Parte II: dinámica con rozamiento

(9) En una situación donde una fuerza F es aplicada horizontalmente sobre un cuerpo que se desliza sobre una superficie con coeficiente de rozamiento dinámico μ_d ¿cómo se modifica la ecuación diferencial del problema 1(a)? ¿y las soluciones de $x(t)$ y $v(t)$?

(1) La segunda ley de Newton expresa que la aceleración de un cuerpo depende linealmente de la fuerza neta que actúa sobre él, siendo la masa la constante de proporcionalidad.

(a) Escriba este concepto en forma de ecuación diferencial para la posición (x) en el caso de una fuerza constante en el tiempo.

(b) Re-escríbala ahora como una ecuación diferencial para la velocidad (v). Resuelva ésta ecuación, encontrando una solución $v(t)$. Considere la condición inicial $v(t=0) = v_0$.

(c) Piense ahora cómo encontrar la expresión para $x(t)$ si $x(t=0) = x_0$.

a) Tenía $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$

y ahora $\boxed{\vec{F} - \mu_d \cdot m \cdot g = m \cdot \vec{a}}$ Recordar

$$\vec{F} - \mu_d \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g$$

b) $$\frac{d v(t)}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g$$

Opero con diferenciales:

$$\int_{v_0}^{v} 1 \cdot dv = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right)}_{\text{no depende de } t} dt$$

$$v \Big|_{v_0}^{v} = \left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t \Big|_{t_0=0}^{t}$$

$$v - v_0 = \left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t$$

$$\boxed{v = \left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t + v_0}$$

Recordar

c) Como $v(t) = \dfrac{d\,x(t)}{dt}$

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = \left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t + v_0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} 1 \, dx = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t + v_0 \, dt$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t^2 + v_0 \cdot t \Big|_{t_0=0}^{t}$$

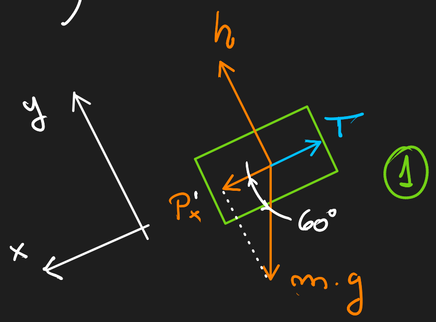
$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{F}}{m} - \mu_d \cdot g\right) \cdot t^2}$$

Recordar

(10) Dado el sistema indicado por la figura: (a) diga si puede permanecer en equilibrio; (b) calcule su aceleración cuando entra en movimiento.

a)

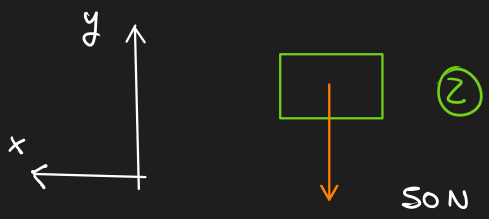


$$\sin 60° = \frac{P_y^1}{m.g} \qquad \cos 60° = \frac{P_x^1}{m.g}$$

$$P_x^1 = \frac{m.g}{2}$$

$$P_x^1 = \frac{12\,kg.\ 10\,\frac{m}{s^2}}{2}$$

$$P_x^1 = 60\ N$$



Planteo ecuaciones a partir de $F = m.a$

(1) $\hat{x}: \quad P_x^1 - T - F_R = m_1 . \ddot{x}_1$

$\hat{y}: \quad -P_y^1 + N = m_1 . \ddot{y}_1 = 0$ Para este sistema de ref.

(2) $\hat{x}:$ No hay variación en x

$\hat{y}: \quad -P^2 + T = m_2 . \ddot{y}_2$

Para que estén en equilibrio, ambas aceleraciones deben ser cero:

Si $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_x^1 - T - F_R = 0 & \text{(I)} \\ -P^2 + T = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

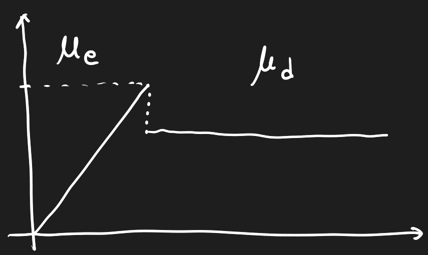
$\Rightarrow$ II $\quad T = P^2 \Rightarrow T = 50N$

I $\quad 60N - 50N - F_R = 0$

$$10N - F_R = 0$$

$$F_R = 10N$$

Pero como estoy asumiendo que el sistema no se mueve, entonces puedo usar el mu estático para comprobar que el módulo de la F de rozamiento es 10N



Sé:

$$|F_{Roz\,Max}| = \mu_e \cdot |\bar{N}_1|$$

$$\Rightarrow |F_R| \leq \mu_e \cdot |\bar{N}_1|$$

$$\leq 0{,}05 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin 60°$$

$$\leq 0{,}05 \cdot 120N \cdot 0{,}866$$

$$|F_R| \leq 5{,}196\ N$$

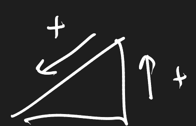
Pero tenía:

$$|F_R| = 10\ N$$

Abs

$\therefore$ NO permanece en equilibrio.

b) $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 \leftarrow$ verifican el mismo sentido dado los sistemas de referencia elegidos



$$\begin{cases} P_x^1 - T - F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1 \\ -P^2 + T = m_2 \cdot \ddot{y}_2 \\ \ddot{x}_1 = \ddot{y}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_x^1 - T - F_R}{m_1} = \frac{T - P^2}{m_2}$$

Como se mueve:

$$|F_R| = \mu_d \, |\bar{N}|$$

$$\frac{60N - T - 0{,}01 \cdot 120N \cdot 0{,}866}{12\,kg} = \frac{T - 50N}{5\,kg}$$

$$-5\,kg \cdot T + 294{,}804\,kg \cdot N = 12\,kg \cdot T - 600\,kg \cdot N$$

$$294{,}804\,kg \cdot N + 600\,kg \cdot N = 12\,kg \cdot T + 5\,kg \cdot T$$

$$894{,}804\,kg \cdot N = 17\,kg \cdot T$$

$$T = 52{,}636\,N$$

$$\Rightarrow \quad T - P^2 = m_2 \cdot \ddot{y}_2$$

$$\frac{52{,}636\,N - 50N}{5\,kg} = \ddot{y}_2$$

$$\boxed{\ddot{y}_2 = 0{,}53 \ \frac{m}{s^2}}$$

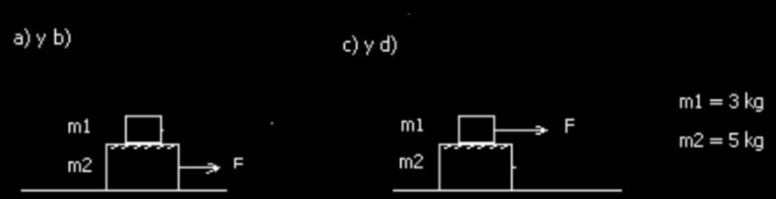
11. Un bloque de 3kg esta apoyado sobre otro bloque de 5kg como indica la figura. Considere que no hay fuerza de rozamiento entre el bloque de 5kg y la superficie horizontal donde se apoya. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre los dos bloques son 0.2 y 0.1 respectivamente.

(a) ¿Cuál es la fuerza máxima que puede aplicarse al bloque de 5kg para arrastrar a los dos cuerpos sin que deslice un bloque sobre el otro?.

(b) Halle la aceleración del sistema cuando se aplica dicha fuerza.

(c) Se aplica ahora al cuerpo de 5kg una fuerza igual al doble de la calculada en (a). Halle la aceleración de cada bloque. ¿Hacia donde se cae el bloque de arriba?

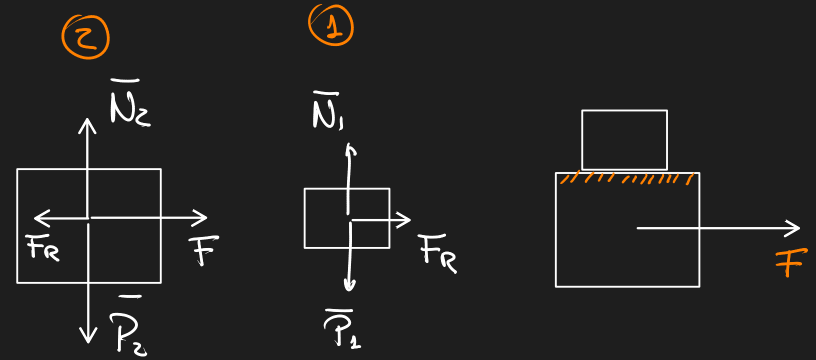
(d) Idem (a), pero ahora aplicando la fuerza F sobre el bloque de 3kg. Si se aplica sobre el bloque de 3kg una fuerza igual a la mitad de la calculada en (c), calcule la fuerza de rozamiento entre bloques.



$\mu_e = 0{,}2$

$\mu_d = 0{,}1$

a)



Planteo $F = m.a$

① $F_R = m_1 . \ddot{x}_1$

② $F - F_R = m_2 . \ddot{x}_2$

Si ambos se mueven al mismo tiempo, tienen la misma aceleración, entonces:

$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$

$$\Rightarrow \frac{F_R}{m_1} = \frac{F - F_R}{m_2}$$

$$m_2 \cdot F_R = m_1 \cdot F - m_1 \cdot F_R$$

$$F_R \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot F$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{F}{F_R}$$

$$\frac{3kg + 5kg}{3kg} = \frac{8}{3} \Rightarrow F = \frac{8}{3} \cdot F_R$$

Como quiero saber la fuerza máxima que puedo realizar, necesito maximizar F, pero F_roz está acotada por la fuerza de rozamiento estática máxima:

$$|F_{Roz\,Max}| = \mu_e \cdot |\bar{N}_1|$$

$$= 0{,}2 \cdot 30\,N$$

$$|F_{Roz\,Max}| = 6\,N$$

$\Rightarrow$ Como $F = \frac{8}{3} \cdot F_R$

$$F_{max} = \frac{8}{3} \cdot F_{Roz\,Max}$$

$$F_{max} = \frac{8}{3} \cdot 6\,N$$

$$\boxed{F_{max} = 16\,N}$$

b) $F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1$

$$\frac{6N}{3\,kg} = \ddot{x}_1$$

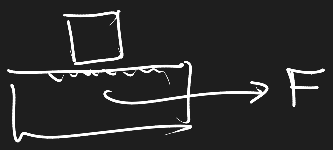
$$\boxed{\ddot{x}_1 = 2\ \frac{m}{s^2}}$$

$F - F_R = m_2 \cdot \ddot{x}_2$

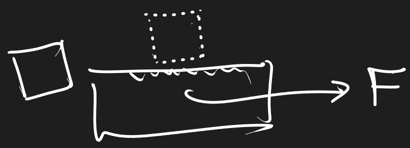
$16N - 6N = 5N \cdot \ddot{x}_2$

$\ddot{x}_2 = 2\ \frac{m}{s^2}$ ✓ También verifica.

c) $F = 32N$



Se cae por la izquierda, por más que ambos avancen hacia la derecha



①

$F_R^1 = m_1 \cdot \ddot{x}_1$

es dinámica!

$F_R^1 = \mu_d \cdot |\bar{N}_1|$

$= 0{,}1 \cdot 30N$

$= 3N$

$\Rightarrow 3N = 3kg \cdot \ddot{x}_1$

$$\boxed{\ddot{x}_1 = 1\ \frac{m}{s^2}}$$

② $F - F_R = m_2 \cdot \ddot{x}_2$

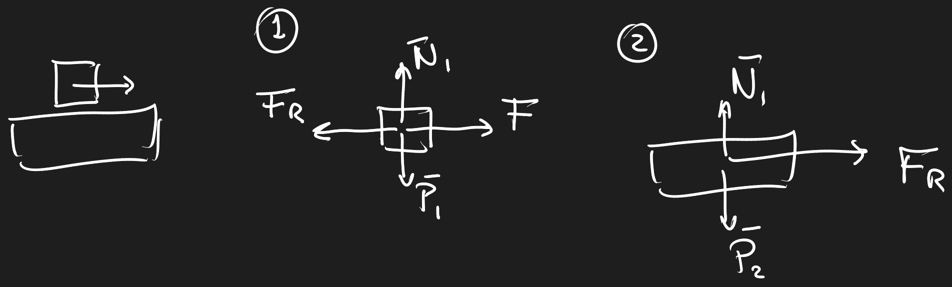
del ①!

$32N - F_R^1 = 5kg \cdot \ddot{x}_2$

$$\frac{32N - 3N}{5kg} = \ddot{x}_2$$

$$\boxed{\ddot{x}_2 = 5{,}8\ \frac{m}{s^2}}$$

d)



① $F - F_R = m_1 \cdot \ddot{x}_1$

② $F_R = m_2 \cdot \ddot{x}_2$

$$F \overset{\text{de c)}}{=} \frac{32\,N}{2} = 16\,N$$

$$\begin{cases} 16\,N - F_R = 3\,kg \cdot \ddot{x}_1 \\ F_R = 5\,kg \cdot \ddot{x}_2 \end{cases}$$

Si ambos bloques se mueven con la misma aceleración:

$$\frac{16\,N - F_R}{3\,kg} = \frac{F_R}{5\,kg}$$

$$80\,kg \cdot N - 5\,kg \cdot F_R = 3\,kg \cdot F_R$$

$$80\,kg \cdot N = 3\,kg \cdot F_R + 5\,kg \cdot F_R$$

$$10\,N = F_R$$

Pero!

$$F_{R\,Max} = \mu_e \cdot |\bar{N}_1|$$

$$= 0{,}2 \cdot 30\,N$$

$$F_{R\,Max} = 6\,N$$ Abs! F_R no puede ser $10\,N$

$\Rightarrow$ Ambas aceleraciones son diferentes:

$$\Rightarrow F_{Roz} = \mu_d \cdot |\vec{N}|$$

$$= 0{,}1 \cdot 30N$$

$$\boxed{F_{Roz} = 3N}$$

$$\begin{cases} 16N - F_R = 3kg \cdot \ddot{x}_1 \\ F_R = 5kg \cdot \ddot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16N - 3N = 3kg \cdot \ddot{x}_1 \\ 3N = 5kg \cdot \ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{13N}{3kg}$$

$$\boxed{\ddot{x}_1 = 4{,}33 \, \frac{m}{s^2}}$$

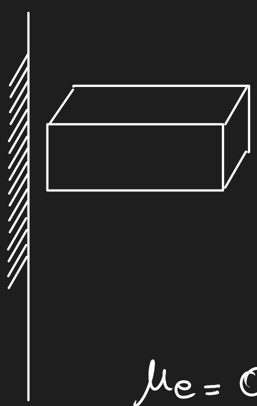
$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{3N}{5kg}$$

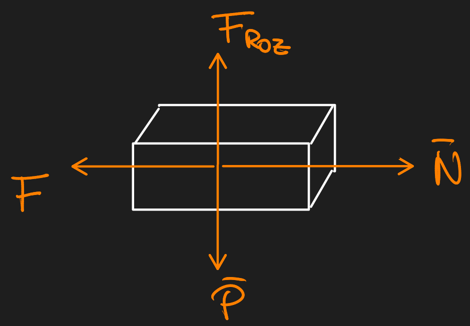
$$\boxed{\ddot{x}_2 = 0{,}6 \, \frac{m}{s^2}}$$

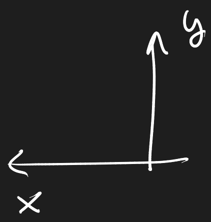
Solo pedía:

$$\boxed{F_{Roz} = 3N}$$

(12) Una fuerza horizontal empuja a un ladrillo de $m = 2,5\text{kg}$ contra una pared vertical. Los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el ladrillo y la pared son 0,5 y 0,4 respectivamente. Calcule el valor mínimo horizontal de esa fuerza para sostener el ladrillo quieto.







$\mu_e = 0,5$

$\mu_d = 0,4$

$\hat{y}) \quad F_{Roz} - \bar{P} = m \cdot \ddot{x}$

Quiero

$F_{Roz} - \bar{P} = 0$

$\Rightarrow F_{Roz} = \bar{P} = 25\text{ N}$

$F_{Roz\,Max} = \mu_e \cdot |F|$

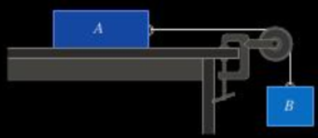
$25\text{N} = 0,5 \cdot |F|$

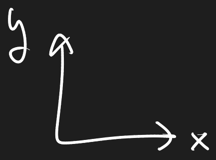
$$\boxed{|F| = 50\text{ N}}$$

13. Considere el sistema de la siguiente figura. El bloque A pesa 45N y el bloque B pesa 25N. Una vez que el bloque B se pone en movimiento hacia abajo, desciende con velocidad constante.

(a) Calcule el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque A y la superficie de la mesa.

(b) Mientras el bloque B esta descendiendo, un gato, que también pesa 45N, salta sobre el bloque A. ¿que aceleración (magnitud y dirección) tendrá ahora el sistema?





A $\hat{x}$: $T - F_{Roz} = m_A \cdot \ddot{x}_A$

$$T - F_{Roz} \overset{\text{MRU}}{=} 0$$

B $\hat{y}$: $T - \bar{P}_B = m_B \cdot \ddot{x}_B$

$$T - \bar{P}_B \overset{\text{MRU}}{=} 0$$

$$\begin{cases} T = F_{Roz} \\ T = \bar{P}_B \end{cases} \Rightarrow F_{Roz} = \bar{P}_B$$

$$F_{Roz} = 25N$$

Como en el caso dinámico:

$$F_{Roz} = \mu_d \cdot |\bar{N}_A|$$

$$25N = \mu_d \cdot 45N \Rightarrow \boxed{\mu_d = 0{,}56}$$

b) Salta el gato

$$Ⓐ \quad \hat{x}: \quad T - F_{Roz} = (m_A + m_G) \cdot \ddot{x}_A$$

$$T - F_{Roz} = 9\,kg \cdot \ddot{x}_A$$

$$Ⓑ \quad \hat{y}: \quad T - \bar{P}_B = m_B \cdot \ddot{x}_B$$

$$T - 25N = 2{,}5\,kg \cdot \ddot{x}_B$$

El sistema va a tender a frenarse cuando salte el gato, ahora A pesa el doble:

$$F_{Roz} = \mu_d \cdot |\bar{N}_{A+G}|$$

$$= 0{,}56 \cdot 90\,N$$

$$F_{Roz} = 50{,}4\,N$$

$$\frac{T - F_{Roz}}{9\,kg} = \frac{T - 25N}{2{,}5\,kg}$$

$$2{,}5kg \cdot T - \underbrace{2{,}5kg \cdot 50{,}4N}_{126\,kg.N} = 9\,kg \cdot T - \underbrace{9\,kg \cdot 25N}_{-225}$$

$$-6{,}5\,kg \cdot T = -99\,kg \cdot N$$

$$T = 15{,}23\,N$$

Como

$$T - 25N = 2{,}5\,kg \cdot \ddot{x}_B$$

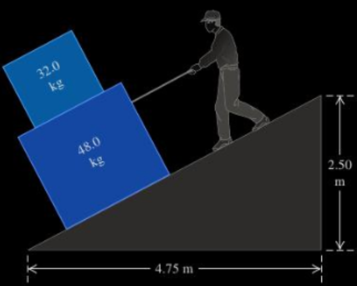
$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_A = \frac{T - 25N}{2{,}5\,k}$$

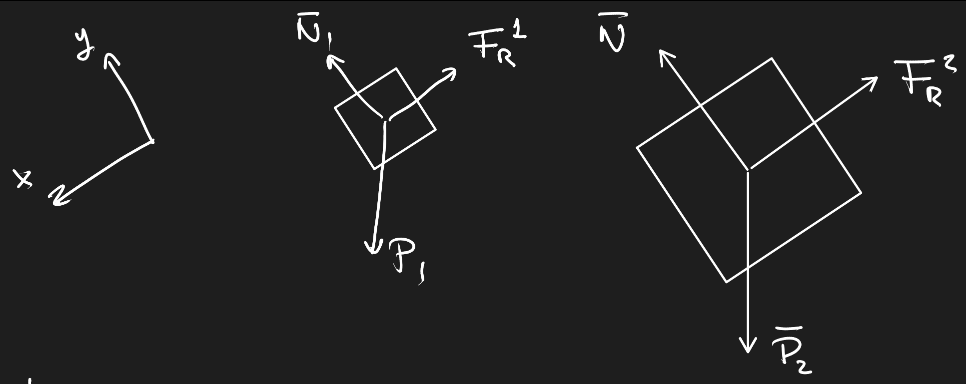
Me quedó Negativo!

?

$$\ddot{x} =$$

(14) Usted está bajando dos cajas, una encima de la otra, por la rampa que se muestra en la figura, tirando de una cuerda paralela a la superficie de la rampa. Ambas cajas se mueven juntas a velocidad constante de 15cm/s. El coeficiente de rozamiento dinámico entre la rampa y la caja inferior es $\mu_d = 0,444$, en tanto que el coeficiente de rozamiento estático entre ambas cajas es $\mu_e = 0,8$. Calcule la fuerza que deberá ejercer para lograr esto y cuál es la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción sobre la caja superior.





Rehacer;

② $\hat{x}: \left(P_x^1 + P_x^2\right) - F_R^2 - T = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x}$

Como MRU : $\ddot{x} = 0$

$\Rightarrow \left(P_x^1 + P_x^2\right) - F_R^2 - T = 0$

$$T = P_x^1 + P_x^2 - F_R^2$$

$F_R^2 \leq \mu_d \cdot |320\ N + 480\ N|$

$F_R^2 \leq 0{,}444 \cdot 800\ N$

$F_R^2 \leq 355{,}2\ N$