

Parte II: dinámica con rozamiento

- ⑨ En una situación donde una fuerza F es aplicada horizontalmente sobre un cuerpo que se desliza sobre una superficie con coeficiente de rozamiento dinámico μ_d ¿cómo se modifica la ecuación diferencial del problema 1(a)? ¿y las soluciones de $x(t)$ y $v(t)$?

- ① La segunda ley de Newton expresa que la aceleración de un cuerpo depende linealmente de la fuerza neta que actúa sobre él, siendo la masa la constante de proporcionalidad.

- (a) Escriba este concepto en forma de ecuación diferencial para la posición (x) en el caso de una fuerza constante en el tiempo.
- (b) Re-escribala ahora como una ecuación diferencial para la velocidad (v). Resuelva ésta ecuación, encontrando una solución $v(t)$. Considere la condición inicial $v(t=0) = v_0$.
- (c) Piense ahora cómo encontrar la expresión para $x(t)$ si $x(t=0) = x_0$.

a) Tenía $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$

y ahora $\vec{F} - \mu_d \cdot m \cdot g = m \cdot \vec{a}$

Recordar

$$\vec{F} - \mu_d \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g$$

b) $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g$

Opero con diferenciales:

$$\int_{v_0}^v 1 \cdot dv = \int_{t_0}^t \underbrace{\left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g \right)}_{\text{no depende de } t} dt$$

$$v \Big|_{v_0}^v = \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t \Big|_{t_0=0}^t$$

$$v - v_0 = \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t$$

Reorder

$$v = \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t + v_0$$

c) Como $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t + v_0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t + v_0 dt$$

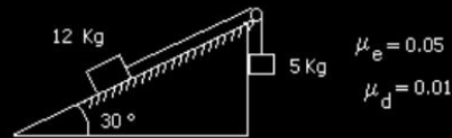
$$x - x_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t^2 + v_0 \cdot t \Big|_{t_0=0}^t$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

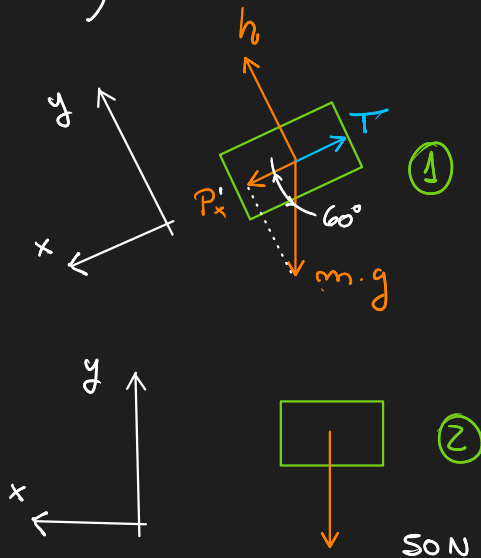
$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \left(\frac{41}{3} - \mu_d \cdot g \right) \cdot t^2$$

Reorder

- 10) Dado el sistema indicado por la figura: (a) diga si puede permanecer en equilibrio; (b) calcule su aceleración cuando entra en movimiento.



a)



$$\sin 60^\circ = \frac{P_y'}{m \cdot g}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{P_x'}{m \cdot g}$$

$$P_x' = \frac{m \cdot g}{2}$$

$$P_x' = \frac{12 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}$$

$$P_x' = 60 \text{ N}$$

Planteo ecuaciones a partir de $F = m \cdot a$

$$\textcircled{1} \hat{x}: P_x^1 - T - F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1$$

$$\hat{y}: -P_y^1 + N = m_1 \cdot \ddot{y}_1 = 0 \quad \text{Para este sistema de ref.}$$

$$\textcircled{2} \hat{x}: \text{No hay variación en } x$$

$$\hat{y}: -P^2 + T = m_2 \cdot \ddot{y}_2$$

Para que estén en equilibrio, ambas aceleraciones deben ser cero:

$$\text{Si } \ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_x^1 - T - F_R = 0 & \textcircled{I} \\ -P^2 + T = 0 & \textcircled{II} \end{cases}$$

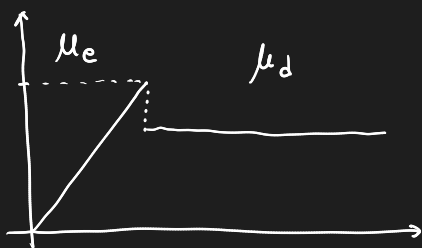
$$\Rightarrow \textcircled{\text{II}} \quad T = P^2 \Rightarrow T = 50 \text{ N}$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad 60 \text{ N} - 50 \text{ N} - F_R = 0$$

$$10 \text{ N} - F_R = 0$$

$$F_R = 10 \text{ N}$$

Pero como estoy asumiendo que el sistema no se mueve, entonces puedo usar el μ estático para comprobar que el módulo de la F de rozamiento es 10 N



Se':

$$|F_{\text{roz max}}| = \mu_e \cdot |\vec{N}_1|$$

$$\Rightarrow |F_R| \leq \mu_e \cdot |\vec{N}_1|$$

$$\leq 0,05 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin 60^\circ$$

$$\leq 0,05 \cdot 120 \text{ N} \cdot 0,866$$

$$|F_R| \leq 5,196 \text{ N}$$

Pero tenés:

$$|F_R| = 10 \text{ N} \quad \underline{\text{Abs}}$$

∴ No permanece en equilibrio,

b) $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 \leftarrow$ verifican el mismo sentido dado los sistemas de referencia elegidos



$$\begin{cases} P_x^1 - T - F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1 \\ -P^2 + T = m_2 \cdot \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{P_x^1 - T - F_R}{m_1} = \frac{T - P^2}{m_2}$$

Como se mueve:

$$|F_R| = \mu_d |N|$$

$$\frac{60\text{ N} - T - 0,01 \cdot 120\text{ N} \cdot 0,866}{12\text{ kg}} = \frac{T - 50\text{ N}}{5\text{ kg}}$$

$$-5\text{ kg} \cdot T + 294,804\text{ kg} \cdot \text{N} = 12\text{ kg} \cdot T - 600\text{ kg} \cdot \text{N}$$

$$294,804\text{ kg} \cdot \text{N} + 600\text{ kg} \cdot \text{N} = 12\text{ kg} \cdot T + 5\text{ kg} \cdot T$$

$$894,804\text{ kg} \cdot \text{N} = 17\text{ kg} \cdot T$$

$$T = 52,636\text{ N}$$

$$\Rightarrow T - P^2 = m_2 \cdot \ddot{y}_2$$

$$\frac{52,636\text{ N} - 50\text{ N}}{5\text{ kg}} = \ddot{y}_2$$

$$\ddot{y}_z = 0,53 \frac{3}{s^2}$$

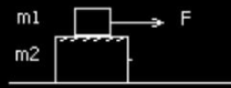
- 11) Un bloque de 3kg esta apoyado sobre otro bloque de 5kg como indica la figura. Considere que no hay fuerza de rozamiento entre el bloque de 5kg y la superficie horizontal donde se apoya. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre los dos bloques son 0.2 y 0.1 respectivamente.

- ¿Cuál es la fuerza máxima que puede aplicarse al bloque de 5kg para arrastrar a los dos cuerpos sin que deslice un bloque sobre el otro?.
- Halle la aceleración del sistema cuando se aplica dicha fuerza.
- Se aplica ahora al cuerpo de 5kg una fuerza igual al doble de la calculada en (a). Halle la aceleración de cada bloque. ¿Hacia donde se cae el bloque de arriba?
- Idem (a), pero ahora aplicando la fuerza F sobre el bloque de 3kg. Si se aplica sobre el bloque de 3kg una fuerza igual a la mitad de la calculada en (c), calcule la fuerza de rozamiento entre bloques.

a) y b)



c) y d)



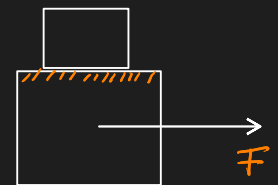
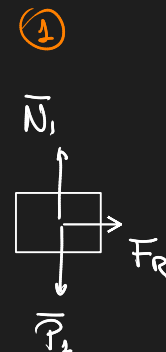
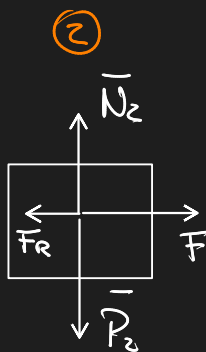
$$m1 = 3 \text{ kg}$$

$$m2 = 5 \text{ kg}$$

$$\mu_e = 0,2$$

$$\mu_d = 0,1$$

a)



$$\text{Planteo } F = m \cdot a$$

$$\textcircled{1} \quad F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1$$

$$\textcircled{2} \quad F - F_R = m_2 \cdot \ddot{x}_2$$

Si ambos se mueven al mismo tiempo, tienen la misma aceleración, entonces:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$$

$$\Rightarrow \frac{F_R}{m_1} = \frac{F - F_R}{m_2}$$

$$m_2 \cdot F_R = m_1 \cdot F - m_1 \cdot F_R$$

$$F_R \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot F$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{F}{F_R}$$

$$\frac{3\text{kg} + 5\text{kg}}{3\text{kg}} = \frac{8}{3} \Rightarrow F = \frac{8}{3} \cdot F_R$$

Como quiero saber la fuerza máxima que puedo realizar, necesito maximizar F , pero F_{roz} está acotada por la fuerza de rozamiento estática máxima:

$$|F_{\text{Roz Max}}| = \mu_e \cdot |\vec{N}_\perp|$$

$$= 0,2 \cdot 30\text{ N}$$

$$|F_{\text{Roz Max}}| = 6\text{ N}$$

$$\Rightarrow \text{Como } F = \frac{8}{3} \cdot F_R$$

$$F_{\text{max}} = \frac{8}{3} \cdot F_{\text{Roz Max}}$$

$$F_{\text{max}} = \frac{8}{3} \cdot 6\text{ N}$$

$$F_{\text{max}} = 16\text{ N}$$

$$b) F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1$$

$$\frac{6N}{3 \text{ kg}} = \ddot{x}_1$$

$$\boxed{\ddot{x}_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

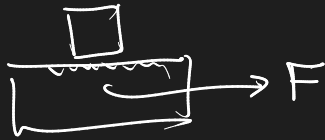
$$F - F_R = m_2 \cdot \ddot{x}_2$$

$$16N - 6N = 5N \cdot \ddot{x}_2$$

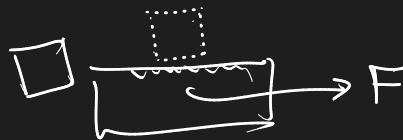
$$\ddot{x}_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

✓ También
Verifica,

$$c) F = 32N$$



Se cae por la izquierda, por más que ambos
avancen hacia la derecha



①

$$F_R^1 = m_1 \cdot \ddot{x}_1$$

es dinámica!

$$F_R^1 = \mu_d \cdot |\vec{N}|$$

$$= 0,1 \cdot 30N$$

$$= 3N$$

$$\Rightarrow 3N = 3 \text{ kg} \cdot \ddot{x}_1$$

$$\boxed{\ddot{x}_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$② F - F_R = m_2 \cdot \ddot{x}_2$$

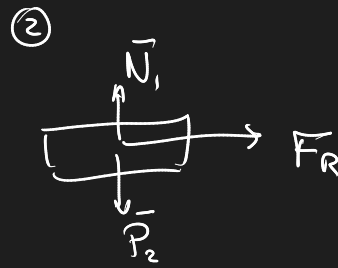
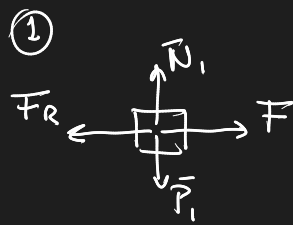
del ①!

$$32N - F_R^1 = 5 \text{ kg} \cdot \ddot{x}_2$$

$$\frac{32N - 3N}{5 \text{ kg}} = \ddot{x}_2$$

$$\boxed{\ddot{x}_2 = 5,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

d)



$$\textcircled{1} \quad F - F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1$$

$$\textcircled{2} \quad F_R = m_2 \cdot \ddot{x}_2$$

↙ de c)

$$F = \frac{32 \text{ N}}{2} = 16 \text{ N}$$

$$\begin{cases} 16 \text{ N} - F_R = 3 \text{ kg} \cdot \ddot{x}_1 \\ F_R = 5 \text{ kg} \cdot \ddot{x}_2 \end{cases}$$

Si ambos bloques se mueven con la misma aceleración:

$$\frac{16 \text{ N} - F_R}{3 \text{ kg}} = \frac{F_R}{5 \text{ kg}}$$

$$80 \text{ kg} \cdot \text{N} - 5 \text{ kg} \cdot F_R = 3 \text{ kg} \cdot F_R$$

$$80 \text{ kg} \cdot \text{N} = 3 \text{ kg} \cdot F_R + 5 \text{ kg} \cdot F_R$$

$$10 \text{ N} = F_R$$

Pero!

$$F_{\text{fric}} = \mu_e \cdot |\vec{N}_1|$$

$$= 0,2 \cdot 30 \text{ N}$$

$$F_{\text{fric}} = 6 \text{ N} \quad \underline{\text{Abs!}} \quad F_R \text{ no puede ser } 10 \text{ N}$$

⇒ Ambas aceleraciones son diferentes:

$$\Rightarrow F_{R02} = \mu_d \cdot |\vec{N}|$$
$$= 0,1 \cdot 30 \text{ N}$$

$$F_{R02} = 3 \text{ N}$$

$$\begin{cases} 16 \text{ N} - F_R = 3 \text{ kg} \cdot \ddot{X}_1 \\ F_R = 5 \text{ kg} \cdot \ddot{X}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 16 \text{ N} - 3 \text{ N} = 3 \text{ kg} \cdot \ddot{X}_1 \\ 3 \text{ N} = 5 \text{ kg} \cdot \ddot{X}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{X}_1 = \frac{13 \text{ N}}{3 \text{ kg}}$$

$$\ddot{X}_1 = 4,33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

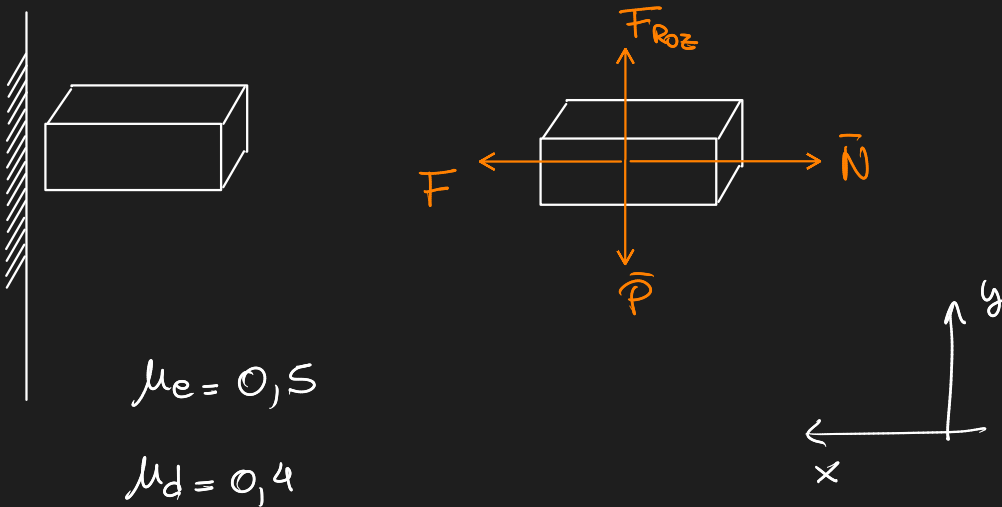
$$\Rightarrow \ddot{X}_2 = \frac{3 \text{ N}}{5 \text{ kg}}$$

$$\ddot{X}_2 = 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Solo pedía:

$$F_{R02} = 3 \text{ N}$$

- 12) Una fuerza horizontal empuja a un ladrillo de $m = 2,5\text{kg}$ contra una pared vertical. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el ladrillo y la pared son 0,5 y 0,4 respectivamente. Calcule el valor mínimo horizontal de esa fuerza para sostener el ladrillo quieto.



$$\hat{y}) \quad F_{roz} - \vec{P} = m \cdot \ddot{x}$$

Quiero

$$F_{roz} - \vec{P} = 0$$

$$\Rightarrow F_{roz} = \vec{P} = 25\text{ N}$$

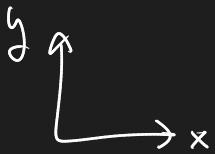
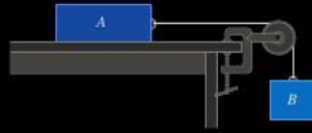
$$F_{roz} M_{zx} = \mu_e \cdot |F|$$

$$25\text{ N} = 0,5 \cdot |F|$$

$$|F| = 50\text{ N}$$

13) Considere el sistema de la siguiente figura. El bloque A pesa 45N y el bloque B pesa 25N. Una vez que el bloque B se pone en movimiento hacia abajo, desciende con velocidad constante.

- Calcule el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque A y la superficie de la mesa.
- Mientras el bloque B esta descendiendo, un gato, que también pesa 45N, salta sobre el bloque A. ¿que aceleración (magnitud y dirección) tendrá ahora el sistema?



$$\textcircled{A} \quad \hat{x} : T - F_{Roz} = m_A \cdot \ddot{x}_A$$

$$T - F_{Roz} \stackrel{MRU}{\downarrow} = 0$$

$$\textcircled{B} \quad \hat{y} : T - \overline{P}_B = m_B \cdot \ddot{x}_B$$

$$T - \overline{P}_B \stackrel{MRU}{\downarrow} = 0$$

$$\begin{cases} T = F_{Roz} \\ T = \overline{P}_B \end{cases} \Rightarrow F_{Roz} = \overline{P}_B$$

$$F_{Roz} = 25N$$

Como en el caso dinámico:

$$F_{Roz} = \mu_d \cdot |\overline{N}_A|$$

$$25N = \mu_d \cdot 45N \Rightarrow \mu_d = 0,56$$

b) Salto el gato 

$$\textcircled{A} \quad \hat{x} : T - F_{Roz} = (m_A + m_G) \cdot \ddot{X}_A$$

$$T - F_{Roz} = 9 \text{ kg} \cdot \ddot{X}_A$$

$$\textcircled{B} \quad \hat{y} : T - \bar{P}_B = m_B \cdot \ddot{X}_B$$

$$T - 25 \text{ N} = 2,5 \text{ kg} \cdot \ddot{X}_B$$

El sistema va a tender a frenarse cuando salte el gato, ahora A pesa el doble:

$$\begin{aligned} F_{Roz} &= \mu_d \cdot |\bar{N}_{A+G}| \\ &= 0,56 \cdot 90 \text{ N} \end{aligned}$$

$$F_{Roz} = 50,4 \text{ N}$$

$$\frac{T - F_{Roz}}{9 \text{ kg}} = \frac{T - 25 \text{ N}}{2,5 \text{ kg}}$$

$$\begin{aligned} 2,5 \text{ kg} \cdot T - \underbrace{2,5 \text{ kg} \cdot 50,4 \text{ N}}_{126 \text{ kg} \cdot \text{N}} &= 9 \text{ kg} \cdot T - \underbrace{9 \text{ kg} \cdot 25 \text{ N}}_{-225} \\ -6,5 \text{ kg} \cdot T &= -99 \text{ kg} \cdot \text{N} \end{aligned}$$

$$T = 15,23 \text{ N}$$

Como

$$T - 25N = 2,5 \text{ kg} \cdot \ddot{X}_B$$

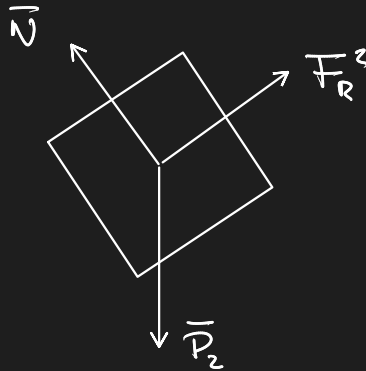
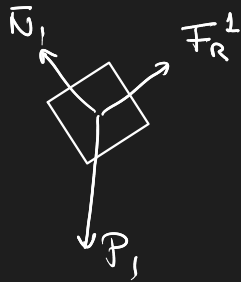
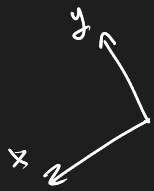
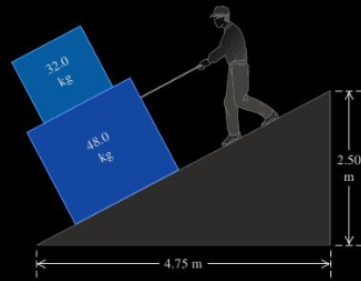
$$\ddot{X}_B = \ddot{X}_A = \frac{T - 25N}{2,5 \text{ k}}$$

Me quedó Negativo!

?

$$\ddot{X} =$$

- 14) Usted está bajando dos cajas, una encima de la otra, por la rampa que se muestra en la figura, tirando de una cuerda paralela a la superficie de la rampa. Ambas cajas se mueven juntas a velocidad constante de 15 cm/s . El coeficiente de rozamiento dinámico entre la rampa y la caja inferior es $\mu_d = 0,444$, en tanto que el coeficiente de rozamiento estático entre ambas cajas es $\mu_e = 0,8$. Calcule la fuerza que deberá ejercer para lograr esto y cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción sobre la caja superior.



Rehacer;

$$\textcircled{2} \quad \hat{x} : (P_x^1 + P_x^2) - F_R^2 - T = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}$$

$$\text{Como HRU : } \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow (P_x^1 + P_x^2) - F_R^2 - T = 0$$

$$T = P_x^1 + P_x^2 - F_R^2$$

$$F_R^2 \leq \mu_d \cdot |320 \text{ N} + 480 \text{ N}|$$

$$F_R^2 \leq 0,444 \cdot 800 \text{ N}$$

$$F_R^2 \leq 355,2 \text{ N}$$

