Movimiento oscilatorio armónico simple y amortiguado

Contenidos

Objetivos generales

- Estudiar experimentalmente las características del movimiento oscilatorio armónico, tanto simple como amortiguado.
- Aprender a realizar ajustes no lineales por cuadrados mínimos.

Introducción

Todo sistema físico que se encuentra en **equilibrio estable**, oscila al ser apartado de su posición de equilibrio. En general, los sistemas lineales oscilan además en forma armónica, siempre que la perturbación aplicada lo aparte levemente de su posición de equilibrio. En estas condiciones se puede definir una frecuencia de oscilación, que estará completamente determinada por los parámetros del sistema físico en consideración, y será independiente de las condiciones específicas en las que se pone a oscilar el sistema.

PARTE 1. Estudio del movimiento oscilatorio armónico simple y determinación de la constante elástica de un resorte.

Se propone determinar las características de un resorte simple empleando para ello dos métodos experimentales distintos: uno estático y otro dinámico. El protocolo experimental sugerido para implementar dichos métodos se describe a continuación.

Recomendación: para optimizar el tiempo de medición es recomendable que monte el resorte sobre el sensor fuerza fijado al soporte, tal como se muestra en la Figura 1. Cada vez que realice una medición en el método estático, deje oscilar la masa libremente y mida el método dinámico para esta misma; luego prosiga de igual manera para la siguiente masa hasta finalizar la cantidad total de mediciones.

Sensor de fuerza: este sensor trabaja sobre 2 rangos: 10 N y 50 N (de fuerza máxima). Para elegir cuál usar deben estimar previamente el rango de medición en el que se trabajará. Es importante tener en cuenta que el rango elegido también determina la resolución de la conversión analógica/digital. El rango más grande permite medir fuerzas mayores, pero el rango pequeño permite ser más preciso en la medición. Para su uso, busque la calibración por defecto (5 N o 10 N) – búsquela ingresando en "Configurar canales"/"Archivos de calibración por defecto". Estudie si esta calibración es correcta, caso contrario calibre el sensor con dos puntos dentro del rango de trabajo (el sensor es lineal). Grafique en el Origin y obtenga la pendiente y ordenada al origen de la calibración (K1 y K0). Modifique los valores K1 y K0 en el MotionDAQ y aplique los cambios. Corrobore con un peso conocido que la medida sea la apropiada.

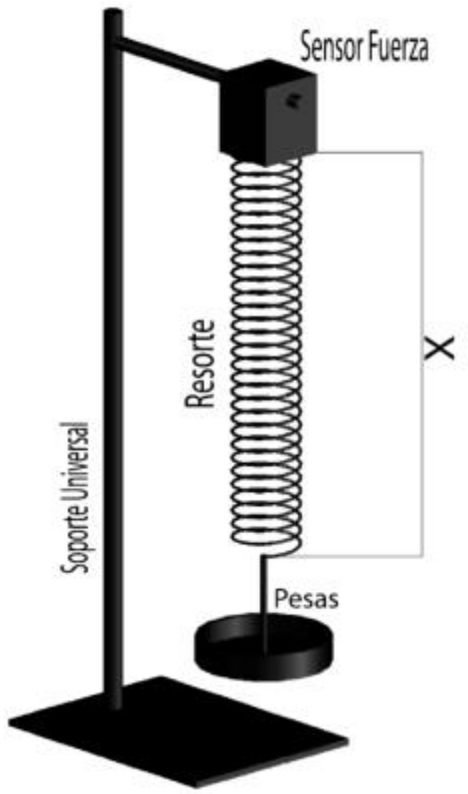

Figura 1. Montaje experimental propuesto la Parte 1.

(a) Método estático

Hallar la posición de equilibrio de un sistema formado por un objeto que cuelga de un resorte, para diversas masas (m) del objeto suspendido. A partir de la dependencia de dicha posición como función de la masa del cuerpo, ecuación (1), se pueden determinar las características del resorte (constante elástica (k)) mediante un ajuste por cuadrados mínimos de los resultados. La elección cuál es la variable dependiente y cuál la independiente dependerá de cuál tenga el mayor error relativo.

$$mg = k(x_{eq} - l_0) \tag{1}$$

Para llevar a cabo estas mediciones puede basarse en los siguientes pasos:

I. Defina y mida la longitud natural del resorte (l_0). ¿Es indistinto si lo hago cuando el resorte está apoyado sobre la mesa (horizontal) o si lo hago en la configuración experimental propuesta?
II. Variando la masa sujeta al extremo libre del resorte mida la diferencia en elongación de este: $dx = (x_{eq} - l_0)$. Determine la cantidad de mediciones necesarias para realizar esta regresión.
III. Realice el ajuste lineal m(dx), o bien dx(m). A partir de los parámetros del ajuste determine la constante k.

(b) Método dinámico

Una vez determinadas las características del resorte, se lo suspende de un sensor de fuerzas que permite registrar una señal proporcional a la fuerza necesaria para sostener el sistema suspendido desde su soporte. En estas condiciones se procede a ponerlo a oscilar para distintas masas fijas y así registrar la lectura del sensor de fuerzas en función del tiempo.

I. A partir del gráfico determine en un intervalo de tiempo N máximos de oscilación (dt). Este representará el período de N-1 oscilaciones. Con este dato defina el período de una oscilación: $T = dt/(N-1)$.
II. Calculando la frecuencia de oscilación a partir del período, $\omega = 2\pi/T$, grafique la dependencia ω(m) o m(ω).
III. Mediante la expresión teórica (ecuación 2) realice un ajuste funcional para determinar k. Para esto puede seguir dos caminos: linealizar la función como se hizo en prácticas anteriores o realizar un ajuste no lineal sobre la función polinómica.
IV. ¿Es la ordenada al origen el valor esperado?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

PARTE 2. Estudio del movimiento oscilatorio armónico amortiguado.

En esta segunda parte se propone estudiar las oscilaciones amortiguadas del sistema masa-resorte, cuando la masa es parcialmente sumergida en un fluido viscoso.

Adjunte una esfera de masa m al resorte y utilice un recipiente apropiado lleno con algún fluido viscoso (por ejemplo, con detergente) para sumergirla de modo tal que la masa quede totalmente inmersa pero no así el resorte. Con este montaje simple se propone llevar a cabo un estudio experimental del movimiento oscilatorio resultante.

¿Qué se espera observar en esta experiencia?

Dado que la viscosidad del fluido que rodea la masa oscilante es ahora mucho mayor que la del aire, esperamos que sus efectos disipativos sean también mayores. La intuición nos dice además que el movimiento oscilatorio se amortiguará más rápidamente que en el aire, aunque desconocemos, a priori, de qué forma y a qué tasa. Es decir, no sabemos a priori si la amplitud de la oscilación decrecerá con el tiempo de forma lineal, cuadrática o logarítmicamente (por citar algunos ejemplos posibles), ni cuánto tiempo tardará el movimiento en extinguirse. El movimiento de la masa está relacionado con la dependencia funcional de la fuerza disipativa con las variables del problema. En el caso de un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido viscoso sabemos que la fuerza de rozamiento F_R es proporcional a la velocidad relativa del cuerpo en el medio v, y de sentido contrario ésta, tal como se muestra en la Ecuación 3,

$$F_R = -b\,v \tag{3}$$

Teniendo en cuenta todas las fuerzas actuantes, podemos expresar la ecuación de movimiento completa como en la Ecuación 4,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4}$$

La Ecuación 5 define la constante de amortiguamiento del fluido.

$$\gamma = b/2m \tag{5}$$

En general, un movimiento amortiguado con una fuerza de este tipo admite, según estudiaron en sus clases teóricas, una clasificación en tres posibles casos: subamortiguado, amortiguado críticamente y sobreamortiguado, según los valores particulares que asuman los parámetros del problema considerado. Si $\gamma^2 < \omega^2$ nos encontramos en el caso de un oscilador subamortiguado; es decir, la fuerza elástica es más importante que la fricción, al menos en algún intervalo de tiempo. En este caso, la solución de la ecuación de movimiento es (Ec. 6):

$$x(t) = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) + x_0 \tag{6}$$

siendo $x(t)$ la posición en función del tiempo t, a la amplitud, b el coeficiente de amortiguamiento, ω la frecuencia angular de oscilación, ϕ la fase inicial y x_0 la posición de equilibrio. La frecuencia angular viene dada por la Ecuación 7.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} \tag{7}$$

Si medimos con el sensor de fuerza vinculado al resorte, podemos reescribir a la fuerza esperada en nuestras mediciones como la dada teóricamente por la Ec. 8, recordando que dicha fuerza viene dada por $F(\mathrm{x}) = -k\Delta x$.

$$F(t) = -kae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) - kx_0 \tag{8}$$

Es decir,

$$F(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) - F_0 \tag{9}$$

Nótese entonces que tenemos ahora 5 parámetros a determinar a través de un ajuste de los datos medidos por el método de cuadrados mínimos. Observe además que dicho ajuste será no lineal, dado que la función a la que buscamos ajustar nuestros datos es **no lineal** en sus parámetros γ, ω, y φ.

El principio de los **ajustes no lineales por cuadrados mínimos** es el mismo que el correspondiente al ajuste lineal que ya se ha empleado en prácticas anteriores. Sin embargo, desde el punto de vista operativo, existe una diferencia esencial: el ajuste no lineal no emplea expresiones analíticas para hallar los valores óptimos de sus parámetros dado que, en general, dichas expresiones no existen. Por lo tanto, los métodos de ajuste no lineal por cuadrados mínimos recurren a métodos de minimización numérica iterativos, a fin de encontrar un conjunto de parámetros que minimice la función de mérito χ2. Es posible (y muy a menudo es el caso) que la función de mérito tenga más de un mínimo (local) y el algoritmo nos entregue valores sin sentido físico. Por ello, es conveniente y recomendable:

1) **Especificar valores iniciales para cada uno de los parámetros buscados.** Dichos valores serán tomados como punto de partida para el algoritmo de minimización, el cuál recorrerá el espacio de parámetros buscando un mínimo. Los parámetros iniciales dados por el usuario deben ser "parecidos" a los finales. Es una buena práctica tratar de ver a ojo cuánto valen estos parámetros, basándose en los datos medidos.
2) **Restringir el dominio en el cual el algoritmo realiza la minimización.** Como ejemplo, considere el coeficiente de amortiguamiento, b. A partir de la ecuación (1), sabemos que dicho parámetro sólo puede tomar valores positivos (valores negativos de b estarían asociados a un incremento de la amplitud de oscilación conforme el tiempo avanza). Teniendo en cuenta esta información, resulta útil y computacionalmente económico especificar también esta condición al momento de establecer la forma en la que se realizará el ajuste no lineal.

En el caso que nos interesa, los valores asociados a los parámetros A, ω y F_0 son fáciles de determinar a partir de las mediciones realizadas en la primera parte de esta práctica.

Utilizando el método dinámico de la actividad 1 con el sensor de fuerza vinculado al resorte, tome registro del movimiento para una única masa. Determine entonces el coeficiente de amortiguamiento b de 3 maneras distintas:

I. Realice un ajuste no lineal de la señal amortiguada utilizando la función SinDamp de Origin y determine de ahí la constante correspondiente.

II. Identifique los picos de la función trigonométrica y obtenga la constante b mediante un ajuste no lineal de estos utilizando la función "ExpDec1", según la Ecuación 10. Puede ayudarse con la herramienta propuesta al final de esta guía para hallar puntos en Origin8.5.

$$A(t) = Ae^{-\gamma t} \tag{10}$$

III. Identifique los picos de la función trigonométrica y obtenga la constante b del ajuste lineal de un gráfico Ln-lineal. (Al final de esta guía esta descripto como cambiar la escala)

Estudie la precisión, exactitud y "utilidad" de cada uno de los métodos propuestos. Si se le ocurre otro, calcule b también por ese método.

Aclaración importante

El gráfico de la señal medida en función del tiempo no siempre queda centrado en el cero, ya sea por una mala calibración o por problemas del software utilizado. En caso de que la fuerza medida por el sensor NO oscile en torno al cero, debe restarle el corrimiento. ¿Cómo hace esto? Calcule el valor medio de la oscilación utilizando "Statistics on Columns" en Origin sobre la columna de Fuerza medida. El valor de la media corresponderá al valor sobre el cual está oscilando, si restamos este valor a toda la oscilación obtenemos la misma dependencia F(t) pero ahora centrado en el cero. Por ejemplo: supongamos que la columna B aloja a los datos de la Fuerza medida por el sensor y la media es 3.14 N. En una nueva columna C utilizamos la herramienta "set column values" y seteamos "Col(C) = Col(B) - 3.14". A partir de ahora puede realizar los ejercicios I, II y III de la actividad 2 obteniendo los comportamientos esperados. ¿Qué ocurre si no realizamos esto? El error en esto se vuelve evidente al realizar el ítem III, ya que estamos agregando a la ecuación 10 un término de offset que no podemos sacarnos de encima al aplicar logaritmo para linealizar, generando así una función NO LINEALIZADA.

Apéndice. Procesamiento en Origin

Como hallar extremos locales de datos de forma manual en Origin 8.5

Con un scatter plot abierto utilizamos la herramienta "Data Reader".

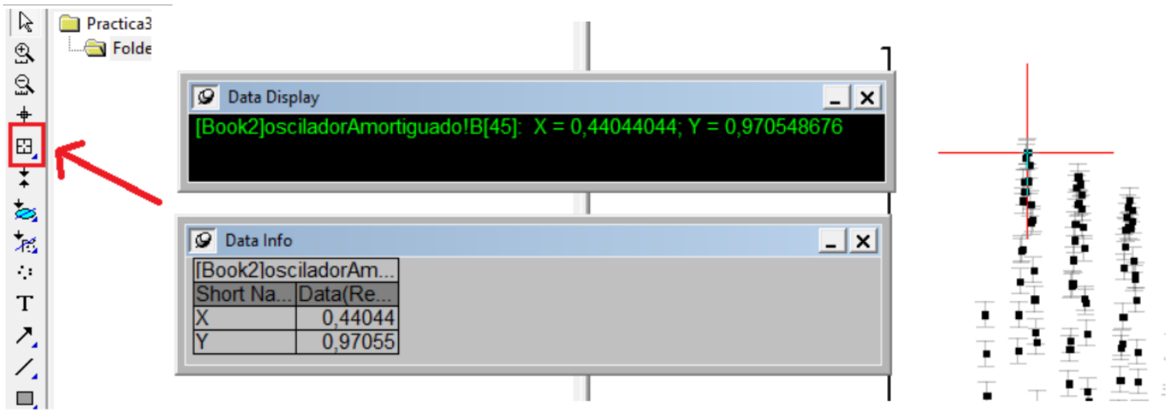

Figura 2: Barra de herramientas para gráficos en Origin 8.5 y displays de la herramienta Data Reader junto a un punto seleccionado

Este nos abrirá dos ventanas que nos indicarán los valores de X e Y al hacer click sobre un punto del gráfico (con las flechas de dirección del teclado podemos desplazarnos de a un punto para analizar más en detalle). Notemos que esta herramienta sirve para cualquier punto en general, no necesariamente extremos.

Cambio de escala en Origin 8.5

Sobre un gráfico podemos realizar cambios en la escala. Por defecto utilizamos escalas lineales pero a veces es útil utilizar otro tipo de escalas, ya sea sobre ambos ejes o sobre uno solo. Para ello realizamos doble click sobre el eje del gráfico y se nos abrirá una ventana de configuración. En la pestaña "Scale" podemos cambiar el tipo de escala ("type") tanto para el eje vertical como para el horizontal.

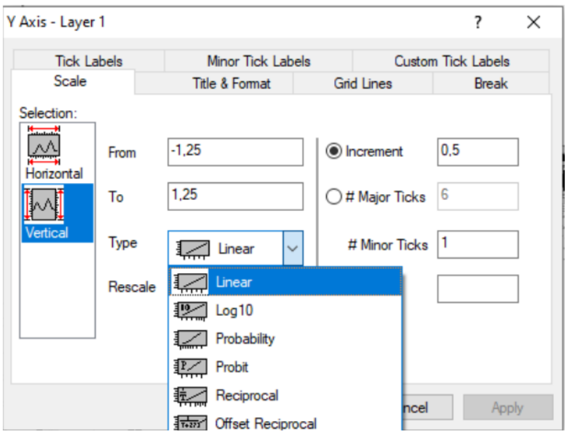

Figura 3: Ventana de configuración de gráficos (Origin 8.5)