Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2021

Quinto ejercicio computacional
26/04/21 al 03/05/21
Recuerde subir el archivo en formato ejercicioX_NOMBREAPELLIDO.py
Recuerde enviar su código al hacer consultas

Para realizar este trabajo, es recomendable mirar el vídeo *Recursos básicos de matrices* por Ariel Salgado, donde se explica cómo operar con matrices utilizando `numpy`. Además, utilizaremos la librería `imageio` para generar archivos `.gif`. Si no sabe cómo instalar una librería de Python, se recomienda realizar el trabajo en *replit*, donde la instalación se lleva a cabo automáticamente cuando se corre el *script*.

En este ejercicio, resolveremos numéricamente un problema que involucra a la ecuación de transporte, que analizamos en la clase práctica del 15/04. El problema que resolveremos es el siguiente:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a u_x(x,t) = 0 \qquad a \in \mathbb{R}, a > 0, x \in (0, X_F], t \in (0, T_F] \\ u(0,t) = g(t) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Comenzamos discretizando $[0, X_F]$ en N intervalos de longitud h y $[0, T_F]$ en M intervalos de longitud k. Luego, hemos visto que utilizar la diferencia *forward* para aproximar u_t y la diferencia *backward* para aproximar u_x da lugar al siguiente método, conocido como método *upwind*:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + a\frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = 0$$

Despejando el término correspondiente al siguiente paso temporal, obtenemos que:

$$u_i^{j+1} = a\frac{k}{h}u_{i-1}^j + \left(1 - a\frac{k}{h}\right) u_i^j$$

Y se puede plantear el problema matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix}}_{u^{j+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - a\frac{k}{h} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a\frac{k}{h} & 1 - a\frac{k}{h} & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a\frac{k}{h} & 1 - a\frac{k}{h} \end{bmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^j \end{bmatrix}}_{u^j} + \underbrace{\begin{bmatrix} a\frac{k}{h}g(t_j) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{g^j}$$

Por lo tanto, si conocemos u^j, podemos calcular u^{j+1} de la siguiente manera:

$$u^{j+1} = Au^j + g^j$$

También hemos visto que si $k \leq \dfrac{h}{a}$ (o, equivalentemente, $M \geq aN\dfrac{T_F}{X_F}$) entonces el método es estable y convergente.

Al finalizar este ejercicio, habremos implementado el método upwind para resolver el problema y generar un archivo `.gif` que nos permita comparar la solución numérica del problema con la solución exacta: $u(x,t) = f(x - at)$. Para esto, se sugiere fuertemente que utilice como plantilla el script adjunto.

a) Implementar la función `matriz_A(k, h, N, a)` que genere la matriz A. Esta función debe devolver una matriz.

b) Implementar la función `vector_g(j, k, h, N, a, g)` que genere el vector g^j.

c) Implementar la función `calcular_u0(h, N, f)` que genere el vector de valores iniciales u^0.

d) Implementar la función `upwind(tf, xf, a, g, f, N, M, nombre_gif)` que resuelve numéricamente el problema de la ecuación de transporte y genera el archivo `.gif` con la animación que compara la evolución de la solución numérica y de la solución exacta. `tf` es T_F, `xf` es X_F y `nombre_gif` es el nombre que se le quiere dar al archivo generado por la función.

e) Utilizar la función `upwind` del ítem anterior para resolver el problema con los siguientes parámetros y generar el archivo `ITEM_E.gif`:

$$a = 1 \quad g(t) = 0 \quad f(x) = e^{-10(4x-1)^2} \quad T_F = 1.5 \quad X_F = 2 \quad N = 200 \quad M = 150$$

f) Resolver el mismo problema que en el ítem anterior, pero tomando $M = 140$ y generando el archivo `ITEM_F.gif`. ¿Qué se observa? ¿Por qué ocurre esto?

g) Resolver el mismo problema que en el ítem *e)*, pero tomando $N = 180$ y generando el archivo `ITEM_G.gif`. ¿Qué se observa? Los valores de M y de N. ¿cumplen con la condición de estabilidad y convergencia? ¿Contradice esto la convergencia del método? Observar que en la condición de estabilidad y convergencia, $\frac{M}{N} \geq a\frac{T_F}{X_F}$, los valores de N y de M de este item la cumplen por $>$ mientras que con los valores de N y de M del ítem *e)* se cumple con $=$.

h) Resolver el mismo problema que en el ítem *e)*, pero tomando $a = -1$ y $f(x) = e^{-10(4x-6)^2}$ y generando el archivo `ITEM_H.gif`. ¿Qué se observa? Esto ocurre porque, si $a < 0$, el método que propusimos es siempre inestable.