Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°6

1. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$ tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Determinar todos los valores de α para los cuales el método de Gauss-Seidel converge para todo dato inicial.
(*Sugerencia:* recordar que, sean $M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con M inversible, los autovalores de $-M^{-1}N$ son las raíces del polinomio $\det(\lambda M + N)$.)

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°6 - Resolución del ejercicio

1) Recordemos que un método iterativo converge para todo valor inicial si y solo si el radio espectral de la matriz del método es menor a 1. Para hallar los autovalores de la matriz de iteración de este método, conviene recordar la siguiente propiedad, que facilita mucho las cuentas: si descomponemos $A = M + N$ y la matriz de iteración es $B = -M^{-1}N$, entonces

$$\det(\lambda I_3 + B) = \det(\lambda I_3 + M^{-1}N) = \det(M^{-1}(\lambda M + N)) = \underbrace{\det(M^{-1})}_{\neq 0} \det(\lambda M + N) = 0$$

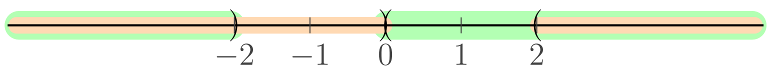
$$\Leftrightarrow \quad \det(\lambda M + N) = 0.$$

De esta forma, los autovalores de la matriz del método de Gauss-Seidel (donde $M = D + L$ con D la diagonal de A y L la matriz triangular inferior cuyas entradas no nulas son $L_{ij} = A_{ij}$ si $i < j$) se pueden hallar a partir de las raíces del siguiente polinomio:

$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & (1-\alpha)\lambda & 1 \\ \lambda & \lambda & (1+\alpha)\lambda \end{pmatrix} = \lambda[((1-\alpha)(1+\alpha)\lambda^2 - \lambda) - ((1+\alpha)\lambda - \lambda) + (1 - (1 - \alpha)\lambda)] = \lambda[(1-\alpha^2)\lambda^2 - \lambda - \lambda - \alpha\lambda + \lambda + 1 - \lambda + \alpha\lambda] = \lambda[(1-\alpha^2)\lambda^2 - 2\lambda + 1]$. Como

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 + 4\alpha^2}}{2(1-\alpha^2)} = \frac{1 \pm \alpha}{1 - \alpha^2} = \frac{1}{1 \mp \alpha},$$

el radio espectral es el máximo entre 0, $\left|\frac{1}{1-\alpha}\right|$ y $\left|\frac{1}{1+\alpha}\right|$. De esta forma, queremos $|1-\alpha|$ y $|1+\alpha|$ mayores a 1 en simultáneo.



Respuesta: Todos los valores de α para los que el método converge para todo dato inicial son aquellos en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.