

# Movimiento Oscilatorio Armónico Simple y Amortiguado: Determinación de Parámetros y Análisis de Datos

Carreira Leandro Emmanuel, Krick Javier Agustín, Moran Matías Nicolas  
*Laboratorio - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA*

## Resumen

En este trabajo se presenta un estudio experimental detallado del movimiento oscilatorio armónico, tanto en su forma simple como amortiguada. Los objetivos principales son analizar las características de estos movimientos y aplicar técnicas de ajustes lineales y no lineales por cuadrados mínimos para obtener parámetros específicos del sistema. En la primera parte, se investiga el movimiento oscilatorio armónico simple utilizando dos métodos: uno estático y otro dinámico para determinar la constante elástica de un resorte.

El método estático implica medir la elongación del resorte bajo diferentes masas, mientras que el método dinámico registra las oscilaciones del sistema para calcular la frecuencia de oscilación.

En la segunda parte, se estudia el movimiento oscilatorio amortiguado al sumergir una masa en un fluido viscoso, observando el efecto disipativo del fluido sobre la oscilación. Se analizan los datos experimentales para determinar la constante de amortiguamiento y la forma en que la amplitud de la oscilación decrece con el tiempo. Además, se discuten los métodos de procesamiento de datos y ajuste de parámetros, proporcionando una guía detallada para la identificación de extremos locales y la modificación de escalas en los gráficos obtenidos.

## I. Introducción

El estudio del movimiento oscilatorio es fundamental en la física clásica y tiene aplicaciones extensas en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. El movimiento oscilatorio armónico simple (MAS) y el movimiento oscilatorio amortiguado (MAA) representan dos casos esenciales que permiten comprender el comportamiento dinámico de sistemas físicos sometidos a fuerzas restauradoras y disipativas.

El objetivo de este trabajo es estudiar experimentalmente las características del MAS y del MAA utilizando un resorte y diferentes masas y haciendo ajustes de diferentes tipos para calcular los parámetros correspondientes a los 2 movimientos.

Para el MAS, se emplean dos métodos: un método estático que mide la elongación del resorte bajo varias masas y un método dinámico que analiza las oscilaciones del sistema para determinar su frecuencia natural. Estos experimentos permiten la determinación de la constante elástica del resorte.

Para el MAA, se investiga cómo la inmersión de una masa en un fluido viscoso afecta la dinámica del sistema. El análisis de los datos experimentales se enfoca en determinar la constante de amortiguamiento y en comprender la relación funcional entre la fuerza disipativa y las variables del sistema.

El MAS se caracteriza por una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento del objeto desde su posición de equilibrio, resultando en un movimiento sinusoidal con una frecuencia determinada por los parámetros del sistema. La ecuación diferencial que describe el MAS tiene como solución general a la Ecuación 1:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $A$  es la amplitud de la oscilación,  $\omega_0$  es la frecuencia angular y  $\phi$  es la fase inicial.

El MAA, por su parte, incluye además una fuerza de fricción proporcional a la velocidad del objeto, lo que causa una disminución gradual en la amplitud de las oscilaciones, cuyas soluciones pueden ser sobre-amortiguadas, críticamente amortiguadas o sub-amortiguadas. En el caso subamortiguado que veremos en este informe, la solución es:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de amortiguamiento y  $\omega$  es la frecuencia angular del sistema amortiguado y se relaciona con la frecuencia natural mediante la ecuación (3).

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (3)$$

La Ecuación 4 define la constante de amortiguamiento del fluido.

$$\gamma = \frac{b}{2m} \quad (4)$$

Donde b es la constante de viscosidad del fluido.

## II. Desarrollo experimental

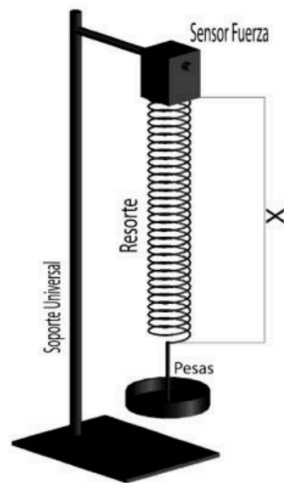
### Parte 1: Estudio del Movimiento Oscilatorio Armónico Simple

En esta sección se propone determinar las características de un resorte simple empleando dos métodos experimentales: uno estático y otro dinámico.

#### Montaje

El resorte se montó sobre un sensor de fuerza fijado a un soporte universal, tal como se ilustra en la **Figura 1**. El sensor de fuerza tiene dos rangos de operación: 10 N y 50 N. Para seleccionar el rango adecuado, se estimó el rango de fuerza en el que se trabajaría basándose en la masa de los objetos que se colgarán del resorte. Se eligió el rango de 10 N para maximizar la precisión, ya que este mejora la conversión a datos digitales.

El resorte era colocado en el sensor y se colocó un plato en la parte inferior del resorte para agregarle pesos desde su máxima extensión. Tanto el soporte como el plato eran rígidos, por lo que consideramos que su componente elástica es despreciable y así poder calcular el componente elástico del resorte. Luego, en los experimentos se midió digitalmente la fuerza a través del sensor de fuerza y el programa MotionDAQ.



**Figura 1:** Esquema experimental. Resorte sujeto al sensor de fuerza en la parte superior y conectado a los distintos pesos en su parte inferior.

## Método Estático

El objetivo es hallar la constante del resorte  $k$  mediante el ajuste lineal de varias mediciones de las magnitudes físicas. Sabiendo que la posición de equilibrio de un sistema formado por el resorte colgado del soporte y este mismo con diversas masas ( $m$ ) según la **Figura 1**. La dependencia de dicha posición como función de la masa del cuerpo se puede expresar mediante la ecuación:

$$mg = k (x_{eq} - l_0) = k dx \quad (5)$$

Donde  $x_{eq}$  es la longitud del sistema del resorte con la masa colgando y  $l_0$  es la longitud natural del resorte colgando

Para llevar a cabo las mediciones primero se definió y midió la longitud natural del resorte  $l_0$  colgado del soporte para evaluar correctamente su posición de equilibrio.

El objetivo de estas operaciones es ajustar las medidas experimentales de la elongación del resorte para que reflejen el desplazamiento relativo a la longitud natural del resorte y, además, calcular los errores combinados en estas medidas. Esto se hace para obtener resultados más precisos y confiables en el análisis de la constante elástica del resorte.

Para esto se realizó un cálculo de propagación de error teniendo en cuenta que

$$dx = x_{eq} - l_0 \quad (6)$$

Y haciendo el cálculo del error:

$$\Delta dx = \sqrt{(\Delta x_{eq})^2 + (\Delta l_0)^2} \quad (7)$$

Luego se usaron varias mediciones de diferentes masas sujetas al extremo libre del resorte y se midió  $x_{eq}$  para cada una y se calcularon las ecuaciones 6 y 7 usando como errores los errores instrumentales del metro.

Para cada experimento, la masa se obtenía a partir de agregar varios pesos de distinta masa e incluyendo el peso del disco y para calcular el error, teniendo en cuenta que se trata de una medida indirecta derivada de la suma de múltiples pesos individuales se calculó que la propagación de errores consiste en

$$\Delta m = \sqrt{n} \Delta m_{ins} \quad (8)$$

donde  $n$  es el número de pesos utilizados y  $\Delta m_{ins}$  el error instrumental de la balanza

El error estadístico no fue considerado, ya que no se hicieron varios pesajes.

En todo el análisis de este documento tomamos como referencia que el Instituto Geográfico Nacional (IGN) <sup>[1]</sup> reporta que el valor de la aceleración de la gravedad es igual a  $(9.797 \pm 0,001) m/s^2$

Luego se realizó un ajuste lineal para estimar **k** usando la **Ecuación 5**

### Método Dinámico

El objetivo es hallar la constante del resorte **k** mediante el ajuste lineal de varias mediciones de magnitudes físicas. Sabiendo que las mismas en un sistema formado por el resorte colgado del soporte y este mismo con diversas masas (*m*) oscilando según la **Figura 1** se relacionan según la ecuación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

Se hizo oscilar distintas masas fijas apoyadas sobre el disco y se registró la fuerza en función del tiempo para cada una.

A partir del gráfico se determinó en un intervalo de tiempo **dt**, **N** picos máximos de la oscilación, donde este representará el período de **N-1** oscilaciones. Se definió el período de una oscilación como:

$$T = \frac{t_f - t_i}{N-1} = \frac{dt}{N-1} \quad (10)$$

Y su error como:

$$\Delta T = \frac{\Delta dt}{N-1} = \frac{\sqrt{(\Delta t_f)^2 + (\Delta t_i)^2}}{N-1} \quad (11)$$

Luego se calcula la frecuencia de oscilación a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (12)$$

Y su error como:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T^2} \Delta T \quad (13)$$

Para analizar la dependencia lineal de las variables  $\omega$  y *m*, se realizaron 3 tipos de ajustes lineales:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ,  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  y  $\frac{1}{\omega^2} = \frac{m}{k}$  calculando sus errores propagados correspondientes

## Parte 2: Estudio del Movimiento Oscilatorio Armónico Amortiguado

En esta parte del estudio, se propuso investigar las oscilaciones amortiguadas del sistema masa-resorte cuando la masa es sumergida en un fluido viscoso. El montaje experimental consistió en una esfera de masa  $m$  adjunta a un resorte y un recipiente apropiado lleno de agua. La configuración es equivalente a la ilustrada en la **Figura 1**, con la excepción de que la masa estaba totalmente inmersa en el agua, mientras que el resorte permanecía fuera del líquido.

La viscosidad del agua que rodea la masa oscilante es mayor que la del aire, lo que se espera incremente los efectos disipativos y acelere la amortiguación del movimiento oscilatorio.

El procedimiento experimental fue el siguiente: primero se sumergió la masa en el agua estirando al resorte fuera de su posición de equilibrio y se registraron las oscilaciones resultantes, las cuales se mantuvieron sumergidas bajo el agua en todo momento. Luego, se analizó la dependencia temporal de la amplitud de las oscilaciones para determinar la constante de amortiguamiento  $\gamma$ . Posteriormente, se compararon los resultados experimentales con las predicciones teóricas y se ajustaron los parámetros correspondientes.

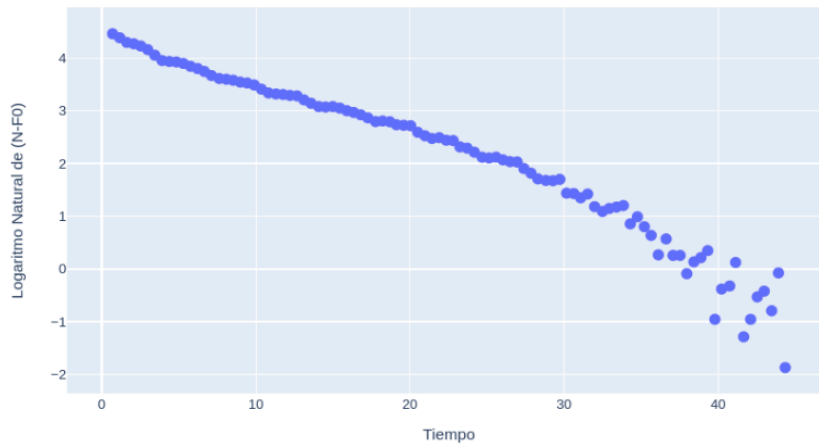
Durante la medición de datos, se calibró el sensor y el MotionDaq mediante un ajuste lineal para que, cuando el resorte estuviera estático, reflejara la masa del peso conectado al resorte. En vez de propagar el error después de calibrar se escogió como error instrumental de los datos medidos por el sensor la menor distancia entre dos mediciones consecutivas, en el peor de los casos, el error se estaría sobreestimando y nunca subestimando.

### Transformaciones de mediciones

Se centró la función en el eje para que su promedio sea 0, así que se calculó  $F_0$  como el promedio de todas las mediciones y se observó que el valor era muy similar al medido cuando el péndulo estaba en equilibrio y se restó este valor a todas las mediciones.

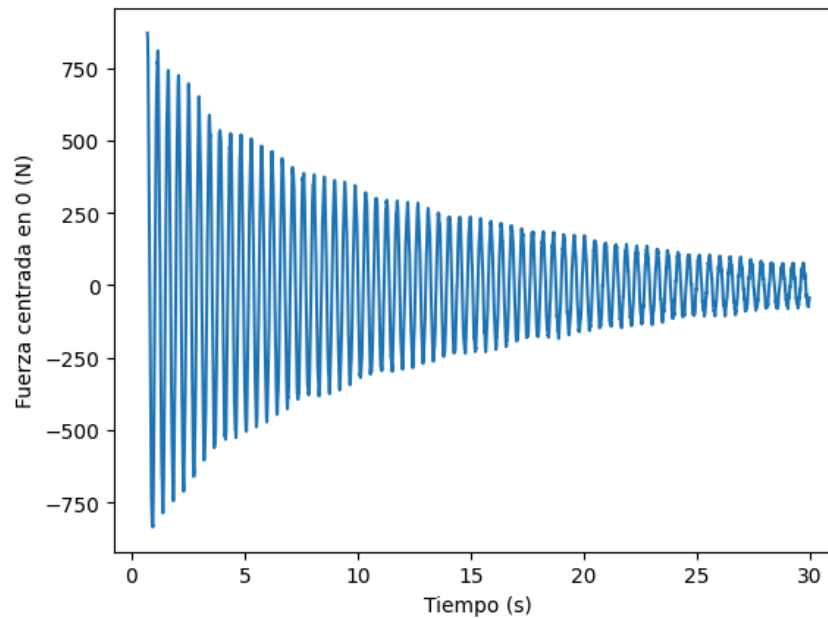
También se optó por eliminar los datos posteriores a los 30 segundos debido a la presencia de ruido en la muestra. Esta decisión podría considerarse como una suposición fuerte, ya que implica eliminar información para. Sin embargo, se observaba a simple vista oleaje en la muestra que probablemente se debía al oleaje generado por la bola al desplazar el agua en el recipiente al oscilar y la ola rebotando en el borde del recipiente y afectando a la bola.

Dado que la ecuación del modelo utilizado para realizar los ajustes y calcular el coeficiente de amortiguamiento no consideran este tipo de fenómenos, se creyó conveniente eliminar preventivamente los datos a partir del momento en que el ruido se hizo evidente. El ruido puede notarse claramente en cuando se linealiza el modelo que utilizaremos tomando los máximos de cada oscilación en la **Figura 3**.



**Figura 3:** Linealización de los máximos de cada oscilación, mostrando un claro aumento de la dispersión a partir de los 30 segundos de medición.

Una vez realizadas todas estas transformaciones podemos ver la gráfica de las mediciones en la **Figura 4**.



**Figura 4:** Gráfico de las mediciones del experimento, centradas en cero.



## Ajustes

Para calcular el coeficiente de amortiguamiento, se realizaron 5 ajustes independientes usando código en Python [2]. En primer lugar, se realizó un ajuste no lineal sobre la totalidad de los datos medidos durante las oscilaciones. En segundo lugar, se realizaron dos ajustes no lineales sobre el decaimiento exponencial, utilizando los picos máximos y mínimos del movimiento oscilatorio. Y en tercer lugar se realizaron dos ajustes lineales linealizando la expresión y utilizando los picos máximos y mínimos.

Luego se estimó el coeficiente de amortiguamiento mediante la **Ecuación 4**.

### Ajuste no lineal con todos los datos:

El ajuste no lineal en el estudio de las oscilaciones amortiguadas implica ajustar los datos experimentales a una función teórica que describe el comportamiento oscilatorio amortiguado. Se ajustó a partir de la ecuación teórica que describe el movimiento oscilatorio amortiguado:

$$F(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) + F_0 \quad (14)$$

Aquí,  $A$  es la amplitud,  $\gamma$  es la constante de amortiguamiento,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\phi$  es la fase inicial y  $F_0$  es la fuerza de la longitud de equilibrio.

El objetivo es encontrar los valores de los parámetros  $A$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $\phi$  y  $F_0$  que mejor ajusten a la función teórica a los datos experimentales.

El ajuste no lineal utiliza un algoritmo de minimización numérica para encontrar valores óptimos de los parámetros, que al no ser parte de una función lineal, no necesariamente existe un único mínimo absoluto. Este algoritmo busca minimizar la diferencia entre los valores experimentales y los valores predichos por la función teórica.

Para realizar el ajuste es necesario elegir algunos parámetros iniciales, proporcionan un punto de partida para el algoritmo de ajuste. Valores cercanos a los reales pueden mejorar la convergencia y evitar mínimos locales.

Dado que los valores podrían ser cualquier número flotante, es necesario limitar el rango de los parámetros, como se observa en la **Tabla 1**. Esto además se hace para asegurar que el ajuste se mantenga dentro de límites razonables y físicamente posibles, aumentando la robustez del ajuste y evitando soluciones no físicas.

Parámetros Iniciales	Rango de los Parámetros
$A = 900 \text{ N}$	$A \in [600, 1000]$
$\gamma = 0.5 \text{ Hz}$	$\gamma \in [0, 1]$
$F_0 = 0 \text{ N}$	$x_0 \in [-10, 10]$
$\omega = 15 \text{ rad/s}$	$\omega \in [0, 30]$
$\phi = 0 \text{ rad}$	$\phi \in [0, 2\pi]$

**Tabla 1:** *Parámetros iniciales y rango de cada uno de ellos utilizados en el ajuste no lineal de la función original.*

Se escogió una amplitud inicial  $A$  de 900 observando el pico de la oscilación con mayor amplitud en el gráfico de las mediciones,  $F_0$  se tomó chico, ya que centramos la función con este valor y los demás valores se tomaron rangos con base en observaciones empíricas de los datos

Los errores obtenidos para cada parámetro se obtuvieron a partir del ajuste

Para considerar los errores en las mediciones de la fuerza se calculó la sensibilidad del sensor y se midió la distancia mínima de fuerza medida entre todos los puntos que son contiguos y se encontró que  $\Delta F = 0.1323 \text{ N}$

Para considerar los errores en las mediciones del tiempo se usó la frecuencia de sampleo  $\Delta T = 0.05 \text{ s}$

### **Ajuste no lineal sobre los máximos:**

La fórmula para el movimiento oscilatorio armónico amortiguado está descrita por la **Ecuación 14**. Cuando lo que está dentro de una función coseno es múltiplo de  $\pi$  (sus máximos y mínimos) el resultado es  $\pm 1$ . Si nos quedamos solo con los máximos, obtenemos la expresión de la ecuación:

$$F_{maxs}(t) = Ae^{-\gamma t} + F_0 \quad (15)$$

Esta función solo modela el decaimiento exponencial de los máximos de la función original, simplificando el ajuste no lineal que se realizó a continuación, reduciendo la cantidad de parámetros y eliminando la función coseno.

Se realizaron 2 ajustes, uno tomando solamente los máximos y otro teniendo en cuenta los máximos y mínimos, para esto invertimos las mediciones de los mínimos y tener el doble de mediciones.

Los parámetros iniciales y el rango de los mismos se especifica en la **Tabla 2**.

Parámetros Iniciales	Rango de los Parámetros
$A = 900 \text{ N}$	$A \in [800, 1000]$
$\gamma = 0.5 \text{ Hz}$	$\gamma \in [0, 1]$
$F_0 = 0 \text{ N}$	$x_0 \in [-10, 10]$

**Tabla 2:** *Parámetros iniciales y rango de cada uno de ellos utilizados en el ajuste no lineal de la función simplificada.*

Los errores obtenidos para cada parámetro se obtuvieron a partir del ajuste

### Ajuste lineal

Aplicando propiedades de exponentes y logaritmos en la **Ecuación 15** se puede linealizar la misma, obteniendo la ecuación:

$$\ln(F_{\text{maxs}} - F_0) = \ln(A) - \gamma t \quad (16)$$

Siendo esta una función lineal de la forma  $y = ax + b$  donde,  $y = \ln(A_{\text{maxs}} - F_0)$ ,  $a = -\gamma$  es la pendiente y la ordenada en origen  $b = \ln(A)$ .

Una ventaja de ajustar linealizando es que el algoritmo ajusta buscando un único mínimo global de errores, sin la existencia de otros mínimos locales. Esto además asegura que no tengamos que establecer parámetros iniciales para comenzar la búsqueda.

Se realizaron 2 ajustes, el primero con los valores de los máximos y el segundo con los valores de máximos y mínimos como en el ajuste anterior

Como en toda regresión lineal se calcularon los errores relativos y se tomó al mayor en el eje y

### III. Resultados y análisis

#### Parte 1: Estudio del Movimiento Oscilatorio Armónico Simple

##### Resultados del método estático

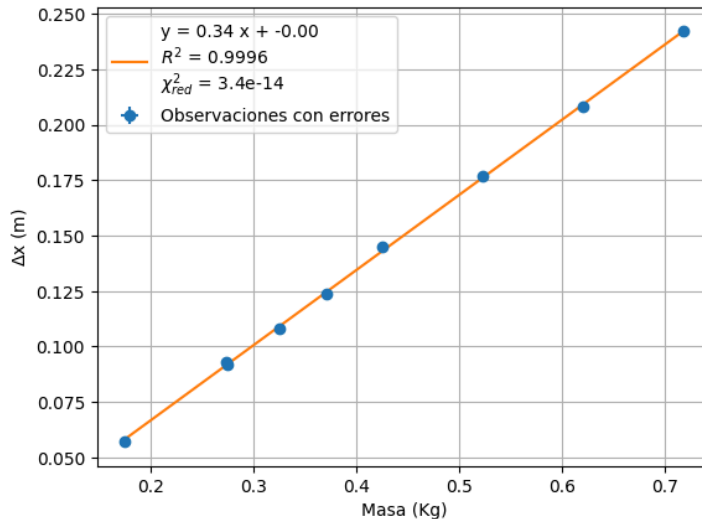
Se realizó el ajuste lineal  $m(dx)$  y a partir de los parámetros del ajuste determinar la constante  $k$ .

Para realizar dicho ajuste fue necesario fijarse cuál variable  $m$  o  $dx$  tiene mayor error relativo, esto lo aplicamos al resto de ajustes lineales por cuadrados mínimos.

De manera que la fórmula para la regresión con base en la **Ecuación 5** quedó  $dx = \frac{mg}{k}$ .

Se encontró que la longitud natural del resorte en horizontal era de  $(307 \pm 1) \text{ mm}$ , mientras que la posición de equilibrio en vertical dio  $(310 \pm 1) \text{ mm}$ , una diferencia de 3 mm producida por el peso del mismo resorte.

El ajuste lineal de la posición de  $\Delta x$  en función de las masas con el método estático **Figura 5** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 3**.



**Figura 5:** Ajuste lineal para el método estático.

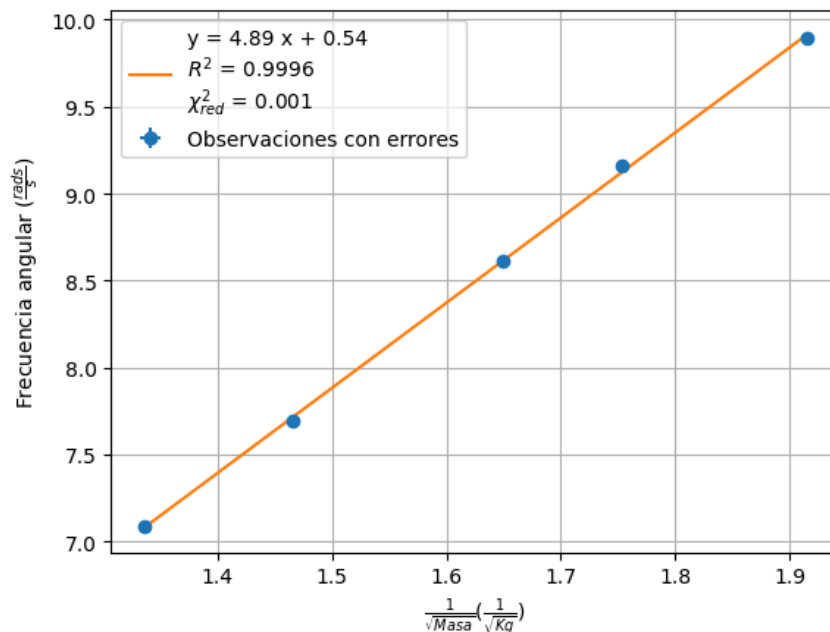
Podemos ver que los errores son muy chicos como para ser apreciables en el gráfico.

Pendiente	$0.34 \pm 0.0028$
Ordenada al origen	$0 \pm 0.0012$
$R^2$	0.9996
$\chi^2$ Reducido	$3.4 * 10^{-14}$
k	$(28.95 \pm 0.24) N/m$

**Tabla 3:** Valores obtenidos a partir del ajuste lineal para el método estático.

## Resultados del método dinámico.

El ajuste lineal de la frecuencia angular  $\omega$  en función de  $\frac{1}{\sqrt{m}}$  de la **Figura 6** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 4**:

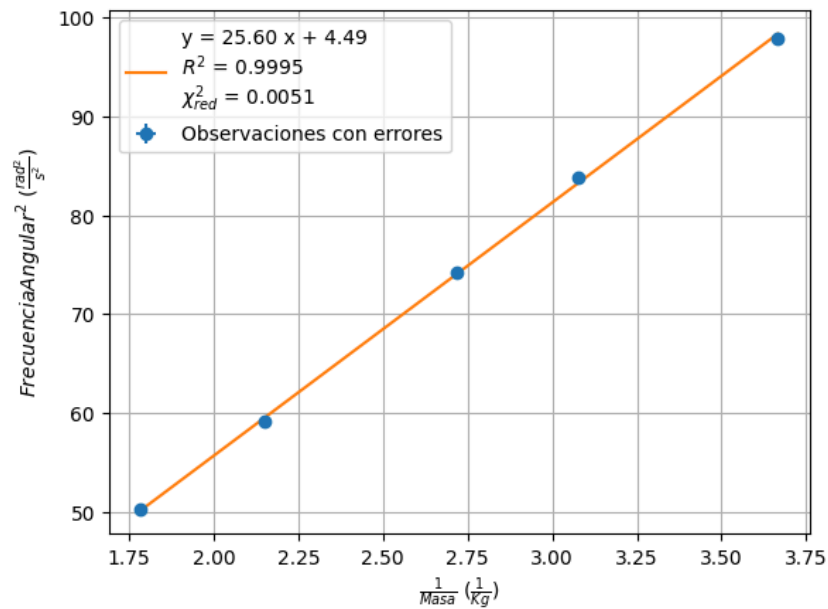


**Figura 6:** Ajuste lineal para el método dinámico  $\omega$  vs  $\frac{1}{\sqrt{m}}$ .

Pendiente	$4.89 \pm 0.015$
Ordenada al origen	$0.54 \pm 0.024$
$R^2$	0.9996
$\chi^2$ Reducido	0.001
k	$(23.94 \pm 0.15) \text{ N/m}$

**Tabla 4:** Valores obtenidos a partir del ajuste lineal para el método dinámico  $\omega$  vs  $\frac{1}{\sqrt{m}}$ .

El ajuste lineal de la frecuencia angular  $\omega^2$  en función de  $\frac{1}{m}$  de la **Figura 7** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 5**:

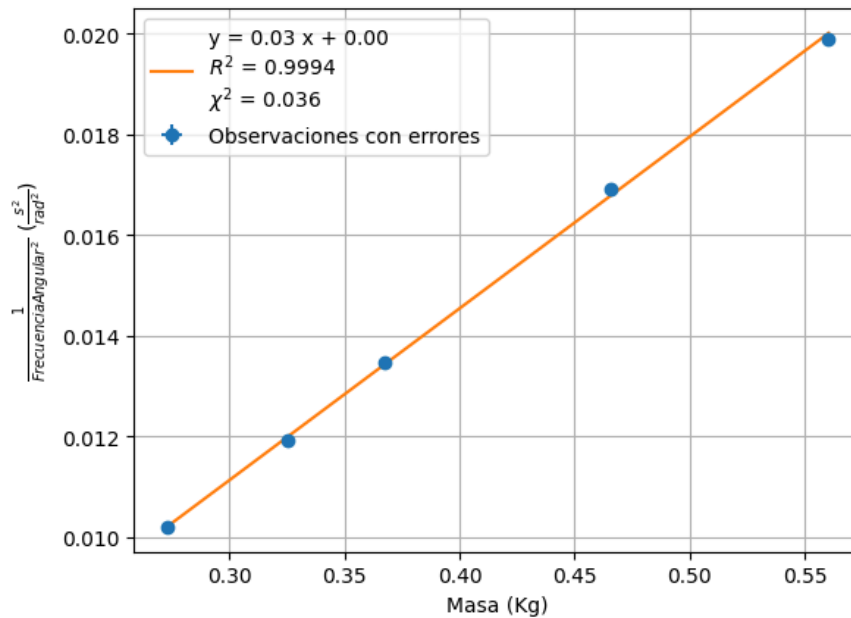


**Figura 7:** Ajuste lineal para el método dinámico  $\omega^2$  vs  $\frac{1}{m}$ .

Pendiente	$25.60 \pm 0.079$
Ordenada al origen	$4.49 \pm 0.20$
$R^2$	0.9995
$\chi^2$ Reducido	0.0051
k	$(25.60 \pm 0.079) N/m$

**Tabla 5:** Valores obtenidos a partir del ajuste lineal para el método dinámico  $\omega^2$  vs  $\frac{1}{m}$ .

El ajuste lineal de la frecuencia angular  $\frac{1}{\omega^2}$  en función de  $m$  de la **Figura 8** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 6**:



**Figura 8:** Ajuste lineal para el método dinámico  $\frac{1}{\omega^2}$  vs  $m$ .

Pendiente	$0.034 \pm 0.000028$
Ordenada al origen	$0.0009 \pm 0.00001$
$R^2$	0.9994
$\chi^2$ Reducido	0.0036
k	$(29.32 \pm 0.024) \text{ N/m}$

**Tabla 6:** Valores obtenidos a partir del ajuste lineal para el método dinámico  $\frac{1}{\omega^2}$  vs  $m$ .



## Discusión sobre el movimiento Oscilatorio Armónico Simple

En base a el cálculo de la constante del resorte **k** usando los ajustes estáticos y dinámicos obtuvimos que los valores de todos los ajustes que realizamos están en el mismo orden de magnitud, lo cual es un buen indicativo de que el valor real se encuentra en ese rango.

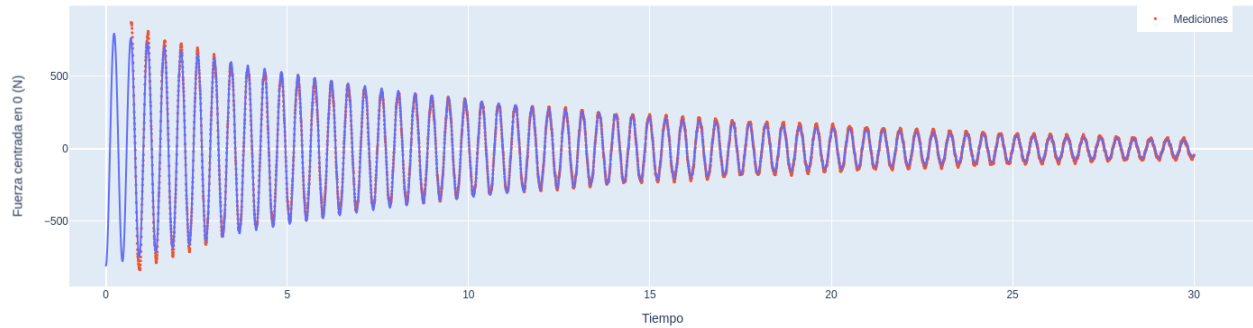
Por otro lado, notamos que de los 3 ajustes dinámicos, el mejor parecería ser el que no realiza transformaciones algebraicas en la variable con menos error relativo ( $m$ ) y si lo hace en la que tiene mayor error ( $\omega$ ), ya que la regresión  $\frac{1}{\omega^2}$  vs  $m$  da un valor más preciso que las otras 2 y además es más cercano al valor de  $k$  calculado por el método estático.

Estático	$(28.95 \pm 0.24) N/m$
Dinámico $\omega$ vs $\frac{1}{\sqrt{m}}$	$(23.94 \pm 0.15) N/m$
Dinámico $\omega^2$ vs $\frac{1}{m}$	$(25.60 \pm 0.079) N/m$
Dinámico $\frac{1}{\omega^2}$ vs $m$	$(29.32 \pm 0.024) N/m$

**Tabla 7:** Valores de  $k$  calculados con los ajustes.

## Parte 2: Resultados del Movimiento Oscilatorio Armónico Amortiguado:

El ajuste no lineal de la fuerza de la **Ecuación 14** usando todos los datos en la **Figura 9** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 8**:

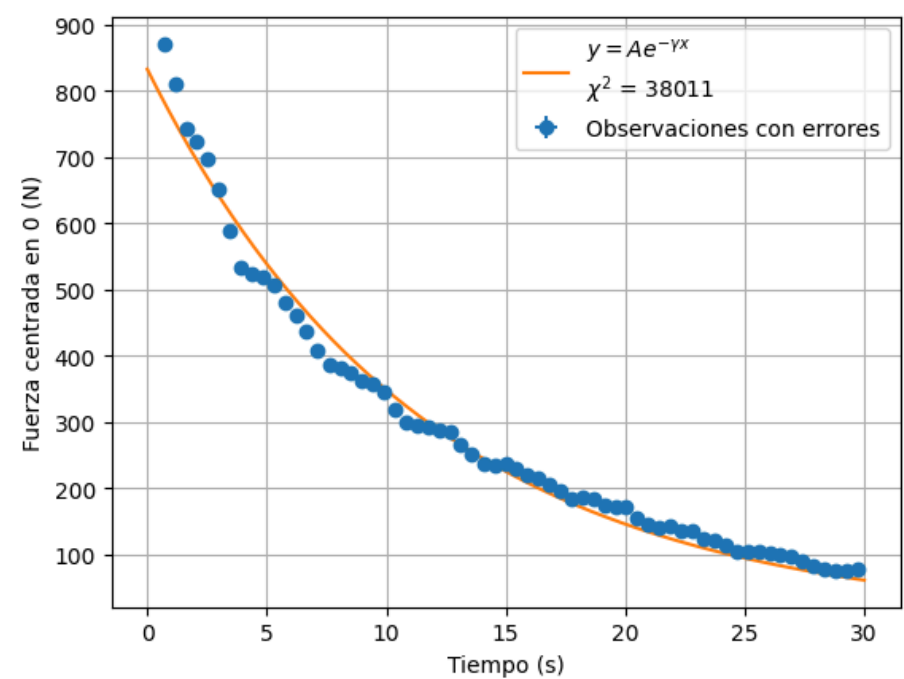


**Figura 9:** Ajuste no lineal usando todos los datos.  
Mediciones en rojo, ajuste en azul.

A	$808.70 \pm 0.0092 \text{ N}$
$\gamma$	$0.088 \pm 0.0000014 \text{ Hz}$
$\omega$	$13.63 \pm 0.0000014 \text{ rad/s}$
$\phi$	$3.18 \pm 0.000011 \text{ rad}$
$F_0$	$0.30 \pm 0.0017 \text{ N}$
b	$0.022 \pm 0.0000017 \text{ Kg/s}$
$\chi^2$ Reducido	0.00000016

**Tabla 8:** Valores obtenidos a partir del ajuste no lineal usando todos los datos.

El ajuste no lineal de la fuerza de la **Ecuación 15** usando solamente los picos máximos en la **Figura 10** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 9**:

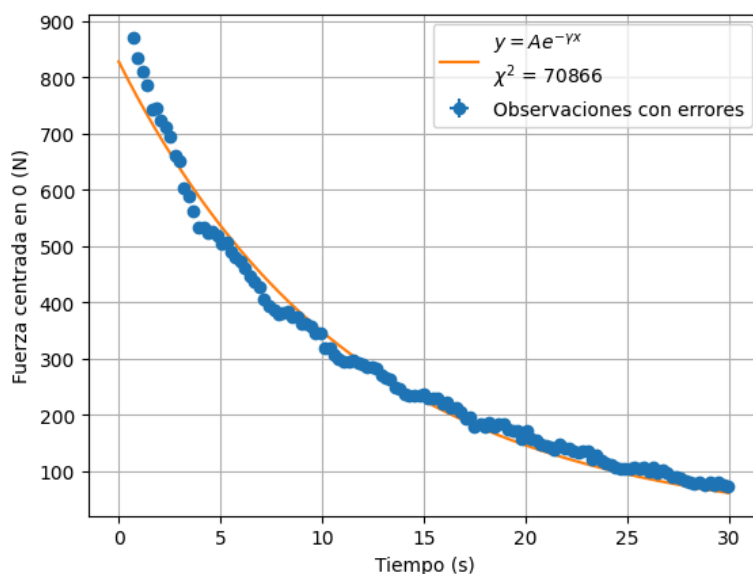


**Figura 10:** Ajuste no lineal usando los picos máximos.

A	832.33 ± 0.0092 N
γ	0.087 ± 0.0000014 Hz
b	0.022 ± 0.0000017 Kg/s
χ <sup>2</sup> Reducido	33650

**Tabla 9:** Valores obtenidos a partir del ajuste no lineal para los picos máximos.

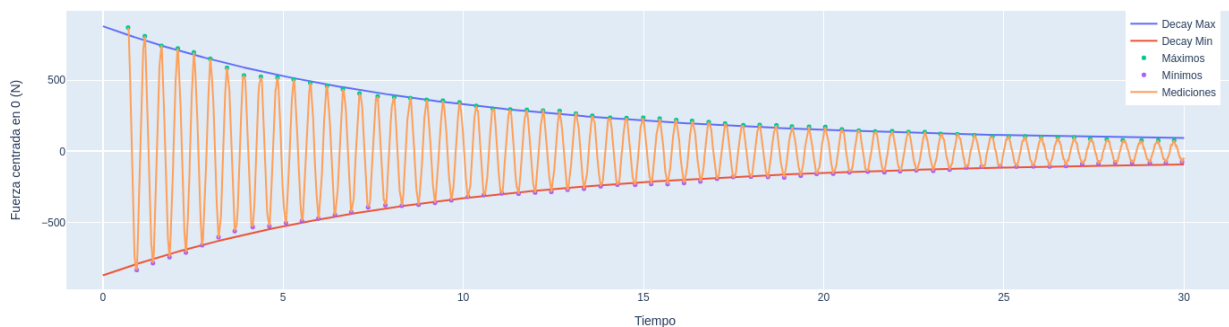
El ajuste no lineal de la fuerza de la **Ecuación 15** usando los picos máximos y mínimos en la **Figura 11** dió como resultado los valores expresados en la **Tabla 10**:



**Figura 11:** Ajuste no lineal usando los picos máximos y mínimos.

A	$827.61 \pm 0.0092 \text{ N}$
$\gamma$	$0.087 \pm 0.0000014 \text{ Hz}$
b	$0.022 \pm 0.0000017 \text{ Kg/s}$
$\chi^2$ Reducido	70866

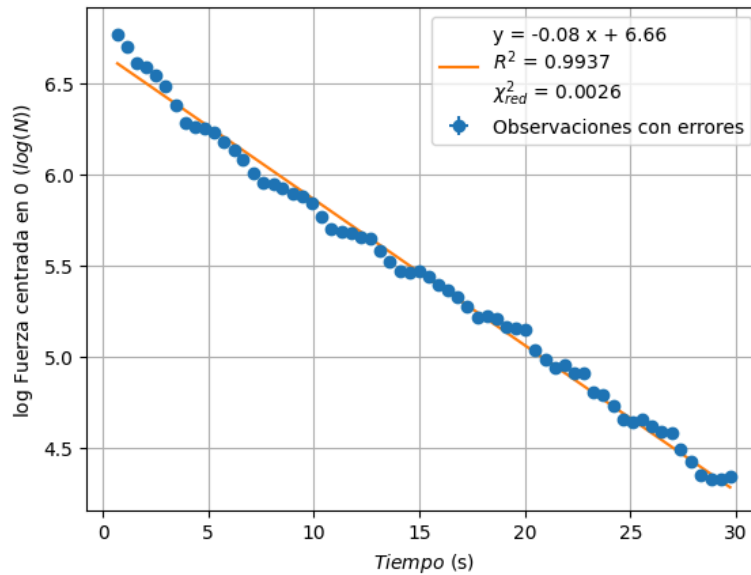
**Tabla 10:** Valores obtenidos a partir del ajuste no lineal para los picos máximos y mínimos.



**Figura 12:** Ajuste del decaimiento exponencial de los máximos y mínimos

## Ajuste lineal con máximos

El ajuste no lineal de la fuerza de la **Ecuación 16** usando los picos máximos en la **Figura 13** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 11**:



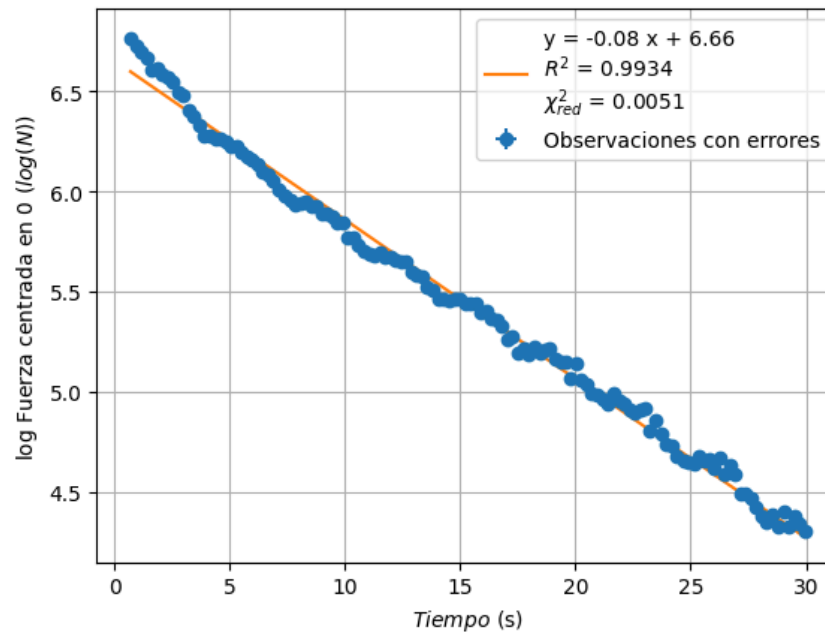
**Figura 13:** Ajuste lineal usando los picos máximos.

Pendiente	$-0.08 \pm 0.00036$
Ordenada al origen	$6.66 \pm 0.0056$
A	$782.18 \pm 4.39 \text{ N}$
$\gamma$	$0.087 \pm 0.0000014 \text{ Hz}$
b	$0.020 \pm 0.000091 \text{ Kg/s}$
$R^2$	0.9937
$\chi^2$ Reducido	0.0026

**Tabla 11:** Valores obtenidos a partir del Ajuste lineal usando los picos máximos.

## Ajuste lineal con máximos y mínimos

El ajuste no lineal de la fuerza de la **Ecuación 16** usando los picos máximos y mínimos en la **Figura 14** dio como resultado los valores expresados en la **Tabla 12**:



**Figura 14:** Ajuste lineal usando los picos máximos y mínimos.

Pendiente	$-0.08 \pm 0.00026$
Ordenada la origen	$6.66 \pm 0.0040$
A	$776.86 \pm 3.11 \text{ N}$
$\gamma$	$0.080 \pm 0.0026 \text{ Hz}$
b	$0.020 \pm 0.000065 \text{ Kg/s}$
$R^2$	0.9934
$\chi^2$ Reducido	0.0051

**Tabla 12:** Valores obtenidos a partir del Ajuste lineal usando los picos máximos y mínimos.

## Discusión sobre el movimiento Oscilatorio Armónico Amortiguado

Observando los **b** calculados con todos los métodos podemos decir que son todos los valores bastante cercanos y están en el mismo orden de magnitud, lo que nos da un buen indicio de que el valor real se encuentra en esos rangos.

Por otro lado, una ventaja del ajuste lineal es que se tiene garantizado que la función va a ajustar reduciendo cuadrados a un mínimo global. Por otro lado, los ajustes no lineales tienen la propiedad de que al ir encontrando un mínimo el algoritmo termina en un mínimo local, pero no se tiene garantizado con que el mínimo va a ser global.

Por otro lado, los ajustes no lineales son más complejo a los lineales, ya que necesitamos analizar la función con todos sus parámetros y estimar en qué valor se encuentran los reales, por otro lado, el ajuste de los picos da un resultado de la misma precisión y tiene menos parámetros a los que ajustar y el método lineal si bien no tiene valores iniciales parece aproximar peor y ser más sensible al ruido, sobre todo esto se veía si dejábamos valores para tiempos más altos.

Ajuste con todos los datos	$0.022 \pm 0.0000017 \text{ Kg/s}$
Ajuste no lineal con máximos	$0.022 \pm 0.0000017 \text{ Kg/s}$
Ajuste no lineal con máximos y mínimos	$0.022 \pm 0.0000017 \text{ Kg/s}$
Ajuste lineal con máximos	$0.020 \pm 0.000091 \text{ Kg/s}$
Ajuste lineal con máximos y mínimos	$0.020 \pm 0.000065 \text{ Kg/s}$

**Tabla 13:** Valores de *b* calculados con los ajustes.

En consecuencia, los ajustes no lineales fueron más precisos, pero dado a la necesidad de tener que determinar varios valores iniciales, puede considerarse que fueron un método menos práctico.

En cuanto a la exactitud, se observó que los modelos podían ajustarse adecuadamente utilizando las ecuaciones teóricas bien contrastadas, lo cual sugiere que el modelo es probablemente bastante exacto. Sin embargo, no pudo calcularse la exactitud con precisión debido a problemas que se marcarán en la siguiente sección.

También se observa que para el ajuste no lineal con los máximos los valores de  $\chi^2$  son bastante altos, aunque la función ajusta bien a los datos.

### **Limitación del estudio sobre el oscilamiento armónico amortiguado.**

Una limitación del estudio es que el movimiento de la bola en el fluido generaba perturbaciones y oleaje que afecta al movimiento mismo de la ola. Las ecuaciones para modelar el sistema no contemplan estas perturbaciones y, por lo tanto, los resultados de este estudio pueden ser inexactos.

También una limitación del trabajo es que no se pudo calcular la exactitud del modelo, dado que para medir indirectamente viscosidad del agua hace falta vincular el coeficiente de rozamiento con otras propiedades del objeto como su resistencia al movimiento en un fluido.

Para futuros estudios se podría medir el diámetro de la bola asumiendo que es una esfera y con la ley de Stokes calcular la viscosidad dinámica del fluido. En caso de que se utilice un objeto que no es una esfera, se necesitaría una fórmula distinta que describa la resistencia al movimiento de esa forma específica en un fluido.

Una vez calculada la viscosidad dinámica del fluido podría compararse con una fuente fiable de la viscosidad del agua y así concluir si este sistema es óptimo para calcular dicha propiedad. Sin embargo, se observó que los modelos podían ajustarse adecuadamente utilizando las ecuaciones teóricas del problema, lo cual sugiere que el modelo es probablemente algo exacto.



## IV. Conclusiones

En este estudio, se realizaron experimentos detallados para analizar las características del movimiento oscilatorio armónico simple (MAS) y amortiguado (MAA) utilizando un resorte.

Para el MAS, los resultados mostraron que la constante elástica del resorte obtenida por ambos métodos es consistente, validando la precisión de nuestras mediciones y análisis. Los errores asociados se encontraron dentro de los valores esperables.

En cuanto al MAA, los datos experimentales permitieron determinar la constante de amortiguamiento y cómo la amplitud de la oscilación decrece con el tiempo. Se realizaron varios ajustes, tanto lineales como no lineales, sobre los máximos y mínimos de las oscilaciones, lo que proporcionó una visión detallada sobre el comportamiento amortiguado del sistema. La comparación de los resultados experimentales pudieron ser ajustadas considerando ecuaciones teóricas, lo que mostró una buena concordancia, validando los modelos utilizados.

En ambos casos, los métodos experimentales y de análisis empleados demostraron ser efectivos para caracterizar las propiedades dinámicas del sistema masa-resorte. Se concluyó que en cuanto a los ajustes para el MAA los ajustes no lineales fueron más precisos y menos prácticos que los ajustes lineales.

Este trabajo no solo refuerza la comprensión teórica de los fenómenos oscilatorios, sino que también establece una base sólida para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas en sistemas físicos similares.

## V. Referencias

[1] IGN:

<https://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Gravimetria/Introduccion#:~:text=Baglietto%20realiza%20mediciones%20absolutas%20de,el%20Sistema%20Potsdam%20a%C3%B1os%20atr%C3%A1s.>

[2] Código interactivo en Python:

<https://colab.research.google.com/github/MatiMoran/Mecanica-y-Termodinamica-2024-1C/blob/matias/laboratorios/Labo05-06/Labo03.ipynb>

Archivos de mediciones:

<https://github.com/MatiMoran/Mecanica-y-Termodinamica-2024-1C/tree/matias/laboratorios/Labo05-06/mediciones>