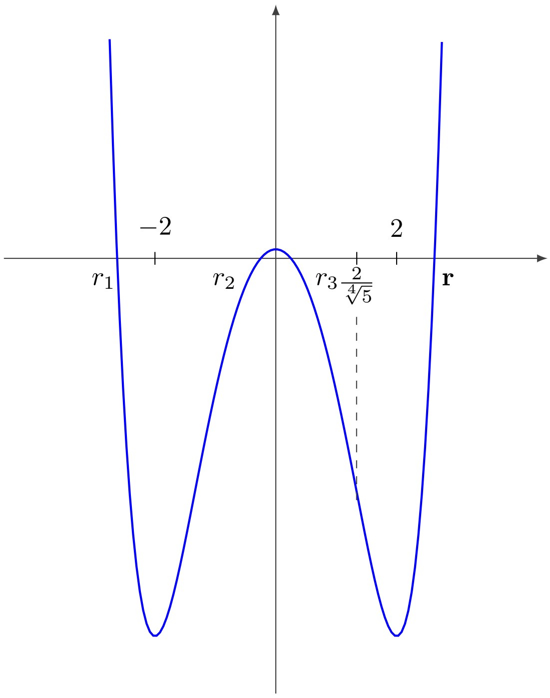
Ejercicio 4 - Entrega 11:

Se considera la función $f(x) = x^6 - 48x^2 + 3$

1. Demostrar que f tiene exactamente una raíz en el intervalo $(2, +\infty)$.
2. Sea r dicha raíz. Demostrar que el método de Newton-Raphson converge si se toma como valor inicial un $x_0 > r$.
3. Generalizar el ítem anterior para un x_0 que sea mayor a 2.

La duda que surgió es si podemos justificar la convergencia aplicando el Teorema 4.12 del apunte de la materia (página 76), o alguna variante.

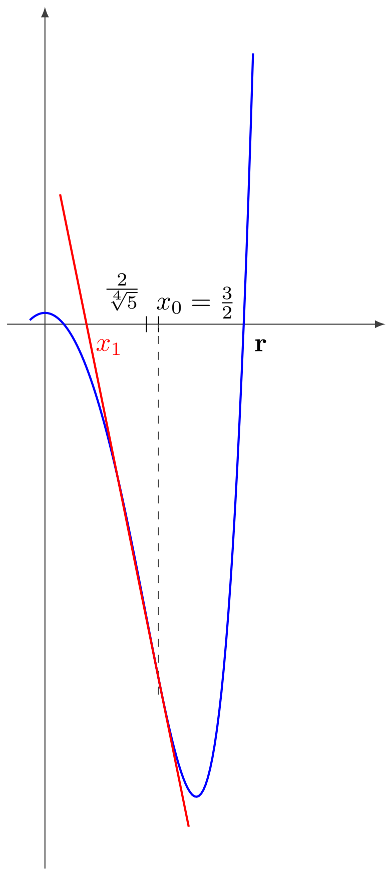
El gráfico de la función f es, aproximadamente, el siguiente:



- Se puede ver, como en la resolución del ejercicio, que si empezamos la iteración con $x_0 \in (-\infty, -2)$ el método converge, pero lo hace a la raíz r_1 (tarea).
- Tenemos $f''(x) = 6(5x^4 - 16)$ y por lo tanto $f''\left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) = f''\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) = 0$. ¿Qué pasa si empezamos en el intervalo $\left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, +\infty\right)$, donde $f'' > 0$? Notemos que si empezamos con $x_0 = \frac{3}{2} \in \left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, 2\right)$, entonces

$$f''(x_1) = f''\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = 6\left(5\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)^4 - 16\right)$$
$$= 6\left(5\left(1{,}5 - \frac{-93{,}609375}{-98{,}4375}\right)^4 - 16\right) \sim -93{,}273777 < 0.$$

Es decir, $x_1 \notin \left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, +\infty\right)$.



¿Converge el método a partir de x_1? Si converge, ¿hacia dónde lo hace?