Simplex: método de diccionarios y método matricial

Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Nazareno Faillace Mullen

A continuación, a través de un ejemplo, veremos un paralelismo entre el método de diccionarios y el método matricial para hallar la solución óptima de un modelo de Programación Lineal con Simplex. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}(m < n), c \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$, consideramos el problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ \text{s.a:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Introducimos la siguiente notación, que utilizaremos en el método matricial:

$A_{\cdot j}$	j-ésima columna de A
B	matriz básica, es decir, submatriz de A cuyas columnas definen una base de $\mathbb{R}^m$
R	submatriz de A que consiste en las columnas de A que no están en B
x_B	coordenadas de x correspondientes a las columnas de B (variables básicas)
x_R	coordenadas de x correspondientes a las columnas de R (variables no básicas)
c_B	coordenadas de c correspondientes a las variables básicas
c_R	coordenadas de c correspondientes a las variables no básicas
$\bar{c}_R$	vector de costos reducidos de las variables no básicas

Definición: dada una matriz básica B, el valor de las variables básicas viene dado por $B^{-1}b$. Si $B^{-1}b \geq 0$, decimos que B es una matriz básica factible.
Recordar: dada una matriz básica factible B, los costos reducidos de las variables no básicas se calculan de la siguiente manera:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R$$

Ahora, resolvamos un problema de Programación Lineal con Simplex, utilizando ambos métodos.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{máx} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\ & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Como siempre que querramos aplicar SIMPLEX, estandarizamos:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr} \text{máx} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & & & & & & \\ \text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & w_1 & & & & & = & 5 \\ & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & + & w_2 & & & = & 11 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & & & + & w_3 & = & 8 \\ & & & & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3} & \geq & 0 \end{array}$$

En este caso, tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos una base inicial factible

(En este caso, no es necesario aplicar Método de Dos Fases ni Método Big-M porque podemos comenzar con las slack)

Método diccionarios

Escribimos el primer diccionario despejando las variables slack

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w_1 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ w_2 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ \hline z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \end{array}$$

Método matricial

Consideramos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad x_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Calculamos los costos reducidos de las variables no básicas

Método diccionarios

En el diccionario ya están calculados los costos reducidos, son los coeficientes de las variables no básicas en el último renglón:

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Como hay costos reducidos positivos, todavía no alcanzamos un óptimo.

Método matricial

Calculamos los costos reducidos de las variables no básicas, aplicando la fórmula:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1} R = (5,4,3) - (0,0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (5,4,3)$$

Como hay costos reducidos positivos, todavía no alcanzamos un óptimo.

Seleccionamos la variable que entra a la base

Método diccionarios

Identificamos a la variable no básica con mayor costo reducido:

$$z = 5\mathbf{x_1} + 4x_2 + 3x_3$$

Entra x_1 a la base.

Método matricial

El mayor costo reducido positivo le corresponde a la variable en la primera coordenada de x_R, pues 5 es la primera coordenada de $\bar{c}_R^T$. Entonces, x_1 entra a la base.

Determinamos qué variable deja la base

Método diccionarios

Cada ecuación del diccionario acota el valor que puede tomar x_1 de manera tal que $w_i \geq 0$:

$$0 \leq w_1 = 5 - 2x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{5}{2}$$

$$0 \leq w_2 = 11 - 4x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{11}{4}$$

$$0 \leq w_3 = 8 - 3x_1 \Rightarrow x_1 \leq \frac{8}{3}$$

La cota relevante es la más restrictiva. En este caso, es la primera. Entonces, w_1 deja la base.

Método matricial

Primero, calculamos el valor de las variables básicas

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Como x_1 entra a la base, calculamos $B^{-1}A_{\cdot 1}$:

$$B^{-1}A_{\cdot 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para los j tales que $(B^{-1}A_{\cdot 1})_j > 0$, calculamos $\frac{(B^{-1}b)_j}{(B^{-1}A_{\cdot 1})_j}$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(B^{-1}b)_1}{(B^{-1}A_{\cdot 1})_1} & = & \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{(B^{-1}b)_2}{(B^{-1}A_{\cdot 1})_2} & = & \dfrac{11}{4} \\ \dfrac{(B^{-1}b)_3}{(B^{-1}A_{\cdot 1})_3} & = & \dfrac{8}{3} \end{array}$$

El mínimo de los tres es $\frac{5}{2}$, que le corresponde a la primera coordenada de $B^{-1}A_{\cdot 1}$. Por ende, la variable que sale de la base es la primera coordenada de x_B: w_1.

Pivote: se realiza el cambio en la base

Método diccionarios

Debemos reescribir el nuevo diccionario, donde x_1 es básica y w_1 es no básica. De la primera ecuación del diccionario obtenemos que:

$$w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_1$$

Luego, reemplazamos x_1 por la igualdad de arriba en las ecuaciones 2 y 3 y en z:

$$w_2 = 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_1\right) - x_2 - 2x_3 = 1 + 5x_2 + 2w_1$$

$$w_3 = 8 - 3\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_1\right) - 4x_2 - 2x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}w_1$$

$$z = 5\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}w_1\right) + 4x_2 + 3x_3 = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}w_1$$

Nuestro nuevo diccionario queda:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}w_1 \\ w_2 & = & 1 & + & 5x_2 & & & + & 2w_1 \\ w_3 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}w_1 \\ \hline z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{5}{2}w_1 \end{array}$$

Método matricial

En B, la columna de A correspondiente a x_1 reemplaza a la columna correspondiente a w_1, dando lugar a:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad x_R = \begin{pmatrix} w_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Calculamos los costos reducidos de las variables no básicas

Método diccionarios

En el diccionario ya están calculados los costos reducidos, son los coeficientes de las variables no básicas en el último renglón:

$$z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}w_1$$

Como hay costos reducidos positivos, todavía no alcanzamos un óptimo.

Método matricial

Calculamos los costos reducidos de las variables no básicas, aplicando la fórmula:

$$\bar{c}_R^T = (0,4,3) - (5,0,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Como hay costos reducidos positivos, todavía no alcanzamos un óptimo.

Seleccionamos la variable que entra a la base

Método diccionarios

Identificamos a la variable no básica con mayor costo reducido:

$$z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}w_1$$

Entra x_3 a la base.

Método matricial

El mayor costo reducido positivo le corresponde a la variable en la tercera coordenada de x_R, pues $\frac{1}{2}$ es la tercera coordenada de $\bar{c}_R^T$. Entonces, x_3 entra a la base.

Determinamos qué variable deja la base

Método diccionarios

Cada ecuación del diccionario acota el valor que puede tomar x_3 de manera tal que $x_1, w_2, w_3 \geq 0$:

$$0 \leq x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_3 \Rightarrow x_3 \leq 5$$

$$0 \leq w_2 = 1 + 0x_3 \Rightarrow \text{no se restringe el crecimiento de } x_3$$

$$0 \leq w_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 \Rightarrow \mathbf{x_3 \leq 1}$$

Como la tercera es la condición más restrictiva, x_3 entra a la base y w_3 sale de la base.

Método matricial

Primero, calculamos el valor de las variables básicas

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como x_3 entra a la base, calculamos $B^{-1}A_{\cdot 3}$:

$$B^{-1}A_{\cdot 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para los j tales que $(B^{-1}A_{\cdot 3})_j > 0$, calculamos $\frac{(B^{-1}b)_j}{(B^{-1}A_{\cdot 3})_j}$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(B^{-1}b)_1}{(B^{-1}A_{\cdot 3})_1} & = & 5 \\ \dfrac{(B^{-1}b)_3}{(B^{-1}A_{\cdot 3})_3} & = & 1 \end{array}$$

El mínimo de los dos es 1, que le corresponde a la tercera coordenada de $B^{-1}A_{\cdot 3}$. Por ende, la variable que sale de la base es la tercera coordenada de x_B: w_3.

Pivote: se realiza el cambio en la base

Método diccionarios

Debemos reescribir el nuevo diccionario, donde x_3 es básica y w_3 es no básica. De la tercera ecuación, teníamos que:

$$w_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}w_1 \Rightarrow x_3 = 1 + x_2 + 3w_1 - 2w_3$$

Reemplazando x_3 por esa expresión en las demás ecuaciones, nos queda el siguiente diccionario:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_3 & = & 1 & + & x_2 & + & 3w_1 & - & 2w_3 \\ x_1 & = & 2 & - & 2x_2 & - & 2w_1 & + & w_3 \\ w_2 & = & 1 & + & 5x_2 & + & 2w_1 & & \\ \hline z & = & 13 & - & 3x_2 & - & w_1 & - & w_3 \end{array}$$

Método matricial

En B, la columna de A correspondiente a x_3 reemplaza a la columna correspondiente a w_3, dando lugar a:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ w_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_R = \begin{pmatrix} w_1 \\ x_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Calculamos los costos reducidos de las variables no básicas

Método diccionarios

En el diccionario ya están calculados los costos reducidos, son los coeficientes de las variables no básicas en el último renglón:

$$z = 13 + (-3)x_2 + (-1)w_1 + (-1)w_3$$

Como no hay costos reducidos positivos, hemos alcanzado un óptimo :)

Método matricial

Calculamos los costos reducidos de las variables no básicas, aplicando la fórmula:

$$\bar{c}_R^T = (0,4,0) - (5,0,3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (-1,-3,-1)$$

Como no hay costos reducidos positivos, hemos alcanzado un óptimo :)

Valor de las variables básicas y la f.o. en el óptimo

Método diccionarios

Podemos obtener esta información a partir de nuestro último diccionario.
Valor de las variables básicas en el óptimo:

$$x_1 = 2 \quad x_3 = 1 \quad w_2 = 1$$

Valor de la función objetivo en el óptimo: 13

Método matricial

Calculamos el valor de las variables básicas

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, en el óptimo:

$$x_1 = 2 \quad x_3 = 1 \quad w_2 = 1$$

Por otro lado, para calcular el valor de la f.o.:

$$z = c_B^T B^{-1} b = (5,0,3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 13$$