Investigación Operativa - Guías de Ejercicios
AÑO 2020

1 Modelado y Complejidad

Ejercicio 1.1. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min z &= \max\{f_1(x), \ldots, f_l(x)\} \\ s.a.\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

donde $f_1, \ldots, f_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones lineales. Resuelva este problema modelándolo como un problema de programación lineal conveniente.

Solución 1.1.
Basta con notar que $z \geq f_i(x)$ para todo $1 \leq i \leq l$ puesto que $z = \max\{f_1(x), \ldots, f_l(x)\}$. Luego,

$$\begin{aligned} &\min z \\ s.a.\ &z \geq f_i(x) \ \ i = 1, \ldots, l \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0, \\ &z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min z = f(x, y) \\ s.a.\ &x \neq y \\ &x, y \in \mathbb{Z} \\ &|x|, |y| \leq M, \end{aligned}$$

para $M \in \mathbb{N}$ dato y f una función lineal. Elabore un modelo de programación lineal entera para el problema.

Solución 1.2.
Como x e y están acotadas, una manera de reescribir la condición $x \neq y$ resulta como

$$\begin{aligned} x - y &\leq -1 + 2M(1 - \theta) \\ x - y &\geq 1 - 2M\theta \\ \theta &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

y, por otra parte, a la condición $|x|, |y| \leq M$ puede ser expresa por

$$\begin{aligned} x, y &\leq M \\ x, y &\geq -M \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\min f(x, y) \\ s.a.\ &x - y \leq -1 + 2M(1 - \theta) \\ &x - y \geq 1 - 2M\theta \\ &x, y \leq M \\ &x, y \geq -M \\ &x, y \in \mathbb{Z} \\ &\theta \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. Muestre que el problema

$$\begin{aligned} &\min z = |x| + |y| + |z| \\ s.a.\ & x + y \leq 1 \\ & 2x + z = 3 \\ & x, y, z \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

puede reformularse como un problema de programación lineal

Solución 1.3.
Sean las variables $s, t, w \in \mathbb{R}$ tales que $s \geq |x|$, $t \geq |y|$ y $w \geq |z|$. Luego, se puede reescribir el problema anterior se la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\min s + t + w \\ s.a.\ & x + y \leq 1 \\ & 2x + z = 3 \\ & s \geq x \\ & s \geq -x \\ & t \geq y \\ & t \geq -y \\ & w \geq z \\ & w \geq -z \\ & x, y, z, s, t, w \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Ejercicio 1.4. Un dietista está planeando el menú de la comida de una escuela. Proyecta servir tres alimentos principales, todos ellos con distinto contenido nutricional, de manera que se suministre al menos la ración diaria mínima (RDM) de vitaminas A, C y D en una comida.

En la siguiente tabla se sintetiza el contenido vitamínico y el costo por día por cada 30 gramos de los tres tipos de alimento.

	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina D	Costo
Alimento 1	30mg	10mg	40mg	0.15
Alimento 2	20mg	15mg	30mg	0.10
Alimento 3	40mg	5mg	320mg	0.12
RDM	300mg	120mg	210mg	

Cualquier combinación de ellos puede seleccionarse, con tal de que el tamaño total de la porción sea de por lo menos $225g$.

Plantee un problema de programación lineal que, al ser resuelto, determine la cantidad que debe servirse de cada alimento sabiendo que el objetivo es reducir al mínimo el costo de la comida y teniendo en cuenta que se deben alcanzar los niveles de las raciones mínimas de las tres vitaminas y se debe respetar la restricción relativa al tamaño mínimo de la porción.

Solución 1.4.
Para plantear el problema notemos que

- La RDM (en gramo) es $\begin{cases} 0{,}3g & \text{vitamina A} \\ 0{,}12g & \text{vitamina B} \\ 0{,}21g & \text{vitamina C} \end{cases}$
- El costo por cada gramo de alimento es $\begin{cases} \frac{1}{200}g & \text{Alimento 1} \\ \frac{1}{300}g & \text{Alimento 2} \\ \frac{1}{250}g & \text{Alimento 3} \end{cases}$
- Buscamos minimizar el costo en gramos de cada alimento.

Sea, entonces,

$$x_i = \text{cantidad en gramos del alimento } i$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
& \text{mín}\ \frac{1}{200}x_1+\frac{1}{300}x_2+\frac{1}{250}x_3 \\
s.a.\ & x_1+x_2+x_3 \geq 225 \\
& 0{,}03x_1+0{,}02x_2+0{,}04x_3 \geq 0{,}3 \\
& 0{,}01x_1+0{,}015x_2+0{,}005x_3 \geq 0{,}12 \\
& 0{,}05x_1+0{,}03x_2+0{,}02x_3 \geq 0{,}21 \\
& x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.5. Se cuenta con un presupuesto de mil millones de pesos para otorgarlos como subsidio destinado a la investigación innovadora en el campo de la búsqueda de otras formas de producir energía.

Se seleccionaron seis proyectos. En la siguiente tabla figuran la utilidad neta que se obtendrá por cada peso invertido en el proyecto así como el nivel requerido de financiamiento (en millones de pesos).

Proyecto	Clasificación	Utilidad Neta	Financiamiento
1	Solar	4.4	220
2	Solar	3.8	180
3	Comb. Sintéticos	4.1	250
4	Carbón	3.5	150
5	Nuclear	5.1	400
6	Geotérmico	3.2	120

Además se ha resuelto financiar por lo menos el 50 % del proyecto de energía nuclear y como mínimo 300 millones de pesos de los proyectos de energía solar. Plantee el problema sabiendo que el objetivo es maximizar los beneficios netos.

Solución 1.5.

- Variables

$$
\begin{aligned}
x_i &= \text{cantidad de millones de pesos invertidos en el proyecto } i \\
w_i &= \begin{cases} 1 & \text{si se financia el proyecto } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Restricciones

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} x_i &\leq 1000 \\
x_5 &\geq 200 \\
x_1+x_2 &\geq 300
\end{aligned}
$$

- Función Objetivo

$$
f(x_1,\ldots,x_6,w_1,\ldots,x_6)=\sum_{i=1}^{6}(4{,}4;3{,}8;4{,}1;3{,}5;5{,}1;3{,}2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}-(200,180,250,150,400,120)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_6 \end{pmatrix}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
& \text{máx}\, f(x_1,\ldots,x_6,w_1,\ldots,x_6) \\
s.a.\ & \sum_{i=1}^{6} x_i \leq 1000 \\
& x_5 \geq 200 \\
& x_1+x_2 \geq 300 \\
& x_i \in \mathbb{R},\ \ i \in \{1,\ldots,6\} \\
& w_i \in \{0,1\},\ \ i \in \{1,\ldots,6\}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.6. El dueño de un establecimiento quiere alquilarlo por 4 años, aunque no necesariamente a la misma gente.

Para decidir la duración de los contratos, contacta con una empresa de estudios de mercado, que le proporciona la siguiente tabla, indicando la utilidad esperada, en miles de pesos, si se alquila desde el inicio del año i hasta el inicio del año j:

$i \setminus j$	2	3	4	5
1	12	22	38	40
2	-	13	20	29
3	-	-	10	19
4	-	-	-	120

Decida cuándo y por cuánto tiempo arrendar para maximizar la utilidad esperada durante los próximos 4 años.

Solución 1.6.

- Variables,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se alquila desde el inicio del año } i \text{ hasta el inicio del año } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

  donde $(i,j) \in \{(a,b) \in A \times B | \, a \geq b\}$ se tiene que $x_{ij} = 0$ con $A = \{1, \dots, 4\}$ y $B = \{2, \dots, 5\}$.

- Hay diferentes maneras de definir las restricciones, veamos algunas:

  (I) Cada intervalo anula a los que lo intersecan,

$$\sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=i+1}^{5} x_{kl} \leq x_{ij} + M(1 - x_{ij}), \qquad \forall (i,j) \in A \times B$$

  (II) Para cada punto lo corta a lo sumo un segmento,

$$\sum_{k=1}^{i} \sum_{l=i+1}^{5} x_{kl} \leq 1, \qquad \forall i \in \{1, \dots, 4\}$$

  (III) De cada par de intervalos que se intersecan puedo elegir a lo sumo uno,

$$x_{ij} + x_{kl} \leq 1 \qquad \forall k \in \{i+1, \dots, j-1\} \text{ o } \forall l \in \{i+1, \dots, j-1\}$$

- Función Objetivo

$$z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=2}^{5} p_{ij} x_{ij}$$

Luego, lo que buscamos es

$$\max z$$

eligiendo alguna de las restricciones anteriores.

Ejercicio 1.7. El intendente de una ciudad del interior de Argentina ha decidido relocalizar todos los colegios de modo de hacer más cómoda la movilidad de los alumnos. La ciudad se puede dividir en I distritos, y cada uno contiene p_i alumnos.

Análisis preliminares (estudios de terrenos, factores políticos, etc.) han establecido que las escuelas sólo pueden ser ubicadas en J sitios predeterminados dentro de la ciudad. Sea $d_{ij} \geq 0$ la distancia desde el centro del distrito i hasta el sitio j. Se deben seleccionar los sitios en los cuales construir un colegio (en un sitio cabe a lo sumo uno) y además se debe asignar un colegio a cada distrito. Es decir, cada distrito de la ciudad debe tener uno (y sólo un) colegio asociado. En cambio, cada colegio puede tener hasta 2 distritos asociados. Además, si un colegio fue construido, al menos 1 distrito tiene que serle asignado.

Construir un colegio en el sitio j tiene un costo fijo asociado igual a c_j. Existe también un costo variable que es linealmente proporcional (la constante de proporcionalidad es f) a la cantidad total de alumnos a que debe servir el colegio. O sea, si se construye un colegio en el sitio j, entonces el costo asociado es $c_j + f s_j$, donde s_j es la población total a que debe servir el colegio ubicado en j (cuidado que s_j no es un dato previo sino que es la suma de las poblaciones de los distritos asociados a ese colegio).

La capacidad de alumnos que soporta un colegio construido en el sitio j es un dato conocido (T_j).

El presupuesto total destinado para construir los colegios es igual a B y no debe ser sobrepasado. Además, la Dirección de Educación de la ciudad ha determinado que los distritos s y t deben ser atendidos por 2 colegios distintos.

Ayude al Intendente a aumentar su popularidad formulando un problema de programación lineal mixto, que, respetando las condiciones planteadas, determine dónde construir los colegios y qué colegio atiende a qué distrito.

El objetivo es minimizar la distancia máxima entre el centro de un distrito y su respectivo colegio.

Solución 1.7.

- Variables,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el colegio construido en el sitio j atiende al distrito i} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si se construye un colegio en el sitio } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$s_j = \text{población a la que debe servir el colegio ubicado en el sitio } j$$

$$p_i = \text{alumnos en el distrito } i$$

- Restricciones,

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, I\}$$

(a cada distrito se asigna exactamente 1 colegio)

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \geq 1y_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, J\}$$

(si se construye un colegio al menos 1 distrito tiene que serle asignado)

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \leq 2y_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, J\}$$

(si se construye un colegio solo puede tener hasta 2 distritos asociados)

$$\sum_{i=1}^{I} p_i x_{ij} = s_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, J\}$$

(suma de las poblaciones de los distritos asociados al colegio)

$$\sum_{j=1}^{J} (y_j c_j + f s_j) \leq B$$

(el costo total de construccion de los colegios no puede superar al presupuesto)

$$x_{sj} + +x_{tj} \leq 1, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, J\}$$

(los distritos s y t deben ser atendidos por 2 colegios distintos)

$$z \geq d_{ij} x_{ij}, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, I\} \text{ y } \forall j \in \{1, \ldots, J\}$$

(buscamos minimizar un máximo)

$$s_j \leq T_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, J\}$$

(la población de los distritos no puede superar a la capacidad que puede soportar el colegio construido en el sitio j)

- Función Objetivo

z, que se obtiene al buscar la máxima entre el centro de un distrito y su respectivo colegio.

Luego,

$$\begin{aligned} \min \ & z \\ s.a. \ & \sum_{j=1}^{J} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, I\} \\ & \sum_{i=1}^{I} x_{ij} \geq 1y_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, J\} \\ & \sum_{i=1}^{I} x_{ij} \leq 2y_j, \qquad \forall j \in \{1, \ldots, J\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{I} p_i x_{ij} = s_j, \qquad \forall j \in \{1,\dots,J\}\\
&\sum_{j=1}^{J} (y_j c_j + f s_j) \leq B\\
&s_j \leq T_j, \qquad \forall j \in \{1,\dots,J\}\\
&x_{sj} + +x_{tj} \leq 1, \qquad \forall j \in \{1,\dots,J\}\\
&z \geq d_{ij} x_{ij}, \qquad \forall i \in \{1,\dots,I\} \text{ y } \forall j \in \{1,\dots,J\}\\
&x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in \{1,\dots,I\} \text{ y } \forall j \in \{1,\dots,J\}\\
&s_j \in \mathbb{R}, \qquad \forall j \in \{1,\dots,J\}\\
&p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \forall i \in \{1,\dots,I\}\\
&z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8. Se quieren recorrer N ciudades numeradas $1,\dots,N$. Es necesario empezar por la primera ciudad y recorrer todas las ciudades pasando una sola vez por cada una.

Al final del recorrido se debe volver a la ciudad original.

Se conoce la matriz D de distancias entre las ciudades (d_{ij} es la distancia entre la ciudad i y la ciudad j).

Formule un problema de programación lineal entera para calcular la forma de hacer el recorrido que minimice la distancia total recorrida.

Solución 1.8.

- Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\dots,N \qquad \text{(entra una sola vez a cada ciudad)}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,\dots,N \qquad \text{(sale una sola vez a cada ciudad)}$$

$$\sum_{\substack{(i,j)|i\in U\\ j\in\{1,\dots,N\}\setminus U}}^{N} x_{ij} \geq 1, \qquad \forall U \subseteq \{1,\dots,N\} \mid 2 \leq |U| \leq N-2 \qquad \text{(evitar sub-tours)}$$

- Función Objetivo

$$z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{ij} x_{ij}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\max z\\
s.a. &\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\dots,N\\
&\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,\dots,N\\
&\sum_{\substack{(i,j)|i\in U\\ j\in\{1,\dots,N\}\setminus U}}^{N} x_{ij} \geq 1, \qquad \forall U \subseteq \{1,\dots,N\} \mid 2 \leq |U| \leq N-2\\
&d_{ij} \in \mathbb{R},\ \ i,j \in \{1,\dots,N\}\\
&x_{i,j} \in \{0,1\},\ \ i,j \in \{1,\dots,N\}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.9. Formule un modelo de programación lineal entera para resolver el *sudoku*.

Solución 1.9.
Asumimos que el Sudoku puede ser representado por una matriz de $n \times n$.

- Variables
$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el valor } k \text{ está en el lugar } (i,j) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} &= 1, && j,k = 1,\dots,n \\
& && \text{(no se puede repetir el valor } k \text{ en las filas)} \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} &= 1, && i,k = 1,\dots,n \\
& && \text{(no se puede repetir el valor } k \text{ en las columnas)} \\
\sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} &= 1, && k = 1,\dots,n;\ p = 1,\dots,m;\ q = 1,\dots,m \\
& && \text{(no se pueden repetir el valor } k \text{ en las submatrices)} \\
\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} &= 1, && i,k = 1,\dots,n \\
& && \text{(no pueden quedar casilleros vacíos en la matriz)} \\
x_{ijk} &= 1, && \forall i,j,k \in G \\
& && \text{(donde } G \text{ representa a los datos iniciales)}
\end{aligned}$$

- Función Objetivo
$$z = 0^T x$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& \max z \\
s.a. & \sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = 1,, \quad j,k = 1,\dots,n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad i,k = 1,\dots,n \\
& \sum_{j=mq-m+1}^{mq} \sum_{i=mp-m+1}^{mp} x_{ijk} = 1, \quad k = 1,\dots,n;\ p = 1,\dots,m;\ q = 1,\dots,m \\
& \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1, \quad i,k = 1,\dots,n \\
& x_{ijk} = 1, \quad \forall i,j,k \in G \\
& x_{i,j,k} \in \{0,1\},\ i,j,k \in \{1,\dots,n\}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.10. Ubicar n reinas en un tablero de $n \times n$ sin que se amenacen.

Solución 1.10.

- Variables
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si pongo una reina en el casillero } (i,j) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$
$$\sum_{k=j-i}^{n} x_{ij} \leq 1, \qquad \forall |k| \leq (n-1)$$
$$\sum_{k=j+i}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall k \in \{2, \dots, 2n\}$$

- Función Objetivo

$$z = 0^T x$$

$$\begin{aligned} \text{mín } & z \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum_{k=j-i}^{n} x_{ij} \leq 1, \qquad \forall |k| \leq (n-1) \\ & \sum_{k=j+i}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall k \in \{2, \dots, 2n\} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.11. a) Sean x, y, z variables binarias (pueden valer 0 o 1). Consideremos la fórmula

$$\mathcal{P} := x \vee (y \wedge \neg z).$$

Encuentre un conjunto de restricciones lineales sobre x, y, z y algunas variables extra cuyas soluciones factibles enteras se correspondan con los valores de x, y y z que hagan verdadera a P.

b) Pruebe que decidir si un problema de programación lineal entera tiene alguna solución factible entonces es NP-completo.

Solución 1.11.

a) Resolvamos primero $\mathcal{P}$

x	y	z	$x \vee (y \wedge \neg z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es verdadera cuando

$$x = 1 \vee (y = 1 \wedge z = 0) \Leftrightarrow x + \left\lfloor \frac{y + (1-z)}{2} \right\rfloor \geq 1 \Leftrightarrow 2x + y + (1-z) \geq 1$$

es decir que,

$$\mathcal{P} \text{ es verdadera si y sólo si } 2x + y - z \geq 0$$

b)

Ejercicio 1.12. Para cada una de las siguientes operaciones estime la cantidad máxima de sumas, multiplicaciones y divisiones que deben realizarse.

Exprese el resultado usando la notación de la “O”.

a) Sumar dos matrices de $n \times n$.

b) Multiplicar dos matrices de $n \times n$.

c) Invertir una matriz inversible de $n \times n$.

d) Resolver un sistema $Ax = b$ para A y b dados.

e) Multiplicar dos polinomios de grado n.

Solución 1.12.

a) Sumar dos matrices de $n \times n$ cuesta $O(n^2)$.

b) Multiplicar dos matrices de $n \times n$ cuesta $O(n^3)$.

c) Invertir una matriz inversible de $n \times n$ cuesta $O(n^3)$.

d) Resolver un sistema $Ax = b$ para A y b dados cuesta $O(n^3)$.

e) Multiplicar dos polinomios de grado n cuesta $O(n^3)$.

Ejercicio 1.13. Escriba en pseudocódigo un algoritmo para ordenar una lista de números. Estimar la cantidad de comparaciones (<,> o =) necesarias.

Algoritmo 1 Selection sort

Solución 1.13. **Entrada:** $A = A_0$

```
Función Ordenar(A ∈ Z[])
    i ← 0                                ▷ O(1)
    while i < |A| do                     ▷ O(|A|) iteraciones
        j ← 0                            ▷ O(1)
        while j < |A| − 1 do             ▷ O(|A|) iteraciones
            if A[j] > A[j + 1] then      ▷ O(1)
                swap(A, j, j + 1)        ▷ O(1)
            end if
            j ← j + 1                    ▷ O(1)
        end while
        i ← i + 1                        ▷ O(1)
    end while
end Función
```

Con una complejidad de orden $O(|A|^2)$.

Ejercicios Planteados en Clase

Ejercicio 1.14. Una empresa fabrica dos productos, A y B, los cuales deben procesarse en los departamentos 1 y 2.

Un producto A requiere 1 hora de trabajo en el departamento 1 y 2 horas en el departamento 2; un producto B requiere 2 horas de trabajo en el departamento 1 y 6 horas en el departamento 2.

Se sabe que los departamentos 1 y 2 tienen 100 y 260 horas semanales de capacidad de trabajo respectivamente, y que los productos A y B dejan un margen de utilidad de \$4 y \$9 por unidad respectivamente.

Plantear un problema de programación lineal que, al ser resuelto, determine el número de unidades a fabricar semanalmente de cada producto de manera de maximizar el margen de utilidad.

Solución 1.14.

- Variables,

$$x_1 : \text{cantidad de producto } A \text{ fabricados.}$$
$$x_2 : \text{cantidad de producto } B \text{ fabricados.}$$

- Función Objetivo,

$$z = 4x_1 + 9x_2$$

- Restricciones,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 100 \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 260 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{máx } & 4x_1 + 9x_2 \\ s.a. \ & x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 \leq 260 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.15. La empresa multinacional *Argempre* decidió comprar empresas de distintos rubros para aumentar su presencia en el mercado.

Las adquisiciones se llevarán a cabo durante cada mes del año próximo, y se cuenta con un presupuesto de d_k para cada mes k ($k = 1, \dots, 12$). Hay N empresas pertenecientes a S rubros que pueden ser compradas, pero su precio varía según la época del año en la que se efectúa la compra: el precio de la empresa i ($i = 1, \dots, N$), que denominaremos e_i, en el mes k es p_{ik}.

Naturalmente, cada empresa puede ser comprada una sola vez.

Se conoce g_{ik}, la ganancia que habrá obtenido *Argempre* a finales de 2020 por haber comprado e_i en el mes k.

Por otro lado, *Argempre* debe cumplir con la reglamentación anti-monopolio: a lo sumo puede comprar m_s empresas del rubro s ($s = 1, \dots, S$) durante el año. Además, por cuestiones del mercado, el equipo de finanzas de *Argempre* sugiere:

- Si se compra e_3, comprar e_7 (en algún momento del año).
- Si se compran e_2 y e_8, hacerlo durante el mismo mes.

Ayudemos al presidente de *Argempre* a decidir cuáles empresas comprar y cuándo hacerlo para maximizar la ganancia.

Solución 1.15.

- Variables,

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si se compra la empresa } i \text{ en el mes } k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Función Objetivo,

$$\sum_{k=1}^{12} \sum_{i=1}^{N} x_{ik} g_{ik}$$

- Restricciones,

  a) Presupuesto: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} p_{ik} x_{ik} \leq d_k$, con $k \in \{1, \dots, 12\}$.

  b) Sólo se puede comprar una sola vez cada empresa: $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} x_{ik} \leq 1$, con $i \in \{1, \dots, N\}$.

  c) Anti-monopolio: $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} \sum_{i \in E_s}^{N} x_{ik} \leq n_s$ con $E_s = \{i \mid e_i \text{ pertenece al rubro } s\}$ y $s \in \{1, \dots, S\}$.

  d) Si se compra e_3 entonces se debe comprar e_7: $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} x_{3k} \leq \sum_{k=1}^{12} x_{7k}$.

  e) Si se compran e_2 y e_8, hacerlo durante el mismo mes: $x_{2k} + x_{8j} \leq 1$ para todo $k \neq j$ y $j, k \in \{1, \dots, 12\}$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{k=1}^{12}\sum_{i=1}^{N} x_{ik} g_{ik} \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{N} p_{ik} x_{ik} \leq d_k, \quad k \in \{1, \dots, 12\} \\
& \sum_{k=1}^{12} x_{ik} \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, N\} \\
& \sum_{k=1}^{12}\sum_{i \in E_s}^{N} x_{ik} \leq n_s, \quad E_s = \{i \mid e_i \text{ pertenece al rubro } s\} \text{ y } s \in \{1, \dots, S\} \\
& \sum_{k=1}^{12} x_{3k} \leq \sum_{k=1}^{12} x_{7k} \\
& x_{2k} + x_{8j} \leq 1 \text{ para todo } k \neq j \text{ y } j, k \in \{1, \dots, 12\}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.16. *Argempre* decidió invertir 990 mil pesos en una campaña publicitaria para los productos que fabrica del rubro alimentario.

El costo por anuncio en miles de pesos es $11, 6, 7$ y 9 según sea en TV, radio, diario (en papel) e internet, respectivamente.

Se tienen tres predicciones distintas de audiencia (en miles) por cada anuncio en cada uno de los medios:

	TV	Radio	Diario (en papel)	Internet
Proyección 1	75	40	33	42
Proyección 2	54	45	35	60
Proyección 3	88	30	40	55

Además de respetar el presupuesto, el departamento de finanzas ordena que la diferencia entre la cantidad de anuncios en medios electrónicos o digitales (TV, radio e internet) y la cantidad en medios impresos sea a lo sumo 50; y no haya más de 85 anuncios por medio.

Plantear un problema de programación lineal que, al ser resuelto, permita decidir la cantidad de anuncios que se deben comprar en cada medio para maximizar el mínimo de audiencia alcanzada según las proyecciones.

Solución 1.16.
Sea x_j = cantidad de anuncios en el medio j, entonces

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & z \\
s.a. \quad & z \leq 54x_1 + 45x_2 + 35x_3 + 60x_4 \\
& z \leq 75x_1 + 40x_2 + 33x_3 + 42x_4 \\
& z \leq 88x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 55x_4 \\
& 11x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 \leq 990 \\
& x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 50 \\
& -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 50 \\
& x_j \leq 85, \ j = 1, \dots, 4 \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 4 \\
& x_j \in \mathbb{Z} \\
& z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.17. Se desea iniciar un emprendimiento de carpintería, donde se realizarán tres tipos de muebles: mesas, sillas y roperos, utilizando tres tipos de madera: cedro, pino y nogal.

Para fabricar cada uno de los muebles, deben comprarse, una sola vez, las herramientas necesarias (que se usan en un único tipo de mueble). Sólo se comprarán las herramientas necesarias para fabricar un mueble, si ese mueble será fabricado.

Los datos se encuentran detallados en la tabla.

	Mesa	Silla	Ropero	Disponibilidad
Horas de trabajo	5	3	15	100
Cedro (m^2)	2	2	8	60
Pino (m^2)	5	1	20	100
Nogal (m^2)	1	4	12	75
Ganancia (por unidad)	30	12	68	
Costo compra herramientas	165	100	300	

También se desea que la cantidad de sillas fabricadas no exceda el 70 % de la producción total de la carpintería. Al menos se debe producir un mueble (no importa el tipo).

Formular un problema de programación lineal que, al ser resuelto, permita decidir cuántos muebles deben fabricarse de cada tipo para maximizar la ganancia.

Solución 1.17.

- Variables

$$x_i = \text{cantidad de muebles tipo } i$$
$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{si se fabrica el tipo de mueble } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 15x_3 &\leq 100 && \text{(horas de trabajo)} \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 &\leq 60 && \text{(cedro)} \\ 5x_1 + x_2 + 20x_3 &\leq 100 && \text{(pino)} \\ x_1 + 4x_2 + 12x_3 &\leq 75 && \text{(nogal)} \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 && \text{(producir al menos un mueble)} \\ x_i &\leq Mw_i, && \text{(relación entre variables)} \end{aligned}$$

- Función Objetivo

$$z = 30x_1 + 12x_2 + 68x_3 - 165w_1 - 100w_2 - 300w_3$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{máx} \;\; & z \\ s.a. \;\; & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 15x_3 \leq 100 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 60 \\ & 5x_1 + x_2 + 20x_3 \leq 100 \\ & x_1 + 4x_2 + 12x_3 \leq 75 \\ & x_2 \leq 0{,}7(x_1 + x_2 + x_3) \\ & x_i \leq Mw_i, \;\; \forall i = 1,2,3 \\ & x_i \geq 0, \;\; \forall i = 1,2,3 \\ & x_i \in \mathbb{Z}, \;\; \forall i = 1,2,3 \\ & w_i \in \{0,1\}, \;\; \forall i = 1,2,3 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.18. En una de las sedes de *Argempre*, se deben distribuir N empleados igualmente capacitados $e_1, \ldots, e_N$ para realizar J tareas.

Cada empleado debe ser asignado, al menos, a una tarea y, como mucho, a dos. Por otro lado, cada tarea j requiere al menos una cantidad de empleados d_j para poder ser llevada a cabo, y como mucho puede asignársele k_j empleados.

Cada tarea produce una ganancia de base $b_j > 0$, más g_j por cada empleado por encima del mínimo necesario d_j.

Sin embargo, la ganancia de la tarea 4 ($d_4 = 0, k_4 = 9$) se conforma de manera diferente, según la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ -x + 8 & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \\ 2x - 10 & \text{si } 7 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

siendo x la cantidad de empleados asignados a realizar la tarea 4. Por otro lado, el departamento de *RRHH* de *Argempre* propone las siguientes medidas:

- e_3 y e_5 deben trabajar juntos.
- e_1 y e_{11} deben trabajar en distintas tareas.
- e_6 debe trabajar en la tarea 10.

- e_8 debe trabajar en la tarea 5 o en la 2, pero no en ambas.

Plantear un modelo de programación lineal que distribuya a los empleados de *Argempre* de manera tal que la ganancia sea máxima.

Solución 1.18.

- Variables,

$$\begin{aligned}
x_j &= \text{cantidad de trabajadores asignados a la tarea } j \\
y_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si el trabajador } i \text{ es asignado a la tarea } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \\
z &= \text{ganancia producida por realizar la tarea 4}
\end{aligned}$$

- Restricciones,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \geq 1, &\quad \forall i \in \{1,\ldots,N\} && \text{(cada trabajador realiza, al menos, una tarea)} \\
\sum_{j=1}^{J} y_{ij} \leq 2, &\quad \forall i \in \{1,\ldots,N\} && \text{(cada trabajador no puede realizar más de dos tareas)} \\
\sum_{i=1}^{N} y_{ij} = x_j, &\quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} && \text{(todos los trabajadores están asignados a una tarea)} \\
x_j \geq d_j, &\quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} && \text{(se necesitan } d_j \text{ empleados para cada tarea)} \\
x_j \geq k_j, &\quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} && \text{(se asignan hasta } k_j \text{ empleados para cada tarea)} \\
x_4 = z_1 + z_2 + z_3, & && \text{(ganancia de la tarea 4)} z_1 \geq 0, \\
z_1 \leq 4w_1, & && \\
z_2 \geq 5w_2, & && \\
z_2 \leq 6w_2, & && \\
z_3 \geq 7w_3, & && \\
z_3 \leq 9w_3, & && \\
w_1 + w_2 + w_3 = 1, & && \\
z = z_1 + (-z_2 + 8w_2) + 2z_3 - 10w_3, & && \text{(función partida)} \\
y_{3j} = y_{5j}, &\quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} && (e_3 \text{ y } e_5 \text{ deben trabajar juntos)} \\
y_{1j} + y_{11j} \leq 1, &\quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} && (e_1 \text{ y } e_{11} \text{ deben trabajar en lugares diferentes)} \\
y_{6,10} = 1, & && (e_6 \text{ debe trabajar en la tarea 10)} \\
y_{8,2} + y_{8,5} \leq 1, & && (e_8 \text{ debe trabajar en la tarea 5 ó en la 2)} \\
x_j \in \mathbb{Z}, &\quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} && \\
y_{ij} \in \{0,1\}, &\quad \forall j \in \{1,\ldots,J\} \text{ y } \forall i \in \{1,\ldots,N\} && \\
w_k \in \{0,1\}, &\quad \forall k \in \{1,2,3\} && \\
z_n \in \mathbb{Z}, &\quad \forall n \in \{1,2,3\} &&
\end{aligned}$$

- Función Objetivo

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 4}}^{J} [b_j + g_j(x_j - d_j)] + z$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 4}}^{J} [b_j + g_j(x_j - d_j)] + z \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{J} y_{ij} \geq 1, \;\; \forall i \in \{1,\ldots,N\} \\
& \sum_{j=1}^{J} y_{ij} \leq 2, \;\; \forall i \in \{1,\ldots,N\} \\
& \sum_{i=1}^{N} y_{ij} = x_j, \;\; \forall j \in \{1,\ldots,J\} \\
& x_j \geq d_j, \;\; \forall j \in \{1,\ldots,J\} \\
& x_j \geq k_j, \;\; \forall j \in \{1,\ldots,J\} \\
& x_4 = z_1 + z_2 + z_3, \\
& z_1 \geq 0, \\
& z_1 \leq 4w_1, \\
& z_2 \geq 5w_2, \\
& z_2 \leq 6w_2, \\
& z_3 \geq 7w_3, \\
& z_3 \leq 9w_3, \\
& w_1 + w_2 + w_3 = 1, \\
& z = z_1 + (-z_2 + 8w_2) + 2z_3 - 10w_3, \\
& y_{3j} = y_{5j}, \;\; \forall j \in \{1,\ldots,J\} \\
& y_{1j} + y_{11j} \leq 1, \;\; \forall j \in \{1,\ldots,J\} \\
& y_{6,10} = 1, \\
& y_{8,2} + y_{8,5} \leq 1, \\
& x_j, z_n \in \mathbb{Z}, \;\; \forall j \in \{1,\ldots,J\} \text{ y } \forall n \in \{1,2,3\} \\
& y_{ij}, w_k \in \{0,1\}, \;\; \forall j \in \{1,\ldots,J\}, \;\; \forall i \in \{1,\ldots,N\} \text{ y } \forall k \in \{1,2,3\}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.19. La empresa *Giuseppe S.A.* fabrica P tipos de tubos diferentes para riesgo y cuenta para ello con M máquinas diferentes. Cada tubo se puede producir en cada una de las máquinas.

El costo de producir una tonelada de tubo i en la máquin a j es cp_{ij}. El precio de venta de una tonelada del tubo i es p_i.

A lo largo de un mes se puede usar la misma máquina para producir diferentes tubos. El costo de realizar un cambio de producto en la máquina j es cc_j. La cantidad máxima de cambios permitidos en la máquina j durante el mes k es $camb_{ij}$ (asumimos que el primer seteo de un mes también es un cambio).

La demanda prevista del tubo i para el mes s es d_{is}. Podemos suponer que la demanda ocurre toda junta al final del mes.

Se permite que la firma produzca en un mes para demanda que tendrá en un mes posterior, pero incurrirá en un costo de stock que se mide a través del capital inmovilizado (asumimos que *porc* es la tasa mensual de interés bancario).

La cantidad de horas necesarias para la producción de una tonelada del tubo i en la máquina j es $hton_{ij}$. La cantidad de horas que demanda un cambio en la máquina j es h_j y la cantidad de horas que puede estar prendida la máquina j (produciendo o en un cambio) durante el mes k es hs_{jk}.

Tenemos que planificar la producción para los próximos m meses, maximizando la ganancia de la firma.

Formular un modelo de programación lineal entera para resolver el problema.

Sugerencia: Contemplar en el modelo el mes en que se produce y para qué mes se produce.

Solución 1.19.

- Variables,

$$
\begin{aligned}
x_{ijkl} = &\;\; \text{cantidad de toneladas de tubo } i \text{ en la máquina } j \text{ producida en el } k \text{ para el mes } l \\
w_{ijk} = &\begin{cases} 1 & \text{se produjo tubo } i \text{ en la máquina } j \text{ en el mes } k \\ 0 & \text{caso contario} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Resricciones

$$x_{ijkl} \leq d_{il} w_{ijk}, \qquad \forall i, j, k \text{ y } l = k, \dots, m$$

(relación entre las variables)

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{M} x_{ijks} \leq d_{is}, \qquad \forall i, s$$

(la cantidad de toneladas producidas no supera la demanda)

$$\sum_{i=1}^{P} w_{ijk} \leq camb_{ik}, \qquad \forall j, k$$

(la cantidad de producción de la máquina j no supera los cambios)

$$\sum_{i=1}^{P} \sum_{l=k}^{m} (x_{ijkl} + hton_{ij}) + \sum_{i=1}^{P} h_j w_{jik} \leq hs_{jk}, \qquad \forall j, k$$

(no se puede superar la cantidad de horas que está prendida una máquina)

- Función Objetivo,

$$z = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} [p_i - cp_{ij} - (l-k) porc \cdot cp_{ij}]\, x_{ijkl} - \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{s} cc_j \cdot w_{ijk}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{máx } & z \\
s.a. \ & x_{ijkl} \leq d_{il} w_{ijk}, \qquad \forall i, j, k \text{ y } l = k, \dots, m \\
& \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{M} x_{ijkl} \leq d_{is}, \qquad \forall i, s \\
& \sum_{i=1}^{P} w_{ijk} \leq camb_{ik}, \qquad \forall j, k \\
& \sum_{i=1}^{P} \sum_{l=k}^{m} (x_{ijkl} \cdot hton_{ij}) + \sum_{i=1}^{P} h_j \cdot w_{jik} \leq hs_{jk}, \qquad \forall j, k \\
& x_{ijk} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, l \geq k \\
& w_{ijk} \in \{0, 1\}, \forall i, j, k
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.20. La Universidad de Buenos Aires está organizando un nuevo Master en Investigación Operativa para el año 2021 (virtual, por los efectos del COVID) y para ello ha definido una serie de criterios para seleccionar a los 40 nuevos alumnos del total de 200 postulantes.

Los 200 postulantes han pasado por un examen de admisión del que han salido con un puntaje P_i (para cada postulante i).

La Universidad quiere fomentar en sus estudios de posgrado la participación de mujeres y de personas nacidas fuera de Buenos Aires y ha establecido entonces que al menos un 33 % de los seleccionados deben ser mujeres y un 40 % deben ser del Interior.

Como se quiere priorizar a los postulantes con mejor puntaje, se ha decidido que el 5 % con mejor puntaje en el examen de admisión tiene que ser elegido y, además, dados cualesquiera dos postulantes con la misma situación de género (hombre / mujer) y lugar de nacimiento (BA / Interior), no puede pasar que el de menos puntaje sea elegido si no es elegido el de más puntaje (esta condición rige para postulantes que comparten ambos criterior).

(a) Supongamos que se pretende que el último de los elegidos (según el ranking de puntajes), tenga el mejor ranking posible.

Diseñe un modelo de programación lineal entera que permita a la Universidad de Buenos Aires elegir a sus 40 alumnos para el nuevo Master, respetando todas las condiciones solicitadas.

Sugerencia: Puede asumir que la tabla de puntajes P_i viene dada de mayor a menor.

(b) Suponga ahora que le piden que elija al conjunto de 40 postulantes que cumpla con todas las condiciones solicitadas pero que maximice la suma de los puntajes.

Modifique el modelo del ítem anterior para responder al nuevo requerimiento.

(c) Qué se debería plantear para encontrar la segunda mejor solución una vez que ya se haya obtenido la primera?

Solución 1.20.
Sean los conjuntos

$$\begin{aligned} H &= \{1,\dots,h\}, && \text{(cantidad de hombres)}\\ M &= \{1,\dots,m\}, && \text{(cantidad de mujeres)}\\ I &= \{1,\dots,i\}, && \text{(cantidad de personas del interior)}\\ BA &= \{1,\dots,b\}, && \text{(cantidad de personas de Buenos Aires)} \end{aligned}$$

(a) Teniendo en cuenta que la tabla de puntajes está ordenada de mayor a menor.

- Variables,

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{si el estudiante } k \text{ es elegido} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{200} x_k &= 40, && \text{(hay que elegir 40 alumnos)}\\ \sum_{k\in M} x_k &\geq 14, && \text{(al menos debe haber 33 \% de mujeres)}\\ \sum_{k\in I} x_k &\geq 16, && \text{(al menos debe haber 40 \% del interior)}\\ x_k &= 1, && \forall k = 1,\dots,10 \end{aligned}$$

(el 5 % con mejor puntaje en el examen de admisión tiene que ser elegido)

$$x_k \leq x_s, \quad \forall s < k \text{ y } \forall k, s \in H\cap BA, M\cap I, H\cap I, M\cap BA$$

(dados cualesquiera dos postulantes no puede pasar que el de menos puntaje sea elegido si no es elegido el demás puntaje)

- Función Objetivo,

$$z = \max kx_k$$

Luego,

$$\begin{aligned} \min\ & z\\ s.a.\ & \sum_{k=1}^{200} x_k = 40,\\ & \sum_{k\in M} x_k \geq 14,\\ & \sum_{k\in I} x_k \geq 16,\\ & x_k = 1, \qquad \forall k = 1,\dots,10\\ & x_k \leq x_s, \qquad \forall s < k \text{ y } \forall k, s \in H\cap BA, M\cap I, H\cap I, M\cap BA\\ & z \geq kx_k, \qquad \forall k = 1,\dots,200\\ & z \in \mathbb{R}_{\geq 0}\\ & x_k \in \{0,1\}, \qquad \forall k = 1,\dots,200 \end{aligned}$$

(b) Teniendo en cuenta el ítem anterior, lo único que cambia es la Función Objetivo. Luego,

$$z = \sum_{k=1}^{200} p_k x_k$$

y, por lo tanto, el problema se resuelve planteando (usando las restricciones del ítem anterior)

$$\max z$$

Otra manera de resolver el problema es plantear la Función Objetivo

$$z = \sum_{k=1}^{200} k x_k, \qquad \text{(de esta manera de obtienen el ranking de los elegidos)}$$

y lo que buscamos es

$$\text{mín}\, z$$

Por otra parte, hay que notar el hecho de que podría pasar que el peor puntaje esté, por ejemplo, en el lugar número 41. En este caso, por como está planteada la función objetivo, el solver podría no distinguir entre las opciones que se encuentran desde la posición 1 hasta la 40 (siempre teniendo en cuenta que se cumplen las restricciones) generando, de esa manera, un empate que no está siendo considerado.

Para salvar este detalle, se puede escribir la Función Objetivo como

$$w = z + \varepsilon \sum_{k=1}^{200} k x_k$$

(c) Para resolver ésto, primero necesitamos tener hecho alguno de los ítems anteriores. Una vez que se tiene el conjunto solucón (que llamaremos MS) que representa los 40 mejores candidatos seleccionados, se vuelve a resolver el problema anterior junto con la solución obtenida pero agregando la reestricción:

$$\sum_{s \in MS} x_i \leq 39$$

Ejercicio 1.21. Una empresa quiere financiar 8 proyectos en los proximos 5 años y dispone de un presupusto anual de 35 millones de pesos para ello.

Cada proyecto aprobado será ejecutado sobre un periodo de tres años. Los rendimientos anuales esperados una vez concluidos y los gastos anuales para cada proyecto se recogen en la siguiente tabla:

Proyecto	Gastos 1er Año	Gastos 2do Año	Gastos 3er Año	Rendimientos
1	12	22	38	40
2	-	13	20	29
3	-	-	-	19
4	-	-	-	12
5	-	-	-	12
6	-	-	-	12
7	-	-	-	12
8	-	-	-	12

Debe decidirse que proyectos financiar, y cuando comenzarlos, con el fin de maximizar los beneficios sobre un periodo de 15 años, teniendo en cuenta que:

a) De los proyectos 4 y 7, como mucho puede financiarse uno.

b) De los proyectos 2 y 3, solamente se realizaran ambos, si no se realizan ni el proyecto 1 ni el proyecto 5.

c) Hay dos años en que el presupuesto debará reducirse en 5 millones.

d) La primera fase del proyecto 2 debe estar acabada para iniciar los proyectos $1, 3$ y 6.

e) Los gastos anuales estimados de todos los proyectos aumentan un 5 % cada año que se demore el comienzo.

Solución 1.21.

- Variables,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si empiezo a financiar el proyecto } i \text{ en el año } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{si financio el proyecto } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si reduzco el presupuesto en el año } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$r_i = \text{rendimiento anual del proyecto } i \text{ una vez terminado}$$

$$c_{ir} = \text{costo del año } r \text{ de realización del proyecto } i$$

- Restricciones

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = f_i, \qquad \forall i \in \{1,\dots,8\}$$

(cada proyecto tarda 3 años)

$$x_{ij} = 0, \qquad \forall i \in \{1,\dots,8\} \text{ y } j = 4,5$$

()

$$\sum_{j=1}^{5} y_j = 2$$

(se reduce el presupuesto en dos años)

$$\sum_{i=1}^{8} x_{ij}c_{i1}(1{,}05)^{j-1} + x_{ij-1}c_{i2}(1{,}05)^{j-2} + x_{ij-2}c_{i3}(1{,}05)^{j-3} \leq 35 - 5y_j, \qquad \forall 3 \leq j \leq 5$$

(se respeta el presupuesto anual)

$$\sum_{i=1}^{8} x_{ij}c_{i1}(1{,}05)^{j-1} + x_{ij-1}c_{i2}(1{,}05)^{j-2} \leq 35 - 5y_j, \qquad j = 2$$

(se respeta el presupuesto anual)

$$\sum_{i=1}^{8} x_{ij}c_{i1} \leq 35 - 5y_j, \qquad j = 1$$

(se respeta el presupuesto anual)

$$f_4 + f_7 \leq 1$$

(no se puede financiar 4 y 7)

$$2(f_2 + f_3) + f_1 + f_5 \leq 4$$

(sólo se puede financiar 2 y 3 si no se financia ni 1 ni 5)

$$\sum_{s=1}^{j} x_{is} \leq \sum_{s=1}^{j} x_{2s}, \qquad \forall j, i \in \{1,3,6\}$$

(la primera parte del proyecto 2 sólo se empieza luego del 1,3 y 6)

$$x_{2j} + x_{ij} \leq 1, \qquad \forall j, i \in \{1,3,6\}$$

(la primera parte del proyecto 2 sólo se empieza luego del 1,3 y 6)

- Función Objetivo

$$z = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3} [x_{ij} r_i (15 - (j+2))] - GASTO$$

donde

$$GASTO = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{3} \left[x_{ij}c_{i1}(1{,}05)^{j-1} + x_{ij-1}c_{i3}(1{,}05)^{j-3}\right] + \sum_{i=1}^{8} [e_{i2}c_{i1}(1{,}05) + x_{i1}c_{i2} + x_{i1}c_{i1}]$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\text{máx } & z \\
s.a. & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = f_i, \qquad \forall i \in \{1,\dots,8\} \\
& x_{ij} = 0, \qquad \forall i \in \{1,\dots,8\} \text{ y } j = 4,5 \\
& \sum_{j=1}^{5} y_j = 2 \\
& \sum_{i=1}^{8} x_{ij}c_{i1}(1{,}05)^{j-1} + x_{ij-1}c_{i2}(1{,}05)^{j-2} + x_{ij-2}c_{i3}(1{,}05)^{j-3} \leq 35 - 5y_j, \qquad \forall 3 \leq j \leq 5 \\
& \sum_{i=1}^{8} x_{ij}c_{i1}(1{,}05)^{j-1} + x_{ij-1}c_{i2}(1{,}05)^{j-2} \leq 35 - 5y_j, \qquad j = 2 \\
& \sum_{i=1}^{8} x_{ij}c_{i1} \leq 35 - 5y_j, \qquad j = 1 \\
& f_4 + f_7 \leq 1 \\
& 2(f_2 + f_3) + f_1 + f_5 \leq 4 \\
& \sum_{s=1}^{j} x_{is} \leq \sum_{s=1}^{j} x_{2s}, \qquad \forall j, i \in \{1,3,6\} \\
& x_{2j} + x_{ij} \leq 1, \qquad \forall j, i \in \{1,3,6\}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.22. Disney decidió abrir un parque de diversiones en Buenos Aires y debe decidir las atracciones que poseerá el recinto dentro de las A disponibles.

Por exigencias de la plana mayor de la compañia se sabe que al menos M ($M < A$) atracciones deben ser instaladas, los ejecutivos también han señalado que por razones técnicas no se puede instalar la atraccíon 5 sin instalar la 6 y viceversa, o sea, o están ambas o no está ninguna. También han mencionado que dadas las similitudes entre la atracción 3 y 4 sólo una de las dos puede estar en el parque (no es obligación que alguna esté). Además, señalaron que las atracciones 1 y 2 son muy emblemáticas por lo que deben estar presentes.

Por su parte es sabido que es política de la empresa que una atracción no puede estar en más de 3 parques Disney a lo largo del mundo. Luego el dato conocido $Esta_{ap}$ vale 1 si la atrcción a está presente en el parque p y 0 en caso contrario (para $a = 1,\dots,A$ y $p = 1,\dots,P$).

A su vez cada una de las posibles atracciones ha sido evaluada con una nota conocida de antemano (n_a). Para que un parque sea rentable se sabe que la nota promedio de las atracciones que éste posee debe ser mayor o igual a NOTAMIN, es evidente que Disney desea que su nuevo parque sea rentable.

La empresa también debe comprar los terrenos en los que se contruirá el parque. Los sitios disponibles son 4 y cada uno tiene un tamaño de $T_i\ m^2$ con $i = 1,\dots,4$. Además se sabe que cada atracción requiere de $U_a m^2$ de espacio, luego es posible que Disney tenga que comprar más de un terreno. Pero no todos los terrenos son adyacentes y no puede ocurrir que las atracciones queden incomunicadas, es decir, que no sea posible ir de un lugar del parque a otro. La situación de los terrenos es la siguiente: el 1 limita con el 2, este a su vez también limita con el 3 y, este último, lo hace, además, con el 4 (ver figura)

1	2	3	4

Formule un modelo de programación lineal entera que permita definir qué atracciones instalar y qué terrenos comprar, bajo el objetivo de minimizar el costo de construcción del parte. Suponga, para ésto, que construir una atracción cuesta $\$S_a$ y el terreno vale $\$L_i$.

Solución 1.22.

- Variables,

$$
x_a = \begin{cases} 1 & \text{si se instala la atracción } a \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
$$

$$
y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se compra el terreno } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
$$

- Restricciones,

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{A} x_a \geq M, & \qquad \text{(por los menos } M \text{ atracciones)} \\
x_5 = x_6, & \qquad \text{(atracciones 5 y 6 están ambas o ninguna)} \\
x_3 + x_4 \leq 1, & \qquad \text{(sólo puede estar la atracción 3 o la 4)} \\
x_1 + x_2 = 2, & \qquad \text{(las atracciones 1 y 2 deben estar)} \\
x_a \left(1 + \sum_{p=1}^{P} Esta_{ap}\right) \leq 3, & \qquad \text{(cada atracción está en no más de 3 parques)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{A} x_a U_a \leq \sum_{i=1}^{P} y_i T_i, & \qquad \text{(rentabilidad del parque)} \\
y_1 + y_3 - 1 \leq y_2, & \qquad \text{(adyacencia de los terrenos)} \\
y_2 + y_4 - 1 \leq y_3, & \qquad \text{(adyacencia de los terrenos)} \\
2(y_2 + y_4 - 1) \leq y_2 + y_3, & \qquad \text{(adyacencia de los terrenos)}
\end{aligned}
$$

- Función Objetivo

$$
z = \sum_{a=1}^{A} x_a S_a + \sum_{i=1}^{P} y_i L_i
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \;\; & z \\
s.a. \;\; & \sum_{a=1}^{A} x_a \geq M, \\
x_5 &= x_6, \\
x_3 + x_4 &\leq 1, \\
x_1 + x_2 &= 2, \\
x_a \left(1 + \sum_{p=1}^{P} Esta_{ap}\right) &\leq 3 \\
\sum_{a=1}^{A} x_a U_a &\leq \sum_{i=1}^{P} y_i T_i, \\
y_1 + y_3 - 1 &\leq y_2, \\
y_2 + y_4 - 1 &\leq y_3, \\
2(y_2 + y_4 - 1) &\leq y_2 + y_3, \\
x_a &\in \{0, 1\}, \forall a \in \{1, \dots, A\} \\
y_i &\in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, P\}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.23. Las eliminatorias sudamericanas para el Mundial de Fútbol Qatar 2022 serán jugadas por 10 equipos. Los 5 primeros clasifican para el Mundial y el sistema es de todos contra todos con partido y revancha. La asignación de puntaje es 3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate.

(a) Diseñe un modelo de programación lineal entera que (asignando todos los resultados posibles) antes de realizada la primer fecha indique cuál es la máxima cantidad de puntos con que Argentina puede no clasificar para Qatar 2022.

(b) Si en la primera fecha, Argentina (equipo 1) gana su partido frente a la selección número 2 de la eliminatoria, cómo se incluye este resultado en el modelo? Y si es un empate? Y si pierde?

(c) Una vez resuelto el modelo para una fecha determinada de la eliminatoria, qué le contestaría al DT argentino Scaloni si éste le pregunta con cuántos puntos tiene Argentina garantizada su clasificación?

Sugerencias: utilice al menos una familia de variables enteras que defina la cantidad de partidos que el equipo i le gana al equipo j a lo largo de la Eliminatoria y una variable entera para cada equipo rival de Argentina que valga 1 si dicho conjunto rival tiene igual o más puntos que Argentina al finalizar la Eliminatoria, y 0 en caso contrario.

Solución 1.23.

(a)
- Variables,

$$x_{ij} = \text{cantidad de partidos que el equipo } i \text{ le gana al equipo } j \text{ (durante la eliminatoria)}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } j \text{ (al terminar la eliminatoria) tiene igual o más puntos que el equipo 1 (Argentina)} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$p_i = \text{puntos del equipo } i \text{ (al terminar la eliminatoria)}$$

- Restricciones

$$p_i = 3\sum_{j=1}^{9} x_{ij} + \sum_{j=1}^{9}(2 - x_{ij} - y_j)$$

$$\sum_{j=1}^{9} y_j \geq 5, \qquad \text{(hay 5 o más equipos que superaron al equipo argentino)}$$

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 2, \qquad \text{(cantidad de posibles resultados)}$$

$$(p_j - p_1) \leq My_j - 1, \qquad (y_j \text{ vale 1 cuando el equipo } j \text{ tiene igual o mayor puntaje que Argentina})$$

$$(p_1 - p_j) \leq M(1 - y_j), \qquad (y_j \text{ vale 0 cuando el equipo } j \text{ tiene menor puntaje que Argentina})$$

- Función Objetivo

$$z = p_1$$

donde p_1 es el equipo argentino.

Luego,

$$\begin{aligned} \text{máx } & p_1 \\ s.a. \ & p_i = 3\sum_{j=1}^{9} x_{ij} + \sum_{j=1}^{9}(2 - x_{ij} - y_j) \\ & \sum_{j=1}^{9} y_j \geq 5, \\ & x_{ij} + x_{ji} \leq 2, \\ & (p_j - p_1) \leq My_j - 1, \\ & (p_1 - p_j) \leq M(1 - y_j), \\ x_{ij}, p_i & \in \{0, 1, 2\} \\ y_j & \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

(b) Por ejemplo, si luego de la primer ronda el equipo argentino le gana al segundo equipo entonces ese resultado se incluye como una restricción del tipo

$$x_{12} \geq 1$$

si el equipo argentino pierde contra el segundo equipo entonces la restricción será de la pinta

$$x_{12} \leq 1$$

y, por último, si el resultado termina en un empate

$$x_{12} + x_{21} \leq 1$$

(c) La clasificación estaría garantizada si Argentina obtiene un puntaje $1+$ (resultado del modelo [a]).

Ejercicio 1.24. En un hospital se desea implementar un nuevo menú semanal para los pacientes internados y el personal médico. Cada día de la semana consta de un almuerzo y una cena. Cada colación (almuerzo y cena) está formada por una **entrada**, un **plato principal** y un **postre**, siendo el costo de cada colación, la suma de los costos de los 3 platos que la componen.

Se tienen los siguientes datos:

- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_E\}$. Conjunto con las distintas entradas posibles para el menú.
- $\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_R\}$. Conjunto con las distintas platos principales posibles para el menú.
- $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_P\}$. Conjunto con las distintas postre posibles para el menú.
- $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_A\}$. Conjunto con las distintas atributos nutricionales a considerar. Además, para cada $a \in \mathcal{A}$ se tienen los valores $a_{\text{máx}}$ y $a_{\text{mín}}$, que son los valores máximos y mínimos diarios recomendados por el a-ésimo atributo nutricional.
- c_e, c_r y c_p para $e \in \mathcal{E}$, $r \in \mathcal{R}$ y $p \in \mathcal{P}$ es el costo de cada entrada, plato principal y postre respectivamente.
- $m_{e,a}, m_{r,a}$ y $m_{p,a}$ para $e \in \mathcal{E}$, $r \in \mathcal{R}$, $p \in \mathcal{P}$ y $a \in \mathcal{A}$ es el a-ésimo aporte nutricional de cada entrada, plato principal y postre respectivamente.
- Para cada $p \in \mathcal{P}$ se tiene como dato f_P, que vale 1 (uno) si el p-ésimo postre posee fruta y 0 (cero) sino.

Por ser alumnos de *Investigación Operativa*, te contratan para que desarrolles un modelo de programación lineal entera que cumpla las condiciones:

a) Minimice el máximo costo semanal entre cada tipo de colaciones del menú.

b) Elija exactamente una combinación de **entrada**, un **plato principal** y un **postre** por colación.

c) No repita un mismo **plato principal** entre todas las colaciones de la semana.

d) Cada **entrada** y **postre** se repite a lo sumo una vez durante la semana.

e) El aporte nutricional de las colaciones de cada día se encuentra dentro de los valores máximos y mínimos recomendados para cada **atributo nutricional**.

f) Al menos uno de los **postres** de cada día debe contener fruta.

g) Se tiene un presupuesto de C pesos diarios.

Sugerencia: Dividir la semana en 14 colaciones donde las impares sean los almuerzos y las pares sean las cenas.

Solución 1.24.

- Variables,

$$x_{derp} = \begin{cases} 1 & \text{si la colación del almuerdo en el día } d \text{ está compuesto por la entrada } e, \\ & \qquad \text{un plato principal } r \text{ y un postre } p \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$y_{derp} = \begin{cases} 1 & \text{si la colación de la cena en el día } d \text{ está compuesto por la entrada } e, \\ & \qquad \text{un plato principal } r \text{ y un postre } p \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{p \in \mathcal{P}} x_{derp} = 1, \qquad \forall d \in \{1, \ldots, 7\}$$

(se elige exactamente una combinación para el almuerzo en cada día)

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{p \in \mathcal{P}} y_{derp} = 1, \qquad \forall d \in \{1, \ldots, 7\}$$

(se elige exactamente una combinación para la cena en cada día)

$$\sum_{d=1}^{7} (x_{derp} + y_{derp}) = 1, \qquad \forall e \in \mathcal{E} \text{ y } \forall p \in \mathcal{P}$$

(no repitir un mismo plato principal entre todas las colaciones de la semana)

$$\sum_{d=1}^{7} (x_{derp} + y_{derp}) \leq 2, \qquad \forall r \in \mathcal{R} \text{ y } \forall p \in \mathcal{P}$$

(cada entrada se repite a lo sumo una vez durante la semana.)

$$\sum_{d=1}^{7} (x_{derp} + y_{derp}) \leq 2, \qquad \forall r \in \mathcal{R} \text{ y } \forall e \in \mathcal{E}$$

(cada postre se repite a lo sumo una vez durante la semana.)

$$\sum_{d=1}^{7}\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(x_{derp}+y_{derp})=14,$$

(cantidad de colaciones semanales)

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(m_{e,a}+m_{r,a}+m_{p,a})(x_{derp}+y_{derp})\leq a_{\text{máx}},\qquad \forall d\in\{1,\dots,7\}$$

(el aporte nutricional de cada día se encuentra dentro de los valores máximos)

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(m_{e,a}+m_{r,a}+m_{p,a})(x_{derp}+y_{derp})\leq a_{\text{mín}},\qquad \forall d\in\{1,\dots,7\}$$

(el aporte nutricional de cada día se encuentra dentro de los valores mínimos)

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}f_p(x_{derp}+y_{derp})\geq 1,\qquad \forall d\in\{1,\dots,7\},\ \forall e\in\mathcal{E}\text{ y }\forall r\in\mathcal{R}$$

(al menos uno de los postres de cada día debe contener fruta)

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(c_e+c_r+c_p)(x_{derp}+y_{derp})\leq C,\qquad \forall d\in\{1,\dots,7\}$$

(se tiene un presupuesto de C pesos diarios)

- Función Objetivo

$$\text{máx}\sum_{d=1}^{7}\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(c_e+c_r+c_p)(x_{derp}+y_{derp})$$

Luego,

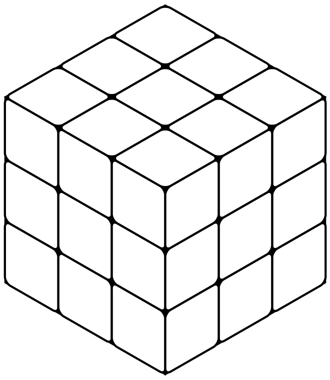
$$\begin{aligned}
&\text{mín}\ z\\
s.a.\quad &\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}x_{derp}=1, && \forall d\in\{1,\dots,7\}\\
&\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}y_{derp}=1, && \forall d\in\{1,\dots,7\}\\
&\sum_{d=1}^{7}(x_{derp}+y_{derp})=1, && \forall e\in\mathcal{E}\text{ y }\forall p\in\mathcal{P}\\
&\sum_{d=1}^{7}(x_{derp}+y_{derp})\leq 2, && \forall r\in\mathcal{R}\text{ y }\forall p\in\mathcal{P}\\
&\sum_{d=1}^{7}(x_{derp}+y_{derp})\leq 2, && \forall r\in\mathcal{R}\text{ y }\forall e\in\mathcal{E}\\
&\sum_{d=1}^{7}\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(x_{derp}+y_{derp})=14,\\
&\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(m_{e,a}+m_{r,a}+m_{p,a})(x_{derp}+y_{derp})\leq a_{\text{máx}}, && \forall d\in\{1,\dots,7\}\\
&\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(m_{e,a}+m_{r,a}+m_{p,a})(x_{derp}+y_{derp})\leq a_{\text{mín}}, && \forall d\in\{1,\dots,7\}\\
&\sum_{p\in\mathcal{P}}f_p(x_{derp}+y_{derp})\geq 1, && \forall d\in\{1,\dots,7\},\ \forall e\in\mathcal{E}\text{ y }\forall r\in\mathcal{R}\\
&\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(c_e+c_r+c_p)(x_{derp}+y_{derp})\leq C, && \forall d\in\{1,\dots,7\}\\
&z\geq\sum_{d=1}^{7}\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(c_e+c_r+c_p)x_{derp}\\
&z\geq\sum_{d=1}^{7}\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{p\in\mathcal{P}}(c_e+c_r+c_p)y_{derp}\\
&x_{derp},y_{derp}\in\{0,1\}, && \forall d\in\{1,\dots,7\},\ \forall p\in\mathcal{P},\ \forall r\in\mathcal{R}\text{ y }\forall e\in\mathcal{E}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.25. Como se muestra en la figura, 27 cubos están organizados en un arreglo tridimencional de $3 \times 3 \times 3$.

Tres cubos se consideran alineados si están alineados horizontal o verticalmente o si forman una diagonal (de 3 cubos).

Dadas 13 bolas blancas y 14 bolas negras, planter un problema de programación lineal entera que, al ser resuelto, minimice el número de líneas con bolas del mismo color.

Sugerencia: Hay 49 líneas posibles, definir un conjunto que las describa.



Solución 1.25.
Definimos, primero, los siguientes conjuntos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, 27\}, && \text{(conjunto de celdas)}\\
&\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, 49\}, && \text{(conjunto de líneas)}\\
&\mathcal{I}_j = \{i \in \mathcal{C} : i \text{ pertenece a la línea } j\}, && \forall j \in \mathcal{J}
\end{aligned}
$$

- Variables,

$$
x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se coloca una bola blanca en la celda } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
$$

$$
w_j = \begin{cases} 1 & \text{las bolas ubicadas en la } j\text{-ésima fila no son todas del mismo color} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
$$

- Restricciones,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i \in \mathcal{C}} x_i = 13, && && \text{(hay 13 bolitas blancas)}\\
&w_j \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_j} x_i \leq 2w_j + M(1 - w_j), && \forall j \in \mathcal{J} && \text{(relación entre las variables)}
\end{aligned}
$$

Notar que la relación entre x_i y w_j está dada por

$$
(\forall j \in \mathcal{J}) \qquad \left(w_j = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_j} x_i \leq 2 \right)
$$

en nuestro caso, sólo escribimos una restricción para "la ida" puesto que al estar maximizando sobre los w_j es claro que si $1 \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_j} x_i \leq 2$ entonces $w_j = 1$

- Función Objetivo,

$$
z = \sum_{j \in \mathcal{J}} w_j
$$

Notar que minimizar el número de líneas con bolas del mismo color es equivalente a maximizar el número de líneas con bolas de distinto color.

Luego,

$$\begin{aligned} \text{máx } & z \\ s.a. & \sum_{i\in\mathcal{C}} x_i = 13, \\ w_j \leq & \sum_{i\in\mathcal{I}_j} x_i \leq 2w_j + M(1-w_j), \qquad \forall j \in \mathcal{J} \\ & x_i, w_j \in \{0,1\}, \qquad \forall j \in \mathcal{J} \text{ y } \forall i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.26. Una empresa quiere decidir una ubicación de entre tres disponibles (U_1, U_2, U_3), para construir una fábrica donde elaborará 3 productos: P_1, P_2 y P_3.

La producción de estos productos genera un volumen de contaminación de 0,5; 2 y 1 cm^3 respectivamente por unidad producida (independientemente de la ubicación), pero los costos de producción y contratación (afectan al beneficio y a la capacidad de producción) y la política medioambiental varían de una ubicación a otra

La capacidad diaria de producción, el beneficio neto por unidad producida, el volumen máximo de contaminación diaria permitido (cm^3) y la penalización por excedente de contaminación (pesos / cm^3), en cada ubicación se recogen en la siguiente tabla:

	U_1	U_2	U_3
Benecio Unitario P_1	2	4	3
Benecio Unitario P_2	5	3	6
Benecio Unitario P_3	3	4	2
Capacidad Máxima de Producción	200	400	300
Volumen Máximo Contaminación	150	250	200
Penalización por Contaminación Excedente	200	150	100

Formular el modelo de programación lineal para determinar la ubicación de la fábrica y cuántas unidades de cada producto deben producirse, de modo que se maximize el beneficio total (sin contar posibles multas) y no se incurra en sanciones por más de 9000 pesos al día.

Solución 1.26.

- Variables,

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye en la ubicación } i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_{ji} &= \text{cantidad de producto } j \text{ producido en la ubicación } i \\ c_j &= \text{contaminación por unidad de los productos } j \\ b_{ij} &= \text{ganancia unitaria del producto } j \text{ producido en la ubicación } i \\ cap_i &= \text{capacidad máxima de producción en la ubicación } i \\ v_i &= \text{volumen máximo de contaminación en la ubicación } i \\ p_i &= \text{penalización por contaminación excedente en la ubicación } i \end{aligned}$$

- Sean los índices $\mathcal{I} = \{1,2,3\}$ y $\mathcal{J} = \{1,2,3\}$. Definimos las restricciones,

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = 1, \qquad \text{(elegimos una ubicación)}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}} y_{ij} \leq cap_i \cdot x_i, \qquad \forall i \in \mathcal{I} \qquad \text{(capacidad de producción)}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j \cdot y_{ij} - v_i \cdot x_i \right) p_i \leq 9000$$

(si se construyó en i, el primer sumando es el total de contaminación y, por lo tanto, no se debe incurrir a sanciones)

Notar que $\sum_{j\in\mathcal{J}} y_{ij} \leq cap_i \cdot x_i$ también modela el hecho de que si no se ubica la fábrica i, entonces no se puede producir en la ubicación i.

- Función Objetivo,

$$z = \underbrace{\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} y_{ij} b_{ij}}_{ganancia}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{máx} \;\; & z, \\
s.a. \;\; & \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i = 1, \\
& \sum_{j\in\mathcal{J}} y_{ij} \le cap_i \cdot x_i, \qquad \forall i \in \mathcal{I} \\
& \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\sum_{j\in\mathcal{J}} c_j \cdot y_{ij} - v_i \cdot x_i \right) p_i \le 9000 \\
& x_i \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in \mathcal{I} \\
& y_{ij} \in \mathbb{R}, \qquad \forall j \in \mathcal{J}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.27. Determine la mayor cantidad de alfiles que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 8×8 tal que no haya dos alfiles en la misma casilla y cada alfil sea amenazado como máximo por uno de los otros alfiles.

Nota: Un alfil amenaza a otro si ambos se encuentran en dos casillas distintas de una misma diagonal. El tablero tiene por diagonales las 2 diagonales principales y las paralelas a ellas.

Solución 1.27.
Definimos, primero, los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{1,2,\ldots,8\}, && \text{(conjunto de filas)} \\
\mathcal{J} &= \{1,2,\ldots,8\}, && \text{(conjunto de columnas)} \\
\mathcal{D}_{ij} &= \{(k,l) \in \mathcal{I}\times\mathcal{J} : (k+l = i+j) \vee (k-l = i-j)\}, && \text{(conjunto de diagonales)}
\end{aligned}$$

- Variables,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si ubico alfil en } (i,j) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones,

$$\sum_{(k,l)\in\mathcal{D}_{ij}} x_{kl} \le 2x_{ij} + M(1 - x_{ij}), \qquad \forall i \in \mathcal{I},\ \forall j \in \mathcal{J}$$

- Función Objetivo,

$$z = \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}} x_{ij}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{máx} \;\; & z, \\
s.a. \;\; & \sum_{(k,l)\in\mathcal{D}_{ij}} x_{kl} \le 2x_{ij} + M(1 - x_{ij}), \qquad \forall i \in \mathcal{I},\ \forall j \in \mathcal{J} \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in \mathcal{I},\ \forall j \in \mathcal{J}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.28. Una empresa de perfumes cuenta con tres plantas de producción (P_1, P_2 y P_3) y cuatro centros de embotellamiento y distribución (D_1, D_2, D_3 y D_4). La empresa fabrica tres fragancias (F_1, F_2 y F_3).

El costo de transporte por cada litro de fragancia (sin importar el tipo) desde la planta de producción al centro de embotellamiento y distribución y su demanda (en litros) viene dado por la siguiente tabla, así como también la cantidad de perfume (en litros) que produce cada planta:

	D_1	D_2	D_3	D_4	Producción F_1	Producción F_2	Producción F_3
P_1	3	7	11	9	845,3	650	235,5
P_2	5	3	7,5	8	560,5	710	460,5
P_3	8	6,5	7	2	150,7	600,5	800
Demanda de F_1	480,5	420,4	355,6	300	-	-	-
Demanda de F_2	645,5	315	620,2	379,8	-	-	-
Demanda de F_3	456	210,5	476,5	353	-	-	-

La demanda debe ser satisfecha. Notar que la cantidad de perfume transportada puede ser fraccionaria, ya que las fragancias son vendidas en botellas de distintos tamaños. Plantear un modelo de programación lineal para planificar el transporte de las fragancias de manera tal que el costo sea mínimo. Se pide además que:

(a) D_3 no puede recibir F_1 de P_1 y de P_2 al mismo tiempo (es decir, puede recibir a lo sumo de alguno de ellos).

(b) Que al menos el 15 % de la cantidad de F_2 que reciba D_4 provenga de P_3.

(c) Que D_1 reciba una cantidad estrictamente mayor que 50 litros de F_3 provenientes de P_1.

(d) Que la diferencia entre la cantidad de F_2 y de F_3 que recibe D_1 desde P_3 no supere los 40 litros.

Solución 1.28.

- Variables,

$$\begin{aligned}
x_{ijk} &= \text{litros de } F_i \text{ transportados desde } P_j \text{ hasta } D_k \\
y &= \text{variable binaria necesaria para la disyunción} \\
c_{jk} &= \text{costo de transportar un ligro de fragancia desde } P_j \text{ a } D_k \\
t_{ji} &= \text{producción de } F_i \text{ en } P_j \\
d_{jk} &= \text{demanda de } F_i \text{ en } D_k
\end{aligned}$$

- Restricciones,

$$\begin{aligned}
\sum_k x_{ijk} &\leq t_{ji}, \quad \forall i,j \qquad \text{(producción de cada } P_j\text{)} \\
\sum_j x_{ijk} &\geq d_{ik}, \quad \forall i,k \qquad \text{(demanda de cada } D_k\text{)} \\
x_{113} &\leq My \qquad \text{(a)} \\
x_{123} &\leq M(1-y) \qquad \text{(a)} \\
x_{234} &\geq \sum_j (0{,}15) x_{2j4} \qquad \text{(b)} \\
x_{311} &\geq 50+\varepsilon \qquad \text{(c)} \\
x_{231} - x_{331} &\leq 40 \qquad \text{(d)} \\
x_{231} - x_{331} &\geq -40 \qquad \text{(d)}
\end{aligned}$$

- Función Objetivo,

$$z = \sum_k \sum_j c_{jk} \left(\sum_i x_{ijk} \right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\min \ & z \\
s.a. \quad & \sum_k x_{ijk} \leq t_{ji}, \quad \forall i,j \\
& \sum_j x_{ijk} \geq d_{ik}, \quad \forall i,k \\
& x_{113} \leq My \\
& x_{123} \leq M(1-y) \\
& x_{234} \geq \sum_j (0{,}15) x_{2j4} \\
& x_{311} \geq 50+\varepsilon \\
& x_{231} - x_{331} \leq 40 \\
& x_{231} - x_{331} \geq -40 \\
& x_{ijk} \in \mathbb{R}, \forall i,j,k \\
& y \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.29.

(a) Se tienen $m+1$ variables binarias: $z, x_1, x_2, \ldots, x_m$. Modelar mediante restricciones lineales la expresión

$$z \Leftrightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m$$

Sugerencia: Puede ayudar analizar el caso $m = 2$.

(b) La organización de un congreso internacional decidió albergar a los n participantes del mismo en un hotel que tiene h habitaciones. La j-ésima habitación del hotel tiene capacidad para c_j personas, y tiene una calificación de e_j estrellas. Además se conoce que la i-ésima persona es de país de origen p_i, tiene a_i años y se dedica al estudio del tema t_i.

Luego de una larga deliberación, la organización concluyó que necesariamente al ubicar a cada persona en una habitación del hotel se debe cumplir que:

(i) Toda persona sea ubicada en alguna habitación.
(ii) Se evite asignar más personas a una habitación que la capacidad de la misma.
(iii) Se evite ubicar personas de Argentina y Brasil en una misma habitación.
(iv) No haya más de 2 personas que estudien el mismo tema en una misma habitación.
(v) Las personas que tengan al menos 50 años sean ubicadas en habitaciones de 3 estrellas o más.

(c) Por otro lado, la organización todavía no logró definir con qué criterio desempatar entre distintas posibles asignaciones. Las propuestas existentes son las siguientes:

(i) Minimizar la cantidad de habitaciones utilizadas (con al menos una persona).
(ii) Minimizar la máxima diferencia de edad entre dos personas de una misma habitación.
(iii) Dados G grupos de amigos (llamamos A_g al g-ésimo grupo de amigos), se busca maximizar la cantidad de grupos de amigos que son asignados a una misma habitación.
Sugerencia: Usar el ítem (a).

Tu tarea es formular un modelo de programación lineal entera que modele las condiciones que deben cumplirse necesariamente (ítem (b)) y, luego, formular cómo incorporar a ese modelo cada criterio de desempate entre soluciones (cada uno por separado, ítem (c)).

Solución 1.29.

(a) Se tienen $m+1$ variables binarias: $z, x_1, x_2, \ldots, x_m$. Luego,

$$(z \Leftrightarrow x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_m) \qquad \equiv \qquad \left(zm \leq \sum_{i=1}^{m} x_i \leq m - 1 + z \right)$$

(b) Sean los conjuntos,

$$\begin{aligned}
I &= \{1, \ldots, n\}, && \text{(cantidad de participantes)}\\
J &= \{1, \ldots, h\}, && \text{(cantidad de habitaciones)}\\
T &= \{\text{temas de estudio}\}, && \text{(cantidad de temas de estudio)}\\
\mathcal{J}_3 &= \{j \in J : \text{ la habitación } j \text{ es de 3 estrellas}\}, &&\\
\mathcal{I}_{50} &= \{i \in I : \text{la edad del participante } i \text{ es mayor a 50 años}\}, &&\\
T_k &= \{i \in I : t_i = k\}, && \text{(conjunto de temas)}\\
\mathcal{A} &= \{i \in I : p_i = \text{ “Argentina”}\}, &&\\
\mathcal{B} &= \{i \in I : p_i = \text{ “Brasil”}\}, &&
\end{aligned}$$

- Variables,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la persona } i \text{ es asignada a la habitación } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Restricciones
  (i) $\displaystyle\sum_{j \in J} x_{ij} = 1$, para todo $i \in I$.
  (ii) $\displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} \leq c_j$, para todo $j \in J$.

(iii) $x_{ij} + x_{kj} \leq 1$, para todo $j \in J$, para todo $i \in \mathcal{A}$ y para todo $k \in \mathcal{B}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{i \in T_k} x_{ij} \leq 2$, para todo $j \in J$ y para todo k tema de estudio.

(v) $\displaystyle\sum_{j \in \mathcal{J}_3} x_{ij} = 1$, para todo $i \in \mathcal{I}_{50}$

(c) (i) • Variables,

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si la habitación } j \text{ está ocupada} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

• Retricciones,

$$c_j \cdot z_j \geq \sum_{i \in I} x_{ij} \qquad \forall j \in J$$

Notar que como estamos minimizando, no es necesario plantear el hecho de que si $z_j = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} \geq 1$.

• Función Objetivo,

$$z = \sum_{j \in J} z_j$$

Y, planteamos

$$\min z$$

(ii) Una manera de resolver es planter

$$\begin{aligned} &\min\ z, \\ s.a. \qquad & z \geq a_i x_{ij} - a_k x_{kj} + (x_{ij} + x_{kj} - 2)M, \qquad \forall i, k \in I \text{ y } \forall j \in J \end{aligned}$$

Otra manera es plantear

$$\begin{aligned} &\min\ z, \\ s.a. \qquad & \alpha_j \geq a_i x_{ij} - M(1 - x_{ij}), \qquad \forall i \in I \text{ y } \forall j \in J \\ & \beta_j \leq a_i x_{ij} - M(1 - x_{ij}), \qquad \forall i \in I \text{ y } \forall j \in J \\ & z \geq \alpha_j - \beta_j, \qquad \forall j \in J \end{aligned}$$

(iii) Sea el conjunto $\mathcal{G} = \{\text{grupos de amigos}\}$ con $A_g \subset I$.

• Variables,

$$z_{gj} = \begin{cases} 1 & \text{si todos los amigos de } A_g \text{ están en la habitación } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

• Restricciones,

$$z_{gj}\sharp(A_g) \leq \sum_{i \in A_g} x_{ij}, \qquad \forall j \in J \text{ y } \forall g \in \mathcal{G}$$

$$\sum_{i \in A_g} x_{ij} \leq \sharp(A_g) - 1 + z_{gj}, \qquad \forall j \in J \text{ y } \forall g \in \mathcal{G}$$

• Función Objetivo,

$$z = \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{j \in J} z_{gj}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\max\ z \\ s.a. \qquad & z_{gj}\sharp(A_g) \leq \sum_{i \in A_g} x_{ij}, \qquad \forall j \in J \text{ y } \forall g \in \mathcal{G} \\ & \sum_{i \in A_g} x_{ij} \leq \sharp(A_g) - 1 + z_{gj}, \qquad \forall j \in J \text{ y } \forall g \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.30. Dado un mapa con n regiones (provincias o países), formular un modelo de programación lineal que permita minimizar la cantidad de colores necesarios para pintar el mapa, de manera tal que dos regiones limítrofes no sean pintadas con el mismo color.

Solución 1.30.
Definimos, primero, los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} &\mathcal{R} = \{1,\dots,n\}, && \text{(conjunto de regiones)}\\ &\mathcal{K} = \{1,\dots,n\}, && \text{(conjunto de colores)}\\ &\mathcal{A} = \{(i,j) : \text{la región } i \text{ comparte frontera con la región } j\}, && \text{(conjunto de vecindades)} \end{aligned}$$

- Variables,

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el color } k \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la región } i \text{ es coloreada con el color } k \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Restricciones,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathcal{K}} x_{ik} &= 1, \quad \forall i \in \mathcal{R} && \text{(Toda región es coloreada)}\\ x_{ik} + x_{ij} &\leq 1, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A},\ \forall k \in \mathcal{K} && \text{(Distinto color regiones limítrofes)}\\ x_{ik} &\leq y_k \quad \forall i \in \mathcal{R},\ \forall k \in \mathcal{K} && (k \text{ es utilizado si se usa para algún } i)\\ x_{ik} &\in \{0,1\} \quad \forall i \in \mathcal{R},\ \forall k \in \mathcal{K}\\ y_k &\in \{0,1\} \quad \forall k \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

- Función Objetivo,

$$z = \sum_{k\in\mathcal{K}} y_k$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\min z\\ s.a.\qquad & \sum_{k\in\mathcal{K}} x_{ik} = 1,\\ & x_{ik} + x_{ij} \leq 1, \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A},\ \forall k \in \mathcal{K}\\ & x_{ik} \leq y_k \quad \forall i \in \mathcal{R},\ \forall k \in \mathcal{K}\\ & x_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i \in \mathcal{R},\ \forall k \in \mathcal{K}\\ & y_k \in \{0,1\} \quad \forall k \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.31. Una companñía de construcción quiere mover arena desde sitios (A, B, C) de construcción que están terminados a tres nuevos sitios de construcción $(1, 2, 3)$.

Los kilos de arena que se encuentran en los sitios A, B y C es, respectivamente, 700 kg, 600 kg. y 400 kg. mientras que los sitios $1, 2$ y 3 requieren $800, 500$ y 400 kilos de arena respectivamente.

La siguiente tabla muestra el costo de trasladar cada kilo de arena desde un sitio de construcción terminada a uno nuevo:

	1	2	3
A	9	6	5
B	7	4	9
C	4	6	3

Se utilizan camiones para mover arena desde un sitio a otro. Cada camión tiene una capacidad de 600 kg. de arena.

Formular un modelo de programación lineal que determine el plan de transporte de costo mínimo, considerando que:

- usar un camión tiene un costo de \$50.
- se cuenta con 4 camiones (cada camión puede ser utilizado para un único par de sitio de construcción terminada y sitio nuevo).
- es posible alquilar un quinto camión por \$65.
- el sitio 2 no puede recibir arena de A y B simultáneamente.

Solución 1.31.

- Variables,

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= \text{kilos de arena transportados desde sitio } i \text{ a sitio } j \\
y_{ij} &= \text{cantidad de camiones utilizados para ir de } i \text{ a } j \\
c_{ij} &= \text{costo de trasladar cada kilo de arena desde sitio } i \text{ a sitio } j \\
w &= \begin{cases} 1 & \text{si se usan más de 5 camiones} \\ 0 & c.c. \end{cases} \\
z &= \text{variable binaria necesaria para la disyunción}
\end{aligned}$$

- Restricciones,

$$\begin{aligned}
\sum_i x_{i1} &= 800, && \text{(el sitio 1 requiere 800 kilos de arena)} \\
\sum_i x_{i2} &= 500, && \text{(el sitio 2 requiere 500 kilos de arena)} \\
\sum_i x_{i3} &= 400, && \text{(el sitio 3 requiere 400 kilos de arena)} \\
\sum_j x_{1j} &= 700, && \text{(el sitio } A \text{ tiene 700 kilos de arena)} \\
\sum_j x_{2j} &= 600, && \text{(el sitio } B \text{ tiene 600 kilos de arena)} \\
\sum_j x_{3j} &= 400, && \text{(el sitio } C \text{ tiene 400 kilos de arena)} \\
x_{ij} &\leq 600 y_{ij} \quad \forall i,j && \text{(cada camión tiene una capacidad de 600 kg. de arena)} \\
\sum_{i,j} y_{ij} &\leq 4 + w, && \text{(se cuenta con 4 camiones y, quizás, uno extra)} \\
y_{12} &\leq Mz, && \text{(el sitio 2 no puede recibir arena de } A \text{ y } B \text{ simultáneamente)} \\
y_{22} &\leq M(1-z), && \text{(el sitio 2 no puede recibir arena de } A \text{ y } B \text{ simultáneamente)} \\
x_{ij}; c_{ij} &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall i,j \\
y_{ij} &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i,j \\
w; z &\in \{0,1\}
\end{aligned}$$

- Función Objetivo,

$$z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + 50 \sum_{i,j} y_{ij} + 15w$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& \min z \\
s.a. \quad & \sum_i x_{i1} = 800, \\
& \sum_i x_{i2} = 500, \\
& \sum_i x_{i3} = 400, \\
& \sum_j x_{1j} = 700, \\
& \sum_j x_{2j} = 600, \\
& \sum_j x_{3j} = 400,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& x_{ij} \leq 600 y_{ij}, \\
& \sum_{i,j} y_{ij} \leq 4 + w, \\
& y_{12} \leq Mz, \\
& y_{22} \leq M(1-z), \\
& x_{ij}; c_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall i,j \\
& y_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \forall i,j \\
& w; z \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1.32. Una compañía minera empezará a operar en una determinada zona por los próximos 5 años para extraer, principalmente, minerales de hierro. En dicha zona se localizan cuatro minas pero, por razones ambientales, la empresa puede explotar a lo sumo tres de ellas cada año.

A pesar de que una mina puede no estar operando cierto año, es necesario que permanezca **abierta** (en el sentido que las regalías por su explotación se siguen pagando si operara en un año futuro - de los 5 pactados -).

Todas las minas se **abren** cuando la empresa empieza a trabajar en la zona. Claramente, si una mina dejase de funcionar, se cierra y se dejan de abonar regalías por ella. Anualmente, la compañía abonará regalías por cada una de las minas **abiertas**.

Debido a que la zona de minas explotada se encuentra cercana a una ciudad, se ha consensuado con sus habitantes que la empresa minera pague una multa en función de indicadores ambientales de los ríos próximos. Estos indicadores ambientales varían entre 0 y 5 y la función que indica la multa, en millones de dólares, es

$$
f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq a \leq 2 \\ 3a+1 & \text{si } 2 < a \leq 4 \\ 5a+7 & \text{si } 4 < a \leq 5 \end{cases}
$$

Por estudios ambientales, es sabido que, luego de un año de explotación, el indicador ambiental correspondiente es por lo menos $\frac{2}{3}$ de la cantidad de millones de toneladas de minerales de hierro extraída en ese año.

La cantidad de minerales de hierro que la minera podrá extraer cada año por cada mina tiene límites que se detallan en la Tabla. La cantidad de esos minerales varía según sea la mina de la cual se extraen y es medida en una escala de manera que la calidad de la mezcla de minerales resulta en una combinación lineal de la respectiva calidad de los minerales mezclados. Medidas en esas unidades, se tienen las calidades de los minerales de cada mina que figura en la siguiente tabla.

Mina	1	2	3	4
Regalía (en millones de dólares)	5	7	4	6
Límite superior de la cantidad de minerales extraída (en millones de toneladas)	2	2,5	1,7	3
Indicador de la calidad de minerales	1	0,7	1,5	0,5

En cada año, es necesario combinar el total de extracciones de cada mina para producir una mezcla de minerales de hierro de calidad $0,9; 0,8; 1,2; 1$ y $1,1$ respectivamente. La mezcla de minerales de hierro que se obtiene cada año se vende a 10 millones de dólares por tonelada.

Formular un problema de programación lineal mixto que, al ser resuelto, maximice la ganancia de la compañía minera.

Solución 1.32.
Definimos, primero, los siguientes conjuntos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \{1, \ldots, 4\}, && \text{(conjunto de minas)} \\
\mathcal{A} &= \{1, \ldots, 5\}, && \text{(conjunto de años)}
\end{aligned}
$$

y las siguientes notaciones,

$$
\begin{aligned}
B_i &= \text{cantidad máxima de minerales que se peuden extraer de la mina } i \\
Cal_t &= \text{calidad de minerales de hierro extraída en el año } t \\
r_i &= \text{regalías que se pagan por la mina } i
\end{aligned}
$$

- Variables,

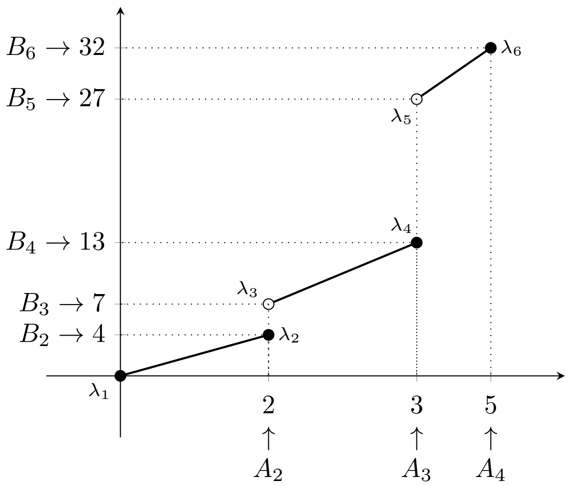
$$x_{it} = \text{cantidad de toneladas extraídas de la mina } i \text{ durante el año } t$$
$$w_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si se trabaja en la mina } i \text{ durante el año } t \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$v_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si la mina } i \text{ está abierta en el año } t \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$a_t = \text{indicador ambiental en el año } t$$

- Restricciones,

$$\sum_{i\in\mathcal{M}} w_{it} \leq 3, \quad \forall t \in \mathcal{A}$$
(a lo sumo se explotan o trabajan 3 minas por año)
$$w_{it} \leq v_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{A} \ \forall i \in \mathcal{M}$$
(sólo se pued trabajar en una mina si está abierta)
$$v_{i(t+1)} \leq v_{it}, \quad \forall t \in \{1,\ldots,4\} \ \forall i \in \mathcal{M}$$
(si se cierra una mina, no puede volver a abrirse)
$$x_{it} \leq B_i w_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{A} \ \forall i \in \mathcal{M}$$
(cota superior a la cantidad de minerales que se pueden extraer)
$$Cal_t(x_{1t}+x_{2t}+x_{3t}+x_{4t}) = 1x_{1t} + (0,7)x_{2t} + (1,5)x_{3t} + (0,5)x_{4t}, \quad \forall t \in \mathcal{A}$$
(la calidad de la mezcla de minerales resulta en una combinación lineal)
$$a_t \geq \frac{2}{3}\sum_{i\in\mathcal{M}} x_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{A}$$
(cotas del indicador ambiental)
$$0 \leq a_t \leq 5, \quad \forall t \in \mathcal{A}$$
(cotas del indicador ambiental)

Lo que queda es modelar la función que indica la multa

$$f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq a \leq 2 \\ 3a+1 & \text{si } 2 < a \leq 4 \\ 5a+7 & \text{si } 4 < a \leq 5 \end{cases}$$



En este caso, comenzamos definiendo los conjuntos $\mathcal{S} = \{1,2,3\}$ y $\mathcal{K} = \{1,\ldots,6\}$ y las variables δ_{st} (binaria) y λ_{jt} (real no negativa) donde

$$\delta_{st} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_t \text{ pertenece al segmento } s \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

(notemos que el índice t indica que para cada año se tiene una multa distinta).

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in\mathcal{S}} \delta_{st} = 1, &\qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
\lambda_{1t} + \lambda_{2t} = \delta_{1t}, &\qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
\lambda_{3t} + \lambda_{4t} = \delta_{2t}, &\qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
\lambda_{5t} + \lambda_{6t} = \delta_{3t}, &\qquad \forall t \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

como la funcón es discontinua

$$\begin{aligned}
\lambda_{3t} \leq 1 - \varepsilon, &\qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
\lambda_{5t} \leq 1 - \varepsilon, &\qquad \forall t \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

y, por último, para todo $t \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
a_t &= (0\lambda_{1t} + 2\lambda_{2t}) + (2\lambda_{3t} + 4\lambda_{4t}) + (4\lambda_{5t} + 5\lambda_{6t})\\
f_t &= (0\lambda_{1t} + 4\lambda_{2t}) + (7\lambda_{3t} + 13\lambda_{4t}) + (27\lambda_{5t} + 32\lambda_{6t})
\end{aligned}$$

(f_t es la multa que hay que pagar por contaminación).

- Función Objetivo,

$$z = 10\sum_{i\in\mathcal{M}}\sum_{t\in\mathcal{A}} x_{it} - \sum_{t\in\mathcal{A}} f_t - \sum_{i\in\mathcal{M}}\sum_{t\in\mathcal{A}} r_i v_{it}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\max \quad & z\\
s.a. \quad & \sum_{i\in\mathcal{M}} w_{it} \leq 3, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& w_{it} \leq v_{it}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathcal{M}\\
& v_{i(t+1)} \leq v_{it}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, 4\}\ \forall i \in \mathcal{M}\\
& x_{it} \leq B_i w_{it}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathcal{M}\\
& Cal_t(x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} + x_{4t}) = 1x_{1t} + (0,7)x_{2t} + (1,5)x_{3t} + (0,5)x_{4t}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& a_t \geq \frac{2}{3}\sum_{i\in\mathcal{M}} x_{it}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& 0 \leq a_t \leq 5, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& \sum_{s\in\mathcal{S}} \delta_{st} = 1, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& \lambda_{1t} + \lambda_{2t} = \delta_{1t}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& \lambda_{3t} + \lambda_{4t} = \delta_{2t}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& \lambda_{5t} + \lambda_{6t} = \delta_{3t}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& \lambda_{3t} \leq 1 - \varepsilon, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& \lambda_{5t} \leq 1 - \varepsilon, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& a_t = (0\lambda_{1t} + 2\lambda_{2t}) + (2\lambda_{3t} + 4\lambda_{4t}) + (4\lambda_{5t} + 5\lambda_{6t})\,, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& f_t = (0\lambda_{1t} + 4\lambda_{2t}) + (7\lambda_{3t} + 13\lambda_{4t}) + (27\lambda_{5t} + 32\lambda_{6t})\,, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\\
& x_{it} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathcal{M}\\
& w_{it}, v_{it} \in \{0, 1\}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathcal{M}\\
& a_t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \forall t\\
& \delta_{st} \in \{0, 1\}, \qquad \forall t \in \mathcal{A}\ \forall s \in \mathcal{S}\\
& \lambda_{jt} \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \forall j \in \mathcal{K}\ \forall t \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.33. A día de hoy (martes 1 de septiembre), la empresa "Mi casa" tiene en su almacén central los paquetes correspondientes a una serie de encargos que se detalla en la siguiente tabla:

Cliente	Destino	Peso (T)	Fecha Límite en destino	Fecha de arribo al almacén
C_{01}	D_{01}	12	20/09/2015	01/09/2015
C_{02}	D_{02}	12	18/09/2015	11/09/2015
C_{03}	D_{03}	12	02/10/2015	10/09/2015
C_{04}	D_{04}	12	19/09/2015	02/09/2015
C_{05}	D_{05}	12	25/09/2015	05/09/2015
C_{06}	D_{06}	12	29/09/2015	15/09/2015
C_{07}	D_{07}	12	12/09/2015	01/09/2015
C_{08}	D_{08}	12	12/10/2015	20/09/2015
C_{09}	D_{09}	12	15/09/2015	03/09/2015
C_{10}	D_{10}	12	06/10/2015	22/09/2015

Para ello dispone de una red de centros de distribución desde los cuales puede hacer las entregas a los diferentes destinos según la siguiente tabla que detalla los precios por K_g transportado:

		D_{01}	D_{02}	D_{03}	D_{04}	D_{05}	D_{06}	D_{07}	D_{08}	D_{09}	D_{10}
CD_1	Tiempo (días):	∞	1	1	2	3	∞	1	3	2	∞
	Costo ($\$K_g$):	∞	4	4	5	6	∞	4	6	5	∞
CD_2	Tiempo (días):	2	2	1	1	1	2	∞	2	∞	2
	Costo ($\$K_g$):	5	4	3	4	4	5	∞	5	∞	5
CD_3	Tiempo (días):	2	1	2	∞	3	1	1	∞	1	1
	Costo ($\$K_g$):	5	4	5	∞	6	4	4	∞	3	4

Para llevar los paquetes desde el almacén central hasta los centros de distribución utiliza los servicios de una segunda empresa especializada en el transporte de grandes volúmenes.

El coste de fletar un camión de esta segunda empresa para el porte, tiene un costo fijo según la ruta y el tamaño del camión y cada uno puede transportar un peso máximo. Estos costos y el tiempo del servicio se resumen en la siguiente tabla:

		CD_1	CD_2	CD_3
Tipo 1	<15T,($)	20000	20000	20000
Tipo 2	<45T,($)	50000	40000	50000
Tipo 3	<75T,($)	70000	80000	75000
	Tiempo (días))	3	2	4

"Mi casa" cobra a sus clientes un precio fijo por kg transportado, independientemente de la distancia al destino o tiempo necesario para hacer el envío (siempre que éste pueda realizarse).

a) Suponiendo que el problema fuera independiente del tiempo, plantee un problema de programacón lineal que permita decidir cómo transportar los paquetes del almacén central a los puntos de distribución de forma que

   (i) Se minimice el costo total de estos envíos.

   (ii) Los paquetes de cada envío deben viajar juntos.

b) Modifique la solución anterior para incluir el tiempo de los diferentes recorridos.

   (i) Todos los envíos deben estar en su destino en la fecha límite de llegada.

   (ii) Cada envío llega al almacén central en la fecha de arribo indicada.

c) Especifique cómo cambia el tamaño del problema si se incluye o no los requisitos temporales.

Solución 1.33.

Ejercicio 1.34. Una empresa quiere planificar a qué precio va a cobrar los pasajes para un vuelo el primero de enero en función del tiempo que queda antes de esa fecha. Analizando una base de clientes estimaron la demanda que tendrá, en función del precio y el tiempo restante en intervalos de 15 días.

Para pasajes turista, la demanda esperada es de

	Precio	1/7	16/7	1/8	16/8	1/9	16/9	1/10	16/10	1/11	16/11	1/12	16/12
Pasaje 1	$4000	38	42	45	48	52	55	57	61	65	70	72	80
Pasaje 2	$5000	28	30	32	33	40	42	44	49	52	63	65	70
Pasaje 3	$5500	25	27	28	29	30	31	33	37	45	55	63	69
Pasaje 4	$6000	16	18	20	20	23	27	31	35	43	52	60	67
Pasaje 5	$6500	8	15	17	19	22	25	29	33	40	48	56	62
Pasaje 6	$7000	3	6	10	14	18	22	26	30	34	38	45	50

Y para Business,

	Precio	1/7	16/7	1/8	16/8	1/9	16/9	1/10	16/10	1/11	16/11	1/12	16/12
Pasaje 1	\$8000	4	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8
Pasaje 2	\$10000	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6	7	7
Pasaje 3	\$11000	3	3	3	3	3	3	3	4	4	5	6	7
Pasaje 4	\$12000	2	2	2	2	2	3	3	3	4	5	6	7
Pasaje 5	\$13000	1	1	2	2	2	2	3	3	4	5	6	6
Pasaje 6	\$15000	0	0	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5

La compañía puede disponer hasta de un númer máximo de aviones para volar en la misma fecha a un costo fijo de \$2000000 cada uno. Posee dos modelos de aviones, el primer modelo con capacidad de 330 plazas turista y 28 Business, y el segundo con 312 plazas turista y 40 Business.

Puede disponer a lo sumo de 4 aviones del modelo 1 y de 3 del modelo 2.

Modele el problema de maximizar los ingresos proyectados de la aeroínea como un caso de programación lineal entera, sabiendo que las ventas proyectadas tienen que ser menores que la demanda esperada, y que no se permite la sobreventa.

a) Para simplificar el problema, en principio puede suponer que sólo existe pasajes turista.

b) Modele el problema para los dos tipos de pasajes, teniendo en cuenta que puede llegar a ser preferible otorgar pasajes Business a quienes compraron turista.

c) Suponga que el 15 de Julio la demanda fue algo distinta de lo esperado. ¿Cómo podemos actualizar los parámetros y volver a correr el modelo para optimizar la evolución de precios a seguir a partir del instante t_2?

Solución 1.34.

Ejercicio 1.35. Una empresa tiene n productos $(o_1, \dots, o_n)$, particionados en frágiles y rígidos. Cada uno de estos productos tiene que pasar por una serie de procesos. A o_i, se le tienen que llevar a cabo exactamente una vez, los procesos en $P_i \subseteq \{p_1, \dots, p_k\}$, con $k \in \mathbb{N}$.

Originalmente, los productos están en un depósito central, y no se les ha llevado a cabo proceso alguno. Existen exactamente k plantas donde se realizan cada uno de los procesos que deben efectuarse en cada producto.

Para realizar los procesos necesarios, cada día se movilizan algunos productos del depósito central hacia las plantas ejecutantes de procesos, que no son necesariamente la misma para todos los productos. Al finalizar el día, los productos vuelven al depósito central con el proceso realizado.

Cuando a un producto se le realizan todos los procesos requeridos, el producto es despachado a su destino ese mismo día. Todo este mecanismo utilizado está sujeto a ciertas restricciones adicionales.

- El j-ésimo proceso no puede albergar a más de b_j productos un mismo día.
- En total se dispone de una flota de T transportes que se pueden utilizar diariamente. De esos T transportes, sólo 3 son transportes especializados en objetos frágiles y, por lo tanto, no pueden movilizarse más de 3 objetos frágiles en un mismo día. Un transporte especializado en objetos frágiles también está capacitado para movilizar objetos rígidos en caso de ser necesario.
- El último proceso en ser llevado a cabo en cada producto debe ser el p_k, pues corresponde a su empaquetamiento. En particular, $p_k \in P_i$ para todo producto i. En el resto de los procesos no importa en cuál orden son llevados a cabo.
- El producto o_1 es distinguido. El jeque árabe pagó una tarifa especial por él y hay que garantizar que sea despachado lo antes posible.

Formular un problema de programación lineal que minimice la cantidad de días necesarios para despachar todos los productos

Solución 1.35.

Ejercicio 1.36. Se tiene un tablero de $m \times n$ casillas (m filas y n columnas). Originalmente hay peones de ajedrez ubicados en el tablero. Se desean ubicar caballos y torres de ajedrez en él, de forma tal que se maximice la cantidad de caballos ubicados. Además, de todas las soluciones que optimizan la cantidad de caballos, buscamos una que minimice la cantidad de torres ubicadas.

Como es de esperar, no se considera factible a cualquier ubicación de las piezas en el tablero. Concretamente, sólo se consideran factibles aquellas que cumplan que:

(1) Los caballos ubicados amenazan a exactamente dos piezas.

(2) Las torres ubicadas amenazan a al menos un caballo.

(3) No hay más de una pieza en una misma casilla.

(4) Hay al menos $\left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$ caballos en cada columna.

(5) Hay al menos $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ caballos en cada fila.

Tu tarea es formular un modelo de programación lineal entera que resuelva el problema.
Sugerencias:

- Puede considerar que tiene a su disposición como parámetro una matriz binaria $P \in \mathbb{B}^{m \times n}$ tal que

$$(P)_{ij} = 1 \Leftrightarrow \text{“hay un peón ubicado en } (i,j)\text{”}$$

- Puede considerar que conoce para cada (i,j) los conjuntos

$$\mathcal{V}_{ij} = \{(s,t) : (s,t) \text{ es alcanzable en un movimiento de caballo desde } (i,j)\}$$

Solución 1.36.

2 Programación Lineal

Ejercicio 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.

a) Pruebe que si f es localmente convexa entonces es convexa.

b) Supongamos que f es de clase $\mathcal{C}^2$. Pruebe que f es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$.

Recordar que una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Ω convexo) se dice

- Localmente convexa en Ω si para cada $x \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que f es convexa en $\mathbb{R} \cap B_r(x)$.
- Convexa en Ω si para todo $x, y \in \Omega$ $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ con $t \in [0, 1]$.

Solución 2.1.

a)

b) Recordemos que f (con $f \in \mathcal{C}^2$) es convexa si y sólo si $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ para todo x, y.

$\Rightarrow$: Sea $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq x$,

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x) \qquad \text{y} \qquad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$$

entonces

$$f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x) \Rightarrow 0 \leq [f'(y) - f'(x)](y-x) \Rightarrow 0 \leq \frac{f'(y) - f'(x)}{(y-x)} \xrightarrow[x \to y]{f \in \mathcal{C}^2} f''(y)$$

Por lo tanto, $f''(y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$: Por el Teorema de Taylor, con $f \in \mathcal{C}^2$, se tiene que

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(y-x), \qquad \text{para } \xi \in [x, y]$$

luego, como $f'' \geq 0$ se tiene que

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

y, por lo tanto, f resulta convexa.

Ejercicio 2.2. Construya un ejemplo en el que el algoritmo `Simplex` encuentre una solución óptima (con el objetivo de minimizar) antes de que c_i sea positivo para todo i. Muestre que si ese es el caso entonces la solución tiene que ser degenerada.

Solución 2.2.

Ejercicio 2.3. ¿Puede una columna que acaba de dejar la base volver a entrar en el siguiente paso del algoritmo `Simplex`?

Solución 2.3.
`Simplex` es un método que permite pasar de un punto extremo a otro de manera que siempre mejore el objetivo por lo que es posible que una columna vuelva a entrar en el siguiente paso pero ésto no estaría garantizando, justamente, una mejora en la función objetivo.

Ejercicio 2.4. Demuestre que el problema de minimizar $c^t x$ sujeto a $Ax = b$ carece de interés porque sobre $\{x : Ax = b\}$ no existe el mínimo de $c^t x$ o bien $c^t x$ es constante.

Solución 2.4.
Supongamos que $c^t x$ no es constante y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Como $Ax = b$, entonces mis restricciones resultan ser un sistema de ecuaciones lineales en donde hay tres casos:

- Existe una única solución: Si A es cuadrada e inversible, $x = A^{-1}b$ y por lo tanto $c^t x$ es constante. Lo que resulta ser una contradicción.

- Existen infinitas soluciones: Sean entonces x_1, x_2 dos soluciones distintas del sistema $Ax = b$. Definimos $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, donde

$$Ax_\alpha = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2 = \alpha b + (1-\alpha)b = b, \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

por lo tanto, x_α es una solución factible del problema tal que

$$c^t x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = \alpha c^t x_1 + (1-\alpha)c^t x_2 = c^t x_2 + \alpha c^t \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\neq 0}, \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

es decir, que el problema resulta ser no acotado.

- No tiene solución: Si el sistema no tiene solución, trivialmente no existirá el mínimo al problema.

Ejercicio 2.5. Supongamos que se ha resuelto un problema de programación lineal y se desea incorporar al planteo una nueva variable no negativa con sus correspondientes datos. ¿Cómo se puede proceder sin rehacer todos los cálculos?

Solución 2.5.
Supongamos que se resolvió el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ s.a. \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con $x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (con $rg(A) = m$) y $b \in \mathbb{R}^m$.

Ahora buscamos resolver el problema lineal

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \widetilde{c}^T x \\ s.a. \quad & \widetilde{A}\widetilde{x} \leq b \\ & \widetilde{x} \geq 0 \end{aligned}$$

con $\widetilde{x}, \widetilde{c} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ y $\widetilde{b} \in \mathbb{R}^m$ donde

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= (x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), \\ \widetilde{c} &= (c, c_{n+1}) = (c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}), \\ \widetilde{A} &= [A|A_{n+1}] = [A_1|A_2|\ldots|A_n|A_{n+1}] \end{aligned}$$

Notemos, primero, que podemos asumir que $rg(\widetilde{A}) = rg(A)$ puesto que como el problema original tiene solución con $rg(A) = m$ entonces el agregarle una columna más a la matriz A mantendrá esa independencia entre las filas.

Luego, necesariamente la nueva variable debe ser introducida como no básica puesto que ya existe una solución al problema original (ie; ya hay una base establecida) y no buscamos rehacer los cálculos. Es decir que si quisiéramos agregar x_{n+1} como básica habría que recalcular la base.

Luego, basta con calcular el costo reducido de x_{n+1}:

$$\overline{c}_{n+1}^T = c_{n+1}^T - c_B^T B^{-1} A_{n+1}$$

donde B proviene de la base que se obtiene a partir de la solución original.

Por lo tanto,

- Si el costo reducido es negativo o cero, entonces el óptimo del nuevo problema es igual al del problema original (recordar que el objetivo es maximizar).

- Si el costo reducido es positivo, entonces hay que seguir aplicando el método `Simplex` pero notar que la solución del problema original es una solución factible inicial al nuevo problema.

Ejercicio 2.6. Resuelva aplicando `Simplex` los problemas:

a)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= x_2 - 3x_3 + 2x_5 \\ s.a. \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 2 \\ & -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s.a. \quad & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_3 = 1 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= 3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ s.a. \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 1 \\ & -4x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= x_1 - 2x_3 \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_3 \geq -3 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \\ s.a. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución 2.6.

a) Puesto que el problema ya está estandarizado, comenzamos pasando las variables de decisión al lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 3x_2 + x_3 - 2x_5 \\ x_4 &= 12 + 2x_2 - 4x_3 \\ z &= x_2 - 3x_3 + 2x_5 \end{aligned}$$

Para comenzar, necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 0, 12, 0)$. En ese caso, $z = 0$ y gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_3 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_2 = x_5 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_1 = 2 + x_3 \\ 0 \leq x_4 = 12 - 4x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 3$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 3, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$x_2, x_4, x_5 = 0, \; x_1 = 5 \text{ y } x_3 = 3$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -9$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_3 = \frac{1}{4}(12 + 2x_2 - x_4)$$

luego,

$$x_1 = 2 - 3x_2 + x_3 - 2x_5 = 2 - 3x_2 + \frac{1}{4}(12 + 2x_2 - x_4) - 2x_5 = 5 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_4 - 2x_5$$

y

$$z = x_2 - \frac{3}{4}(12 + 2x_2 - x_4) + 2x_5 = -9 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_4 + 2x_5$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{4}(12 + 2x_2 - x_4) \\ x_1 &= 5 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_4 - 2x_5 \\ z &= -9 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_4 + 2x_5 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_2 fijando $x_4 = x_5 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_1, x_3 \geq 0$. De las dos ecuaciones se deduce la cota $x_2 \leq 2$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 4, 0, 0), \qquad \text{tal que } z = -10$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_2 = \frac{2}{5}\left(5 - x_1 - \frac{1}{4}x_4 - 2x_5\right)$$

luego,

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(5 - x_1 - \frac{1}{4}x_4 - 2x_5\right)\right] - \frac{1}{4}x_4 = 4 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{3}{10}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \\ z &= -9 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(5 - x_1 - \frac{1}{4}x_4 - 2x_5\right)\right] + \frac{3}{4}x_4 + 2x_5 = -10 + x_1 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{12}{5}x_5 \end{aligned}$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{5}\left(5 - x_1 - \frac{1}{4}x_4 - 2x_5\right) \\ x_3 &= 4 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{3}{10}x_4 - \frac{2}{5}x_5 \\ z &= -10 + x_1 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{12}{5}x_5 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1, x_4 y x_5 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = -10 + x_1 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{12}{5}x_5 \underset{\underset{x_i \geq 0}{\downarrow}}{\geq} -10$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 4, 0, 0)$ es claro que $z = -10$.

Luego, una solución óptima al problema estandarizado (en este caso también del original) es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 4, 0, 0).$$

b) Primero notamos que x_1 es libre. Por lo tanto, estandarizamos el problema introduciendo las variables no negativas x_1^+ y x_1^- y reemplazamos cada ocurrencia de x_1 por $x_1^+ - x_1^-$,

$$\begin{aligned} \min z &= x_1^+ - x_1^- + 4x_2 + x_3 \\ s.a.\ & 2(x_1^+ - x_1^-) - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1^+ - x_1^- - x_3 = 1 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables x_1^+ y x_3 de la siguiente manera

$$x_1^+ = 1 + x_1^- + x_3 \qquad \text{y} \qquad x_3 = 4 + 2x_2 - 2(x_1^+ - x_1^-) \qquad \text{entonces,}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 + 2x_2 + 2x_1^- - 2(1 + x_1^- + x_3) = 2 + 2x_2 - 2x_3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}(2 + 2x_2) \\ x_1^+ &= 1 + x_1^- + \frac{1}{3}(2 + 2x_2) = \frac{5}{3} + x_1^- + \frac{2}{3}x_2 \\ z &= \frac{5}{3} + x_1^- + \frac{2}{3}x_2 - x_1^- + 4x_2 + \frac{1}{3}(2 + 2x_2) = \frac{7}{3} + \frac{16}{3}x_2 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_1^+ &= \frac{5}{3} + x_1^- + \frac{2}{3}x_2 \\ x_3 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_2 \\ z &= \frac{7}{3} + \frac{16}{3}x_2 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$.

En ese caso, $z = \frac{7}{3}$ y gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Pero basta notar que cualquier incremento que se haga sobre la variable x_2 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = \frac{7}{3} + \frac{16}{3}x_2 \underset{x_2 \geq 0}{\overset{\geq}{\downarrow}} \frac{7}{3}$$

pero para $(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$ es claro que $z = \frac{7}{3}$.

Luego, una solución óptima al problema estandarizado (en este caso también del original) es:

$$(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right).$$

c) Primero agregamos las variables de holgura w_1 y w_2 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= 3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ s.a. \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 + w_1 = 1 \\ & -4x_2 + 3x_3 + w_2 = 10 \\ & x, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables w_1, w_2 y x_5

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 - 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= 10 + 4x_2 - 3x_3 \\ x_5 &= \frac{1}{2}(2 - x_1 - 3x_2 + x_3) \\ z &= 3x_1 - x_2 - 3x_3 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 10)$.

En ese caso, $z = 0$ y gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_3 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 &= 1 + 4x_3 \\ 0 \leq w_2 &= 10 - 3x_3 \\ 0 \leq x_5 &= 1 + \frac{1}{2}x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{10}{3}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta $\frac{10}{3}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$x_1, x_2, x_4, w_2 = 0,\ x_3 = \frac{10}{3}, x_5 = \frac{8}{3} \text{ y } w_1 = \frac{43}{3}$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -10$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_3 = \frac{10}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}w_2$$

luego,

$$w_1 = 1 - 2x_1 - x_2 + \frac{40}{3} + \frac{16}{3}x_2 - \frac{4}{3}w_2 = \frac{43}{3} - 2x_1 + \frac{13}{3}x_2 - \frac{4}{3}w_2$$

$$x_5 = 1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}w_2\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}w_2$$

y

$$z = 3x_1 - x_2 - 3\left(\frac{10}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}w_2\right) = 3x_1 - x_2 - 10 - 4x_2 + w_2$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{43}{3} - 2x_1 + \frac{13}{3}x_2 - \frac{4}{3}w_2 \\ x_3 &= \frac{10}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}w_2 \\ x_5 &= \frac{8}{3} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}w_2 \\ z &= -10 + 3x_1 - 5x_2 + w_2 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_2 fijando $x_1 = w_2 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_1, x_3 \geq 0$. De las dos ecuaciones se deduce la cota $x_2 \leq \frac{16}{5}$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2) = \left(0, \frac{16}{5}, \frac{38}{5}, 0, 0, \frac{141}{5}, 0\right), \qquad \text{tal que } z = -26$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_2 = \frac{16}{5} - \frac{3}{5}x_1 - \frac{6}{5}x_5 - \frac{1}{5}w_2$$

luego,

$$w_1 = \frac{43}{3} - 2x_1 - \frac{4}{3}w_2 + \frac{13}{3}\left(\frac{16}{5} - \frac{3}{5}x_1 - \frac{6}{5}x_5 - \frac{1}{5}w_2\right) = \frac{141}{5} - \frac{23}{5}x_1 - \frac{26}{5}x_5 - \frac{11}{5}w_2$$

$$x_3 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}w_2 + \frac{4}{3}\left(\frac{16}{5} - \frac{3}{5}x_1 - \frac{6}{5}x_5 - \frac{1}{5}w_2\right) = \frac{38}{5} - \frac{4}{5}x_1 - \frac{8}{5}x_5 - \frac{3}{5}w_2$$

$$z = -10 + 3x_1 + w_2 - 5\left(\frac{16}{5} - \frac{3}{5}x_1 - \frac{6}{5}x_5 - \frac{1}{5}w_2\right) = -16 + 6x_1 + 6x_5 + 2w_2$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{141}{5} - \frac{23}{5}x_1 - \frac{26}{5}x_5 - \frac{11}{5}w_2 \\ x_2 &= \frac{16}{5} - \frac{3}{5}x_1 - \frac{6}{5}x_5 - \frac{1}{5}w_2 \\ x_3 &= \frac{38}{5} - \frac{4}{5}x_1 - \frac{8}{5}x_5 - \frac{3}{5}w_2 \\ z &= -16 + 6x_1 + 6x_5 + 2w_2 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1, x_5 y w_2 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = -16 + 6x_1 + 6x_5 + 2w_2 \underset{\substack{\uparrow \\ x_i \geq 0}}{\geq} -26$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2) = \left(0, \frac{16}{5}, \frac{38}{5}, 0, 0, \frac{141}{5}, 0\right)$ es claro que $z = -26$.

Luego, una solución óptima al problema estandarizado es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2) = \left(0, \frac{16}{5}, \frac{38}{5}, 0, 0, \frac{141}{5}, 0\right).$$

de donde se deduce la solución del problema $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(0, \frac{16}{5}, \frac{38}{5}, 0, 0\right)$

d) Primero agregamos las variables de holgura w_1, w_2 y w_3 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= x_1 - 2x_3 \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 + w_1 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + w_2 = 7 \\ & -x_3 + w_3 = 3 \\ & x, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, comenzamos pasando las variables de decisión al lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned} w_1 &= 4 + 2x_1 - x_2 \\ w_2 &= 7 + x_1 - 2x_2 \\ w_3 &= 3 + x_3 \\ z &= x_1 - 2x_3 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 4, 7, 3)$. En ese caso, $z = 0$ y gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_3 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

La variable que va a entrar a la base es x_3, pero ninguna de las variables básicas w_1, w_2 y w_3 imponen alguna restricción sobre cuánto puede aumentar x_3. Entonces el problema no está acotado: puedo aumentar x_3 tanto como se quiera (por lo tanto, se puede aumentar z tanto como se desee).

e) Primero agregamos las variables de holgura w_1, w_2 y w_3 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + w_1 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 + w_2 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + w_3 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3 w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Comenzamos pasando las variables de decisión al lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned} w_1 &= 4 - x_1 - x_2 - 2x_3 \\ w_2 &= 5 - 2x_1 - 3x_3 \\ w_3 &= 7 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ z &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 4, 5, 7)$. En ese caso, $z = 0$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z.

Como x_3 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq & w_1 = 4 - 2x_3 \\ 0 \leq & w_2 = 5 - 3x_3 \\ 0 \leq & w_3 = 7 - 3x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{5}{3}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 3, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = \left(0, 0, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 2\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = \frac{20}{3}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_3 = \frac{1}{3}(5 - 2x_1 - w_2) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_2$$

luego,

$$w_1 = 4 - x_1 - x_2 - 2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_2\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 - x_2 - \frac{2}{3}w_2$$

$$w_3 = 7 - 2x_1 - x_2 - (5 - 2x_1 - w_2) = 2 - x_2 + w_2$$

y

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 4\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_2\right) = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{4}{3}w_2$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 - x_2 - \frac{2}{3}w_2 \\ w_3 &= 2 - x_2 + w_2 \\ x_3 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_2 \\ z &= \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{4}{3}w_2 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_2 fijando $w_2 = x_1 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $w_1, w_3, x_3 \geq 0$. De las tres ecuaciones se deduce la cota $x_2 \leq \frac{2}{3}$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 2\right), \qquad \text{tal que } z = 8$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 - w_1 - \frac{2}{3}w_2$$

luego,

$$w_3 = 2 + w_2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 + w_1 + \frac{2}{3}w_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 + w_1 + \frac{5}{3}w_2$$

$$x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_2$$

$$z = \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}w_2 + 2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 - w_1 - \frac{2}{3}w_2\right) = 8 + x_1 - 2w_1 - \frac{8}{3}w_2$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 - w_1 - \frac{2}{3}w_2 \\ x_3 &= \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_2 \\ w_3 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 + w_1 + \frac{5}{3}w_2 \\ z &= 8 + x_1 - 2w_1 - \frac{8}{3}w_2 \end{aligned}$$

Si queremos seguir disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_1 fijando $w_1 = w_2 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_2, x_3, w_3 \geq 0$. De las dos ecuaciones se deduce la cota $x_1 \leq \frac{5}{2}$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \qquad \text{tal que } z = \frac{21}{2}$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}w_2 - x_3\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}x_3$$

luego,

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}w_2 - x_3\right)\right] - w_1 - \frac{2}{3}w_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - w_1 - \frac{5}{6}w_2$$

$$w_3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}w_2 - x_3\right)\right] + w_1 - \frac{2}{3}w_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 + w_1 + \frac{11}{6}w_2$$

$$z = 8 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}x_3 - 2w_1 - \frac{8}{3}w_2 = \frac{21}{2} - \frac{3}{2}x_3 - 2w_1 - \frac{19}{6}w_2$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - w_1 - \frac{5}{6}w_2 \\ w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 + w_1 + \frac{11}{6}w_2 \\ z &= \frac{21}{2} - \frac{3}{2}x_3 - 2w_1 - \frac{19}{6}w_2 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_3, w_1 y w_2 hará que el valor de z disminuya. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = \frac{21}{2} - \frac{3}{2}x_3 - 2w_1 - \frac{19}{6}w_2 \underset{x_i \geq 0}{\underset{\downarrow}{\leq}} \frac{21}{2}$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ es claro que $z = \dfrac{21}{2}$.

Luego, la solución óptima al problema original es:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right).$$

f) Primero agregamos las variables de holgura w_1 y w_2 para estandarizar el problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + w_1 = 5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + w_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

comenzamos pasando las variables de decisión al lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned} w_1 &= 5 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 \\ w_2 &= 3 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ z &= 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0, 5, 3)$. En ese caso, $z = 0$ y gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z. Como x_3 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 = 5 - 3x_3 \\ 0 \leq w_2 = 3 - 2x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{3}{2}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta $\dfrac{3}{2}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = \frac{3}{2},\ w_1 = \frac{1}{2} \text{ y } w_2 = 0$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = \dfrac{27}{2}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(3 - x_1 - x_2 - 3x_4 - w_2\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}w_2$$

$$w_1 = 5 - x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}\left(3 - x_1 - x_2 - 3x_4 - w_2\right) - x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{3}{2}w_2$$

$$z = 5x_1 + 6x_2 + \frac{9}{2}\left(3 - x_1 - x_2 - 3x_4 - w_2\right) + 8x_4 = \frac{27}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{9}{2}w_2$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}w_2 \\ w_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{3}{2}w_2 \\ z &= \frac{27}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{9}{2}w_2 \end{aligned}$$

Si queremos aumentar el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_2 fijando $x_1 = x_4 = w_2 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_3, w_1 \geq 0$. De las dos ecuaciones se deduce la cota $x_2 \leq 1$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = \left(0, 1, 0, 0, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \text{tal que } z = 15$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_4 - w_1 + \frac{3}{2}w_2\right) = 1 + x_1 + 7x_4 - w_1 + 3w_2$$

$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_4 - w_1 + \frac{3}{2}w_2\right) - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}w_2 = 1 - x_1 - 5x_4 + w_1 - 2w_2$$

$$z = \frac{27}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}(1 + x_1 + 7x_2 - w_1 + 3w_2) - \frac{11}{2}x_4 - \frac{9}{2}w_2 = 15 + 2x_1 5x_4 - 3w_1$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + x_1 + 7x_4 - w_1 + 3w_2 \\ x_3 &= 1 - x_1 - 5x_4 + w_1 - 2w_2 \\ z &= 15 + 2x_1 + 5x_4 - 3w_1 \end{aligned}$$

Si queremos aumentar el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_4 fijando $x_1, w_1, w_2 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_2, w_3 \geq 0$. De las dos ecuaciones se deduce la cota $x_4 \leq \frac{1}{5}$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = \left(0, \frac{12}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0, 0\right), \quad \text{tal que } z = 16$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_4 = \frac{1}{5}(1 - x_1 - x_3 + w_1 - 2w_2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_1 - \frac{2}{5}w_2$$

$$x_2 = 1 + x_1 + \frac{7}{5}(1 - x_1 - x_3 + w_1 - 2w_2) - w_1 + 3w_2 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_1 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{2}{5}w_1 + \frac{1}{5}w_2$$

$$z = 15 + 2x_1 + (1 - x_1 - x_3 + w_1 - 2w_2) - 3w_1 = 16 + x_1 - x_3 - 2w_1 - 2w_2$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_1 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{2}{5}w_1 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_4 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_1 - \frac{2}{5}w_2 \\ z &= 16 + x_1 - x_3 - 2w_1 - 2w_2 \end{aligned}$$

Si queremos aumentar el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_1 fijando $x_3, w_1, w_2 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_2, x_4 \geq 0$. De las dos ecuaciones se deduce la cota $x_1 \leq 1$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = (1, 2, 0, 0, 0, 0), \quad \text{tal que } z = 17$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_1 = 5\left(\frac{1}{5} - x_4 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_1 - \frac{2}{5}w_2\right) = 1 - 5x_4 - x_3 + w_1 - 2w_2$$

$$x_2 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}(1 - 5x_4 - x_3 + w_1 - 2w_2) - \frac{7}{5}x_3 + \frac{2}{5}w_1 + \frac{1}{5}w_2 = 2 + x_4 - x_3 + w_2$$

$$z = 16 + 1 - 5x_4 - x_3 + w_1 - 2w_2 - x_3 - 2w_1 - 2w_2 = 17 - 2x_3 - 5x_4 - w_1 - 4w_2$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_3, x_4, w_1 y w_2 hará que el valor de z disminuya.

Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que $z = 17 - 3x_3 - 5x_4 - w_1 - 4w_2 \underbrace{\leq}_{x_i \geq 0 \,|\, w_i \geq 0} 17$

pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = (1, 2, 0, 0, 0, 0)$ es claro que $z = 17$.

Luego, la solución óptima al problema original es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 0, 0).$$

Ejercicio 2.7. Resuelva aplicando las dos fases de `Simplex`:

a)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = x_1 - 2x_2 - 8x_5 & \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_6 \geq 7 \\ & x_3 + \frac{1}{3}x_6 \leq 11 \\ & 6x_2 + x_4 \leq 3 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \\ s.a. \quad & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 14 \\ & 3x_1 - 4x_3 \geq -15 \\ & x_1 - 2x_3 = 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Solución 2.7.

a) Primero agregamos las variables slack y auxiliares para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = -x_1 + 2x_2 + 8x_5 \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 - w_1 + a_1 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_6 - w_2 + a_2 = 7 \\ & x_3 + \frac{1}{3}x_6 + w_3 = 11 \\ & 6x_2 + x_4 + w_4 = 3 \\ & x, w, a \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & y = -a_1 - a_2 \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 - w_1 + a_1 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_6 - w_2 + a_2 = 7 \\ & x_3 + \frac{1}{3}x_6 + w_3 = 11 \\ & 6x_2 + x_4 + w_4 = 3 \end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$a_1 = 4 + 2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 + w_1$$
$$a_2 = 7 + x_1 - 2x_2 - x_6 + w_2$$
$$w_3 = 11 - x_3 - \frac{1}{3}x_6$$
$$w_4 = 3 - 6x_2 - x_4$$
$$y = -(4 + 2x_1 - x_2 - x_3 + x_5 + w_1) - (7 + x_1 - 2x_2 - x_6 + w_2) = -11 - 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 + x_6 - w_1 - w_2$$

En ese caso, $y = -11$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_2 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_2.

Luego, fijamos $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = w_1 = w_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 &= 4 - x_2 \\ 0 \leq a_2 &= 7 - 2x_2 \\ 0 \leq w_4 &= 3 - 6x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq \frac{1}{2}$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta $\frac{1}{2}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{7}{2} \text{ y } a_2 = 6$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -\frac{19}{2}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{6}(3 - w_4) \\ w_3 &= 11 - x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\ a_1 &= 4 + 2x_1 - \frac{1}{6}(3 - w_4) - x_3 + x_5 + w_1 = \frac{7}{2} + 2x_1 - x_3 + x_5 + w_1 + \frac{1}{6}w_4 \\ a_2 &= 7 + x_1 - 2\frac{1}{6}(3 - w_4) - x_6 + w_2 = 6 + x_1 - x_6 + w_2 + \frac{1}{3}w_4 \\ y &= -\frac{19}{2} - 3x_1 + x_3 - x_5 + x_6 - w_1 - w_2 - \frac{1}{2}w_4 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_6 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_6.

Luego, fijamos $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = w_1 = w_2 = w_4 = 0$ y aumentamos el valor de x_6 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_3 &= 11 - \frac{1}{3}x_6 \\ 0 \leq a_2 &= 6 - x_6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_6 \leq 6$$

Entonces, aumentamos x_6 hasta 6, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = w_1 = w_2 = w_4 = a_2 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_6 = 6, w_3 = 9 \text{ y } a_1 = \frac{7}{2}$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -\frac{7}{2}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{6}(3 - w_4) \\ x_6 &= 6 + x_1 + w_2 + \frac{1}{3}w_4 - a_2 \\ w_3 &= 9 - \frac{1}{3}x_1 - x_3 - \frac{1}{3}w_2 - \frac{1}{9}w_4 - \frac{1}{3}a_2 \\ a_1 &= \frac{7}{2} + 2x_1 - x_3 + x_5 + w_1 + \frac{1}{6}w_4 \\ y &= -\frac{7}{2} - 2x_1 + x_3 - x_5 - w_1 + \frac{1}{6}w_4 - a_2 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_4 = x_5 = w_1 = w_2 = w_4 = a_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_3 &= 9 - x_3 \\ 0 \leq a_1 &= \frac{7}{2} - x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{7}{2}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta $\frac{7}{2}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$x_1 = x_4 = x_5 = w_1 = w_2 = w_4 = a_1 = a_2 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{7}{2}, x_6 = 6 \text{ y } w_3 = \frac{11}{2}$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = 0$.

Reordenando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{6}(3 - w_4)\\
x_3 &= \frac{7}{2} + 2x_1 + x_5 + w_1 + \frac{1}{6}w_4 - a_1\\
x_6 &= 6 + x_1 + w_2 + \frac{1}{3}w_4 - a_2\\
w_3 &= \frac{11}{2} - \frac{7}{3}x_1 - x_5 - w_1 - \frac{1}{3}w_2 - \frac{5}{18}w_4 + a_1 - \frac{1}{3}a_2\\
y &= -a_1 - a_2
\end{aligned}$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$x_1 = x_4 = x_5 = w_1 = w_2 = w_4 = a_1 = a_2 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{7}{2}, x_6 = 6 \text{ y } w_3 = \frac{11}{2}$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.

La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.

Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{6}(3 - w_4)\\
x_3 &= \frac{7}{2} + 2x_1 + x_5 + w_1 + \frac{1}{6}w_4\\
x_6 &= 6 + x_1 + w_2 + \frac{1}{3}w_4\\
w_3 &= \frac{11}{2} - \frac{7}{3}x_1 - x_5 - w_1 - \frac{1}{3}w_2 - \frac{5}{18}w_4
\end{aligned}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$z = -x_1 + 2\frac{1}{6}(3 - w_4) + 8x_5 = 1 - x_1 + 8x_5 - \frac{1}{3}w_4$$

En ese caso, $z = 1$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z. Como x_5 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_5.

Luego, fijamos $x_1 = x_3 = x_4 = w_1 = w_2 = w_4 = 0$ y aumentamos el valor de x_5 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_3 &= \frac{7}{2} + x_5\\
0 \leq w_3 &= \frac{11}{2} - x_5
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_5 \leq \frac{11}{2}$$

Entonces, aumentamos x_5 hasta $\frac{11}{2}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$x_1 = x_4 = w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 9 \text{ y } x_6 = 6$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = 45$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{6}(3 - w_4)\\
x_3 &= 9 - \frac{1}{3}x_1 + x_5 - \frac{1}{3}w_2 - w_3 - \frac{1}{9}w_4\\
x_5 &= \frac{11}{2} - \frac{7}{3}x_1 - w_1 - \frac{1}{3}w_2 - w_3 - \frac{5}{18}w_4\\
x_6 &= 6 + x_1 + w_2 + \frac{1}{3}w_4\\
z &= 45 - \frac{59}{3}x_1 - 8w_1 - \frac{8}{3}w_2 - 8w_3 - \frac{23}{9}w_4
\end{aligned}$$

Pero basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1, x_5, w_1, w_2, w_3 y w_4 hará que el valor de z disminuya.

Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que $z = 45 - \frac{59}{3}x_1 - 8w_1 - \frac{8}{3}w_2 - 8w_3 - \frac{23}{9}w_4 \underbrace{\leq}_{x_i \geq 0 \mid w_i \geq 0} 45$

pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, w_1, w_2, w_3, w_4) = \left(0, \frac{1}{2}, 9, 0, \frac{11}{2}, 6, 0, 0, \frac{11}{2}, 0\right)$ es claro que $z = 45$.

Luego, la solución óptima al problema es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \left(0, \frac{1}{2}, 9, 0, \frac{11}{2}, 6\right), \quad \text{con } z = -45 \qquad \text{(recordar que el objetivo era minimizar).}$$

b) Primero agregamos las variables slack y auxiliares para estandarizar el problema

$$\begin{aligned}
\text{mín} \;\; & z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3\\
s.a. \;\; & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + w_1 = 30\\
& x_1 + x_2 + x_3 - w_2 + a_1 = 14\\
& -3x_1 + 4x_3 + w_3 = 15\\
& x, w, a \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned}
\text{máx} \;\; & y = -a_1 - a_2\\
s.a. \;\; & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + w_1 = 30\\
& x_1 + x_2 + x_3 - w_2 + a_1 = 14\\
& -3x_1 + 4x_3 + w_3 = 15\\
& x_1 - 2x_3 + a_2 = 0\\
& x, w, a \geq 0
\end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned}
w_1 &= 30 - (5x_1 - 3x_2 + 6x_3) = 30 - 5x_1 + 3x_2 - 6x_3\\
w_3 &= 15 - (-3x_1 + 4x_3) = 15 + 3x_1 - 4x_3\\
a_1 &= 14 - (x_1 + x_2 + x_3 - w_2) = 14 - x_1 - x_2 - x_3 + w_2\\
a_2 &= -(x_1 - 2x_3) = -x_1 + 2x_3\\
y &= -(14 - x_1 - x_2 - x_3 + w_2) - (-x_1 + 2x_3) = -14 + 2x_1 + x_2 - x_3 - w_2
\end{aligned}$$

En ese caso, $y = -14$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_1 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, fijamos $x_2 = x_3 = w_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq w_1 &= 30 - 5x_1\\
0 \leq w_3 &= 15 + 3x_1\\
0 \leq a_1 &= 14 - x_1\\
0 \leq a_2 &= -x_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 0$$

Entonces, igualamos x_1 hasta 0, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = (0, 0, 0, 30, 0, 15, 14, 0)$$

Con esta solución no conseguimos una mejora pues $y = -14$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2x_3 - a_2 \\
w_1 &= 30 - 5(2x_3 - a_2) + 3x_2 - 6x_3 = 30 + 3x_2 - 16x_3 + 5a_2 \\
w_3 &= 15 + 3(2x_3 - a_2) - 4x_3 = 15 + 2x_3 - 3a_2 \\
a_1 &= 14 - (2x_3 - a_2) - x_2 - x_3 + w_2 = 14 - x_2 - 3x_3 + w_2 + a_2 \\
y &= -14 + 2(2x_3 - a_2) + x_2 - x_3 - w_2 = -14 + x_2 + 3x_3 - w_2 - 2a_2
\end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_2 = w_2 = a_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_1 &= 2x_3 \\
0 \leq w_1 &= 30 - 16x_3 \\
0 \leq w_3 &= 15 + 2x_3 \\
0 \leq a_1 &= 14 - 3x_3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta $\frac{15}{8}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = \left(\frac{15}{4}, 0, \frac{15}{8}, 0, 0, \frac{75}{4}, \frac{67}{8}, 0\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -\frac{67}{8}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{16}(30 + 3x_2 - w_1 + 5a_2) = \frac{15}{8} + \frac{3}{16}x_2 - \frac{1}{16}w_1 + \frac{5}{16}a_2 \\
x_1 &= \frac{2}{16}(30 + 3x_2 - w_1 + 5a_2) - a_2 = \frac{15}{4} + \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{8}w_1 + \frac{10}{16}a_2 \\
w_3 &= 15 + \frac{2}{16}(30 + 3x_2 - w_1 + 5a_2) - 3a_2 = \frac{75}{4} + \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{8}w_1 - \frac{4}{3}a_2 \\
a_1 &= 14 - x_2 - \frac{3}{16}(30 + 3x_2 - w_1 + 5a_2) + w_2 + a_2 = \frac{67}{8} - \frac{25}{16}x_2 + \frac{3}{16}w_1 + w_2 + \frac{1}{16}a_2 \\
y &= -14 + x_2 + \frac{3}{16}(30 + 3x_2 - w_1 + 5a_2) - w_2 - 2a_2 = -\frac{67}{8} + \frac{25}{16}x_2 - \frac{3}{16}x_2 - w_2 - \frac{17}{16}a_2
\end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_2 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_2.

Luego, fijamos $w_1 = w_2 = a_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_1 &= \frac{15}{4} + \frac{3}{8}x_2 \\
0 \leq x_3 &= \frac{15}{8} + \frac{3}{16}x_2 \\
0 \leq w_3 &= \frac{75}{4} + \frac{3}{8}x_2 \\
0 \leq a_1 &= \frac{67}{8} - \frac{25}{16}x_2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq \frac{67}{8}\frac{16}{25} = \frac{134}{25}$$

Entonces, igualamos x_2 hasta $\frac{134}{25}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = \left(\frac{144}{25}, \frac{134}{25}, \frac{72}{25}, 0, 0, \frac{519}{25}, 0, 0\right)$$

Con esta solución no conseguimos una mejora pues $y = 0$.

Reordenando, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{16}{25}\left(\frac{67}{8}+\frac{3}{16}w_1+w_2-a_1+\frac{1}{16}a_2\right)=\frac{134}{25}+\frac{3}{25}w_1+\frac{16}{25}w_2-\frac{16}{25}a_1+\frac{1}{25}a_2\\
x_1 &= \frac{15}{4}-\frac{1}{8}w_1+\frac{10}{16}a_2+\frac{3}{8}\frac{16}{25}\left(\frac{67}{8}+\frac{3}{16}w_1+w_2-a_1+\frac{1}{16}a_2\right)=\frac{144}{25}-\frac{2}{25}w_1+\frac{6}{25}w_2-\frac{6}{25}a_1+\frac{16}{25}a_2\\
x_3 &= \frac{15}{8}-\frac{1}{16}w_1+\frac{5}{16}a_2+\frac{3}{16}\frac{16}{25}\left(\frac{67}{8}+\frac{3}{16}w_1+w_2-a_1+\frac{1}{16}a_2\right)=\frac{72}{25}-\frac{1}{25}w_1+\frac{3}{25}w_2-\frac{3}{25}a_1+\frac{8}{25}a_2\\
w_3 &= \frac{75}{4}-\frac{1}{8}w_1-\frac{4}{3}a_2+\frac{3}{8}\frac{16}{25}\left(\frac{67}{8}+\frac{3}{16}w_1+w_2-a_1+\frac{1}{16}a_2\right)=\frac{519}{25}-\frac{2}{25}w_1+\frac{6}{25}w_2-\frac{6}{25}a_1-\frac{791}{600}a_2\\
y &= -\frac{67}{8}-\frac{3}{16}x_2-w_2-\frac{17}{16}a_2+\frac{25}{16}\frac{16}{25}\left(\frac{67}{8}+\frac{3}{16}w_1+w_2-a_1+\frac{1}{16}a_2\right)=-a_1-a_2
\end{aligned}
$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$(x_1,x_2,x_3,w_1,w_2,w_3,a_1,a_2)=\left(\frac{144}{25},\frac{134}{25},\frac{72}{25},0,0,\frac{519}{25},0,0\right)$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.

La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.

Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{134}{25}+\frac{3}{25}w_1+\frac{16}{25}w_2\\
x_1 &= \frac{144}{25}-\frac{2}{25}w_1+\frac{6}{25}w_2\\
x_3 &= \frac{72}{25}-\frac{1}{25}w_1+\frac{3}{25}w_2\\
w_3 &= \frac{519}{25}-\frac{2}{25}w_1+\frac{6}{25}w_2
\end{aligned}
$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$z=5\left(\frac{144}{25}-\frac{2}{25}w_1+\frac{6}{25}w_2\right)+2x_2+3\left(\frac{72}{25}-\frac{1}{25}w_1+\frac{3}{25}w_2\right)=\frac{1204}{25}-\frac{7}{25}w_1+\frac{71}{25}w_2$$

En ese caso, $z=\dfrac{1204}{25}$ y nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya su valor. Como w_1 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de w_1.

Luego, fijamos $w_2=0$ y aumentamos el valor de w_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0\le x_1 &= \frac{144}{25}-\frac{2}{25}w_1\\
0\le x_2 &= \frac{134}{25}+\frac{3}{25}w_1\\
0\le x_3 &= \frac{72}{25}-\frac{1}{25}w_1\\
0\le w_3 &= \frac{519}{25}-\frac{2}{25}w_1
\end{aligned}\right\}\Rightarrow w_1\le 72$$

Entonces, aumentamos w_1 hasta $\dfrac{11}{2}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1,x_2,x_3,w_1,w_2,w_3)=(0,14,0,72,0,15)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z=28$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. Pero cmo hay un empate entre las variables que pueden salir de la base, usamos la Regla de Bland.

El siguiente sistema será de la forma:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{25}{2}\left(\frac{144}{25} - x_1 + \frac{6}{25}w_2\right) = 72 - \frac{25}{2}x_1 + 3w_2 \\
x_2 &= \frac{134}{25} + \frac{3}{25}\frac{25}{2}\left(\frac{144}{25} - x_1 + \frac{6}{25}w_2\right) + \frac{16}{25}w_2 = 14 - \frac{3}{2}x_1 + w_2 \\
x_3 &= \frac{72}{25} - \frac{1}{25}\frac{25}{2}\left(\frac{144}{25} - x_1 + \frac{6}{25}w_2\right) + \frac{3}{25}w_2 = \frac{1}{25}x_1 \\
w_3 &= \frac{519}{25} - \frac{2}{25}\frac{25}{2}\left(\frac{144}{25} - x_1 + \frac{6}{25}w_2\right) + \frac{6}{25}w_2 = 15 + x_1 \\
z &= \frac{1204}{25} - \frac{7}{25}\frac{25}{2}\left(\frac{144}{25} - x_1 + \frac{6}{25}w_2\right) + \frac{71}{25}w_2 = 28 + \frac{7}{2}x_1 + 2w_2
\end{aligned}$$

Pero basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1 y w_2 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que $z = 28 + \frac{7}{2}x_1 + 2w_2 \underbrace{\leq}_{x_i \leq 0 \ | \ w_i \geq 0} 28$

pero para $((x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 14, 0, 72, 0, 15)$ es claro que $z = 28$.
Luego, la solución óptima al problema es:

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 14, 0)\,, \quad \text{con } z = 28$$

Ejercicio 2.8. Considere el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned}
\text{mín}\, z = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \\
s.a. \quad & \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\
& x_3 + x_7 = 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

a) Verifique que si se usa como criterio el de elegir la variable de menor índice cuando hay empate entoces el algoritmo no termina.

b) Verifique que $\left(\frac{1}{25}, 0, 1, 0, \frac{3}{100}, 0, 0\right)$ es una solución óptima y que el valor del funcional en ella es $z_0 = -\frac{1}{20}$.

Solución 2.8.

a) Primero agregamos las variables auxiliares a_1, a_2 y a_3 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned}
\text{mín}\, z = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \\
s.a. \quad & \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 + a_1 = 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 + a_2 = 0 \\
& x_3 + x_7 + a_3 = 1 \\
& x, a \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned}
\text{máx}\, y = -a_1 - a_2 - a_3 \\
s.a. \quad & \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 + a_1 = 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 + a_2 = 0 \\
& x_3 + x_7 + a_3 = 1 \\
& x, a \geq 0
\end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{4}x_1 + 60x_2 + \frac{1}{25}x_3 - 9x_4 - x_5\\
a_2 &= -\frac{1}{2}x_1 + 90x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 3x_4 - x_6\\
a_3 &= 1 - x_3 - x_7\\
y &= -\left(-\frac{1}{4}x_1 + 60x_2 + \frac{1}{25}x_3 - 9x_4 - x_5\right) - \left(-\frac{1}{2}x_1 + 90x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 3x_4 - x_6\right) - (1 - x_3 - x_7)\\
&= -1 + \frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{47}{50}x_3 + 12x_4 + x_5 + x_6 + x_7
\end{aligned}$$

En ese caso, $y = -1$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_4 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_4. Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ y aumentamos el valor de x_4 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 = -x_4\\ 0 \leq a_2 = -3x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_4 \leq 0$$

Entonces, fijamos x_4 en 0, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

Con esta solución conseguimos mantener el valor de y, pues $y = -1$. Es decir, realizamos una iteración degenerada que proviene de una solución degenerada.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\underbrace{x_4 = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}x_1 + 60x_2 + \frac{1}{25}x_3 - x_5 - a_1\right)}_{\text{nuestro criterio es elegir la variable de menos índice cuando hay empate}} = -\frac{1}{36}x_1 + \frac{20}{3}x_2 + \frac{1}{225}x_3 - \frac{1}{9}x_5 - \frac{1}{9}a_1$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 90x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 3\left(-\frac{1}{36}x_1 + \frac{20}{3}x_2 + \frac{1}{225}x_3 - \frac{1}{9}x_5 - \frac{1}{9}a_1\right) - x_6 = -\frac{5}{12}x_1 + 70x_2 + \frac{1}{150}x_3 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}a_1 - x_6$$

$$a_3 = 1 - x_3 - x_7$$

y

$$\begin{aligned}
y &= -1 + \frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{47}{50}x_3 + 12\left(-\frac{1}{36}x_1 + \frac{20}{3}x_2 + \frac{1}{225}x_3 - \frac{1}{9}x_5 - \frac{1}{9}a_1\right) + x_5 + x_6 + x_7\\
&= -1 + \frac{5}{12}x_1 - 70x_2 + \frac{149}{150}x_3 - \frac{1}{3}x_5 + x_6 + x_7 - \frac{4}{3}a_1
\end{aligned}$$

Nuevamente, como nuestro criterio es elegir la variable de menos índice cuando hay empate, intentaremos aumentar el valor de x_6. Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = a_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_6 de la siguiente manera

$$0 \leq a_2 = -x_6 \Rightarrow x_6 \leq 0$$

Entonces, fijamos x_6 en 0, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

Con esta solución conseguimos mantener el valor de y, pues $y = -1$. Es decir, realizamos una iteración degenerada que proviene de una solución degenerada.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$x_6 = -\frac{5}{12}x_1 + 70x_2 + \frac{1}{150}x_3 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}a_1 - a_2$$

$$a_3 = 1 - x_3 - x_7$$

$$x_4 = -\frac{1}{36}x_1 + \frac{20}{3}x_2 + \frac{1}{225}x_3 - \frac{1}{9}x_5 - \frac{1}{9}a_1$$

y

$$\begin{aligned}
y &= -1 + \frac{5}{12}x_1 - 70x_2 + \frac{149}{150}x_3 - \frac{1}{3}x_5 + \left(-\frac{5}{12}x_1 + 70x_2 + \frac{1}{150}x_3 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}a_1 - a_2\right) + x_7 - \frac{4}{3}a_1\\
&= -1 + x_3 + \frac{2}{15}x_5 + x_7 - a_1 - a_2
\end{aligned}$$

Nuevamente, como nuestro criterio es elegir la variable de menos índice cuando hay empate, intentaremos aumentar el valor de x_3. Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_5 = x_7 = a_1 = a_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_6 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_4 &= \frac{1}{225}x_3 \\ 0 \leq x_6 &= \frac{1}{150}x_3 \\ 0 \leq a_3 &= 1 - x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 1$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 1, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1, \frac{1}{225}, 0, \frac{1}{150}, 0, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = 0$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_7 - a_3 \\ x_4 &= -\frac{1}{36}x_1 + \frac{20}{3}x_2 + \frac{1}{225}(1 - x_7 - a_3) - \frac{1}{9}x_5 - \frac{1}{9}a_1 = \frac{1}{225} - \frac{1}{36}x_1 + \frac{20}{3}x_2 - \frac{1}{9}x_5 - \frac{1}{225}x_7 - \frac{1}{9}a_1 - \frac{1}{225}a_3 \\ x_6 &= -\frac{5}{12}x_1 + 70x_2 + \frac{1}{150}(1 - x_7 - a_3) + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}a_1 - a_2 = -\frac{5}{12}x_1 + 70x_2 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{150}x_7 + \frac{1}{3}a_1 - a_2 \\ y &= -1 + (1 - x_7 - a_3) + \frac{2}{15}x_5 + x_7 - a_1 - a_2 = \frac{2}{15}x_5 - a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_5 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_5.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_7 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_5 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_4 &= \frac{1}{225} - \frac{1}{9}x_5 \\ 0 \leq x_6 &= \frac{1}{3}x_5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_5 \leq \frac{1}{25}$$

Entonces, aumentamos x_5 hasta $\frac{1}{25}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1, 0, \frac{1}{25}, \frac{1}{75}, 0, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = \frac{1}{375}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_7 - a_3 \\ x_5 &= 9\left(\frac{1}{225} - \frac{1}{36}x_1 + \frac{20}{3}x_2 - x_4 - \frac{1}{225}x_7 - \frac{1}{9}a_1 - \frac{1}{225}a_3\right) = \frac{1}{25} - \frac{1}{4}x_1 + 60x_2 - 9x_4 - \frac{1}{25}x_7 - a_1 - \frac{1}{25}a_3 \\ x_6 &= -\frac{5}{12}x_1 + 70x_2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{4}x_1 + 60x_2 - 9x_4 - \frac{1}{25}x_7 - a_1 - \frac{1}{25}a_3\right) - \frac{1}{150}x_7 + \frac{1}{3}a_1 - a_2 \\ &= \frac{1}{75} - \frac{1}{2}x_1 + 90x_2 - 3x_4 - \frac{1}{50}x_7 - a_2 - \frac{1}{75}a_3 \\ y &= \frac{2}{15}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{4}x_1 + 60x_2 - 9x_4 - \frac{1}{25}x_7 - a_1 - \frac{1}{25}a_3\right) - a_1 - a_2 - a_3 \\ &= \frac{1}{375} - \frac{1}{30}x_1 + 8x_2 - \frac{6}{5}x_4 - \frac{2}{375}x_7 - \frac{17}{15}a_1 - a_2 - \frac{377}{375}a_3 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_2 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_2.

Luego, fijamos $x_1 = x_4 = x_7 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_5 &= \frac{1}{25} + 60x_2 \\ 0 \leq x_6 &= \frac{1}{75} + 90x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \geq 0$$

Ninguna de las variables básicas x_3, x_5 y x_6 imponen alguna restricción sobre cuánto puede aumentar x_2. Entonces el problema no está acotado: puedo aumentar x_2 tanto como se quiera (por lo tanto, se puede aumentar y tanto como se desee).

Y de esta manera, podemos asegurar de que el algoritmo no terminará.

b) Primero, notamos que a partir de la solución dada $x^* = \left(\frac{1}{25}, 0, 1, 0, \frac{3}{100}, 0, 0\right)^t$ la base está comprendida (o formada) por x_1, x_3 y x_5 (dado que $rg(A) = 3$ y, por lo tanto, necesitamos tres variables básicas distintas de cero). Luego, como x_1, x_3 y x_5 son básicas despejamos el problema de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1 - x_7 \\
x_1 &= 2\left[90x_2 + \frac{1}{50}(1 - x_7) - 3x_4 - x_6\right] = \frac{1}{25} + 180x_2 - 6x_4 - \frac{2}{25}x_7 - 2x_6 \\
x_5 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{25} + 180x_2 - 6x_4 - \frac{2}{25}x_7 - 2x_6\right) + 60x_2 + \frac{1}{25}(1 - x_7) - 9x_4 \\
&= \frac{3}{100} + 15x_2 - \frac{15}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{50}x_7 \\
z &= -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{25} + 180x_2 - 6x_4 - \frac{2}{25}x_7 - 2x_6\right) + 150x_2 - \frac{1}{50}(1 - x_7) + 6x_4 \\
&= -\frac{1}{20} + 15x_2 + \frac{21}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_6 + \frac{2}{25}x_7
\end{aligned}
$$

Como buscamos que $x^* = \left(\frac{1}{25}, 0, 1, 0, \frac{3}{100}, 0, 0\right)^t$ sea la solución óptima al problema, necesitamos que todos los costos reducidos que están en z sean positivos.

Pero ésto es lo que ocurre luego de hacer todos los reemplazos.

Luego, el valor $\left(\frac{1}{25}, 0, 1, 0, \frac{3}{100}, 0, 0\right)$ es una solución óptima y el valor del funcional en ella es $z_0 = -\frac{1}{20}$

Ejercicio 2.9. Considere el modelo lineal

$$
\begin{aligned}
&\min z = c^t x \\
s.a.\quad & Ax = b \\
& e^t x = 1 \\
& x_1, \ldots, x_{n-1} \geq 0 \\
& x_n \text{ libre}
\end{aligned}
$$

donde $e = (1, \ldots, 1)^t$ y b, c son vectores arbitratrios de dimensión n y A es la matriz definida por

$$
\begin{cases}
a_{ii} = a_{in} = 1 & \text{para } 1 \leq i \leq n \\
a_{ij} = 0 & \text{para } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < n, i \neq j
\end{cases}
$$

Use la restricción $e^t x = 1$ para eliminar la variable libre. ¿Se podría hacer lo mismo si x_n no fuera libre?

Solución 2.9.
Primero, escribamos las restricciones:

- De $e^t x = 1$, podemos escribir a la variable libre como

$$x_n = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n+1}$$

- De $Ax = b$,

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_n &= b_1 \\
x_2 + x_n &= b_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_{n-1} + x_n &= b_{n-1} \\
1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1} &= b_n
\end{aligned}
$$

Entonces, juntando ambas, se tiene que

$$
\begin{aligned}
1 - x_2 - \ldots - x_{n+1} &= b_1 \\
1 - x_1 - x_3 - \ldots - x_{n+1} &= b_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-2} &= b_{n-1} \\
1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1} &= b_n
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el problema original resulta equivalente a

$$\begin{aligned} \min z = (c_1 - c_n)x_1 + (c_2 - c_n)x_2 + \ldots + (c_{n-1} - c_n)x_{n-1} + c_n \\ s.a. \quad 1 - x_2 - \ldots - x_{n+1} = b_1 \\ 1 - x_1 - x_3 - \ldots - x_{n+1} = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-2} = b_{n-1} \\ 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1} = b_n \end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que x_n no fuese libre. En particular, diremos $x_n \geq 0$ (el caso donde $x_n \leq 0$ es similar) entonces conviene resolver el problema original puesto que podría ocurrir que

$$0 \leq x_n = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n+1} \text{ y, además, que } 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n+1} \leq 0$$

lo que resultaría en una contradicción.

Es decir, que si x_n no es libre conviene resolver el problema sin el despeje.

Ejercicio 2.10. Considere el modelo lineal

$$\begin{aligned} \min z = c^t x \\ s.a. \quad Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Formule un modelo equivalente en forma standard tal que el vector de términos independientes sea cero.

Pista: se puede hacer introduciendo una variable y una restricción adicional.

Solución 2.10.

Ejercicio 2.11. Halle todos los valores del parámetro α tales que las regiones definidas por las siguientes restricciones presentan vértices degenerados.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 6x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq \alpha \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

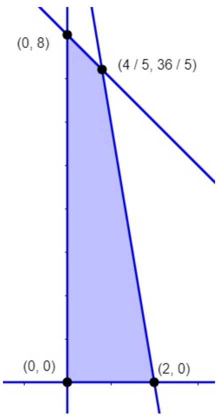
$$\begin{aligned} \alpha x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución 2.11.

a) Comenzaremos buscando los puntos de intersección en la región

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 6x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

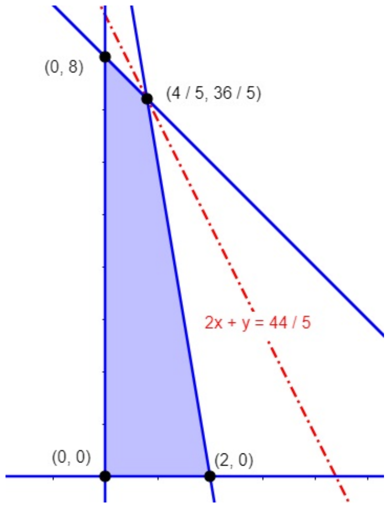
Gráficamente, vemos que esta región queda determinada de la siguiente manera:



Los puntos que determinan esa región son $(0,0);(0,8);(2,0)$ y $\left(\frac{4}{5},\frac{36}{5}\right)$ (el último punto es la intersección de las rectas $x_1+x_2=8$, $6x_1+x_2=12$).

Necesitamos que la recta $2x_1+x_2=\alpha$ pase por alguno de los puntos de intersección de la región de manera tal que no la modifique.

- Para que la recta pase por el punto $(0,8)$, nesariamente $\alpha=8$ pero en este caso la nueva región resultaría diferente a la original.
- Análogamente, para que la recta pase por el punto $(2,0)$, nesariamente $\alpha=4$ pero en este caso, nuevamnete, la nueva región resultaría diferente a la original.
- Si la reca para por el punto $\left(\frac{4}{5},\frac{36}{5}\right)$, entonces $\alpha=\frac{44}{5}$. De esta manera, el gráfico quedaría de la siguiente manera:



La idea, observando el gráfico es que una vez que estoy sobre el vértice $\left(\frac{4}{5},\frac{36}{5}\right)$ el método `Simplex` tiene tres opciones para moverse.

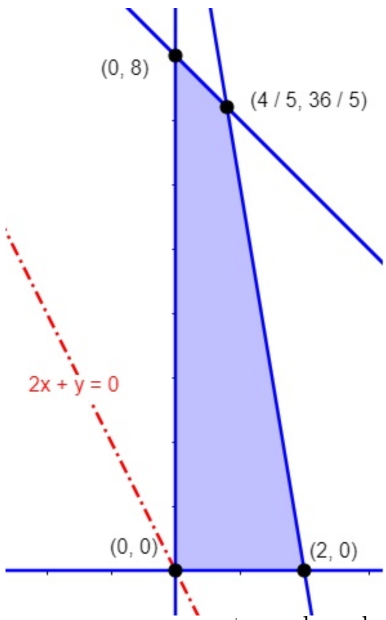
(i) Si se mueve sobre la recta $x_1+x_2=8$, irá hacia el vértice $(0,8)$ y continua con el proceso.

(ii) Si se mueve sobre la recta $6x_1+x_2\leq 12$, irá hacia el vértice $(0,2)$ y continua con el proceso.

(iii) Si se mueve sobre la recta $2x_1+x_2=\underbrace{\frac{44}{5}}_{=\alpha}$, entonces se saldría de la región.

Y, por lo tanto, se estaría consiguiendo un vértice degenerado.

- El caso para el punto $(0,0)$ es similar al anterior, puesto que si la recta pasa por este punto entonces $\alpha=0$,



La idea, observando el gráfico es que una vez que estoy sobre el vértice $(0,0)$ el método `Simplex` tiene tres opciones para moverse.

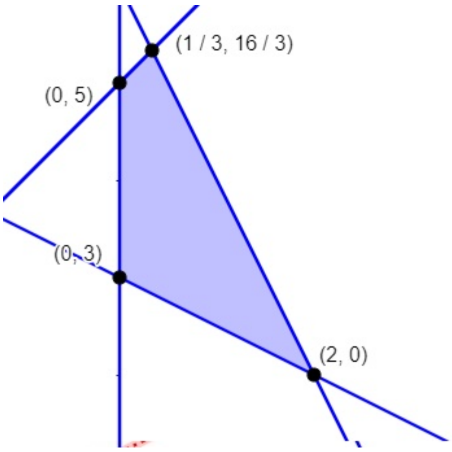
(i) Si se mueve sobre la recta $x_1 = 0$, irá hacia el vértice $(0, 8)$ y continua con el proceso.
(ii) Si se mueve sobre la recta $x_2 = 0$, irá hacia el vértice $(0, 2)$ y continua con el proceso.
(iii) Si se mueve sobre la recta $2x_1 + x_2 = \underbrace{0}_{=\alpha}$, entonces se saldría de la región.

Y, por lo tanto, se estaría consiguiendo un vértice degenerado.

b) Comenzaremos buscando los puntos de intersección en la región

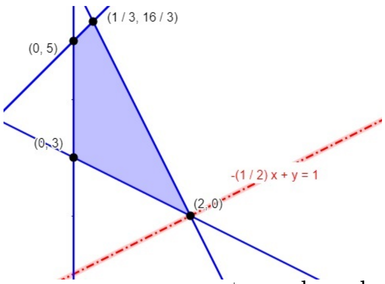
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Gráficamente, vemos que esta región queda determinada de la siguiente manera: Los puntos que determinan esa



región son $(0, 3)$; $(0, 5)$; $(2, 2)$ (intersección de las rectas $2x_1 + x_2 = 6$, $x_1 + 2x_2 = 6$) y $\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$ (intersección de las rectas $2x_1 + x_2 = 6$, $-x_1 + x_2 = 5$).
Necesitamos que la recta $\alpha x_1 + x_2 = 1$ pase por alguno de los puntos de intersección de la región de manera tal que no la modifique.

- Como no hay valores de α para los cuales la recta pase por los puntos $(0, 3)$ y $(0, 5)$, estos casos están descartados.
- Para que la recta pase por el punto $(2, 2)$, nesariamente $\alpha = -\frac{1}{2}$. De esta manera, el gráfico quedaría de la siguiente manera:



La idea, observando el gráfico es que una vez que estoy sobre el vértice $(2, 2)$ el método `Simplex` tiene tres opciones para moverse.
(i) Si se mueve sobre la recta $x_1 + 2x_2 = 6$, irá hacia el vértice $(0, 3)$ y continua con el proceso.
(ii) Si se mueve sobre la recta $2x_1 + x_2 = 6$, irá hacia el vértice $\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$ y continua con el proceso.
(iii) Si se mueve sobre la recta $\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha} x_1 + x_2 = 1$, entonces se saldría de la región.

Y, por lo tanto, se estaría consiguiendo un vértice degenerado.

- Para que la recta pase por el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}\right)$, nesariamente $\alpha = -13$ pero en este caso la nueva región resultaría diferente a la original.

Ejercicio 2.12. Resuelva los siguientes problemas de programación lineal usando el método `Simplex`. Si el problema es 2-dimensional, haga un esquema de la región de soluciones factibles y señale el progreso del algoritmo.

a)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 38 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 55 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{máx}\, z &= 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. \quad & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 30 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= 3x_1 + 9x_2 \\ s.a. \quad & -5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ s.a. \quad & 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 22 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \text{máx}\, z &= 7x_1 + 8x_2 \\ s.a. \quad & 4x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 48 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Solución 2.12.

a) Primero agregamos las variables de holgura w_1 y w_2 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + w_1 = 38 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + w_2 = 55 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables w_1 y w_2

$$\begin{aligned} w_1 &= 38 - 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \\ w_2 &= 55 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 \\ z &= -5x_1 - 7x_2 - 12x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 0, 38, 55)$.

En ese caso, $z = 0$ y gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_3 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 = 38 - 2x_3 \\ 0 \leq w_2 = 55 - 4x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{55}{4}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta $\frac{55}{4}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = \left(0, 0, \frac{55}{4}, 0, \frac{21}{2}, 0\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -165$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_3 = \frac{1}{4}(55 - 3x_1 - 2x_2 + x_4 - w_2)$$

luego,

$$w_1 = 38 - 2x_1 - 3x_2 - 2\frac{1}{4}(55 - 3x_1 - 2x_2 + x_4 - w_2) - x_4 = \frac{21}{2} - \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}w_2$$

$$z = -5x_1 - 7x_2 - 12\frac{1}{4}(55 - 3x_1 - 2x_2 + x_4 - w_2) + x_4 = -165 + 4x_1 - x_2 - 2x_4 + 3w_2$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{4}(55 - 3x_1 - 2x_2 + x_4 - w_2) \\ w_1 &= \frac{21}{2} - \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}w_2 \\ z &= -165 + 4x_1 - x_2 - 2x_4 + 3w_2 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_4 fijando $x_1 = x_2 = w_2 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_3, w_1 \geq 0$. De las dos ecuaciones se deduce la cota $x_4 \leq 7$.

Nuestra nueva solución es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = \left(0, 0, \frac{31}{2}, 7, 0, 0\right), \qquad \text{tal que } z = -179$$

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_4 = \frac{2}{3}\left(\frac{21}{2} - \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) = 7 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2$$

$$x_3 = \frac{55}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 + \left(7 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right) - w_2 = \frac{31}{2} - \frac{5}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{6}w_2$$

y

$$z = -165 + 4x_1 - x_2 - 2\left(7 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2\right) + 3w_2 = -179 + \frac{14}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{4}{3}w_1 + \frac{7}{3}w_2$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{31}{2} - \frac{5}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{6}w_2 \\ x_4 &= 7 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2 \\ z &= -179 + \frac{14}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{4}{3}w_1 + \frac{7}{3}w_2 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1, x_2, w_1 y w_2 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = -179 + \frac{14}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{4}{3}w_1 + \frac{7}{3}w_2 \underbrace{\leq}_{x_i \geq 0 \,|\, w_i \geq 0} -179$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = \left(0, 0, \frac{31}{2}, 7, 0, 0\right)$ es claro que $z = -179$.

Luego, una solución óptima al problema estandarizado es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, 0, \frac{31}{2}, 7, 0, 0\right)$$

b) Primero agregamos las variables de holgura w_1 y w_2 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} &\text{máx}\, z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ &s.a. \quad 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + w_1 = 20 \\ &\qquad\quad 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + w_2 = 30 \\ &\qquad\quad x, w \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables w_1 y w_2

$$\begin{aligned} w_1 &= 20 - 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 \\ w_2 &= 30 - 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \\ z &= 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 0, 20, 30)$. En ese caso, $z = 0$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z. Como x_1 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, fijamos $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ y aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 = 20 - 4x_1 \\ 0 \leq w_2 = 30 - 3x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 5$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta 5, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = (5, 0, 0, 0, 0, 15)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = 15$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_1 = \frac{1}{4}(20 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 - w_1) = 5 - \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}w_1$$

$$w_2 = 30 - \frac{3}{4}(20 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 - w_1) - 4x_2 + x_3 - x_4 = 15 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{4}w_1$$

y

$$z = \frac{5}{4}(20 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 - w_1) + 3x_2 + 2x_3 = 25 - \frac{13}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{4}x_4 - \frac{5}{4}w_1$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}w_1 \\ w_2 &= 15 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{4}w_1 \\ z &= 25 - \frac{13}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{4}x_4 - \frac{5}{4}w_1 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_2, x_3, x_4 y w_1 hará que el valor de z disminuya.

Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = 25 - \frac{13}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{4}x_4 - \frac{5}{4}w_1 \underset{x_i \geq 0}{\overset{\geq}{\downarrow}} 25$$

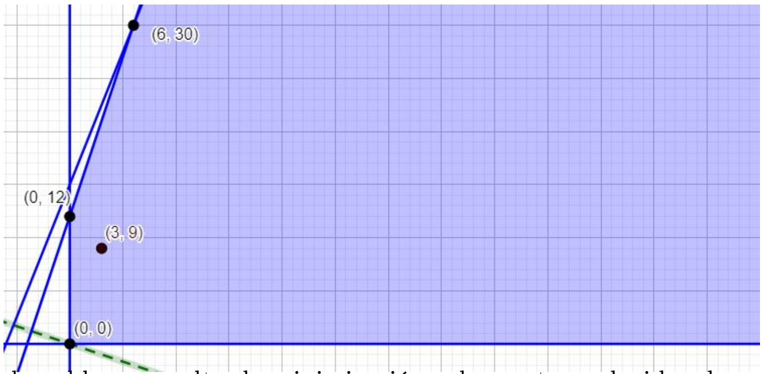
pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = (5, 0, 0, 0, 0, 15)$ es claro que $z = 25$.

Luego, una solución óptima al problema estandarizado es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2) = (5, 0, 0, 0, 0, 15)$$

y, por lo tanto, la solución al problema original es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 0, 0, 0)$.

c) Como el problema es 2-dimensional, notemos primero el esquema de la región:



Por otra parte, como el problema resulta de minimización y los costos reducidos de z son ambos positivos basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1 y x_2 hará que el valor de z aumente.

Por lo tanto, el mínimo se realizará en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ (como también se puede observar en el gráfico).

d) Primero agregamos las variables de holgura w_1 y w_2 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} &\min z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ s.a.\quad & 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + w_1 = 22 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 + w_2 = 30 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables w_1, w_2

$$\begin{aligned} w_1 &= 22 - 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 30 - x_1 + 2x_2 - x_3 \\ z &= 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 22, 30)$.

En ese caso, $z = 0$ y nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_3 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 &= 22 + 2x_3 \\ 0 \leq w_2 &= 30 - x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 10$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 10, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 0, 10, 0, 82)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -120$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_3 = 30 - x_1 + 2x_2 - w_2$$

$$w_1 = 22 - 4x_1 - 5x_2 + 2(30 - x_1 + 2x_2 - w_2) = 82 - 6x_1 - x_2 - 2w_2$$

y

$$z = 3x_1 - 2x_2 - 4(30 - x_1 + 2x_2 - w_2) = -120 + 7x_1 - 10x_2 + 4w_2$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} w_1 &= 82 - 6x_1 - x_2 - 2w_2 \\ x_3 &= 30 - x_1 + 2x_2 - w_2 \\ z &= -120 + 7x_1 - 10x_2 + 4w_2 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_2 fijando $x_1 = w_2 = 0$. De nuevo, tenemos que ver cuánto podemos aumentarlo para que se respete $x_1, x_3 \geq 0$. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 &= 22 - x_2 \\ 0 \leq x_3 &= 30 + 2x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq 22$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 22, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 22, 194, 0, 0), \qquad \text{tal que } z = -940$$

Cuyo sistema termina siendo

$$x_2 = 82 - 6x_1 - w_1 - 2w_2$$

$$x_3 = 30 - x_1 + 2(82 - 6x_1 - w_1 - 2w_2) - w_2 = 194 - 13x_1 - 2w_1 - 5w_2$$

y

$$z = -120 + 7x_1 - 10(82 - 6x_1 - w_1 - 2w_2) + 4w_2 = -940 + 67x_1 + 10w_1 + 24w_2$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_2 &= 82 - 6x_1 - w_1 - 2w_2 \\ x_3 &= 194 - 13x_1 - 2w_1 - 5w_2 \\ z &= -940 + 67x_1 + 10w_1 + 24w_2 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1, w_5 y w_2 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = -940 + 67x_1 + 10w_1 + 24w_2 \underset{\substack{\downarrow \\ x_i \geq 0}}{\geq} -940$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 82, 194, 0, 0)$, es claro que $z = -940$.
Luego, una solución óptima al problema estandarizado es:

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 82, 194, 0, 0)$$

y, por lo tanto, la solución al problema original es $(x_1, x_2, x_3) = (0, 82, 194)$.

e) Como el problema es 2-dimensional, notemos primero el esquema de la región:

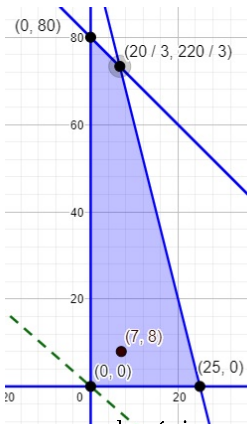


Figura 2.1: Gráficamente sabemos que el máximo se realizará en $(x_1, x_2) = (0, 80)$.

Primero agregamos las variables de holgura w_1, w_2 y w_3 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} &\max z = 7x_1 + 8x_2 \\ s.a. \quad & 4x_1 + x_2 + w_1 = 100 \\ & x_1 + x_2 + w_2 = 80 \\ & x_1 + w_3 = 40 \\ & x, w \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables w_1, w_2 y w_3

$$\begin{aligned} w_1 &= 100 - 4x_1 - x_2 \\ w_2 &= 80 - x_1 - x_2 \\ w_3 &= 40 - x_1 \\ z &= 7x_1 + 8x_2 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 100, 80, 40)$ (gráficamente representa el vértice $(0, 0)$).

En ese caso, $z = 0$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z. Como x_32 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_2.

Luego, fijamos $x_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq w_1 = 100 - x_2 \\ 0 \leq w_2 = 80 - x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 \leq 80$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 80, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 80, 20, 0, 40), \qquad \text{(gráficamente representa el vértice } (0, 80))$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = 640$.

Gráficamente sabemos que ya estamos en el máximo buscado, pero terminemos de resolver para ver cómo es la pinta del sistema final para garantizar la solución.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_2 = 80 - x_1 - w_2$$

$$w_1 = 100 - 4x_1 - (80 - x_1 - w_2) = 20 - 3x_1 + w_2$$

$$w_3 = 40 - x_1$$

y

$$z = 7x_1 + 8(80 - x_1 - w_2) = 640 - x_1 - 8w_2$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_2 &= 80 - x_1 - w_2 \\ w_1 &= 100 - 4x_1 - (80 - x_1 - w_2) = 20 - 3x_1 + w_2 \\ w_3 &= 40 - x_1 \\ z &= 640 - x_1 - 8w_2 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1 y w_2 hará que el valor de z disminuya. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = 640 - x_1 - 8w_2 \underset{\substack{\downarrow \\ x_i \geq 0}}{\geq} 640$$

pero para $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 80, 20, 0, 40)$ es claro que $z = 640$.

Luego, una solución óptima al problema estandarizado es:

$$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 80, 20, 0, 40)$$

y, por lo tanto, la solución al problema original es $(x_1, x_2) = (0, 80)$.

f) Primero agregamos las variables de holgura w_1 y w_2 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} &\min z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\ s.a. \quad &x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_1 = 48 \\ &x_1 + 2x_2 + 4x_3 + w_2 = 60 \\ &x, w \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables w_1 y w_2

$$\begin{aligned} w_1 &= 48 - x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ w_2 &= 60 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ z &= -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 48, 60)$.

En ese caso, $z = 0$ y nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_2 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_2.

Luego, fijamos $x_1 = x_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 = 48 - 4x_2 \\ 0 \leq w_2 = 60 - 2x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq 12$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 12, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 12, 0, 0, 36)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -168$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_2 = \frac{1}{4}(48 - x_1 - 2x_3 - w_1) = 12 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}w_1$$

$$w_2 = 60 - x_1 - 2\left(\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}w_1\right) - 4x_3 = 36 - \frac{1}{2}x_1 - 3x_3 + \frac{1}{2}w_1$$

y

$$z = -6x_1 - 14\left(\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}w_1\right) - 13x_3 = -168 - \frac{5}{2}x_1 - 6x_3 + \frac{7}{2}w_1$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_2 &= 12 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}w_1 \\ w_2 &= 36 - \frac{1}{2}x_1 - 3x_3 + \frac{1}{2}w_1 \\ z &= -168 - \frac{5}{2}x_1 - 6x_3 + \frac{7}{2}w_1 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_3 fijando $x_1 = w_1 = 0$. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_2 = 12 - \frac{1}{2}x_3 \\ 0 \leq w_2 = 36 - 3x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 12$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 12, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 6, 12, 0, 36)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -240$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_3 = \frac{1}{3}\left(36 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1 - w_2\right) = 12 - \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{3}w_2$$

$$x_2 = 12 - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}\left(12 - \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{3}w_2\right) - \frac{1}{4}w_1 = 6 - \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{6}w_2$$

y

$$z = -168 - \frac{5}{2}x_1 - 6\left(12 - \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{3}w_2\right) + \frac{7}{2}w_1 = -240 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{2}w_1 + 2w_2$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_2 &= 6 - \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{6}w_2 \\ x_3 &= 12 - \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{3}w_2 \\ z &= -240 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{2}w_1 + 2w_2 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_1 fijando $w_1 = w_2 = 0$. Por lo tanto,

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_2 = 6 - \frac{1}{6}x_1 \\ 0 \leq x_3 = 12 - \frac{1}{6}x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 36$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 36, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (36, 0, 6, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -294$.

Cuyo sistema termina siendo

$$x_1 = 6\left(6 - x_2 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{6}w_2\right) = 36 - 6x_2 - 2w_1 + w_2$$

$$x_3 = 12 - \frac{1}{6}(36 - 6x_2 - 2w_1 + w_2) + \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{3}w_2 = 6 + x_2 + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$$

y

$$z = -240 - \frac{3}{2}(36 - 6x_2 - 2w_1 + w_2) + \frac{5}{2}w_1 + 2w_2 = -294 + 9x_2 + \frac{11}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_1 &= 36 - 6x_2 - 2w_1 + w_2 \\ x_3 &= 6 + x_2 + \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 \\ z &= -294 + 9x_2 + \frac{11}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_2, w_1 y w_2 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = -294 + 9x_2 + \frac{11}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \underset{x_i \geq 0}{\underset{\downarrow}{\geq}} -294$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (36, 0, 6, 0, 0)$ es claro que $z = -294$.

Luego, una solución óptima al problema estandarizado es:

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (36, 0, 6, 0, 0)$$

y, por lo tanto, la solución al problema original es $(x_1, x_2, x_3) = (36, 0, 6)$.

Ejercicio 2.13. Aplique el test de optimalidad para encontrar todos los valores del parámetro α tales que $x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^t$ es la solución óptima del siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min z = -x_1 - \alpha^2 x_2 + 2x_3 - 2\alpha x_4 - 5x_5 + 10x_6 \\ s.a. \quad & -2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Solución 2.13.

Primero, notamos que a partir de la solución dada $x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^t$ la base está comprendida (o formada) por x_2, x_3 y x_4 (dado que $rg(A) = 3$ y, por lo tanto, necesitamos tres variables básicas distintas de cero).

Luego, como x_2, x_3 y x_4 son básicas despejamos el problema de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_2 = 2 - 2x_1 - x_3 \quad \text{y} \quad x_4 = 2 + 2x_1 + x_3 - 2x_5$$

y luego reemplazamos en $-2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2$:

$$-2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_6 = 2 \Leftrightarrow -2x_1 - (2 - 2x_1 - x_3) + (2 + 2x_1 + x_3 - 2x_5) + 2x_6 = 2 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_3 - 2x_5 + 2x_6 = 2$$

$$\Rightarrow x_3 = 1 - x_1 + x_5 - x_6$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - 2x_1 - (1 - x_1 + x_5 - x_6) = 1 - x_1 - x_5 + x_6 \\ x_4 &= 2 + 2x_1 + (1 - x_1 + x_5 - x_6) - 2x_5 = 3 + x_1 - x_5 - x_6 \end{aligned}$$

y reemplazando en z, se tiene que

$$\begin{aligned} z &= -x_1 - \alpha^2 x_2 + 2x_3 - 2\alpha x_4 - 5x_5 + 10x_6 \\ &= -x_1 - \alpha^2(1 - x_1 - x_5 + x_6) + 2(1 - x_1 + x_5 - x_6) - 2\alpha(3 + x_1 - x_5 - x_6) - 5x_5 + 10x_6 \\ &= (-\alpha^2 - 6\alpha + 2) + (\alpha^2 - 2\alpha - 3)x_1 + (\alpha^2 + 2\alpha - 3)x_5 + (-\alpha^2 + 2\alpha + 8)x_6 \end{aligned}$$

Como buscamos que $x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^t$ sea la solución óptima al problema, necesitamos que todos los costos reducidos que están en z sean positivos.

- $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = (\alpha - 1)^2 - 4$ y necesitamos que $(\alpha - 1)^2 - 4 \geq 0$,
$$(\alpha - 1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |\alpha - 1| \geq 2 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$
- $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = (\alpha + 1)^2 - 4$ y necesitamos que $(\alpha + 1)^2 - 4 \geq 0$,
$$(\alpha + 1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |\alpha + 1| \geq 2 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$$
- $-\alpha^2 + 2\alpha + 8 = 9 - (\alpha - 1)^2$ y necesitamos que $9 - (\alpha - 1)^2 \geq 0$,
$$9 - (\alpha - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |\alpha - 1| \leq 3 \Leftrightarrow \alpha \in [-2, 4]$$

Luego, para asegurarnos que $x^* = (0, 1, 1, 3, 0, 0)^t$ es la solución óptima del problema de programación lineal necesitamos que $\alpha \in [3, 4]$.

Ejercicio 2.14. Con el objetivo de minimizar, la siguiente tabla corresponde a alguna iteración del método `Simplex`:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P
x_1	0	-2	1	e	0	2	d
x_3	1	g	0	-2	0	1	f
x_5	0	0	0	h	1	43	1
$-z$	0	a	0	b	c	3	α

Halle condiciones sobre $a, b, \ldots, h$ tales que se cumpla:

a) Si esta iteración corresponde a la última, la base actual es óptima.

b) Si esta iteración corresponde a la última, la base actual es la única base óptima.

c) Si esta iteración corresponde a la última, la base actual es óptima pero no única.

d) Si esta iteración corresponde a la última, el problema no está acotado.

e) La solución actual mejorará si x_4 aumenta y cuando x_4 entre en la base, el cambio en la función objetivo sea nulo.

Solución 2.14.
Primero pasemos del Método de tableau al de diccionario. Entonces, nuestro problema lineal es de la pinta

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & x_1 & + & gx_2 & & & - & 2x_4 & & & + & x_6 & = & f \\ & & & - & 2x_2 & + & x_3 & + & ex_4 & & & + & 2x_6 & = & d \\ & & & & & & & + & hx_4 & + & x_5 & + & 43x_6 & = & 1 \\ \hline -z & + & 0x_1 & + & ax_2 & + & 0x_3 & + & bx_4 & + & cx_5 & + & 3x_6 & = & \alpha \end{array}$$

Como, además, la tabla nos dice que las variables básicas son x_1, x_3 y x_5 podemos armar el diccionario equivalente a la tabla despejando esas variables de cada una de las ecuaciones y despejando z. Así, nos queda el diccionario:

$$\begin{aligned} x_1 &= f - gx_2 + 2x_4 - x_6 \\ x_3 &= d + 2x_2 - ex_4 - 2x_6 \\ x_5 &= 1 - hx_4 - 43x_6 \\ z &= -\alpha + ax_2 + bx_4 + c\underbrace{(1 - hx_4 - 43x_6)}_{=x_5} + 3x_6 = (-\alpha + c) + ax_2 + (b - c \cdot h)x_4 + (3 - 43c)x_6 \end{aligned}$$

Notemos que como pedimos que ésta sea una iteración posible, es necesario que f y d sean mayores o iguales a cero.

a) Para ésto, basta con que $a, (b - c \cdot h)$ y $(3 - 43c)$ sean menores o iguales a cero.

b) Para ésto, basta con que $a, (b - c \cdot h)$ y $(3 - 43c)$ sean menores estrictos a cero.

c) La base actual es óptima pero no única, sólo si el problema tiene infinitas soluciones. Para ésto, necesitamos que haya variables no básicas nulas. Es decir, que $(b - c \cdot h) = 0$ o $(3 - 43c) = 0$ o $a > 0$.

d) El problema no estará acotado cuando no existen candidatos para dejar la base a pesar de que sus costos reducidos son negativos.

En primer lugar, notemos que si x_6 entra a la base (es decir, $(3 - 43c) < \text{mín}\{(b - c \cdot h), a\} \leq 0$), luego

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_1 &= f - x_6 \\ 0 \leq x_3 &= d - 2x_6 \\ 0 \leq x_5 &= 1 - 43x_6 \end{aligned}\right\} \quad \text{es claro que es posible obtener una cota para } x_6$$

por lo tanto, necesitamos que $(3 - 43c) \geq 0$.

- Supongamos que x_4 entra a la base (es decir $a \geq 0$ y $(b - c \cdot h) < 0$)

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_1 &= f + 2x_4 \\ 0 \leq x_3 &= d - ex_4 \\ 0 \leq x_5 &= 1 - hx_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{para que } x_3 \text{ aumente junto con } x_4 \text{ necesitamos que } e < 0. \\ \text{para que } x_5 \text{ aumente junto con } x_4 \text{ necesitamos que } h < 0. \end{array}$$

  es decir que si x_4 entra a la base, el problema resultará no acotado solo cuando $h, e < 0$.

- Supongamos que x_2 entra a la base (es decir $a < 0$ y $(b - c \cdot h) \geq 0$)

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_1 &= f - gx_2 \\ 0 \leq x_3 &= d + 2x_2 \end{aligned}\right\} \text{para que } x_1 \text{ aumente junto con } x_2 \text{ necesitamos que } g < 0.$$

  es decir que si x_2 entra a la base, el problema resultará no acotado solo cuando $g < 0$.

e) En este caso buscamos que x_4 ingrese a la base en la próxima iteración y que ésta resulte ser degenerada.

Para ésto, primero necesitamos que $(b - c \cdot h) < 0$ y $(b - c \cdot h) < \text{mín}\{a, (3 - 43c)\}$ (x_4 entra a la base). Una vez que entre a la base, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 &= f + 2x_4 \\ 0 \leq x_3 &= d - ex_4 \\ 0 \leq x_5 &= 1 - hx_4 \end{aligned}$$

Primero, notamos que si $h \neq 0$ entonces desde la tercer ecuación o x_5 aumenta junto con x_4 (cuando $h < 0$) o bien se puede observar que el crecimiento de x_4 está limitado por la $\dfrac{1}{h}$. Y si $h = 0$, la tercer ecuación no nos da información sobre x_4.

Además si $f > 0$ entonces, desde la primer ecuación x_1 aumentará junto con x_4.

Por lo tanto, esta si la iteración es ono degenerada cuando x_4 ingresa a la base dependerá de los valores de d, e con $f = 0$.

Luego, para que el cambio en la función objetivo sea nulo necesitamos que $d = 0$ y $e < 0$.

Ejercicio 2.15. Usar el método `Simplex` (de dos fases y Método M) para resolver los siguientes problemas de programación lineal:

a)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = 4x_1 - 2x_2 - 8x_3 & \\ s.a. \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 40 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 & \\ s.a. \quad -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_5 &= 4 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = -4x_1 - 2x_2 & \\ s.a. \quad 3x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ -2x_1 + x_2 &= 2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución 2.15.

a) ▪ <u>Método de dos fases:</u> Primero agregamos las variables auxiliares para estandarizar el problema:

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 - 2x_2 - 8x_3 \\ s.a. \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + a_1 = 30 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + a_2 = 40 \\ & x, a \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned} \max y &= -a_1 - a_2 \\ s.a. \quad & a_1 = 30 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ & a_2 = 40 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ & x, a \geq 0 \end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned} a_1 &= 30 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ a_2 &= 40 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ y &= -(30 - 2x_1 + x_2 - 3x_3) - (40 - x_1 - 2x_2 - 4x_3) = -70 + 3x_1 + x_2 + 7x_3 \end{aligned}$$

En ese caso, $y = -70$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.
Luego, fijamos $x_1 = x_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 = 30 - 3x_3 \\ 0 \leq a_2 = 40 - 4x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 10$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 10, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (0, 0, 10, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = 0$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. Pero como hay empate entre las variables que pueden salir de la base, usamos la Regla de Bland.
El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{3}(30 - 2x_1 + x_2 - a_1) = 10 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}a_1 \\ a_2 &= 40 - x_1 - 2x_2 - \frac{4}{3}(30 - 2x_1 + x_2 - a_1) = \frac{5}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}a_1 \\ y &= -70 + 3x_1 + x_2 + \frac{7}{3}(30 - 2x_1 + x_2 - a_1) = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{10}{3}x_2 - \frac{7}{3}a_1 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_2 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_2.
Luego, fijamos $x_1 = a_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_3 = 10 + \frac{1}{3}x_2 \\ 0 \leq a_2 = -\frac{10}{3}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq 0$$

Entonces, si $x_2 = 0$ nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (0, 0, 10, 0, 0)$$

Con esta solución no conseguimos una mejora, pues $y = 0$. Por lo tanto, la iteración anterior resultó ser degenerada.

El nuevo sistema quedó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{10}\left(\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}a_1 - a_2\right) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{5}a_1 - \frac{3}{10}a_2 \\
x_3 &= \frac{5}{3}x_1 - \frac{10}{3}\frac{3}{10}\left(\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}a_1 - a_2\right) + \frac{4}{3}a_1 = 10 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}a_1 - \frac{1}{10}a_2 \\
y &= -\frac{5}{3}x_1 + \frac{10}{3}\frac{3}{10}\left(\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}a_1 - a_2\right) - \frac{7}{3}a_1 = -a_1 - a_2
\end{aligned}$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (0, 0, 10, 0, 0)$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.
La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.
Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2}x_1 \\
x_3 &= 10 - \frac{1}{2}x_1
\end{aligned}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$z = -4x_1 - 2x_2 - 8x_3 = -4x_1 - 2\frac{1}{2}x_1 - 8\left(10 - \frac{1}{2}x_1\right) = -80 - x_1$$

En ese caso, $z = -80$ y nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_1 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_1.
Luego, aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_2 &= \frac{1}{2}x_1 \\
0 \leq x_3 &= 10 - \frac{1}{2}x_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 20$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta 20, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3) = (20, 10, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -100$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2(10 - x_3) \\
x_2 &= \frac{1}{2}2(10 - x_3) = 10 - x_3 \\
z &= -80 - 2(10 - x_3) = -100 + 2x_3
\end{aligned}$$

Pero basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_3 hará que el valor de z aumente.
Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que $z = -100 + 2x_3 \underbrace{\leq}_{x_i \geq 0} -100$
pero para $(x_1, x_2, x_3) = (20, 10, 0)$ es claro que $z = -100$.
Luego, una solución óptima al problema es:

$$(x_1, x_2, x_3) = (20, 10, 0).$$

- Método Big-M: Primero agregamos las variables auxiliares para estandarizar el problema:

$$\begin{aligned}
\min z = 4x_1 - 2x_2 - 8x_3 + Ma_1 + Ma_2 \\
s.a. \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 + a_1 = 30 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 + a_2 = 40 \\
x, a \geq 0
\end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables a_1 y a_2

$$\begin{aligned}
a_1 &= 30 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
a_2 &= 40 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\
z &= 4x_1 - 2x_2 - 8x_3 + M(30 - 2x_1 + x_2 - 3x_3) + M(40 - x_1 - 2x_2 - 4x_3) \\
&= 70M - (3M+4)x_1 - (M+2)x_2 - (7M+8)x_3
\end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (0, 0, 0, 30, 40)$.
En ese caso, $z = 70M$ y gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_3 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.
Luego, fijamos $x_1 = x_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le a_1 = 30 - 3x_3 \\ 0 \le a_2 = 40 - 4x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 \le 10$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 10, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (0, 0, 10, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -80$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. Pero como hay empate entre las variables que pueden salir de la base, usamos la Regla de Bland.
El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{3}(30 - 2x_1 + x_2 - a_1) = 10 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}a_1 \\
a_2 &= 40 - x_1 - 2x_2 - \frac{4}{3}(30 - 2x_1 + x_2 - a_1) = \frac{5}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}a_1 \\
z &= 70M - (3M+4)x_1 - (M+2)x_2 - (7M+8)\frac{1}{3}(30 - 2x_1 + x_2 - a_1) \\
&= -80 + \left(\frac{5}{3}M + \frac{4}{3}\right)x_1 - \left(\frac{10}{3}M + \frac{14}{3}\right)x_2 + \frac{7M+8}{3}a_1
\end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_2.
Luego, fijamos $x_1 = a_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x_3 = 10 + \frac{1}{3}x_2 \\ 0 \le a_2 = -\frac{10}{3}x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 \le 0$$

Entonces, si $x_2 = 0$ nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (0, 0, 10, 0, 0)$$

Con esta solución no conseguimos una mejora, pues $y = 0$. Por lo tanto, la iteración anterior resultó ser degenerada.
El nuevo sistema quedó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{3}{10}\left(\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}a_1 - a_2\right) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{5}a_1 - \frac{3}{10}a_2 \\
x_3 &= \frac{5}{3}x_1 - \frac{10}{3}\frac{3}{10}\left(\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}a_1 - a_2\right) + \frac{4}{3}a_1 = 10 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{5}a_1 - \frac{1}{10}a_2 \\
z &= -80 + \left(\frac{5}{3}M + \frac{4}{3}\right)x_1 - \left(\frac{10}{3}M + \frac{14}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{5}a_1 - \frac{3}{10}a_2\right) + \frac{7M+8}{3}a_1 \\
&= -80 - x_1 + \left(M + \frac{4}{5}\right)a_1 + \left(M + \frac{7}{5}\right)a_2
\end{aligned}$$

En ese caso, $z = -80$ y nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_1 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_2 &= \frac{1}{2}x_1 \\ 0 \leq x_3 &= 10 - \frac{1}{2}x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 20$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta 20, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (20, 10, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -100$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\left(10 - x_3 - \frac{1}{5}a_1 - \frac{1}{10}a_2\right) = 20 - 2x_3 - \frac{2}{5}a_1 - \frac{1}{5}a_2 \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(20 - 2x_3 - \frac{2}{5}a_1 - \frac{1}{5}a_2\right) + \frac{2}{5}a_1 - \frac{3}{10}a_2 = 10 - x_3 - \frac{1}{5}a_1 - \frac{2}{5}a_2 \\ z &= -80 - \left(20 - 2x_3 - \frac{2}{5}a_1 - \frac{1}{5}a_2\right) + \left(M + \frac{4}{5}\right)a_1 + \left(M + \frac{7}{5}\right)a_2 \\ &= -100 + 2x_3 + \left(M + \frac{6}{5}\right)a_1 + \left(M + \frac{8}{5}\right)a_2 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_3, a_1 y a_2 hará que el valor de z aumente. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = -100 + 2x_3 + \left(M + \frac{6}{5}\right)a_1 + \left(M + \frac{8}{5}\right)a_2 \underset{x_i \geq 0 | a_i \geq 0}{\overset{\geq}{\downarrow}} -100$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (20, 10, 0, 0, 0)$ es claro que $z = -100$.
Luego, la solución óptima al problema estandarizado es:

$$(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2) = (20, 10, 0, 0, 0)$$

de donde se puede deducir la solución del problema original $(x_1, x_2, x_3) = (20, 10, 0)$.

b) ▪ Método de dos fases: Primero agregamos las variables auxiliares para estandarizar el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, & z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + a_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + a_2 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - x_5 + a_3 = 4 \\ & x, a \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned} \text{máx}\, & y = -a_1 - a_2 - a_3 \\ s.a. \quad & a_1 = 1 + 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ & a_2 = 4 - x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \\ & a_3 = 4 + x_1 - x_2 + x_5 \\ & x, a \geq 0 \end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ a_2 &= 4 - x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \\ a_3 &= 4 + x_1 - x_2 + x_5 \\ y &= -(1 + 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4) - (4 - x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5) - (4 + x_1 - x_2 + x_5) = -9 - 2x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

En ese caso, $y = -9$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como hay empate entre las variables x_2 y x_3, usamos la Regla de Bland. Por lo tanto, intentaremos aumentar el valor de x_2.

Luego, fijamos $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 = 1 - x_2 \\ 0 \leq a_2 = 4 + x_2 \\ 0 \leq a_3 = 4 - x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq 1$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 1, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 3)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -8$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1 \\ a_2 &= 4 - x_1 + (1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1) - 2x_3 - x_4 - x_5 = 5 + x_1 - x_3 - x_5 - a_1 \\ a_3 &= 4 + x_1 - (1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1) + x_5 = 3 - x_1 - x_3 - x_4 + x_5 + a_1 \\ y &= -9 - 2x_1 + (1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1) + x_3 = -8 + 2x_3 + x_4 - a_1 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.
Luego, fijamos $x_1 = x_4 = x_5 = a_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_2 = 1 + x_3 \\ 0 \leq a_2 = 5 - x_3 \\ 0 \leq a_3 = 3 - x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 3$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 3, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 3, 0, 0, 0, 5, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -2$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3 \\ x_2 &= 1 + 2x_1 + (3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3) + x_4 - a_1 = 4 + x_1 + x_5 - a_3 \\ a_2 &= 5 + x_1 - (3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3) - x_5 - a_1 = 2 + 2x_1 + x_4 - 2x_5 - 2a_1 + a_3 \\ y &= -8 + 2(3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3) + x_4 - a_1 = -2 - x_1 - x_4 + 2x_5 + a_1 - 2a_3 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_5 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_5.
Luego, fijamos $x_1 = x_4 = a_1 = a_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_5 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_3 = 3 + x_5 \\ 0 \leq x_2 = 4 + x_5 \\ 0 \leq a_2 = 2 - 2x_5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_5 \leq 1$$

Entonces, aumentamos x_5 hasta 1, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3) = (0, 4, 3, 0, 1, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = 0$.
El nuevo sistema quedó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_5 &= 1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 \\ x_2 &= 4 + x_1 + \left(1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) - a_3 = 5 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 \\ x_3 &= 3 - x_1 - x_4 + \left(1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) + a_1 - a_3 = 4 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 \\ y &= -2 - x_1 - x_4 + 2\left(1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) + a_1 - 2a_3 = -a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3) = (0, 4, 3, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.

La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.

Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$\begin{aligned} x_5 &= 1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 &= 5 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 &= 4 - \frac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$z = 2x_1 - \left(5 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_4\right) - \left(4 - \frac{1}{2}x_4\right) - 2x_4 + 3\left(1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4\right) = z = -11 + x_1 - x_4$$

En ese caso, $z = -11$ y nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_4 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_4.

Luego, aumentamos el valor de x_4 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_2 = 5 + \frac{1}{2}x_4 \\ 0 \leq x_3 = 4 - \frac{1}{2}x_4 \\ 0 \leq x_5 = 1 + dfrac12x_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_4 \leq 8$$

Entonces, aumentamos x_4 hasta 8, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 0, 8, 5).$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -19$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_4 &= 8 - 2x_3 \\ x_2 &= 5 + 2x_1 + \frac{1}{2}(8 - 2x_3) = 9 + 2x_1 - x_3 \\ x_5 &= 1 + x_1 + \frac{1}{2}(8 - 2x_3) = 5 + x_1 - x_3 \\ z &= -11 + x_1 - (8 - 2x_3) = -19 + x_1 + 2x_3 \end{aligned}$$

Pero basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1 y x_3 hará que el valor de z aumente.

Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que $z = -19 + x_1 + 2x_3 \underbrace{\leq}_{x_i \geq 0} -19$, pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 0, 8, 5)$ es claro que $z = -19$.

Luego, una solución óptima al problema es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 0, 8, 5).$$

- Método Big-M: Primero agregamos las variables auxiliares para estandarizar el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = {} & 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 + Ma_1 + Ma_2 + Ma_3 \\ s.a. \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + a_1 = 1 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + a_2 = 4 \\ & -x_1 + x_2 - x_5 + a_3 = 4 \\ & x, a \geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables a_1, a_2 y a_3

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 + 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\
a_2 &= 4 - x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \\
a_3 &= 4 + x_1 - x_2 + x_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 + M(1 + 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4) + M(4 - x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5) + M(4 + x_1 - x_2 + x_5) \\
&= 9M + (2M + 2)x_1 - (M + 2)x_2 - (M + 1)x_3 - 2x_4 + 3x_5
\end{aligned}$$

En ese caso, $z = 9M$ y nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Por lo tanto, intentaremos aumentar el valor de x_2.
Luego, fijamos $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq a_1 = 1 - x_2 \\
0 \leq a_2 = 4 + x_2 \\
0 \leq a_3 = 4 - x_2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq 1$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 1, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 5, 3)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = 8M - 2$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1 \\
a_2 &= 4 - x_1 + (1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1) - 2x_3 - x_4 - x_5 = 5 + x_1 - x_3 - x_5 - a_1 \\
a_3 &= 4 + x_1 - (1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1) + x_5 = 3 - x_1 - x_3 - x_4 + x_5 + a_1 \\
z &= 9M + (2M + 2)x_1 - (M + 2)(1 + 2x_1 + x_3 + x_4 - a_1) - (M + 1)x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\
&= (8M - 2) - 2x_1 - (2M + 3)x_3 - (M + 4)x_4 + 3x_5 + (M + 2)a_1
\end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_3 es una de las variables que tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.
Luego, fijamos $x_1 = x_4 = x_5 = a_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_2 = 1 + x_3 \\
0 \leq a_2 = 5 - x_3 \\
0 \leq a_3 = 3 - x_3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 3$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 3, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 3, 0, 0, 0, 5, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = (2M - 11)$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3 \\
x_2 &= 1 + 2x_1 + (3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3) + x_4 - a_1 = 4 + x_1 + x_5 - a_3 \\
a_2 &= 5 + x_1 - (3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3) - x_5 - a_1 = 2 + 2x_1 + x_4 - 2x_5 - 2a_1 + a_3 \\
z &= (8M - 2) - 2x_1 - (2M + 3)(3 - x_1 - x_4 + x_5 + a_1 - a_3) - (M + 4)x_4 + 3x_5 + (M + 2)a_1 \\
&= (2M - 11) + (2M + 1)x_1 + (M - 1)x_4 - 2Mx_5 - (M + 1)a_1 + (2M + 3)a_3
\end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_5 es una de las variables que tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_5.
Luego, fijamos $x_1 = x_4 = a_1 = a_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_5 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_3 = 3 + x_5 \\
0 \leq x_2 = 4 + x_5 \\
0 \leq a_2 = 2 - 2x_5
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_5 \leq 1$$

Entonces, aumentamos x_5 hasta 1, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3) = (0, 4, 3, 0, 1, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -11$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned}
x_5 &= 1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 \\
x_2 &= 4 + x_1 + \left(1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) - a_3 = 5 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 \\
x_3 &= 3 - x_1 - x_4 + \left(1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) + a_1 - a_3 = 4 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 \\
z &= (2M - 11) + (2M + 1)x_1 + (M - 1)x_4 - 2M\left(1 + x_1 + \frac{1}{2}x_4 - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3\right) - (M + 1)a_1 + (2M + 3)a_3 \\
&= -11 + x_1 - x_4 + (3M + 1) + Ma_2 + (M + 3)a_3
\end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_4 es una de las variables que tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_4.
Luego, fijamos $x_1 = x_4 = a_1 = a_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_5 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_2 = 5 + \frac{1}{2}x_4 \\
0 \leq x_3 = 4 - \frac{1}{2}x_4 \\
0 \leq x_5 = 1 + \frac{1}{2}x_4
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_4 \leq 8$$

Entonces, aumentamos x_4 hasta 8, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 0, 8, 5).$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = -19$. Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_4 &= 8 - 2x_3 - a_2 - a_3 \\
x_2 &= 5 + 2x_1 + \frac{1}{2}(8 - 2x_3 - a_2 - a_3) - a_1 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 = 9 + 2x_1 - x_3 - a_1 - a_2 - a_3 \\
x_5 &= 1 + x_1 + \frac{1}{2}(8 - 2x_3 - a_2 - a_3) - a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 = 5 + x_1 - x_3 - \frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\
z &= -11 + x_1 - x(8 - 2x_3 - a_2 - a_3) + (3M + 1) + Ma_2 + (M + 3)a_3 \\
&= -19 + x_1 + 2x_3 + (3M + 1)a_1 + (M + 1)a_2 + (M + 4)a_3
\end{aligned}$$

Pero basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1, x_3, a_1, a_2 y a_3 hará que el valor de z aumente.
Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = -19 + x_1 + 2x_3 + (3M + 1)a_1 + (M + 1)a_2 + (M + 4)a_3 \underbrace{\leq}_{x_i \geq 0 | a_i \geq 0} -19,$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 0, 8, 5)$ es claro que $z = -19$.
Luego, una solución óptima al problema es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 0, 8, 5).$$

c) - <u>Método de dos fases:</u> Primero agregamos las variables slack y las auxiliares para estandarizar el problema:

$$\begin{aligned}
\min z &= -4x_1 - 2x_2 \\
s.a. \quad & 3x_1 - 2x_2 - w_1 + a_1 = 4 \\
& -2x_1 + x_2 + a_2 = 2 \\
& x, w, a \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned} \text{máx}\, y &= -a_1 - a_2 \\ s.a. \quad a_1 &= 4 - 3x_1 + 2x_2 + w_1 \\ a_2 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ x, w, a &\geq 0 \end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 - 3x_1 + 2x_2 + w_1 \\ a_2 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ y &= -(4 - 3x_1 + 2x_2 + w_1) - (2 + 2x_1 - x_2) = -6 + x_1 - x_2 - w_1 \end{aligned}$$

En ese caso, $y = -6$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_1 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_1.
Luego, fijamos $x_2 = w_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 = 4 - 3x_1 \\ 0 \leq a_2 = 2 + 2x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq \frac{4}{3}$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta $\frac{4}{3}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, w_1, a_1, a_2) = \left(\frac{4}{3}, 0, 0, 0, \frac{14}{3}\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -\frac{14}{3}$.
Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior.
El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1 \\ a_2 &= 2 + 2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1\right) - x_2 = \frac{14}{3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}w_1 - \frac{2}{3}a_1 \\ y &= -6 + \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1\right) - x_2 - w_1 = -\frac{14}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_2, w_1 y a_1 hará que el valor de y disminuya.
Además, como $y \neq 0$ se tiene que el problema original no es factible.

- Método Big-M: Primero agregamos las variables slack y las auxiliares para estandarizar el problema:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z &= -4x_1 - 2x_2 \\ s.a. \quad 3x_1 - 2x_2 - w_1 + a_1 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 + a_2 &= 2 \\ x, w, a &\geq 0 \end{aligned}$$

Lo siguiente será pasar las variables de decisión al lado derecho de la igualdad. Para ésto, despejamos las variables a_1 y a_2

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 - 3x_1 + 2x_2 + w_1 \\ a_2 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ z &= -4x_1 - 2x_2 + M(4 - 3x_1 + 2x_2 + w_1) + M(2 + 2x_1 - x_2) \\ &= 6M - (4 + M)x_1 + (M - 2)x_2 + Mw_1 \end{aligned}$$

En ese caso, $z = 6M$ y gustaría hallar otra solución factible que disminuya el valor de z. Como x_1 tiene el menor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_1.
Luego, fijamos $x_2 = w_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 = 4 - 3x_1 \\ 0 \leq a_2 = 2 + 2x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq \frac{4}{3}$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta $\frac{4}{3}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, w_1, a_1, a_2) = \left(\frac{4}{3}, 0, 0, 0, \frac{14}{3}\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = \left(\frac{14}{3}M - \frac{16}{3}\right)$.

El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1 \\
a_2 &= 2 + 2\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1\right) - x_2 = \frac{14}{3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}w_1 - \frac{2}{3}a_1 \\
z &= 6M - (4+M)\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1\right) + (M-2)x_2 + Mw_1 \\
&= \left(\frac{14}{3}M - \frac{16}{3}\right) + x_2\left(\frac{1}{3}M - \frac{14}{3}\right) + w_1\left(\frac{2}{3}M - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}M + \frac{16}{3}\right)a_1
\end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_2, w_1 y a_1 hará que el valor de z aumente.

Por lo tanto, el problema original no es factible.

Ejercicios Planteados en Clase

Ejercicio 2.16. Las siguientes tablas se obtuvieron resolviendo el problema lineal

$$\begin{aligned}
\text{máx } & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\
s.a. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}$$

a)

		x_1	x_2	x_3	x_4
-f	20	0	3	2	0
	4	1	-2	-1	0
	2	0	-1	0	1

b)

		x_1	x_2	x_3	x_4
-f	20	0	-1	0	2
	5	0	0	1	2
	6	1	-2	0	3

c)

		x_1	x_2	x_3	x_4
-f	8	2	0	0	1
	4	3	1	0	-2
	0	-2	0	1	1

d)

		x_1	x_2	x_3	x_4
-f	5	0	0	2	0
	4	0	-1	1	1
	2	1	1	-1	0

Indicar a qué situación corresponde cada uno de ellos:

(i) Programación lineal con solución no acotada.

(ii) Programación lineal con solución óptima única.

(iii) Programación lineal con soluciones óptimas alternativas.

(iv) Programación lineal con solución degenerada.

Solución 2.16.

Ejercicio 2.17. Dado el problema de programación Lineal

$$\begin{aligned}
\text{máx } & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\
s.a. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\
& -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}$$

Pasarlo a forma estándard y resolver la primera fase del método de dos fases del simplex.

Solución 2.17.
Primero agregamos las variables slack y las auxiliares para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ s.a. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - w_1 + a_1 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - w_2 + a_2 = 3 \\ & x_i, w_i, a_i \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & y = -a_1 - a_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - w_1 + a_1 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - w_2 + a_2 = 3 \\ & x_i, w_i, a_i \geq 0 \end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + w_1 \\ a_2 &= 3 - 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + w_2 \\ y &= -(2 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + w_1) - (3 - 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + w_2) = -5 + 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 - w_1 - w_2 \end{aligned}$$

En ese caso, $y = -5$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_4 = w_1 = w_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 = 2 - 3x_3 \\ 0 \leq a_2 = 3 - x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{2}{3}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta $\frac{2}{3}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, a_1, a_2) = \left(0, 0, \frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0, \frac{7}{3}\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -\frac{7}{3}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{3}(2 - x_1 - 2x_2 - x_4 + w_1 - a_1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_1 \\ a_2 &= 3 - 2x_1 + x_2 - \frac{1}{3}(2 - x_1 - 2x_2 - x_4 + w_1 - a_1) + 3x_4 + w_2 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_4 - \frac{1}{3}w_1 + w_2 + \frac{1}{3}a_1 \\ y &= -5 + 3x_1 + x_2 + \frac{4}{3}(2 - x_1 - 2x_2 - x_4 + w_1 - a_1) - 2x_4 - w_1 - w_2 = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 + \frac{1}{3}w_1 - w_2 - \frac{4}{3}a_1 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_1 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, fijamos $x_2 = x_4 = w_1 = w_2 = a_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_6 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_1 \\ 0 \leq a_2 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq \frac{7}{5}$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta $\frac{7}{5}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, a_1, a_2) = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = 0$.

Reordenando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{5}\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}x_2+\frac{10}{3}x_4-\frac{1}{3}w_1+w_2+\frac{1}{3}a_1-a_2\right)=\frac{7}{5}+x_2+2x_4-\frac{1}{5}w_1+\frac{3}{5}w_2+\frac{1}{5}a_1-\frac{3}{5}a_2\\
x_3 &= \frac{2}{3}-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4+\frac{1}{3}w_1-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{5}\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}x_2+\frac{10}{3}x_4-\frac{1}{3}w_1+w_2+\frac{1}{3}a_1-a_2\right)\\
&= \frac{1}{5}-x_2-x_4+\frac{2}{5}w_1-\frac{1}{5}w_2-\frac{2}{5}a_1+\frac{1}{5}a_2\\
y &= -\frac{7}{3}-\frac{5}{3}x_2-\frac{10}{3}x_4+\frac{1}{3}w_1-w_2-\frac{4}{3}a_1+\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{3}x_2+\frac{10}{3}x_4-\frac{1}{3}w_1+w_2+\frac{1}{3}a_1-a_2\right)=-a_1-a_2
\end{aligned}$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,w_1,w_2,a_1,a_2)=\left(\frac{7}{5},0,\frac{1}{5},0,0,0,0,0\right)$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.

La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.

Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7}{5}+x_2+2x_4-\frac{1}{5}w_1+\frac{3}{5}w_2+\frac{1}{5}a_1-\frac{3}{5}a_2\\
x_3 &= \frac{1}{5}-x_2-x_4+\frac{2}{5}w_1-\frac{1}{5}w_2+\frac{2}{5}a_1+\frac{1}{5}a_2
\end{aligned}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$\begin{aligned}
z &= 2x_1+3x_2+5x_3+6x_4\\
&= 2\left(\frac{7}{5}+x_2+2x_4-\frac{1}{5}w_1+\frac{3}{5}w_2+\frac{1}{5}a_1-\frac{3}{5}a_2\right)+3x_2+5\left(\frac{1}{5}-x_2-x_4+\frac{2}{5}w_1-\frac{1}{5}w_2+\frac{2}{5}a_1+\frac{1}{5}a_2\right)+6x_4\\
&= \frac{19}{5}+5x_4+\frac{8}{5}w_1+\frac{1}{5}w_2
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.18.

a) Utilizar la primera fase del método de dos fases de `Simplex` para hallar una solución básica factible inicial de:

$$\begin{aligned}
\text{máx}\ & 2x_1+3x_2+x_3\\
s.a.\quad & x_1+x_2+x_3\leq 40\\
& -2x_1-x_2+x_3\leq -10\\
& -x_2+x_3\geq 10\\
& x_i\geq 0
\end{aligned}$$

b) Escribir el diccionario inicial de la Fase II. ¿Es la solución básica inicial encontrada en (a) la solución óptima del problema? Justificar.

Solución 2.18.

a) Primero agregamos las variables slack y auxiliares para estandarizar el problema

$$\begin{aligned}
\text{máx}\ & z=2x_1+3x_2+x_3\\
s.a.\quad & x_1+x_2+x_3+w_1=40\\
& 2x_1+x_2-x_3-w_2+a_1=10\\
& -x_2+x_3-w_3+a_2=10\\
& x_i,w_i,a_i\geq 0
\end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned}
\text{máx}\ & y=-a_1-a_2\\
s.a.\quad & x_1+x_2+x_3+w_1=40\\
& 2x_1+x_2-x_3-w_2+a_1=10\\
& -x_2+x_3-w_3+a_2=10\\
& x_i,w_i,a_i\geq 0
\end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned}
w_1 &= 40 - x_1 - x_2 - x_3 \\
a_1 &= 10 - (2x_1 + x_2 - x_3 - w_2) = 10 - 2x_1 - x_2 + x_3 + w_2 \\
a_2 &= 10 - (-x_2 + x_3 - w_3) = 10 + x_2 - x_3 + w_3 \\
y &= -(10 - 2x_1 - x_2 + x_3 + w_2) - (10 + x_2 - x_3 + w_3) = -20 + 2x_1 - w_2 - w_3
\end{aligned}$$

En ese caso, $y = -20$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_1 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, fijamos $x_2 = x_3 = w_2 = w_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq a_1 = 10 - 2x_1 \\
0 \leq w_1 = 40 - x_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 5$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta 5, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = (5, 0, 0, 35, 0, 0, 10)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -10$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}(10 - x_2 + x_3 + w_2 - a_1) = 5 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}a_1 \\
w_1 &= 40 - \frac{1}{2}(10 - x_2 + x_3 + w_2 - a_1) - x_2 - x_3 = 35 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}a_1 \\
a_2 &= 10 + x_2 - x_3 + w_3 \\
y &- 20 + (10 - x_2 + x_3 + w_2 - a_1) - w_2 - w_3 = -10 - x_2 + x_3 - w_3 - a_1
\end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_2 = w_2 = w_3 = a_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned}
0 \leq x_1 = 5 + \frac{1}{2}x_3 \\
0 \leq w_1 = 35 - \frac{3}{2}x_3 \\
0 \leq a_2 = 10 - x_3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq 10$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 10, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = (10, 0, 10, 20, 0, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = 0$.

Reordenando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
x_3 &= 10 + x_2 + w_3 - a_2 \\
x_1 &= 5 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}(10 + x_2 + w_3 - a_2) + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}a_1 = 10 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\
w_1 &= 35 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}(10 + x_2 + w_3 - a_2) - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}a_1 = 20 - 2x_2 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}w_3 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_2 \\
y &= -10 - x_2 + (10 + x_2 + w_3 - a_2) - w_3 - a_1 = -a_1 - a_2
\end{aligned}$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = (10, 0, 10, 20, 0, 0, 0, 0)$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.

b) La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.

Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$\begin{aligned} x_3 &= 10 + x_2 + w_3 \\ x_1 &= 10 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3 \\ w_1 &= 20 - 2x_2 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}w_3 \end{aligned}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2\left(10 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3\right) 3x_2 + (10 + x_2 + w_3) = 30 + 4x_2 + w_2 + 2w_3$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x_3 &= 10 + x_2 + w_3 \\ x_1 &= 10 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3 \\ w_1 &= 20 - 2x_2 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}w_3 \\ z &= 30 + 4x_2 + w_2 + 2w_3 \end{aligned}$$

En ese caso, $z = 30$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z. Como x_2 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_2.

Luego, fijamos $w_2 = w_3 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \le x_3 = 10 + x_2 \\ 0 \le w_1 = 20 - 2x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \le 10$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 10, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (10, 10, 20, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = 70$.

Y, por lo tanto, la solución básica inicial encontrada en (a) no es la solución óptima del problema.

Ejercicio 2.19. Encuentre, si es posible, una base factible para el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} & \text{máx } z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ s.a. \quad & 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Solución 2.19.
Primero agregamos las variables slack y auxiliares para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} & \text{máx } z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ s.a. \quad & 9x_1 + 3x_2 + x_3 + a_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - w_1 + a_2 = 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 + w_2 = 2 \\ & x_i, w_i, a_i \ge 0 \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned} \text{máx } \; & y = -a_1 - a_2 \\ s.a. \quad & 9x_1 + 3x_2 + x_3 + a_1 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - w_1 + a_2 = 2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 + w_2 = 2 \\ & x_i, w_i, a_i \ge 0 \end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2-(9x_1+3x_2+x_3) = 2-9x_1-3x_2-x_3\\
a_2 &= 2-(x_1+x_2+x_3-w_1) = 2-x_1-x_2-x_3+w_1\\
w_2 &= 2-(x_1-x_2-x_3) = 2-x_1+x_2+x_3\\
y &= -(2-9x_1-3x_2-x_3)-(2-x_1-x_2-x_3+w_1) = -4+10x_1+4x_2+2x_3-w_1
\end{aligned}$$

En ese caso, $y=-4$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_1 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, fijamos $x_2=x_3=w_1=0$ y aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{array}{r} 0\le a_1 = 2-9x_1\\ 0\le a_2 = 2-x_1\\ 0\le w_3 = 2-x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \le \frac{2}{9}$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta $\frac{2}{9}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1,x_2,x_3,w_1,w_2,a_1,a_2) = \left(\frac{2}{9},0,0,0,\frac{16}{9},0,0,\frac{16}{9}\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y=-\frac{16}{9}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{9}(2-3x_2-x_3-a_1) = \frac{2}{9}-\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{9}x_3-\frac{1}{9}a_1\\
w_2 &= 2-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{9}x_3-\frac{1}{9}a_1\right)+x_2+x_3 = \frac{16}{9}+\frac{4}{3}x_2+\frac{10}{9}x_3+\frac{1}{9}a_1\\
a_2 &= 2-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{9}x_3-\frac{1}{9}a_1\right)-x_2-x_3+w_1 = \frac{16}{9}-\frac{2}{3}x_2-\frac{8}{9}x_3+\frac{1}{9}a_1+w_1\\
y &= -4+10\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{9}x_3-\frac{1}{9}a_1\right)+4x_2+2x_3-w_1 = -\frac{16}{9}+\frac{2}{3}x_2+\frac{8}{9}x_3-w_1-\frac{10}{9}a_1
\end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_2=w_1=a_1=0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{array}{r} 0\le x_1 = \frac{2}{9}-\frac{1}{9}x_3\\ 0\le w_2 = \frac{16}{9}+\frac{10}{9}x_3\\ 0\le a_2 = \frac{16}{9}-\frac{8}{9}x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 \le 2$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta 2, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1,x_2,x_3,w_1,w_2,a_1,a_2) = (0,0,2,0,4,0,0,0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y=0$.

Reordenando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{9}{8}\left(\frac{16}{9}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{9}a_1+w_1-a_2\right) = 2-\frac{3}{4}x_2+\frac{9}{8}w_1+\frac{1}{8}a_1-\frac{9}{8}a_2\\
x_1 &= \frac{2}{9}-\frac{1}{3}x_2-\frac{1}{9}a_1-\frac{1}{8}\left(\frac{16}{9}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{9}a_1+w_1-a_2\right) = -\frac{1}{4}x_2-\frac{1}{8}w_1-\frac{1}{8}a_1+\frac{1}{8}a_2\\
w_2 &= \frac{16}{9}+\frac{4}{3}x_2+\frac{1}{9}a_1+\frac{5}{4}\left(\frac{16}{9}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{9}a_1+w_1-a_2\right) = 4+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{4}a_1-\frac{5}{4}a_2\\
y &= -\frac{16}{9}+\frac{2}{3}x_2-w_1-\frac{10}{9}a_1+\left(\frac{16}{9}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{9}a_1+w_1-a_2\right) = -a_1-a_2
\end{aligned}$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$(x_1,x_2,x_3,w_1,w_2,a_1,a_2) = (0,0,2,0,4,0,0,0)$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.

La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.

Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}w_1 \\ x_3 &= 2 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{8}w_1 \\ w_2 &= 4 + \frac{1}{2}x_2 \end{aligned}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 = \left(-\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{8}w_1\right) 2x_2 + 4\left(2 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{8}w_1\right) = 8 - \frac{5}{4}x_2 + \frac{35}{8}w_1$$

En ese caso, $z = 8$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z. Como w_1 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de w_1.

Luego, fijamos $x_2 = 0$ y aumentamos el valor de w_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_1 &= -\frac{1}{8}w_1 \\ 0 \leq x_3 &= 2 + \frac{9}{8}w_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_1 \leq 0$$

Entonces, aumentamos w_1 hasta 0, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 0, 2, 0, 0, 0)$$

Con esta solución no conseguimos una mejora, pues $z = 8$. Es decir que la iteración fue degenerada.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} w_1 &= -8x_1 - 2x_2 \\ x_3 &= 2 - \frac{3}{4}x_2 + \frac{9}{8}(-8x_1 - 2x_2) = 2 - 9x_1 - 3x_2 \\ x_5 &= \frac{11}{2} - \frac{7}{3}x_1 - w_1 - \frac{1}{3}w_2 - w_3 - \frac{5}{18}w_4 \\ w_2 &= 4 + \frac{1}{2}x_2 \\ z &= 8 - \frac{5}{4}x_2 + \frac{35}{8}(-8x_1 - 2x_2) = 8 - 35x_1 - 10x_2 \end{aligned}$$

Pero basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1 y x_2 hará que el valor de z disminuya.

Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que $z = 8 - 35x_1 - 10x_2 \underbrace{\leq}_{x_i \geq 0} 8$

pero para $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, 0, 2, 0, 0, 0)$ es claro que $z = 8$.

Luego, la solución óptima al problema es:

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 2)\,.$$

Ejercicio 2.20. Sea el problema de programación lineal

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ s.a. & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ & 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq -1 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5 \\ & x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ \forall i \in \{1, \ldots, 4\} \end{array}$$

a) Aplicar la Fase I del método de 2 Fases de `Simplex` para hallar una solución básica factible inicial y escribir el diccionario inicial de la Fase II.

b) Si se modifica el coeficiente de la segunda restricción de la variable x_3 por $-a$ (en lugar de -3), ¿para cuáles valores de $a > 0$ el problema resulta infactible? Responder sin aplicar `Simplex`.

Solución 2.20.

a) Primero agregamos las variables slacks y auxiliares para estandarizar el problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + a_1 = 2 \\ & -4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - w_1 + a_2 = 1 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + w_2 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + w_3 = 5 \\ & x_i, w_i, a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la **Fase I** del problema que tiene como objetivo lograr que la suma de las variables auxiliares sea nula.

$$\begin{aligned} \text{máx}\, & y = -a_1 - a_2 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + a_1 = 2 \\ & -4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - w_1 + a_2 = 1 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + w_2 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + w_3 = 5 \\ & x_i, w_i, a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Se resuelve el problema auxiliar,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 - (3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4) = 2 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 \\ a_2 &= 1 - (-4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - w_1) = 1 + 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + w_1 \\ w_2 &= 3 - (x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4) = 3 - x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 \\ w_3 &= 5 - (2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4) = 5 - 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 \\ y &= -(2 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4) - (1 + 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + w_1) = -3 - x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 - w_1 \end{aligned}$$

En ese caso, $y = -3$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_3 tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = x_2 = x_4 = w_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_3 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq a_1 = 2 - 4x_3 \\ 0 \leq a_2 = 1 - 3x_3 \\ 0 \leq w_2 = 3 - x_3 \\ 0 \leq w_3 = 5 - x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_3 \leq \frac{1}{3}$$

Entonces, aumentamos x_3 hasta $\frac{1}{3}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = \left(0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = -\frac{2}{3}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. Pero como hay empate entre las variables que pueden salir de la base, usamos la Regla de Bland.

El nuevo sistema será de la forma:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{3}(1 + 4x_1 + x_2 + x_4 + w_1 - a_2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_2 \\ a_1 &= 2 - 3x_1 - 2x_2 - 4\frac{1}{3}(1 + 4x_1 + x_2 + x_4 + w_1 - a_2) - 2x_4 = \frac{2}{3} - \frac{25}{3}x_1 - \frac{10}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{4}{3}w_1 + \frac{4}{3}a_2 \\ w_2 &= 3 - x_1 + 3x_2 - \frac{1}{3}(1 + 4x_1 + x_2 + x_4 + w_1 - a_2) - 3x_4 = \frac{8}{3} - \frac{7}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}a_2 \\ w_3 &= 5 - 2x_1 - x_2 - \frac{1}{3}(1 + 4x_1 + x_2 + x_4 + w_1 - a_2) - 3x_4 = \frac{14}{3} - \frac{10}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}a_2 \\ y &= -3 - x_1 + x_2 + \frac{7}{3}(1 + 4x_1 + x_2 + x_4 + w_1 - a_2) + x_4 - w_1 = -\frac{2}{3} + \frac{25}{3}x_1 + \frac{10}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_4 + \frac{4}{3}w_1 - \frac{7}{3}a_2 \end{aligned}$$

Nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de y. Como x_1 es una de las variables que tiene el mayor coeficiente en y, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, fijamos $x_1 = x_4 = w_1 = a_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq x_3 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_1 \\ 0 \leq a_1 = \frac{2}{3} - \frac{25}{3}x_1 \\ 0 \leq w_2 = \frac{8}{3} - \frac{7}{3}x_1 0 \leq w_3 = \frac{14}{3} - \frac{10}{3}x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \leq \frac{2}{25}$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta $\frac{2}{25}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = \left(\frac{2}{25}, 0, \frac{11}{25}, 0, \frac{62}{25}, \frac{22}{5}, 0, 0\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $y = 0$.

El nuevo sistema quedó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{25}\left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{4}{3}w_1 - a_1 + \frac{4}{3}a_2\right) \\ &= \frac{2}{25} - \frac{2}{25}x_2 - \frac{2}{25}x_4 - \frac{4}{25}w_1 - \frac{3}{25}a_1 + \frac{4}{25}a_2 \\ x_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}a_2 + \frac{4}{3}\frac{3}{25}\left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{4}{3}w_1 - a_1 + \frac{4}{3}a_2\right) \\ &= \frac{11}{75} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{25}w_1 - \frac{4}{25}a_1 - \frac{3}{25}a_2 \\ w_2 &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}a_2 - \frac{7}{3}\frac{3}{25}\left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{4}{3}w_1 - a_1 + \frac{4}{3}a_2\right) \\ &= \frac{62}{25} + \frac{18}{5}x_2 - \frac{12}{5}x_4 - \frac{1}{25}w_1 + \frac{7}{25}a_1 - \frac{1}{25}a_2 \\ w_3 &= \frac{14}{3} - \frac{4}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}a_2 - \frac{10}{3}\frac{3}{25}\left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{4}{3}w_1 - a_1 + \frac{4}{3}a_2\right) \\ &= \frac{22}{5} - 2x_4 + \frac{1}{5}w_1 + \frac{2}{5}a_1 - \frac{1}{5}a_2 \\ y &= -\frac{2}{3} + \frac{10}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_4 + \frac{4}{3}w_1 - \frac{7}{3}a_2 + \frac{25}{3}\frac{3}{25}\left(\frac{2}{3} - \frac{10}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{4}{3}w_1 - a_1 + \frac{4}{3}a_2\right) = -a_1 - a_2 \end{aligned}$$

La solución óptima para el problema auxiliar es:

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3, a_1, a_2) = \left(\frac{2}{25}, 0, \frac{11}{25}, 0, \frac{62}{25}, \frac{22}{5}, 0, 0\right)$$

Luego, es una solución básica factible del problema original, y podemos utilizarla para correr la **Fase II**.

La **Fase II** consiste justamente en buscar el óptimo del problema original, iniciando `Simplex` sobre la solución básica factible hallada con la **Fase I**.

Para confeccionar el diccionario inicial del problema original, utilizamos las igualdades del diccionario óptimo de la **Fase I**, eliminando los términos correspondientes a las variables auxiliares:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{25} - \frac{2}{25}x_2 - \frac{2}{25}x_4 - \frac{4}{25}w_1 \\ x_3 &= \frac{11}{75} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{25}w_1 \\ w_2 &= \frac{62}{25} + \frac{18}{5}x_2 - \frac{12}{5}x_4 - \frac{1}{25}w_1 \\ w_3 &= \frac{22}{5} - 2x_4 + \frac{1}{5}w_1 \end{aligned}$$

Sólo queda reescribir z expresada en función de las variables no básicas

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ &= 3\left(\frac{2}{25} - \frac{2}{25}x_2 - \frac{2}{25}x_4 - \frac{4}{25}w_1\right) + x_2 + \left(\frac{11}{75} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{25}w_1\right) + 2x_4 \\ &= \frac{29}{75} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_4 - \frac{9}{25}w_1 \end{aligned}$$

b) Para que el problema resulte infactible, revisemos las restricciones.

Si $a > 0$, entonces basta con notar que si se multiplica por 2 la segunda fila y se la suma a la primera se tiene que

$$\begin{array}{rrcr} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 & = & 2 \\ + & & & \\ & 2(4x_1 + x_2 - ax_3 + x_4) & \leq & -2 \\ \hline & 11x_1 + 4x_2 + (4-2a)x_3 + 4x_4 & \leq & 0 \end{array}$$

Si $a \leq 2$, entonces como $x_i \geq 0$ se tiene que $0 \leq 11x_1 + 4x_2 + (4-2a)x_3 + 4x_4 \leq 0$ y, entonces, $x_i = 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$ puesto que todos los coeficientes son positivos. Pero si $x_i = 0$ para todo i, entonces no se cumplen las primeras dos restricciones y, por lo tanto, el problema sería infactible.

Por otra parte, si $a > 2$ el problema resulta factible puesto que el punto $x = \left(0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ pertenece a la región.

3 Programación Lineal - Dualidad | Branch & Bound

Ejercicio 3.1. Pruebe que el problema dual del problema dual es el problema primal.

Solución 3.1.
Supongamos que el problema primal está definido por

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x \\ s.a. \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

entonces, sabemos que el problema dual correspondiente será

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & b^T y \\ s.a. \quad & y^T A \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

veamos que, para este caso, el dual del dual es equivalente al primal (el caso en que el problema primal es minimizar, es similar a éste).

Entonces, el problema dual es equivalente a resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} -\text{máx} \quad & (-b^T z) \\ s.a. \quad & z^T A \geq c \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

que, a su vez, es equivalente a

$$\begin{aligned} -\text{máx} \quad & (-b^T z) \\ s.a. \quad & -z^T A \leq -c \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

y, como ya sabemos, el dual de este problema es

$$\begin{aligned} -\text{mín} \quad & (-c^T z) \\ s.a. \quad & -Az \geq -b \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

que resulta equivalente a

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (b^T z) \\ s.a. \quad & Az \leq b \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, el problema dual del problema dual es el problema primal.

Ejercicio 3.2. Encuentre un problema no factible cuyo dual tampoco sea factible.

Solución 3.2.
Sea el siguiente problema primal

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para notar que el problema es infactible basta con observar gráficamente que

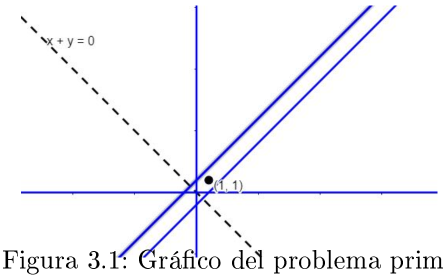


Figura 3.1: Gráfico del problema primal

En este caso, el problema dual nos dará una cota superior sobre el valor del óptimo. La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar el valor óptimo del problema primal.

Luego, sean $y_1, y_2 \geq 0$ tales que

$$\begin{array}{cccc} & y_1 & (x_1 - x_2) & \leq & -y_1 \\ + & & & & \\ & y_2 & (-x_1 + x_2) & \leq & -y_2 \\ \hline (y_1 - y_2)x_1 & + & (-y_1 + y_2)x_2 & \leq & -y_1 - y_2 \end{array}$$

Como buscamos una superior al problema primal, necesitamos que

$$x_1 + x_2 \leq (y_1 - y_2)x_1 + (-y_1 + y_2)x_2$$

y, por lo tanto, las restricciones serán que

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2) &\geq 1 \\ (-y_1 + y_2) &\geq 1 \end{aligned}$$

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para la función objetivo, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -y_1 - y_2 \\ s.a. \quad & (y_1 - y_2) \geq 1 \\ & (-y_1 + y_2) \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nuevamente, para verificar que el problema no es factible basta con observar que gráficamente

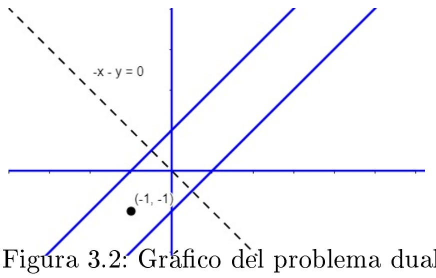


Figura 3.2: Gráfico del problema dual

Ejercicio 3.3. Dado el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 2x_6 + x_7 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 32x_4 + 3x_5 + 20x_6 + 11x_7 \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

a) Encuentre el valor óptimo de la función objetivo.

b) Encuentre el punto en que se alcanza.

Solución 3.3.
Para resolver este problema, usaremos el Teorema de Holgura Complementaria. Por lo tanto, lo primero que hay que plantear es el problema dual.

Sea, entonces, $y \geq 0$ tal que

$$y(2x_1 + 2x_2 + x_3 + 32x_4 + 3x_5 + 20x_6 + 11x_7) \geq y$$

Nos interesa hallar una cota inferior para el valor óptimo del problema primal; por lo tanto , buscamos que

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 2x_6 + x_7 \geq y(2x_1 + 2x_2 + x_3 + 32x_4 + 3x_5 + 20x_6 + 11x_7) \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 2x_6 + x_7 \geq (2y)x_1 + (2y)x_2 + yx_3 + (32y)x_4 + (3y)x_5 + (20y)x_6 + (11y)x_7 \geq y$$

es decir,

$$\begin{aligned} (2y) &\leq 1 & \qquad 3y &\leq 8 \\ y &\leq 3 & 20y &\leq 2 \\ 32y &\leq 2 & 11y &\leq 1 \end{aligned}$$

Naturalmente, nos interesa la mejor cota inferior para z, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \ & y \\ s.a. \quad & (2y) \leq 1 \\ & y \leq 3 \\ & 32y \leq 2 \\ & 3y \leq 8 \\ & 20y \leq 2 \\ & 11y \leq 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Usando el método de `Simplex` se tiene que

$$\begin{aligned} 2y + w_1 &= 1 \\ y + w_2 &= 3 \\ 32y + w_3 &= 2 \\ 3y + w_4 &= 8 \\ 20y + w_5 &= 2 \\ 11y + w_6 &= 1 \\ t &= y \end{aligned}$$

entonces, dado que la cota más restrictiva resulta ser $y \leq \dfrac{2}{32}$ aumentamos y y obtenemos una mejora sobre el valor de t puesto que $t = \dfrac{2}{32}$.

Luego, reemplazando, tenemos que

$$t = \frac{2}{32} - \frac{1}{32}w_3$$

y basta con notar que cualquier incremento que se haga sobre la variable w_3 hará que el valor de z disminuya. Por lo tanto, la solución al problema dual es $y^* = \dfrac{1}{16}$ con $t = \dfrac{1}{16}$.

Luego, por el Teorema de Holgura Complementaria, se tiene que

$$\left.\begin{array}{lcc} x_1^* = 0 & \text{o} & 2y^* = 1 \\ x_2^* = 0 & \text{o} & 2y^* = 1 \\ x_3^* = 0 & \text{o} & y^* = 3 \\ x_4^* = 0 & \text{o} & 32y^* = 2 \\ x_5^* = 0 & \text{o} & 3y^* = 8 \\ x_6^* = 0 & \text{o} & 20y^* = 2 \\ x_7^* = 0 & \text{o} & 11y^* = 1 \\ y^* = 0 & \text{o} & 2x_1^* + 2x_2^* + x_3^* + 32x_4^* + 3x_5^* + 20x_6^* + 11x_7^* = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 2y^* \neq 1 & \Rightarrow & x_1^* = 0 \\ 2y^* \neq 1 & \Rightarrow & x_2^* = 0 \\ y^* \neq 3 & \Rightarrow & x_3^* = 0 \\ 3y^* \neq 8 & \Rightarrow & x_5^* = 0 \\ 20y^* \neq 2 & \Rightarrow & x_6^* = 0 \\ 11y^* \neq 1 & \Rightarrow & x_5^* = 0 \\ y^* \neq 0 & \Rightarrow & 32x_4^* = 1, \ \text{pues } x_i = 0, \ \forall i \neq 4 \end{array}$$

por lo tanto, $x_4^* = \dfrac{1}{32}$.

a) Luego el valor óptimo de la función objetivo es $z = 2x_4^* = \dfrac{1}{16}$.

b) Se alcanza en el punto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \left(0, 0, 0, \dfrac{1}{32}, 0, 0, 0\right)$.

Ejercicio 3.4. Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq b_1 \\ & x_1 - x_2 \leq b_2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Suponga $c_1 = 1, c_2 = 3, b_1 = 6$ y $b_2 = 2$.

a) Aplique el algoritmo `Simplex` para encontrar el óptimo. Justifique todos los pasos que realiza.

b) ¿En qué intervalo puede moverse c_1 para que el punto óptimo siga siendo el mismo? Justifique.

c) ¿En qué intervalo puede moverse b_1 para que la base óptima siga siendo la misma? Justifique.

d) Formule el problema dual del problema original.

e) Encuentre el óptimo del dual usando el Teorema de Holgura Complementaria.

f) Suponga que b_1 aumenta de 6 a 6,5. ¿En cuánto mejora la función objetivo? Justifique sin realizar ningún calculo adicional.

g) Suponga que b_2 aumenta de 2 a 3. ¿En cuánto mejora la función objetivo? Justifique sin realizar ningún calculo adicional.

Solución 3.4. a) Primero agregamos las variables de holgura w_1 y w_2 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = x_1 + 3x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6 \\ & x_1 - x_2 + w_2 = 2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Comenzamos pasando las variables de decisión al lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned} w_1 &= 6 - (2x_1 + 3x_2) = 6 - 2x_1 - 3x_2 \\ w_2 &= 2 - (x_1 - x_2) = 2 - x_1 + x_2 \\ z &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 6, 2)$. En ese caso, $z = 0$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z.

Como x_3 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_3.

Luego, fijamos $x_1 = 0$ y aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq w_1 = 6 - 3x_2 \\ 0 \leq w_2 = 2 + x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \leq 2$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 2, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 2, 0, 4)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = 6$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior. El nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_1 \\ w_2 &= 2 - x_1 + \left(2 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_1\right) = 4 - \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_1 \\ z &= x_1 + 3\left(2 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_1\right) = 6 - x_1 - w_1 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_1 y w_1 hará que el valor de z disminuya. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = 6 - x_1 - w_1 \underset{x_i, w_i \geq 0}{\underset{\downarrow}{\leq}} 6$$

pero para $(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 2, 0, 4)$ es claro que $z = 6$.

Luego, la solución óptima al problema original es:

$$(x_1, x_2) = (0, 2).$$

b) Sabemos que el óptimo es $x^* = (0, 2)$. Nos gustaría saber para qué valores de $c_1 \in \mathbb{R}$ el problema con función objetivo

$$c_1 x_1 + 3x_2$$

sigue teniendo a x^* como óptimo.

Estandarizando el problema y sabiendo que $(0, 2)$ es solución óptima del problema, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = c_1 x_1 + 3x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6 \\ & x_1 - x_2 + w_2 = 2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_B^T = (3, 0) \quad \text{y } c_R^T = (c_1, 0)$$

como el objetivo es maximizar, necesitamos que

$$0 \geq c_{R_1}^T = c_1 - c_B^T \cdot B^{-1} \cdot R_1 = c_1 - (3, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 - (3, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = c_1 - 2 \Rightarrow 2 \geq c_1.$$

c) Sabemos que el óptimo es $x^* = (0, 2)$. Nos gustaría saber para qué valores de $b_1 \in \mathbb{R}$ el problema original sigue teniendo a x^* como óptimo.

Estandarizando el problema y sabiendo que $(0, 2)$ es solución óptima del problema, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = x_1 + 3x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + w_1 = b_1 \\ & x_1 - x_2 + w_2 = 2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Para ver que la solución básica es factible, basta ver que

$$0 \leq B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{3} \geq 0 \\ \frac{b_1}{3} + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 \geq 0$$

d) En este caso, el problema dual nos dará una cota superior sobre el valor del óptimo. La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar el valor óptimo del problema primal.

Luego, sean $y_1, y_2 \geq 0$ tales que

$$\begin{array}{cccccc} & & y_1 & (2x_1 + 3x_2) & \leq & b_1 y_1 \\ + & & & & & \\ & & y_2 & (x_1 - x_2) & \leq & b_2 y_2 \\ \hline & (2y_1 + y_2)x_1 & + & (3y_1 - y_2)x_2 & \leq & b_1 y_1 b_2 y_2 \end{array}$$

Como buscamos una superior al problema primal, necesitamos que

$$c_1x_1 + c_2x_2 \leq (2y_1 + y_2)x_1 + (3y_1 - y_2)x_2$$

y, por lo tanto, las restricciones serán que

$$\begin{aligned}(2y_1 + y_2) &\geq c_1\\ (3y_1 - y_2) &\geq c_2\end{aligned}$$

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para la función objetivo, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{aligned}\text{mín} \quad & b_1y_1 + b_2y_2\\ s.a. \quad & (2y_1 + y_2) \geq c_1\\ & (3y_1 - y_2) \geq c_2\\ & y_1, y_2 \geq 0\end{aligned}$$

e) Para $c_1 = 1, c_2 = 3, b_1 = 6$ y $b_2 = 2$, sabemos que el óptimo es $x^* = (0, 2)$. Y por el Teorema de Holgura Complementaria, se tiene que

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1^* = 0 & \text{o} & 2y_1^* + y_2^* = 1\\ x_2^* = 0 & \text{o} & 3y_1^* - y_2^* = 3\\ y_1^* = 0 & \text{o} & 2x_1^* + 3x_2^* = 6\\ y_2^* = 0 & \text{o} & x_1^* - x_2^* = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2^* \neq 0 & \Rightarrow 3y_1^* - y_2^* = 3\\ x_1^* - x_2^* \neq 2 & \Rightarrow y_2^* = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y_1^* = 3 \Rightarrow y_1^* = 1$$

Luego, el punto óptimo del problema dual $y* = (1, 0)$.

f) Puesto que cada variable del dual se asocia con una restricción (y_1 con la primera e y_2 con la segunda), para saber si mejorará o no la función objetivo, en este caso, basta con ver ese comportamiento sobre y_1.

Luego, como $y_1^* = 1$ aumentar en media unidad se tendría una mejora de $0{,}5 * 1$ sobre la función objetivo.

g) Puesto que cada variable del dual se asocia con una restricción (y_1 con la primera e y_2 con la segunda), para saber si mejorará o no la función objetivo, en este caso, basta con ver ese comportamiento sobre y_2.

Luego, como $y_2^* = 0$ aumentar en una unidad mantendrá ese valor nulo y, por lo tanto, el valor de la función objetivo no va cambiar.

Ejercicio 3.5. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere el problema

$$\begin{aligned}\text{máx} \quad & z = (10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3\\ s.a. \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 7\\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5\\ & x \geq 0\end{aligned}$$

Sean x_4 y x_5 las variables de holgura para las restricciones respectivas.

a) Aplique el algoritmo `Simplex` para encontrar el óptimo si $\theta = 0$.

b) Determine el intervalo de valores de θ para que la solución básica factible anterior siga siendo óptima.

c) Suponiendo que θ pertenece al intervalo encontrado en el ítem anterior encuentre el intervalo de b_1 para que la base factible óptima anterior siga siendo la misma. Repita para b_2.

d) Analice el caso en que se mueven b_1 y b_2 a la vez.

e) Formule el problema dual del problema original.

f) Suponiendo que θ pertenece al intervalo encontrado anteriormente, encuentre el óptimo del problema dual usando el teorema de Holgura Complementaria.

Solución 3.5.

a) Primero agregamos las variables de holgura x_4 y x_5 para estandarizar el problema

$$\begin{aligned}\text{máx} \quad & z = 10x_1 + 4x_2 + 7x_3\\ s.a. \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7\\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 5\\ & x, w \geq 0\end{aligned}$$

Comenzamos pasando las variables de decisión al lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned} x_4 &= 7 - (3x_1 + x_2 + 2x_3) = 7 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_5 &= 5 - (2x_1 + x_2 + 3x_3) = 5 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ z &= 10x_1 + 4x_2 + 7x_3 \end{aligned}$$

Necesitamos una solución factible; por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 7, 5)$. En ese caso, $z = 0$ y nos gustaría hallar otra solución factible que aumente el valor de z.

Como x_1 tiene el mayor coeficiente en z, intentaremos aumentar el valor de x_1.

Luego, fijamos $x_3 = x_2 = 0$ y aumentamos el valor de x_1 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \le x_4 = 7 - 3x_1 \\ 0 \le x_5 = 5 - 2x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 \le \frac{7}{3}$$

Entonces, aumentamos x_1 hasta $\frac{7}{3}$, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{7}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = \frac{7}{3}$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_1 = \frac{1}{3}(7 - x_2 - 2x_3 - x_4) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

$$x_5 = 5 - \frac{2}{3}(7 - x_2 - 2x_3 - x_4) - x_2 - 3x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4$$

y

$$z = \frac{10}{3}(7 - x_2 - 2x_3 - x_4) + 4x_2 + 7x_3 = \frac{70}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ z &= \frac{70}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 \end{aligned}$$

Si queremos disminuir el valor de z, nuestra única opción es incrementar el valor de x_2 fijando $w_2 = x_1 = 0$. Luego aumentamos el valor de x_2 de la siguiente manera

$$\left.\begin{aligned} 0 \le x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_2 \\ 0 \le x_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 \le 1$$

Entonces, aumentamos x_2 hasta 1, lo cual nos conduce a nuestra próxima solución

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 0, 0)$$

Con esta solución conseguimos una mejora, pues ahora $z = 24$.

Queremos seguir buscando mejores soluciones, para ésto repetimos el proceso anterior:

$$x_2 = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - x_5\right) = 1 - 5x_3 + 2x_4 - 3x_5$$

$$x_1 = \frac{7}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - x_5\right) - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 2 + x_3 - x_4 + x_5$$

y

$$z = \frac{70}{3} + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 - x_5\right) + \frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 = 24 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5$$

es decir, que el nuevo sistema queda como

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_3 - x_4 + x_5 \\ x_2 &= 1 - 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 \\ z &= 24 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 \end{aligned}$$

Ahora, basta notar que cualquier incremento que se haga sobre las variables x_3, x_4 y x_5 hará que el valor de z disminuya. Entonces, podemos afirmar que hemos llegado al óptimo puesto que

$$z = 24 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 \underset{\substack{\downarrow \\ x_i \geq 0}}{\leq} 24$$

pero para $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 0, 0)$ es claro que $z = 24$.

Luego, la solución óptima al problema original es:

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0).$$

b) Sabemos que el óptimo es $x^* = (2, 1, 0)$. Nos gustaría saber para qué valores de $\theta \in \mathbb{R}$ el problema mantiene su solución. Sea entonces el problema estandarizado

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = (10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3 \\ s.a. \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ & x, w \geq 0 \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (10 - 4\theta, 4 - \theta) \quad \text{y} \quad c_R^T = (7 + \theta, 0, 0)$$

como el objetivo es maximizar, necesitamos que para $i = 1, 2, 3$

$$0 \geq \overline{c_{R_i}}^T = c_{R_i} - c_B^T B^{-1} R_i$$

con

$$c_B^T B^{-1} = (2 - 2\theta, 2 + \theta)$$

<u>$i = 1$:</u> Se tiene que $R_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $c_{R_1} = 7 + \theta$, entonces

$$0 \geq \overline{c_{R_1}}^T = c_{R_1} - c_B^T B^{-1} R_1 = 0 \geq 7 + \theta - (2 - 2\theta, 2 + \theta) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -3$$

<u>$i = 2$:</u> Se tiene que $R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $c_{R_2} = 0$, entonces

$$0 \geq \overline{c_{R_2}}^T = c_{R_2} - c_B^T B^{-1} R_2 = -(2 - 2\theta, 2 + \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -(2 - 2\theta) \Rightarrow \theta \leq 1$$

<u>$i = 3$:</u> Se tiene que $R_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $c_{R_3} = 0$, entonces

$$0 \geq \overline{c_{R_3}}^T = c_{R_3} - c_B^T B^{-1} R_3 = -(2 - 2\theta, 2 + \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -(2 + \theta) \Rightarrow \theta \geq -2$$

Por lo tanto si $\theta \in [-2, 1]$ la solución básica factible anterior sigue siendo óptima.

c) Sea θ perteneciente al intervalo hallado en el ítem anterior, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

y sólo basta ver que la solución básica es factible; es decir,

- $0 \leq B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 5 \end{pmatrix} = (b_1 - 5, -2b_1 + 15)$. Entonces, buscamos b_1 tal que

$$\begin{cases} b_1 - 5 & \geq 0 \\ -2b_1 + 15 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5 \leq b_1 \leq \frac{15}{2}.$$

- $0 \leq B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ b_2 \end{pmatrix} = (7 - b_2, -14 + 3b_2)$. Entonces, buscamos b_2 tal que

$$\begin{cases} 7 - b_2 & \geq 0 \\ -14 + 3b_2 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{14}{3} \leq b_2 \leq 7.$$

d) Siguiendo el mismo prodecimiento que el ítem anterior, buscamos $b \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 \leq B^{-1}b$. Entonces

$$0 \leq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (b_1 - b_2, -2b_1 + 3b_2)$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned} 0 \leq & b_1 - b_2 \\ 0 \leq & -2b_1 + 3b_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_2 \leq b_1 \quad \text{y} \quad \frac{2}{3}b_1 \leq b_2$$

Es decir, $\frac{2}{3}b_1 \leq b_2 \leq b_1$.

e) En este caso, el problema dual nos dará una cota superior sobre el valor del óptimo. La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar el valor óptimo del problema primal.

Luego, sean $y_1, y_2 \geq 0$ tales que

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_1 & (3x_1 + x_2 + 2x_3) & & \leq & 7y_1 \\ & + & & & & & \\ & & y_2 & (2x_1 + x_2 + 3x_3) & & \leq & 5y_2 \\ \hline (3y_1 + 2y_2)x_1 & + & (y_1 + y_2)x_2 & + & (3y_2 + 2y_1)x_3 & \leq & 7y_1 + 5y_2 \end{array}$$

Como buscamos una superior al problema primal, necesitamos que

$$(10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3 \leq (3y_1 + 2y_2)x_1 + (y_1 + y_2)x_2 + (3y_2 + 2y_1)x_3$$

y, por lo tanto, las restricciones serán que

$$\begin{aligned} (3y_1 + 2y_2) &\geq (10 - 4\theta) \\ (y_1 + y_2) &\geq (4 - \theta) \\ (3y_2 + 2y_1) &\geq (7 + \theta) \end{aligned}$$

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para la función objetivo, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 7y_1 + 5y_2 \\ s.a. \quad & (3y_1 + 2y_2) \geq (10 - 4\theta) \\ & (y_1 + y_2) \geq (4 - \theta) \\ & (3y_2 + 2y_1) \geq (7 + \theta) \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

f) Sabemos que el óptimo es $x^* = (2, 1, 0)$. Y por el Teorema de Holgura Complementaria, se tiene que

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1^* = 0 & \text{o} & 3y_1^* + 2y_2^* = (10 - 4\theta) \\ x_2^* = 0 & \text{o} & y_1^* + y_2^* = (4 - \theta \\ x_3^* = 0 & \text{o} & 3y_2^* + 2y_1^* = (7 + \theta) \\ y_1^* = 0 & \text{o} & 3x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 7 \\ y_2^* = 0 & \text{o} & 2x_1^* + x_2^* + 3x_3^* = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccc} x_1^* \neq 0 & \Rightarrow & 3y_1^* + 2y_2^* = (10 - 4\theta) \\ x_2^* = 0 & \Rightarrow & y_1^* + y_2^* = (4 - \theta) \end{array}$$

Luego,

$$\begin{cases} 3y_1^* + 2y_2^* & = (10 - 4\theta) \\ y_1^* + y_2^* & = (4 - \theta) \end{cases} \Rightarrow y^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 - 4\theta \\ 4 - \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2\theta \\ 2 + \theta \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.6. Resuelva usando Branch and Bound los siguientes problemas.

a)

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 43 \\ & x \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 10x_1 + 15x_2 \\ s.a. \quad & 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ & 15x_1 + 30x_2 \leq 20 \\ & x \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Nota: Puede encontrar los óptimos de los problemas lineales de forma gráfica (o como le resulte más fácil).

Solución 3.6.

a) Definimos su relajación lineal al problema que se obtiene al relajar la condición de integralidad de las variables en cuestión:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ & 7x_1 + 3x_2 \leq 43 \\ & x \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Gráficamente, vemos que el problema es de la pinta

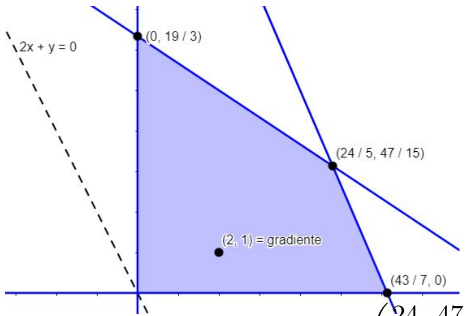
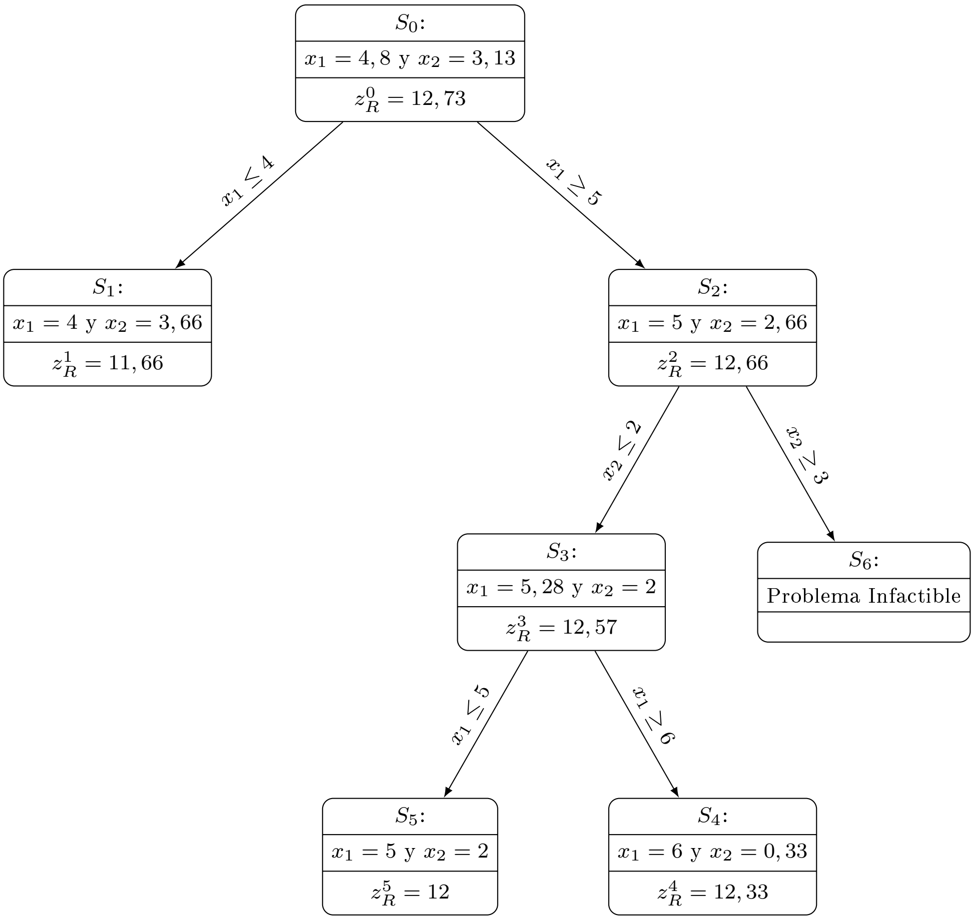


Figura 3.3: Donde la solución resulta ser $x^* = \left(\frac{24}{5}, \frac{47}{15}\right)$ con $z = \frac{191}{15}$.



Como en S_5 llegamos a un punto con coordenadas enteras ya no es necesario continuar con el proceso; es decir, llegamos a un óptimo del problema relajado a partir de un punto con coordenadas enteras.

Además, tampoco vale seguir ramificando desde S_6 puesto que se obtuvo un sistema infactible.

Por último, queda seguir ramificando desde S_1. Para este caso, basta notar que la mejor solución que se puedrá obtener desde esa rama será menor o igual a 11 pero en S_5 hemos obtenido una mejor solución.

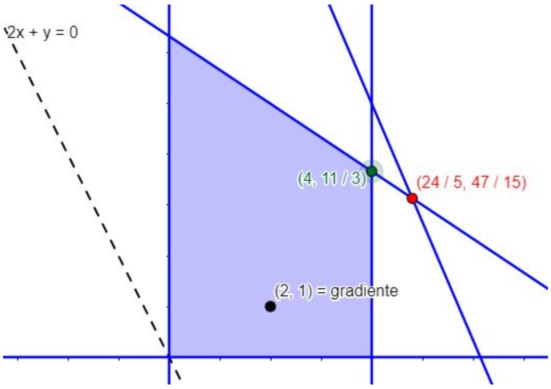
Luego, para este problema $x^* = (5, 2)$ con $z = 12$.

Gráficamente, las respectivas regiones para S_i (para $i = 1 \ldots, 6$) resultaron

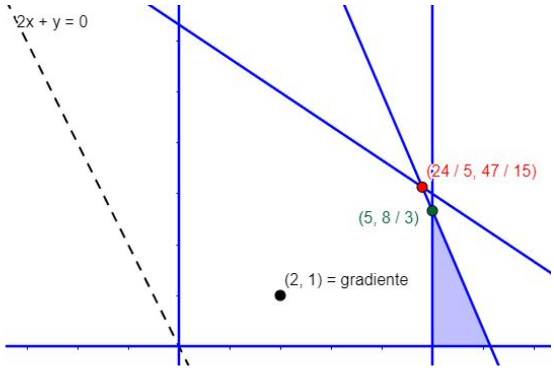
b) Definimos su relajación lineal al problema que se obtiene al relajar la condición de integralidad de las variables en cuestión:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & z = 10x_1 + 15x_2 \\
s.a. \quad & 8x_1 + 4x_2 \leq 40 \\
& 15x_1 + 30x_2 \leq 20 \\
& x \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

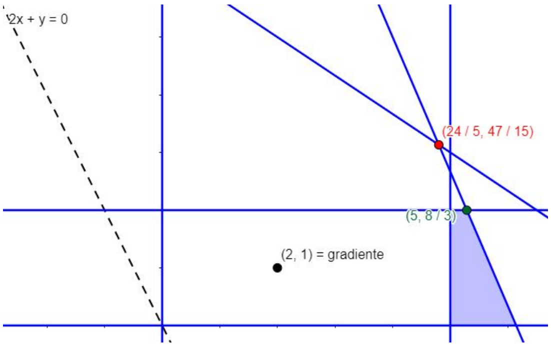
Gráficamente, vemos que el problema es de la pinta



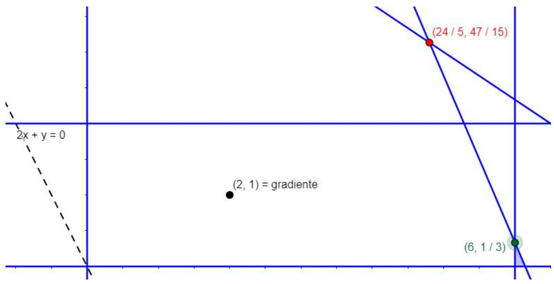
(a) Región S_1 con óptimo en $x_1 = 4$ y $x_2 = 3,66$



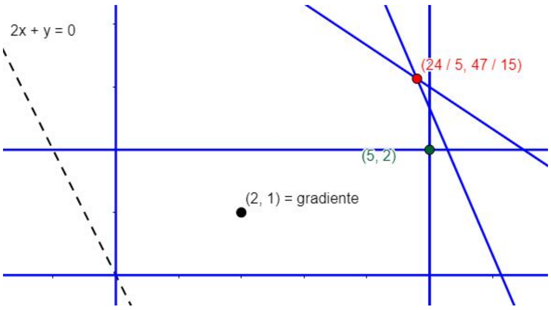
(b) Región S_2 con óptimo en $x_1 = 5$ y $x_2 = 2,66$



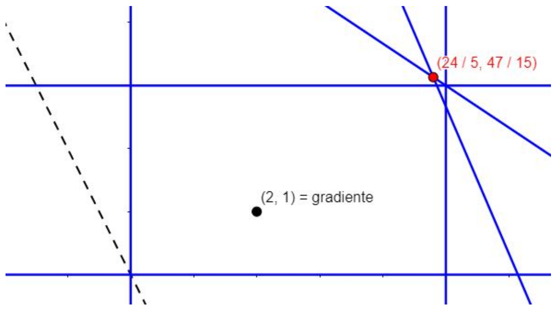
(c) Región S_3 con óptimo en $x_1 = 5,28$ y $x_2 = 2$



(d) Región S_4 con óptimo en $x_1 = 6$ y $x_2 = 0,33$



(e) Región S_5 con óptimo en $x_1 = 5$ y $x_2 = 2$



(f) Región S_6, problema infactible

Figura 3.4: Gráficos de cada S_i para $i = 1, \ldots, 6$

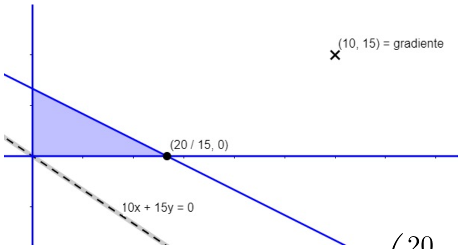
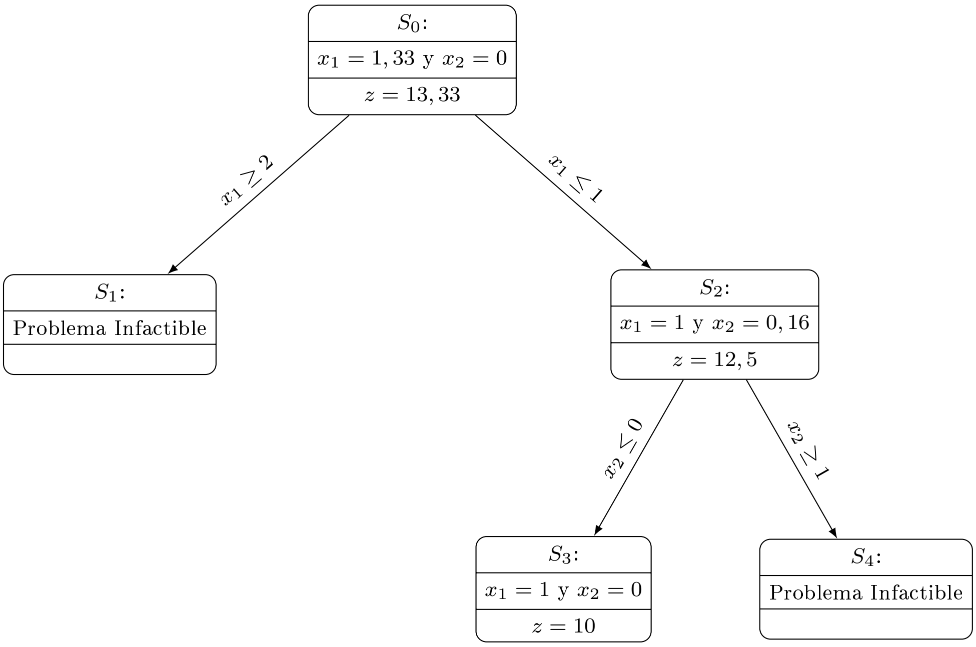
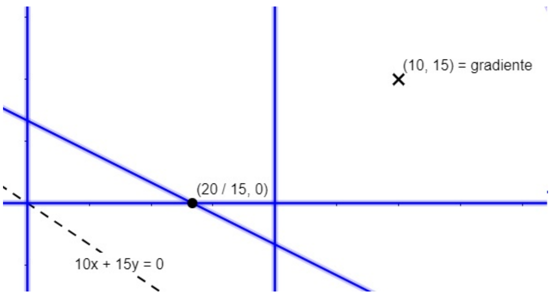


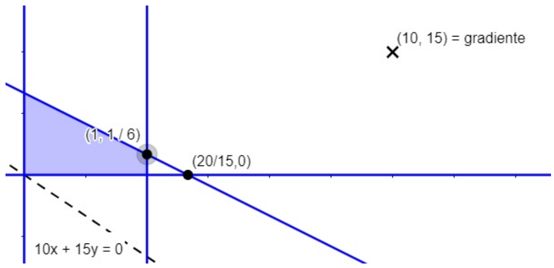
Figura 3.5: Donde la solución resulta ser $x^* = \left(\frac{20}{15}, 0\right)$ con $z = \frac{40}{3}$.



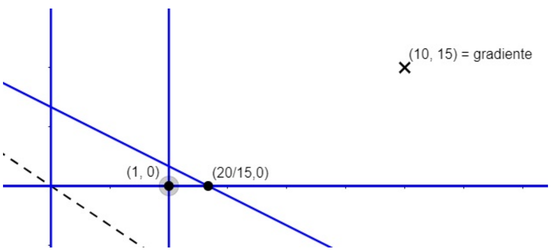
Como ya no hay más problemas por resolver, el algoritmo afirma que el óptimo se alcanza en $x^* = (1, 0)$ con $z = 10$. Gráficamente, las respectivas regiones para S_i (para $i = 1 \ldots, 6$) resultaron



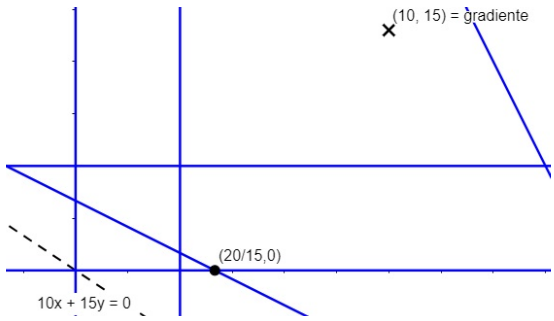
(a) Región S_1, problema infactible



(b) Región S_2 con óptimo en $x_1 = 1$ y $x_2 = 0,16$



(c) Región S_3 con óptimo en $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$



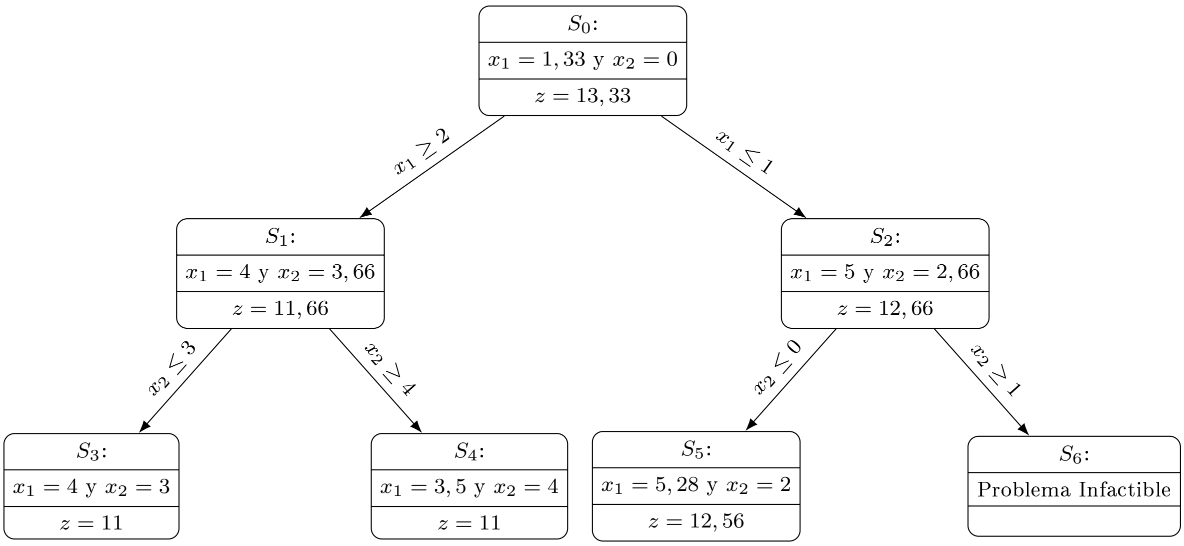
(d) Región S_4, problema infactible

Figura 3.6: Gráficos de cada S_i para $i = 1, \ldots, 4$

Ejercicio 3.7. Para los ejemplos del ejercicio anterior, supongamos que por restricciones de tiempo, no podemos expandir el árbol más allá del segundo nivel. Elija la mejor solución al problema en ese caso y de una medida de la calidad de la solución encontrada.

Solución 3.7.
Supongamos que estamos expandiendo hasta el segundo nivel de manera completa, por lo tanto, tendremos un árbol con siete nodos (cuatro en el segundo nivel, dos para el primero y uno para el inicial).

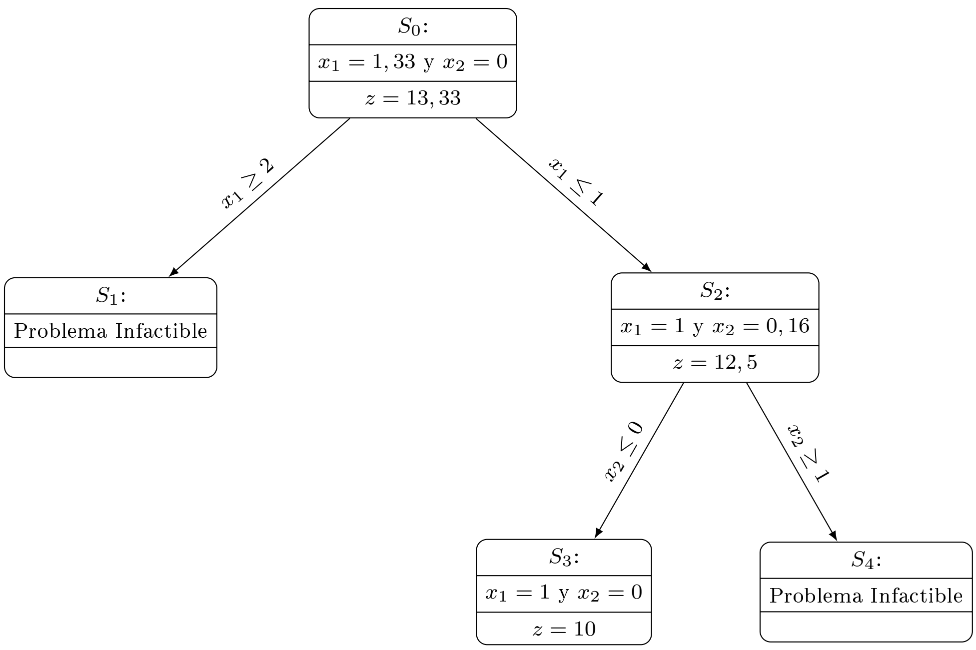
a) En este caso, se tiene que



por lo tanto, en este caso (como se está maximizando) el mayor valor incumbente obtenido es 11 y será la solución. Para dar una medida de la solución encontrada, calculamos el error relativo entre z_{IP} (que en este caso es 11) y z_{LP} $\left(\text{que en este caso es } \dfrac{191}{15}\right)$

$$E = \frac{\left|\dfrac{191}{15} - 11\right|}{\dfrac{191}{15}} \times 100 \approx 13,61\,\%$$

b) En este caso, se tiene que



por lo tanto, en este caso (como se está maximizando) el mayor valor incumbente obtenido es 10 y será la solución.

Para dar una medida de la solución encontrada, calculamos el error relativo entre z_{IP} (que en este caso es 10) y z_{LP} $\left(\text{que en este caso es } \dfrac{40}{3}\right)$

$$E = \frac{\left|\dfrac{40}{3} - 10\right|}{\dfrac{40}{3}} \times 100 = 25\,\%$$

Ejercicios Planteados en Clase

Ejercicio 3.8. Dado el problema de programacón lineal

$$\begin{aligned} & \min \;\; z = c_1x_1 + c_2x_2 \\ s.a. \quad & -x_1 + 3x_2 \leq d \\ & ax_1 + x_2 \geq 2 \\ & bx_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Discutir cuando sus soluciones están acotadas en términos de a, b, c_1 y c_2.
- Si llamamos x_3, x_4 y x_5 a las variables de holgura usuales para pasar el problema a la forma estándar, discutir cuando las variables x_2, x_3 y x_5 determinan una base factible en función de d. ¿Tiene soluciones degeneradas?

Se puede usar que $\{(1, 0, 1, a, -b); (0, 1, -3, 1, -1)\}$ es base de $Ker(A)$, con A matriz de la formulación estándar.

Solución 3.8.

Ejercicio 3.9. En el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} & \max \;\; z = 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 15 \\ & 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

la base $\{x_1, x_2, x_2\}$ es óptima y la inversa de la matriz básica asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Hallar al solución óptima del problema Primal y del Problema Dual.

2) Decidir cuánto se puede perturbar el vector de términos independientes para que la base óptima no cambie.

3) Decidir cuánto se puede perturbar el coeficiente asociado a x_1 en la función objetivo para la base óptima no cambie.

Solución 3.9.

a) Empezamos por estandarizar el problema,

$$\begin{aligned} \max \;\; & z = 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 15 \\ & 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 9 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Sea entonces, laa matriz del problema estandarizado

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y eligiendo las columnas correspondientes a x_1, x_2 y x_5 se obtiene una base $B = \{x_1, x_2, x_5\}$ de donde se define

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con inversa}]{} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, recordemos que

$$Axb \Rightarrow \underbrace{[B|R]}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix}}_{=x} = b \Rightarrow B^{-1}[B|R] \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} = B^{-1}b$$

por lo tanto,

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b, \text{ donde deducimos que una solución básica factible } \begin{cases} x_B = B^{-1}b = \bar{b} \\ x_R = 0 \end{cases}$$

Como sabemos que la base B es óptima, entonces la solución al problema primal es

$$x^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$x_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Es decir, $x^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 0, 0, 1, 0\right)$ es la solución al problema estandarizado y, por lo tanto, la solución al problema primal es:

$$x^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$$

Por otra parte, por el Teorema Fundamental de Dualidad, sabemos que si el problema primal tiene solución óptima entonces su dual también la tendrá.

Además por el Teorema de Holgura Complementaria sabemos que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ o } x_j^* = 0 \text{ (o ambas)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \text{ o } y_i^* = 0 \text{ (o ambas)}$$

Para este problema sabemos que $x^* = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$. Por lo tanto, para $i = 1, 2$ $(x_3 = 0)$ debe pasar que

$$\begin{aligned} a_{11}y_1^* + a_{21}y_2^* + a_{31}y_3^* &= c_1, \qquad \text{es decir, } y_1^* + y_2^* = 3 \\ a_{12}y_1^* + a_{22}y_2^* + a_{32}y_3^* &= c_2, \qquad \text{es decir, } y_1^* + 3y_2^* + 2y_3^* = 13 \end{aligned}$$

y, además,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + a_{13}x_3^* &= x_1^* + x_2^* = 7 \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + a_{23}x_3^* &= x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* = 16 \neq 15 \Rightarrow y_2^* = 0 \\ a_{31}x_1^* + a_{32}x_2^* + a_{33}x_3^* &= 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{aligned}$$

Luego, para encontrar la solución óptima del dual basta con resolver el sistema

$$\begin{cases} y_1^* = 3 \\ y_1^* + 2y_3^* = 13 \end{cases} \Rightarrow y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (3, 0, 5)$$

b) Para que al perturbar el término independiente b la solución siga siendo factible y que la base no cambie, se necesita que $B^{-1}b \geq 0$. Luego,

$$0 \leq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 - \dfrac{1}{2}b_3 \geq 0 \\ \dfrac{1}{2}b_3 \geq 0 \\ b_1 - b_2 + b_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \geq \dfrac{1}{2}b_3 \\ b_3 \geq 0 \\ b_2 \leq b_1 + b_3 \end{cases}$$

Es decir, que $b_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\begin{cases} b_1 \geq \dfrac{1}{2}b_3 \\ b_2 \leq b_1 + b_3 \end{cases}$ para que la solución siga siendo factible y la base no cambie.

c) Como x_1 es una variable básica, tenemos que ver el criterio de optimalidad para los costos reducidos de las variables no básicas.

Recordemos que

$$A = [B|R], \qquad \text{donde } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $c_B^T = (c_1, 13, 0)$ y $c_R^T = (13, 0, 0)$.

Por lo tanto, para que la base óptima no cambie necesitamos que

$$\begin{aligned} 0 \geq \overline{c_R}^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R &= (13,0,0) - (c_1, 13, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (13,0,0) - (c_1,13,0) \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (13,0,0) - \left(\frac{-3c_1 + 39}{2}, c_1, \frac{-c_1 + 13}{2} \right) \\ &= \left(13 - \frac{-3c_1 + 39}{2}, -c_1, \frac{-c_1 + 13}{2} \right) = \left(\frac{3c_1 - 13}{2}, -c_1, \frac{c_1 - 13}{2} \right) \end{aligned}$$

Luego, necesitamos que

$$\begin{cases} 3c_1 - 13 \leq 0 \\ -c_1 \leq 0 \\ c_1 - 13 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq c_1 \leq \frac{13}{3}$$

Es decir que si se quiere mantener la misma base óptima, c_1 debe estar en el intervalo $\left[0, \dfrac{13}{3}\right]$.

Ejercicio 3.10. Dado el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rll} & \text{máx } z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \text{(Beneficios)} \\ s.a. & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 18 & \text{(Capital)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15 & \text{(Horas de Trabajo)} \\ & x_i \geq 0 & \end{array}$$

a) Plantear y resolver el problema dual.

b) Resolver el problema primal.

c) Si el problema se modifica reduciendo el horario de trabajo de 15 a 12 horas, ¿qué efecto se produce en el beneficio?

d) Decidir qué resulta más beneficioso para la empresa: disponer de más capital o de más horas de trabajo.

Solución 3.10.

a) En este caso, el problema dual nos dará una cota superior sobre el valor del óptimo. La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar el valor óptimo del problema primal.

Luego, sean $y_1, y_2 \geq 0$ tales que

$$\begin{array}{ccccccc} & & y_1 & (2x_1 + x_2 + x_3) & & \leq & 18y_1 \\ & + & & & & & \\ & & y_2 & (3x_1 + 2x_2 + 3x_3) & & \leq & 15y_2 \\ \hline (2y_1 + 3y_2)x_1 & + & (y_1 + 2y_2)x_2 & + & (y_1 + 3y_2)x_3 & \leq & 18y_1 + 15y_2 \end{array}$$

Como buscamos una superior al problema primal, necesitamos que

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq (2y_1 + 3y_2)x_1 + (y_1 + 2y_2)x_2 + (y_1 + 3y_2)x_3$$

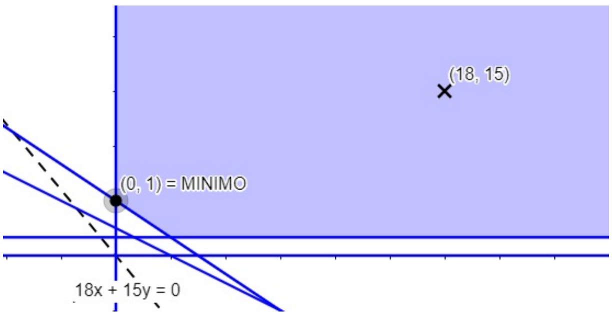
y, por lo tanto, las restricciones serán que

$$\begin{aligned} (2y_1 + 3y_2) &\geq 3 \\ (y_1 + 2y_2) &\geq 1 \\ (y_1 + 3y_2) &\geq 2 \end{aligned}$$

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para la función objetivo, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & t = 18y_1 + 15y_2 \\ s.a. \quad & (2y_1 + 3y_2) \geq 3 \\ & (y_1 + 2y_2) \geq 1 \\ & (y_1 + 3y_2) \geq 2 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Gráficamente, vemos que la solución viene dada por $y^* = (0, 1)$ con $t = 15$,



b) Busquemos la base del óptimo a través del problema primal estandarizado.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ s.a. \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 + w_1 = 18 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + w_2 = 15 \\ & x_i, w_i \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, sean A, B y R definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (3, 0) \quad \text{y} \quad c_R^T = (1, 2, 0)$$

para verificar que estamos sobre una base óptima verificamos que $B^{-1}b \geq 0$ y $0 \geq c_R^T - c_B^T B^{-1} R$.

- $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \geq 0.$
- $c_R^T - c_B^T B^{-1} R = (1, 2, 0) - (3, 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, luego

$$(1, 2, 0) - (3, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = (1, 2, 0) - (2, 3, 1) \leq 0$$

Luego, el óptimo del problema estandarizado es $x_* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Es decir, que el punto de optimalidad será $x^* = (5, 0, 0)$ con $z = 15$ (como era de esperarse puesto que $t = 15$).

c) Primero, veamos que esa reducción no modifica la base óptima del problema. Es decir, necesitamos que

$$B^{-1}\begin{pmatrix} 18 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{3} \\ \frac{-2b_2+54}{3} \end{pmatrix}$$

Luego, necesitamos que

$$\begin{cases} \frac{b_2}{3} \geq 0 \\ \frac{-2b_2+54}{3} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq b_2 \leq 27$$

Luego, reducir de 15 a 12 horas no cambia la base óptima del problema.

Por otra parte, puesto que cada variable del dual se asocia con una restricción (y_1 con la primera e y_2 con la segunda), para saber si mejorará o no la función objetivo, en este caso, basta con ver ese comportamiento sobre y_2.

Luego, como $y_2^* = 1$, al disminuir en dos unidades se tendrá una pérdida de $2 * 1$ sobre la función objetivo.

d) Puesto que cada variable del dual se asocia con una restricción (y_1 con la primera e y_2 con la segunda) y la solución del problema dual es $y^* = (y_1, y_2) = (0, 1)$ se puede intuir que la mejora sólo se producirá al aumentar las horas de trabajo ya que para cualquier valor que se multiplique y_1 éste se mantendrá nulo.

Ejercicio 3.11. El siguiente diccionario corresponde a una iteración de `Simplex` para resolver un problema lineal de maximización:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_6 & = & 4 & - & 7x_1 & + & 2x_3 & - & x_4 \\ x_2 & = & 2+\text{a} & - & \text{b}x_1 & & & - & 2x_4 \\ x_5 & = & 5 & - & x_1 & + & \text{c}x_3 & - & x_4 \\ \hline \text{z} & = & 13 & + & \text{d}x_1 & + & \text{e}x_3 & - & 7x_4 \end{array}$$

Hallar condiciones sobre $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ para que se cumpla que:

a) el problema tiene al menos una solución factible, pero el problema dual asociado es infactible.

b) la próxima iteración es degenerada.

c) x_6 salga de la base en la próxima iteración.

d) el valor óptimo del problema dual asociado sea 13.

Solución 3.11.
Notemos, primero, que como el término independiente debe ser siempre positivo es necesario que $a \geq -2$.

a) En este caso, necesitamos que el problema sea no acotado.

- Supongamos que x_3 entra a la base. Es decir, $e > 0$ y $e \geq d$. En este caso,

$$x_6 = 4 + 2x_3 \longrightarrow \text{ a medida que } x_3 \text{ crezca } x_6 \text{ también lo hará}$$
$$x_5 = 5 + cx_3 \longrightarrow \text{ necesitamos que } c > 0 \text{ para que } x_5 \text{ crezca a medida que lo haga } x_3$$

  Por lo tanto, para este caso necesitamos que $e, c > 0$ y $e \geq d$.

- Si x_1 entra a la base. Es decir, $d > 0$ y $e \leq d$. En este caso,

$$x_6 = 4 - 7x_1$$
$$x_2 = 2 + a - bx_1$$
$$x_5 = 5 - x_1$$

  Basta notar que seguro x_1 estará acotado por $\frac{4}{7}$. Por lo tanto, no hay manera de garantizar una no acotación si x_1 ingresa a la base.

Luego, para que el problema no esté acotado basta con que $e, c > 0$ y $e \geq d$.

b) Para que la iteración resulta degenerada se busca que el valor de z no cambie de una iteración a otra.

En principio, necesitamos que $a = -2$ y notamos que

$$x_2 = 2 + (-2) - bx_1 + 0x_3 - 2x_4 = -bx_1 - 2x_4$$

por lo tanto, x_3 no está afectando a x_2. Entonces, necesitamos que x_1 ingrese a la base de manera de poder acotarlo superiormente por 0; es decir, $d \geq e$ y $b > 0$.

Por lo tanto, para este caso necesitamos que $a = -2$, $d > 0$, $d \geq e$ y $b > 0$.

c)
- Si x_3 ingresara a la base; es decir, $e > 0$ y $d \leq e$ entonces

$$x_6 \leq 4 + 2x_3 \longrightarrow \text{ a medida que } x_3 \text{ crezca } x_6 \text{ también lo hará}$$

es decir, que x_6 no saldría de la base.

- Si x_1 ingresara a la base; es decir, $d > 0$ y $d \geq e$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_6 = 4 - 7x_1 \\ 0 &\leq x_2 = 2 + a - bx_1 \\ 0 &\leq x_5 = 5 - x_1 \end{aligned}$$

Si $b \leq 0$ entonces a medida que x_1 crezca x_2 también lo hará y x_6 ingresará a la base puesto que $\frac{4}{7} < 5$.

Si $b > 0$, entonces para que x_6 ingrese a la base en la próxima iteración es necesario que $\frac{4}{7} < \frac{2+a}{b}$.

Por lo tanto, para este caso necesitamos que $d > 0$,$d \geq e$ y $\left[(b \leq 0) \text{ o } \left(b > 0 \text{ y } \frac{4}{7} < \frac{2+a}{b}\right)\right]$.

d) Por el Teorema Fundamental de Dualidad, basta con buscar a, b, c, d y e de manera tal que el problema primal tenga un valor óptimo de $z = 13$.

- En primer lugar, si $d \leq 0$ y $e \leq 0$ estaríamos en condiciones de afirmar que esta iteración es la última del diccionario y, por lo tanto, el valor óptimo del problema dual será 13.
- Por otra parte, supongamos que estamos en el caso de una iteración degenerada. Por el inciso (b) se tiene que $a = -2$, $d > 0$, $d \geq e$ y $b > 0$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{b}(-x_2 - 2x_4) \\ x_5 &= 5 - \frac{1}{b}(-x_2 - 2x_4) + cx_3 - x_4 = 5 + \frac{1}{b}x_2 + cx_3 + \left(\frac{2}{b} - 1\right)x_4 \\ x_6 &= 4 - \frac{7}{b}(-x_2 - 2x_4) + 2x_3 - x_4 = 4 + \frac{7}{b}x_2 + 2x_3 + \left(\frac{14}{b} - 1\right)x_4 \\ z &= 13 + \frac{d}{b}(-x_2 - 2x_4) + ex_3 - 7x_4 = 13 - \frac{d}{b}x_2 + ex_3 - \left(\frac{d}{b} + 7\right)x_4 \end{aligned}$$

De manera tal que si $e > 0$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_5 = 5 + cx_3 \\ 0 &\leq x_6 = 4 + 2x_3 \end{aligned}$$

  - Si $c > 0$ entonces x_5 y x_6 aumentarán a medida que x_3 lo haga, de manera tal que se tendría un problema no acotado.
  - Si $c = 0$, entonces x_6 aumentará a medida que x_3 lo haga, de manera tal que se tendría un problema no acotado.
  - Si $c < 0$, sea $0 < \tilde{c} = -c$ y, entonces $x_3 \leq \frac{5}{\tilde{c}}$ con lo que se conseguiría una mejora en la función objetivo puesto que $z = 13 + \frac{5}{\tilde{c}}$ y, por lo tanto, el valor óptimo del dual asociado no tendrá el valor buscado.

Por lo tanto, para este caso necesitamos que $d \leq 0$ y $e \leq 0$.

Ejercicio 3.12. El siguiente modelo de programación lineal busca maximizar la ganancia obtenida al elaborar distintos tipos de productos, sujeto a la cantidad de materia prima y de horas hombre disponibles:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 && \text{(Ganancia)} \\ s.a. \quad & \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 && \text{(Materia Prima)} \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 && \text{(Horas Hombre)} \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

a) Si se modifica en cantidades pequeñas la cantidad de materia prima disponible, ¿hasta cuánto conviene pagar por cada unidad extra de ella para aumentar la ganancia?

b) Resolver el problema para decidir cuánto elaborar de cada producto.

c) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que la solución óptima obtenida en (b) siga siéndolo para el problema con función objetivo: $6x_1 + (14 + \alpha)x_2 + 13x_3$.

d) ¿Cuánto pueden aumentarse las horas hombre de manera tal que la base óptima siga siéndolo?

Solución 3.12.
Sea A la matriz del problema estandarizado,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = (6, 13) \quad \text{y} \quad c_R^T = (14, 0, 0)$$

a) La idea será resolver el dual y ver el valor de la primer coordenada.

La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar el valor óptimo del problema primal.

Luego, sean $y_1, y_2 \geq 0$ tales que

$$\begin{array}{rcccl} & y_1 & \left(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3\right) & \leq & 24y_1 \\ + & & & & \\ & y_2 & (x_1 + 2x_2 + 4x_3) & \leq & 60y_2 \\ \hline \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2\right)x_1 & + \ (2y_1 + 2y_2)x_2 & + \ (y_1 + 4y_2)x_3 & \leq & 24y_1 + 60y_2 \end{array}$$

Como buscamos una superior al problema primal, necesitamos que

$$6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \leq \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2\right)x_1 + (2y_1 + 2y_2)x_2 + (y_1 + 4y_2)x_3$$

y, por lo tanto, las restricciones serán que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2\right) &\geq 6 \\ (2y_1 + 2y_2) &\geq 14 \\ (y_1 + 4y_2) &\geq 13 \end{aligned}$$

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para la función objetivo, entonces, el problema dual se plantea como:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & t = 24y_1 + 60y_2 \\ s.a. \quad & \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2\right) \geq 6 \\ & (2y_1 + 2y_2) \geq 14 \\ & (y_1 + 4y_2) \geq 13 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

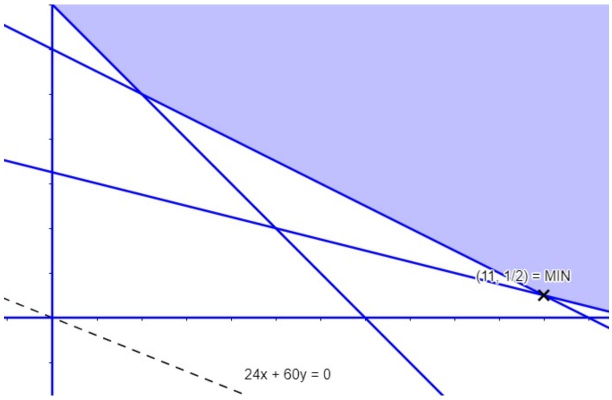
Gráficamente, vemos que la solución viene dada por $y^* = \left(11, \frac{1}{2}\right)$ con $t = 294$,

b) Veamos que $B^{-1}b \geq 0$ y $0 \geq c_R^T - c_B^T B^{-1} R$.

- $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- $c_R^T - c_B^T B^{-1} R = (14, 0, 0) - (6, 13) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (14, 0, 0) - (6, 13) \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$c_R^T - c_B^T B^{-1} R = (14, 0, 0) - \left(23, 11, \frac{1}{2}\right) = \left(-9, -11, -\frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Luego, con el objetivo de maximizar la ganancia se debería de elaborar $x_1 = 36$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 6$.



c) Como queremos mantener la solución obtenida en el inciso anterior, buscamos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 \geq c_R^T - c_B^T B^{-1} R$. Luego,

$$\begin{aligned} c_R^T - c_B^T B^{-1} R &= (14+\alpha, 0, 0) - (6, 13) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (14+\alpha, 0, 0) - (6, 13) \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (14+\alpha, 0, 0) - \left(23, 11, \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(-9+\alpha, -11, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\alpha \leq 9$ la solución obtenida en el inciso anterior sigue siéndolo para el problema con función objetivo modificada.

d) Sea $\beta \in \mathbb{R}$. Queremos que para cuáles β se mantiene que $B^{-1} b \geq 0$. Luego,

$$B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 60+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta + 36 \\ \dfrac{\beta+12}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\beta + 36 \geq 0 \\ \dfrac{\beta + 12}{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \leq 36 \\ \beta \geq -12 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\beta \in [-12, 36]$. Es decir, que se podrá aumentar hasta 36 horas hombre.

Ejercicio 3.13. Se sabe que $(39, 0, 48, 30)$ es la solución óptima del problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 19x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 17x_4 \\ s.a. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 225 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 117 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 420 \\ & x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \forall i \in \{1, \ldots, 4\} \end{aligned}$$

Este problema busca maximizar la ganancia obtenida al fabricar distintos tipos de productos sujeto a la disponibilidad de horas de trabajo y de cantidades de materias primas.

a) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que la solución óptima siga siéndolo para el problema modificado con función objetivo $19x_1 + (13+\alpha)x_2 + 12x_3 + (17-\alpha)x_4$.

b) Supongamos que se perturba $b_3 = 420$ sumándole $\beta \in \mathbb{R}$. Determinar los valores de β para los cuales el problema modificado admite la misma base óptima, y calcular las ganancias óptimas respectivas. ¿Para cuáles de esos valores el problema tiene soluciones degeneradas?

Solución 3.13.
Como se sabe que $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (39, 0, 48, 30)$ es la solución óptima del problema de programación lineal, entonces sabemos que la base está definida por x_1, x_3 y x_4 de manera tal que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Notemos primero que para el problema modificado tenemos que

$$c_B^T = (19, 12, 17-\alpha) \quad \text{y} \quad c_R^T = (13+\alpha, 0, 0, 0)$$

Por lo tanto, como el objetivo es maximizar, necesitamos que $0 \geq c_R^T - c_B^T B^{-1} R$.

$$\begin{aligned}
c_R^T - c_B^T B^{-1} R &= (13+\alpha, 0,0,0) - (19, 12, 17-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (13+\alpha, 0,0,0) - (19, 12, 17-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (13+\alpha, 0,0,0) - (\alpha+14, \alpha+2, 5\alpha+1, -2\alpha+3)
\end{aligned}$$

por lo tanto, necesitamos que

$$0 \geq (-1, -\alpha-2, -5\alpha-1, 2\alpha-3) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - 2 & \leq 0 \\ -5\alpha - 1 & \leq 0 \\ 2\alpha - 3 & \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq -2 \\ \alpha \geq -\dfrac{1}{5} \\ \alpha \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, para $\alpha \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right]$ se tiene que la solución óptima sigue siéndolo para el problema modificado.

b) Como buscamos mantener la base óptima, necesitamos que $B^{-1} \begin{pmatrix} 225 \\ 117 \\ 420+\beta \end{pmatrix} \geq 0$, luego

$$0 \leq \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 225 \\ 117 \\ 420+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta+39 \\ -\beta+48 \\ 2\beta+30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\beta+39 & \geq 0 \\ -\beta+48 & \geq 0 \\ 2\beta+30 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -15 \leq \beta \leq 39$$

Ejercicio 3.14. Dado el problema de programación lineal

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\
s.a. \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\
& 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 \leq 1 \\
& x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \forall i \in \{1, \ldots, 5\}
\end{aligned}$$

a) Formular su problema dual.

b) Decidir si la solución factible $\left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ es óptima.

Solución 3.14.

a) En este caso, el problema dual nos dará una cota superior sobre el valor del óptimo. La idea es manipular las restricciones para lograr una desigualdad que permita acotar el valor óptimo del problema primal.

$$\begin{aligned}
y_1(x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5) &\leq 4y_1 \\
y_2(4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5) &\leq 3y_2 \\
y_3(2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5) &\leq 5y_3 \\
y_4(3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5) &\leq 1y_4
\end{aligned}$$

y sumando sobre todas las desigualdades, se tiene que

$$y_1(x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5) + y_2(4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5) + y_3(2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5) + y_4(3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5) \leq 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 + 1y_4$$

Como buscamos una superior al problema primal, necesitamos que

$$\begin{aligned}
7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq{} & (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 3y_4)x_1 + (3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)x_2 + \\
& + (5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4)x_3 + (-2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4)x_4 + (2y_1 + y_2 + 5y_3 - y_4)x_5
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, las restricciones serán que

$$
\begin{aligned}
(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 3y_4) &\geq 7\\
(3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) &\geq 6\\
(5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4) &\geq 5\\
(-2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4) &\geq -2\\
(2y_1 + y_2 + 5y_3 - y_4) &\geq 3
\end{aligned}
$$

Naturalmente, nos interesa la mejor cota superior para la función objetivo, entonces, el problema dual se plantea como:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4\\
s.a. \quad & (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 3y_4) \geq 7\\
& (3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \geq 6\\
& (5y_1 - 2y_2 + 4y_3 + 2y_4) \geq 5\\
& (-2y_1 + y_2 - 2y_3 - y_4) \geq -2\\
& (2y_1 + y_2 + 5y_3 - y_4) \geq 3\\
& y_i \geq 0
\end{aligned}
$$

b) Supongamos que $\left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ es solución factible óptima y busquemos la base óptima asociada.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0\\ 4 & 4 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{7}{3}\\ 2 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{16}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}
$$

Luego, deberíamos tener que $B^{-1}b \geq 0$ y $0 \geq c_R^T - c_B^T b^{-1} R$,

$$
B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{7}{3}\\ 2 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{16}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 5\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}b \geq 0
$$

$$
\begin{aligned}
c_R^T - c_B^T b^{-1} R &= (7,3,0,0,0) - (6,5,-2,0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{7}{3}\\ 2 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{16}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\\
&= (7,3,0,0,0) - (6,5,-2,0) \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{22}{3} & 4 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3}\\ -\frac{46}{3} & 9 & 2 & -\frac{1}{3} & -\frac{16}{3}\\ -\frac{26}{3} & 7 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}\\
&= (7,3,0,0,0) - (8,2,1,1,1) = (-1,1,-1,-1,-1)
\end{aligned}
$$

Lo que resulta ser una contradicción puesto que tendríamos que tener $0 \geq c_R^T - c_B^T b^{-1} R$.

Por lo tanto, $\left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ no es solución factible óptima.

Ejercicio 3.15. Utilizar el algoritmo de Branch & Bound para resolver el siguiente problema de programación lineal entera, detallando cada división en subproblemas durante el algoritmo mediante el esquema de árbol visto en clase.

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & -4x_1 + 5x_2\\
s.a. \quad & 5x_1 - 2x_2 \geq -2\\
& 2x_1 - 4x_2 \leq 5\\
& x_1 \leq 5\\
& x_2 \leq 4\\
& x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

Solución 3.15.
Definimos su relajación lineal al problema que se obtiene al relajar la condición de integralidad de las variables en cuestión:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -4x_1 + 5x_2 \\ s.a. \quad & 5x_1 - 2x_2 \geq -2 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Gráficamente, vemos que el problema es de la pinta

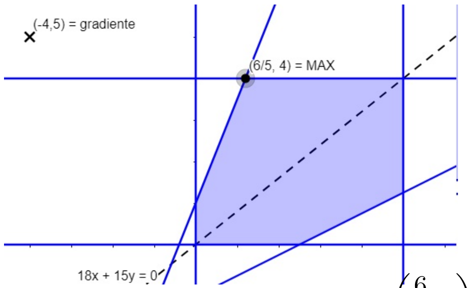
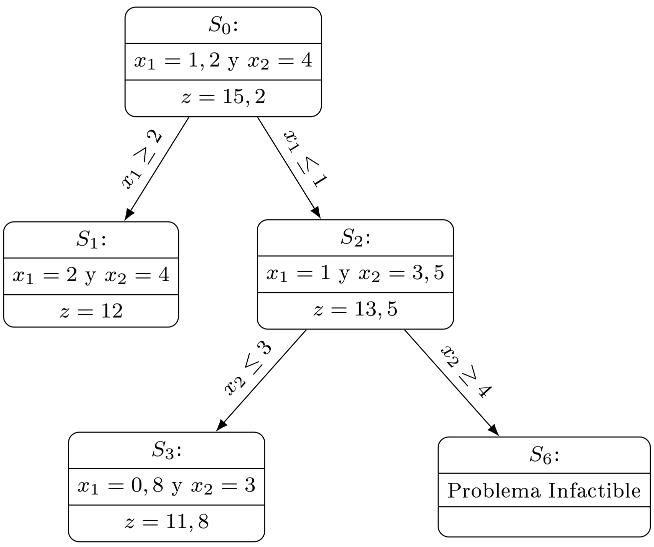
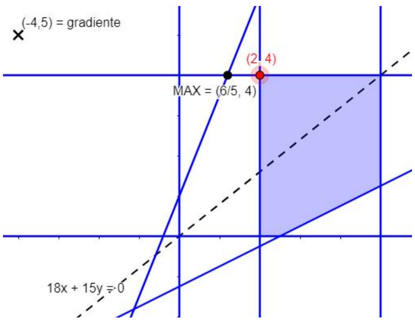


Figura 3.7: Donde la solución resulta ser $x^* = \left(\frac{6}{5}, 4\right)$ con $z = \frac{76}{5}$.

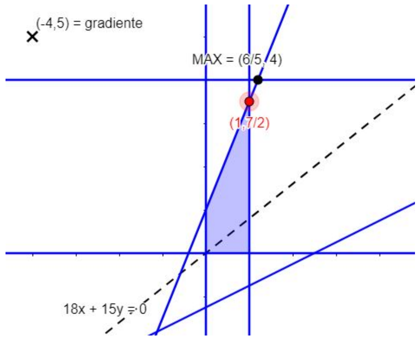


Como ya no hay más problemas por resolver, el algoritmo afirma que el óptimo se alcanza en $x^* = (2, 4)$ con $z = 12$.

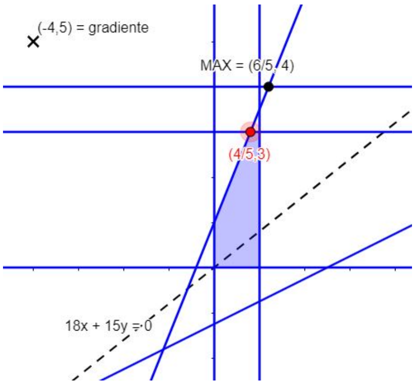
Gráficamente, las respectivas regiones para S_i (para $i = 1 \ldots, 6$) resultaron



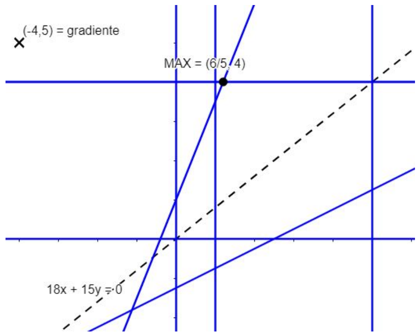
(a) Región S_1 con óptimo en $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$



(b) Región S_2 con óptimo en $x_1 = 1$ y $x_2 = 3,5$



(c) Región S_3 con óptimo en $x_1 = 0,8$ y $x_2 = 3$



(d) Región S_4 con óptimo en $x_1 = 6$ y $x_2 = 0,33$

Figura 3.8: Gráficos de cada S_i para $i = 1, \dots, 4$

Ejercicio 3.16. Resolviendo cada problema por forma gráfica, explique qué pasos (y cuántos) realiza el algoritmo de Branch and Bound para resolver el siguiente problema de programación lineal entera

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \;\; z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 & \\
s.a. \quad x_1 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1 + x_2 &\leq \frac{11}{2} \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Solución 3.16.
Definimos su relajación lineal al problema que se obtiene al relajar la condición de integralidad de las variables en cuestión:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \;\; z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 & \\
s.a. \quad x_1 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1 + x_2 &\leq \frac{11}{2} \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Gráficamente, vemos que el problema es de la pinta

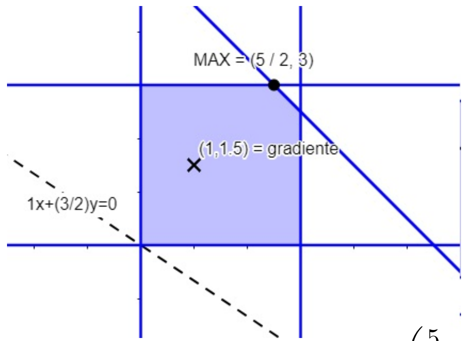
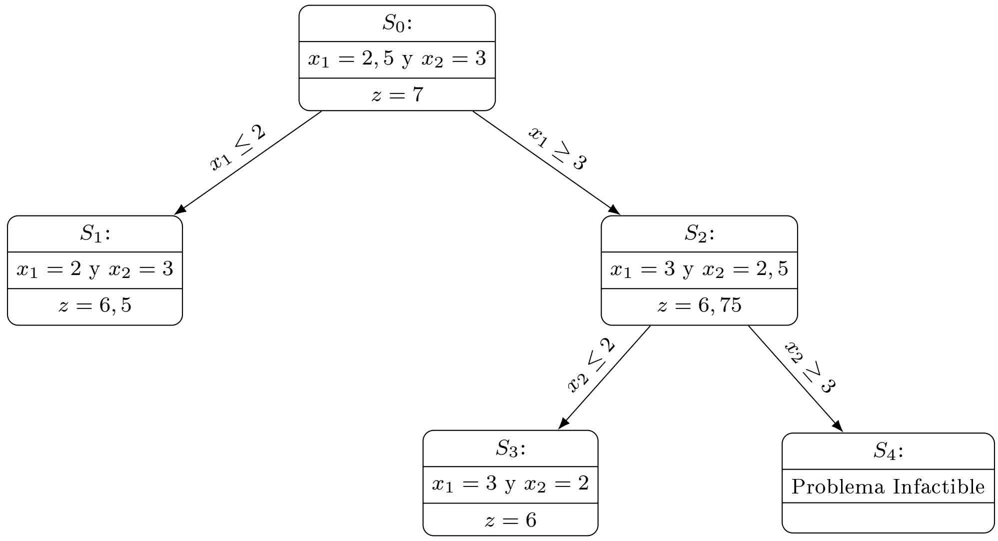


Figura 3.9: Donde la solución resulta ser $x^* = \left(\dfrac{5}{2}, 3\right)$ con $z = 7$.



Como ya no hay más problemas por resolver, el algoritmo afirma que el óptimo se alcanza en $x^* = (3, 2)$ con $z = 6$.

Gráficamente, las respectivas regiones para S_i (para $i = 1\ldots, 4$) resultaron

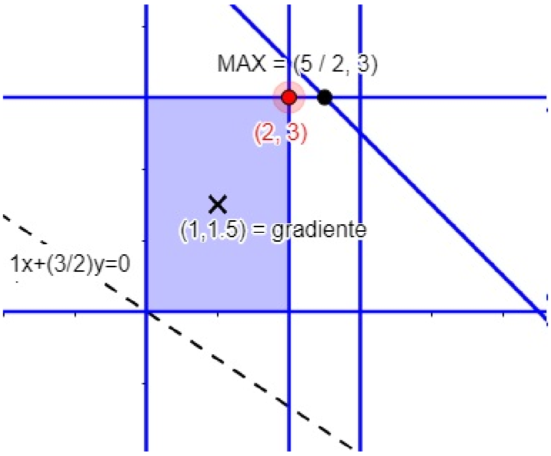
Ejercicio 3.17. Usar el algoritmo de Branch and Bound para resolver el siguiente problema de programación Lineal Entera:

$$\begin{aligned} \text{máx } \; z &= 3,2x_1 + 1,6x_2 \\ s.a. \quad x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_i &\in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

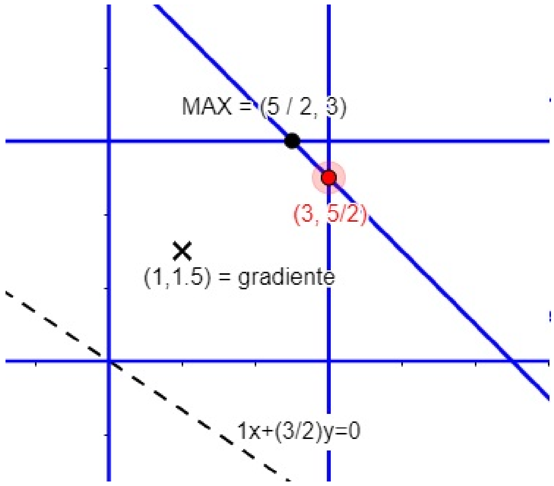
Solución 3.17.
Definimos su relajación lineal al problema que se obtiene al relajar la condición de integralidad de las variables en cuestión:

$$\begin{aligned} \text{máx } \; z &= 3,2x_1 + 1,6x_2 \\ s.a. \quad x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\geq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_i &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

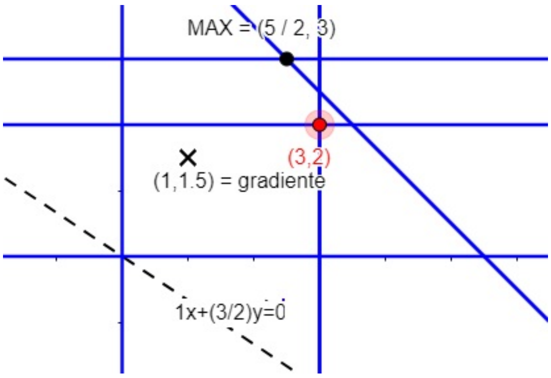
Gráficamente, vemos que el problema es de la pinta



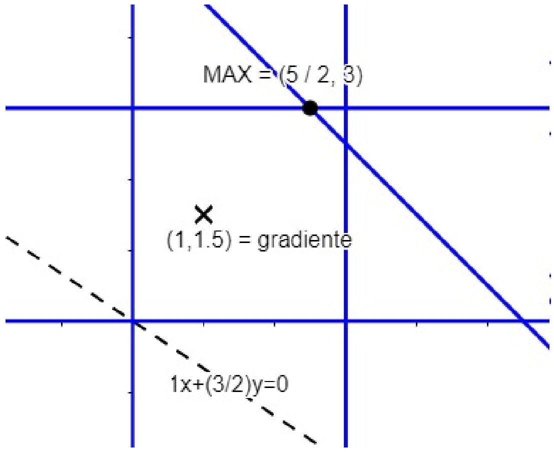
(a) Región S_1 con óptimo en $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$



(b) Región S_2 con óptimo en $x_1 = 3$ y $x_2 = 2,5$



(c) Región S_3 con óptimo en $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$



(d) Región S_4 con óptimo en $x_1 = 6$ y $x_2 = 0,33$

Figura 3.10: Gráficos de cada S_i para $i = 1, \ldots, 4$

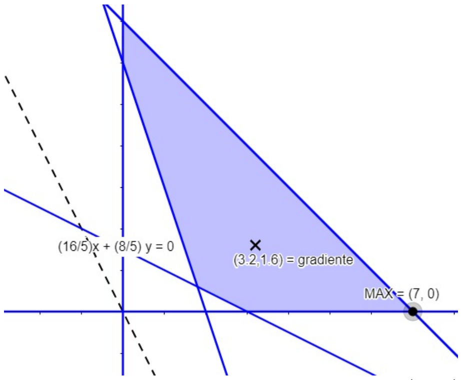


Figura 3.11: Donde la solución resulta ser $x^* = (7, 0)$ con $z = \dfrac{112}{5}$.

Puesto que la relajación lineal tiene un óptimo con todas sus coordenadas enteras, entonces el problema entero en cuestión está resuelto y el óptimo coincide.

Ejercicio 3.18. Calcular el valor óptimo y brindar una solución óptima del siguiente problema de Programación Lineal Entera, utilizando el algoritmo de Branch & Bound mediante el esquema de árbol:

$$\begin{aligned} & \text{máx } \; z = 2x_1 + 5x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 28 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_i \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Examinar el procedimiento gráficamente, resaltando las posibles soluciones óptimas de los subproblemas.

Solución 3.18.
Definimos su relajación lineal al problema que se obtiene al relajar la condición de integralidad de las variables en cuestión:

$$\begin{aligned} & \text{máx } z = 2x_1 + 5x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 27 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 28 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_i \in \mathbb{R}_0 \end{aligned}$$

Gráficamente, vemos que el problema es de la pinta

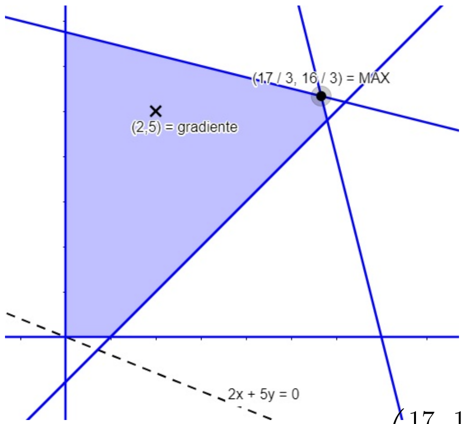
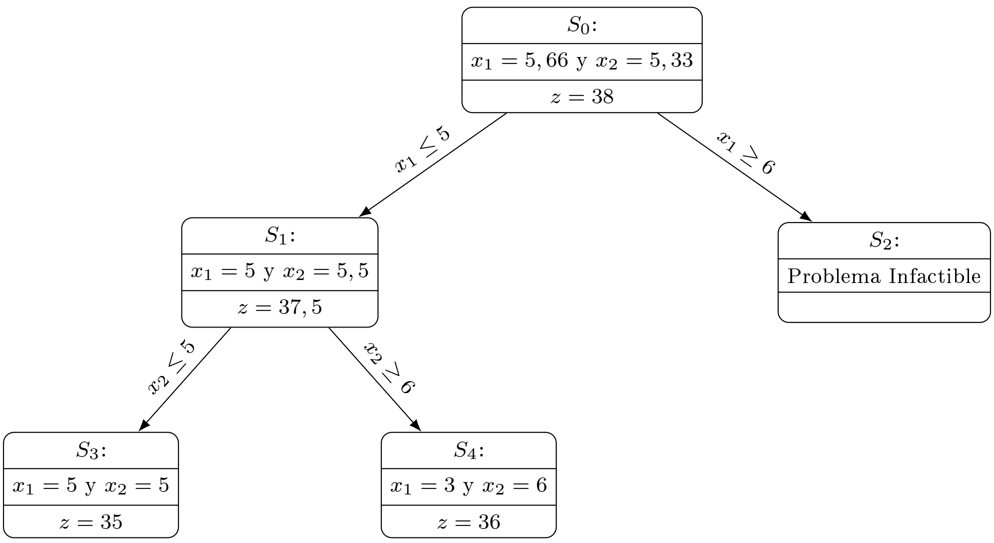
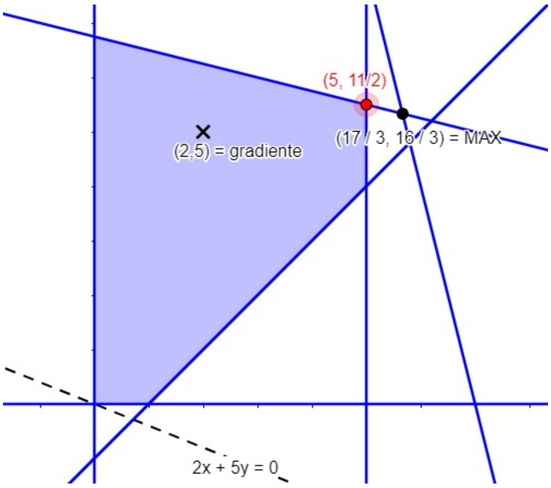


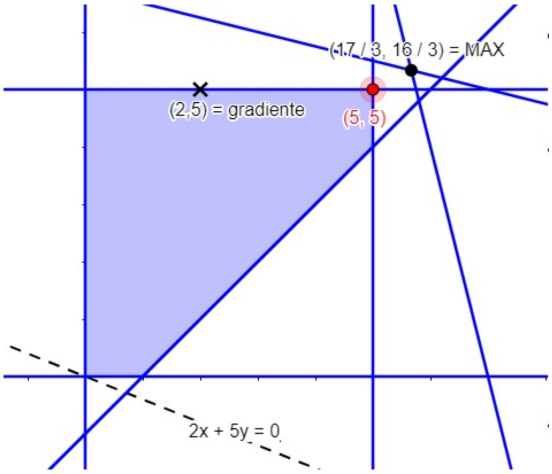
Figura 3.12: Donde la solución resulta ser $x^* = \left(\frac{17}{3}, \frac{16}{3}\right)$ con $z = 38$.



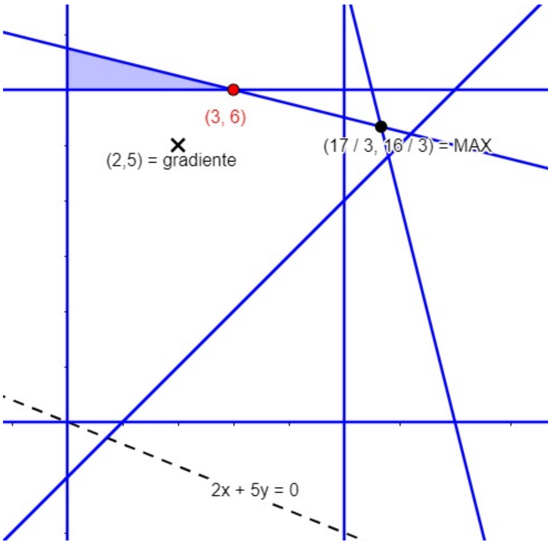
Como ya no hay más problemas por resolver, el algoritmo afirma que el óptimo se alcanza en $x^* = (3, 6)$ con $z = 36$.
Gráficamente, las respectivas regiones para S_i (para $i = 1\ldots, 4$) resultaron



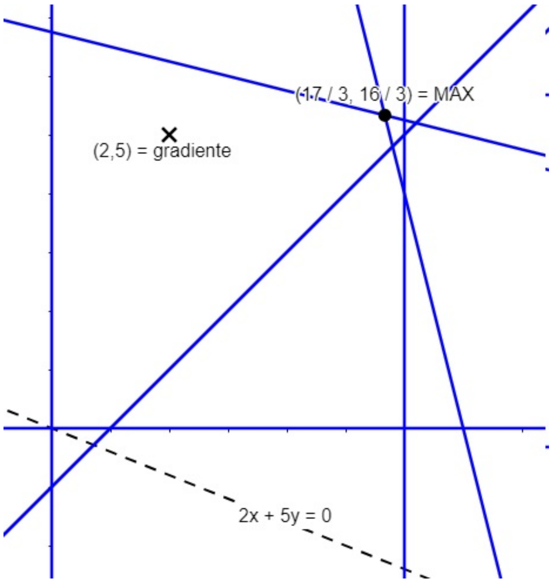
(a) Región S_1 con óptimo en $x_1 = 5$ y $x_2 = 5,5$



(b) Región S_2 con óptimo en $x_1 = 5$ y $x_2 = 5$



(c) Región S_3 con óptimo en $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$



(d) Región S_4, problema infactible

Figura 3.13: Gráficos de cada S_i para $i = 1, \ldots, 6$

4 Grafos

Ejercicio 4.1. Sea $\mathcal{G}$ un grafo que no tiene vértices aislados y tiene m aristas. Determine el mayor número de vértices que puede tener $\mathcal{G}$.

Si $m = 50$, ¿cuál es el máximo número de vértices teniendo todos grado al menos 3?

Solución 4.1.

- Por el Teorema visto en la teórica, sabemos que $\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d(v) = 2m$; por lo tanto, como $\mathcal{G}$ un grafo que no tiene vértices aislados y tiene m aristas podemos determinar que, como máximo, tendrá $2m$ vértices.
- Nuevamente, por el Teorema visto en la teórica, sabemos que $\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d(v) = 2m \underbrace{=}_{m=50} 100$ entonces

$$\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d(v) \geq 3\sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G})), \qquad \text{(puesto que todos los vértices tienen grado al menos 3)}$$

por lo tanto, buscamos $\sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G}))$ de manera tal que

$$100 = \sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d(v) \geq 3\sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G})) \Rightarrow \sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G})) \leq \frac{100}{3} \Rightarrow \sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G})) = 33$$

Ejercicio 4.2. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un digrafo (grafo dirigido). Se definen para $v \in \mathbb{V}, d_s(v)$ y $d_e(v)$ como el número de aristas que salen (respectivamente llegan) de v. Pruebe que

$$\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_s(v) = \sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_e(v)$$

Solución 4.2.
Lo probaremos usando inducción sobre la cantidad de aristas (arcos).

- <u>Caso inicial:</u>

($m = 0$): Entonces, no hay aristas (arcos) que salgan ni lleguen a v. Es decir, $\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_s(v) = 0 = \sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_e(v)$.

($m = 1$): Entonces, sólo puede haber una arista (arco) que sale y llega a v. Es decir, $\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_s(v) = 1 = \sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_e(v)$.

- <u>Hipótesis inductiva:</u> Para demostrar el paso inductivo, consideremos un grafo $\mathcal{G}$ con m aristas (arcos), $m \geq 1$. Nuestra hipótesis inductiva es: en todo $\mathcal{G}' = (\mathbb{V}', \mathbb{E}')$ digrafo con $m' < m$ aristas (arcos), se cumple que

$$\sum_{v\in\mathbb{V}'(\mathcal{G}')} d_s(v) = \sum_{v\in\mathbb{V}'(\mathcal{G}')} d_e(v)$$

Elijamos una arista (arco) $x = (u, w)$ cualquiera de nuestro grafo $\mathcal{G}$, y llamemos $\mathcal{G}'$ al grafo ue resulta si se la quitamos, esto es $\mathcal{G}' = (\mathbb{V}, \mathbb{E}')$ con $\mathbb{E}' = \mathbb{E}\diagdown\{x\}$.

Como la cantidad de aristas (arcos) de $\mathcal{G}'$ es $m - 1$, $\mathcal{G}'$ cumple la hipótesis de la HI. Entonces podemos aplicar la HI sobre $\mathcal{G}'$:

$$\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G}')} d_s(v) = \sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G}')} d_e(v)$$

Por otra parte, para $\mathcal{G}'' = (\{u, w\}, x)$ usando el razonamiento anterior se tiene que $\sum_{v\in\{u,w\}} d_s(v) = \sum_{v\in\{u,w\}} d_e(v)$

Por lo tanto, para todo $v \in \mathbb{V}(\mathcal{G})$ se tiene que

$$\sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_s(v) = \sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G}')} d_e(v) + \sum_{v\in\{u,w\}} d_e(v) = \sum_{v\in\mathbb{V}(\mathcal{G})} d_e(v).$$

Ejercicio 4.3. Un grafo $\mathcal{G}$ se dice autocomplementario si es isomorfo a su complemento $\mathcal{G}$. Encuentre todos los grafos autocomplementarios con a lo sumo 5 vértices. Muestre que si un grafo autocomplementario tiene n vértices, entonces es $n \equiv 0$ o $1 \pmod 4$.

Solución 4.3.
Sabemos que $\mathcal{G} \cup \overline{\mathcal{G}}$ resulta ser un grafo completo y, por lo tanto, se tiene que $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) + \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Además, si $\mathcal{G}$ es autocomplementario se tiene $\sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{V}(\overline{\mathcal{G}}))$ y $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}}))$.

Por lo tanto, se puede deducir que un grafo $\mathcal{G}$ de n vértices es autocomplementario si y sólo si K_n se descompone en dos copias de $\mathcal{G}$.

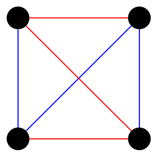
$\underline{n = 0:}$ $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) + \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 0 \Rightarrow \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 0$.

$\underline{n = 1:}$ $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) + \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 0 \Rightarrow \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 0$. El grafo resultante sería el trivial, es decir

$\underline{n = 2:}$ $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) + \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 1 \Rightarrow \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = \dfrac{1}{2}$, pero sabemos que $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, no existe $\mathcal{G}$ autocomplementario.

$\underline{n = 3:}$ $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) + \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 3 \Rightarrow \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = \dfrac{3}{2}$, pero sabemos que $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, no existe $\mathcal{G}$ autocomplementario.

$\underline{n = 4:}$ $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) + \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 6 \Rightarrow \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 3$.
En este caso, K_n se puede descomponer en dos copias de $\mathcal{G}$ como



Por lo tanto,

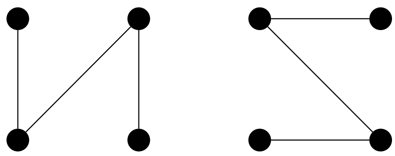
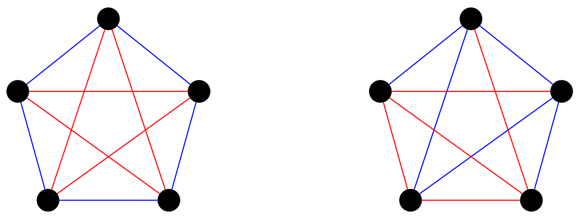


Figura 4.1: grafo $\mathcal{G}$ y $\overline{\mathcal{G}}$

$\underline{n = 5:}$ $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) + \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 10 \Rightarrow \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\overline{\mathcal{G}})) = 5$.
En este caso, K_n se puede descomponer en cuatro copias de $\mathcal{G}$, es decir



Por lo tanto,

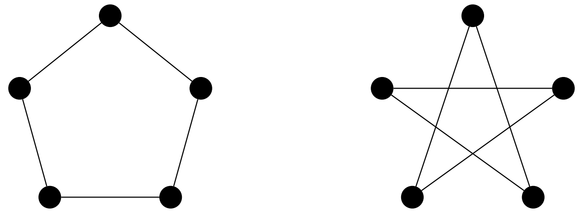


Figura 4.2: grafo $\mathcal{G}_1$ y $\overline{\mathcal{G}_1}$

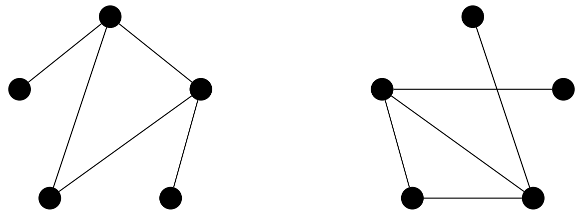


Figura 4.3: grafo $\mathcal{G}_2$ y $\overline{\mathcal{G}_2}$

Por último, supongamos que $\mathcal{G}$ es autocomplementario de n vértices; por lo tanto, $\mathcal{G}$ y $\overline{\mathcal{G}}$ deben tener la misma cantidad de aristas. Sea, entonces, $m = m_{\mathcal{G}} = m_{\overline{\mathcal{G}}}$ la cantidad de aristas, entonces

$$m + m = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 2m = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow m = \frac{n(n-1)}{4} \in \mathbb{N}$$

es decir, $m \in \mathbb{N}$ si $n = 4k$ o $n = 4k + 1$.

Ejercicio 4.4.

a) Dibuje todos los grafos conexos de 4 vértices (salvo isomorfismos).

b) Dibuje todos los grafos conexos de 5 vértices (salvo isomorfismo). **Nota**: Son 21.

Solución 4.4.

a)

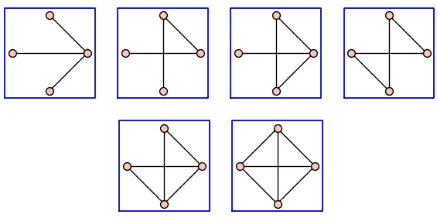


Figura 4.4: grafos conexos de 4 vértices

b)

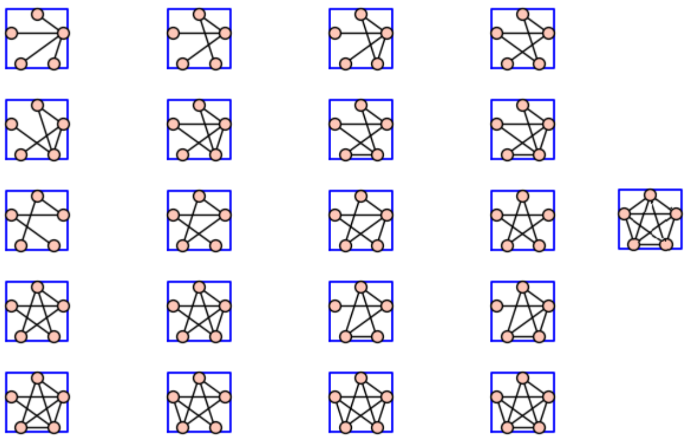


Figura 4.5: grafos conexos de 5 vértices

Ejercicio 4.5. Sean G un grafo y A su matriz de adyacencia. Pruebe que $A^n_{i,j}$ coincide con la cantidad de caminos (no necesariamente simples) de largo n que unen el vértice i con el vértice j.

Solución 4.5.
Realizaremos la prueba por inducción en n.

- Caso base ($n = 1$): Para $n = 1$, se tiene que el elemento a_{ij} indica el número de caminos diferentes de longitud 1 entre v_i y v_j.

  Esto se verifica por la definición de matriz de adyacencia, ya que un camino de longitud 1 desde v_i a v_j esjustamente la arista que une ambos vértices.

- Hipótesis inductiva: Supongamos ahora que es cierto que $a_{ij}^{(n-1)}$ es el número de caminos diferentes de longitud $n-1$ (con $n > 1$) desde v_i hasta v_j.

  Queremos probar que, $a_{ij}^{(n)}$ es el número de caminos diferentes de longitud k desde v_i hasta v_j.

  Como $A^n = A^{n-1}A$, se tiene que $a_{ij}^{(n)} = \displaystyle\sum_{t=1}^{k} a_{it}^{(n-1)} a_{tj}$.

  Por otro lado, los caminos de longitud k entre v_i y v_j son caminos de longitud $n-1$ entre v_i y v_t, siendo v_t un vértice adyacente a v_j, seguidos de una arista $v_t v_j$. Como hemos supuesto en la hipótesis de inducción que $a_{it}^{(n-1)}$ es el número de caminos de longitud $n-1$ desde v_i hasta v_t, y sabemos por nuestro caso base que a_{tj} es el número de caminos de longitud uno entre v_t y v_j, entonces el número total de caminos entre v_i y v_j será $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} a_{it}^{(n-1)} a_{tj}$, que es tal y como hemos denotado a las entradas de la matriz A^n.

Ejercicio 4.6.

a) Caracterice la matriz de adyacencia de un grafo bipartito.

b) Pruebe que un grafo es bipartito si y sólo si para todo n impar los elementos de la diagonal de A^n son nulos, donde A es la matriz de adyacencia del grafo.

Solución 4.6.

a) Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V} \cup \mathbb{V}', \mathbb{E})$ un grafo bipartito tal que $\mathbb{V} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ y $\mathbb{V}' = \{v'_1, \ldots, v'_s\}$, luego la matriz de adyacencia A de un grafo bipartito se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & B \\ B^T & 0_{s,s} \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz de $r \times s$ con $b_{ij} = 1$ si y sólo si $(v_i, v'_j) \in \mathbb{E}$.

b) Sabemos que $\mathcal{G} = (\mathbb{V} \cup \mathbb{V}', \mathbb{E})$ es un grafo bipartito si y sólo si todos sus circuitos son pares; es decir, que toda cantidad de caminos de largo impar que une al vértice i con si mismo es nula. Es decir, que $a^n_{ii} = 0$ donde $a^n_{ij} \in A^n_{i,j}$ para todo i, j con A matriz de adyacencia del grafo y n impar.

Ejercicio 4.7. Pruebe que un grafo $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ es conexo si y sólo si para toda partición de $\mathbb{V}$ en dos subconjuntos $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$ hay una arista de $\mathcal{G}$ que une un punto de $\mathbb{V}_1$ con uno de $\mathbb{V}_2$.

Solución 4.7.

($\Rightarrow$): Supongamos que no hay una arista que una los puntos de $\mathbb{V}_1$ a $\mathbb{V}_2$, entonces no existe camino de $\mathbb{V}_1$ a $\mathbb{V}_2$. Por lo tanto, $\mathcal{G}$ no es conexo. Lo que resulta una contradicción

($\Leftarrow$): Supongamos que $\mathcal{G}$ no es conexo, es decir que existen dos vértices v_i y v_j tales que no hay camino entre ellos.

Sean $\mathbb{V}_1 = \{v_i\} \cup \mathbb{Z}_1$ (con $\mathbb{Z}_1$ el conjunto de vértices alcanzables desde v_i) y $\mathbb{V}_2 = \{v_j\} \cup \mathbb{Z}_2 \cup X$ (con $\mathbb{Z}_2$ el conjunto de vértices alcanzables desde v_j y X el conjunto de vértices no alcanzables desde v_i y v_j). Luego, $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$ representan una partición de $\mathbb{V}$ y, por lo tanto, existe una arista de $\mathcal{G}$ que une un punto de $\mathbb{V}_1$ con uno de $\mathbb{V}_2$.

Por lo tanto, existe un camino desde v_i (o por v_i) hacia $\{v_j\} \cup \mathbb{Z}_2$. Es decir, existe un camino de v_i a v_j. lo que resulta una contradicción.

Ejercicio 4.8. Pruebe que un grafo de n vértices con grado al menos $\dfrac{n+1}{2}$ es conexo.

Solución 4.8.
Veamos dos maneras de resolver el problema:

- Supongamos que el grafo $\mathcal{G}$ no es conexo y supongamos que tiene al menos dos componentes conexas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$. Sea v_1 un vértice en $\mathcal{G}_1$, entonces $d(v_1) \geq \dfrac{n+1}{2}$. Además, como todos los vértices adyacentes a v_1 en $\mathcal{G}$ tienen que estar en $\mathcal{G}_1$ se tiene que $\mathcal{G}_1$ contiene al menos $\dfrac{n+3}{2}$ vértices puesto que
$$d(v_1)+1 \geq \frac{n+1}{2}+1 = \frac{n+3}{2}$$
Procediendo análogamente para $\mathcal{G}_2$, llegamos a que $\mathcal{G}_2$ contiene al menos $\dfrac{n+3}{2}$ vértices.
Por lo tanto,
$$n = \sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G}_1)) + \sharp(\mathbb{V}(\mathcal{G}_2)) \geq \frac{n+3}{2}+\frac{n+3}{2} = n+3$$
lo que resulta ser una contradicción.
- Otra idea sería que dados dos vértices (sin pérdida de generalidad, supongamos que son u y v) se tiene que cada uno de ellos son de grado al menos $\dfrac{n+1}{2}$. Si todas las aristas fueran a vértices distintos (es decir, que entre u y v no hay vértices en común), entonces habría más vértices que n en el grafo. Lo que resultaría ser una contradicción.

Ejercicio 4.9. Pruebe que un grafo de n vértices que tiene más de $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas es conexo.

Solución 4.9.
Veamos dos demostraciones,

(a) Lo demostraremos por inducción en los vértices.

Sea un grafo $\mathcal{G}$ de n vértices cualera. Si mi grafo tiene menor o igual cantidad de aristas que $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, entonces mi grafo resultará conexo (pues el antecedente es falso).

Por lo tanto, nos interesan los casos en donde se cumple que el grafo $\mathcal{G}$ de n vértices tiene $m > \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas.

- Caso base ($n=2$): $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} \underbrace{=}_{n=2} 0$. Entonces, grafos con $n=2$ pueden ser $2K_1$ y K_2 pero $2K_1$ tiene $m=0$ y, en cambio, K_2 es el único con $m>0$ y es conexo.
Por lo tanto, si $n=2$ el grafo tiene $m > 0 \underbrace{=}_{n=2} \dfrac{(2-1)(2-2)}{2}$ aristas.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que todo grafo de n vértices que tiene más de $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas es conexo.
Sea $\mathcal{G}$ un grafo de n vértices con $m > \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ aristas y le sacamos un vértice v cualquiera.
Luego, tenemos un grafo $\mathcal{G}'$ con $n-1$ vértices y m' aristas. Analicemos los dos casos posibles usando que
$$\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G}')) + d(v)$$
(i) Si $m' > \dfrac{[(n-1)-1][(n-1)-2]}{2} = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$.
Si $d(v)=0$, entonces $\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) = \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G}')) > \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ que resulta ser una contradicción puesto que el grafo completo de $n-1$ vértices tiene K aristas con $K = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(n-1) = \dfrac{(n-1)(n-1)}{2} < \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
Entonces $\mathcal{G}'$ no puede tener más aristas que el grafo completo de $n-1$ vértices.
Si $d(v)>0$, entonces v se conecta con algún vértice de $\mathcal{G}'$ y, como este era conexo, $\mathcal{G}$ sigue siendo conexo.

- Si $m' \leq \dfrac{[(n-1)-1][(n-1)-2]}{2} = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$, se tiene que

$$\sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G})) > \frac{(n-1)(n-2)}{2} \qquad \text{y} \qquad \sharp(\mathbb{E}(\mathcal{G}')) + d(v) \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2} + d(v)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)(n-2)}{2} < \frac{(n-2)(n-3)}{2} + d(v) &\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} < d(v)\\ &\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)-(n-2)(n-3}{2} < d(v)\\ &\Leftrightarrow \frac{(2n-4)}{2} < d(v)\\ &\Leftrightarrow n-2 < d(v)\end{aligned}$$

Es decir que $n-2 < d(v) < n$ y, entonces, $d(v) = n-1$.

Por lo tanto, como $\mathcal{G}'$ era conexo y v se conecta con algún vértice, $\mathcal{G}$ es conexo.

(b) **(Idea):**

★ Supongamos que hay al menos dos componentes conexas en el grafo dado.
Sea k el número de vértices en una de las componentes, y por tanto, $n-k$ vértices en la otra. El máximo número de aristas cuando hay dos componentes conexas es cuando ambos son grafos completos.
Por lo tanto, el número de aristas en el grafo entero es $\dfrac{k(k-1)}{2} + \dfrac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ que no es mayor que $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
Esto es una contradicción, así que el grafo es conexo.

★ Falta aclarar qué pasa si hay c componentes conexas.

Ejercicio 4.10. Sea $\mathcal{G}$ un grafo pesado y T un árbol generador mínimo. Supongamos que e es la única arista de mayor peso de un ciclo C de $\mathcal{G}$. ¿Es cierto que necesariamente $e \notin T$?

Solución 4.10. (Idea):
Sea T un árbol generador mínimo tal que $e \in T$ con $w(e) > w(e')$ para todo $e' \in C$ (C ciclo de $\mathcal{G}$).

Sin pérdida de generalidad, definimos los nodos u y v de manera tal que $e = (u, v)$. Y lo que queremos ver es que existe $z \in C$ tal que $(T \setminus \{e\}) \cup \{z\}$ no tiene ciclos.

Pero si $(T \setminus \{e\}) \cup \{z\}$ tuviese un ciclo, implica que ya existía un ciclo en el T original. Es decir, si para toda arista $e' = (v, w) \in C \setminus T$ existe un camino a través de T de manera tal que de poder unir sus extremos v y w entonces en el árbol generador mínimo T habría un ciclo. Por lo tanto, podemos asegurar que existe al menos una arista z tal que $(T \setminus \{e\}) \cup \{z\}$ no tiene ciclos.

Luego, si se saca la arista e en T y se le agrega z a T, entonces se mantiene la cantidad de vértices y aristas de manera tal de que no se perdió la conexión (básicamente porque sacamos una y agregamos otra). Entonces, $\widetilde{T} = T \setminus \{e\} \cup \{z\}$ es un árbol generador mínimo tal que $peso(\widetilde{T}) < peso(T)$ que resultaría ser una contradicción.

Ejercicio 4.11. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo pesado y supongamos que los pesos son todos distintos. Pruebe que $\mathcal{G}$ tiene un único árbol generador mínimo.

Solución 4.11. (Idea):
Supongamos que existen dos árboles generadores mínimos distintos de $\mathcal{G}$ que llamaremos $T_1 = (\mathbb{V}, \mathbb{E}')$ y $T_2 = (\mathbb{V}, \mathbb{E}'')$.

Notemos que como T_1 y T_2 son árboles generadores mínimos (AGM) podemos afirmar que su peso es el mismo pero tienen al menos una arista distinta.

Sea, entonces, $e = (u, v)$ la arista de menor peso en el conjunto de aristas formado por $A(T_1) \cup A(T_2)$ (donde $A(T_i)$ representa el conjunto de aristas de T_i). Sin pérdida de generalidad supongamos que $e \in A(T_1)$.

Como T_2 es un árbol, sabemos que existe un camino simple $P = ue_1v_1e_2 \ldots v_{k-1}e_kv$ entre u y v en T_2 (que no usa e). Ahora, como $\mathcal{G}$ es un grafo pesado (con todos sus pesos distintos) entonces todas las aristas que forman el camino simple P tienen peso mayor que e (es decir, $peso(e) < peso(e_i)$ para todo $i = 1, \ldots k$).

Luego, sea $\widetilde{T} = (\mathbb{V}, \mathbb{E}''')$ donde $\mathbb{E}''' = (\mathbb{E}'' \setminus \{e_k\}) \cup \{e\}$ (notar que basta con sacar cualquier arista del camino de P). Es claro que $\widetilde{T}$ es un árbol generador mínimo con menor peso que T_1 y T_2 lo que resulta ser una contradicción.

Ejercicio 4.12. Pruebe que en todo grafo conexo con más de un vértice hay al menos dos vértices que no son de corte (es decir, que al removerlos el grafo sigue siendo conexo).

Solución 4.12.
Sea $\mathcal{G}$ conexo, entonces admite un árbol generador T.

Como $\mathcal{G}$ tiene más de un vértice, se deduce que T también y, por lo tanto, tiene al menos dos hojas v y u.

Luego, $T-u$ y $T-v$ son árboles generadores de $G-u$ y $G-v$. Por lo tanto, $G-u$ y $G-v$ son conexos.

Ejercicio 4.13. Supongamos que se tienen cuatro aulas y las siguientes materias con sus respectivos horarios para un mismo día:

Análisis I	8 a 13 hs	Análisis II	10 a 15 hs
Cálculo Avanzado	14 a 19 hs	Análisis Complejo	11 a 16 hs
Medida y Probabilidad	12 a 17 hs	Investigación Operativa	17 a 22 hs
Geometría Proyectiva	14 a 19 hs	Análisis Numérico	14 a 19 hs

Decida si existe una forma de asignar aulas de forma que se puedan dictar todas las materias respetando los horarios. Modele como un problema de grafos.

Solución 4.13.
Modelemos este problema como un problema de coloreo de grafos.

- Vértices: materias.
- Colores: aulas.
- Aristas: dos vértices son adyacentes si sus correspondientes horarios se superponen.

Tendremos en cuenta las siguientes relaciones:

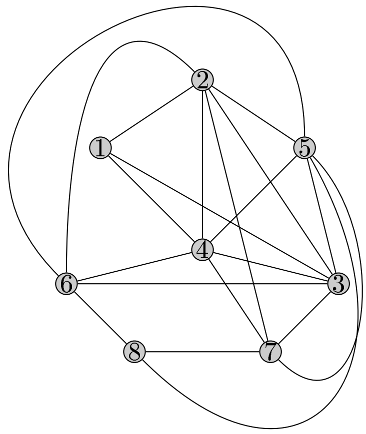
- El vértice 1 representa la materia Análisis I y se relaciona con las materias
  - ◀ Análisis II (vértice 2).
  - ◀ Análisis Complejo (vértice 3).
  - ◀ Medida y Probabilidad (vértice 4).
- El vértice 2 representa la materia Análisis II y se relaciona con las materias
  - ◀ Análisis I (vértice 1).
  - ◀ Análisis Complejo (vértice 3).
  - ◀ Medida y Probabilidad (vértice 4).
  - ◀ Análisis Numérico (vértice 5).
  - ◀ Cálculo Avanzado (vértice 6).
  - ◀ Geometría Proyectiva (vértice 7).
- El vértice 3 representa la materia Análisis Complejo y se relaciona con las materias
  - ◀ Análisis I (vértice 1).
  - ◀ Análisis II (vértice 2).
  - ◀ Medida y Probabilidad (vértice 4).
  - ◀ Análisis Numérico (vértice 5).
  - ◀ Cálculo Avanzado (vértice 6).
  - ◀ Geometría Proyectiva (vértice 7).
- El vértice 4 representa la materia Medida y Probabilidad y se relaciona con las materias
  - ◀ Análisis I (vértice 1).
  - ◀ Análisis II (vértice 2).
  - ◀ Análisis Complejo (vértice 3).
  - ◀ Análisis Numérico (vértice 5).
  - ◀ Cálculo Avanzado (vértice 6).
  - ◀ Geometría Proyectiva (vértice 7).
- El vértice 8 representa la materia Investigación Operativa y se relaciona con las materias

◀ Análisis Numérico (vértice 5).

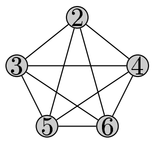
◀ Cálculo Avanzado (vértice 6).

◀ Geometría Proyectiva (vértice 7).

Veamos cómo quedaría el grafo con estas características



Y lo que necesitamos saber es si este grafo se puede colorear con 4 colores. Pero, basta notar que el subgrafo K_5 está incluido en el grafo original. Es decir,

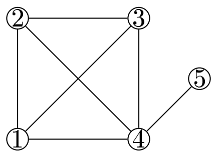


y como $\chi(\mathcal{G}) \geq \omega(\mathcal{G}) \geq 5$, se tiene que no es posible asignar aulas de forma que se puedan dictar todas las materias respetando los horarios

Ejercicio 4.14. Dado el pentágono regular, considere aquel grafo G que le agrega a éste el centro y las aristas a los restantes vértices. Calcule el polinomio, número e índice cromático de G.

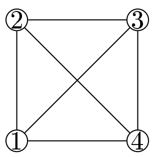
Solución 4.14.

Ejercicio 4.15. Sea G el grafo que figura a continuación. Brinde dos cotas α y β con $\beta < 5$, tales que $\alpha \leq \chi(G) \leq \beta$. Exhiba un coloreo utilizando α colores. Corrobórelo mediante el algoritmo de conexión - contracción.



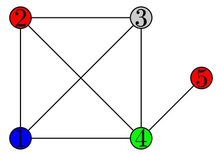
Solución 4.15.
Primero, como $\beta \in \mathbb{N}_{<5}$ entonces, necesariamente, debe pasar que $\beta \leq 4$.

Por otra parte, notemos que K_4 es un subgrafo de G:

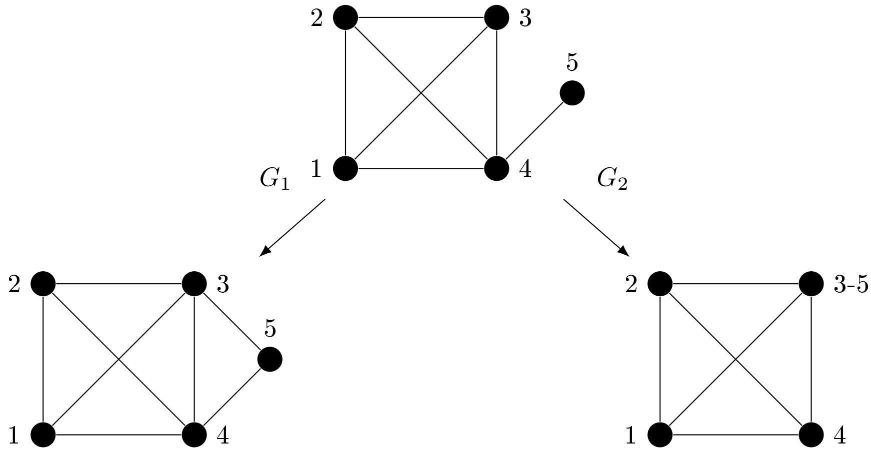


y, por lo tanto, $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 4$. Entonces, $4 \leq \chi(G) \leq \beta \leq 4 \Rightarrow \chi(G) = 4$.

Luego, $\alpha = 4$ y un posible coloreo es el siguiente:

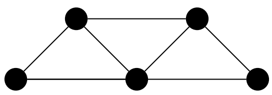


Usemos ahora el algoritmo de conexión - contracción.

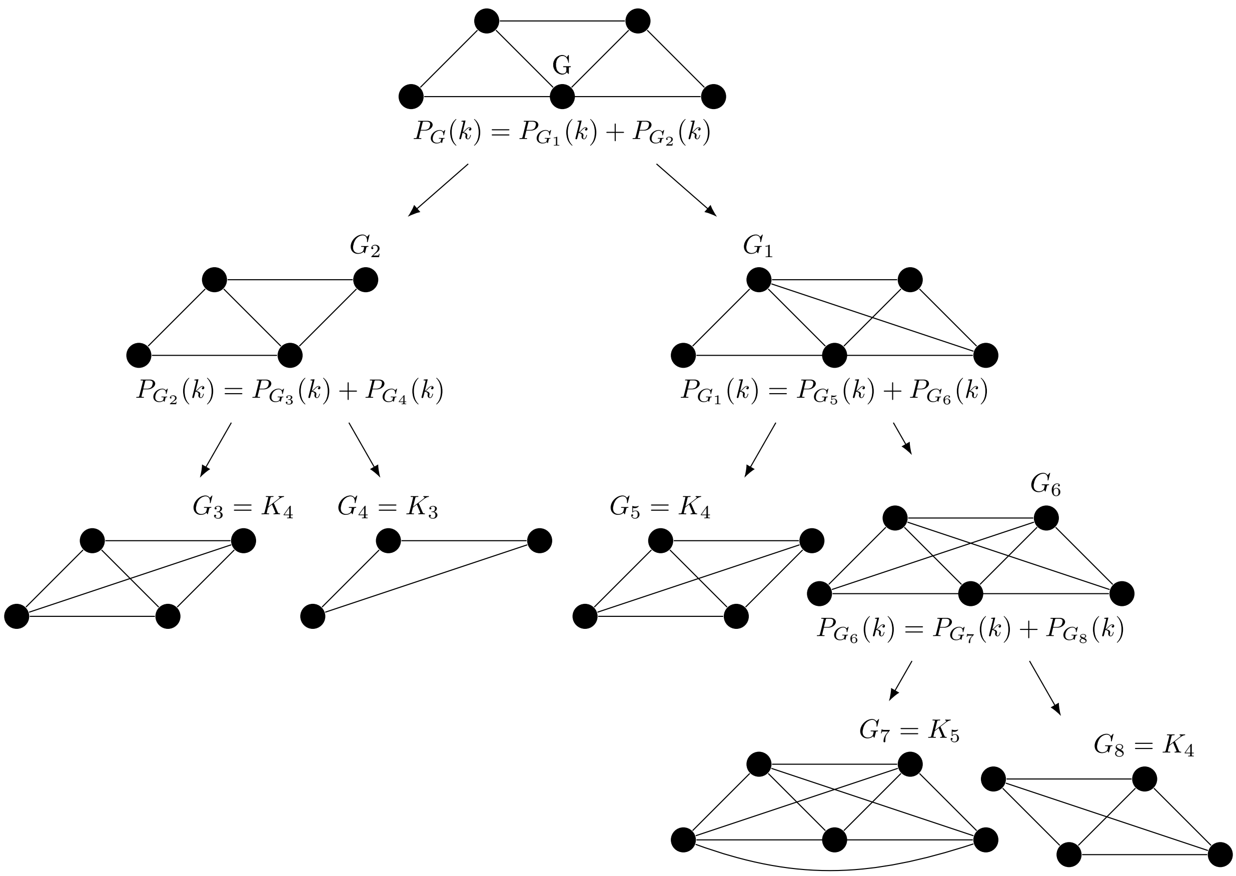


Recordemos que $\chi(G) = \text{mín}\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Luego, Como $G_2 = K_4$ entonces $\chi(G_2) = 4$ y, por otra parte, $\chi(G_1) \geq 4$ (puesto que K_4 es un subgrafo de G_1). Entonces, por el algoritmo de conexión - contracción llegamos a que, necesariamente, $\chi(G) = 4$.

Ejercicio 4.16. Determine el polinomio cromático del siguiente grafo de manera directa y verifíquelo mediante el algoritmo de conexión - contracción.



Solución 4.16.



Recordemos que para K_n (grafo completo de n vértices), su

$$P_{K_n}(k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
P_G(k) &= P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k) \\
&= [P_{G_5}(k) + P_{G_6}(k)] + [P_{G_3}(k) + P_{G_4}(k)] \\
&= \underbrace{k(k-1)(k-2)}_{P_{G_4}(k)=P_{K_3}(k)} + \underbrace{k(k-1)(k-2)(k-3)}_{P_{G_3}(k)=P_{K_4}(k)} + \underbrace{k(k-1)(k-2)(k-3)}_{P_{G_5}(k)=P_{K_4}(k)} + \underbrace{[P_{G_7}(k) + P_{G_8}(k)]}_{P_{G_6}(k)} \\
&= k(k-1)(k-2)[1+2(k-3)] + \underbrace{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}_{P_{G_7}(k)=P_{K_5}(k)} + \underbrace{k(k-1)(k-2)(k-3)}_{P_{G_8}(k)=P_{K_4}(k)} \\
&= k(k-1)(k-2)[1+3(k-3)+(k-3)(k-4)]
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.17. Se cuenta con N cubos de madera de distintos tamaños. Cada cara de los cubos está coloreada. Modele el problema de construir la torre de cubos más alta posible si no se puede apilar un cubo sobre otro más chico y además los colores de dos caras superpuestas tienen que coincidir.

Solución 4.17. (Idea):
Un cubo tiene 6 caras pero lo que nos importa es, por cada cubo, qué cara queda arriba qué cara queda abajo. Por lo tanto, si definimos $C_i^j = \{$ el cubo i tiene su cara j arriba$\}$ se puede fijar la cara que queda arriba, se tienen seis copias de cada cubo de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
C_1 &\rightsquigarrow C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \dots, C_1^{(6)} \\
\vdots &\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
C_N &\rightsquigarrow C_N^{(1)}, C_N^{(2)}, \dots, C_N^{(6)}
\end{aligned}$$

(notar que una vez que fijé que cara queda arriba, las otras quedan únivocamente determinadas)

La idea será definir los nodos como cada una de las caras de los N conos:,

$$\mathbb{V} = \left\{ C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \dots, C_1^{(6)}, \dots, C_N^{(1)}, C_N^{(2)}, \dots, C_N^{(6)} \right\}$$

Además, como los cubos son de diferente tamaño se tiene que $T\left(C_1^{(k)}\right) > T\left(C_2^{(k)}\right) > T\left(C_N^{(k)}\right)$ para todo $k = 1, \dots, 6$ (es decir, usamos una ordenación por tamaños en los cubos).

Teniendo entonces un orden por tamaño, se pueden representar los nodos como

$$\begin{matrix}
C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} & \dots & C_N^{(1)} \\
C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} & \dots & C_N^{(2)} \\
C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} & \dots & C_N^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
C_1^{(6)} & C_2^{(6)} & C_3^{(6)} & \dots & C_N^{(6)}
\end{matrix}$$

y diremos que existe una arista e entre $C_j^{(k)}$ y $C_i^{(n)}$ si

- 'puedo apilar $C_i^{(n)}$ arriba de $C_j^{(k)}$' $\left(\text{si esas caras tienen el mismo color y } T\left(C_j^{(k)}\right) > T\left(C_i^{(n)}\right)\right)$.

donde

- *peso*(e) =longitud del cubo que estoy apilando arriba.

De esta manera, habiendo definido todos los nodos y la manera en la que se relacionan/conectan ya se tiene un grafo sin ciclos (puesto que no se puede apilar un cubo sobre otro más chico). Y lo que nos hace falta es buscar un camino de longitud máxima entre los nodos.

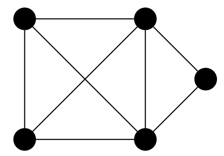
Ejercicio 4.18. En una ciudad hay N esquinas y M calles. Conociendo el mapa de la ciudad, se busca decidir si es posible colocar policías en algunas de las esquinas de manera que cada calle sea custodiada por exactamente un policía (un policía custodia las calles que desembocan en la esquina en que se encuentra). Modele el problema usando grafos.

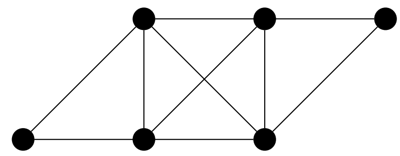
Solución 4.18. (Idea):
En primer lugar, notemos que si a cada nodo lo asociamos a una esquina y a las aristas con las calles, queda definido un grafo.

Además, si a la policiía se le asocia un color se tiene que cada nodo puede estar o no pintado (de dicho color) puesto que se pide que **exactamente** haya un policía por esquina. Es decir, el policía puede estar o no en esa esquina.

Lo que buscamos es que cada arista conecte nodos de colores distintos, entonces lo que estamos intentando resolver es si existe un 2-coloreo en este grafo. Es decir, buscamos decidir si el grafo es bipartito o no.

Ejercicio 4.19. Considere los siguientes dibujos:



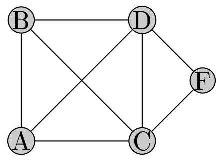


Empezando y terminando en el mismo vértice, ¿es posible reproducirlos sin levantar el lápiz? Exprese el problema en términos de teoría de grafos.

Solución 4.19.
Por el Teorema de Euler, para saber si es posible reproducirlos sin levantar el lápiz basta con verificar cuántos vértices de grado impar hay en cada grafo.

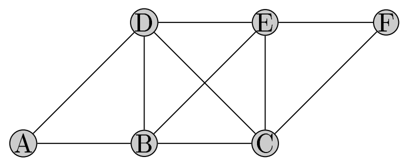
Lo que podemos asegurar es que si el grafo no tiene vértices de grado impar o bien sólo contiene un par de ellos, entonces es posible reproducirlo sin levantar el lápiz.

En estos casos, veamos el primer grafo. Comenzaremos etiquetando cada nodo de la siguiente manera:



En este caso, podemso ver que $d(A) = d(B) = 3$, $d(C) = d(D) = 4$ y, finalmente, $d(F) = 2$. Luego, es posible representar este grafo sin levantar el lápiz puesto que sólo hay un par de vértices de grado impar.

Para el último, procediendo de la misma manera



notamos que este grafo no tiene vértices de grado impar. Por lo tanto, es posible representar este grafo sin levantar el lápiz

Ejercicio 4.20. La red de transportes de una provincia deja mucho que desear. Concretamente, la provincia tiene N ciudades conectadas por M líneas de colectivos. El colectivo de la i-ésima línea tiene una capacidad determinada C_i de pasajeros.

Un tour por la provincia es una secuencia válida de viajes en colectivo que empieza en la ciudad 1 y termina en la ciudad N.

Si queremos llevar a un grupo de P personas a conocer todas las ciudades de la provincia, ¿cuál es el mínimo número de tours que hay que realizar?

Solución 4.20. (Idea):
En primer lugar, notemos que si a cada nodo lo asociamos a una ciudad y a las aristas con las líneas de colectivo, queda definido un grafo donde a cada arista e_i se le asocia el peso C_i.

Por otra parte, tenemos en cuenta que

- un vez inicializado el tour con P personas, estás no pueden separarse.
- un tour resulta ser un camino hamiltoniano del 1 al N.

Además, dado un tour $\mathcal{C} = \{i \text{ en el tour}\} \subseteq \{1, \ldots, M\}$, queremos saber cuántas personas pueden viajar en él.

Teniendo en cuenta que no se puede separar la gente durante el tour, tenemos que podrán viajar tantos como la línea de colectivos de menor capacidad (puesto que si pusiera más de esa cantidad alguna deberá separarse del grupo). Es decir, podrán viajar $\min\limits_{i \in \mathcal{C}} C_i$.

Y lo que buscamos es un tour $\widetilde{\mathcal{C}}$ que maximice $\min\limits_{i \in \mathcal{C}} C_i$ (sabemos que existe uno puesto que hay finitos caminos y/o tours a recorrer).

Luego, una vez que ya se encontró $\widetilde{\mathcal{C}}$ la solución al problema será (sobre la mínima cantidad de tours que habrá que realizar)

$$\left\lfloor \frac{P}{\min\limits_{i \in \widetilde{\mathcal{C}}} C_i} \right\rfloor$$

puesto que en cada uno de los tours puedo llevar como mucho $\min\limits_{i \in \widetilde{\mathcal{C}}} C_i$ y, además, tiene que viajar las P personas.

Ejercicio 4.21. Considere la siguiente tabla con el tipo de cambio de algunas monedas (al 15/10/19):

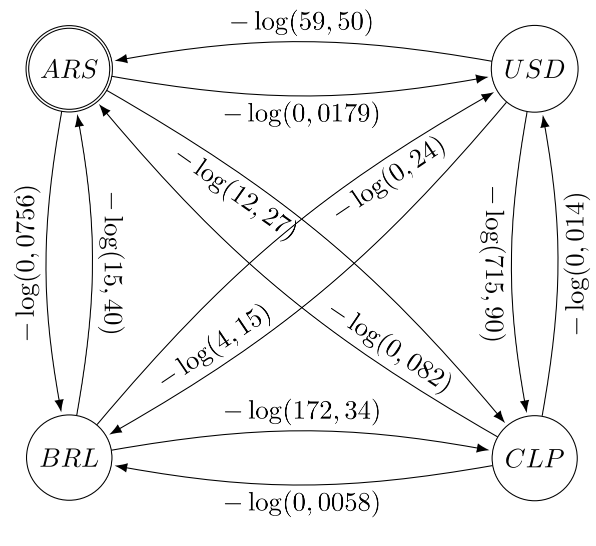
Tasa de cambio	Peso argentino (ARS)	Dólar (USD)	Peso chileno (CLP)	Real (BRL)
Peso argentino (ARS)	1	0,0179	12,27	0,0756
Dólar (USD)	59,50	1	715,90	4,15
Peso chileno (CLP)	0,082	0,014	1	0,0058
Real (BRL)	15,40	0,24	172,34	1

Modele el problema de cambiar de forma óptima 1000 pesos argentinos a dólares en términos de grafos. ¿Es posible hacer una sucesión de cambios en las que se termine con más de 1000 pesos argentinos?

Solución 4.21. (Idea):
La primero que notamos es que los vértices están representados por las monedas y diremos que el vértice i está conectado con el vértice j si existe un cambio entre el dinero i al dinero j.

Como existe un cambio entre todas las monedas sabemos que el grafo resultante es completo y dirigido y lo que falta es ver qué costo tendrá cada arista.

Una manera de resolver este problema es plantearlo buscando un camino mínimo.



- primero, la idea es usar log puesto que $\log(\Pi a_i) = \Sigma \log(a_i)$.
- y, como la idea es intentar encontrar el camino mínimo, agregamos el signo negativo al costo de las aristas.

Por último, es posible hacer una sucesión sólo si existiera un ciclo negativo entre los cambios.

Ejercicios Planteados en Clase

Ejercicio 4.22. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo simple y conexo

(a) Demostrar que si $\mathcal{T}$ es un árbol generador de coste mínimo de $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{T}$ es un árbol generador de $\mathcal{G}$ que minimiza el costo máximo de las aristas.

(b) Hallar un contraejemplo para la recíproca; es decir, un árbol generador de $\mathcal{G}$ que minimiza el costo máximo de las aristas pero que sin embargo no es un árbol generador de coste mínimo.

Solución 4.22.

Ejercicio 4.23. Sea $\mathcal{G} = (\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2\}, \mathbb{E})$ un grafo bipartito conexo.

(a) Demostrar que si existe un matching máximo en $\mathcal{G}$ que contiene todos los nodos de un grado máximo.

(b) Demostrar que las aristas de $\mathcal{G}$ se pueden colorear con $\Delta(\mathcal{G})$ colores (*sugerencia:* usar unducción en $\Delta(\mathcal{G})$ y el resultado anterior).

Solución 4.23.

Ejercicio 4.24. Un grafo es "overlap de intervalos" si sus vértices pueden ser representados por medio de intevalos en una recta real de modo que dos vértices son adyacentes si y sólo si sus correspondientes intervalos se solapan (se intersecan pero ninguno está incluído en el otro).

(a) Mostrar un ejemplo de un grafo que no sea "overlap de intervalos".

(b) ¿Qué relación hay entre estos grafos y los grafos círculo (grafos intersección de cuerdas en un círculo)?

Solución 4.24.

Ejercicio 4.25. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo conexo, plano con N vértices y M aristas. Sea n_i el número de vértices de grado i.

(a) Probar que $M \leq 3N - 6$.

(b) Probar que $\displaystyle\sum_{i\geq 1}(6i)n_i \geq 12$.

(c) Probar que $\mathcal{G}$ contiene, al menos, un vértice u de grado menor o igual que cinco.

Solución 4.25.

Ejercicio 4.26. Consideremos un juego completo de dominó compuesto por 28 fichas que son todos los pares de combinaciones posibles entre los elementos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El juego consiste en concatenar las fichas por un lado común.

(a) Tomando como vertices los elementos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qué representa una ficha?, cuáles son las fichas que se corresponden con los lazos?. Identificar el grafo que se obtiene con todas las fichas, sin dibujarlo.

(b) Usando el grafo obtenido en el apartado anterior, demostrar que se puede concatenar las 21 fichas que no son dobles (sin dibujarlo). Se pueden concatenar todas las fichas?.

(c) Consideremos ahora sólo aquellas fichas que contengan a un elemento impar y a un elemento par a la vez. Decir de qué grafo se trata. Se pueden concatenar todas estas fichas?. Razonar la respuesta

Solución 4.26.

Ejercicio 4.27. Tras la cena para celebrar el fin de los examenes, Alicia (A), Berta (B), Celia (C), Darío (D), Elena (E), Felipe (F), Gerardo (G), Hilario (H), Inés (I) y Juana (J) deciden alargar la fiesta e ir a bailar, pero se ponen como condición no bailar con gente que conozcan, así que las posibles parejas de bailes serían: A con F,G o H; B con G o I; C con F o G; D con G, I o J y, finalmente, E con F, G, o H.

(a) Dibujar el grafo correspondiente a esta situación.

(b) Es posible que los 10 bailen a la vez? En caso afirmativo indicar una posible forma de organizar las parejas de baile.

(c) Cuántos bailes son necesarios para que todas las posibles parejas de baile puedan bailar? Justi

ca la respuesta con un argumento válido para cualgier grupo de amigos.

Solución 4.27.

Ejercicio 4.28. La policía está interesada en controlar todos los ciclistas que viajan de Obelisco (punto A) a Plaza de Italia (Punto B) por la red de bicisendas de Bs As, teniendo en cuenta que establecer un control en el tramo que une los puntos i y j tiene coste c_{ij}.

(a) Describir el problema planteado en términos de flujos en grafos.

(b) Diseñar un algoritmo que resuelva el problema en cualquier grafo dirigido, en tiempo polinomial.

Solución 4.28.

Ejercicio 4.29. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo bipartito, y sea $\mathcal{H}$ el complemento de $\mathcal{G}$. Probar que $\mathcal{H}$ es un grafo perfecto.

Solución 4.29.

Ejercicio 4.30. Sea $\mathcal{G}$ un grafo de n vértices, ninguno de los cuales es aislado, y $n-1$ ramas, siendo $n \geq 2$. Probar que $\mathcal{G}$ contiene al menos dos vértices de grado 1.

Solución 4.30.

Ejercicio 4.31. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ el grafo cuyos vértices son $V = \{n \in \mathbb{N} : 2 \leq n \leq 11\}$ y $\mathbb{E}$ se define por

$$(u, v) \in \mathbb{E} \text{ si y sólo si } u \text{ y } v \text{ son coprimos}$$

Hallar la tabla de adyacencia de $\mathcal{G}$ y determinar si es un grafo conexo.

Solución 4.31.

Ejercicio 4.32. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo conexo y pesado y sea $\mathcal{T}$ un árbol generador mínimo de $\mathcal{G}$. Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas: demostrándola en caso de veracidad y exhibiendo un contraejemplo en caso de falsedad.

(a) Si se disminuye el peso de una sola rama de $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{T}$ sigue siendo un árbol generador mínimo.

(b) Sea $v \in \mathbb{V}$. Si $\widetilde{T}$ es un árbol generador mínimo de $\mathcal{G} \setminus \{v\}$, entonces $\widetilde{T}$ se puede extender a un árbol generador mínimo de $\mathcal{G}$.

(c) Para $\mathbb{V}' \subset \mathbb{V}$, sea $\mathcal{G}'$ y $\mathcal{T}'$ los subgrafos inducidos por $\mathbb{V}'$ de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{T}$, respectivamente. Si $\mathcal{G}'$ es conexo, entonces $\mathcal{T}'$ es un árbol generador mínimo de $\mathcal{G}'$.

Solución 4.32.

Ejercicio 4.33. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo conexo y pesado. Probar que si para toda partición de $\mathbb{V}$ en dos conjuntos disjuntos, existe una única arista de peso mínimo que los conecta, entonces $\mathcal{G}$ tiene un único árbol generador mínimo. Exhibir con un contraejemplo que no vale la vuelta.

Solución 4.33.

Ejercicio 4.34. Se desean usar antenas existentes para transmisión de ondas para celular. Dos antenas distantes por menos de 915 metros pueden interferirse si se utiliza la misma frecuencia para ambas.

Teniendo en cuenta la tabla de distancias entre 6 antenas, ¿cuál es el menor número de frecuencias diferentes que hace falta usar para que no haya interferencia entre dos antenas?

Antenas	2	3	4	5	6
1	750	1050	1350	500	1300
2	-	650	1200	400	600
3	-	-	350	950	880
4	-	-	-	900	1100
5	-	-	-	-	850

Solución 4.34.

Ejercicio 4.35. Once equipos deben jugar entre sí, todos contra todos una vez. Si un equipo no puede jugar más de un partido por día, ¿cuántos días son necesarios para jugar todos los partidos?

(a) Modelar el problema como un problema de coloreo de aristas.

(b) Modelar el problema como un problema de coloreo de vértices.

Solución 4.35.

Ejercicio 4.36. ¿Cuál es el mínimo número de aristas que deben removerse de K_n para obtener un grafo planar? Para cada n, construir un grafo planar que tenga el máximo de aristas posibles.

Solución 4.36.

5 Algoritmos en Grafos

Ejercicio 5.1. Indique en cada caso qué tipo de representación sería más adecuada (matriz de adyacencia o lista de vecinos) y cuál es el número de operaciones necesarias:

a) comprobar si el vértice u es adyacente al vértice v.

b) calcular el grado del vértice u.

c) agregar una arista entre los vértices u y v.

d) eliminar la arista entre los vértices u y v.

e) calcular el número de aristas del grafo.

f) comprobar si el grafo es regular.

Solución 5.1.

Ejercicio 5.2. Escriba una modi cación del algoritmo `BFS` para:

a) detectar si un grafo es bipartito.

b) calcular la distancia entre dos vértices dados y recuperar un camino mínimo.

c) calcular la cantidad de caminos mínimos entre dos vértices dados.

Solución 5.2.

Ejercicio 5.3. Diseñe un algoritmo eficiente para encontrar el camino más largo (con mayor cantidad de aristas) en un árbol.

Solución 5.3.

Ejercicio 5.4. Sea $\mathcal{T}$ un árbol generador mínimo producido por el algoritmo de `Prim`. Pruebe que $\mathcal{T}$ contiene todas las aristas de peso mínimo salvo que estas incluyan un circuito.

Solución 5.4.

Ejercicio 5.5. Dado un árbol pesado, definimos su cuello de botella como el peso máximo de sus aristas. Muestre que todo árbol generador mínimo minimiza el cuello de botella sobre los árboles generadores de un grafo dado.

Solución 5.5.

Ejercicio 5.6. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo pesado y $\mathcal{T}$ un árbol generador mínimo de $\mathcal{G}$. Supongamos que agregamos la arista $e = (u, v)$ de peso p. Describa un algoritmo eficiente para encontrar un árbol generador mínimo de $\mathcal{G} + e$.

Solución 5.6.

Ejercicio 5.7. Decida la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones y actúe en consecuencia.

a) El algoritmo de `Dijkstra` encuentra caminos mínimos en grafos pesados en que no todos los pesos son no negativos.

b) El algoritmo de `Prim` encuentra el árbol generador mínimo en grafos pesados en que no todos los pesos son no negativos.

c) El único camino entre dos vértices en un árbol generador mínimo de un grafo es un camino mínimo entre ellos.

d) Supongamos que $\mathcal{T}$ es el único árbol generador de un grafo. El único camino entre dos vértices de $\mathcal{T}$ es un camino mínimo entre ellos.

e) Sea $\mathcal{T}$ un árbol generador mínimo de un grafo pesado $\mathcal{G}$. Se obtiene un nuevo grafo $\mathcal{G}'$ a partir de $\mathcal{G}$ sumándole k a cada arista de $\mathcal{G}$.

   Las aristas de $\mathcal{T}$ forman un árbol generador mínimo de $\mathcal{G}$.

f) Sea $\mathcal{P}$ un camino de costo mínimo entre s y t en un grafo pesado $\mathcal{G}$. El camino $\mathcal{P}$ considerado como camino entre s y t en el grafo modificado $\mathcal{G}'$ del ítem anterior es un camino mínimo entre s y t.

Solución 5.7.

Ejercicio 5.8. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo con costos en las aristas. Notemos c_{ij} el costo de la arista que une los vértices v_i y v_j.

a) Dado π un vector de n coordenadas definimos nuevos costos $c^{\pi}_{ij} := c_{ij} + \pi_j - \pi_i$.

   Muestre que los caminos mínimos con estos nuevos costos son los mismos que antes (el costo total de cada camino puede cambiar).

b) Supongamos que $\mathcal{G}$ no tiene ciclos negativos y sea s un nodo distinguido en $\mathcal{G}$, tomemos π_i como la longitud del camino mínimo (con los costos originales) desde s hasta v_i.

   Demuestre que $\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}$.

c) Pruebe que si vale que $\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}$ entonces los nuevos costos son no-negativos.

d) Supongamos que los vértices de $\mathcal{G}$ son puntos del plano y los costos son las distancias euclídeas. Demuestre que tomando $\pi_i = \|s - v_i\|^2$ se tiene $\pi_j \leq \pi_i + c_{ij}$.

Solución 5.8.

Ejercicio 5.9. Escriba una modificación del algoritmo de `Dijkstra` para:

a) calcular el costo de un camino mínimo entre dos vértices dados de un grafo si las aristas y los vértices tienen pesos.

b) calcular el costo de un camino entre dos vértices dados que minimice el máximo de los pesos de las aristas que lo componen.

Solución 5.9.

Ejercicio 5.10. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo pesado con pesos no negativos y $s, t \in \mathbb{V}$ dos vértices distintos. Decimos que una arista e es s,t-óptima si existe algún camino mínimo entre s y t que pasa por e.

Describa un algoritmo para calcular el camino de mínimo costo de s a t que no use arista s,t-óptima alguna.

Solución 5.10.

Ejercicio 5.11. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo dirigido. Diseñe un algoritmo eficiente para calcular el mínimo peso de un ciclo dirigido en $\mathcal{G}$.

Solución 5.11.

Ejercicio 5.12. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un digrafo acíclico pesado (con pesos no necesariamente positivos). Describa un algoritmo eficiente para calcular el camino mínimo entre dos vértices dados.

Solución 5.12.

Ejercicio 5.13. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo dirigido pesado. Sean $u, v \in \mathbb{V}$ y $k \leq |\mathbb{V}|$ un número natural. Diseñe un algoritmo para encontrar un camino de costo mínimo entre u y v que use exactamente k aristas (no necesariamente distintas).

Solución 5.13.

Ejercicio 5.14. ¿Cómo se puede resolver el problema de flujo máximo en una red si los vértices también tienen capacidades máximas?

Solución 5.14.

Ejercicio 5.15. Sea $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un grafo y sean $u, v \in \mathbb{V}$. ¿Cuántos caminos disjuntos en aristas se pueden encontrar simultáneamente entre u y v? ¿Y disjuntos en vértices?

Solución 5.15.

Ejercicio 5.16. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ una lista de números naturales sin repeticiones. Se quieren armar parejas con estos números de forma que en cada pareja la suma de ambos números sea primo. ¿Cuál es la máxima cantidad de parejas que se pueden armar? Modele este problema como un problema de flujo.

Ejemplo: Si los números son 2,3,4,5 se pueden armar 2 parejas 2-5, 3-4. Pero si son 2,3,4,6 sólo se puede armar una pareja

Solución 5.16.

Ejercicio 5.17. Dadas g^e y g^s dos n-tuplas de naturales, se desea saber si existe un grafo dirigido $\mathcal{G}$ tal que los grados de entrada y salida de cada vértice v_i sean g_i^e y g_i^s respectivamente. Modele como un problema de flujo en redes.

Solución 5.17.

Ejercicio 5.18. En la bolsa de Buenos Aires se hicieron mediciones de los precios de ℓ acciones durante k días.

Llamamos $a_{i,j}$ al precio de la acción i en el día j. Para presentar los resultados del estudio vamos a usar gráficos del valor de cada acción en función del tiempo formando una poligonal.

Es posible incluir los datos de más de una acción en el mismo gráfico siempre y cuando las poligonales no se corten.

Diseñe un algoritmo que calcule el mínimo número de gráficos en el que se pueden acomodar la totalidad de las acciones.

Sugerencia: Considere el grafo $\mathcal{G}$ con vértices $\mathbb{V} = \{1, \ldots, \ell\}$ y aristas

$$\mathbb{E} = \{(i, i') : \text{ si la acción } i \text{ se puede dibujar por abajo de la acción } i'\}.$$

Solución 5.18.

Ejercicio 5.19. Encuentre un emparejamiento máximo en el grafo bipartito $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ siguiente:

- $\mathbb{V} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 13\}$.
- $\mathbb{E} = \{(1,4), (1,8), (1,9), (2,5), (2,9), (2,12), (3,5), (3,11), (3,12), (4,6), (7,12), (7,13), (10,12)\}$

Solución 5.19.

Ejercicio 5.20. Muestre cómo resolver el problema de matching máximo bipartito, considerándolo como un problema de flujo máximo en una red conveniente.

Solución 5.20.

1	2	3	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Investigación Operativa

Primer Parcial – 18 de Septiembre de 2020

Ejercicio 1 (Adaptado de *Linear Programming Foundations and Extensions*, de J. Vanderbei). *Una pequeña aerolínea ofrece vuelos entre tres ciudades: Córdoba, Río Gallegos y Neuquén. En este problema nos vamos a enfocar en el vuelo que se llevan a cabo los días Viernes: parte de Córdoba, hace una escala en Neuquén y luego continúa a Río Gallegos. Hay tres tipos de pasajeros:*

- *los que viajan de Córdoba a Neuquén.*
- *los que viajan de Neuquén a Río Gallegos.*
- *los que viajan de Córdoba a Río Gallegos.*

El avión es pequeño y puede llevar hasta N pasajeros. La aerolínea ofrece tres tarifas distintas:

- *A: dos equipajes en bodega y un equipaje de mano.*
- *B: un equipaje en bodega y un equipaje de mano.*
- *C: sólo equipaje de mano.*

Los precios de cada pasaje ya fueron determinados y publicitados:

Tarifa	*Córdoba-Neuquén*	*Neuquén-Río Gallegos*	*Córdoba-Río Gallegos*
A	*300*	*160*	*360*
B	*220*	*130*	*280*
C	*100*	*80*	*140*

Por otro lado, luego de un estudio de vuelos anteriores, se han determinado las siguientes cotas inferiores en la cantidad de potenciales clientes para cada una de las combinaciones origen-destino/tarifa:

Tarifa	*Córdoba-Neuquén*	*Neuquén-Río Gallegos*	*Córdoba-Río Gallegos*
A	*12*	*18*	*21*
B	*18*	*28*	*30*
C	*32*	*45*	*40*

Se desea decidir cuántos pasajes vender para cada una de las nueve combinaciones origen-destino/tarifa. Tener en cuenta las siguientes restricciones:

1. *la cantidad de pasajes puestos en venta para cada combinación origen-destino/tarifa no debe ser menor que la cota inferior de demanda.*
2. *para ninguno de los dos tramos del vuelo pueden haber más reservas que la capacidad del avión.*
3. *debido a la capacidad de carga del avión, los pasajeros de tarifa A en cada tramo del viaje deben ser a lo sumo el %20 de los pasajeros totales.*
4. *si para Córdoba-Neuquén se pone a la venta menos de 25 pasajes de tarifa B, entonces poner a la venta al menos 40 pasajes de tarifa C para Córdoba-Neuquén.*

Diseñar un modelo de programación lineal entera cuyo objetivo sea maximizar la ganancia.

Ejercicio 2. *Se desea organizar un festival de música que se celebrará a lo largo de tres días. Cada jornada tendrá una duración de* 14 *horas divididas en franjas de dos horas, acumulando un total de* 21 *franjas horarias a lo largo de los tres días. A cada banda invitada se le asignará exactamente una de esas franjas horarias para realizar su show.*

Se cuenta con cuatro escenarios E_1, E_2, E_3, E_4, por lo que durante cada franja horaria pueden ocurrir a lo sumo cuatro conciertos simultáneamente.

Se tiene un conjunto B de bandas candidatas a ser invitadas a tocar en el festival. Para cada banda $i \in B$, se estima que atraerá e_i espectadores a su show y se pronostica que dará una ganancia neta de r_i pesos. Las bandas candidatas se categorizan en cinco conjuntos disjuntos según su género musical: G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 (es decir: $\bigcup_{k=1}^{5} G_k = B,\ G_k \cap G_r = \varnothing$ si $k \neq r$).

1. *Teniendo en cuenta que se desea decidir qué bandas invitar y en qué escenario y franja horaria tocará cada una de las bandas invitadas, modelar linealmente las siguientes restricciones del festival definiendo las variables y conjuntos que se consideren necesarios:*
   a) *cada banda invitada debe tocar exactamente durante una franja horaria en exactamente un escenario.*
   b) *en cada franja horaria, en cada escenario puede tocar a lo sumo una banda.*
   c) *durante cada franja horaria pueden ocurrir a lo sumo cuatro conciertos simultáneamente.*
   d) *para cada franja horaria, la cantidad de espectadores del escenario E_j no debe superar su capacidad ℓ_j.*
   e) *la cantidad de espectadores totales en cada franja horaria no debe superar 20000.*
   f) *se deben invitar al menos g_k bandas del género G_k.*
   g) *el escenario* 4 *debe permanecer vacío durante la primera franja horaria de cada día.*
   h) *hay un conjunto $P \subset B$ de bandas muy populares que deben ser invitadas.*
   i) *cada banda del conjunto P debe tocar durante alguna de las dos últimas franjas horarias de cualquiera de los días.*
   j) *la ganancia neta del festival debe superar los R pesos.*
   k) *las bandas invitadas con menos de S espectadores deben tocar durante los primeras tres franjas horarias.*
2. *La empresa organizadora del festival está interesada en analizar el resultado obtenido con diferentes criterios. Utilizando las variables y conjuntos definidos en el ítem* 1., *modelar cada una de las siguientes funciones objetivo, agregando, de ser necesario, las restricciones y variables correspondientes.*
   a) *Maximizar el mínimo de espectadores totales diarios.*
   b) *Minimizar el máximo número de espectadores totales durante la misma franja horaria.*
   c) *Minimizar la suma de la diferencia absoluta de cantidad de bandas invitadas entre cada par de géneros musicales.*

Ejercicio 3. *Una empresa forestal acaba de adquirir un territorio que desea explotar responsablemente. El terreno fue dividido en N secciones y se desean producir J tipos de madera distintos. Se cuenta con los siguientes datos:*

- *m_j: el árbol con madera j tarda m_j meses desde que fue plantado hasta su maduración (es decir, hasta estar listo para ser talado).*
- *a_i: área de la sección i.*
- *A_t: área máxima de tierra en la que se puede plantar árboles durante el mes t.*
- *v_{ij}: volumen de madera j que se obtiene al cosechar la sección i.*
- *g_j: ganancia por cada unidad de volumen de madera j.*

- k_{ij}: *costo de plantar árboles de madera* j *en la sección* i.
- f_{it}: *costo de cada camión de transporte desde la sección* i *hasta el aserradero en el mes* t.
- C_t: *cantidad de camiones de transporte disponibles durante el mes* t.
- V: *capacidad de volumen de madera de cada camión de transporte.*

Cuando se cosecha la madera de una sección, se talan todos los árboles de la misma y todo el volumen de madera obtenido es transportado al aserradero. Cada camión de transporte hace a lo sumo un viaje por mes. El objetivo es planificar la producción de madera durante los próximos $\mathcal{T}$ *meses. Plantear un modelo de programación lineal que permita decidir dónde, cuándo y qué árboles plantar y cuándo talarlos, de manera tal que se maximice la ganancia. Se deben considerar las siguientes restricciones:*

1. *en cada sección no puede haber más de una especie de árbol.*
2. *en cada sección se puede plantar a lo sumo una vez.*
3. *si se plantan árboles en una sección, deben ser talados en algún momento.*
4. *no se puede talar árboles que no han madurado.*
5. *en cada mes* t, *no se pueden plantar árboles en un área mayor que* A_t.
6. *no sobrepasar la disponibilidad mensual de camiones*
7. *no se puede plantar en las secciones del conjunto* $\mathcal{S}$ *durante los primeros* 6 *meses.*
8. *los árboles de la madera* 4 *sólo pueden plantarse a partir del mes* 12, *inclusive.*

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Investigación Operativa

Segundo Parcial – 20 de Octubre de 2020

Ejercicio 1. *Resolver el siguiente problema de Programación Lineal utilizando el Método de Dos Fases de SIMPLEX.*

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\min & 5x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\textit{s.a:} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 6 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \leq 0 \quad x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}$$

Ejercicio 2. *Cada uno de los siguientes diccionarios corresponden a soluciones básicas de distintos problemas de Programación Lineal con objetivo de maximizar. En cada caso se presentan cuatro afirmaciones sobre la información que brinda ese diccionario. Decidir y justificar si cada afirmación es verdadera o falsa. En todos los casos puede considerarse que se utiliza el criterio usual para la selección de la variable que entrará a la base en la siguiente iteración.*

(1)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & 2 & + & 5x_4 & - & 2x_3 & + & x_6 \\
x_2 & = & & & x_4 & + & x_3 & - & x_6 \\
x_5 & = & 3 & & & - & \frac{1}{2}x_3 & & \\
\hline
z & = & 4 & + & \frac{1}{2}x_4 & & & + & x_6
\end{array}$$

(a) corresponde a una solución básica óptima
(b) la próxima iteración de SIMPLEX es degenerada
(c) corresponde a una solución básica degenerada
(d) el problema es no acotado

(2)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_5 & = & \frac{1}{2} & - & x_2 & + & x_4 \\
x_1 & = & 2 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_4 \\
x_3 & = & 1 & - & \frac{1}{2}x_2 & & \\
\hline
z & = & 11 & & & &
\end{array}$$

(a) la próxima iteración de SIMPLEX es degenerada
(b) corresponde a una solución básica óptima
(c) existen infinitas soluciones óptimas
(d) el problema dual es infactible

Ejercicio 3. *Dado el siguiente problema de Programación Lineal:*

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\max & -(2+\alpha)x_1 & + & (1+\alpha)x_2 & - & 4x_3 & + & 9x_4 & & \\
\textit{s.a:} & 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 2+\beta \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & \leq & 5+\gamma \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0\,, x_4 \leq 0}
\end{array}$$

(a) *Para el caso $\alpha = \beta = \gamma = 0$, hallar una solución óptima utilizando el problema dual.*

(b) *Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la solución obtenida en el ítem (a) sigue siendo óptima.*

(c) *Suponiendo que α cumple con las condiciones del ítem (b), hallar condiciones para que la solución obtenida en el ítem (a) siga siendo óptima cuando se mueven a la vez β y γ.*

Ejercicio 4. *Utilizar el algoritmo de Branch & Bound para resolver el siguiente problema de programación lineal entera, detallando cada división en subproblemas durante el algoritmo mediante el esquema de árbol visto en clase. Comenzar ramificando en x_2 y resolver gráficamente la relajación lineal de cada subproblema.*

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\textit{s.a:} & 5x_1 & - & 5x_2 & \geq & 1 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \geq & -2 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 45 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\
 & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Investigación Operativa

Tercer Parcial – 27 de Noviembre de 2020

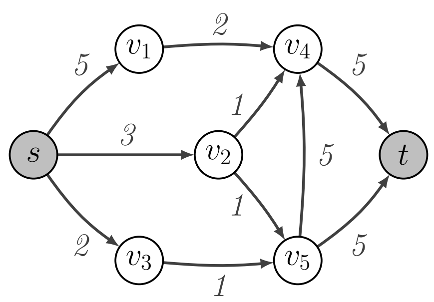
Ejercicio 1. *Sea T un árbol generador mínimo de un grafo pesado conexo $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ y sea $\mathbb{V}' \subset \mathbb{V}$. Sea T' el subgrafo de T inducido por $\mathbb{V}'$ y sea $\mathcal{G}'$ el subgrafo de $\mathcal{G}$ inducido por $\mathbb{V}'$. Demostrar que si T' es conexo, entonces T' es un árbol generador mínimo de $\mathcal{G}'$.*

Ejercicio 2. *Probar las siguientes afimaciones:*

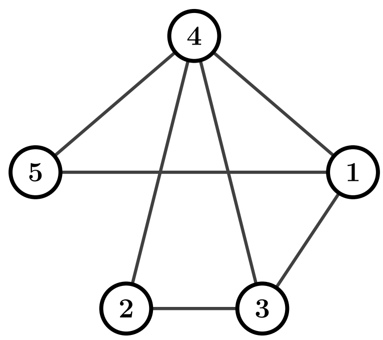
(1) *Sea $\mathcal{G}$ un grafo conexo planar, mostrar que $\delta(\mathcal{G}) \leq 5$ (es decir, existe al menos un vértice con grado menor o igual a 5).*

(2) *Sean $\mathcal{G}_1 = (\mathbb{V}_1, \mathbb{E}_1)$ y $\mathcal{G}_2(\mathbb{V}_2, \mathbb{E}_2)$ grafos conexos sin vértices en común. Sean $u \in \mathbb{V}_1$, $v \in \mathbb{V}_2$, $\mathcal{G}_3 = (\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2, \mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2 \cup \{e\})$ siendo e la arista que conecta a u y a v. Mostrar que si existe un circuito euleriano en $\mathcal{G}_1$ y existe un circuito euleriano en $\mathcal{G}_2$, entonces $\mathcal{G}_3$ tiene camino euleriano y no tiene circuito euleriano.*

(3) *En la siguiente red de flujo, el número que acompaña a cada arista representa su capacidad. Demostrar que el flujo máximo de s a t en la red es 5.*



Ejercicio 3. *Mediante el algoritmo de conexión-contracción, calcular el número cromático y el polinomio cromático del siguiente grafo.*



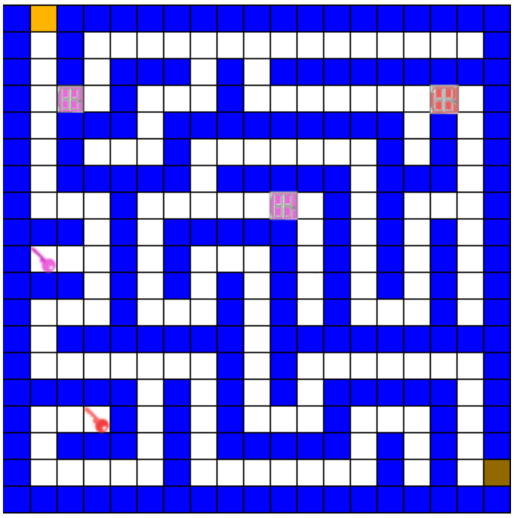
Ejercicio 4.

a) *Un grafo es arco-circular si es el grafo intersección de arcos (abiertos) alrededor de un círculo. Un grafo es arco-circular propio si es arco-circular y tiene una representación por arcos, de modo que no haya ningún arco contenido en otro. Mostrar un ejemplo minimal de un grafo arco-circular que no sea arco-circular propio (la minimalidad quiere decir que todo subgrafo inducido sí sea arco-circular propio). Justificar la pertenencia, la no pertenencia y la minimalidad.*

b) *Un grafo es círculo si es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. Un grafo es círculo-H si es círculo y tiene una representación por cuerdas, de modo que las cuerdas representando todo subgrafo completo tengan una intersección común. Mostrar un ejemplo minimal de un grafo círculo que no sea círculo-H. (la minimalidad quiere decir que todo subgrafo inducido sí sea círculo-H). Justificar la pertenencia, la no pertenencia y la minimalidad.*

Ejercicio 5. *En este problema se tiene un laberinto que puede representarse como un tablero de $m \times n$ (m filas y n columnas). Se comienza en la esquina superior izquierda y se debe alcanzar la casilla inferior derecha. En algunas casillas del laberinto puede haber puertas de color rojo o magenta, y en otras casillas del laberinto puede haber llaves de alguno de esos mismos colores. El objetivo es llegar a la salida en la menor cantidad de tiempo, pero hay algunas salvedades.*

- *Moverse a una casilla vacía cuesta 1 unidad de tiempo.*
- *No se puede mover a una casilla que tiene una puerta sin haber agarrado una llave del color de la puerta previamente.*
- *Solo se puede agarrar una llave estando en la casilla donde se ubica una llave, para lo cual se tardan 5 unidades de tiempo.*



Teniendo esto en cuenta, se pide:

(1) *Modelar el problema como un problema de grafos y proponer un algoritmo que utilice dicho grafo para resolver el problema. ¿Cuál es la complejidad? Expresarla en términos de m y n.*

(2) *¿Cómo se modificaría la complejidad si ahora se tienen k colores posibles de llaves y puertas? Expresarla en términos de m, n y k.*

Sugerencia: *Puede ser necesario considerar más que un nodo por casilla del tablero, para tener en cuenta además qué llaves se poseen.*

1	2	3	Calificación

Nombre y apellido:

Número de libreta:

Investigación Operativa

Recuperatorio del Primer Parcial – 15 de Diciembre de 2020

Ejercicio 1. *Una empresa elabora dos productos A y B en una línea de producción con tres máquinas M_1, M_2 y M_3. Cada una de ellas opera las 24 horas, cinco días a la semana (de lunes a viernes). Cada unidad de A tiene un costo de producción de \$150 y cada unidad de B, \$240. Sus precios de venta son, respectivamente, \$180 y \$297 por unidad. La duración de los procesos de producción (en minutos) en cada máquina vienen dados por la siguiente tabla:*

	M_1	M_2	M_3	M_2 o M_3
Producto A	*25*	*30*	*50*	
Producto B	*42*	*20*	*35*	*20*

Notar que A sólo requiere tres procesos de producción y B requiere cuatro. El primer proceso se realiza con M_1, el segundo con M_2, el tercero con M_3 y el cuarto proceso de producción de B puede realizarse con M_2 o con M_3. Una vez que se elige una de las dos, no se cambia a lo largo de la semana. No es necesario que los procesos de producción sean ejecutados en orden: por ejemplo, una unidad de A puede comenzar en M_2 luego pasar a M_1 y terminar en M_3. Se requiere que la producción semanal de B sea al menos el 25% de la producción semanal de A. Formular un modelo de programación lineal entera que permita conocer cuántas unidades de cada producto deben elaborarse para maximizar la ganancia semanal.

Ejercicio 2. *Uno de los departamentos de una universidad tiene un conjunto $\mathcal{D}$ de docentes con cargos de diferentes jerarquías: $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ y $\mathcal{D}_3$. Vale que $\mathcal{D} = \bigcup_{s=1}^{3} D_s$ y $D_s \cap D_r = \varnothing$ si $s \neq r$.*

El departamento tiene a su cargo J materias $m_1, \cdots, m_J$ y realizó una encuesta a los docentes solicitando que otorguen un puntaje de preferencia a cada una de ellas, de 1 a 100, siendo 100 la preferencia más alta. Por esto, se conoce p_{ij} la preferencia del docente i a dar la materia j.

(1) *Teniendo en cuenta que el departamento desea determinar qué docentes impartirán cada materia, modelar linealmente las siguientes restricciones de la asignación:*

a) cada docente debe ser asignado a exactamente una materia.

b) para cada $j = 1, \ldots, J$ y para cada $1 \leq s \leq 3$, la materia m_j requiere al menos a_{js} docentes y a lo sumo b_{js} del conjunto $\mathcal{D}_s$.

c) el promedio de los puntajes de preferencia de los docentes asignados a las materias de primer año debe ser por lo menos 68.

d) los docentes 4, 7 y 9 deben ser asignados a la misma materia.

e) si el docente 11 imparte la materia 5 entonces la docente 3 debe impartir la materia 4.

(2) *El departamento está interesado en analizar el resultado obtenido con diferentes criterios. Utilizando las variables y conjuntos definidos en el ítem 1, modelar cada una de las siguientes funciones objetivo, agregando, de ser necesario, las restricciones y variables correspondientes.*

a) Maximizar la asignación con menor preferencia.

b) *Minimizar la cantidad de docentes asignados a materias con preferencias menores que* 40*.*

Ejercicio 3. *Una compañía cervecera fabrica tres tipos de cerveza: C_1, C_2 y C_3, cuyos precios de venta por litro son, respectivamente,* \$6, \$9 *y* \$25*. La empresa está considerando empezar a producir una nueva variedad de cerveza C_4 cuyo litro se vendería por* \$48*, pero configurar las máquinas para producirla cuesta* \$8000 *semanales.*

El centro de distribución requiere que semanalmente se produzcan al menos 250 *lts. de C_1,* 375 *lts. de C_2 y* 150 *lts. de C_3. Si se decidiese producir C_4, se requerirían al menos* 275 *lts semanales. Como la empresa tiene un depósito con capacidad limitada, se puede almacenar cierta cantidad de cada tipo de cerveza: a lo sumo* 400 *lts de C_1,* 510 *lts. de C_2,* 250 *lts. de C_3 y* 0 *lts. de C_4. Si se excede esa cantidad, la empresa debe alquilar lugar en otro depósito, costándole* \$5 *por litro excedente de cada variedad de cerveza. La empresa no desea gastar más de* \$10000 *en alquiler de espacio para almacenamiento.*

Por otro lado, por cuestiones de transporte, la diferencia absoluta entre la cantidad de C_2 y C_3 producidas no debe diferir en más de 175 *lts.. Además, se pide que al menos el* 15% *de la producción total sea de C_1.*

La elaboración de cada litro de cada variedad de cerveza requiere cierta cantidad de tiempo para atravesar sus tres etapas: (1) mezcla de materia prima (2) control de calidad (3) envasado. El tiempo en horas que toma cada una de estas operaciones para cada litro de cada una de las variedades de cerveza está resumido en la siguiente tabla:

	Mezcla de materia prima	*Control de calidad*	*Envasado*
C_1	*0.1*	*0.2*	*0.1*
C_2	*0.2*	*0.35*	*0.2*
C_3	*0.7*	*0.1*	*0.2*
C_4	*0.6*	*0.5*	*0.5*

Se cuenta semanalmente con 350 *horas para mezclar materia prima,* 220 *horas para realizar control de calidad y* 265 *horas para envasar la cerveza.*

Formular un modelo de programación lineal mixta cuyo objetivo sea maximizar la ganancia semanal de la empresa. Como se vende la cerveza en botellas de distintos tamaños, la cantidad producida de cada variedad puede ser una magnitud real.

	1	2	3	4	Calificación
Nombre y apellido:					
Número de libreta:					

Investigación Operativa

Recuperatorio del Segundo Parcial – 23 de Diciembre de 2020

Ejercicio 1. *Resolver el siguiente problema de Programación Lineal utilizando el Método Big-M. Explicitar dónde se realiza el óptimo y el valor que toma la función objetivo en el mismo.*

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\text{máx} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
\textit{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 9 \\
 & & & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & = & 6 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_3 \leq 0 \quad x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}$$

Ejercicio 2. *Los siguientes diccionarios corresponden a una iteración de SIMPLEX de diferentes problemas lineales con objetivo de maximizar.*

1)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & & & 2x_2 & + & x_5 \\
x_1 & = & 2 & + & x_2 & - & x_5 \\
x_4 & = & 1 & - & x_2 & - & 2x_5 \\
\hline
z & = & 3 & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_5
\end{array}$$

2)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 2 & & & - & x_4 \\
x_3 & = & \frac{2}{3} & + & \frac{1}{2}x_2 & + & \frac{1}{4}x_4 \\
x_5 & = & 3 & + & 2x_2 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
\hline
z & = & -4 & + & \frac{1}{3}x_2 & - & x_4
\end{array}$$

3)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_2 & = & \frac{1}{2} & + & x_1 & - & 2x_3 \\
x_5 & = & 5 & - & x_1 & + & x_3 \\
x_4 & = & 1 & + & x_1 & & \\
\hline
z & = & 11 & & & - & \frac{3}{2}x_3
\end{array}$$

4)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_5 & = & \frac{3}{2} & + & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 \\
x_4 & = & 1 & - & x_2 & - & x_3 \\
x_1 & = & \frac{1}{10} & + & 2x_2 & - & \frac{4}{3}x_3 \\
\hline
z & = & & - & x_2 & - & \frac{2}{3}x_3
\end{array}$$

Indicar y justificar a qué situación corresponde cada uno de ellos:

a) Problema lineal con infinitas soluciones.
b) Problema lineal con solución única no degenerada.
c) Problema lineal no acotado.
d) Problema lineal con solución única degenerada.

Ejercicio 3. *Dado el siguiente problema de programación lineal:*

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcr}
\text{máx} & 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & + & 6x_6 & & \\
\textit{s.a.} & -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & + & 6x_6 & \leq & 4 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & - & x_6 & \leq & 3 \\
 & 3x_1 & & & & & + & x_4 & & & + & 2x_6 & \leq & 9 \\
 & \multicolumn{13}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}$$

a) Plantear el problema dual.
b) Utilizando el problema dual, mostrar que $(\frac{5}{3}, 0, \frac{7}{3}, 0, 0, \frac{4}{3})$ *es solución óptima del problema primal.*

c) Hallar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *para los cuales* $(\frac{5}{3}, 0, \frac{7}{3}, 0, 0, \frac{4}{3})$ *es solución óptima del problema con las mismas restricciones y con función objetivo:*

$$x_1 + (\alpha + \beta)x_2 - x_3 + (1 + \beta)x_4 - x_5 + 6x_6$$

Ejercicio 4. *Utilizar el algoritmo de Branch & Bound para resolver el siguiente problema de programación lineal entera, detallando cada división en subproblemas durante el algoritmo mediante el esquema de árbol visto en clase. Comenzar ramificando en* x_2 *y explicitar el método utilizado para la resolución de cada subproblema (ejemplo: método gráfico, cálculo de vértices de cada región y posteriormente evaluar en cada uno de ellos, SIMPLEX, etcétera).*

$$\begin{array}{rrcrcr}
\text{máx} & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\textit{s.a:} & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 27 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \geq & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 21 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0 \\
 & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}$$