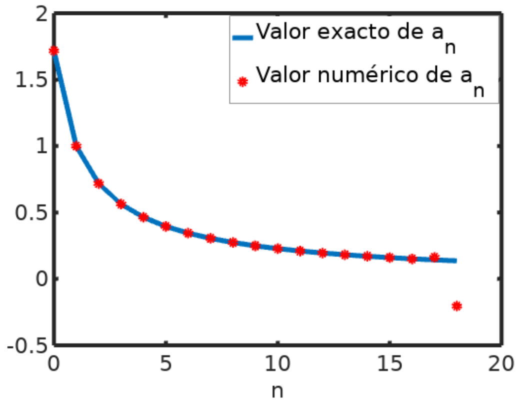
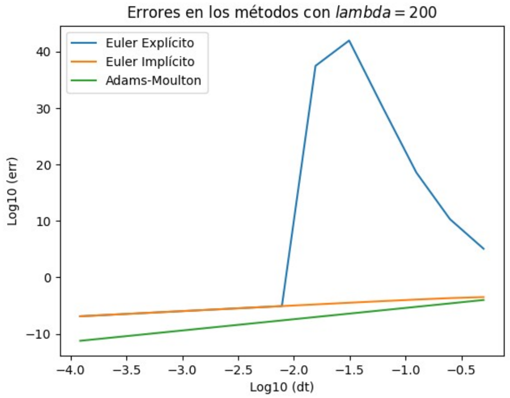
# Cálculo Numérico

Clase Práctica, 8 de Abril de 2021
Martín Maas

# Práctica 2:
## Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Problemas de Valores Iniciales)



# Ejemplo sencillo de inestabilidad

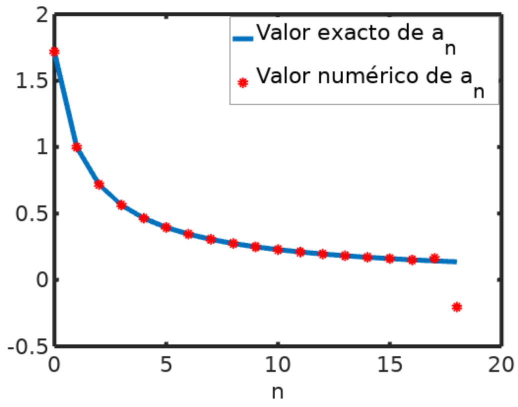
Queremos calcular $\int_0^1 e^x x^n dx$ integrando por partes n veces

$$\int_0^1 e^x x^n dx = [e^x x^n]\Big|_0^1 - n\int_0^1 e^x x^{n-1} dx$$

Definiendo $a_n := \int_0^1 e^x x^n dx$

Obtuvimos una recurrencia

$$\begin{cases} a_n &= e - n a_{n-1} \\ a_0 &= e - 1 \end{cases} \longrightarrow$$




$$\begin{aligned} \tilde{a}_{19} &= 6.5991 \\ \tilde{a}_{20} &= -129.26 \\ \tilde{a}_{21} &= 2717.3 \\ \tilde{a}_{22} &= -5.9777 \times 10^4 \\ \tilde{a}_{23} &= 1.3749 \times 10^6 \\ \tilde{a}_{24} &= -3.2997 \times 10^7 \end{aligned}$$

# Métodos de un paso para ODEs

$$\begin{cases} U'(t) = & F(t, U(t)), \quad \text{para } t \in (0, t_F) \\ U(0) = & Y_0 \end{cases}$$

$$\text{Euler explícito} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(t_n, u^n)$$

$$\text{Euler implícito} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(t_{n+1}, u^{n+1})$$

$$\text{Adams Moulton 1} \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\Big(F(t_n, u^n) + F(t_{n+1}, u^{n+1})\Big)$$

$$\boxed{\text{Un paso: } u^{n+1} \text{ depende de } u^n}$$

# Problema “stiff”

Dada una constante $\lambda > 0$, se considera el problema para $t > 0$.

$$\begin{cases} u'(t) = & -\lambda(u(t) - \cos(t)) - \sin(t), \quad \text{para } t \in (0, t_F) \\ u(0) = & 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta para todo $\lambda$ es $u(t) = \cos(t)$.

(a) Calcular la constante de Lipchitz en función de u **del problema**

(b) Implemente los métodos de un paso conocidos y mediante un gráfico en escala logarítmica compare el error en $t = 2$ en función de $\Delta t$.

# Problema “stiff”

(a) Calcular la constante de Lipchitz **del lado derecho de la ecuación**

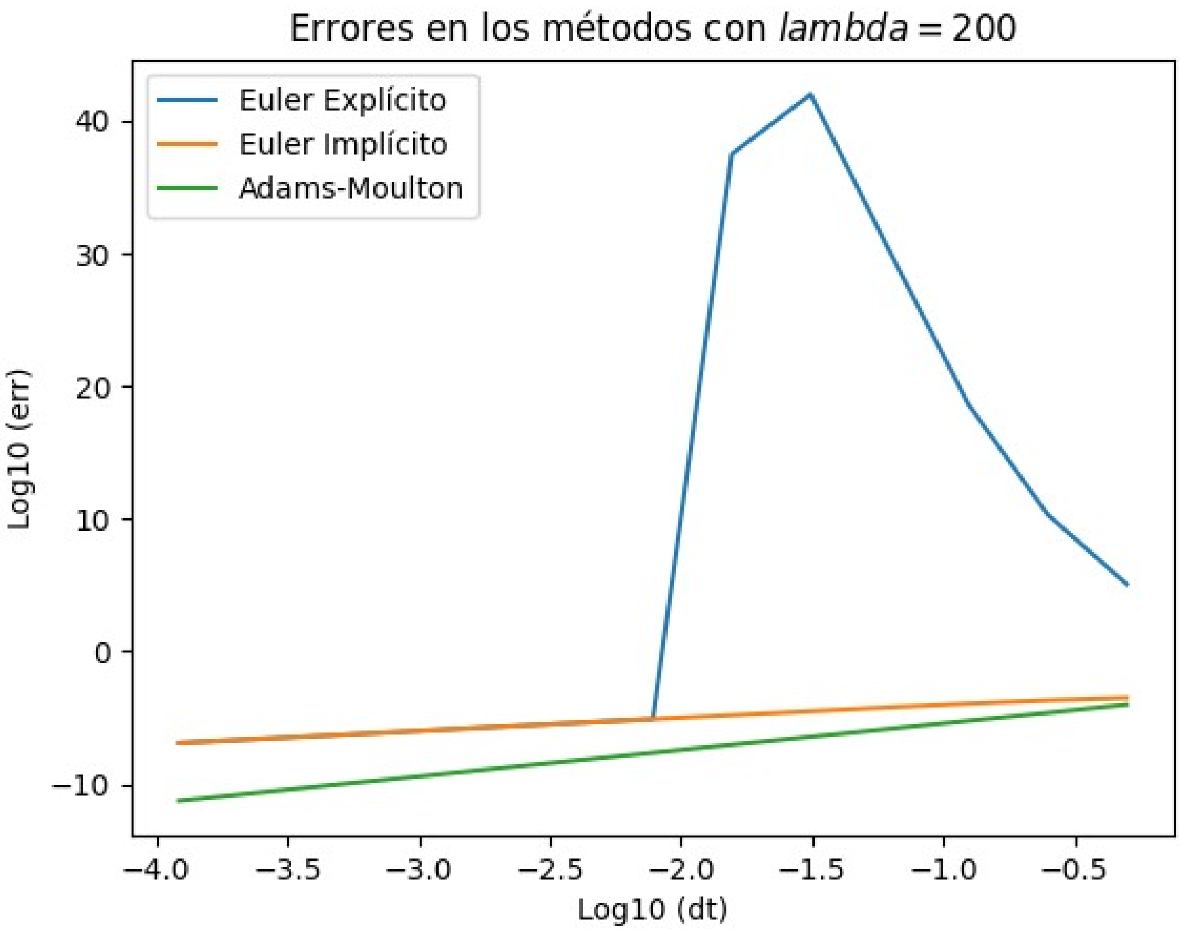
$$\begin{cases} u'(t) = & F(t, u(t))), \quad \text{para } t \in (0, t_F) \\ u(0) = & u_0 \end{cases}$$

$$F(t, u) = -\lambda(u(t) - \cos(t)) - \sin(t)$$

$$|F(u, t) - F(\tilde{u}, t)| = \lambda|u - \tilde{u}|$$

La constante de Lipschitz es $\lambda$

# Ejemplo computacional



# Ejercicio 6 de la práctica 2

Consideremos un problema más sencillo **para entender qué pasa**

$$\begin{cases} u'(t) = & -\lambda u(t), \quad \text{para } t \in (0, t_F) \\ u(0) = & 1 \end{cases}$$

Euler explícito: $$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\lambda u^n$$

Podemos despejar: $$u^n = (1 - \lambda \Delta t)^n u_0, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Si $|1 - \lambda \Delta t| > 1$ entonces $|u_n| \to \infty$

$|u^n| \to 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$, y $\boxed{\Delta t < \frac{2}{\lambda}}$ $\longrightarrow$ "estabilidad"

# Error de truncado de Euler Modificado (Ej. 11)

Euler modificado $\quad \mathrm{u}^{n+1} = u^n + hF\left(t_n + \frac{h}{2}, u^n + \frac{h}{2}F(t_n, u^n)\right)$

**Observación:** es un Runge-Kutta de orden 2, con lo cual vale la teoría

**Por definición:** $\quad \tau_j = \dfrac{u(t_j + h) - u(t_j)}{h} - \Phi(t_j, u(t_j), h) \longrightarrow$ Taylor

$$\Phi = F\left(t_n + \frac{h}{2}, u^n + \frac{h}{2}F(t_n, u^n)\right) = F(t_n, u^n) + F_t(t_n, u^n)\frac{h}{2} + F_y(t_n, u^n)\frac{h}{2}F(t_n, u^n) + O(h^2)$$

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = u'(t) + u''(t)\frac{h}{2} + O(h^2)$$

(porque u'=F(u,t))