Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico - Primer Parcial

Primer Cuatrimestre 2021 (13/05/2021)

Nombre y Apellido	1	2	3	4	Nota

Justificar todas las respuestas y explicitar los cálculos o aclarar cómo se obtuvieron los resultados.

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Se desea resolver el problema $Ax = b$ para $b = (3, 5, 6)^t$. Para esto se considera la descomposición QR de A, dada por las matrices

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcular x a partir del cálculo $x = A^{-1}b$. Calcular las entradas de A^{-1} a partir del sistema $A^{-1}A = I_3$, trabajando con base 10, mantisa de 3 dígitos y método de redondeo.

   b) Calcular x, despejando sus entradas en el sistema $Rx = Q^t b$, trabajando con base 10, mantisa de 3 dígitos y método de redondeo.

2. Dado el problema: $\begin{cases} y'(t) &= 4t^2 \operatorname{sen}(t + 2y(t)), \\ y(0) &= 0 \end{cases}$.

   a) Expresar la iteración del método de Euler correspondiente a este problema.

   b) Estimar el error de truncado local para $t \in [0, 1]$.

   c) Hallar una cota para el paso h que garantice que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-2}.

3. Se considera el siguiente problema de evolución, dado por la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 5u_x(x,t) = 0, \quad x \in (0,1), t \in (0,1), \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad x \in [0,1], \\ u(1,t) = 0, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

   a) Discretizar el problema usando diferencias adelantadas con paso h en x y diferencias adelantadas con paso k en t, y escribir el esquema explícito como un sistema lineal de la forma $u^{j+1} = Au^j$, indicando cuál es la matriz A, el vector u^0 y sus respectivas dimensiones.

   b) Hallar condiciones sobre $\nu = \frac{k}{h}$ que garanticen la estabilidad del método en norma infinito.

4. Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, la matriz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

   Calcular $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{cond}_1(A_n)$ y $\lim_{n \to +\infty} \operatorname{cond}_2(A_n)$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2021
Resolución del primer parcial

1*a*) Calculemos primero A^{-1}, trabajando con base 10, mantisa de 3 dígitos y método de redondeo. Primero notemos que las entradas de A son números de máquina. Como $A^{-1}A = I_3$, si $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

- $\boxed{\alpha_{13} = 1}$, $2\alpha_{12} + 2\alpha_{13} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = -fl(2/2) = -fl(1) \Rightarrow \boxed{\alpha_{12} = -1}$, $3\alpha_{11} + 3\alpha_{12} + 3\alpha_{13} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = -fl(fl(3-3)/3) \Rightarrow \boxed{\alpha_{11} = 0}$,
- $\boxed{\alpha_{23} = 0}$, $2\alpha_{22} + 2\alpha_{23} = 1 \Rightarrow \alpha_{22} = fl(1/2) = fl(0{,}5) \Rightarrow \boxed{\alpha_{22} = 0{,}5}$, $3\alpha_{21} + 3\alpha_{22} + 3\alpha_{23} = 0 \Rightarrow \alpha_{21} = -fl(fl(3 * 0{,}5)/3) = -fl(1{,}5/3) - fl(0{,}5) \Rightarrow \boxed{\alpha_{21} = -0{,}5}$,
- $\boxed{\alpha_{33} = 0}$, $2\alpha_{32} + 2\alpha_{33} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_{32} = 0}$, $3\alpha_{31} + 3\alpha_{32} + 3\alpha_{33} = 1 \Rightarrow \alpha_{31} = fl(1/3) = fl(0{,}3333\ldots) \Rightarrow \boxed{\alpha_{33} = 0{,}333}$.

Y por lo tanto A^{-1} la calculamos como $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}333 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y calculamos $x_1 = fl(-5+6) = 1$, $x_2 = fl(fl(-0{,}5*3) + fl(0{,}5*5)) = fl(-1{,}5+2{,}5) = 1$, $x_3 = fl(0{,}333*3) = fl(0{,}999) = 0{,}999$. Es decir, nos queda $x = (1, 1, 0{,}999)$.

1*b*) Primero notemos que las entradas de R son números de máquina y que $Q^t b = (6, 5, 3)^t$. Tenemos entonces el sistema:

- $3x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = fl(3/3) \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$,
- $2x_2 + 3x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = fl(fl(5 - fl(3x_3))/2) = -fl(fl(5-3)/2) \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$.
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \Rightarrow x_1 = fl(6 - fl(fl(2x_2) + fl(3x_3))) = fl(6-5) \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$.

Es decir: $\boxed{x = (1; 1; 1)^t}$, que es la solución exacta.

2*a*) La iteración del método de Euler con paso h es:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h4t_i^2 \operatorname{sen}(t_i + 2y_i), \text{ para } 0 \le i \le N-1, \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

2*b*) El error de truncado local para el método de Euler es $\tau_i = \frac{h}{2} y''(\xi_i)$, para $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $0 \le i \le N-1$. Como $y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(4t^2 \operatorname{sen}(t + 2y(t))) = 8t \operatorname{sen}(t + 2y(t)) + 4t^2 \cos(t + 2y(t))[1 + 8t^2 \operatorname{sen}(t + 2y(t))]$, tenemos:

$$\tau = \frac{h}{2} y''(\xi) = \frac{h}{2}\Big(8\xi \operatorname{sen}(\xi + 2y(\xi)) + 4\xi^2 \cos(\xi + 2y(\xi))[1 + 8\xi^2 \operatorname{sen}(\xi + 2y(\xi))]\Big).$$

Para acotar esta expresión (en módulo) debemos considerar que $\xi \in [0,1]$ y por lo tanto $|\xi| < 1$, y que $|\cos(z)| \leq 1$, $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1$ para cualquier argumento z. Luego:

$$|\tau| \leq \frac{h}{2}\Big(8 + 4[1+8]\Big) = 22h.$$

De esta forma, el valor máximo que puede tomar $|\tau|$, τ_{MAX}, se puede acotar por $\tau_{MAX} \leq 22h$.

2c) Para encontrar un valor del paso h para que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-2}, debemos trabajar con el error *global* del método. Esto es, $|e_N| = |y(t_f) - y_N|$, donde t_f es el tiempo final y $N = (t_f - t_0)/h$ para t_0 el tiempo inicial. Sabemos que

$$|e_N| \leq \frac{\tau_{MAX}}{K}(e^{K(t_f - t_0)} - 1),$$

donde, para el método de Euler, K es tal que es independiente de t y de h y vale que $|f(t,y) - f(t,z)| \leq K|y-z|$.

Veamos entonces que $\phi(t,y,h) = f(t,y) = 4t^2 \operatorname{sen}(t+2y)$ es Lipschitz respecto de la segunda variable:

$$\begin{aligned} |\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| &= |4t^2 \operatorname{sen}(t+2y) - 4t^2 \operatorname{sen}(t+2z)| \\ &= |4t^2||\operatorname{sen}(t+2y) - \operatorname{sen}(t+2z)| \\ &\underset{TVM}{=} |4t^2||2\cos(t+2\xi)||y-z| \underset{t\in[0,1]}{\leq} 8|y-z|, \end{aligned}$$

por lo que podemos tomar $K = 8$. De esta forma, nos queda:

$$|e_N| \leq \frac{\tau_{MAX}}{K}(e^{K(1-0)} - 1) \leq \frac{22h}{8}(e^8 - 1) = \frac{11}{4}(e^8 - 1)h.$$

Ahora busquemos un valor de h para que este error sea menor que 10^{-2}:

$$\frac{11}{4}(e^8 - 1)h < 10^{-2} \Leftrightarrow h < \frac{4}{1100(e^8 - 1)} \sim 0{,}00000122.$$

Por lo tanto, cualquier $h < 0{,}00000122$ sirve para tal propósito.

3a) Con diferencias adelantadas en x y adelantadas en t obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - 5\dfrac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} = 0, \text{ para } 0 \leq j \leq M-1, 0 \leq i \leq N-1, \\ u_i^0 = \operatorname{sen}(\pi x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \\ u_N^j = 0, \quad 0 \leq j \leq M, \end{cases}$$

donde $h = \frac{1}{N}$, $k = \frac{1}{M}$ y $x_i = ih$.

Si multiplicamos la primera expresión por k y llamamos $\nu = \frac{k}{h}$, tenemos:

$$u_i^{j+1} - u_i^j - 5\nu(u_{i+1}^j - u_i^j) = 0.$$

Reacomodando:

$$u_i^{j+1} = 5\nu u_{i+1}^j + (1 - 5\nu)u_i^j$$

Para $\begin{array}{rl} i=0,\dots,N-2 & u_i^{j+1} = 5\nu u_{i+1}^j + (1-5\nu)u_i^j, \\ i=N-1 & u_{N-1}^{j+1} = (1-5\nu)u_{N-1}^j, \end{array}$ y esto nos lleva al sistema matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix}}_{u^{j+1}\in\mathbb{R}^N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-5\nu & 5\nu & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1-5\nu & 5\nu & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1-5\nu & 5\nu \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1-5\nu \end{pmatrix}}_{A\in\mathbb{R}^{N\times N}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix}}_{u^{j}\in\mathbb{R}^N},$$

y $u^0 = (\operatorname{sen}(0), \operatorname{sen}(\pi h), \dots, \operatorname{sen}(\pi(N-1)h)) \in \mathbb{R}^N$.

3*b*) Para asegurar estabilidad en norma infinito, estudiemos $\|A\|_\infty = \max\{|1-5\nu|, |5\nu|+|1-5\nu|\} = |5\nu|+|1-5\nu| \underset{\nu>0}{=} 5\nu+|1-5\nu|$. Para asegurar estabilidad en norma infinito, pedimos $\|A\|_\infty \leq 1$:

$$5\nu + |1-5\nu| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; |1-5\nu| \leq 1-5\nu \;\Leftrightarrow\; 1-5\nu \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \nu \leq \frac{1}{5}.$$

---

4) Tenemos que $\|A_n\|_1 = n^2$. Vamos a usar el resultado de la Práctica 4 (Ejercicio 6) que nos indica que

$$\operatorname{cond}_{\|.\|}(A_n) \geq \frac{\|A_n\|}{\|A_n - B_n\|},$$

para cualquier matriz B_n singular del tamaño correspondiente. Sea B_n la siguiente matriz que es como A_n pero cuya primera columna tiene todas sus entradas nulas:

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces que B_n es singular y $\|A_n - B_n\|_1 = 2$. Luego,

$$\operatorname{cond}_1(A_n) \geq \frac{n^2}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

Por la equivalencia de las normas matriciales en $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\|M\|_2 \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}\|M\|_1$. Por lo tanto:

$$\operatorname{cond}_2(A_n) = \|A_n\|_2\|A_n^{-1}\|_2 \geq \frac{1}{n}\|A_n\|_1\|A_n^{-1}\|_1 = \frac{1}{n}\operatorname{cond}_1(A_n) \geq \frac{1}{n}\frac{n^2}{2} = \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$