Investigación Operativa - Clase 1

Introducción a Programación Lineal y modelización

Nazareno Faillace Mullen

2° Cuatrimestre 2025

Departamento de Matemática - FCEN - UBA

Cronograma

- $19/08 \to \mathbf{05/09}$: Cómo modelar problemas con Programación Lineal
- $09/09 \to \mathbf{03/10}$: SIMPLEX y Branch & Bound
- $07/10 \to 28/10$: Optimización no lineal
- $31/10 \to \mathbf{18/11}$: Teoría de grafos
- $21/11 \to 05/12$: Aplicaciones (teórica) y Consultas de TPs y recus (práctica)
- $09/12, 16/12$ y $23/12$: recuperatorios

Para aprobar la parte práctica de la materia:

- Tres parciales
- Un TP de implementación de Programación Lineal
- Un TP teórico-práctico sobre optimización no lineal

La materia es promocionable.

(Abuso de) Notación

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$, si $u_i \leq v_i \; \forall\, i = 1, \dots, n$ vamos a notarlo $u \leq v$.

Ejemplos:

1. $x \geq 0$ significa que $x_i \geq 0 \; \forall\, i = 1, \dots, n$
2. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   $Ax \leq b$ significa que:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq -3 \\ 4x_1 - x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Formulación canónica

Sean $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$

Programación Lineal (PL)

$$
\begin{array}{ll}
\max & c^T x \\
\text{s.a:} & Ax \leq b \\
& x \geq 0 \\
& (x \in \mathbb{R}^n)
\end{array}
$$

Programación Lineal Entera (PLE)

$$
\begin{array}{ll}
\max & c^T x \\
\text{s.a:} & Ax \leq b \\
& x \geq 0 \\
& x \in \mathbb{Z}^n
\end{array}
$$

Formulación canónica

Sean $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$

Programación Lineal Entera Binaria

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}^n \end{aligned}$$

Programación Lineal Entera Mixta

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ \text{s.a:} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I \\ & x_j \in \mathbb{R} \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

Problema $\to$ Plantear modelo $\to$ Resolver modelo


Pensando en el modelo
Escribiendo el modelo

Componentes de un problema lineal

- **Variables** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
  - Reales
  - Enteras
  - Binarias
- **Parámetros**: datos conocidos del problema
- **Función objetivo**: función que queremos maximizar o minimizar. Es **combinación lineal** de las variables:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = c^Tx$$

- **Restricciones**: se expresan como una igualdad o desigualdad entre una **combinación lineal** de las variables y b_i un número real:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

Ejemplo

Una fábrica de pintura quiere producir P_I y P_E. Para producir una tonelada de P_I necesita 6 toneladas del material M_1 y una de material M_2. Por cada tonelada de P_E necesita 4 toneladas de M_1 y 2 de M_2. La fábrica dispone diariamente de 24 toneladas de M_1 y 6 de M_2.

Por otro lado, se sabe que diariamente se venden a lo sumo 2 toneladas de P_I y lo que se vende de P_E es a lo sumo la cantidad producida de P_I mas una tonelada. La fábrica vende todo lo que produce y no quiere quedarse con excedente.

Teniendo en cuenta que la fábrica gana 5 por tonelada de P_I y 4 por tonelada de P_E, decidir la cantidad de pintura de cada tipo que debe producir para maximizar su ganancia.

Soluciones de un PL

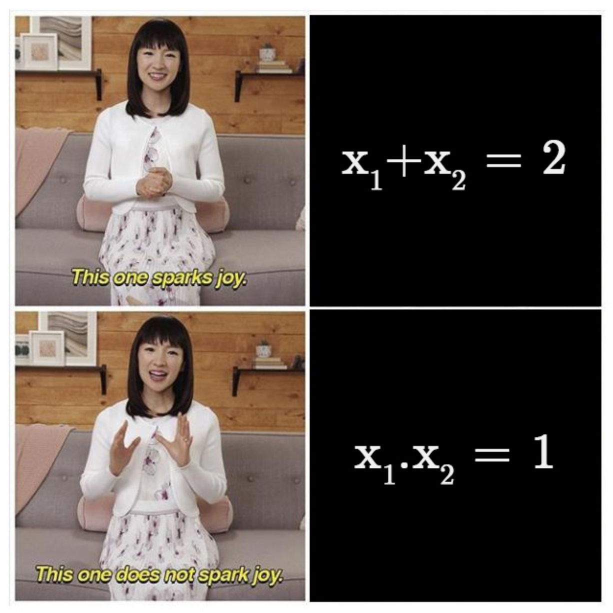
- Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que cumple con todas las restricciones, entonces x es una **solución factible**. En el ejemplo, $(2, 0)$ es una solución factible.
- A una solución factible que maximiza (o minimiza) la f.o. se la denomina **solución óptima** y el correspondiente valor de la f.o. es el **valor óptimo**. En el ejemplo, $(2, 2)$ es una solución óptima y 18 es el valor óptimo.
- Puede haber una única solución óptima, infinitas o ninguna.

Operaciones lógicas

- Si tenemos dos variables binarias x_1, x_2, las operaciones lógicas pueden ser representadas de manera relativamente sencilla:

Operación	Notación lógica	Restricción
Conjunción	$x_1 \wedge x_2$	
Disyunción inclusiva	$x_1 \vee x_2$	
Disyunción exclusiva	$x_1 \veebar x_2$	
Implicación	$x_1 \Rightarrow x_2$	
Doble implicación	$x_1 \Leftrightarrow x_2$	

Todas las expresiones deben ser lineales



Ejercicio

La empresa multinacional MicroApple, presidida por Bill Jobs, decidió comprar empresas de distintos rubros y así aumentar su presencia en el mercado. Las adquisiciones se llevarán a cabo durante cada mes del año próximo, y se cuenta con un presupuesto de d_k para cada mes k ($1 \leq k \leq 12$). Hay N empresas pertenecientes a S rubros que pueden ser compradas, pero su precio varía según la época del año en la que se efectúa la compra: el precio de la empresa i ($1 \leq i \leq N$) en el mes k es p_{ik}. Naturalmente, cada empresa puede ser comprada a lo sumo una vez.

Se conoce g_{ik}, la ganancia que habrá obtenido MicroApple a finales de año por haber comprado la empresa i en el mes k. Por otro lado, MicroApple debe cumplir con la reglamentación anti-monopolio: a lo sumo puede comprar m_s empresas del rubro s $(1 \leq s \leq S)$ durante el año. Además, el equipo de finanzas de MicroApple indica que es conveniente comprar a lo sumo una de las empresas del conjunto $\{5, 7, 11\}$.
Ayudemos a Bill a decidir qué empresas comprar y cuándo hacerlo para maximizar la ganancia de MicroApple.