Trabajo de una fuerza

El trabajo de una fuerza F se define como:

$\boxed{W = \int_{inicio}^{final} \bar{F} \cdot d\bar{r}}$

donde $d\bar{r}$ representa la dirección de movimiento de la masa. En términos generales, se escribe como $d\bar{r} = dx\ \hat{x} + dy\ \hat{y}$. Notemos que, en este caso, estamos diciendo que la masa se puede desplazar tanto en x como en y, es decir, en el plano xy (independientemente de como hayamos elegido los ejes). Sin embargo, muchas veces la masa se desplaza en una sola dirección (ej. en $\hat{x}$).

Para calcular el trabajo de una fuerza, debemos primero establecer un sistema de referencia y, luego, escribir esa fuerza en el sistema elegido. Después calcular el producto escalar (recuerden que $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$ y $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$) y finalmente realizar la integral. "Inicio" y "final" representan desde donde y hacia donde se desplaza la masa, respectivamente. Es importante mencionar que sólo en los límites de integración se indica el sentido de movimiento (y no en el $d\bar{r}$). Muchas veces conviene escribir a secas "inicio" y "final" y luego de realizar el producto escalar, decir quienes son "inicio" y "final" en las respectivas coordenadas. Por ejemplo, si luego de realizar el producto escalar nos queda un dx, entonces los límites serán entre $x_{inicial}$ y x_{final} (ídem si nos queda dy).

Si bien no es fácil saber si el cálculo del trabajo de la fuerza en cuestión está bien o mal, lo que es fácil es determinar a priori el signo del trabajo. En este sentido, si el objeto se desplaza en el mismo sentido de la fuerza, entonces el trabajo es positivo, en cambio, si lo hace en sentido opuesto será negativo. Por ejemplo, el trabajo del peso cuando la masa está ascendiendo es negativo, mientras que es positivo si desciende.

Notemos que para calcular el trabajo de una fuerza debemos considerar todo el camino realizado por la masa (ya que integramos desde una posición inicial hasta otra final). Sin embargo, el trabajo de algunas fuerzas no depende del camino recorrido sino únicamente de la posición inicial y final. Este es el caso de las fuerzas conservativas, tales como el peso y la fuerza elástica. Sus trabajos son:

$\boxed{W_{peso} = mg|\Delta h|\ cos(\phi)}$

donde $|\Delta h|$ es la diferencia (en módulo) entre la altura inicial y final, y ϕ es el ángulo entre $\bar{P}$ y $d\bar{r}$. En este último caso, si $\phi = 0$ significa W>0 (ej. la masa cae), mientras que si $\phi = \pi$, entonces W<0 (ej. la masa sube).

$W_{elastica} = \frac{1}{2}k(x_i - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_f - l_0)^2$ donde x_i y x_f representan la posición inicial y final, respectivamente (asumí que el resorte está orientado en $\hat{x}$).

Teorema trabajo-energía

El teorema trabajo-energía básicamente nos dice que no toda fuerza acelera (ó desacelera) a una masa (me refiero a cambiar el módulo de la velocidad, recuerden que la velocidad es una magnitud vectorial, por ende, si cambia su dirección también se acelera). Solamente aquella/s fuerza/s que realice/n trabajo sobre la misma lo van a acelerar (en módulo):

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 \ - \ \frac{1}{2}mv_i^2 = \sum_i W_i$$

donde $\sum_i W_i$ representa la suma de los trabajos de todas las fuerzas aplicadas sobre la masa m. Por lo tanto, calculando todos los trabajos realizados por cada una de las fuerzas sobre la masa, podremos conocer si la misma se acelera ($W = \sum_i W_i > 0$), se frena ($W = \sum_i W_i < 0$) ó mantiene su velocidad (W=$\sum_i W_i = 0$). Por este motivo, es fácil saber si una fuerza hace trabajo o no: simplemente nos fijamos si dicha fuerza tiene la capacidad de variar la velocidad de la masa y listo. Si lo hace, entonces hará trabajo (el signo va a depender de si la fuerza lo puede acelerar o frenar).

Energía mecánica:

Teniendo en cuenta el teorema trabajo-energía cinética y que el peso y la fuerza elástica son fuerzas conservativas, podemos simplificar bastante los cálculos. Recordemos que las fuerzas conservativas derivan de una función potencial U (gravitatoria y elástica, respectivamente). ¿Qué significa que derivan de un potencial? Simple, que si calculamos la derivada de ese potencial U (que es simplemente una función) obtenemos (menos) la fuerza correspondiente ($\bar{F} = -\bar{\nabla} U$). Por lo tanto,

$$W = \int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_i^f -\bar{\nabla} U \cdot d\bar{r} = \int_i^f -dU = -(U_f - U_i) = -\Delta U$$

Teniendo en cuenta esto, usamos el teorema de trabajo-energía cinética y nos queda que (asumiendo que hay fuerza peso, elástica, normal, tensión y fuerza de rozamiento dinámica):

$$\boxed{\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W_P + W_E + W_N + W_T + W_{FR} = -\Delta U_G - \Delta U_E + W_N + W_T + W_{FR}}$$

reescribiendo lo anterior, obtenemos que:

$$\boxed{\Delta E_k + \Delta U_G + \Delta U_E = W_N + W_T + W_{FR}}$$

Si separamos lo que corresponde a la situación inicial y final, tenemos que:

$$\boxed{(E_K^f + U_G^f + U_E^f) - (E_K^i + U_G^i + U_E^i) = W_N + W_T + W_{FR}}$$

siendo $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2, U_G = mgy, U_e = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2}$, donde $\boxed{y}$ representa la coordenada vertical de la masa (es decir, su altura respecto al origen de coordenadas). Nuevamente, estoy asumiendo que el resorte se ubica sobre el eje x.

Se denomina energía mecánica $\boxed{E_M}$ a la suma $\boxed{E_K + U_G + U_E}$. Entonces, si $\boxed{W_N + W_T + W_{FR} = 0}$, la energía mecánica se conserva ($\boxed{\Delta E_M = 0}$).

¿Para que nos sirve lo anterior? Ya que si la energía mecánica se conserva, entonces podemos relacionar la energía cinética, la potencial gravitatoria y la potencial elástica de un dado instante (conocido) con otro cualquiera (desconocido). Y así, calcular por ejemplo la velocidad final, la altura final, etc.