Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°3

1. Se tiene el siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} u''(x) - u'(x) & = & x^2 \quad \text{para } x \in (0,1), \\ u(0) & = & 0, \\ u(1) & = & 7. \end{cases}$$

a) Proponer un esquema discreto para resolver el problema usando diferencias finitas.

b) Estimar el error de truncado local del esquema propuesto.

c) Escribir el esquema como un sistema lineal de la forma $Au = b$, indicando quiénes son la matriz A y el vector b, y sus respectivas dimensiones.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Entrega n°3 - Resolución del ejercicio

1*a*) Si usamos la discretización usual de la derivada segunda y diferencias forward para la derivada primera obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} - \dfrac{u_{j+1} - u_j}{h} = x_j^2, \text{ para } 1 \leq j \leq N, \\ u_0 = 0, u_{N+1} = 7, \end{cases}$$

donde $h = \frac{1}{N+1}$ y $x_j = jh$.

1*b*) El error de truncado se obtiene al reemplazar la solución numérica por la real en el esquema, es decir,

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = x^2 + T,$$

donde T es dicho error de truncado. Tenemos que:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(iv)}(\xi_1),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(iv)}(\xi_2),$$

para $x < \xi_1 < x + h$, $x - h < \xi_2 < x$. Sumando miembro a miembro y despejando:

$$\frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{24}[u^{(iv)}(\xi_1) + u^{(iv)}(\xi_2)].$$

Por el Teorema de los Valores Intermedios (si $u^{(iv)}$ es continua) lo podemos escribir más compacto (aunque no es necesario):

$$\frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(iv)}(\xi),$$

para algún ξ, $x - h < \xi < x + h$.

Por otro lado, como

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\eta),$$

despejamos:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(\eta).$$

Seguimos:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} - \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - x^2 \\
&= u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(iv)}(\xi) - u'(x) - \frac{h}{2}u''(\eta) - x^2 \\
&= u''(x) - u'(x) - x^2 + \frac{h^2}{12}u^{(iv)}(\xi) - \frac{h}{2}u''(\eta).
\end{aligned}$$

Como $u''(x) - u'(x) - x^2 = 0$, por ser u la solución exacta:

$$T = \frac{h^2}{12}u^{(iv)}(\xi) - \frac{h}{2}u''(\eta) = O(h).$$

1c) Agrupemos mejor la iteración: $\frac{1}{h^2}u_{j-1} + \left(\frac{1}{h} - \frac{2}{h^2}\right)u_j + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right)u_{j+1} = x_j^2$. De esta forma:

- Si $j = 1$: $0 + \left(\frac{1}{h} - \frac{2}{h^2}\right)u_1 + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right)u_2 = x_1^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{h} - \frac{2}{h^2}\right)u_1 + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right)u_2 = x_1^2$
- Si $j = N$: $\frac{1}{h^2}u_{N-1} + \left(\frac{1}{h} - \frac{2}{h^2}\right)u_N + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h}\right)7 = x_N^2 \Rightarrow \frac{1}{h^2}u_{N-1} + \left(\frac{1}{h} - \frac{2}{h^2}\right)u_N = x_N^2 - \frac{7}{h^2} + \frac{7}{h}$

Luego:

$$A = \begin{pmatrix}
\frac{1}{h} - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & & & \\
\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h} - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & \ddots & \ddots & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} \\
& & & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{h} - \frac{2}{h^2}
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

$$b = \begin{pmatrix}
x_1^2 \\
x_2^2 \\
\vdots \\
x_{N-1}^2 \\
x_N^2 - \frac{7}{h^2} + \frac{7}{h}
\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times 1}.$$