$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f\, g\, |x|\, dx$$

a) G_2

b) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx \qquad w(x) = |x|$

$P_0(x) = c_0$

$P_1(x) = c_1 x$

$P_2(x) = c_2 (x^2 - a) \qquad x_0 = -r \quad x_1 = r \qquad r \in (0,1)$

$G_2(f) = A_0 f(-r) + A_1 f(r)$

$G_2(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} |x|\, dx \cong G_2\left(e^{-x^2}\right) = e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

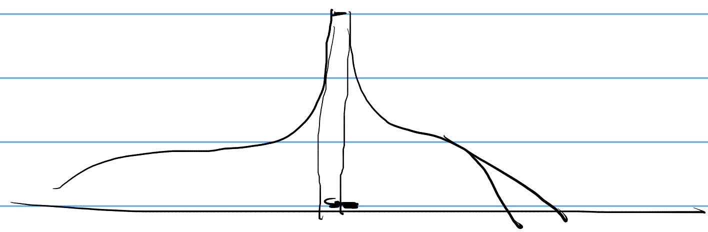
Podemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-x^2}}{|x|} |x| \, dx \approx G_2\left(\frac{e^{-x^2}}{|x|}\right)$$

f continua $\qquad \int f(x)\, w(x)\, dx < \infty$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} e^{-x^2} + \int_{\varepsilon}^{1} e^{-x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{e^{-x^2}}{|x|} |x| \, dx + \int_{\varepsilon}^{1} e^{-x^2} =$$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2}}{|x|} & |x| > \varepsilon \\ 0 & |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$



$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{1} f_\varepsilon(x)\, w(x)\, dx \approx \lim_{\varepsilon \to 0} G_2(f_\varepsilon) = G_2(f)$$

$$G_2\left(\frac{e^{-x^2}}{|x|}\right) = \frac{e^{-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|} + \frac{e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|} = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}$$

$$Q_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, w_j$$

$$g : [c,d] \to \mathbb{R}$$

$$h : [a,b] \to [c,d] \qquad f = g \circ h : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$h(x_j) = y_j \qquad f(x_j) = g(h(x_j)) = g(y_j)$$

h'

$y = h(x)$

$$\int_c^d g(y)\, \tilde{w}(y)\, dy = \int_a^b g(h(x))\, \underbrace{\tilde{w}(h(x))\, h'(x)}_{w(x)}\, dx$$

Ejercicio 14 Sea $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva. Se tiene una fórmula de cuadratura en el intervalo $[a,b]$ de la forma:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \sim \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i). \quad (1)$$

Aplicando un cambio de variables, obtener, a partir de (1), una cuadratura para el intervalo $[c,d]$, de la forma

$$\int_c^d f(x)w(x) \sim \sum_{i=1}^{n} B_i f(y_i).$$

Calcular los coeficientes B_i en función de los A_i y los nodos y_i en función de los x_i. ¿Tiene la

me est
mare
esto

Ejercicio 14 Sea $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva. Se tiene una fórmula de cuadratura en el intervalo $[a, b]$ de la forma:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \sim \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i). \quad (1)$$

Aplicando un cambio de variables, obtener, a partir de (1), una cuadratura para el intervalo $[c, d]$, de la forma

$$\int_c^d f(x)w(x) \sim \sum_{i=1}^{n} B_i f(y_i).$$

Calcular los coeficientes B_i en función de los A_i y los nodos y_i en función de los x_i. ¿Tiene la cuadratura en $[c, d]$ el mismo grado de precisión que la cuadratura en $[a, b]$?

me est
marc
esto

$w(x) = x^2 \qquad [0,1] \longrightarrow [2,3]$

$h : [a,b] \longrightarrow [c,d] \qquad h(x)$ ~~lin~~ $h'(x) > 0$

$h(a) = c$

$h(b) = d$

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \longrightarrow \int_c^d g(y)\, \Omega(y)\, dy$$

$$\int_a^b g(h(x))\, \Omega(h(x))\, h'(x)dx$$

$$h'(x) = \lambda \frac{w(x)}{\Omega(h(x))} \longrightarrow h \quad \text{ec dif}$$

$\overline{P_0, P_1}, \ldots, P_n, P_{n+1}$

Q_0, Q_1, Q_2

$Q_1 \perp Q_0 \Rightarrow Q_1 \perp P_0 \Rightarrow Q_1 // P_1 \quad Q_1 = c_1 P_1$

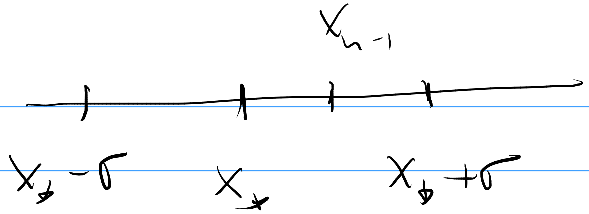
$V_0, V_1 \ldots V$

$U_0 = \frac{V_0}{\|V_0\|} \qquad U_1 = V_1 - \frac{\langle V_1, V_0 \rangle V_0}{\|V_0\|^2}$

$U_1 = V_1 - \langle V_1, U_0 \rangle U_0$

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \phi(x) = x$

$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \phi(x) = x \Leftrightarrow \cancel{x} - \frac{f(x)}{f'(x)} = \cancel{x} \Leftrightarrow f(x) = 0$



$c_1 = \min\limits_{[\ \ ]} |f'(x)|$ $\qquad c_2, c_1, r$

$c_2 = \max\limits_{[\ \ ]} |f''(x)|$ $\qquad |e_{n-1}| \le r$

$$|e_n| \le \frac{|f''(\xi)|}{2|f'(x_{n-1})|} |e_{n-1}|^2 \le \frac{c_2 r}{2c_1} \cdot |e_{n-1}|$$

$L < 1$

$$|x_* - x_n| \le L\, |x_* - x_{n-1}|$$

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$\phi'(x) = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{f(x)}{f'(x)} \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

$r/2 \le$

$$|\phi'(x)| \le \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \frac{c_2}{c_1} < 1$$

$$f(x) = \underbrace{f(x^*)}_{0} + f'(s)(x - x^*)$$

$$|f(x)|$$

$$\min \|Ax - b\| \Rightarrow A^T A x = A^T b$$

$$\|Ax - b\|^2 = (Ax - b) \cdot (Ax - b)$$

$$= \underbrace{Ax \cdot Ax}_{x^T A^T A x} - \underbrace{Ax \cdot b - b \cdot Ax}_{-2\underbrace{Ax \cdot b}_{x^T \cdot A^T b}} + b \cdot b$$

$$+ b \cdot b$$

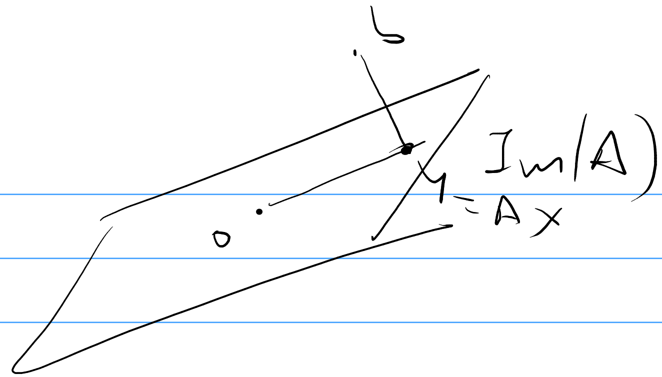
$$(x_1 \quad x_n)\, A^T \cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_j \sum_l \sum_k a_{jk} a_{kl} x_j x_l$$

$$\nabla_x \|Ax - b\|^2 = 2A^T A x - 2A^T b = 0$$

$$H_x \|Ax - b\|^2 = 2A^T A \quad \text{semidef } +$$

$$\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^{T})$$



$$b - Ax \in \mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^{T})$$

$$A^{T}(b - Ax) = 0$$