonales:
Q matriz de una simetría ortogonal con respecto al vector u $\Rightarrow \forall v \in \langle u \rangle^{\perp}$, si $C = (u|v)$:

$$C^{-1}QC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$\det(Q) = -1$

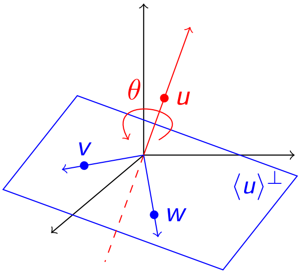
En $\mathbb{R}^3$:

Rotaciones de ángulo θ con respecto al eje de rotación $\langle u \rangle$:

u se matiene fijo y la rotación se hace en el plano $\langle u \rangle^\perp$. Si $\{u, v, w\}$ b.o.n. de $\mathbb{R}^3$ y $C = (u|v|w)$:

$$C^{-1}QC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = 1$$



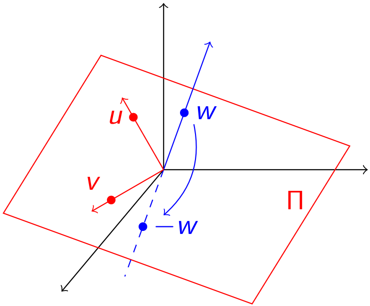
En $\mathbb{R}^3$:

Simetrías ortogonales con respecto al plano $\Pi = \langle u, v \rangle$:

Si $\Pi^\perp = \langle w \rangle$ y $C = (u|v|w)$:

$$C^{-1}QC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q) = -1$$



En $\mathbb{R}^n$:

Si $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal, existe $\{v_1, \dots, v_n\}$ b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ tal que si $C = (v_1|\dots|v_n)$:

$$C^{-1}QC = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

con $A_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\operatorname{sen}(\theta_i) \\ \operatorname{sen}(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

Volvemos a triangular matrices:

Tenemos $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

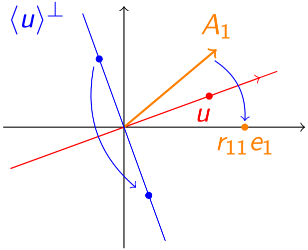
$$A = (A_1 | \dots | A_n)$$

y queremos llevarla a una triangular superior R ("*right triangular matrix*") multiplicando por matrices a izquierda (aplicando transformaciones lineales a sus columnas).

Volvemos a triangular matrices:

$$A = (A_1 | \dots | A_n)$$

Para llevar A_1 a un múltiplo de e_1, el primer canónico, una opción (para poner ceros debajo de la diagonal) es aplicar una simetría respecto del (hiper)plano que pasa "por el medio" de A_1 y e_1:



$$Q_1 A = \left(\begin{array}{c|c} r_{11} & * \\ \hline & \\ 0 & A' \\ & \end{array} \right)$$

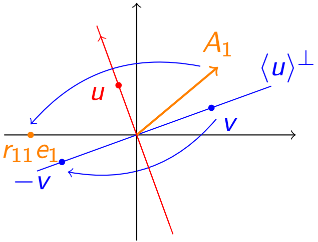
Un pasito más:

$$Q_1(A_1|\dots|A_n) = \left(\begin{array}{c|c} r_{11} & * \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

- Como $\|Q_1 A_1\| = \|A_1\| = |r_{11}|$, entonces $r_{11} = \pm\|A_1\|$.
- Para evitar restar dos números parecidos, conviene que $\mathrm{signo}(r_{11}) = -\mathrm{signo}(a_{11})$, i.e., $r_{11} = -\mathrm{signo}(a_{11})\|A_1\|$.

Sean $\tilde{v} = A_1 - r_{11}e_1$, y $v = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$, entonces:

$$Q_1 = I - 2vv^t.$$



Cuenta para leer detenidamente en casa:

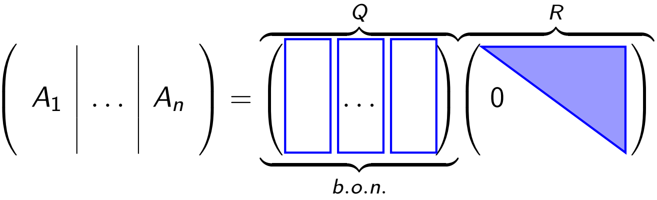
$$\begin{aligned} Q_1A_1 &= A_1 - 2vv^tA_1 = A_1 - 2v\langle v, A_1\rangle \\ &= A_1 - \frac{2\langle A_1 - r_{11}e_1, A_1\rangle}{\|A_1 - r_{11}e_1\|}v \\ &= A_1 - \frac{2(\|A_1\|^2 - r_{11}a_{11})}{\|A_1 - r_{11}e_1\|}\frac{A_1 - r_{11}e_1}{\|A_1 - r_{11}e_1\|} \\ &= A_1 - \frac{2(\|A_1\|^2 - r_{11}a_{11})}{\langle A_1 - r_{11}e_1, A_1 - r_{11}e_1\rangle}(A_1 - r_{11}e_1) \\ &= A_1 - \frac{2(\|A_1\|^2 - r_{11}a_{11})}{\|A_1\|^2 - 2r_{11}a_{11} + \underbrace{\|r_{11}e_1\|^2}_{\|A_1\|^2}}(A_1 - r_{11}e_1) \\ &= A_1 - (A_1 - r_{11}e_1) = r_{11}e_1. \checkmark \end{aligned}$$

Continuará...

Extra (lo veremos mejor la clase que viene):

- Conviene mirar Clase 10 del libro: L.N. Trefethen, D. Bau. Numerical Linear Algebra, SIAM 1997.

- Queremos descomponer a la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como $A = QR$, con Q y R tales que:



Extra (lo veremos mejor la clase que viene):

- Si $A = (A_1|\dots|A_n)$, multipliquemos por matrices "convenientes" a izquierda para llevarla a una matriz triangular superior R.

- Por medio de los reflectores de Householder obtenemos $Q = (Q_{n-1}\dots Q_1)^{-1} = Q_1^t \dots Q_{n-1}^t$, donde $Q'_k = I_{n-k+1} - 2v'(v')^t$ y

$$Q_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & Q'_k \end{array}\right).$$

  (v' el que corresponda en $\mathbb{R}^{n-k+1}$.)

- $I - 2vv^t = Id_n - 2 \begin{pmatrix} \boxed{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\quad v \quad} \end{pmatrix}$

Volviendo a LU: veamos un ejemplo con permutación:

Buscamos poner ceros en la primera columna, debajo de la entrada 1-1. Si hacemos $F_2 - 2F_1 \to F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_2 - 2F_1 \to F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

obtenemos un 0 (cero) en el lugar 2-2 y no podemos seguir con la descomposición.

Veamos un ejemplo con permutación:

Entonces permutamos las dos últimas filas y, en este caso, ya llegamos a una triangular superior (si no, seguimos seguimos con eliminación gaussiana y permutaciones):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_2-2F_1\to F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_2\leftrightarrow F_3}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$P_1 = I_3, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2 L_1 P_1 A = U$$

$$P_2L_1P_1A = U \Rightarrow \underbrace{P_2L_1P_2^{-1}}_{L_1'}\underbrace{P_2P_1}_{P}A = U \Rightarrow \underbrace{P_2P_1}_{P}A = \underbrace{(L_1')^{-1}}_{L}U$$

Veamos: en este caso $P_2^{-1} = P_2$ y

$$P_2L_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1'}$$

Si tenemos, por ejemplo:

$$L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 A = U,$$

podemos reescribir:

$$L_3 P_3 L_2 P_2 L_1 P_1 = L_3' L_2' L_1' P_3 P_2 P_1,$$

con

$$L_3' = L_3, \quad L_2' = P_3 L_2 P_3^{-1}, \quad L_1' = P_3 P_2 L_1 P_2^{-1} P_3^{-1}.$$

Y así:

$$\underbrace{P_3 P_2 P_1}_{P} A = \underbrace{(L_3' L_2' L_1')^{-1}}_{L} U$$