Investigación Operativa

Método de diccionarios - ∞ soluciones y soluciones degeneradas

Nazareno Faillace Mullen

Departamento de Matemática - FCEN - UBA

Infinitas soluciones óptimas

Por ejemplo, considerar el siguiente diccionario para un problema de maximización:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 & = & 3 & + & x_2 & - & 2w_2 & + & 7x_3 \\ x_1 & = & 1 & - & 5x_2 & + & 6w_2 & - & 8x_3 \\ w_3 & = & 4 & + & 9x_2 & + & 2w_2 & - & x_3 \\ \hline z & = & 8 & & & - & w_2 & - & x_3 \end{array} \Rightarrow (\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{0}_{x_3}, \underbrace{3}_{w_1}, \underbrace{0}_{w_2}, \underbrace{4}_{w_3}) \text{ es una solución óptima.}$$

Si aumentamos el valor de x_2, la función objetivo no disminuye. Toda solución óptima debe cumplir que $x_3 = w_2 = 0$ (pero no necesariamente $x_2 = 0$). Para tales soluciones, el diccionario implica que:

$$\begin{array}{rcrcr} w_1 & = & 3 & + & x_2 \\ x_1 & = & 1 & - & 5x_2 \\ w_3 & = & 4 & + & 9x_2 \end{array}$$

Luego, cada solución óptima se obtiene asignando valores a x_2 tales que:

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} - & x_2 & \leq & 3 \\ & 5x_2 & \leq & 1 \\ - & 9x_2 & \leq & 4 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right. \iff x_2 \in [0, \tfrac{1}{5}]$$

Infinitas soluciones óptimas

Es decir, podemos asignar cualquier valor en $[0, \frac{1}{5}]$ a x_2 y vamos a obtener otra solución factible óptima. Por ejemplo, si tomamos $x_2 = \frac{1}{6}$ obtenemos otra solución óptima:

$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{19}{6}, 0, \frac{33}{6})$ [que NO es solución básica, pero si factible]

En general, **si llegamos a una solución óptima y hay alguna variable no básica con costo reducido igual a 0, entonces el problema tiene infinitas soluciones óptimas**.

Problemas no acotados

Ejemplo (objetivo de maximizar):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_2 & = & 5 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 3x_1 \\
x_5 & = & 7 & & & - & 3x_4 & - & 4x_1 \\
\hline
z & = & 5 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_1
\end{array}
$$

La variable que va a entrar a la base es x_3, pero ninguna de las variables básicas x_2 ni x_5 imponen alguna restricción sobre cuánto puede aumentar x_3 $\Rightarrow$ el problema no está acotado: puedo aumentar x_3 tanto como yo quiera (por lo tanto, z puede aumentar tanto como yo quiera).

En general, **si no existen candidatos para dejar la base, el problema es no acotado.**

Soluciones degeneradas

Se dice que **una solución básica es degenerada si una o más de sus variables básicas valen cero**.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcrrrrrrr}
x_3 & = & 0.5 & & & - & 0.5x_4 & & \\
x_5 & = & & - & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_4 \\
x_6 & = & & & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_4 \\
\hline
z & = & 4 & + & 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_4
\end{array}$$

Solución actual: $(0, 0, \mathbf{\frac{1}{2}}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

x_1 entrará a la base, pero observemos qué ocurre en la segunda ecuación:

$$0 \leq x_5 = -2x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq 0$$

$\Rightarrow$ el crecimiento de x_1 está limitado a 0 $\Rightarrow$ ni el valor de x_1 ni el de las otras variables va a cambiar, y el valor de z sigue siendo el mismo.

Soluciones degeneradas

Aún así, debemos *pivotear* para permitir que x_1 entre a la base y que x_5 salga.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & & & 2x_2 & + & 1.5x_4 & - & 0.5x_5 \\
x_3 & = & 0.5 & & & - & 0.5x_4 & & \\
x_6 & = & & - & x_2 & + & 3.5x_4 & - & 0.5x_5 \\
\hline
z & = & 4 & + & 3x_2 & - & x_4 & - & x_5
\end{array}$$

Solución actual: $(\mathbf{0}, 0, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, 0, 0, \mathbf{0})$

Puesto que esta iteración de SIMPLEX no produjo un cambio en el valor z, es una **iteración degenerada**.

En el ejemplo, la próxima iteración también será degenerada, pero la posterior no. Puede ocurrir una racha de iteraciones degeneradas, pero en la gran mayoría de los casos, la racha es interrumpida por una iteración no degenerada.

Soluciones degeneradas - Ciclos

Podría ocurrir que las soluciones degeneradas provoquen ciclos infinitos en el SIMPLEX. Ejemplo (Chvátal, 1983):

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_5 & = & & - & 0.5x_1 & + & 5.5x_2 & + & 2.5x_3 & - & 9x_4 \\
x_6 & = & & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & + & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4
\end{array}
$$

Luego de la primera iteración (x_1 entra, x_5 sale):

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_1 & = & & & 11x_2 & + & 5x_3 & - & 18x_4 & - & 2x_5 \\
x_6 & = & & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 \\
x_7 & = & 1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 & + & 2x_5 \\
\hline
z & = & & & 53x_2 & + & 41x_3 & - & 204x_4 & - & 20x_5
\end{array}
$$

$$\vdots$$

Soluciones degeneradas

$$\vdots$$

Luego de la quinta iteración:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_5 & = & & & 9x_6 & + & 4x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 \\
x_4 & = & & - & x_6 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 \\
x_7 & = & 1 & & & - & x_1 & & & & \\
\hline
z & = & & & 24x_6 & + & 22x_1 & - & 93x_2 & - & 21x_3
\end{array}$$

Luego de la sexta iteración:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_5 & = & & - & 0.5x_1 & + & 5.5x_2 & + & 2.5x_3 & - & 9x_4 \\
x_6 & = & & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & + & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4
\end{array}$$

¡Volvimos al mismo diccionario del principio!

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

Regla de Bland:

1. La variable entrante será la variable no básica **de menor índice** con coeficiente positivo en la f.o.
2. La variable que sale se elige como siempre. Si hay empates entre variables, sale la que tenga menor índice.

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

Regla de Bland:

1. La variable entrante será la variable no básica **de menor índice** con coeficiente positivo en la f.o.
2. La variable que sale se elige como siempre. Si hay empates entre variables, sale la que tenga menor índice.

Se puede demostrar que, utilizando la regla de Bland, SIMPLEX no cicla. [Demo: *Linear Programming* , Chvátal, 1983, p. 37]

Obs: no es necesario utilizar la regla de Bland en cada iteración. Podríamos comenzar a emplearla, por ejemplo, luego de algunas iteraciones degeneradas y descartarla cuando se produzca una iteración no degenerada.

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

En el ejemplo donde SIMPLEX ciclaba, veamos cómo la regla de Bland nos ayuda a salir del ciclo. En la quinta iteración teníamos el siguiente diccionario:

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_5 & = & & & 9x_6 & + & 4x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 \\
x_4 & = & & - & x_6 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 \\
x_7 & = & 1 & & & - & x_1 & & & & \\
\hline
z & = & & & 24x_6 & + & 22x_1 & - & 93x_2 & - & 21x_3
\end{array}
$$

Vimos que si usamos el criterio usual, x_6 entra a la base y así volvemos al diccionario inicial.

En cambio, si aplicamos la Regla de Bland, x_6 no entrará a la base, sino que x_1 entrará.

Cada ecuación nos impone las siguientes restricciones, respectivamente:

$$x_1 < \infty \qquad x_1 \leq 0 \qquad x_1 \leq 1$$

Luego, x_4 sale de la base. Si bien esta es una iteración degenerada, veamos cómo queda el nuevo diccionario.

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

Una vez que pivoteamos, el nuevo diccionario queda así:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & = & & - & 2x_6 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 \\
x_5 & = & & & x_6 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 8x_4 \\
x_7 & = & 1 & + & 2x_6 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 \\
\hline
z & = & & - & 20x_6 & - & 27x_2 & + & x_3 & - & 44x_4
\end{array}
$$

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

Una vez que pivoteamos, el nuevo diccionario queda así:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & = & & - & 2x_6 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 \\
x_5 & = & & & x_6 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 8x_4 \\
x_7 & = & 1 & + & 2x_6 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 \\
\hline
z & = & & - & 20x_6 & - & 27x_2 & + & x_3 & - & 44x_4
\end{array}
$$

Primero, no volvimos al diccionario inicial. Por otro lado, veamos qué sucede con la próxima iteración: x_3 entrará a la base y x_7 saldrá de la base. Luego de efectuar el pivote, el nuevo diccionario queda:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & 2x_6 & - & 3x_2 & + & 2x_4 & - & x_7 \\
x_1 & = & 1 & & & & & & & - & x_7 \\
x_5 & = & 2 & + & 5x_6 & - & 2x_2 & - & 4x_4 & - & 2x_7 \\
\hline
z & = & 1 & - & 18x_6 & - & 30x_2 & - & 42x_4 & - & x_7
\end{array}
$$

Como z cambió su valor (pasó de valer 0 a valer 1), la última iteración no es degenerada. Más aún llegamos a una solución óptima: (1,0,1,0,1,0,0)

Soluciones degeneradas - Regla de Bland

En síntesis:

- en general es útil **el criterio usual** para decidir qué variable entra a la base. En el caso de maximizar “Entra a la base la variable con mayor coeficiente positivo en la f.o.”(análogo para minimizar)
- si se viene dando una **seguidilla de iteraciones degeneradas, usar la Regla de Bland**.