Elementos de Cálculo Numérico/Cálculo Numérico

Clase 6

Primer Cuatrimestre 2021

Sistema 3×3:

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 1 \\ 2\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 = 2 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 10\,x_3 = 1 \end{cases}$$

Sistema 3×3:

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 1 \\ 2\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 = 2 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 10\,x_3 = 1 \end{cases}$$

Método de eliminación de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Sistema 3×3:

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 1 \\ 2\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 = 2 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 10\,x_3 = 1 \end{cases}$$

Método de eliminación de Gauss (Jiǔzhāng Suànshù siglo II d.C.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Sistema 3×3:

$$\begin{cases} x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 1 \\ 2\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 = 2 \\ 3\,x_1 - 5\,x_2 + 10\,x_3 = 1 \end{cases}$$

Método de eliminación de Gauss (Jiǔzhāng Suànshù siglo II d.C.)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Solución: $x_3 = -1, x_2 = -1, x_1 = 2$

Operaciones de fila

Multiplicando por L matriz triangular inferior

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Operaciones de fila

Multiplicando por L matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Operaciones de fila

Multiplicando por L matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

L, L' triangulares inferiores $\Rightarrow \lambda\mathrm{L}, \mathrm{L} + \mathrm{L}', \mathrm{L}.\mathrm{L}'$ triangulares inferiores

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

L, L' triangulares inferiores $\Rightarrow \lambda\mathrm{L}, \mathrm{L} + \mathrm{L}', \mathrm{L}.\mathrm{L}'$ triangulares inferiores

L inversible si y solo si $l_{i,i} \neq 0, i = 1, \ldots, n$

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

L, L' triangulares inferiores $\Rightarrow \lambda\mathrm{L}, \mathrm{L} + \mathrm{L}', \mathrm{L}.\mathrm{L}'$ triangulares inferiores

L inversible si y solo si $l_{i,i} \neq 0, i = 1, \ldots, n$

L inversible $\Rightarrow \mathrm{L}^{-1}$ triangular inferior

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

L, L' triangulares inferiores $\Rightarrow \lambda\mathrm{L}, \mathrm{L} + \mathrm{L}', \mathrm{L}.\mathrm{L}'$ triangulares inferiores

L inversible si y solo si $l_{i,i} \neq 0, i = 1, \ldots, n$

L inversible $\Rightarrow \mathrm{L}^{-1}$ triangular inferior

Método de Gauss: $\mathrm{L_k}.\mathrm{L_{k-1}} \ldots \mathrm{L_1}.\mathrm{A} = \mathrm{U}$

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

L, L' triangulares inferiores $\Rightarrow \lambda\mathrm{L}, \mathrm{L} + \mathrm{L}', \mathrm{L}.\mathrm{L}'$ triangulares inferiores

L inversible si y solo si $l_{i,i} \neq 0, i = 1, \ldots, n$

L inversible $\Rightarrow \mathrm{L}^{-1}$ triangular inferior

Método de Gauss: $\mathrm{L_k}.\mathrm{L_{k-1}} \ldots \mathrm{L_1}.\mathrm{A} = \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{L_1^{-1}} \ldots \mathrm{L_{k-1}^{-1}}.\mathrm{L_k^{-1}}.\mathrm{U}$

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

L, L' triangulares inferiores $\Rightarrow \lambda\mathrm{L}, \mathrm{L}+\mathrm{L}', \mathrm{L}.\mathrm{L}'$ triangulares inferiores

L inversible si y solo si $l_{i,i} \neq 0, i = 1, \ldots, n$

L inversible $\Rightarrow \mathrm{L}^{-1}$ triangular inferior

Método de Gauss: $\mathrm{L_k}.\mathrm{L_{k-1}} \ldots \mathrm{L_1}.\mathrm{A} = \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{L_1^{-1}} \ldots \mathrm{L_{k-1}^{-1}}.\mathrm{L_k^{-1}}.\mathrm{U}$

$\mathrm{L} = \mathrm{L_1^{-1}} \ldots \mathrm{L_{k-1}^{-1}}.\mathrm{L_k^{-1}}$

Matrices triangulares

$\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular inferior: $l_{i,j} = 0$ si $i < j$

L, L' triangulares inferiores $\Rightarrow \lambda\mathrm{L}, \mathrm{L} + \mathrm{L}', \mathrm{L}.\mathrm{L}'$ triangulares inferiores

L inversible si y solo si $l_{i,i} \neq 0, i = 1, \ldots, n$

L inversible $\Rightarrow \mathrm{L}^{-1}$ triangular inferior

Método de Gauss: $\mathrm{L_k}.\mathrm{L_{k-1}} \ldots \mathrm{L_1}.\mathrm{A} = \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{L_1^{-1}} \ldots \mathrm{L_{k-1}^{-1}}.\mathrm{L_k^{-1}}.\mathrm{U}$

$\mathrm{L} = \mathrm{L_1^{-1}} \ldots \mathrm{L_{k-1}^{-1}}.\mathrm{L_k^{-1}} \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

Matriz por bloques

Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se escriben por bloques

Matriz por bloques

Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se escriben por bloques

$\mathrm{A}_{1,1}, \mathrm{B}_{1,1} \in \mathbb{R}^{k\times k}, \mathrm{A}_{1,2}, \mathrm{B}_{1,2} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$

Matriz por bloques

Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se escriben por bloques

$\mathrm{A}_{1,1}, \mathrm{B}_{1,1} \in \mathbb{R}^{k\times k}, \mathrm{A}_{1,2}, \mathrm{B}_{1,2} \in \mathbb{R}^{k\times (n-k)}$

$\mathrm{A}_{2,1}, \mathrm{B}_{2,1} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}, \mathrm{A}_{2,2}, \mathrm{B}_{2,2} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times (n-k)}$

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} \\ \hline \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} \end{array}\right] \quad \mathrm{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_{1,1} & \mathrm{B}_{1,2} \\ \hline \mathrm{B}_{2,1} & \mathrm{B}_{2,2} \end{array}\right]$$

Matriz por bloques

Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se escriben por bloques

$\mathrm{A}_{1,1}, \mathrm{B}_{1,1} \in \mathbb{R}^{k\times k}, \mathrm{A}_{1,2}, \mathrm{B}_{1,2} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$

$\mathrm{A}_{2,1}, \mathrm{B}_{2,1} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}, \mathrm{A}_{2,2}, \mathrm{B}_{2,2} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} \\ \hline \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} \end{array}\right] \quad \mathrm{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{B}_{1,1} & \mathrm{B}_{1,2} \\ \hline \mathrm{B}_{2,1} & \mathrm{B}_{2,2} \end{array}\right]$$

El producto $\mathrm{A}.\mathrm{B}$ se escribe

$$\mathrm{A}.\mathrm{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{1,1}.\mathrm{B}_{1,1} + \mathrm{A}_{1,2}.\mathrm{B}_{2,1} & \mathrm{A}_{1,1}.\mathrm{B}_{1,2} + \mathrm{A}_{1,2}.\mathrm{B}_{2,2} \\ \hline \mathrm{A}_{2,1}.\mathrm{B}_{1,1} + \mathrm{A}_{2,2}.\mathrm{B}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,1}.\mathrm{B}_{1,2} + \mathrm{A}_{2,2}.\mathrm{B}_{2,2} \end{array}\right]$$

Exitencia de la descomposición LU

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *verifica* $\det\left(\mathrm{A}^{(k)}\right) \neq 0$ *para* $k = 1, \dots, n$*, entonces existen únicas matrices* $\mathrm{L}, \mathrm{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* L *triangular inferior y* U *triangular superior con* $u_{i,i} = 1$ *verificando* $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

Exitencia de la descomposición LU

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *verifica* $\det\left(\mathrm{A}^{(k)}\right) \neq 0$ *para* $k = 1, \ldots, n$, *entonces existen únicas matrices* $\mathrm{L}, \mathrm{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, L *triangular inferior y* U *triangular superior con* $u_{i,i} = 1$ *verificando* $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

$\mathrm{A}^{(k)}$ es la submatriz formada por las k primeras filas y columnas

$$\mathrm{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,k} \end{bmatrix}$$

Demostración.

Por inducción en n, se verifica

Demostración.

Por inducción en n, se verifica

$\mathrm{A}^{(n-1)} = \mathrm{L}^{(n-1)}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}, \quad \mathrm{L}^{(n-1)}, \mathrm{U}^{(n-1)}$ inversibles (únicas!)

Demostración.

Por inducción en n, se verifica

$\mathrm{A}^{(n-1)} = \mathrm{L}^{(n-1)}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}, \quad \mathrm{L}^{(n-1)}, \mathrm{U}^{(n-1)}$ inversibles (únicas!)

La matriz A se escribe como

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{L}^{(\mathrm{n}-1)} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Demostración.

Por inducción en n, se verifica

$\mathrm{A}^{(n-1)} = \mathrm{L}^{(n-1)}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}$, $\quad \mathrm{L}^{(n-1)}, \mathrm{U}^{(n-1)}$ inversibles (únicas!)

La matriz A se escribe como

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{L}^{(\mathrm{n}-1)} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$

Demostración.

Por inducción en n, se verifica

$\mathrm{A}^{(n-1)} = \mathrm{L}^{(n-1)}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}, \quad \mathrm{L}^{(n-1)}, \mathrm{U}^{(n-1)}$ inversibles (únicas!)

La matriz A se escribe como

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{L}^{(\mathrm{n}-1)} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{l}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} = \boldsymbol{c}$

Demostración.

Por inducción en n, se verifica

$\mathrm{A}^{(n-1)} = \mathrm{L}^{(n-1)}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}$, $\quad \mathrm{L}^{(n-1)}, \mathrm{U}^{(n-1)}$ inversibles (únicas!)

La matriz A se escribe como

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{L}^{(\mathrm{n}-1)} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{l}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} = \boldsymbol{c} \Rightarrow \left(\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}\right)^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$

Demostración.

Por inducción en n, se verifica

$\mathrm{A}^{(n-1)} = \mathrm{L}^{(n-1)}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}$, $\quad \mathrm{L}^{(n-1)}, \mathrm{U}^{(n-1)}$ inversibles (únicas!)

La matriz A se escribe como

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{L}^{(\mathrm{n}-1)} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{l}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)} = \boldsymbol{c} \Rightarrow \left(\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}\right)^{\mathrm{T}} .\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{l}.\boldsymbol{u} + l_{n,n} = a_{n,n}$

Almacenamiento

Las matrices L, U se almacenan en una matriz de dimensión $n \times n$

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Almacenamiento

Las matrices L, U se almacenan en una matriz de dimensión $n \times n$

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

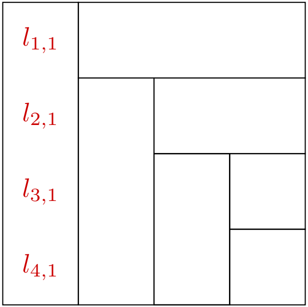
$$\mathrm{A} \dashrightarrow (\mathrm{L}|\mathrm{U}) = \begin{bmatrix} l_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

Método de Crout: ejemplo 4×4

Método de Crout: ejemplo 4×4

Paso 0: para $i = 1, 2, 3, 4$

$$l_{i,1} = a_{i,1}$$



Método de Crout: ejemplo 4×4

Paso 1: para $i = 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} u_{1,i} &= a_{1,i}/l_{1,1} \\ l_{i,2} &= a_{i,2} - l_{i,1}\, u_{1,2} \end{aligned}$$

$l_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{1,4}$
$l_{2,1}$	$l_{2,2}$		
$l_{3,1}$	$l_{3,2}$		
$l_{4,1}$	$l_{4,2}$		

Método de Crout: ejemplo 4×4

Paso 2: para $i = 3, 4$

$$u_{2,i} = (a_{2,i} - l_{2,1}\, u_{1,i})/l_{2,2}$$
$$l_{i,3} = a_{i,3} - l_{i,1}\, u_{1,3} - l_{i,2}\, u_{2,3}$$

$l_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{1,4}$
$l_{2,1}$	$l_{2,2}$	$u_{2,3}$	$u_{2,4}$
$l_{3,1}$	$l_{3,2}$	$l_{3,3}$	
$l_{4,1}$	$l_{4,2}$	$l_{4,3}$	

Método de Crout: ejemplo 4×4

Paso 3: para $i = 4$

$$
\begin{aligned}
u_{3,i} &= (a_{3,i} - l_{3,1}\, u_{1,i} - l_{3,2}\, u_{2,i})/l_{3,3} \\
l_{i,4} &= a_{i,4} - l_{i,1}\, u_{1,4} - l_{i,2}\, u_{2,4} - l_{i,3}\, u_{3,4}
\end{aligned}
$$

$l_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	$u_{1,4}$
$l_{2,1}$	$l_{2,2}$	$u_{2,3}$	$u_{2,4}$
$l_{3,1}$	$l_{3,2}$	$l_{3,3}$	$u_{3,4}$
$l_{4,1}$	$l_{4,2}$	$l_{4,3}$	$l_{4,4}$

Método de Crout

Paso 1: $l_{i,1} = a_{i,1}, \quad i = 1, \dots, n$

Método de Crout

Paso 1: $l_{i,1} = a_{i,1}, \quad i = 1, \dots, n$

Paso 2:

$$u_{1,i} = a_{1,i}/l_{1,1}, \quad i = 2, \dots, n$$
$$l_{i,2} = a_{i,2} - l_{i,1}\, u_{1,2}, \quad i = 2, \dots, n$$

Método de Crout

Paso 1: $l_{i,1} = a_{i,1}, \quad i = 1, \ldots, n$

Paso 2:

$$u_{1,i} = a_{1,i}/l_{1,1}, \quad i = 2, \ldots, n$$
$$l_{i,2} = a_{i,2} - l_{i,1}\, u_{1,2}, \quad i = 2, \ldots, n$$

Paso k $(k = 3, \ldots, n)$:

$$u_{k-1,i} = \left(a_{k-1,i} - \sum_{j=1}^{k-2} l_{k-1,j}\, u_{j,i} \right) / l_{k-1,k-1}, \quad i = k, \ldots, n$$

$$l_{i,k} = a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j}\, u_{j,k}, \quad i = k, \ldots, n$$

Método de Crout: número de operaciones

$$\text{Paso 2: } \begin{cases} + & 0 \\ - & n-1 \\ \times & n-1 \\ \div & n-1 \end{cases} \qquad \text{Paso k: } \begin{cases} + & (2\,k-5)(n-k+1) \\ - & 2(n-k+1) \\ \times & (2\,k-3)(n-k+1) \\ \div & n-k+1 \end{cases}$$

Método de Crout: número de operaciones

$$\text{Paso 2: } \begin{cases} + & 0 \\ - & n-1 \\ \times & n-1 \\ \div & n-1 \end{cases} \qquad \text{Paso k: } \begin{cases} + & (2\,k-5)(n-k+1) \\ - & 2(n-k+1) \\ \times & (2\,k-3)(n-k+1) \\ \div & n-k+1 \end{cases}$$

Método de Crout: número de operaciones

Paso 2: $\begin{cases} + & 0 \\ - & n-1 \\ \times & n-1 \\ \div & n-1 \end{cases}$ Paso k: $\begin{cases} + & (2\,k-5)(n-k+1) \\ - & 2(n-k+1) \\ \times & (2\,k-3)(n-k+1) \\ \div & n-k+1 \end{cases}$

Total: $\begin{cases} + & (2\,n^3-9\,n^2+13\,n-6)/6 \\ - & (n-1)^2 \\ \times & n(2\,n^2-3\,n+1)/6 \\ \div & (n-1)n/2 \end{cases}$

Método de Crout: número de operaciones

Paso 2: $\begin{cases} + & 0 \\ - & n-1 \\ \times & n-1 \\ \div & n-1 \end{cases}$ Paso k: $\begin{cases} + & (2\,k-5)(n-k+1) \\ - & 2(n-k+1) \\ \times & (2\,k-3)(n-k+1) \\ \div & n-k+1 \end{cases}$

Total: $\begin{cases} + & (2\,n^3-9\,n^2+13\,n-6)/6 \\ - & (n-1)^2 \\ \times & n(2\,n^2-3\,n+1)/6 \\ \div & (n-1)n/2 \end{cases}$

Total flops: $n\,(4\,n^2-3\,n-1)/6 \cong 2/3\,n^3$

Método de Crout

Calcula la descomposición $\mathrm{A} = \mathrm{L.U}$

Método de Crout

Calcula la descomposición $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

Almacena $(\mathrm{L}|\mathrm{U})$ en la matriz A

Método de Crout

Calcula la descomposición $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

Almacena $(\mathrm{L}|\mathrm{U})$ en la matriz A

Algoritmo 1: Método de Crout

for $i = 2 \ldots, n$ **do**

- $a_{1,i} = a_{1,i}/a_{1,1}$
- $a_{i,2} = a_{i,2} - a_{i,1}a_{1,2}$

for $k = 3 \ldots, n$ **do**

- **for** $i = k \ldots, n$ **do**
  - $a_{k-1,i} = (a_{k-1,i} - \sum_{j=1}^{k-2} a_{k-1,j}a_{j,i})/a_{k-1,k-1}$
  - $a_{i,k} = a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{i,j}a_{j,k}$

Descomoposición LU de matrices banda

Si $a_{i,j} = 0$ para $j = 1, \dots k < i$, entonces $l_{i,j} = 0$

Descomoposición LU de matrices banda

Si $a_{i,j} = 0$ para $j = 1, \dots k < i$, entonces $l_{i,j} = 0$

Si $a_{i,j} = 0$ para $i = 1, \dots k < j$, entonces $u_{i,j} = 0$

Descomoposición LU de matrices banda

Si $a_{i,j} = 0$ para $j = 1, \dots k < i$, entonces $l_{i,j} = 0$

Si $a_{i,j} = 0$ para $i = 1, \dots k < j$, entonces $u_{i,j} = 0$

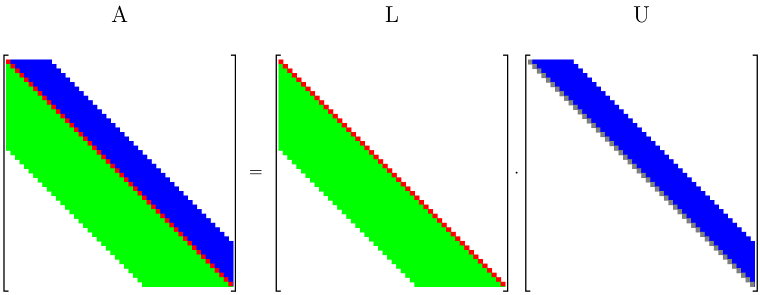
Preserva el ancho de las bandas

Descomoposición LU de matrices banda

Si $a_{i,j} = 0$ para $j = 1, \ldots k < i$, entonces $l_{i,j} = 0$

Si $a_{i,j} = 0$ para $i = 1, \ldots k < j$, entonces $u_{i,j} = 0$

Preserva el ancho de las bandas



Intercambio de filas

Sistema ($\beta > 0$)

$$\begin{cases} -\beta\, x_1 + x_2 & = 1, \\ \qquad x_1 + x_2 & = 2, \end{cases}$$

Intercambio de filas

Sistema ($\beta > 0$)

$$\begin{cases} -\beta\, x_1 + x_2 &= 1, \\ \quad\ \ x_1 + x_2 &= 2, \end{cases}$$

Eliminación gaussiana

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 1 & \frac{1+\beta}{\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas

Sistema ($\beta > 0$)

$$\begin{cases} -\beta\, x_1 + x_2 & = 1, \\ \quad\;\; x_1 + x_2 & = 2, \end{cases}$$

Eliminación gaussiana

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 1 & \frac{1+\beta}{\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución exacta: $y_1 = -\beta^{-1},\ y_2 = (1 + 2\,\beta)(1 + \beta)^{-1}$

Intercambio de filas

Sistema ($\beta > 0$)

$$\begin{cases} -\beta\, x_1 + x_2 & = 1, \\ \quad\;\; x_1 + x_2 & = 2, \end{cases}$$

Eliminación gaussiana

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 1 & \frac{1+\beta}{\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución exacta: $y_1 = -\beta^{-1},\ y_2 = (1 + 2\,\beta)(1+\beta)^{-1}$

$x_1 = (1+\beta)^{-1}, x_2 = (1 + 2\,\beta)(1+\beta)^{-1}$

Intercambio de filas

Sistema ($\beta > 0$)

$$\begin{cases} -\beta\, x_1 + x_2 & = 1, \\ \quad\;\; x_1 + x_2 & = 2, \end{cases}$$

Eliminación gaussiana

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 1 & \frac{1+\beta}{\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\beta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución exacta: $y_1 = -\beta^{-1},\ y_2 = (1 + 2\,\beta)(1+\beta)^{-1}$

$x_1 = (1+\beta)^{-1}, x_2 = (1 + 2\,\beta)(1+\beta)^{-1}$

Si $\beta = 10^{-6} \Rightarrow x_1 \cong 1, x_2 \cong 1$ (con 4 dígitos decimales)

Intercambio de filas

Con 4 dígitos decimales: $fl(1+10^{-6}) = 1, fl(2+10^{6}) = 10^{6}$

$$\begin{bmatrix} -10^{-6} & 0 \\ 1 & 10^{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -10^{6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas

Con 4 dígitos decimales: $fl(1+10^{-6}) = 1, fl(2+10^6) = 10^6$

$$\begin{bmatrix} -10^{-6} & 0 \\ 1 & 10^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -10^6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución: $\hat{y}_1 = -10^6,\ \hat{y}_2 = 1$

Intercambio de filas

Con 4 dígitos decimales: $fl(1+10^{-6})=1, fl(2+10^6)=10^6$

$$\begin{bmatrix} -10^{-6} & 0 \\ 1 & 10^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -10^6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución: $\hat{y}_1 = -10^6,\ \hat{y}_2 = 1 \Rightarrow \hat{x}_1 = 0, \hat{x}_2 = 1$

Intercambio de filas

Con 4 dígitos decimales: $fl(1+10^{-6}) = 1, fl(2+10^{6}) = 10^{6}$

$$\begin{bmatrix} -10^{-6} & 0 \\ 1 & 10^{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -10^{6} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución: $\hat{y}_1 = -10^{6},\ \hat{y}_2 = 1 \Rightarrow \hat{x}_1 = 0, \hat{x}_2 = 1$

Error relativo:

$$\frac{|y_1 - \hat{y}_1|}{|y_1|} \cong \epsilon, \qquad \frac{|y_2 - \hat{y}_2|}{|y_2|} \cong \epsilon$$

$$\frac{|x_1 - \hat{x}_1|}{|x_1|} = 1, \qquad \frac{|x_2 - \hat{x}_2|}{|x_2|} \cong \epsilon$$

Intercambio de filas

Si intercambiamos filas

$$\begin{cases} \phantom{-10^{-6}}\,x_1 + x_2 & = 2 \\ -10^{-6}\,x_1 + x_2 & = 1 \end{cases}$$

Intercambio de filas

Si intercambiamos filas

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = 2 \\ -10^{-6}\, x_1 + x_2 & = 1 \end{array} \right.$$

Trabajando con la misma precisión

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-6} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas

Si intercambiamos filas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 2 \\ -10^{-6}\, x_1 + x_2 & = 1 \end{cases}$$

Trabajando con la misma precisión

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-6} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución: $\hat{y}_1 = 2, \;\hat{y}_2 = 1$

Intercambio de filas

Si intercambiamos filas

$$\begin{cases} \phantom{-10^{-6}}\, x_1 + x_2 & = 2 \\ -10^{-6}\, x_1 + x_2 & = 1 \end{cases}$$

Trabajando con la misma precisión

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-6} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución: $\hat{y}_1 = 2,\ \hat{y}_2 = 1 \Rightarrow \hat{x}_1 = 1, \hat{x}_2 = 1$

Intercambio de filas

Si intercambiamos filas

$$\begin{cases} \phantom{-10^{-6}}\, x_1 + x_2 &= 2 \\ -10^{-6}\, x_1 + x_2 &= 1 \end{cases}$$

Trabajando con la misma precisión

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-6} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Solución: $\hat{y}_1 = 2,\ \hat{y}_2 = 1 \Rightarrow \hat{x}_1 = 1, \hat{x}_2 = 1$

Error relativo de orden ϵ

Permutaciones

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} : \sigma \text{ biyectiva}\}$$

Permutaciones

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} : \sigma \text{ biyectiva}\}$$

Como tabla

k	1	2	$\ldots$	n
σ_k	σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_n

Permutaciones

$$S_n = \{\sigma : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\} : \sigma \text{ biyectiva}\}$$

Como tabla

k	1	2	$\dots$	n
σ_k	σ_1	σ_2	$\dots$	σ_n

Permutaciones

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} : \sigma \text{ biyectiva}\}$$

Como tabla

k	1	2	$\ldots$	n
σ_k	σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_n

Asociamos: $\sigma \sim (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

Permutaciones

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} : \sigma \text{ biyectiva}\}$$

Como tabla

k	1	2	$\dots$	n
σ_k	σ_1	σ_2	$\dots$	σ_n

Asociamos: $\sigma \sim (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

Si $\sigma, \pi \in S_n$, entonces $\sigma \circ \pi \in S_n$

Permutaciones

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} : \sigma \text{ biyectiva}\}$$

Como tabla

k	1	2	$\ldots$	n
σ_k	σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_n

Asociamos: $\sigma \sim (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

Si $\sigma, \pi \in S_n$, entonces $\sigma \circ \pi \in S_n$

$\sigma \circ \pi \sim (\sigma_{\pi_1}, \sigma_{\pi_2}, \ldots, \sigma_{\pi_n})$

Permutaciones

$$S_n = \{\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\} : \sigma \text{ biyectiva}\}$$

Como tabla

k	1	2	$\ldots$	n
σ_k	σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_n

Asociamos: $\sigma \sim (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

Si $\sigma, \pi \in S_n$, entonces $\sigma \circ \pi \in S_n$

$\sigma \circ \pi \sim (\sigma_{\pi_1}, \sigma_{\pi_2}, \ldots, \sigma_{\pi_n})$

Si $I \sim \{1,2,\ldots,n\}$, entonces $\sigma \circ I = \sigma$ y $\sigma \circ \sigma^{-1} = I$

Matriz de permutación

Si $\sigma \in S_n$, definimos $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con coeficientes

$$(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = \sigma_j \\ 0 & i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Matriz de permutación

Si $\sigma \in S_n$, definimos $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con coeficientes

$$(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = \sigma_j \\ 0 & i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Si $\sigma, \pi \in S_n$, entonces $\mathrm{P}_\sigma.\mathrm{P}_\pi = \mathrm{P}_{\sigma\circ\pi}$

Matriz de permutación

Si $\sigma \in S_n$, definimos $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con coeficientes

$$(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = \sigma_j \\ 0 & i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Si $\sigma, \pi \in S_n$, entonces $\mathrm{P}_\sigma.\mathrm{P}_\pi = \mathrm{P}_{\sigma\circ\pi}$

$\mathrm{P}_\sigma.\mathrm{A}$ permuta las filas de A

Matriz de permutación

Si $\sigma \in S_n$, definimos $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con coeficientes

$$(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = \sigma_j \\ 0 & i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Si $\sigma, \pi \in S_n$, entonces $\mathrm{P}_\sigma.\mathrm{P}_\pi = \mathrm{P}_{\sigma\circ\pi}$

$\mathrm{P}_\sigma.\mathrm{A}$ permuta las filas de A

Ejemplo: $\sigma \sim (3,1,2)$

Matriz de permutación

Si $\sigma \in S_n$, definimos $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz con coeficientes

$$(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = \sigma_j \\ 0 & i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Si $\sigma, \pi \in S_n$, entonces $\mathrm{P}_\sigma.\mathrm{P}_\pi = \mathrm{P}_{\sigma\circ\pi}$

$\mathrm{P}_\sigma.\mathrm{A}$ permuta las filas de A

Ejemplo: $\sigma \sim (3,1,2)$

$$\mathrm{P}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{P}_\sigma.\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es inversible, entonces existen matrices* $\mathrm{P}, \mathrm{L}, \mathrm{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, P *matriz de permutación,* L *triangular inferior y* U *triangular superior con* $u_{i,i} = 1$ *verificando* $\mathrm{P.A} = \mathrm{L.U}$

Demostración.

Desarrollando $\det(\mathrm{A})$ por la última columna

$$0 \neq \det(\mathrm{A}) = (-1)^{n+1}\, a_{1,n}\, \det(\mathrm{A}_1) + \cdots + (-1)^{2n}\, a_{n,n}\, \det(\mathrm{A}_n)$$

Demostración.

Desarrollando $\det(\mathrm{A})$ por la última columna

$$0 \neq \det(\mathrm{A}) = (-1)^{n+1}\, a_{1,n}\, \det(\mathrm{A}_1) + \cdots + (-1)^{2n}\, a_{n,n}\, \det(\mathrm{A}_n)$$

$\mathrm{A}_k \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ se obteniene eliminando: fila k, columna n de A

$$\mathrm{A}_k = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n-1} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

Demostración.

Desarrollando $\det(\mathrm{A})$ por la última columna

$$0 \neq \det(\mathrm{A}) = (-1)^{n+1} a_{1,n} \det(\mathrm{A}_1) + \cdots + (-1)^{2n} a_{n,n} \det(\mathrm{A}_n)$$

$\mathrm{A}_k \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ se obteniene eliminando: fila k, columna n de A

$$\mathrm{A}_k = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n-1} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

Existe k con $\det(\mathrm{A}_k) \neq 0$

Demostración.

Por hipótesis inductiva: $\tilde{\mathrm{P}}.\mathrm{A}_\mathrm{k} = \mathrm{L}^{\mathrm{n}-1}.\mathrm{U}^{(\mathrm{n}-1)}$

Demostración.

Por hipótesis inductiva: $\tilde{\mathrm{P}}.\mathrm{A_k} = \mathrm{L^{n-1}}.\mathrm{U^{(n-1)}}$

Existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz de permutación:

Demostración.

Por hipótesis inductiva: $\tilde{\mathrm{P}}.\mathrm{A_k} = \mathrm{L^{n-1}}.\mathrm{U^{(n-1)}}$

Existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz de permutación:

$$\mathrm{P}.\mathrm{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \tilde{\mathrm{P}}.\mathrm{A_k} & & \boldsymbol{b} \\ \hline a_{k,1} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{k,n} \end{array}\right]$$

Demostración.

Por hipótesis inductiva: $\tilde{\mathrm{P}}.\mathrm{A_k} = \mathrm{L^{n-1}}.\mathrm{U^{(n-1)}}$

Existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz de permutación:

$$\mathrm{P}.\mathrm{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \tilde{\mathrm{P}}.\mathrm{A_k} & & \boldsymbol{b} \\ \hline a_{k,1} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{k,n} \end{array}\right]$$

$\tilde{\mathrm{P}}.\mathrm{A_k}$ inversible $\Rightarrow \mathrm{L^{n-1}}, \mathrm{U^{(n-1)}}$ inversibles

Matriz de permutación

Demostración.

$$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

Matriz de permutación

Demostración.

$$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{l}.\mathrm{U}^{(n-1)} = (a_{k,1} \ldots a_{k,n-1})$$

Matriz de permutación

Demostración.

$$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{l}.\mathrm{U}^{(n-1)} = (a_{k,1} \dots a_{k,n-1}) \Rightarrow \left(\mathrm{U}^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} = (a_{k,1} \dots a_{k,n-1})^{\mathrm{T}}$$

Matriz de permutación

Demostración.

$$\mathrm{L}^{(n-1)}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{l}.\mathrm{U}^{(n-1)} = (a_{k,1} \ldots a_{k,n-1}) \Rightarrow \left(\mathrm{U}^{(n-1)}\right)^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} = (a_{k,1} \ldots a_{k,n-1})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{l}.\boldsymbol{u} + l_{n,n} = a_{k,n}$$

Descomposición de Cholesky

$\mathrm{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{G}.\mathrm{G}^{\mathrm{T}}$ simétrica, definida positiva

Descomposición de Cholesky

$\mathrm{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{G}.\mathrm{G}^{\mathrm{T}}$ simétrica, definida positiva

Todas las submatrices principales $\mathrm{A}^{(k)}$ son inversibles $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

Descomposición de Cholesky

$\mathrm{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{G}.\mathrm{G}^{\mathrm{T}}$ simétrica, definida positiva

Todas las submatrices principales $\mathrm{A}^{(k)}$ son inversibles $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

¿Existe una descomposición $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{L}^{\mathrm{T}}$?

Descomposición de Cholesky

$\mathrm{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{G}.\mathrm{G}^{\mathrm{T}}$ simétrica, definida positiva

Todas las submatrices principales $\mathrm{A}^{(k)}$ son inversibles $\Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{U}$

¿Existe una descomposición $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{L}^{\mathrm{T}}$?

Proposición

Si $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es simétrica y definida positiva, entonces existe* $\mathrm{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *triangular inferior tal que* $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{L}^{\mathrm{T}}$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$\mathrm{A}^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es simétrica y definida positiva

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$\mathrm{A}^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es simétrica y definida positiva

Por hipótesis inductiva: $\mathrm{A}^{(n-1)} = \tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}$ con $\tilde{\mathrm{U}} = \tilde{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$\mathrm{A}^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es simétrica y definida positiva

Por hipótesis inductiva: $\mathrm{A}^{(n-1)} = \tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}$ con $\tilde{\mathrm{U}} = \tilde{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}$

Si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{L}} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{U}} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & l_{n,n} \end{array}\right]$$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$\mathrm{A}^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es simétrica y definida positiva

Por hipótesis inductiva: $\mathrm{A}^{(n-1)} = \tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}$ con $\tilde{\mathrm{U}} = \tilde{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}$

Si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{L}} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{U}} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & l_{n,n} \end{array}\right]$$

$\boldsymbol{b} = \tilde{\mathrm{L}}.\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}.\boldsymbol{b}$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$\mathrm{A}^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es simétrica y definida positiva

Por hipótesis inductiva: $\mathrm{A}^{(n-1)} = \tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}$ con $\tilde{\mathrm{U}} = \tilde{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}$

Si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{L}} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{U}} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & l_{n,n} \end{array}\right]$$

$\boldsymbol{b} = \tilde{\mathrm{L}}.\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}.\boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{l}.\tilde{\mathrm{U}} \Rightarrow \boldsymbol{l} = \boldsymbol{c}.\tilde{\mathrm{U}}^{-1}$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$\mathrm{A}^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ es simétrica y definida positiva

Por hipótesis inductiva: $\mathrm{A}^{(n-1)} = \tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}$ con $\tilde{\mathrm{U}} = \tilde{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}$

Si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(\mathrm{n}-1)} & \boldsymbol{b} \\ \hline \boldsymbol{c} & a_{n,n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{L}} & 0 \\ \hline \boldsymbol{l} & l_{n,n} \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathrm{U}} & \boldsymbol{u} \\ \hline 0 & l_{n,n} \end{array}\right]$$

$\boldsymbol{b} = \tilde{\mathrm{L}}.\boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \tilde{\mathrm{L}}^{-1}.\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{c} = \boldsymbol{l}.\tilde{\mathrm{U}} \Rightarrow \boldsymbol{l} = \boldsymbol{c}.\tilde{\mathrm{U}}^{-1}$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$$a_{n,n} = \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u} + l_{n,n}^2 \Rightarrow l_{n,n}^2 = a_{n,n} - \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u}$$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$$a_{n,n} = \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u} + l_{n,n}^2 \Rightarrow l_{n,n}^2 = a_{n,n} - \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u}$$

Si $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}.\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}^{(n-1)}.\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.\boldsymbol{z} + a_{n,n} \\ &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}.\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.\boldsymbol{z} + a_{n,n} \end{aligned}$$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$$a_{n,n} = \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u} + l_{n,n}^2 \Rightarrow l_{n,n}^2 = a_{n,n} - \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u}$$

Si $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}.\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}^{(n-1)}.\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.\boldsymbol{z} + a_{n,n} \\ &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}.\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.\boldsymbol{z} + a_{n,n} \end{aligned}$$

Tomando: $\boldsymbol{z} = \tilde{\mathrm{U}}^{-1}.\boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{l}.\tilde{\mathrm{L}}^{-1}$

Descomposición de Cholesky: demostración

Demostración.

$a_{n,n} = \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u} + l_{n,n}^2 \Rightarrow l_{n,n}^2 = a_{n,n} - \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u}$

Si $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}.\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}^{(n-1)}.\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.\boldsymbol{z} + a_{n,n} \\ &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\tilde{\mathrm{L}}.\tilde{\mathrm{U}}.\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.\boldsymbol{z} + a_{n,n} \end{aligned}$$

Tomando: $\boldsymbol{z} = \tilde{\mathrm{U}}^{-1}.\boldsymbol{u} \Leftrightarrow \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{l}.\tilde{\mathrm{L}}^{-1}$

$0 < \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}.\mathrm{A}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u} - \boldsymbol{l}.\tilde{\mathrm{L}}^{-1}.\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.\tilde{\mathrm{U}}^{-1}.\boldsymbol{u} + a_{n,n} = a_{n,n} - \boldsymbol{l}.\boldsymbol{u}$