Elementos de Cálculo Numérico/Cálculo Numérico

Clase 4

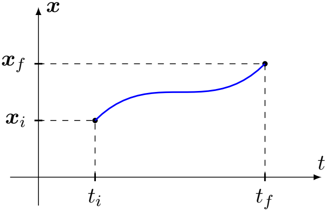
Primer Cuatrimestre 2021

Problemas de valores de frontera

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)), \\ x(t_i) = x_i, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$

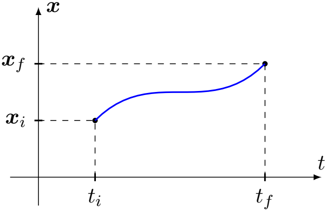
Problemas de valores de frontera

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)), \\ x(t_i) = x_i, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$



Problemas de valores de frontera

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t)), \\ x(t_i) = x_i, \\ x(t_f) = x_f, \end{cases}$$



No sirven los métodos de valores iniciales: Euler, Runge-Kutta, etc.

Ejemplo: oscilador armónico

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(T) = x_T, \end{cases}$$

Ejemplo: oscilador armónico

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2\, x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(T) = x_T, \end{cases}$$

Solución general: $x(t) = A\,\cos(\omega\, t) + B\,\sin(\omega\, t)$

Ejemplo: oscilador armónico

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2\, x(t) = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(T) = x_T, \end{cases}$$

Solución general: $x(t) = A\,\cos(\omega\, t) + B\,\sin(\omega\, t)$

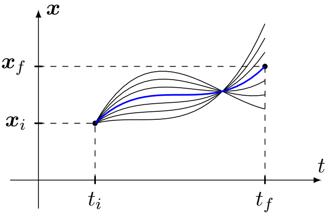
$x(0) = 0 \Longrightarrow A = 0, x_T = B\,\sin(\omega\, T)$

Método de disparo (shooting method)

$$\begin{cases} \ddot{x}(t,\lambda) = f(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda)), \\ x(t_i,\lambda) = x_i, \\ \dot{x}(t_i,\lambda) = \lambda, \end{cases}$$

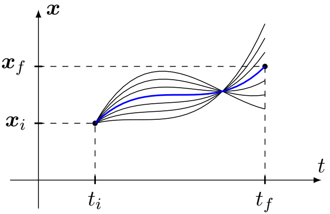
Método de disparo (shooting method)

$$\begin{cases} \ddot{x}(t,\lambda) = f(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda)), \\ x(t_i,\lambda) = x_i, \\ \dot{x}(t_i,\lambda) = \lambda, \end{cases}$$



Método de disparo (shooting method)

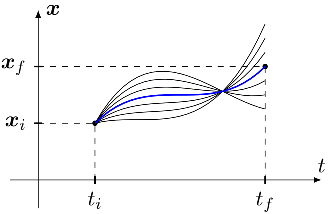
$$\begin{cases} \ddot{x}(t,\lambda) = f(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda)), \\ x(t_i,\lambda) = x_i, \\ \dot{x}(t_i,\lambda) = \lambda, \end{cases}$$



Método de disparo:
hallar λ tal que $x(t_f,\lambda) = x_f$

Método de disparo (shooting method)

$$\begin{cases} \ddot{x}(t,\lambda) = f(t, x(t,\lambda), \dot{x}(t,\lambda)), \\ x(t_i,\lambda) = x_i, \\ \dot{x}(t_i,\lambda) = \lambda, \end{cases}$$



Método de disparo:
hallar λ tal que $x(t_f,\lambda) = x_f$ (resolver la ecuación)

Diferencias finitas

Discretización temporal $[0, T]$: $t_n = nk$, $h = T/N$

Diferencias finitas

Discretización temporal $[0, T]$: $t_n = nk$, $h = T/N$

Diferencia adelantada: $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = \dot{x}(t_n) + O(h)$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \dot{x}(t_n)\,h + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

Diferencias finitas

Discretización temporal $[0,T]$: $t_n = nk$, $h = T/N$

Diferencia adelantada: $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = \dot{x}(t_n) + O(h)$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \dot{x}(t_n)\,h + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

Diferencia atrasada: $\dfrac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h} = \dot{x}(t_n) + O(h)$

$$x(t_{n-1}) = x(t_n) - \dot{x}(t_n)\,h + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

Diferencias finitas

Discretización temporal $[0,T]$: $t_n = nk$, $h = T/N$

Diferencia adelantada: $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} = \dot{x}(t_n) + O(h)$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \dot{x}(t_n)\,h + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

Diferencia atrasada: $\dfrac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h} = \dot{x}(t_n) + O(h)$

$$x(t_{n-1}) = x(t_n) - \dot{x}(t_n)\,h + \frac{\ddot{x}(t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

Diferencia centrada: $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_{n-1})}{2h} = \dot{x}(t_n) + O(h^2)$

Diferencias finitas

Ecuación de segundo orden: $-\ddot{x} + \omega^2\, x = f$

Diferencias finitas

Ecuación de segundo orden: $-\ddot{x} + \omega^2\, x = f$

Diferencias de segunda orden:

$$\frac{x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})}{h^2} = \ddot{x}(t_n) + R(t_n, h)$$

Diferencias finitas

Ecuación de segundo orden: $-\ddot{x} + \omega^2 x = f$

Diferencias de segunda orden:

$$\frac{x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})}{h^2} = \ddot{x}(t_n) + R(t_n, h)$$

Ecuación en diferencias:

$$\begin{cases} -\dfrac{x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})}{h^2} + \omega^2 x(t_n) = f(t_n) + R(t_n, h) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \; x_2 \; x_3 \; \cdots x_{N-2} \; x_{N-1})$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \; x_2 \; x_3 \; \cdots x_{N-2} \; x_{N-1})$$

$$\boldsymbol{f} = (h^2\, f(t_1) + x_0 \quad h^2\, f(t_2) \cdots h^2\, f(t_{N-2}) \quad h^2\, f(t_{N-1}) + x_N)$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \; x_2 \; x_3 \; \cdots x_{N-2} \; x_{N-1})$$

$$\boldsymbol{f} = (h^2 f(t_1) + x_0 \quad h^2 f(t_2) \cdots h^2 f(t_{N-2}) \quad h^2 f(t_{N-1}) + x_N)$$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ \cdots x_{N-2}\ x_{N-1})$$

$$\boldsymbol{f} = (h^2\, f(t_1) + x_0 \quad h^2\, f(t_2) \cdots h^2\, f(t_{N-2}) \quad h^2\, f(t_{N-1}) + x_N)$$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + \omega^2\, h^2\, I_{N-1})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

Errores

$$E_n = x(t_n) - x_n$$

Errores

$$E_n = x(t_n) - x_n$$

Para $n = 1, \ldots, N-1$

$$(2 + \omega^2 h^2)E_n + E_{n+1} + E_{n-1} = h^2\, R(t_n, h)$$

Errores

$E_n = x(t_n) - x_n$

Para $n = 1, \ldots, N-1$

$$(2+\omega^2 h^2)E_n + E_{n+1} + E_{n-1} = h^2\, R(t_n, h)$$

$$(2+\omega^2 h^2)|E_n| - |E_{n+1}| - |E_{n-1}| \leq h^2\, |R(t_n, h)|$$

Errores

$E_n = x(t_n) - x_n$

Para $n = 1, \ldots, N-1$

$$(2 + \omega^2 h^2) E_n + E_{n+1} + E_{n-1} = h^2 \, R(t_n, h)$$

$$(2 + \omega^2 h^2) |E_n| - |E_{n+1}| - |E_{n-1}| \leq h^2 \, |R(t_n, h)|$$

Si $E = \max \{|E_1|, |E_2|, \ldots, |E_{N-1}|\}$

$$E \leq \omega^{-2} \max \{|R(t_1, h)|, \ldots, |R(t_{N-1}, h)|\}$$

Aproximación de la derivada

Discretización espacial: $x_m = mh$, $h = L/M$

Aproximación de la derivada

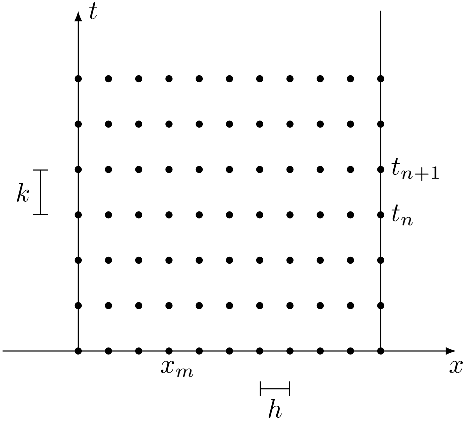
Discretización espacial: $x_m = mh$, $h = L/M$

Discretización temporal: $t_n = nk$, $k = T/N$

Aproximación de la derivada

Discretización espacial: $x_m = mh$, $h = L/M$

Discretización temporal: $t_n = nk$, $k = T/N$



Discretización

Diferencias finitas:

$$u_x(x_m, t_n) \cong \frac{u(x_{m+1}, t_n) - u(x_m, t_n)}{h} \qquad \text{diferencia adelantada}$$

$$u_x(x_m, t_n) \cong \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} \qquad \text{diferencia atrasada}$$

$$u_x(x_m, t_n) \cong \frac{u(x_{m+1}, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{2h} \qquad \text{diferencia centrada}$$

Error de discretización

Diferencia adelantada:

$$u(x_{m+1}, t_n) = u(x_m, t_n) + u_x(x_m, t_n)\, h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\, h^2 + O(h^3)$$

Error de discretización

Diferencia adelantada:

$$u(x_{m+1},t_n) = u(x_m,t_n) + u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

$$\frac{u(x_{m+1},t_n) - u(x_m,t_n)}{h} = u_x(x_m,t_n)\, + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h + O(h^2)$$

Error de discretización

Diferencia adelantada:

$$u(x_{m+1}, t_n) = u(x_m, t_n) + u_x(x_m, t_n)\, h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\, h^2 + O(h^3)$$

$$\frac{u(x_{m+1}, t_n) - u(x_m, t_n)}{h} = u_x(x_m, t_n) + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\, h + O(h^2)$$

Diferencia atrasada:

$$u(x_{m-1}, t_n) = u(x_m, t_n) - u_x(x_m, t_n)\, h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\, h^2 + O(h^3)$$

Error de discretización

Diferencia adelantada:

$$u(x_{m+1},t_n) = u(x_m,t_n) + u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

$$\frac{u(x_{m+1},t_n) - u(x_m,t_n)}{h} = u_x(x_m,t_n) + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h + O(h^2)$$

Diferencia atrasada:

$$u(x_{m-1},t_n) = u(x_m,t_n) - u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 + O(h^3)$$

$$\frac{u(x_m,t_n) - u(x_{m-1},t_n)}{h} = u_x(x_m,t_n) - \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h + O(h^2)$$

Error de discretización

Diferencia centrada:

$$u(x_{m+1}, t_n) = u(x_m, t_n) + u_x(x_m, t_n)\, h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\, h^2 + \frac{u_{xxx}(x_m, t_n)}{6}\, h^3 + O(h^4)$$

Error de discretización

Diferencia centrada:

$$u(x_{m+1}, t_n) = u(x_m, t_n) + u_x(x_m, t_n)\, h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\, h^2 + \frac{u_{xxx}(x_m, t_n)}{6}\, h^3 + O(h^4)$$

$$u(x_{m-1}, t_n) = u(x_m, t_n) - u_x(x_m, t_n)\, h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\, h^2 - \frac{u_{xxx}(x_m, t_n)}{6}\, h^3 + O(h^4)$$

Error de discretización

Diferencia centrada:

$$u(x_{m+1}, t_n) = u(x_m, t_n) + u_x(x_m, t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\,h^2 + \frac{u_{xxx}(x_m, t_n)}{6}\,h^3 + O(h^4)$$

$$u(x_{m-1}, t_n) = u(x_m, t_n) - u_x(x_m, t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m, t_n)}{2}\,h^2 - \frac{u_{xxx}(x_m, t_n)}{6}\,h^3 + O(h^4)$$

$$\frac{u(x_{m+1}, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{2h} = u_x(x_m, t_n) + \frac{u_{xxx}(x_m, t_n)}{6}\,h^2 + O(h^3)$$

Problema de transporte

Planteo ($c > 0$):

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x > 0 \\ u(0,t) = g(t), t > 0 \end{cases}$$

Problema de transporte

Planteo ($c > 0$):

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x > 0 \\ u(0,t) = g(t), t > 0 \end{cases}$$

Condiciones de compatabilidad:

Problema de transporte

Planteo ($c > 0$):

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x > 0 \\ u(0,t) = g(t), t > 0 \end{cases}$$

Condiciones de compatabilidad:

- $u(x,t)$ continua en $(0,0) \Rightarrow f(0) = g(0)$

Problema de transporte

Planteo ($c > 0$):

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x > 0 \\ u(0,t) = g(t), t > 0 \end{cases}$$

Condiciones de compatabilidad:

- $u(x,t)$ continua en $(0,0) \Rightarrow f(0) = g(0)$
- $u_t(0,0) + c\,u_x(0,0) = 0 \Rightarrow g'(0) + c\,f'(0) = 0$

Problema de transporte

Planteo ($c > 0$):

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x > 0 \\ u(0,t) = g(t), t > 0 \end{cases}$$

Condiciones de compatabilidad:

- $u(x,t)$ continua en $(0,0) \Rightarrow f(0) = g(0)$
- $u_t(0,0) + c\,u_x(0,0) = 0 \Rightarrow g'(0) + c\,f'(0) = 0$

Si $v(t) = u(x_0 + c\,t, t)$, entonces $v(t)$ constante

Problema de transporte

Planteo ($c > 0$):

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x > 0 \\ u(0,t) = g(t), t > 0 \end{cases}$$

Condiciones de compatabilidad:

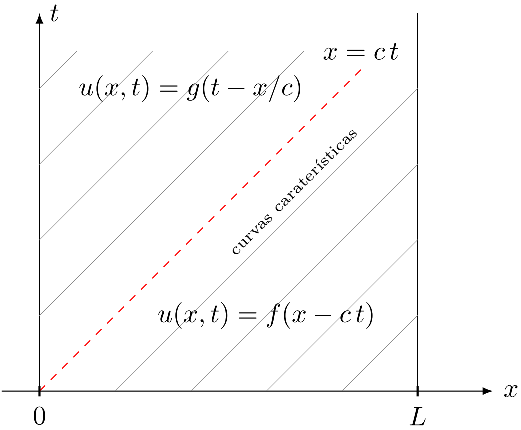
- $u(x,t)$ continua en $(0,0) \Rightarrow f(0) = g(0)$
- $u_t(0,0) + c\,u_x(0,0) = 0 \Rightarrow g'(0) + c\,f'(0) = 0$

Si $v(t) = u(x_0 + c\,t, t)$, entonces $v(t)$ constante

Solución exacta:

$$\begin{cases} u(x,t) = f(x - c\,t) & x > c\,t \\ u(x,0) = g(t - x/c) & x < c\,t \end{cases}$$

Curvas características



Resolución por diferencias finitas

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} + O(h)$$

Resolución por diferencias finitas

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} + O(h)$$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} + O(k)$$

Resolución por diferencias finitas

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} + O(h)$$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} + O(k)$$

Como $u_t(x_m, t_n) + c\, u_x(x_m, t_n) = 0$

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} + c\,\frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} = R_m^{n+1}$$

Resolución por diferencias finitas

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} + O(h)$$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} + O(k)$$

Como $u_t(x_m, t_n) + c\, u_x(x_m, t_n) = 0$

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} + c\, \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} = R_m^{n+1}$$

$R_m^{n+1} = O(h) + O(k)$ (error local de truncamiento)

Resolución por diferencias finitas

$$u_x(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} + O(h)$$

$$u_t(x_m, t_n) = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} + O(k)$$

Como $u_t(x_m, t_n) + c\, u_x(x_m, t_n) = 0$

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} + c\, \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} = R_m^{n+1}$$

$R_m^{n+1} = O(h) + O(k)$ (error local de truncamiento)

$$u(x_m, t_{n+1}) = \left(1 - \frac{c\,k}{h}\right) u(x_m, t_n) + \frac{c\,k}{h} u(x_{m-1}, t_n) + k\, R_m^{n+1}$$

Resolución por diferencias finitas

Método:

$$u_m^{n+1} = (1 - c\,k/h)\; u_m^n + c\,k/h\, u_{m-1}^n$$

Resolución por diferencias finitas

Método:

$$u_m^{n+1} = (1 - c\,k/h)\;u_m^n + c\,k/h\,u_{m-1}^n$$

Condiciones iniciales: $u_m^0 = u(x_m, 0) = f(x_m)$

Resolución por diferencias finitas

Método:

$$u_m^{n+1} = (1 - c\,k/h)\; u_m^n + c\,k/h\,u_{m-1}^n$$

Condiciones iniciales: $u_m^0 = u(x_m, 0) = f(x_m)$

Condición de borde: $u_0^n = u(0, t_n) = g(t_n)$

Resolución por diferencias finitas

Método:

$$u_m^{n+1} = (1 - c\,k/h)\; u_m^n + c\,k/h\, u_{m-1}^n$$

Condiciones iniciales: $u_m^0 = u(x_m, 0) = f(x_m)$

Condición de borde: $u_0^n = u(0, t_n) = g(t_n)$

Error: $E_m^n = |u(x_m, t_n) - u_m^n|$

$$E_m^{n+1} \leq |1 - c\,k/h|\; E_m^n + |c\,k/h|\, E_{m-1}^n + k\, R_m^{n+1}$$

Condición de Courant

Definimos

Condición de Courant

Definimos

- $E^n = \max\limits_{0 \leq m \leq M} E^n_m$

Condición de Courant

Definimos

- $E^n = \max\limits_{0 \le m \le M} E^n_m$
- $R^n = \max\limits_{0 \le m \le M} |R^n_m|$

Condición de Courant

Definimos

- $E^n = \max\limits_{0 \le m \le M} E^n_m$
- $R^n = \max\limits_{0 \le m \le M} |R^n_m|$

Si vale la condición de Courant: $0 < c\,k/h < 1$

Condición de Courant

Definimos

- $E^n = \max\limits_{0 \le m \le M} E_m^n$
- $R^n = \max\limits_{0 \le m \le M} |R_m^n|$

Si vale la condición de Courant: $0 < c\,k/h < 1$

$E^{n+1} \le E^n + k\,R^{n+1}$

Condición de Courant

Definimos

- $E^n = \max\limits_{0 \le m \le M} E_m^n$
- $R^n = \max\limits_{0 \le m \le M} |R_m^n|$

Si vale la condición de Courant: $0 < c\,k/h < 1$

$E^{n+1} \le E^n + k\,R^{n+1}$

Inductivamente

$$E^n \le k(R^1 + \cdots + R^n) \le T \max_{1 \le n \le N} R^n = O(h) + O(k)$$

Inestabilidad

Condición de Courant: $c\,k < h$

Inestabilidad

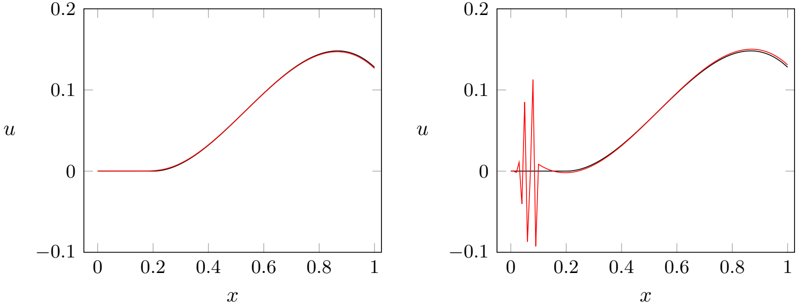
Condición de Courant: $c\,k < h$

Ejemplo: $f(x) = x^2(1-x), g(t) = 0, c = 1, h = 0.01$

Inestabilidad

Condición de Courant: $c\,k < h$

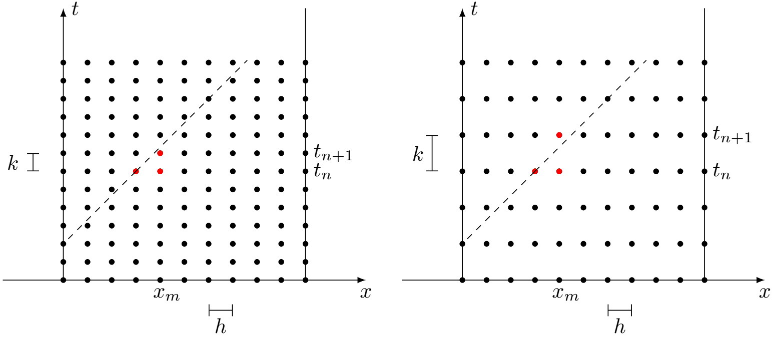
Ejemplo: $f(x) = x^2(1-x), g(t) = 0, c = 1, h = 0.01$



(a) $k = 0.005$ $(n = 40)$. (b) $k = 0.02$ $(n = 10)$.

Fig.: Solución exacta y aproximada para $t = 0.2$.

Interpretación gráfica



(a) Esquema estable: $c\,k < h$ (b) Esquema inestable: $c\,k > h$

Fig.: Condición de Courant para $u_t + c\,u_x = 0$

Transmisión del calor

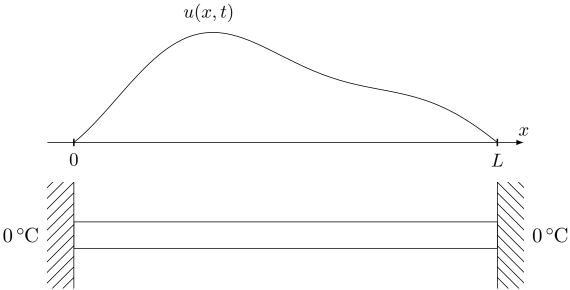
Ecuación del calor: $0 < x < L, t > 0$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

Transmisión del calor

Ecuación del calor: $0 < x < L, t > 0$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$



Discretización de la ecuación del calor

Discretización de u_{xx}

$$u(x_{m+1},t_n) = u(x_m,t_n) + u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 + \frac{u_{xxx}(x_m,t_n)}{6}\,h^3 + \frac{u_{xxxx}(x_m,t_n)}{24}\,h^4 + O(h^5)$$

Discretización de la ecuación del calor

Discretización de u_{xx}

$$u(x_{m+1},t_n) = u(x_m,t_n) + u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 + \frac{u_{xxx}(x_m,t_n)}{6}\,h^3 + \frac{u_{xxxx}(x_m,t_n)}{24}\,h^4 + O(h^5)$$

$$u(x_{m-1},t_n) = u(x_m,t_n) - u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 - \frac{u_{xxx}(x_m,t_n)}{6}\,h^3 + \frac{u_{xxxx}(x_m,t_n)}{24}\,h^4 + O(h^5)$$

Discretización de la ecuación del calor

Discretización de u_{xx}

$$u(x_{m+1},t_n) = u(x_m,t_n) + u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 + \frac{u_{xxx}(x_m,t_n)}{6}\,h^3 + \frac{u_{xxxx}(x_m,t_n)}{24}\,h^4 + O(h^5)$$

$$u(x_{m-1},t_n) = u(x_m,t_n) - u_x(x_m,t_n)\,h + \frac{u_{xx}(x_m,t_n)}{2}\,h^2 - \frac{u_{xxx}(x_m,t_n)}{6}\,h^3 + \frac{u_{xxxx}(x_m,t_n)}{24}\,h^4 + O(h^5)$$

$$\frac{u(x_{m+1},t_n) - 2u(x_m,t_n) + u(x_{m-1},t_n)}{h^2} = u_{xx}(x_m,t_n) + O(h^2)$$

Discretización de la ecuación del calor

Discretización de u_t

$$u(x_m, t_{n+1}) = u(x_m, t_n) + u_t(x_m, t_n)\, k + O(k^2)$$

Discretización de la ecuación del calor

Discretización de u_t

$$u(x_m, t_{n+1}) = u(x_m, t_n) + u_t(x_m, t_n)\, k + O(k^2)$$

Diferencia adelantada

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} = u_t(x_m, t_n) + O(k)$$

Discretización de la ecuación del calor

Discretización de u_t

$$u(x_m, t_{n+1}) = u(x_m, t_n) + u_t(x_m, t_n)\, k + O(k^2)$$

Diferencia adelantada

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} = u_t(x_m, t_n) + O(k)$$

Si $u_t(x_m, t_n) - u_{xx}(x_m, t_n) = 0$

$$\begin{aligned} R_m^{n+1} = & \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} \\ & - \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)}{h^2} \end{aligned}$$

Discretización de la ecuación del calor

Discretización de u_t

$$u(x_m, t_{n+1}) = u(x_m, t_n) + u_t(x_m, t_n)\,k + O(k^2)$$

Diferencia adelantada

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} = u_t(x_m, t_n) + O(k)$$

Si $u_t(x_m, t_n) - u_{xx}(x_m, t_n) = 0$

$$R_m^{n+1} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} - \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)}{h^2}$$

Con $R_m^{n+1} = O(h^2) + O(k)$

Discretización de la ecuación del calor

Método de diferencias finitas

$$0 = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

Discretización de la ecuación del calor

Método de diferencias finitas

$$0 = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

Despejamos: $u_m^{n+1} = (1 - 2\,k/h^2)\,u_m^n + k/h^2\,u_{m+1}^n + k/h^2\,u_{m-1}^n$

Discretización de la ecuación del calor

Método de diferencias finitas

$$0 = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

Despejamos: $u_m^{n+1} = (1 - 2\,k/h^2)\,u_m^n + k/h^2\,u_{m+1}^n + k/h^2\,u_{m-1}^n$

Error global: $E_m^n = |u(x_m, t_n) - u_m^n|$

$$E_m^n \leq |1 - 2\,k/h^2|\,E_m^n + k/h^2\,E_{m+1}^n + k/h^2\,E_{m-1}^n + k\,|R_m^{n+1}|$$

Discretización de la ecuación del calor

Método de diferencias finitas

$$0 = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

Despejamos: $u_m^{n+1} = (1 - 2\,k/h^2)\,u_m^n + k/h^2\,u_{m+1}^n + k/h^2\,u_{m-1}^n$

Error global: $E_m^n = |u(x_m, t_n) - u_m^n|$

$$E_m^n \leq |1 - 2\,k/h^2|\,E_m^n + k/h^2\,E_{m+1}^n + k/h^2\,E_{m-1}^n + k\,|R_m^{n+1}|$$

Condición de Courant: $2\,k < h^2$

Discretización de la ecuación del calor

Método de diferencias finitas

$$0 = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m+1}^n - 2\, u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

Despejamos: $u_m^{n+1} = (1 - 2\, k/h^2)\, u_m^n + k/h^2\, u_{m+1}^n + k/h^2\, u_{m-1}^n$

Error global: $E_m^n = |u(x_m, t_n) - u_m^n|$

$$E_m^n \leq |1 - 2\, k/h^2|\, E_m^n + k/h^2\, E_{m+1}^n + k/h^2\, E_{m-1}^n + k\, |R_m^{n+1}|$$

Condición de Courant: $2\, k < h^2$ muchos pasos temporales!

Discretización de la ecuación del calor

Método de diferencias finitas

$$0 = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

Despejamos: $u_m^{n+1} = (1 - 2\,k/h^2)\,u_m^n + k/h^2\,u_{m+1}^n + k/h^2\,u_{m-1}^n$

Error global: $E_m^n = |u(x_m, t_n) - u_m^n|$

$$E_m^n \leq |1 - 2\,k/h^2|\,E_m^n + k/h^2\,E_{m+1}^n + k/h^2\,E_{m-1}^n + k\,|R_m^{n+1}|$$

Condición de Courant: $2\,k < h^2$ muchos pasos temporales!

$E_m^n \leq (1 - 2\,k/h^2)\,E_m^n + k/h^2\,E_{m+1}^n + k/h^2\,E_{m-1}^n + k\,|R_m^{n+1}|$

Discretización de la ecuación del calor

Error global: $E^n = \max_{0 \leq m \leq M} E_m^n$

Discretización de la ecuación del calor

Error global: $E^n = \max_{0 \leq m \leq M} E_m^n$

$$R^{n+1} = \max_{0 \leq m \leq M} |R_m^{n+1}| = O(h^2) + O(k)$$

Discretización de la ecuación del calor

Error global: $E^n = \max\limits_{0 \leq m \leq M} E_m^n$

$R^{n+1} = \max\limits_{0 \leq m \leq M} |R_m^{n+1}| = O(h^2) + O(k)$

$$E^{n+1} \leq (1 - 2\,k/h^2)\,E^n + k/h^2\,E^n + k/h^2\,E^n + k\,R^{n+1}$$

Discretización de la ecuación del calor

Error global: $E^n = \max\limits_{0 \leq m \leq M} E^n_m$

$R^{n+1} = \max\limits_{0 \leq m \leq M} |R^{n+1}_m| = O(h^2) + O(k)$

$$E^{n+1} \leq (1 - 2\,k/h^2)\,E^n + k/h^2\,E^n + k/h^2\,E^n + k\,R^{n+1}$$

$$E^{n+1} = E^n + k\,R^{n+1}$$

Discretización de la ecuación del calor

Error global: $E^n = \max\limits_{0\leq m\leq M} E^n_m$

$R^{n+1} = \max\limits_{0\leq m\leq M} |R^{n+1}_m| = O(h^2) + O(k)$

$$E^{n+1} \leq (1 - 2\,k/h^2)\,E^n + k/h^2\,E^n + k/h^2\,E^n + k\,R^{n+1}$$

$$E^{n+1} = E^n + k\,R^{n+1}$$

$E^n \leq T \max\limits_{0\leq n\leq N} \max\limits_{0\leq m\leq M} |R^{n+1}_m| = O(k) + O(h^2) = O(h^2)$

Discretización de la ecuación del calor

Si modificamos la ecuación: $u_t = u_{xx} + \beta u$

Discretización de la ecuación del calor

Si modificamos la ecuación: $u_t = u_{xx} + \beta u$

$$u_m^{n+1} = (1 - 2\,k/h^2 + \beta k)\,u_m^n + k/h^2\,u_{m+1}^n + k/h^2\,u_{m-1}^n$$

Discretización de la ecuación del calor

Si modificamos la ecuación: $u_t = u_{xx} + \beta u$

$u_m^{n+1} = (1 - 2\,k/h^2 + \beta k)\,u_m^n + k/h^2\,u_{m+1}^n + k/h^2\,u_{m-1}^n$

$$E^{n+1} \leq (1 + \beta\,k)E^n + k\,R^{n+1}$$

Discretización de la ecuación del calor

Si modificamos la ecuación: $u_t = u_{xx} + \beta u$

$$u_m^{n+1} = (1 - 2\,k/h^2 + \beta k)\,u_m^n + k/h^2\,u_{m+1}^n + k/h^2\,u_{m-1}^n$$

$$E^{n+1} \leq (1 + \beta\,k)E^n + k\,R^{n+1}$$

Inductivamente

$$E^n \leq \Big((1 + \beta\,k)^{n-1} k\,R^1 + (1 + \beta\,k)^{n-2} k\,R^2 + \ldots + k\,R^n\Big)$$

$$E^n \leq \frac{e^{\beta\,n\,k} - 1}{\beta} \max_{1 \leq n \leq N} R^n \leq \frac{e^{\beta\,T} - 1}{\beta} \max_{1 \leq n \leq N} R^n$$

Método implícito

El número de pasos temporales crece rápido con M: $N \sim M^2$

Método implícito

El número de pasos temporales crece rápido con M: $N \sim M^2$

Alternativa: métodos implícitos

Método implícito

El número de pasos temporales crece rápido con M: $N \sim M^2$

Alternativa: métodos implícitos

$$R_m^{n+1} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} - \frac{u(x_{m+1}, t_{n+1}) - 2\,u(x_m, t_{n+1}) + u(x_{m-1}, t_{n+1})}{h^2}$$

Método implícito

El número de pasos temporales crece rápido con M: $N \sim M^2$

Alternativa: métodos implícitos

$$R_m^{n+1} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} - \frac{u(x_{m+1}, t_{n+1}) - 2\,u(x_m, t_{n+1}) + u(x_{m-1}, t_{n+1})}{h^2}$$

$$u(x_m, t_n) + k\,R_m^{n+1} = (1 + 2\,k/h^2)\,u(x_m, t_{n+1}) - k/h^2\,u(x_{m+1}, t_{n+1}) - k/h^2\,u(x_{m-1}, t_{n+1})$$

Método implícito

El número de pasos temporales crece rápido con M: $N \sim M^2$

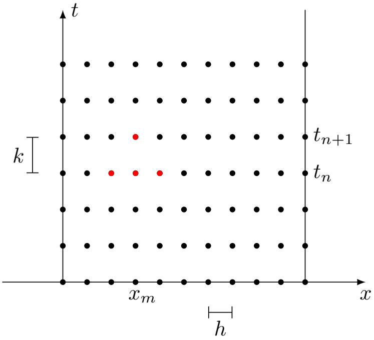
Alternativa: métodos implícitos

$$R_m^{n+1} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{k} - \frac{u(x_{m+1}, t_{n+1}) - 2\,u(x_m, t_{n+1}) + u(x_{m-1}, t_{n+1})}{h^2}$$

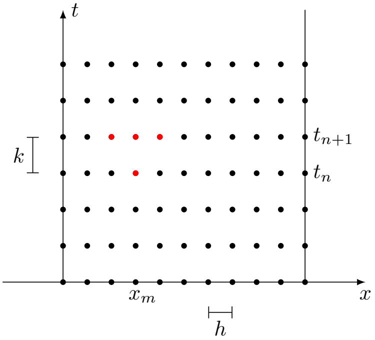
$$u(x_m, t_n) + k\,R_m^{n+1} = (1 + 2\,k/h^2)\,u(x_m, t_{n+1}) - k/h^2\,u(x_{m+1}, t_{n+1}) - k/h^2\,u(x_{m-1}, t_{n+1})$$

$$u_m^n = (1 + 2\,k/h^2)\,u_m^{n+1} - k/h^2\,u_{m+1}^{n+1} - k/h^2\,u_{m-1}^{n+1}$$

Método implícito



(a) Método explícito



(b) Método implícito

Método implícito

Restando

$$(1 + 2\,k/h^2)\,E_m^{n+1} \leq E_m^n + k\,|R_m^{n+1}| + k/h^2\,E_{m+1}^{n+1} + k/h^2\,E_{m-1}^{n+1}$$

Método implícito

Restando

$$
\begin{aligned}
\left(1 + 2\,k/h^2\right) E_m^{n+1} &\leq E_m^n + k\,|R_m^{n+1}| + k/h^2\, E_{m+1}^{n+1} + k/h^2\, E_{m-1}^{n+1} \\
&\leq E^n + k\,R^{n+1} + k/h^2\, E^{n+1} + k/h^2\, E^{n+1}
\end{aligned}
$$

Método implícito

Restando

$$
\begin{aligned}
(1 + 2\,k/h^2)\,E_m^{n+1} &\le E_m^n + k\,|R_m^{n+1}| + k/h^2\,E_{m+1}^{n+1} + k/h^2\,E_{m-1}^{n+1} \\
&\le E^n + k\,R^{n+1} + k/h^2\,E^{n+1} + k/h^2\,E^{n+1}
\end{aligned}
$$

Tomando máximo $m = 0, \ldots, M$

$$
(1 + 2\,k/h^2)\,E^{n+1} \le E^n + k\,R^{n+1} + 2\,k/h^2\,E^{n+1}
$$

Método implícito

Restando

$$\begin{aligned}(1+2\,k/h^2)\,E_m^{n+1} &\leq E_m^n + k\,|R_m^{n+1}| + k/h^2\,E_{m+1}^{n+1} + k/h^2\,E_{m-1}^{n+1}\\ &\leq E^n + k\,R^{n+1} + k/h^2\,E^{n+1} + k/h^2\,E^{n+1}\end{aligned}$$

Tomando máximo $m = 0, \ldots, M$

$$(1+2\,k/h^2)\,E^{n+1} \leq E^n + k\,R^{n+1} + 2\,k/h^2\,E^{n+1}$$

Obtenemos $E^{n+1} \leq E^n + k\,R^{n+1}$

$$E^n \leq T \max_{1\leq n\leq N} R^n = O(h^2) + O(k)$$

Método implícito

Restando

$$
\begin{aligned}
(1+2\,k/h^2)\,E_m^{n+1} &\leq E_m^n + k\,|R_m^{n+1}| + k/h^2\,E_{m+1}^{n+1} + k/h^2\,E_{m-1}^{n+1} \\
&\leq E^n + k\,R^{n+1} + k/h^2\,E^{n+1} + k/h^2\,E^{n+1}
\end{aligned}
$$

Tomando máximo $m = 0, \ldots, M$

$$
(1+2\,k/h^2)\,E^{n+1} \leq E^n + k\,R^{n+1} + 2\,k/h^2\,E^{n+1}
$$

Obtenemos $E^{n+1} \leq E^n + k\,R^{n+1}$

$$
E^n \leq T \max_{1\leq n\leq N} R^n = O(h^2) + O(k)
$$

Incondicionalmente estable

Método implícito

Sistema de ecuaciones en $U^{n+1} = (u_1^{n+1}, \dots, u_{M-1}^{n+1})$ $(u_0^n = u_M^n = 0)$

$$u_m^n = (1 + 2\,k/h^2)\,u_m^{n+1} - k/h^2\,u_{m+1}^{n+1} - k/h^2\,u_{m-1}^{n+1}$$

Método implícito

Sistema de ecuaciones en $U^{n+1} = (u_1^{n+1}, \dots, u_{M-1}^{n+1})$ $(u_0^n = u_M^n = 0)$

$$u_m^n = (1 + 2\,k/h^2)\,u_m^{n+1} - k/h^2\,u_{m+1}^{n+1} - k/h^2\,u_{m-1}^{n+1}$$

En forma matricial: $(I + k/h^2\,A)\,U^{n+1} = U^n$, $A \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$

Método implícito

Sistema de ecuaciones en $U^{n+1} = (u_1^{n+1}, \ldots, u_{M-1}^{n+1})$ $(u_0^n = u_M^n = 0)$

$$u_m^n = (1 + 2\,k/h^2)\, u_m^{n+1} - k/h^2\, u_{m+1}^{n+1} - k/h^2\, u_{m-1}^{n+1}$$

En forma matricial: $(I + k/h^2\, A)\, U^{n+1} = U^n$, $A \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Método implícito

Sistema de ecuaciones en $U^{n+1} = (u_1^{n+1}, \dots, u_{M-1}^{n+1})$ $(u_0^n = u_M^n = 0)$

$$u_m^n = (1 + 2\,k/h^2)\,u_m^{n+1} - k/h^2\,u_{m+1}^{n+1} - k/h^2\,u_{m-1}^{n+1}$$

En forma matricial: $(I + k/h^2\,A)\,U^{n+1} = U^n$, $A \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(I + k/h^2\,A)$ simétrica, tridiagonal

Espectro de A

Definimos $\nu = \pi/M$, para $q = 1, \ldots, M-1$

Espectro de A

Definimos $\nu = \pi/M$, para $q = 1, \ldots, M-1$

$\lambda_q = 2(1-\cos(q\,\nu)) = 4\,\sin^2(q\,\nu/2)$ es autovalor de A

Espectro de A

Definimos $\nu = \pi/M$, para $q = 1, \ldots, M-1$

$\lambda_q = 2(1 - \cos(q\,\nu)) = 4\,\sin^2(q\,\nu/2)$ es autovalor de A

$U_q = (\sin(q\,\nu) \ldots \sin(q\,(M-1)\,\nu))$ autovector asociado

Espectro de A

Definimos $\nu = \pi/M$, para $q = 1, \ldots, M-1$

$\lambda_q = 2(1 - \cos(q\,\nu)) = 4\,\sin^2(q\,\nu/2)$ es autovalor de A

$U_q = (\sin(q\,\nu) \ldots \sin(q\,(M-1)\,\nu))$ autovector asociado

Por el seno de la suma:

$$
\begin{aligned}
\sin\left(q\,(m+1)\,\nu\right) &= \cos\left(q\,\nu\right)\sin\left(q\,m\,\nu\right) + \sin\left(q\,\nu\right)\cos\left(q\,m\,\nu\right)\\
\sin\left(q\,(m-1)\,\nu\right) &= \cos\left(q\,\nu\right)\sin\left(q\,m\,\nu\right) - \sin\left(q\,\nu\right)\cos\left(q\,m\,\nu\right)\\
\sin\left(q\,(m+1)\,\nu\right) + \sin\left(q\,(m-1)\,\nu\right) &= 2\cos\left(q\,\nu\right)\sin\left(q\,m\,\nu\right)
\end{aligned}
$$

Espectro de A

Definimos $\nu = \pi/M$, para $q = 1, \ldots, M-1$

$\lambda_q = 2(1-\cos(q\,\nu)) = 4\,\sin^2(q\,\nu/2)$ es autovalor de A

$U_q = (\sin(q\,\nu)\ldots\sin(q\,(M-1)\,\nu))$ autovector asociado

Por el seno de la suma:

$$
\begin{aligned}
\sin\left(q\,(m+1)\,\nu\right) &= \cos\left(q\,\nu\right)\sin\left(q\,m\,\nu\right) + \sin\left(q\,\nu\right)\cos\left(q\,m\,\nu\right)\\
\sin\left(q\,(m-1)\,\nu\right) &= \cos\left(q\,\nu\right)\sin\left(q\,m\,\nu\right) - \sin\left(q\,\nu\right)\cos\left(q\,m\,\nu\right)\\
\sin\left(q\,(m+1)\,\nu\right) + \sin\left(q\,(m-1)\,\nu\right) &= 2\cos\left(q\,\nu\right)\sin\left(q\,m\,\nu\right)
\end{aligned}
$$

$0 < \nu^2 \lesssim \lambda_q < 4$

Método Crank-Nicolson

Método de diferencias finitas

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2\,u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

Método Crank-Nicolson

Método de diferencias finitas

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2\,u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

En forma matricial:

Método Crank-Nicolson

Método de diferencias finitas

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2\,u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

En forma matricial:

$$\left(I + \frac{k}{2h^2}A\right)U^{n+1} = \left(I - \frac{k}{2h^2}A\right)U^n$$

Método Crank-Nicolson

Método de diferencias finitas

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{m+1}^n - 2\,u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2\,u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

En forma matricial:

$$\left(I + \frac{k}{2h^2}A\right)U^{n+1} = \left(I - \frac{k}{2h^2}A\right)U^n$$

$$U^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2h^2}A\right)^{-1} \cdot \left(I - \frac{k}{2h^2}A\right)U^n$$

Estabilidad

Método de diferencias finitas:

Estabilidad

Método de diferencias finitas:

$$\left(1+\frac{k}{h^2}\right)u_m^{n+1}=\frac{k}{2h^2}\left(u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}\right)+\left(1-\frac{k}{h^2}\right)u_m^n$$
$$+\frac{k}{2h^2}\left(u_{m+1}^n+u_{m-1}^n\right)$$

Estabilidad

Método de diferencias finitas:

$$\left(1+\frac{k}{h^2}\right)u_m^{n+1}=\frac{k}{2h^2}\left(u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}\right)+\left(1-\frac{k}{h^2}\right)u_m^n$$
$$+\frac{k}{2h^2}\left(u_{m+1}^{n}+u_{m-1}^{n}\right)$$

Error

$$\left(1+\frac{k}{h^2}\right)E^{n+1}\leq\frac{k}{h^2}E^{n+1}+E^n+kR^n$$

Estabilidad

Método de diferencias finitas:

$$\left(1+\frac{k}{h^2}\right)u_m^{n+1} = \frac{k}{2h^2}\left(u_{m+1}^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}\right)+\left(1-\frac{k}{h^2}\right)u_m^n + \frac{k}{2h^2}\left(u_{m+1}^{n}+u_{m-1}^{n}\right)$$

Error

$$\left(1+\frac{k}{h^2}\right)E^{n+1} \leq \frac{k}{h^2}E^{n+1}+E^n+kR^n$$

$$E^{n+1}\leq E^n+kR^n \Longrightarrow \max_{1\leq n\leq N} E^n \leq T \max_{1\leq n\leq N} R^n$$