Investigación Operativa

Métodos Fase I y Big-M

Nazareno Faillace Mullen

Departamento de Matemática - FCEN - UBA

Encontrar solución factible inicial

Las clases pasadas vimos cómo funciona SIMPLEX una vez que le proporcionamos un solución básica factible inicial, la cual necesitamos para construir el diccionario inicial. Por ejemplo, con tomar las variables de decisión iguales a cero (problemas donde el origen es solución básica factible) nos alcanzó para poder empezar a correr SIMPLEX.

Sin embargo, otras veces, encontrar una solución básica factible inicial no es trivial (ni siquiera es trivial que exista alguna solución factible).

Veremos tres formas sortear este obstáculo.

Encontrar solución factible inicial

Forma 1:

Encontrar solución factible inicial

Forma 1:

Encontrar solución factible inicial - Galerazo

A partir del problema estandarizado uno puede encontrar “a ojo”una solución básica factible.

Obs.: no basta con hallar una solución factible cualquiera, sino que hay que asegurarse que la solución factible tenga la **cantidad apropiada de variables básicas**. Es decir, que la cantidad de las variables básicas sea igual a $rg(A)$ siendo A la matriz de coeficientes de las restricciones del problema. Además el valor de esas variables básicas debe ser ≥ 0 para que sea factible.

En otras palabras, tenemos que asegurarnos de que la solución inicial sea un vértice del poliedro factible.

Encontrar solución factible inicial - Galerazo

Problema estandarizado:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
\text{máx} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & & & & & \\
\text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & w_1 & & & & & = & 15 \\
& 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & - & w_2 & & & = & 10 \\
& 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & & & - & w_3 & = & 5 \\
& & & & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 & \geq & 0
\end{array}$$

En este caso:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad rg(A) = 3$$

básicas: (x_2, x_3, w_3) $\rightarrow (0, 4, 3, 0, 0, 17)$ ✓

básicas: (x_3, w_1, w_3) $\rightarrow (0, 0, 5, 10, 0, 5)$ ✓

básicas: (x_1, x_2, w_3) $\rightarrow (\frac{3}{2}, 4, 0, 0, 0, \frac{31}{2})$ ✓

$(2, 0, 1, 10, 0, 3)$ ✗ (es factible, pero no es un vértice)

Método de las dos fases y método Big-M

Hay dos otras maneras (más metódicas) de chequear si un PL tiene alguna solución factible y, de ser así, hallar una solución básica factible inicial para correr el algoritmo.

Método de dos fases: se plantea un problema auxiliar (Fase I) que, al resolverlo, otorga una solución básica factible. La Fase II consiste en resolver el problema original utilizando la solución hallada, como vimos en clases anteriores.

Método Big-M: se plantea un problema auxiliar introduciendo variables artificiales que permiten obtener un solución factible básica para el problema auxiliar. Se resuelve y, si en el óptimo las variables auxiliares son nulas, se obtiene el óptimo del problema original.

Método de dos fases

Para utilizar este método, se estandariza el problema original de la siguiente manera:

- **Objetivo de maximizar**
- Los b_i deben ser no negativos
- Se suman variables slack para transformar a los $\leq$ en =
- Se restan variables slack para transformar los $\geq$ en =
- Se suman **variables artificiales** a_i para las desigualdades $\geq$ y para las igualdades
- Todas las variables deben ser no negativas

Método de dos fases

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Pasa a escribirse como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a:} \quad & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = 4 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_3 - w_2 + a_1 = 5 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - w_3 + a_2 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Las x son las variables de decisión, las w las variables slack y las a las variables artificiales.

Método de dos fases - Fase I

La Fase I consiste en plantear y resolver el **problema auxiliar** (PA) que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula. En nuestro ejemplo:

$$\begin{array}{rrl} \text{máx} & -a_1 - a_2 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 - x_2 + 2x_3 + w_1 = & 4 \\ & -2x_1 + 3x_2 - x_3 - w_2 + a_1 = & 5 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - w_3 + a_2 = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2 \geq & 0 \end{array}$$

Se resuelve el problema auxiliar. Para eso tomamos como variables básicas a w_1, a_1 y a_2 y se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} w_1 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & \\ a_1 & = & 5 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & w_2 & & \\ a_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & w_3 \end{array}$$

Llamamos y a la función objetivo del problema auxiliar y la escribimos en función de las variables no básicas, utilizando las igualdades:

$$y = -6 - x_1 + 2x_2 + x_3 - w_2 - w_3$$

Método de dos fases - Fase I

Así, nos queda planteado el diccionario inicial del problema auxiliar:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
w_1 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & \\
a_1 & = & 5 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & w_2 & & \\
a_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & w_3 \\
\hline
y & = & -6 & - & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & w_2 & - & w_3
\end{array}
$$

A continuación aplicamos el procedimiento usual para resolverlo. Observar que, para lograr que $y = 0$, basta con que a_1 y a_2 sean no básicas. Por esa razón, **si en alguna iteración alguna variable artificial compite contra otras variables por salir de la base, priorizamos sacar a la variable auxiliar**.

Efectuando los pivotes necesarios llegamos al diccionario óptimo del problema auxiliar:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
w_1 & = & 3 & - & x_1 & & & - & w_3 & & & + & a_2 \\
x_2 & = & 2{,}2 & + & 0{,}6x_1 & + & 0{,}4w_2 & + & 0{,}2w_3 & - & 0{,}4a_1 & - & 0{,}2a_2 \\
x_3 & = & 1{,}6 & - & 0{,}2x_1 & + & 0{,}2w_2 & + & 0{,}6w_3 & - & 0{,}2a_1 & - & 0{,}6a_2 \\
\hline
y & = & & & & & & & & - & a_1 & - & a_2
\end{array}
$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2{,}2 \quad x_3 = 1{,}6 \quad w_1 = 3 \quad w_2 = 0 \quad w_3 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la Fase II

Método de dos fases- Fase II

La Fase II consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando SIMPLEX sobre la solución básica factible hallada con la Fase I.
Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la Fase I, **eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares**:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 & = & 3 & - & x_1 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 2{,}2 & + & 0{,}6x_1 & + & 0{,}4w_2 & + & 0{,}2w_3 \\ x_3 & = & 1{,}6 & - & 0{,}2x_1 & + & 0{,}2w_2 & + & 0{,}6w_3 \end{array}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas (x_1, w_2, w_3):

$$\begin{aligned} z &= x_1 - x_2 + x_3 \\ &= x_1 - (2{,}2 + 0{,}6x_1 + 0{,}4w_2 + 0{,}2w_3) + (1{,}6 - 0{,}2x_1 + 0{,}2w_2 + 0{,}6w_3) \\ &= -0{,}6 + 0{,}2x_1 - 0{,}2w_2 - 0{,}4w_3 \end{aligned}$$

Método de dos fases- Fase II

Juntando las igualdades con la función objetivo expresada en términos de las variables no básicas, queda conformado el primer diccionario de la Fase II:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 & = & 3 & - & x_1 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 2{,}2 & + & 0{,}6x_1 & + & 0{,}4w_2 & + & 0{,}2w_3 \\ x_3 & = & 1{,}6 & - & 0{,}2x_1 & + & 0{,}2w_2 & + & 0{,}6w_3 \\ \hline z & = & -0{,}6 & + & 0{,}2x_1 & - & 0{,}2w_2 & + & 0{,}4w_3 \end{array}$$

Luego queda resolver el problema original a partir del diccionario inicial como lo hacemos usualmente. En el caso de este problema, el óptimo es:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2{,}8 \quad x_3 = 3{,}4 \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 0 \quad w_3 = 3$$

Luego, (0, 2.8 , 3.4) es el óptimo del problema planteado al principio.

Método de dos fases - Resumen

1. Escribir el problema original estandarizado según los lineamientos de la diapo 6
2. Plantear el problema auxiliar que tiene las mismas restricciones que el original estandarizado pero su objetivo es max $-\sum a_i$.
3. Hallar el óptimo del problema auxiliar.
4. ***if*** en el óptimo del problema auxiliar las variables artificiales son <u>todas</u> nulas:
    - Pasar a Fase II (elaborar el diccionario inicial con las igualdades del diccionario óptimo de Fase I ignorando los términos de las variables artificiales). Hallar el óptimo.

   else:
    - El problema original no tiene soluciones factibles. No hay nada más que hacer.

Método Big-M

El **método Big-M** (o método M) en el fondo es similar al método de dos fases de SIMPLEX, salvo que, de existir soluciones factibles, resuelve el problema directamente, sin necesidad de plantear problemas auxiliares.

Método Big-M

Para utilizar este método, a partir del problema original, se plantea un nuevo problema de la siguiente manera:

- **Objetivo de maximizar**
- Los b_i deben ser no negativos
- Se suman variables slack para transformar a los $\leq$ en =
- Se restan variables slack para transformar los $\geq$ en =
- Se suman **variables artificiales** a_i para las desigualdades $\geq$ y para las igualdades
- Todas las variables deben ser no negativas
- Se resta a la función objetivo la suma de las variables a_i multiplicadas por M (constante grande)

Método Big-M - Ejemplo

Problema original:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a:} \quad & \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Planteamos el problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -4x_1 - x_2 - Ma_1 - Ma_2 \\ \text{s.a:} \quad & \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + \mathbf{a}_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{a}_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + \mathbf{w}_2 &= 3 \\ x_1, x_1, w_1, w_2, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Y resolvemos el problema auxiliar.

Si en el óptimo del problema auxiliar $a_1 = a_2 = 0$, entonces hallamos el óptimo del problema original. De lo contrario, el problema original no tiene solución factible.

Método Big-M

La gracia de agregar las variables artificiales es que me sirven para tomarlas como variables básicas. De esta manera, confeccionar el diccionario inicial es sencillo. De las tres restricciones tenemos que:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a_1 & = & 3 & - & 3x_1 & - & x_2 & & \\ a_2 & = & 6 & - & 4x_1 & - & 3x_2 & + & w_1 \\ w_2 & = & 3 & - & x_1 & - & 2x_2 & & \end{array}$$

Reescribiendo z en función de las variables no básicas:

$$z = 9M + (7M - 3)x_1 + (4M - 1)x_2 - Mw_1$$

El diccionario inicial es entonces:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a_1 & = & 3 & - & 3x_1 & - & x_2 & & \\ a_2 & = & 6 & - & 4x_1 & - & 3x_2 & + & w_1 \\ w_2 & = & 3 & - & x_1 & - & 2x_2 & & \\ \hline z & = & -9M & + & (7M - 4)x_1 & + & (4M - 1)x_2 & - & Mw_1 \end{array}$$

Método Big-M

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
a_1 & = & 3 & - & 3x_1 & - & x_2 & & \\
a_2 & = & 6 & - & 4x_1 & - & 3x_2 & + & w_1 \\
w_2 & = & 3 & - & x_1 & - & 2x_2 & & \\
\hline
z & = & -9M & + & (7M-4)x_1 & + & (4M-1)x_2 & - & Mw_1
\end{array}$$

La variable que entra es x_1 y sale a_1. Pivotear da lugar al siguiente diccionario:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_2 & & & - & \frac{1}{3}a_1 \\
a_2 & = & 2 & - & \frac{5}{3}x_2 & + & w_1 & + & \frac{4}{3}a_1 \\
w_2 & = & 2 & - & \frac{5}{3}x_2 & & & + & \frac{1}{3}a_1 \\
\hline
z & = & 2M-4 & + & \frac{(5M+1)}{3}x_2 & - & Mw_1 & - & \frac{(7M-4)}{3}a_1
\end{array}$$

En la próxima iteración x_2 va a entrar a la base y a_2 y w_2 compiten para salir de la base. Como queremos que a_2 sea no básica, la elegimos para que salga de la base. Así continuamos resolviendo hasta hallar el óptimo del problema auxiliar.

Método Big-M

En este ejemplo, el óptimo del problema auxiliar es:

$$x_1 = \frac{3}{5} \quad x_2 = \frac{6}{5} \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0$$

Como las variables auxiliares son todas nulas en el óptimo del problema auxiliar, el problema original tiene soluciones factibles. Más aún, el óptimo del problema original es $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$

Método Big-M:

1. Plantear el problema auxiliar como se indica en la diapo 14
2. Confeccionar el diccionario inicial tomando como variables básicas a las variables artificiales (de las restricciones $\geq$ e =) y a las variables slack (de las restricciones $\leq$)
3. Hallar el óptimo del problema auxiliar:
    - *if* en el óptimo del problema auxiliar las variables artificiales son no básicas:

      Del óptimo del problema auxiliar se deduce el óptimo del problema original
    - *else*:

      el problema original es infactible

Conclusiones

Siempre necesitamos una solución básica factible inicial (SBFI) para poder correr SIMPLEX:

- En ciertos problemas, la SFBI se puede encontrar a ojo. [No se puede usar en el parcial] 🫠
- Recurrimos al método de dos fases o al método Big-M.